

Hwan, Kaist MFE

Kim Hyeonghwan

2024-03-08

Table of contents

Welcome!	13
Introduction	14
I 선물옵션('24봄)	15
Chapter 3	17
기본 원리	17
헷징에 대한 논쟁	18
베이시스 리스크	18
교차 헷지(<i>Cross Hedging</i>)	19
주가지수선물	21
스택 앤 롤(<i>Stack And Roll</i>)	22
Appendix : CAPM	22
Chapter 4	23
4.1 이자율의 종류	23
Treasury Rates	23
Overnight Rates	23
Repo rates or RP rates	24
4.2 Reference rates	24
Libor, London Inter Bank Offered Rates	24
The New reference rates	24
Reference rates and Credit risk	25
4.3 The Risk-free rate	25
4.4 Measuring interest rates	25
4.5 Zero-rates	26

4.6 Bond pricing	26
Bond Yield	27
Par Yield	27
4.7 Determining zero rates	27
4.8 Foward rates	28
Foward rates : furthermore	28
4.9 Forward rate agreements	28
4.10 Duration	29
Modified duration	29
Bond portfolios	30
4.11 Convexity	30
4.12 Theories of the term structure of interest rates	31
Chapter 5	32
5.1 투자자산 vs. 소비자산	32
5.2 공매도	32
5.3 Assumptions and Notation	33
5.4 투자자산에 대한 선도가격	33
5.5~6 기초자산의 현금흐름	34
5.7 선도계약의 가치	35
5.8 선도가격=선물가격 ?	36
5.9~12 Cost of Carry 및 다양한 선도/선물가격	37
주가지수선물	37
선도환, 선물환 및 통화선물	38
상품선물	38
5.13 실물인수도에 따른 옵션, Delivery Options	39
5.14 선물가격과 미래 현물가격의 기대값	39
Keynes and Hicks	39
Risk and Return	40
Chapter 7	41
7.1 Mechanics of interest rate swaps	41
7.2 Determining Risk-Free rates	42
7.3~5 Reasons for trading Interest Rate Swaps	42
7.6~7 Valuation of Interest Rate Swaps	43

7.8 Fixed-For-Fixed Currency Swaps	44
7.9~10 Valuation of Fixed-For-Fixed Currency Swaps	45
7.11~13 Other Types of Swaps	45
CDS, Credit Default Swaps	45
Other Interest Rate Swaps	46
Quantos	46
Equity Swaps	46
Options	47
Other Swaps	47
Chapter 10	48
10.1~3 Types, Positions, Underlying Assets of Options	48
10.4~10 Specification of Stock Options	49
Chapter 11	52
11.1 Factors Affecting Option Prices	52
11.2 Assumptions and Notation	53
11.3 Upper and Lower Bounds for Option Prices	53
Upper bound	53
Lower bound for Non-dividend	53
European	53
American	54
11.4~6 Put-Call Parity	55
Parity in American options	55
Effect of Dividends	56
European	56
American	57
Chapter 13	59
13.1 A one-step binomial model and a no-arbitrage argument	59
13.2 Risk-Neutral Valuation	60
13.3 Two-step binomial trees	62
13.5 American Options	62
13.7 Matching Volatility with u and d	63
13.8 The Binomial Tree Formulas	65

13.11 Binomial Trees in various Options	65
Options on Stocks & Stock indices with continuous dividend	65
Options on Currencies	65
Options on Futures	66
Chapter 14	67
14.1 The Markov Property	67
14.2 Continuous-time Stochastic Processes	67
Wiener Process	68
Generalized Wiener Process	68
Ito's Process	71
14.3 The Process for a Stock Price	71
14.6 Ito's Lemma	72
14.7 Application of Ito's Lemma	73
Forward Contract	73
The Lognormal property	73
선물옵션 HW(~midterm)	74
Chapter3	74
Problem 3.4 (Hedging with Futures)	74
Problem 3.24 (CAPM)	74
Problem 3.25 (Changing Beta)	75
Chapter4	76
Problem 4.2	76
Problem 4.14	76
Problem 4.29	77
Problem 4.39	78
Chapter5	78
Problem 5.1	78
Problem 5.7	79
Problem 5.10	79
Problem 5.24	80
Chapter7 : Swap	81
Problem 7.1	81
Problem 7.4	82

Problem 7.8	84
Problem 7.21	85
Problem 7.22	86
Problem 7.extra1	87
Problem 7.extra2	88
Chapter10 : Mechanics of Options Markets	89
Problem 10.3, 10.13	89
Chapter11 : Properties of Stock Options	91
Problem 11.5, 18, 23, 24, 25	91

II Python('24봄) 93

1 Python Basics	94
1.1 Values and Variables	94
1.1.1 - Values	94
1.1.2 - Variables	95
1.1.3 - Variable names	96
1.2 Core Data Types	96
1.2.1 - Floating Point(float)	96
1.2.2 - Complex	97
1.2.3 - Integer	97
1.2.4 - Boolean(bool)	97
1.3 Operators	98
1.3.1 - Arithmetic Operators	98
1.3.2 - Relational Operators	99
1.3.3 - Assignment Operators	99
1.3.4 - Logical Operators	99
1.4 Python Operators Precedence	100
1.4.1 - Python Operators Precedence	100
1.5 Mathmatical Function	100
1.6 Python I/O	101
1.6.1 - Python Output	101
1.6.2 - Python Input	102

2 Containers	103
2.0.1 - Accessing Values in Strings	103
2.0.2 - String operations	104
2.0.3 - Built-in string function and methods	105
2.0.4 - Immutable String	107
2.1 Lists	107
2.1.1 - Accessing Items in lists	108
2.1.2 - Updating Lists	110
2.1.3 - Basic List Operations	110
2.1.4 - Built-in List Functions and Mothods	111
2.1.5 - Coping List	113
2.2 Tuples	114
2.2.1 - Accesing values in tuples	115
2.2.2 - Updating Tuples	115
2.2.3 - Basic tuples operations	116
2.2.4 - Built-in tuple functions and methods	117
2.3 Dictionaries	118
2.3.1 - Accesing values in dictionary	119
2.3.2 - Updating dict	119
2.3.3 - Basic dict operations	119
2.3.4 - Bulit-in dict functions and methods	120
2.3.5 - Coping Dictionary	122
2.4 Sets	122
2.4.1 - Accesing or Updating items in a Set	123
2.4.2 - Basic sets operation	123
2.4.3 Warning!	123
3 Control Flows	125
3.1 Statements & Comments	125
3.2 if Conditionals	125
3.3 Loops - for loop	127
4 Functions	130
5 Numpy	132

금융공학프로그래밍3, Quiz1	138
1. Calculate the following	138
(1) 근의 공식 코드 작성	138
(2) 정규분포 확률밀도함수 코드 작성	138
2. Why the error occurs?	139
(1) Input error	139
(2) Range error	139
(3) method error	139
3. String	139
(1) ‘+’를 이용해서 ’ABCDFFFDCBA’ 만들기	140
(2) A의 개수	140
(3) ’FFF’를 반환하는 4가지 다른 표현식	140
(4) ’ABCDAAADCBA’로 수정하기	140
(5) 소문자로 모두 바꾸기	141
4. Why the error occurs?	141
(1) slicing 반환 형식	141
(2) 단일 원소 tuple 표현	141
(3) 변수 할당 labeling vs. copy	141
(4) Key값은 Immutable 해야함	142
(5) slicing&indexing for Dict	142
5. List	142
(1) indexing, slicing	142
(2) ‘+’ 활용	143
(3) remove method	143
(4) insert method	143
6. list2	144
(1) append method	144
(2) sorting list	144
(3) slicing and replacing	144
7. tuple	144
(1) sorting tuple via translate to list	145
(2) basic operation	145
(3) concatenating tuple	145

금융공학프로그래밍3, Quiz2	146
1. Dictionary	146
(1)	146
(2)	146
2. Dictionary2	147
(1)	147
(2)	147
(3)	147
(4)	148
3. if statement	148
4. for loop	148
금융공학프로그래밍3, Quiz3	149
1. Calculate the following by using ‘while’ loop.	149
2. List comprehension	149
(1) Cartesian product	149
(2) Cartesian product with condition	150
3. Function	151
4. Explain why the error occurs	151
금융공학프로그래밍3, Quiz4	153
1. Find out which one of following is wrong?	153
2.	154
3.	154
4.	154
5.	155
Python Midterm	156
Problem 1.	156
(1)	156
(2)	157
(3)	159
Problem 2.	160
(1)	160
(2)	162

III 채권분석('24봄)	164
채권분석 과제1	165
1. CB	165
2. FRN	165
3. YTM	166
4. Continuous compounding	167
5. Arbitrage	167
채권분석 과제2	169
1. Callable bond	169
2. Spot rate	170
3. Forward rate	173
4. Continuous compounding - Forward rate	175
5. Pricing convention - full price	176
채권분석 과제3	178
Question 1	178
Answer	178
Question 2	179
Answer	179
Question 3	180
Answer	180
Question 4	181
Answer	182
Question 5	182
Answer	183
IV 투자분석('24봄)	184
투자분석 과제1	185
Question	185
문제풀이	185
(a) 주식 선정	185
(b) 무위험이자율 및 리스크프리미엄	186
(c) CAPM	189

(d) PVGO	192
(e) Find V_0 , V_1	196
(f) Find the expected rate of return for each stock	197
(g) Which stock is the best?	197
투자분석 과제2	199
Problems	199
Answer	200
V 재무회계('24봄)	212
재무회계 Ch1-3 과제	213
(1) Quetion 1-31	213
<i>Answer</i>	213
(2) Quetion 1-34	214
<i>Answer</i>	214
(3) Quetion 2-10	215
<i>Answer</i>	215
(4) Quetion 3-12	218
<i>Answer</i>	218
재무회계 Ch4 과제	220
(1) Quetion 4-9	220
(2) Quetion 4-15	221
재무회계 Ch5 과제	223
(1) Question 5-12	223
(2) Question 5-18	224
재무회계 Ch6 과제	226
VI 경영통계분석('24봄)	230
경영통계분석 과제1	231
1. Type of variables	231
2. Discrete data	232

3. Histogram	235
4. Sample Statistics	236
경영통계분석 과제2	239
Question 1	239
Question 2	240
Question 3	242
Question 4	243
Question 5	245
Question 6	246
Question 7	246
경영통계분석 과제3	247
Question 1	247
Answer	247
Question 2	248
Answer	248
Question 3	249
Question 4	250
Answer	250
Question 5	251
Answer	251
경영통계분석 과제4	253
Problem 1.	253
Answer	253
Problem 2.	254
Answer	254
Problem 3.	254
Answer	255

Welcome!

안녕하세요.

카이스트 MFE 24학번 김형환입니다.

Introduction

소개글을 몇자 적어볼 예정

Part I

선물옵션('24봄)

류혁선 교수님의 선물옵션 수업입니다.

교재를 요약하는 숙제가 있어 챕터별로 페이지를 나눠 요약하려고 합니다.

Chapter 3

선물을 이용한 헷징전략

(Hedging Strategies Using Futures)

기본 원리

기관이나 개인이 선물을 이용하여 리스크를 헷지한다는 것은, 기본적으로 자신이 보유한 포지션이 지닌 가격변동위험과 반대 방향의 가격변동위험을 가진 선물계약을 보유하는 것을 의미합니다.

즉, 현재 A회사의 포지션이 원달러 환율에 의한 가격변동위험에 노출되어 있어 향후 3개월간 달러당 환율이 1원 오를 때 1억원의 손실을 입는 구조라면 달러당 환율이 1원 오를 때 1억원의 이익이 발생하는 3개월 만기 선물계약을 보유하면 됩니다.

이렇게 되면, 향후 3개월간 달러당 환율이 10원 올라 나의 포지션에서 10억원의 손실이 발생하더라도 선물계약에서 10억원의 이익이 발생하여 손익이 상쇄(offset)됩니다. 따라서 선물계약을 체결한 시점 이후의 가격변동위험은 “0”이기 때문에 A회사가 체감하는 환율의 실질가격(realized price, effective price)은 3개월간 선물계약의 체결가격으로 고정(lock)됩니다. 이러한 과정을 “헷징”이라고 합니다.

❶ 매도 헷지 vs. 매수 헷지

헷지 과정에서 선물을 매도하는 경우 매도 헷지(Short Hedges), 매수하는 경우 매수 헷지(Long Hedges)라고 합니다.

매도 헷지는 특정 자산을 미래시점에 매도할 예정으로, 자산의 가격하락위험 회피를 목적으로 선물을 매도하여 가격이 하락하더라도 선물계약에서 이익이 발생하도록 하는 헷지 방법입니다. 주로 원자재 생산자, 수출업자 등 현재 자산을 보유하고 있거나 보유할 예정으로 이를 판매할 목적인 경우 활용합니다.

매수 헷지는 특정 자산을 미래시점에 매수할 예정으로, 자산의 가격상승위험 회피를 목적으로 선물을 매수하는 헷지 방법입니다. 주로 원자재를 이용하여 상품을 제조하는 제조업자, 수입업자 등 미래에 특정 자산을 구매할 목적인 경우 활용합니다.

헷징에 대한 논쟁

회사가 본인이 직면한 리스크를 최소화할 수 있다는 점에서 헷징의 중요성과 필요성은 명확합니다. 파생상품을 이용하여 적은 비용으로 리스크를 최소화하고, 본연의 경영활동에 집중할 수 있기 때문입니다. 그러나, 실제로 헷징이 완벽하게 이루어지는 경우는 많지 않은데, 여기에는 다양한 이유들이 있습니다.

- **헷징과 주주** : 회사가 직면한 리스크에 대해서, 대개 주주들은 이를 인지하고 직접 헷지하거나 포트폴리오를 다변화하여 관리합니다. 이 경우, 회사의 리스크 헷지를 주주들이 원하지 않을 수 있습니다.
- **헷징과 경쟁자** : 산업군 내 경쟁자가 존재하고, 모든 경쟁자가 헷징을 하지 않는 경우 헷징이 경쟁에 불리하게 작용할 수 있습니다. 내가 헷징을 하지 않으면 가격변동위험에 노출되지만, 다른 경쟁사도 동일 위험에 노출되므로 경쟁력에는 영향이 없습니다. 반대로, 나만 헷징하는 경우 가격변동위험은 최소화되지만 향후 가격이 유리하게 변동하여 선물계약에서 손실이 발생한다면, 나에게만 손실이 발생하므로 경쟁력이 약화될 수 있습니다.
- **헷징과 손익** : 선물을 이용한 헷징은 미래가격을 선물가격으로 고정시켜 가격변동위험을 없애는 것입니다. 향후 가격변동으로 인해 선물계약에서 이익이 발생할 수도, 손실이 발생할 수도 있습니다. 하지만, 때때로 의사결정자 또는 주주들은 헷징으로 인해 선물에서 평가손실이 발생하면 이를 납득하지 못하곤 합니다. 모든 의사결정자와 주주가 파생상품 메커니즘을 정확히 이해하기는 어렵기 때문입니다.

베이시스 리스크

선물을 이용한 헷징은 내가 보유한 자산에 대한 선물을 내가 헷지하고자 하는 기간에 대해 내가 보유한 수량만큼 매수하거나 매도하는 방식으로 이루어집니다. 하지만, 실제로 정확한 헷징은 매우 어렵습니다.

1. 선물의 기초자산과 보유한 자산이 완벽히 동일해야 합니다.
 2. 내가 보유한 자산을 언제까지 헷지할 것인지 정확히 알아야 합니다.
 3. 헷징 종료일과 선물 만기일이 항상 동일하지 않습니다. 이 경우, 헷징 종료시 선물계약을 처분해야합니다.
- 상기 이유들은 베이시스 리스크를 발생시키는 원인이 됩니다.

- **베이시스(Basis)** : 베이시스란, 기초자산의 가격에서 선물가격을 차감한 값을 말합니다.

$$\text{Basis} = \text{Spot price} - \text{Futures price}$$

선물의 본질을 고려할 때, 선물가격은 현물가격과 유사하게 형성되며 만기일에는 현물가격으로 수렴하는 것을 직관적으로 알 수 있습니다. 따라서, 베이시스는 0을 중심으로 움직이다가, 선물 만기일이 가까워지면서 0으로 수렴하게 됩니다.

선물을 이용하여 헷지하는 경우, 일반적으로 선물 만기일 이전에 헷지를 종료하게 됩니다. 이때, 헷지종

료시점에 선물가격(F_t)은 현물가격(S_t)과 다르므로 그 차이($B_2 = F_2 - S_2$)만큼 예기치 못한 손익이 발생합니다. 이를 베이시스 리스크라고 합니다.

만약, 선물의 기초자산과 보유한 자산이 정확히 일치하지 않는 경우 헛지종료시점의 기초자산가격과 보유한 자산의 가격의 차이($S_t^* - S_t$)만큼 추가적인 손익이 발생합니다. 즉, 베이시스 리스크가 확대되며 이러한 헛지를 교차헷지라고 합니다.

- **선물계약 선택** : 베이시스 리스크 최소화를 위해서는 내가 보유한 자산과 정확히 일치하거나 거의 유사한 ($corelation \approx 1$) 기초자산의 선물을, 헛지종료시점을 기준으로 가장 가까운 만기의 선물을 선택하는 것이 유리합니다. 다만, 실제로는 선물 유동성이 최근월물 위주로 형성되므로, 최근월물을 롤오버하는 방식이 많이 사용됩니다.

교차 헛지(*Cross Hedging*)

교차 헛지는 내가 보유한 자산과 선물의 기초자산이 같지 않은 경우를 말합니다. 항공사가 항공기 제트연료 가격 헛지를 위해 등유선물을 이용하는 것을 예로 들 수 있습니다.

헷지비율(hedge ratio)은 보유자산의 명목금액 대비 선물계약의 명목금액의 비율로, 일반적으로 가격변동위험 최소화를 위해 1이 되도록 설정합니다.

그러나, 교차 헛지를 해야하는 경우 헛지비율을 1로 설정해도 가격변동위험을 최소화되지 않을 수 있습니다. 이 경우, 보유 포트폴리오의 변동성이 최소화되는 헛지비율을 설정해야 합니다.

- **헷지비율 계산** : 먼저, 보유자산의 가격을 S , 선물가격을 F , 헛지비율을 h 라고 하고 S 와 F 간에 선형성이 존재한다고 가정하면, 가격의 증분 ΔS 와 ΔF 를 아래와 같이 표현할 수 있습니다.

$$\Delta S = a + b\Delta F + \epsilon$$

이때, h 만큼 매도헷지를 실행한 포트폴리오 가격의 증분은,

$$\Delta S - h\Delta F = a + (b - h)\Delta F + \epsilon$$

포트폴리오의 변동성 최소화를 위해서는 $h = b$ 임을 쉽게 알 수 있습니다.

따라서, 선형회귀분석으로 추정한 계수 b 가 최적 헛지비율(h^*)이 됩니다.

$$h^* = b = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$$

이를 통해 보유자산과 선물 기초자산이 동일한 경우($\rho = 1, \sigma_S = \sigma_F$)의 최적헷지비율은 1이 되며, 선물의 가격이 현물의 2배 민감도로 움직일 때($\sigma_F = 2\sigma_S$) 최적헷지비율이 0.5가 되는 것을 이해할 수 있습니다.

- **최적 계약 수** : 보유자산의 수량을 Q_A , 선물 1계약의 수량을 Q_F , 최적헷지비율을 h^* 라고 하면, 최적헷지를 위한 선물계약 수 N^* 는,

$$N^* = \frac{h^* Q_A}{Q_F}$$

i 최적헷지비율 및 계약수 예시

제트연료 가격의 변동성을 $\sigma_A = 0.1$, 등유선물 가격의 변동성을 $\sigma_F = 0.2$, 제트연료와 등유선물 가격간 상관계수를 $\rho = 0.8$ 라고 하고, 헷지대상 제트연료가 200만 갤런 및 CME등유선물이 1계약당 4만갤런이라고 하자. 그러면,

$$h^* = 0.8 * \frac{0.1}{0.2} = 0.4$$

$$N^* = 0.4 * \frac{2,000,000}{40,000} = 20\text{contract}$$

- **일일정산의 영향** : 현재까지는 일일정산이 없다고 가정하였으나, 실제 선물을 거래할 때는 오늘 선물의 종가로 보유선물계약을 평가하여 하루단위로 손익을 정산하고 있습니다.

일일정산 반영을 위해 앞선 수식을 일수익률을 기준으로 정리해보겠습니다. 보유자산 가격의 일수익률의 표준편차를 $\hat{\sigma}_S$, 선물가격의 일수익률의 표준편차를 $\hat{\sigma}_F$, 현물 및 선물의 일수익률간 상관계수를 $\hat{\rho}$ 라고 하면,

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} = \hat{\rho} \frac{\hat{\sigma}_S S}{\hat{\sigma}_F F}$$

$$N^* = \frac{h^* Q_A}{Q_F} = \hat{\rho} \frac{\hat{\sigma}_S S Q_A}{\hat{\sigma}_F F Q_F}$$

이제, 실제 가격변화를 사용한 최적헷지비율 h^* 대신 일수익률을 이용한 최적헷지비율을 \hat{h}^* 라고 하면, 아래와 같이 정리할 수 있습니다.

$$\hat{h}^* = \hat{\rho} \frac{\hat{\sigma}_S}{\hat{\sigma}_F}, N^* = \frac{\hat{h}^* V_A}{V_F} = \frac{\hat{h}^* A Q_A}{F Q_F}$$

i 최적헷지비율 및 계약수 예시2

제트연료 가격이 1.1, 등유선물 가격이 1.2, 제트연료와 등유선물 일수익률간 상관계수를 $\hat{\rho} = 0.8$ 라고 하고, 헷지대상 제트연료가 200만 갤런 및 CME등유선물이 1계약당 4만갤런이라고 하자. 그러면, 하루 헷지에 필요한 최적수량은

$$N^* = 0.8 * \frac{2,000,000 \times 1.1}{40,000 \times 1.2} = 36.67$$

주가지수선물

주가지수란, 주식 포트폴리오의 수익률을 추정하도록 설계한 지수를 말합니다. 일반적으로 구성종목을 정한 후, 동일한 비중 또는 시가총액(유통주식수*주가)비율로 비중을 정하는 방식을 차용합니다. 보통 배당은 반영하지 않아 자본손익만을 추종하며, 구성종목의 주가 변동에 따라 지수의 구성비중이 실시간 변동하는 특징이 있습니다.

- 주요 지수 : 미국의 대표적인 주가지수로는 다우존스30(DJIA), S&P500, Nasdaq100 등이 있고 중국의 CSI300 및 국내는 KOSPI200, KOSDAQ150 등이 있습니다.
- 주식 포트폴리오 헛지 : 주가지수선물을 이용하여 주식 포트폴리오를 헛지할 때, 포트폴리오의 가치를 V_A , 주가지수선물 1계약의 가치를 V_F , 해당 지수에 대한 포트폴리오 베타를 β 라고 하면 최적계약 수는 아래와 같습니다.

$$N^* = \beta \frac{V_A}{V_F}$$

만약 헛지기간 중 베타가 변동하는 경우, $(\beta - \beta^*) \times \frac{V_A}{V_F}$ 만큼 선물계약을 조정해야 합니다.

- 주식 포트폴리오를 헛지하는 이유 : 원문 책의 Table3.4를 참조하면, 주식포트폴리오 헛지를 통해 가격변동위험을 통제하고 나면 투자자가 얻는 수익은 무위험이자율 수준입니다.
여기서 한가지 근원적인 의문이 발생합니다. 이자율 정도의 수익은 은행에 돈을 넣어두면 생기는데, 왜 주식포트폴리오를 매수하고 번거롭게 선물로 헛지하는 일을 해야하는거지?
이에 대한 답으로는 “시장 전체의 위험(market risk)는 헛지하고 포트폴리오의 초과 수익(α)만 얻고 싶은” 경우, “포트폴리오를 장기간 보유할 계획이나, 단기적으로 가격변동에 대한 헛지가 필요”한 경우 등이 있습니다.

i 시장위험 헛지 예시

현재 주식 포트폴리오의 가치는 200만 달러, 베타는 1.1, CME SnP500선물 1계약의 가치는 10만 달러라고 하자.

시장 위험을 헛지하기 위한 최적계약수는 $N^* = 1.1 \times \frac{2,000,000}{100,000} = 22$ 이고, 22계약을 매도하여 헛징포트폴리오를 구축하였다.

선물 만기일에 S&P500지수는 20%하락, 나의 포트폴리오는 12%하락하였다면, 헛징포트폴리오는 -24만\$ 및 선물에서 +44만\$ 이익이 발생하여 합계 20만\$의 이익이 발생한다.

즉, 시장은 전체적으로 하락하였으나 내 포트폴리오가 outperform하여 초과이익 α 가 발생한 것으로 해석할 수 있다.

스택 앤 롤(Stack And Roll)

선물을 이용하여 헛지할 때, 헛지종료시점이 선물 만기일보다 나중인 경우가 있습니다. 이때는 먼저 선물을 이용해 헛지한 다음, 만기일 직전에 선물 포지션을 청산함과 동시에 만기가 긴 선물로 새로운 포지션을 구축하는 방법을 사용합니다. 이것이 스택 앤 롤 방법입니다.

물론 헛지종료시점과 정확히 일치하는 선물을 사용하는 것이 가장 좋지만, 선물의 유동성은 만기가 짧은 종목에 집중되어 있어 원하는 만기의 선물을 거래하기 어렵습니다. 실제로는 가장 만기가 짧은 최근월물로 헛지하고, 만기가 도래할 때마다 다음 최근월물로 갈아타는 롤오버(*Roll-over*) 방식이 많이 사용됩니다.

💡 Stack and Roll의 위험성 : Metallgesellschaft 사례

Metallgesellschaft(이하, MG)는 독일의 원자재 회사로 등유와 가솔린을 판매하는 사업을 영위.

판매계약은 향후 5~10년까지 고정가격에 체결되어있어, MG는 원자재 가격상승위험 회피를 위해 선물을 매수하여 헛지 실행. 다만, 만기가 5~10년 뒤인 선물은 거래가 어려워 최근월물을 롤오버하였는데, 여기서 단기적으로 원자재의 가격이 하락하면서 선물 포지션에서 손실이 누적됨.

이를 만회하기 위해서는 판매대금을 받아야하는데, 미래시점의 판매대금을 미리 받을 수는 없어 현금흐름 위험(cashflow risk)에 직면.

결국 선물 포지션이 강제청산(margin call)되면서, 막대한 손실을 입음.

Appendix : CAPM

자본자산가격결정모형(CAPM, Capital Asset Pricing Model)은 포트폴리오의 리스크 대비 기대수익률을 측정하는 모델입니다. 리스크는 시장 전체의 리스크로 분산(diversified) 할 수 없는 *Systematic risk*와 분산할 수 있는 자산 고유의 위험인 *Nonsystematic risk*로 구성됩니다. CAPM 유도에 필요한 가정과 결과 산식은 다음과 같습니다.

1. 투자자는 기대수익률과 수익률의 표준편차만을 고려하여 투자자산을 결정한다.
2. 자산의 수익률은 시장의 수익률 대비 민감도 β 로부터 산출된다.(Only one factor) 즉, 자산들간의 상관 계수는 각 자산의 β 의 비율과 같다.
3. 투자자는 한 투자기간에 대해서만 고려하며, 투자기간은 모든 투자자가 같다.
4. 투자자는 무위험수익률 R_f 로 무한히 빌리거나 빌려줄 수 있다.
5. 세금은 고려하지 않는다.
6. 자산의 기대수익률과 표준편차, 상관계수는 모든 투자자에게 동일하다.

$$E(R_{portfolio}) = R_f + \beta(R_{market} - R_f)$$

Chapter 4

이자율 (*Interest Rates*)

파생상품과 여러 금융상품의 가치평가에 쓰이는 매우 중요한 요소

4.1 이자율의 종류

이자율이란 돈을 빌린 사람이 빌려준 사람에게 지급하는 돈에 적용되는 율로 주택담보, 예금수익률, 신용대출 등 수많은 이자율의 종류가 있습니다. 이자율에 영향을 주는 요소 중 하나로 신용위험(*Credit Risk*)가 있는데, 돈을 빌린 사람이 디폴트 등으로 돈을 갚지 못하게 될 위험을 말합니다. 그 위험이 클수록 이자율은 증가하게 되고, 해당 이자율과 무위험이자율 간의 차이를 신용스프레드(*Credit Spread*)라 합니다.

Treasury Rates

T-bill, T-bond와 같은 국가가 발행한 채권에 투자할 때 얻는 수익률을 말합니다. 이 수익률은 결국 해당 채권을 발행한 국가에 돈을 빌려주고 받는 이자율을 의미합니다. 일반적으로 선진국의 국채가 파산할 위험은 거의 없기 때문에, 무위험이자율로 여겨지곤 합니다. 그러나, 개발도상국의 국채를 생각해보면 파산위험이 0은 아니므로, 엄밀한 의미의 무위험이자율은 아닙니다.

Overnight Rates

각국의 시중은행은 중앙은행의 정책에 따라 지급준비금이라는 형태로 일정 비율 이상의 현금을 유지해야합니다. 매일 마감작업 이후, 지급준비금이 부족한 은행은 현금이 충분한 은행으로부터 지급준비금 부족액을 다음날까지 빌리게 되는데, 이 때 적용되는 것이 1일물 금리입니다. 대표적으로 미국 연준의 경우 *federal funds rate*를 예시로 들 수 있고, 이 금리를 이용하여 이루어진 실제 은행간 거래를 거래량 가중평균하여 산출한 금리를 *effective federal funds rate*라고 합니다. 다른 예시로는 영국의 SONIA(*sterling overnight index average*), EU의 ESTER(*euro short-term rate*), 스위스의 SARON(*swiss average rate overnight*), 일본의 TONAR(*tokyo overnight average rate*)가 있으며, 우리나라는 콜금리가 대표적입니다.

Repo rates or RP rates

연준금리나 일반적인 1일물 금리와 달리, 담보부 금리입니다. 주로 금융기관 간에 국채나 안전자산을 담보로 짧은기간 현금을 빌릴때 이용되는 금리이며, 담보가 있는 만큼 신용 기반의 1일물 금리보다 무위험에 가깝기때문에 조금 더 낮게 형성됩니다. 일반적으로 *overnight repos*가 쓰이지만, 간혹 기간이 긴 *term repos*도 사용됩니다. 대표적으로 미국의 SOFR(*secured overnight financing rate*)가 있으며, 우리나라의 신규 금리인 KOFR(*Korea overnight financing rate*)도 여기에 해당합니다.

4.2 Reference rates

기준금리는 금융시장에서 매우 중요한 역할을 담당합니다. 시장참가자간 돈을 빌리는 등 거래를 할 때, 기준금리에 일정 금리를 가산하는 식으로 주로 활용되기 때문에 합리적이고 공정한 방식으로 산출되는 것이 매우 중요합니다.

Libor, London Inter Bank Offered Rates

역사적으로 매우 중요한 기준금리로서, 런던의 글로벌 은행들 간의 거래에 적용되는 금리로 1일물부터 1년물까지 존재합니다. 글로벌 은행들의 신용은 매우 높은 수준이기 때문에, 일반적으로 무위험금리의 대용치로 많이 사용되었습니다. 대개 장외파생상품 또는 다양한 금융상품에 있어 기준금리로 활용되었기 때문에, libor에 연계된 자금규모는 수백조 달러에 육박하였습니다. 그러나, 신용 기반의 금리인 점과 은행의 호가금리에 기반한다는 치명적인 단점이 있고, 2012년 이를 이용한 Libor 조작사태가 벌어지면서 기준금리의 대규모 전환을 맞이하였고, EU벤치마크법 등 다양한 논의 끝에 현재는 다른 무위험금리로 Libor를 대체하고자 하는 추세입니다.

The New reference rates

각국은 Libor를 대체할 새로운 기준금리를 개발하였고, 상기에 서술한 KOFR, SOFR, SONIA, ESTER, SARON, TONAR 등이 여기에 해당합니다.

새로운 기준금리는 1일물 금리로 정의되며, 이를 기반으로 3개월, 6개월 등의 기간구조를 산출합니다. SOFR를 예시로 들면, n일간 SOFR금리는 다음과 같습니다.

$$[(1 + r_1 \hat{d}_1)(1 + r_2 \hat{d}_2) \dots (1 + r_n \hat{d}_n) - 1] \times \frac{360}{D}$$

where $\hat{d}_i = \frac{d_i}{360}$, $D = \sum d_i$

대개 d_i 는 1이며, 주말이나 휴일이 포함된 경우 해당 일을 가산합니다. 이러한 방식으로 산출 된 기준금리는 무위험금리로 여겨집니다. 1일물 금리를 compounding하여 산출하였고, 담보가 있거나 신용위험이 거의 없는 기관간 금리이기 때문입니다.

Libor와 새로운 기준금리의 또하나의 큰 차이점은 산출시점입니다. 3개월 Libor는 현재시점에서 *forward looking* 방식으로 산출되지만, 3개월 SOFR는 과거 3개월간 실현된 1일물 SOFR를 compounding하여 *backward looking* 방식으로 산출합니다.

Reference rates and Credit risk

은행간 금리의 또다른 문제점은, 평소에는 파산할 위험이 거의 없지만, 금융위기같은 극단적인 상황에서는 은행도 파산할 수 있으며, 따라서 은행의 신용위험이 증가한다는 것입니다. 이러한 경우, 무위험금리로 여겨지던 Libor금리에 은행의 신용위험이 더해지면서 실질적으로 무위험금리 + 신용스프레드가 적용된 Libor금리가 형성되므로 정상적인 기준금리의 역할을 할 수 없습니다.

그러나, 새로운 기준금리는 사실상 무위험금리에 해당하므로 신용위험으로 인해 기준금리가 왜곡될 문제는 없다고 봐도 무방합니다.

4.3 The Risk-free rate

앞선 장에서, 파생상품의 프라이싱에는 무위험 포트폴리오를 구축할 수 있고, 여기에서 무위험이자율 만큼의 수익이 발생한다는 가정을 사용하였습니다. 즉, 무위험이자율은 파생상품의 프라이싱에 매우 핵심적인 역할을 하고 있습니다. 실제로 트레이더들은 국채를 이용해서 무위험 포트폴리오를 구축하는 것이 자연스러워보이나, 현실은 그렇지 않습니다. 일반적으로 국채금리는 세금 등의 규제적인 이유로 낮게 형성되기 때문입니다.

1. 대부분의 은행이 여유자본을 활용할 때, 국채에 투자하는 일은 없고 대신 다른 무위험자산을 찾는다.
2. 미국의 경우, 대부분의 주에서 국채의 이자수익에 대한 세금혜택이 존재

따라서, 무위험이자율은 앞서 살펴본 1일물 금리를 주로 사용하게 됩니다.

4.4 Measuring interest rates

예금 이자에 1년간 10%의 금리가 적용된다는 것은, 이자율의 측정방법을 무엇으로 하느냐에 따라 다른 결과가 나올 수 있습니다.

1. 단리 : 100만원을 투자하고 1년 후 110만원을 돌려받으므로 10% 수익에 해당

2. 복리 : 복리 주기에 따른 중간이자를 다시 재투자하므로, 단리보다 실질이자율이 높게 됨

- semiannually : $100 \times 1.05 \times 1.05 = 110.25, 10.25\%$
- monthly : $100 \times (1 + \frac{10\%}{12})^{12} = 110.47, 10.47\%$
- 즉, $\times (1 + —)^x$

3. 연속복리 : 이자를 매 순간순간 지급하고 재투자한다면,

$$\times (1 + —)^x \rightarrow \times e^x$$

where $\rightarrow \infty$

4.5 Zero-rates

원금을 n 년간 투자할 때, 중간이자 및 옵션 없이 만기에 원금과 이자를 일시에 정산받는다면, 이때 적용되는 이자율은 쿠폰이 없는 채권에 투자한 것과 같으므로 zero-coupon interest rate라고 할 수 있습니다. 일반적으로 이를 n -year spot rate 또는 n -year zero rate라고 합니다.

채권에 투자할 때, 일반적으로 이표채에 투자하게 되므로 5년 만기 국채를 사더라도 해당 국채의 YTM이 5년짜리 zero-rate를 의미하는 것은 아닙니다. 중간에 이자수익이 발생하기 때문입니다. ($Duration \neq 5$)

- 예시 : 5년 zero rate가 연속복리로 5%라면 5년후 수익은 $100 \times e^{0.05 \times 5} = 128.40$

4.6 Bond pricing

채권의 가치평가는 채권의 만기까지 발생하는 이자와 원금을 각각 현재가치로 환산한 후 합하여 계산합니다. 여기에서, 각각의 이자와 원금을 현재가치로 할인하는데 쓰이는 이자율이 zero rates입니다.

years	Zero rates
0.5	5.0%
1.0	5.8%
1.5	6.4%
2.0	6.8%

원금이 100\$이고 쿠폰이 6%인 채권이 semiannually 이자를 지급하고, 위의 zero rates를 적용하면 채권의 가격은 다음과 같습니다.

$$3e^{-0.05 \times 0.5} + 3e^{-0.058 \times 1.0} + 3e^{-0.064 \times 1.5} + 103e^{-0.068 \times 2.0} = 98.39$$

Bond Yield

채권의 수익률이란, 채권의 현금흐름과 현재 가격을 일치시키는 수익률을 말합니다. 즉, 상기 zero rates를 통해 구한 채권가격과 채권의 현금흐름에 단일 수익률을 적용하여 구한 현재가치가 같아지면 됩니다.

$$YTM \ y : 3e^{-y \times 0.5} + 3e^{-y \times 1.0} + 3e^{-y \times 1.5} + 103e^{-y \times 2.0} = 98.39$$

수치해석방법을 통해 y 를 구하면, 약 6.76%임을 알 수 있습니다.

Par Yield

*par yield*란, zero rates를 통해 채권가격을 산출할 때, 채권가격이 **par**가 되는 **coupon rate**를 말합니다. 즉, 위의 예시에서 par yield는

$$\frac{c}{2}e^{-0.05 \times 0.5} + \frac{c}{2}e^{-0.058 \times 1.0} + \frac{c}{2}e^{-0.064 \times 1.5} + (100 + \frac{c}{2})e^{-0.068 \times 2.0} = 100(\text{par})$$

$$c \approx 6.87\%$$

4.7 Determining zero rates

실제로 zero rates는 잘 알려져있지 않으므로, 국채수익률을 이용하여 zero rates를 역산하는 방식을 주로 사용합니다. 이때 사용하는 방식을 *Bootstrap method*라고 하며, 다음과 같습니다.

1. 채권은 연 2회 이자를 지급한다고 가정
2. 3개월, 6개월, 1년, 2년, 1.5년, 2년 zero rates를 구하고자 함
3. 각 만기별 국채를 통해 만기별 채권 YTM을 산출
4. 3개월 및 6개월 국채는 잔여 이자지급이 없으므로 YTM=zero-rate
5. 6개월 zero-rate와 1년만기 국채의 가격을 통해 1년 zero-rate 산출
6. 6개월 및 1년 zero-rate와 1.5년 국채가격을 통해 1.5년 zero-rate 산출
7. 같은 방법으로 2년 zero-rate 산출

4.8 Foward rates

선도금리란, 미래시점에 적용되는 금리를 말합니다. 예를 들어 현재시점에서 1년뒤에 1년간 적용되는 선도금리를 구한다고 가정하면, 1년 zero rate와 2년 zero rate의 관계를 통해 구할 수 있습니다.

현재시점에서 원금을 2년 zero rate에 투자한 것과 1년 zero rate + 선도금리에 투자한 포트폴리오의 수익은 동일해야 하므로,

$$100e^z e^{f_{12}} = 100e^{z_2 \times 2} \rightarrow f_{12} = 2 \times z_2 = z_1$$

연속복리 수익률에서 t_0 시점에서 $t_1 \sim t_2$ 까지의 선도수익률 F_{12} 을 일반화하면,

$$F_{12} = \frac{t_2 \times z_2 - t_1 \times z_1}{t_2 - t_1}$$

$$F_{12} = z_2 + (z_2 - z_1) \frac{t_1}{t_2 - t_1} \rightarrow z + t \frac{\partial z}{\partial t} \text{ for } t_2 \rightarrow t_1$$

해당 극한값은 기간이 매우 짧을때 적용할 수 있는 선도수익률로, *instantaneous forward rate*라고 합니다.

Foward rates : furthermore

*instantaneous forward rate*의 유도방법

Let $P()$ i a present value functions, $P(t, T) = e^{-(T-t)z_T}$

Then, Forward rate $F(t, T, T + \delta) = F$ is,

$$\frac{e^{\delta \times F}}{P(t, T)} = \frac{1}{P(t, T + \delta)} \Rightarrow F = \frac{1}{\delta} \ln \left[\frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} \right] = -\frac{\ln[P(t, T + \delta)] - \ln[P(t, T)]}{\delta}$$

$$\text{instantaneous forward rate } \hat{F} = -\frac{\partial}{\partial T} \ln[P(t, T)] \text{ where } \delta \rightarrow 0$$

4.9 Forward rate agreements

FRA는 금리파생상품의 일종으로, 계약자들은 향후 특정시점에 변동금리를 현재시점의 FRA 계약금리로 고정시키고 계약만기시점에 변동금리와 고정금리를 주고받는 형태의 계약입니다.

FRA 매수자는 변동금리를 받고 고정금리(**FRA** 계약금리)를 주며, 따라서 변동금리가 향후 상승하면 유리한 포지션입니다. 따라서 향후 돈을 빌리고자 하는 사람들이 사용합니다. 반대로 FRA 매도자는 변동금리를 주고 고정금리를 받으므로, 금리 하락시 유리한 포지션입니다.

FRA는 옵션 등이 없는 계약이므로, 계약을 체결하는 시점에 매수자 및 매도자가 동등한 위치에서 계약을 체결합니다. 따라서 체결시점의 계약은 누군가에게 유리하게 체결되어서는 안되고, 이는 계약의 가치가 0원임을 의미합니다. 즉, 계약만기시점의 **Forward rate**가 일반적인 **FRA**의 계약금리가 됩니다.

계약금리가 **Forward rate**로 설정되지 않는다면, 차익거래기회가 발생합니다. Forward rate보다 낮게 FRA 계약이 체결된다면, 투자자는 FRA 매수와 동시에 FRA 원금만큼 Forward rate에 돈을 빌려줌으로써 Forward rate - FRA금리 만큼의 무위험차익을 얻을 수 있습니다.

4.10 Duration

채권의 듀레이션이란, 채권 소유자의 원금회수기간을 의미합니다. 즉, 채권이 원금(=채권가격)만큼의 현금흐름을 발생시키는데 걸리는 시간을 말합니다. 따라서 듀레이션은 채권의 각 현금흐름이 원금에서 차지하는 비율을 시간가중평균하여 산출하게 됩니다.

채권이 c_i 만큼의 현금흐름을 발생시키고, 현재 가격은 B , 수익률은 y 라고 하면 채권의 가격과 현금흐름은 $B = \sum c_i e^{-yt_i}$ 입니다.

이에 대한 시간가중평균인 듀레이션은 다음과 같습니다.

$$D = \frac{\sum t_i c_i e^{-yt_i}}{B} = \sum t_i \left[\frac{c_i e^{-yt_i}}{B} \right], \quad \sum t_i = 1$$

간단한 미분의 성질을 활용하면, $\Delta B = \frac{dB}{dy} \Delta y = -\Delta y \sum c_i t_i e^{-yt_i} = -\Delta y \times B \times D$

즉, $\frac{\Delta B}{B} = -D \Delta y$ 를 유도할 수 있습니다.

이는 채권가격의 변화율 $\frac{\Delta B}{B}$ 가 수익률 변화분과 반대방향으로 D 의 비율만큼 움직인다는 것을 의미합니다. 이러한 관점에서 듀레이션을 채권가격의 민감도라고 표현합니다.

DV01이란 수익률이 0.01%(1bp)변화할때 채권가격의 변동분을 말합니다. 즉, $DV01 = -0.0001 \times B \times D$

Modified duration

연속복리수익률을 사용하지 않고 annual 등 복리수익률을 사용하는 경우, 듀레이션과 채권가격 간의 관계는 다음과 같습니다.

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1 + y/m}$$

이러한 이자율 측정방법간 차이를 보정하기 위해 수정듀레이션을 $D^* = \frac{D}{1+y/m}$ 이라고 하며, $\Delta B = -BD^*\Delta y$ 를 사용합니다.

Bond portfolios

채권으로 포트폴리오를 구성할 때, 상기 듀레이션에 관한 식을 모두 적용할 수 있습니다. 다만, 유의해야 할 점은 Δy 는 모든 채권수익률이 변화할 때를 말한다는 것입니다. 즉, 채권의 만기에 따른 수익률 곡선이 평행하게 이동(parallel shift)할 때만 듀레이션을 이용한 계산을 적용할 수 있습니다.

금융기관은 부채와 자산간의 듀레이션을 일치시키는 방법으로 금리변화에 따른 위험을 회피할 수 있습니다. 그러나, 금리 곡선이 평행하게 이동하지 않고 가파르거나 평평하게 움직이는 것에 대한 위험은 여전히 남아있습니다.

4.11 Convexity

듀레이션을 이용한 채권가격변화분은 수익률 변화분이 커질수록 정밀도가 떨어집니다. 이때 이용하는 것이 Convexity로, non-linear한 채권 가격을 듀레이션을 통해 linear하게 추정할 때, 오차분을 보정해주는 역할을 합니다.

$$C = \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{dy^2} = \frac{\sum c_i t_i^2 e^{-yt_i}}{B}$$

한편, 테일러 급수를 활용하여 2차 다항함수까지 전개한 채권가격에 듀레이션과 컨벡서티를 적용한 식은 다음과 같습니다.

$$\begin{aligned} \Delta B &= \frac{dB}{dy} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{d^2 B}{dy^2} \Delta y^2 = -BD\Delta y + \frac{1}{2} BC(\Delta y)^2 \\ &\Rightarrow \frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y + \frac{1}{2} C(\Delta y)^2 \end{aligned}$$

포트폴리오의 컨벡서티까지 0에 가깝게 하는 경우(감마헷지), 이자율이 크게 변화하더라도 어느정도 보정할 수 있으나, 역시 가파르거나 평평하게 수익률 곡선이 움직이는 경우의 위험은 존재합니다.

4.12 Theories of the term structure of interest rates

제로금리 커브는 일반적으로 로그함수처럼 완만하게 우상향하는 곡선이지만, 때때로는 flat하기도, 우하향하기도 하며 심지어는 기간에따라 등락을 반복하기도 합니다. 이를 설명하는 금리의 기간구조에 대해서는 많은 이론들이 존재합니다.

1. *expectations theory* : 장기금리는 미래의 단기금리의 기대값과 동일. 현재의 선도금리가 미래의 제로금리의 기대값.
2. *market segmentation theory* : 단기, 중기, 장기금리는 각각 시장참여자가 달라 서로 큰 관계가 없으며, 각 시장별 투자자의 수급이나 전망에 따라 형성.
3. *liquidity preference theory* : 유동성 선호이론. 사람들은 현금을 보유하는 것을 선호하므로, 돈을 빌릴때 장기간으로 빌리고 싶어함. 따라서 금리는 일반적으로 우상향. 선도금리가 제로금리보다 높게 형성. 현실과 가장 부합.

Chapter 5

선도 및 선물 가격의 결정요인

(Determination of Forward and Futures Prices)

5.1 투자자산 vs. 소비자산

선도 및 선물계약에 있어서 기초자산이 투자자산인지 소비자산인지 구분하는 것은 매우 중요합니다. 이 챕터에서는 투자자산을 중심으로 선도/선물가격과 기초자산 가격간의 관계를 차익거래를 이용하여 서술할 예정입니다.

- 투자자산(investment asset) : 주식, 채권, 금, 은과 같은 투자목적으로 주로 거래되는 자산
- 소비자산(consumption asset) : 원유, 원자재 등 주로 생산 또는 소비목적으로 거래되는 자산

i Note

어떠한 자산이 반드시 투자자산이나 소비자산에 속하는 것은 아닙니다. 누군가는 원유를 투자 목적으로 거래할 수 있으며, 생산목적으로 은과 같은 귀금속을 거래하기도 합니다. 주로 거래되는 목적에 따른 단순 분류임을 유의하시기 바랍니다.

5.2 공매도

공매도란 현재 가지고 있지 않은 자산을 빌려서 파는 행위를 말합니다. 주로 현재시점에서 자산을 빌려서 미리 팔고, 추후 자산을 시장가격에 구매해서 값은 식으로 이루어집니다.

차익거래 메커니즘을 통해 선도/선물가격을 설명할 때 공매도가 자주 사용되며, 공매도를 실행할 때 자산을 빌리는 데 드는 비용(대차비용)이 존재하고 때때로 공매도가 불가능한 투자자산도 존재하지만, 대체로 공매도가 가능하고 별도의 비용이 들지 않는다는 가정을 포함합니다.

i 공매도와 규제

과거부터 공매도는 주식시장의 과도한 하락을 초래한다는 부정적인 인식 및 효과로 인해 규제되어왔습니다. 최초로 1938년 업틱룰(uptick-rule)이 소개되었는데, 이는 공매도 호가를 제출할 때 현재 매도최우선호가 보다 높은 호가에 제출해야하는 규제로, 공매도로 인해 시세하락변동이 유발되지 않도록 하는 규제입니다. 미국의 경우 2007년 업틱룰이 폐지되고 대체 규제(alternative uptick rule)이 소개되었으며, 이는 주식이 당일 10% 이상 하락하였을 때, 그날과 다음날까지 업틱룰을 적용하는 제도입니다. 또한, 때때로 공매도는 금융시장이 불안정할 때 금지되어 왔으며, 미국에서는 2008년 서프프라임 금융위기 때 일시적으로 금지하였습니다. 국내의 경우 금융위기 및 코로나위기(‘20년), 경기침체(‘23.11~‘24.3 월현재 지속) 등 공매도를 일시적으로 중단하고 있습니다.

5.3 Assumptions and Notation

선도/선물가격을 결정할 때, 아래의 4가지 사항이 참이라고 가정합니다. 실제 거래규모가 큰 일부 기관투자자에게만 아래 가정이 적용되더라도 차익거래 메커니즘이 작동하는 데에 문제는 없습니다.

1. 모든 시장참여자는 거래비용이 0이다.
2. 모든 시장참여자는 모든 거래순이익에 대해 동일한 세율을 적용받는다.
3. 모든 시장참여자는 무위험이자율에 무한대로 자금을 빌리거나 빌려줄 수 있다.
4. 모든 시장참여자는 차익거래 기회가 생기면 이를 이용한다.

5.4 투자자산에 대한 선도가격

가장 간단한 선도계약을 예시로 들어보면, 보관비용이 없고 현금흐름을 발생시키지 않는 기초자산에 대한 선도계약으로, 배당이 없는 주식 또는 무이표채에 대한 선도를 예시로 들 수 있습니다.

현재 시점에서 3개월 뒤 만기가 도래(T)하는 선도계약의 현재가격을 F_0 , 기초자산의 현재가격을 S_0 , 3개월 무위험이자율을 r 이라고 할 때, 현재시점의 지출 없이 T 시점에 기초자산을 보유하는 방법은 두 가지로 나눌 수 있습니다.

1. 선도계약 매수하여 T 시점에 선도계약가격으로 기초자산을 매수
2. 무위험이자율로 자금을 빌려 기초자산을 매수하고 T 시점까지 보유

위 두가지 방법을 현재시점에 실행하고, 만기 T 시점까지의 현금흐름은 다음과 같습니다.

1. T F_0

$$2. \quad S_0 , \quad S_0(e^{rT} - 1)$$

위 두가지 현금흐름은 정확히 동일해야하므로, 선도/선물가격은 다음과 같습니다.

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

만약, 이 등식이 성립하지 않는다면 차익거래가 발생합니다.

$F_0 > S_0 e^{rT}$ 인 경우, 현재시점에 1. 선도계약을 매도하고 2. 무위험이자율로 자금을 빌려 기초자산을 매수하면, T시점에 $F_0 - S_0 e^{rT}$ 만큼 무위험 차익거래가 가능합니다.

반대인 경우, 현재시점에 1. 선도계약을 매수하고 2. 기초자산을 공매도하고 매도대금을 무위험이자율에 투자하면, T시점에 $S_0 e^{rT} - F_0$ 만큼 무위험 차익거래가 가능합니다.

한편, 실제 금융시장에서 공매도는 모든 기초자산에 대해 가능한 것이 아니고, 대개 비용이 발생합니다. 따라서 공매도가 제한적인 경우 선도가격이 저평가되었을 때 차익거래는 불가능할 수도 있습니다.

그러나, 기초자산을 본래 보유하고 있던 투자자는 현재시점에 1. 선도계약을 매수하고 2. 보유한 기초자산 매도하고 매도대금을 무위험이자율에 투자하면, T시점에 $S_0 e^{rT} - F_0$ 만큼 무위험 차익거래가 가능하기 때문에, 공매도가 제한적이더라도 대부분의 경우에 위의 수식이 성립합니다.

::: {.callout-warning title="Kidder Peabody's Mistake"} 투자은행들은 종종 이표채의 현금흐름을 각각 개별 zero-coupon 채권으로 전환하는 strip이라는 기법을 사용합니다.

Kidder Peabody의 트레이더 Jett는, 컴퓨터 계산 결과 채권을 strip하여 각각을 선도계약을 통해 매도하면 약 \$100m이익을 얻을 수 있다는 차익거래 기회를 포착하고 거래를 실행하였습니다.

그러나, Jett는 채권을 매수하여 strip하는 거래비용을 간과하였고, 이익 대신 총 \$330m의 손실을 회사에 미치고 말았습니다. :::

5.5~6 기초자산의 현금흐름

지금까지는 배당이나 이표 등 현금흐름이 발생하지 않는 기초자산에 대해서 알아봤습니다. 만약 현금흐름이 발생하지만, 기초자산의 현재시점부터 선도/선물 만기까지의 모든 현금흐름을 정확하게 알고 있다면, 동일한 방식으로 선도/선물계약 평가가 가능합니다.

1. 선도계약 매수하여 T시점에 선도계약가격으로 기초자산을 매수
2. 무위험이자율로 자금을 빌려 기초자산을 매수하고 T시점까지 보유

Discrete

T_1 시점에 기초자산에 I 만큼 현금흐름이 발생한다면, 두 경우의 만기까지 현금흐름은 아래와 같습니다.

1. $T = F_0$
2. $S_0, T_1 = I, S_0(e^{rT} - 1)$

이를 정리하면,

$$F_0 = S_0 e^{rT} - I e^{r(T-T_1)} = (S_0 - I_0) e^{rT} \text{ where } I_0 = I e^{-rT_1}$$

Continuous

기초자산의 현재부터 만기까지 평균적으로 연속복리수익률 q 만큼의 현금흐름이 발생한다면, 만기시점에 S_0 를 보유하기 위해 현재 $S_0 e^{-qT}$ 만큼만 매수하면 됩니다.

1. 선도계약 매수하여 T 시점에 선도계약가격으로 기초자산을 매수
2. 무위험이자율로 자금을 $S_0 e^{-qT}$ 만큼만 빌려 기초자산을 매수하고 T 시점까지 보유

1. $T = F_0$
2. $S_0 e^{-qT}, S_0 e^{-qT}(e^{rT} - 1)$

$$, F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

5.7 선도계약의 가치

은행이나 기관입장에서 과거에 이루어진 선도계약의 가치평가는 매우 중요합니다. 실제로 은행 등 기관에서는 선도계약의 가치를 매일매일 평가(Marking to Market)하고 있습니다.

선도계약의 가치는 계약을 중도에 청산하고자 하는 투자자가 얻게 되는 손익이므로, 기존의 선도계약과 가치가 “0”인 선도가격(즉, 현재시점의 선도가격)의 현금흐름을 비교하는 방법을 사용합니다.

과거 선도계약의 가격(delivery price)가 K , 현재 선도계약의 균형가격이 F_0 , 무위험이자율이 r 이면 두 계약 만기 T 시점의 지출은 각각 K, F_0 입니다. 현재 선도계약은 가치가 “0”이므로 선도계약의 미래가치는 매수의 경우 $F_0 - K$, 매도의 경우 $K - F_0$ 가 됩니다.

이를 정리하면 선도계약의 가치 f 는 다음과 같습니다.

$$f_{long} = (F_0 - K)e^{-rT} \text{ or } f_{short} = (K - F_0)e^{-rT}$$

위에서 다룬 선도가격 F_0 를 여기에 적용하면, 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$f_{long} = (F_0 - K)e^{-rT} = S_0 - Ke^{-rT} = S_0 - I_0 - Ke^{-rT} = S_0e^{-qT} - Ke^{-rT}$$

5.8 선도가격=선물가격 ?

선물가격과 선도가격은 대체로 동일하지만, 선물의 일일정산으로 인해 차이가 발생합니다. 선도계약을 평가할 때, 우리는 현재와 만기시점까지 발생하는 현금흐름을 비교하였습니다.

선도는 만기까지 현금흐름이 발생하지 않고 만기에 기초자산을 선도가격에 인수도함으로써 마무리됩니다. 그러나 선물가격은 일일정산이 존재하므로 매일매일 기초자산의 가격변동에 따른 현금흐름이 발생합니다. 다시 말해, 선물 매수자의 기준으로 기초자산 가격이 상승하면 (+) 현금흐름이, 가격이 하락하면 (-) 현금흐름이 발생합니다.

이 경우, 현금흐름 발생에 따라 각 현금흐름의 미래가치를 계산하여 비교하게 되는데 여기서 선도와 선물의 차이가 발생하게 됩니다. 일반적으로 주가의 향후 방향성은 예측할 수 없으므로 현재시점에 일일정산으로 인한 평가가격 차이는 없으나, 만약 이자율과 주가간에 상관관계가 존재한다면 이야기가 달라집니다.

이자율과 주가가 양의 상관관계인 경우, 주가 상승 및 이자율 상승시 선물 매수자에게 이익이 발생하고 이를 미래가치로 평가할 때 이자율 상승으로 인해 미래가치가 크게 상승하므로 선물 보유자에게 유리합니다. 주가 하락 및 이자율 하락시에는 선물 매수자의 손실을 미래가치로 평가할 때 손실이 적게 상승하므로 선물 보유자에게 유리합니다.

반대로, 이자율과 주가가 음의 상관관계인 경우, 주가 상승 시 선물 매수자의 이익이 낮게 상승하고 주가 하락시 손실이 크게 상승하므로 선물 보유자에게 불리합니다.

즉, 주가와 이자율간 상관관계에 따라 선도가격과 선물가격의 차이가 결정되며, 일반적으로 양의 상관관계일 때 선물가격이 높게, 음의 상관관계일 때 선도가격이 높게 형성됩니다. 이러한 차이는 만기까지의 잔존기간이 길수록 커집니다.

5.9~12 Cost of Carry 및 다양한 선도/선물가격

만기 현금흐름 비교를 통해 차익거래가 발생하지 않는 선도/선물가격을 결정하는 방법을 보유비용모형(*The Cost of Carry*)이라고 합니다.

지금까지 기초자산을 만기 T에 보유하는 방법으로 1. 선도/선물 매수, 2. 자금 조달 및 현물 매수로 나누어 비교하였는데, 이 방식을 선도/선물 매수자 입장에서 생각해보면 선도/선물계약을 만기까지 보유하는 동안 실제로 현물을 보유하지 않으므로, 현물에서 발생하는 수익은 선도/선물 매수자에게 불리하게, 현물을 보관하는데에 드는 비용은 선도/선물 매수자에게 유리하게 작용합니다.

즉, 선도/선물가격은 기초자산의 현재가격에 만기 T 시점까지의 기초자산에서 발생하는 수익을 차감하고 기초자산을 보관하는 비용을 가산하여 결정됩니다.

$$F_0 = S_0 - \text{Benefit} + \text{Cost} = S_0 e^{(\text{cost}-\text{yield})T} \text{ (Generalized)}$$

투자자산에서 주식과 채권 등의 보관비용은 현금의 기회비용인 무위험이자율에 해당하므로, 일반적으로 $S_0 e^{rT}$ 로 표현된다고 해석할 수 있습니다.

주가지수선물

보유비용모형을 통해 주가지수선물 가격을 평가할 때, 고려해야 할 보유비용은 현금의 기회비용인 r 및 보유수익은 배당률 d 입니다.

$$\text{Index Futures } F_0 = S_0 e^{(r-d)T}$$

지수차익거래

주가지수선물도 마찬가지로 이 등식이 성립하지 않는다면 차익거래가 발생합니다. $F_0 > S_0 e^{(r-d)T}$ 인 경우, 선물을 매도하고 자금을 빌려 주가지수 복제 포트폴리오를 매수함으로써 지수차익거래를 할 수 있습니다. 반대로 $F_0 < S_0 e^{(r-d)T}$ 인 경우 선물을 매수하고 주가지수 복제 포트폴리오를 공매도함으로써 지수차익거래를 할 수 있습니다.

선도환, 선물환 및 통화선물

해외통화의 현재환율을 S_0 , 선도환율을 F_0 , 자국과 해외의 무위험이자율을 각각 r , r_f 라고 한다면, 만기 T 시점에 해외통화를 보유하는 두가지 방법은,

1. Currency Forward or Futures를 F_0 에 매수
2. 자국 통화를 $S_0 e^{-r_f T}$ 만큼 빌려 해외 통화를 매입하고 만기까지 보유

만기시점까지의 현금흐름을 살펴보면,

1. $F_0 e^{r_f T}$
2. $S_0 e^{-r_f T}$, $S_0 e^{-r_f T} (e^{rT} - 1)$

즉, ?@sec-5.6con 과 동일한 방식을 적용하여 *Currency*, $F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T}$ 를 도출할 수 있습니다. 이는, 선도환 및 통화선물을 거래할 때, 기초자산의 보유비용은 자국의 무위험이자율이며 기초자산의 보유수익은 해외통화의 무위험이자율임을 뜻합니다.

상품선물

귀금속이나 원자재 등 Commodity는 일반적으로 현물을 보유하는데에 보관비용이 발생합니다. 현재시점부터 만기까지의 보관비용을 U 만큼 선불지급한다고 하면 해당 Commodity를 만기 T 시점에 보유하는 방법은,

1. Commodity Forward or Futures를 F_0 에 매수
2. 자금을 $S_0 + U$ 만큼 빌려 현물을 S_0 에 매수하고 보관비용을 U 만큼 지급

만기시점까지의 현금흐름은,

1. F_0
2. $S_0 + U$, $(S_0 + U)(e^{rT} - 1)$

즉, ?@sec-5.6dis 과 동일한 방식으로 $F_0 = (S_0 + U)e^{rT}$ 를 도출할 수 있습니다. 만약 U 를 연속복리이자율을 적용한 $S_0 e^{uT}$ 로 표현한다면, $F_0 = S_0 e^{(r+u)T}$ 라 할 수 있습니다.

추가적으로, convenience yield가 있는 상품의 경우 그 수익률을 y 라 한다면 최종적으로 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\text{Commodity}, F_0 = S_0 e^{(r+u-y)T}$$

5.13 실물인수도에 따른 옵션, Delivery Options

일부의 선물계약과 선도계약은 만기시점에 실제로 기초자산과 매수대금을 주고 받는 실물인수도를 최종결제방식으로 채택합니다. 이때, 선도계약은 인수도 시점에 대한 것이 명확하게 계약시점에 정해지지만, 선물계약은 일반적으로 매도자가 언제 기초자산을 인도할지에 대한 선택권을 가지고있습니다. 정해진 인수도기간 중에, 언제 인수도가 이루어지느냐에 따라서 선물계약의 가치평가에 영향을 미치게 되는 것 입니다. 물론 대부분의 선물이 만기 전 반대거래로 청산이 이루어진다고는 하지만, 알아두고 갈 필요는 있습니다.

위에서 살펴본 바와 같이, 일반적으로 선물가격은 $S_0 e^{rT}$ 로 결정되며 이는 잔존만기에 따른 증가함수입니다. 이는 ?@sec-costofcarry 관점에서 볼 때 기초자산에 보유비용이 발생한다는 의미로, 선물가격이 현물가격보다 높게 형성된다면 선물 매도자입장에서는 인수도기간 중 가능한 빨리 인수도를 할 유인이 생긴다는 것을 의미합니다.

반대로, 선물가격이 현물가격보다 낮게 형성된다면 시장상황이 기초자산에 보유이익이 발생한다는 의미로, 선물 매도자입장에서는 가능한 늦게 인수도를 할 유인이 생긴다는 것을 의미합니다.

5.14 선물가격과 미래 현물가격의 기대값

현재까지 선물가격에 관한 내용은 미래 현물가격에 대한 시장의 기대가 반영된 값이 아닌, 단순히 No-Arbitrage-Rule에 따라 산출된 수학적인 값입니다.

여기에 현물가격에 대한 시장의 기대심리 또는 기대값이 반영된다면 선물가격은 달라질 것 입니다. 시장에서 현물이 향후 상승할 것으로 예상된다면 선물은 이론가격보다 높게 형성될 것이고, 현물이 하락할 것으로 예상된다면 선물은 이론가격보다 낮게 형성될 것 입니다.

Keynes and Hicks

만약 선물시장에서 위험관리를 하고자 하는 투자자는 선물 매도를 주로 하고, 방향성 투자를 하고자하는 투자자는 선물 매수를 주로 하는 경우, 선물가격은 현물가격의 미래 기대값보다 낮게 형성될 것이라고 말했습니다.

방향성 투자자는 선물을 매수할 때 위험에 대한 보상심리로 평균 이상의 수익률을 기대하기 때문에 미래의 현물 기대값보다 낮은 가격에 선물을 매수하며, 위험관리 투자자는 자신의 위험을 감소시키는 것에 대한 대가로 일정 비용을 치루는 것을 감수하기 때문입니다.

따라서, 만약 위험관리 투자자가 선물 매수를 주로하고 방향성 투자자가 선물 매도를 주로 한다면 선물가격이 현물가격의 기대값보다 낮게 형성될 것 입니다.

Risk and Return

최근의 접근방법은 선물가격과 현물가격의 관계를 리스크 대비 기대수익으로 설명하고 있습니다. CAPM 등에서 투자자산의 리스크가 높다면 보다 높은 기대수익률을 가지고 있어야 합니다. ?@sec-CAPM

선물포지션의 리스크

현재 선물가격을 F_0 , 만기시점의 현물가격을 S_T , 무위험이자율을 r 이라 할 때, 향후 현물가격이 상승할 것을 기대하고 선물 매수에 투자하는 방향성 투자자를 생각해봅시다. ($S_T > F_0$ 기대)

이를 위해 현재 F_0 에 선물을 매수하고 자금을 $F_0 e^{-rT}$ 만큼 무위험이자율 r 에 투자하여, 만기 T 시점에 F_0 에 현물을 인수도받아 즉시 S_T 에 판다고 하고, 일일정산 및 거래비용 등을 없다고 가정하면 투자자의 현금흐름은 다음과 같습니다.

$$: -F_0 e^{-rT}$$

$$: +S_T$$

이 때, 투자자의 선물포지션에 대한 기대수익률은 k 이며 현재시점의 선물계약의 가치가 0이라고 하면, 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$-F_0 e^{-rT} + E[S_T] e^{-kT} \Rightarrow F_0 = E[S_T] e^{(r-k)T}$$

여기서 k 는 기초자산의 *systematic risk*에 따라 달라지며, 이에 대한 관계는 아래와 같습니다.

Underlying asset	$k \sim r$	$F_0 \sim S_T$	States
No systematic risk	$k = r$	$F_0 = E[S_T]$	-
(+) Systematic risk	$k > r$	$F_0 < E[S_T]$	Contango
(-) Systematic risk	$k < r$	$F_0 > E[S_T]$	Normal backwardation

특히, $k = r \Rightarrow F_0 = E[S_t]$ 인 경우, 선물가격은 현물의 미래 기대값에 대한 불편추정량임을 의미합니다.

Chapter 7

스왑, Swaps

최초의 스왑은 1981년 IBM과 World Bank간에 체결된 통화스왑입니다. 당시 World Bank는 독일과 스위스 통화를 직접적으로 대체할 수 없었고 IBM에게 미국달러에 대한 이자를 지급하고 독일 및 스위스 통화에 대한 이자를 수취하는 계약을 체결하였습니다.

스왑은 일정 주기마다 이자를 주고 받는 계약으로, 이자율선도 및 통화선도계약을 연속적으로 체결하는 것과 동일한 메커니즘을 가지고 있습니다.

7.1 Mechanics of interest rate swaps

이자율 스왑은 계약 당사자들끼리 미래 특정시점까지 일정 주기마다 정해둔 명목금액에 대하여 정해둔 고정금리와 변동금리를 적용한 이자를 주고 받는 계약입니다.

여기에 적용되는 변동금리는 최근까지 LIBOR가 널리 사용되었습니다. 그러나, LIBOR 조작 사태 이후 LIBOR 산출 중단에 따라 이를 대체하고자 하는 논의가 지속되고 있으며, 특히 과거에 체결되었던 20년 이상의 장기스왑의 경우 중도에 Reference float rate를 교체해야하므로, 미국의 경우 US LIBOR 대신 SOFR+ α 를 사용하는 추세입니다.

SOFR 및 영국의 SONIA 등 Overnight금리는 실제 거래기반의 담보부 금리로 LIBOR 대비 조작가능성이 낮고 안정성은 높으며, 선물을 통해 장기금리로 쉽게 치환할 수 있는 등의 장점이 있습니다. 최근에는 이러한 Overnight금리를 이용한 스왑이 널리 이용되고 있고, 이자율스왑 중 Overnight금리를 이용한 스왑을 **Overnight Indexed Swaps, OIS**라 부릅니다.

i LIBOR swaps vs. OISs

두 스왑은 단순히 Reference float rate를 무엇을 사용하는지에 따라 구분되는 것이나, 두 금리의 이자율 산출방식의 차이가 있음을 유의하여야 합니다.

Libor는 Forward-looking금리로, 스왑계약으로 인해 3개월마다 고정금리와 Libor를 주고 받는다면, 향후 3개월간 적용될 3-month Libor가 현재시점에 결정됩니다. 반면에 Overnight금리는 Backward-

looking금리로, 향후 3개월간 적용될 3-month rate는 향후 3개월간 Overnight금리를 누적하여 산출하게 되고, 즉 금리를 주고 받을 시점이 되어야 확정할 수 있게됩니다.

7.2 Determining Risk-Free rates

OISs는 무위험이자율을 결정하는 데에 매우 중요한 역할을 맡고 있습니다. 먼저, OIS 체결시 결정되는 고정금리인 OIS rate는 현재 스왑계약의 가치가 0이되는 지점에서 결정될 것 입니다.

여기서, 만약 스왑계약 만기시점에 명목금액을 상호간에 주고 받는다고 생각해봅시다. 동일한 원금을 계약당사자간 주고 받으므로 계약의 가치에는 변동이 없습니다.

이때, 변동금리를 받는 경우와 고정금리(OIS rate)를 받는 경우의 현금흐름을 각각 생각해보면, 고정금리를 받는 경우는 OIS rate를 쿠폰으로 지급하고 원금이 스왑계약의 명목금액인 채권과 동일하며, 변동금리를 받는 경우는 Overnight rate를 쿠폰으로 지급하고 원금이 명목금액인 변동금리채권과 동일합니다.

한편, Overnight rate를 할인율로 사용한다면 Overnight rate를 쿠폰으로 지급하는 변동금리채권의 현재 가치는 원금(Par value)과 동일하게 됩니다. 이제, OIS rate는 현재 스왑계약의 가치가 0이되는 지점이라고 했으므로, 변동금리채권과 OIS rate를 쿠폰으로 지급하는 채권의 가치는 동일한 Par value에서 결정됩니다. 즉, OIS rate는 채권의 Par rate와 동일하게 됩니다.

$$\text{Par value} = \text{FRN}'s \text{ price} = \text{Value of float rate receiver} =$$

$$\text{Value of OIS rate receiver} = \text{Treasury bond's price}$$

7.3~5 Reasons for trading Interest Rate Swaps

스왑을 거래하는 이유는 크게 2가지입니다.

먼저, 보유하고 있는 부채나 자산의 금리구조를 바꾸고 싶은 경우입니다. 내가 은행에서 변동금리로 자금을 빌렸다면, 자금의 만기와 이자지급시기가 유사한 스왑 매수계약 체결을 통해 고정금리를 지급하고 변동금리를 받음으로써 은행의 부채를 고정금리 부채로 변환하는 효과가 있습니다. 이러한 작업은 자산과 부채간 듀레이션을 일치시키고자 하는 기관 등에서 주로 사용합니다.

다음으로는 비교우위(Comparative advantage) 전략을 이용하기 위해서입니다. 자금을 빌리고자 할 때, A기업은 변동금리보다 고정금리로 빌릴 때 상대적으로 비교우위가 있고 B기업은 변동금리로 빌릴 때 비교우위가 있다고 가정해봅시다. A기업이 변동금리로 자금을 빌려야 하는 경우, 바로 빌리는 것이 아니라 비교우위가

있는 고정금리로 먼저 자금을 차입하고, 변동금리에 우위가 있는 B기업과 스왑계약(A:매도/B:매수)한다면, 이자비용을 절약하는 효과를 얻을 수 있습니다. 물론, 실제로는 기업에 따라 이러한 비교우위가 없을 수도 있고, 두 기업의 Default Risk가 비대칭적인 점을 고려하기 어려우며, 기업의 신용도에 따라 적용이자율이 미래에 변하기 때문에 이러한 전략이 실행되기 어렵다는 비판도 존재합니다.

④ The organization of swap trading

스왑 매수는 고정금리 지급 및 변동금리 수취, 스왑 매도는 고정금리 수수 및 변동금리 지급을 의미합니다. 실제 시장에서는 매수/매도별로 호가가 나뉘는데, 일반적으로 이 매수/매도 호가의 평균값을 *Swap rate*라고 합니다.

또한, 국가 및 이자율마다 적용되는 Day count convention이 다를 수 있어 유의해야 합니다. 예를 들어 SOFR나 Libor는 $\frac{actual}{360}$ 을 사용하지만, 고정금리의 경우 $\frac{actual}{365}$ 또는 $\frac{30}{360}$ 을 주로 사용해야합니다. 2008년 금융위기 이후 스왑계약 및 미결제약정에 대한 위험관리를 강화하고자 하는 논의가 지속되고 있으며, 현재는 대부분 CCP에서 스왑 계약들을 한데 모아 청산결제를 수행하고, 국제스왑파생상품협회 (International Swaps and Derivatives Association)에서 표준계약서를 제공하며 거래내역을 보고받고 있습니다.

7.6~7 Valuation of Interest Rate Swaps

스왑의 가치평가는, 현재시점에 스왑계약의 NPV가 “0”이 되는 고정금리가 스왑의 계약금리로 결정된다는 것에서 시작합니다.

즉, 이자율 선도계약과 매우 유사합니다. 실제로 스왑계약의 만기까지의 현금흐름을 매 이자교환시기마다 구분한다면, 각각의 이자교환은 하나의 이자율선도계약에 해당합니다. 따라서, 스왑계약의 가치평가는 다음 3단계로 이루어집니다.

- (1) 먼저, 각 이자지급시기에 만기가 도래하는 동일한 변동금리 기반의 선도이자율을 모두 계산한다.
- (2) 해당 선도이자율은 현재시점에 NPV가 “0”이므로 미래 이자지급시기에 지급할 예정인 변동금리와 선도 이자율이 동일하다고 가정하고, 스왑의 미래현금흐름을 계산한다.
- (3) 스왑의 현금흐름을 현재가치로 환산한다.(계약 시작시점이라면, 동일한 현금흐름을 가지는 고정금리 (swap rate)를 산출한다.)

즉, 스왑계약의 가치는 각 이자지급시기의 선도이자율과 무위험이자율만 알고있다면 구할 수 있습니다. 앞서 설명한대로, OIS를 통해 zero rate curve를 구할 수 있고, Forward rate도 계산할 수 있으므로, 스왑계약의 가치는 스왑의 현재 가격만으로 모두 평가할 수 있습니다.

! How the value changes through time

스왑계약의 가치가 “0”이라는 의미는 이자지급시기별 현금흐름의 현재가치가 모두 “0”이라는 의미가 아닙니다. 대신, 모든 현금흐름의 현재가치를 더했을 때 0이 된다는 의미입니다.

스왑 매수(고정 지급/변동 수취)인 상황에서 변동금리가 기간에 따라 우상향하는 형태라면, 스왑계약의 가치를 평가할 때 스왑계약 초기에 지급받는 변동금리보다 후기에 지급받는 변동금리가 크게 계산되므로, 각 이자지급시기의 NPV는 처음에는 (-)이다가 시간이 지날수록 (+)로 전환되는 구조일 것입니다. 이 경우, 스왑계약은 시간이 흐르면서 이자지급시기가 지나면, 자연스럽게 계약의 가치가 증가하게 됩니다. 반대로, 변동금리가 우하향한다면 NPV는 (+)에서 (-)로 전환되고, 시간의 흐름에 따라 계약의 가치가 감소하게 됩니다.

! Difference in compounding methods

IRS의 swap rate를 valuation할 때, swap rate는 해당 스왑계약의 교환주기에 맞는 compounding method를 사용한다는 것을 유의해야 합니다.

즉, 6개월마다 교환한다면 semi-annually, 3개월마다 교환한다면 quarterly, 1개월마다 교환한다면 monthly compounding 방식으로 swap rate를 산출해야합니다.

반면, 할인율로 일반적으로 사용하는 zero rate는 continuous compounding으로 산출하므로, swap rate를 zero rate로 변환할 때 유의해야 합니다.

(Table 7.3 구해보기)

7.8 Fixed-For-Fixed Currency Swaps

또 하나의 유명한 형태의 스왑으로는 고정-고정 통화스왑이 있습니다.

두 가지의 다른 통화에 대해, 계약시점과 종료시점에 통화원금을 주고 받고, 계약 중에는 주기적으로 각 통화에 대한 고정금리를 주고 받는 형태입니다.

예를 들어, 달러가 필요한 A기업이 명목금액 100만달러의 5년 만기 고정통화스왑을 매수한다면, 계약시점에 100만달러를 받고 이에 상응하는 원화를 지급한 다음, 상대방에게 고정금리에 대한 달러이자율을 계속 지급하다가, 만기에 다시 원금을 주고 받는 계약을 맺습니다. 이 때, 원금을 주고 받는데 적용되는 환율은 통상 현재 환율을 사용합니다.

고정통화스왑도 이자율스왑과 마찬가지로 자산이나 부채를 다른 통화의 현금흐름으로 바꾸고 싶거나, 두 가지의 통화에 대한 차입비용에 비교우위가 있는 경우 비교우위 전략을 사용하는 데에 활용됩니다.

7.9~10 Valuation of Fixed-For-Fixed Currency Swaps

고정통화스왑도 마찬가지로 선도계약을 이용하여 평가합니다.

- (1) 먼저, 고정통화스왑의 미래 현금흐름은 고정되어 있으므로, 각 이자지급시기 및 만기에 따른 현금흐름을 각 통화별로 구합니다.
- (2) 현재 환율을 이용하여 각 이자지급시기별 선도환율을 계산합니다.
- (3) 각 이자지급시기별 타방 통화에 대한 현금흐름을 선도환율을 이용하여 평가합니다.
- (4) 각 이자지급시기별 순현금흐름을 현재가치로 환산합니다. (계약시작시점이라면, 환율 또는 고정이자율을 $NPV=0$ 이 되도록 결정합니다.)

한편, 고정통화스왑의 각 통화별 미래현금흐름은 각 통화별 채권과 동일합니다. 따라서, 고정통화스왑의 가치를 채권의 가격을 이용하여 표현할 수 있습니다.

$$V_{swap, \text{foreign pay}} = B_D - S_0 B_F$$

i Another Currency Swaps

또 다른 통화스왑으로는, Fixed-for-floating Swap, Floating-for-floating Swap이 있습니다.

원금을 처음과 마지막에 주고 받는 방식은 동일하지만, 고정통화스왑과 다르게 어느 일방의 통화 또는 양방의 통화에 적용되는 이자가 변동금리라는 차이점이 있습니다.

이러한 유형의 통화스왑의 현금흐름은, 고정통화스왑 + 이자율스왑과 동일하기 때문에, 가치평가를 할 때에도 두가지 스왑으로 구분한 다음, 앞서 서술한 선도계약을 이용한 평가방식을 적용하여 각 스왑을 평가하고 더해서 산출할 수 있습니다.

7.11~13 Other Types of Swaps

CDS, Credit Default Swaps

먼저, 앞서 설명하였던 Credit Risk의 관리는 파생상품계약 및 스왑계약에 있어서 매우 중요합니다. CCP를 이용하지 않고 계약 당사자간 청산결제가 이루어지는 경우, 거래상대방의 Default로 인해 예기치 못한 손실이 발생할 수 있기 때문입니다.

🔥 Market Risk vs. Credit Risk

Market Risk : 파생상품의 기초자산의 가격변동, 이자율의 변동 등으로 인해 손실을 입을 위험

Credit Risk : 거래상대방의 Default 등으로 결제불이행이 발생해 손실을 입을 위험

파생상품계약은 두 가지 위험이 항상 상존하지만, Market Risk는 다른 상품으로 Hedge할 수 있는 반면,

Credit Risk는 완전히 없앨 수는 없습니다.

이러한 Credit Risk를 Market Risk처럼 관리하고자 만들어진 상품이 CDS입니다. 신용하락 또는 Default를 우려하는 A기업이 이를 Hedge하기 위해 명목금액 100만달러에 5년만기 CDS 매수를 한다면, 5년 뒤에 A기업의 회사채 신용도 하락이 없었다면 A기업은 매도자에게 100만달러×*CDS spread*를 지급하고, 신용도 하락 등으로 회사채 금리가 상승하였다면, 100만달러에 대한 조달비용 상승분을 매도자에게 수취하는 구조입니다.

매수자는 신용하락에 대한 보험을 가지고 이에 대한 대가를 지급하며, Default 상황이 발생하면 매도자가 손실을 보전하는 구조로 마치 보험과 같은 성격을 가지고 있습니다.

Other Interest Rate Swaps

- (1) Floating-For-Floating IRS : 변동금리 간에 IRS로, 가산금리를 정해서 결정. Basis swaps
- (2) Amortizing swap : 스왑의 만기까지 명목금액이 지속 감소
- (3) Step-up swap : 스왑의 만기까지 명목금액이 지속 증가
- (4) Forward swap : 계약 후 일정시점까지는 이자교환 없음, deferred swaps.
- (5) compounding swap : 일방 or 양방의 이자를 누적하여 만기시점에 일시 교환
- (6) Accrual swap : 변동금리가 일정 수준 이내일때만 고정금리 지급

Quantos

통화스왑의 일종이지만, 원금 및 이자교환을 어느 한 통화로만 결제하는 방식의 스왑계약으로, Diff swap이라고도 함.

Equity Swaps

총수익스왑(Total Return Swap)의 일종으로, 주식에서 발생하는 자본수익, 배당 등 총수익을 미리 정해둔 고정 or 변동금리와 교환하는 스왑.

Options

- (1) Extendable swap : 어느 일방에 스왑의 만기를 연장시킬 수 있는 권리가 부여된 스왑계약.
- (2) Puttable swap : 어느 일방에 스왑을 조기종료시킬 수 있는 권리가 부여된 스왑계약.
- (3) Swaptions : Options on swaps라고도 하며, 어느 일방에 미래 교환시기에 스왑계약에 따라 정해둔 교환을 실행할지 말지에 대한 권리가 부여된 스왑계약.

Other Swaps

- (1) Commodity swap : 동일한 가격의 만기가 다른 선도계약을 연속적으로 체결하고자 하는 경우, 상품스왑을 이용함.
- (2) Volatility swap : 미리 정해둔 기초자산과 변동성에 대해, 교환시기에 해당 변동성×명목금액과 교환시기에 실현된 변동성(Historical volatility)×명목금액을 교환하는 스왑계약.

Chapter 10

옵션시장의 구조

Mechanics of Options Markets

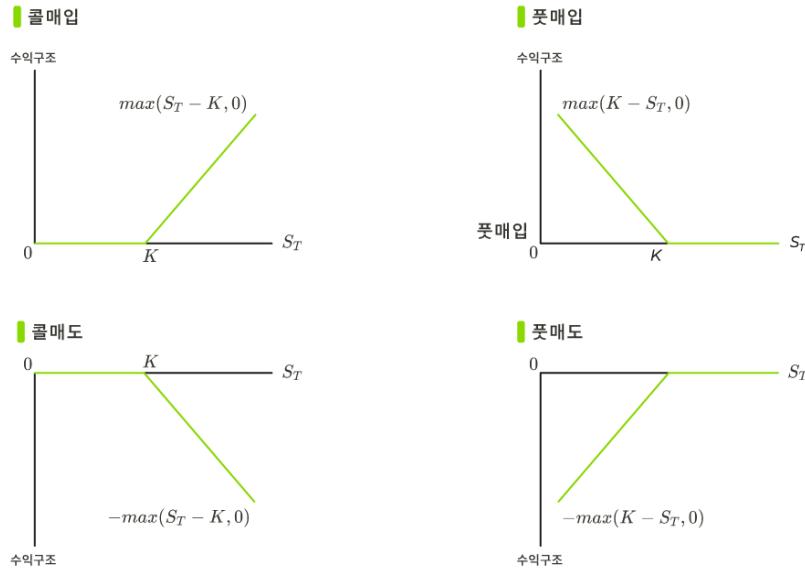
10.1~3 Types, Positions, Underlying Assets of Options

옵션의 종류는 기본적으로 무엇인가를 “살” 권리 및 “팔” 권리로 나뉩니다.

기초자산을 살 권리를 콜옵션, 팔 권리를 풋옵션이라고 하며, 추가적으로 옵션의 권리행사를 만기일(Expiration date, Maturity date)에만 할 수 있는 옵션을 유럽형(European) 옵션, 만기일 이전에 옵션 매수자가 원하는 때에 언제나 권리행사를 할 수 있는 미국형(American) 옵션이라고 합니다.

옵션에 따른 권리는 옵션 매수자에게 있으며, 매도자는 매수자가 권리행사를 하고자 하는 경우 반드시 이에 응해야 합니다. 따라서 옵션 포지션은 총 4개로 구분됩니다.

1. 콜옵션 매수, *Long in Call*, $\max(S_T - K, 0)$
2. 풋옵션 매수, *Long in Put*, $\max(K - S_T, 0)$
3. 콜옵션 매도, *Short in Call*, $-\max(S_T - K, 0)$
4. 풋옵션 매도, *Short in Put* $-\max(K - S_T, 0)$



Q41

Figure 1: Options payoff, from A41

옵션의 기초자산은 매우 다양합니다. 여기서는 주식옵션(Stock Options), ETP옵션, 통화옵션, 지수옵션, 선물옵션(Futures Options)를 위주로 살펴볼 예정입니다.

10.4~10 Specification of Stock Options

대표적인 예시로, Cboe(Chicago Board Options Exchange)에서 거래되는 주식옵션(American stock option)에 대해서 알아보겠습니다.

- 만기구조 : 매월 세번째 금요일 만기 및 연속 4개월물이 상장되는 것이 기본입니다. 매주 만기가 도래하는 위클리옵션도 존재하며, 만기가 3년 이상인 LEAPS(Long term equity anticipation securities) 및 시장참여자가 자유롭게 옵션스펙을 설정하는 비표준물 옵션인 FLEX옵션도 존재합니다.
- 행사가격 : 종목별로 \$2.5, \$5, \$10으로 구분됩니다.
- 용어 : 특정 옵션에 대해서, 콜 또는 풋 어느 한종류를 지칭할 때 Option Class, 전체를 지칭할 때 Options series라고 합니다. 또한, 행사가격과 현재 기초자산가격에 따라 내재가치가 0보다 큰 옵션을 내가격(ITM, In The Money), 내재가치가 0보다 작은 옵션을 외가격(OTM, Out of The Money), 내재가치가 0인 옵션을 등가격(At The Money)라고 합니다.

- 배당 및 증자 : 일반적으로 현금배당은 미결제약정 및 행사가격 등 조정이 없으나, 주가의 10%를 초과하는 현금배당은 이사회 의결을 통해 조정해주곤 합니다. 이외의 증자 및 주식배당의 경우 그 비율만큼 옵션 미결제약정(또는 기준가격)과 행사가격을 조정하고 있습니다.
- 보유한도 : 미결제약정수량 보유한도(Position limit) 및 최대 행사가능수량(Exercise limit)가 존재하며, 기초주식에 따라 수량 상이.
- 거래제도 : 현재는 거의 모든 거래가 전산화되어있으며, 주요 종목에 양방향 호가를 공급하는 시장조성 제도를 운영하고 있어 편리하게 거래가 가능하며, 반대거래를 통해 언제든지 보유한 포지션을 시장에서 해소할 수 있음.
- 거래비용 : 시장에서 옵션을 거래할 때는, 명시적 비용과 암묵적 비용이 존재합니다.
 - 명시적 비용 : 거래세, 거래수수료, 위탁수수료 등
 - 암묵적 비용 : 호가스프레드 비용, 시장충격비용 등
- 증거금
 - 매수 : 일반적으로 옵션매수자는 프리미엄(가격)을 거래시점에 전액 부담하는 것이 일반적이나, 만기가 9개월 이상 남은 장기옵션을 거래할 때는 프리미엄을 25%만 부담하고 미수로 거래하는 제도도 존재함
 - 매도 : 다른 포지션 없이 옵션 매도만을 가지고 있는 경우, Naked option이라고 하며, Cboe는 이 경우 “옵션매도대금 + 기초자산가격*20%” 수준의 증거금을 징수
- 옵션청산회사, OCC : 모든 장내옵션은 OCC를 통해서 청산되며, OCC는 청산결제 외에도 옵션 매수자의 권리행사가 있는 경우, 매도자에게 공정하고 합리적으로 배정함으로써 원활히 옵션포지션이 청산될 수 있도록 관리하고 있음.
- 규제기관 : 국내는 금융위에서 모든 규제권한을 가지고 있으나, 미국의 경우 주식/주가지수/통화옵션은 SEC에서, 선물에 대한 옵션은 CFTC에서 규제를 관할하고 있음.
- 세금 : 옵션거래에 대한 세금은 매우 tricky한 면이 있음. 일반적으로는 옵션거래에서 발생하는 자본손익(capital gain/loss)에 대해서 세금을 부과하며, 옵션이 권리행사 또는 기간이 만료되거나/반대거래로 포지션이 소멸할 때 해당 수익을 인식하고 있음.
 - Wash sale rule : 주식을 팔고 30일 이내에 다시 사는 경우는 수익인식을 안하는데, 유사하게 주식을 팔고 30일 이내에 콜옵션을 매수하는 경우 수익인식 안함.
 - Constructive Sales : 솟포지션은 해당 포지션을 청산하기 전까지는 손익인식이 안돼는 점을 방지하기 위해, 즉 공매도나 파생상품 솟포지션으로 과세를 미루는 것을 막기위해 TaxRelief Act of 1997에서 (1) 공매도를 하는 경우, (2) 선도/선물계약을 하는 경우, (3) 이와 유사한 손익구조를 만드는 경우 Constructive Sales로 인식하여 세금을 부과하도록 규정하였음. 즉, 주식을 매도하지 않고 주식선물/콜옵션을 매도하거나 풋옵션을 매수하는 경우, 주식을 매도한 것으로 간주하고 세금을 부과하는 것임.

- 주식옵션의 활용
 - 워런트 : 워런트가 포함된 채권을 BW(Bond with Warrent)라고 하며, 신주인수권부사채라고도 합니다. 채권에 향후 주식을 특정가격에 매수할 수 있는 권리인 주식콜옵션이 합쳐진 형태입니다.
 - 임직원 스톡옵션 : 임직원 동기부여 및 사기진작을 위해 통상 ATM에 발행해서 향후 특정시점 이후에 권리행사할 수 있도록 만든 주식옵션입니다.
 - 전환사채 : CB(Convertible bonds)라고 하며, 채권으로 발행되지만 향후 액면가 대비 정해진 비율에 따라 주식으로 전환할 수 있는 채권입니다.
- 장외옵션 : 옵션시장은 장내보다 장외시장이 훨씬 규모가 큰 시장이며, 일반적인 장내옵션(plain vanilla) 이외에도 다양한 구조로 설계한 이색옵션(exotic options)이 거래되곤 합니다.

Chapter 11

Properties of Stock Options

11.1 Factors Affecting Option Prices

옵션 가격에 영향을 미치는 요소는 크게 6가지가 있으며, 이 변수들과 옵션 가격과의 상관관계는 다음과 같습니다.

Variable	European Call	European Put	American call	American put
Current stock price, S_0	+	-	+	-
Strike prkce, K	-	+	-	+
Time to expiration, T	?	?	+	+
Volatility, σ	+	+	+	+
Risk-free rate, r_f	+	-	+	-
Amount of future dividend, d	-	+	-	+

1. 주가 및 행사가격 : 만기 pay-off를 고려하면 쉽게 이해할 수 있습니다.
2. 만기
 - 미국형 : 언제나 행사할 수 있으므로 만기가 길수록 옵션 가치는 증가
 - 유럽형 : 일반적으로 만기가 길수록 옵션 가치가 증가하지만, 중도배당이 존재하는 경우나 Deep-ITM 풋옵션의 경우에는 만기가 짧은 옵션이 유리한 경우도 존재함
3. 변동성 : 간단히 설명하자면, 옵션 매수자의 경우 이익은 제한이 없고 손실은 프리미엄으로 제한되어 있으므로 변동성이 클 수록 옵션 기대이익이 증가하게 되므로 변동성과 옵션가격은 항상 양의 상관관계에 있음
4. 무위험이자율 : 일반적으로 무위험이자율이 증가하면 주가의 요구수익률이 증가하게 되고, 더불어 미래 현금흐름의 현재가치가 감소하는 효과가 있음. 즉, 콜옵션의 가치는 증가하고 풋옵션의 가치는 감소하는 경향이 있음.

5. 배당 : 배당이 존재하면 배당액으로 주가가 하락함. 콜옵션의 가치는 감소하고 풋옵션의 가치는 증가함.

11.2 Assumptions and Notation

이전 챕터와 동일하게 모든 시장참가자는 거래비용이 없고, 동일한 세율을 적용받으며, 무위험이자율로 빌리거나 빌려줄 수 있다는 가정을 사용할 것입니다.

대문자는 American option을, 소문자는 European option을 의미합니다.

11.3 Upper and Lower Bounds for Option Prices

Upper bound

기본적으로, 권리행사를 통해 행사가격을 지불하고 주식을 사거나(콜), 행사가격에 주식을 파는(콜) 옵션의 성질에 따라 콜옵션은 현재 주가보다 비쌀 수 없고, 풋옵션은 행사가격의 현재가치보다 비쌀 수 없습니다.

콜옵션이 현재 주가보다 비싸다면 콜옵션 매도+주식 매수를, 풋옵션이 행사가격의 현재가치보다 비싸다면 풋옵션 매도+무위험이자율에 투자함으로써 간단한 차익거래가 가능하기 때문입니다.

$$C \leq S_0, \quad c \leq S_0, \quad P \leq K, \quad p \leq Ke^{-rT}$$

Lower bound for Non-dividend

European

두 가지 포트폴리오를 비교해보겠습니다.

1. 콜옵션 매수(c) 및 행사가격의 현재가치(Ke^{-rT})만큼 무위험이자율에 투자
2. 주식을 현재가격(S_0)에 매수

만기시점 T 에 두 포트폴리오의 가치는 다음과 같습니다.

1. $\max(S_T - K, 0) + K = \max(S_T, K)$
2. S_T

이에 따라, 포트폴리오 1의 가치는 항상 2보다 커야하므로, $c \geq S_0 - Ke^{-rT}$ 가 만족합니다.

마찬가지로,

1. 풋옵션 매수(p) 및 주식을 현재가격(S_0)에 매수
2. 행사가격의 현재가치(Ke^{-rT})만큼 무위험이자율에 투자

만기시점 T 에 두 포트폴리오의 가치는 다음과 같습니다.

1. $\max(K - S_T, 0) + S_T = \max(K, S_T)$
2. K

이에 따라, $p \geq Ke^{-rT} - S_0$ 가 만족합니다.

한편, 옵션의 가치는 항상 0보다 크거나 같아야하므로 배당이 없는 유럽형 옵션의 하한은 다음과 같습니다.

$$c \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0), p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$$

American

먼저, 배당이 없을 때는 콜옵션의 시간가치가 항상 0보다 크거나 같으므로 미국형 콜옵션과 유럽형 콜옵션의 가격이 항상 같습니다.

Tip

배당이 없다면, 조기행사의 가치는 “0”입니다.

만약, 만기 이전에 내재가치가 높아 미국형 콜옵션을 조기행사하고자 하는 투자자가 있다면, 조기행사 대신에 주식을 공매도하고 공매도대금을 무위험이자율에 투자함으로써 무위험차익을 얻을 수 있습니다. 직관적으로, 주식을 보유함으로써 발생하는 (+) 현금흐름이 없으므로, 미리 주식을 매수함으로써 얻는 이익은 없지만 행사가격만큼의 현금에 대한 기회비용이 발생하기 때문에 조기행사의 가치가 0이됩니다. 반면, 풋옵션의 경우 조기행사함으로써 행사가격만큼 현금이 들어오기 때문에 조기행사할 유인이 발생할 수 있습니다.

한편, 미국형 풋옵션은 언제나 권리행사를 할 수 있으므로 $P \geq \max(K - S_0, 0)$ 의 하한을 갖게 됩니다.

옵션의 종류별로 상한 및 하한을 정리하면 아래와 같습니다.

$$\max(S_0 - Ke^{-rT}) \leq c = C \leq S_0$$

$$\max(Ke^{-rT} - S_0) \leq p \leq Ke^{-rT}, \quad \max(K - S_0, 0) \leq P \leq K$$

11.4~6 Put-Call Parity

옵션 하한을 산출할 때 이용한 포트폴리오를 이용해 콜옵션과 풋옵션의 가격간에 중요한 관계를 유도할 수 있습니다.

콜옵션과 풋옵션의 포트폴리오 1을 주목해봅시다.

1. 콜옵션 매수(c) 및 행사가격의 현재가치(Ke^{-rT})만큼 무위험이자율에 투자
2. 풋옵션 매수(p) 및 주식을 현재가격(S_0)에 매수

만기시점의 포트폴리오의 가치는 다음과 같습니다.

1. $\max(S_T - K, 0) + K = \max(S_T, K)$
2. $\max(K - S_T, 0) + S_T = \max(K, S_T)$

즉, 두 포트폴리오는 만기 T 시점에 동일한 Pay-off를 가지고 있는 동일한 포트폴리오입니다.

따라서 두 포트폴리오의 가치는 동일해야하므로, 아래와 같이 Put-Call parity를 유도할 수 있습니다.

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0$$

💡 ATM 옵션의 가격

Put-call parity에서 ATM($S_0 = K$) 옵션인 경우,

$$c + S_0 e^{-rT} = p + S_0 \Rightarrow c - p = S_0(1 - e^{-rT}) > 0$$

즉, ATM에서는 콜옵션의 가치가 풋옵션보다 높은 것을 알 수 있습니다.

Parity in American options

풋콜패리티는 유럽형 옵션에서만 성립하므로, 미국형 옵션에서는 이와 유사한 부등식을 유도할 수 있습니다.

먼저, 다음 세가지 포트폴리오를 고려해보겠습니다.

1. 콜옵션 매수(c) 및 행사가격의 현재가치(Ke^{-rT})만큼 무위험이자율에 투자
2. 풋옵션 매수(p) 및 주식을 현재가격(S_0)에 매수
3. 미국형 풋옵션 매수(P) 및 주식을 현재가격(S_0)에 매수

Put-call parity에 따라 1과 2의 가치가 같고, 미국형 옵션의 가치는 유럽형 옵션보다 항상 크거나 같으며, 배당이 없을 때는 미국형 콜옵션과 유럽형 콜옵션의 가격이 같으므로 아래와 같이 정리할 수 있습니다.

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \leq P + S_0 \Rightarrow c - P = C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

다음으로, 두가지 포트폴리오를 고려해보겠습니다.

1. 유럽형 콜옵션 매수(C) 및 행사가격(K)만큼 현금 보유
2. 미국형 풋옵션 매수(P) 및 주식을 현재가격(S_0)에 매수

먼저, 조기행사 없이 만기보유하는 경우 두 포트폴리오의 가치는,

1. $\max(S_T - K, 0) + Ke^{rT} = \max(S_T, K) + K(e^{rT} - 1)$
2. $\max(K - S_T, 0) + S_T = \max(K, S_T)$

포트폴리오 1에서는 현금에서 무위험이자율만큼 수익이 발생하므로 포트폴리오 2보다 가치가 높게 됩니다.

다음으로, 풋옵션에서 조기행사가 발생하는 경우를 살펴보겠습니다.

조기행사가 $0 < t < T$ 인 t시점에 발생한다면, t시점에 풋옵션의 포트폴리오 2의 가치는 K 가 되며 만기 T 시점에는 $Ke^{r(T-t)}$ 가 됩니다.

반면, T 시점에 포트폴리오 1의 가치는 옵션이 없더라도 Ke^{rT} 이므로, 항상 포트폴리오 1의 가치가 크거나 같게됩니다.

즉, $C + K = c + K \geq P + S_0$ 가 만족하며, 상한 및 하한을 정리하면 아래와 같습니다.

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Effect of Dividends

European

이제, 배당이 있는 경우를 살펴보겠습니다. 만기시점까지 주식에서 발생하는 배당금의 현재가치를 D 라고 하고, 다음 포트폴리오를 살펴보겠습니다.

1. 유럽형 콜옵션 매수(c) 및 $D + Ke^{-rT}$ 만큼 무위험이자율에 투자
2. 주식 매수(S_0)
3. 유럽형 풋옵션 매수(p) 및 주식 매수(S_0)

4. $D + Ke^{-rT}$ 만큼 무위험이자율에 투자

위와 같은 방식으로 만기 T 시점에 각 포트폴리오의 가치를 비교하면,

1. $\max(S_T - K, 0) + De^{rT} + K = \max(S_T, K) + De^{rT}$
2. $S_T + De^{rT}$
3. $\max(K - S_T, 0) + S_t + De^{rT} = \max(K, S_T) + De^{rT}$
4. $De^{rT} + K$

각 옵션의 하한 및 풋콜페리티를 정리하면,

$$(1) \geq (2) \Rightarrow c \geq \max(S_0 - D - Ke^{-rT}, 0) = \max(S_0 e^{-dT} - Ke^{-rT})$$

$$(3) \geq (4) \Rightarrow p \geq \max(D + Ke^{-rT} - S_0, 0) = \max(Ke^{-rT} - S_0 e^{-dT})$$

$$(3) \equiv (4) \Rightarrow c + D + Ke^{-rT} = p + S_0 \Rightarrow c - p = S_0 - D - Ke^{-rT} = S_0 e^{-dT} - Ke^{-rT}$$

Tip

주식의 배당이 기간 중 연속복리배당수익률 d 로 주어져 있다면, 포트폴리오에서 주식을 매수할 때 $S_0 e^{-dT}$ 만큼 매입하고, 배당은 주식에 재투자한다고 가정하면 등식의 마지막 결과를 얻을 수 있습니다.

American

앞서 배당이 없는 경우에서 $C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$ 가 성립하는 것을 살펴보았습니다.

변수와 옵션가격 간의 관계에서, 배당은 콜옵션에서 (-), 풋옵션에서 (+)인 것을 확인하였습니다. 나중에 살펴보겠으나, 동일한 배당이 존재한다면 이 둘의 변화는 상쇄될 수 있습니다.

따라서 $C - P$ 포트폴리오에서 배당이 존재하는 경우, 두 변화분은 상쇄되므로 변동이 없게 되고, 따라서 배당이 존재하는 경우에 대해서도 위의 상한이 성립하게 됩니다.

다음으로, 두가지 포트폴리오를 고려해보겠습니다.

1. 유럽형 콜옵션 매수(c) 및 $D + K$ 를 무위험이자율에 투자
2. 미국형 풋옵션 매수(P) 및 주식 매수(S_0)

조기행사가 없다면 만기 T 시점의 가치는 포트폴리오 1이 항상 크거나 같습니다.

1. $\max(S_T - K, 0) + (D + K)e^{rT} = \max(S_T, K) + De^{rT} + K(e^{rT} - 1)$
2. $\max(K - S_T) + S_T + De^{rT} = \max(K, S_T) + De^{rT}$

다음으로, 배당이 발생한 후 조기행사가 $0 < t < T$ 인 t시점에 존재하는 경우, t시점의 포트폴리오 2의 가치는 $K + De^{rt}$ 이며, 만기 T 시점의 가치는 $Ke^{r(T-t)} + De^{rT}$ 입니다.

반면, 포트폴리오 1은 옵션이 없더라도 만기 T 시점에 $(K + D)e^{rT}$ 만큼의 가치가 있으므로 포트폴리오 1의 가치가 항상 크게 됩니다.

따라서, $C + D + K \geq c + D + K \geq P + S_0$ 가 성립하며, 미국형 옵션에서 배당을 반영한 부등식은 아래와 같습니다.

$$S_0e^{-dT} - K = S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Chapter 13

이항모형 (Binomial Trees)

옵션의 프라이싱에 대한 가장 유명한 방법 중 하나인 이항모형을 다릅니다.

CRR모형(Cox, Ross, Rubinstein 1979)을 다룰 예정이며, 주가는 랜덤워크를 따르고 차익거래가 발생하지 않는다는 기본적인 가정을 전제합니다. 이는 BSM(Black-Sholes-Merton)모형과 함께 매우 중요한 방법론으로, 이항모형의 step이 많아질 수록 두 모형의 결과값은 동일해집니다. 이러한 성질에 대해서는 chapter15 및 21에서 보다 자세히 다룰 예정입니다.

CRR모형은 (1) 일반적인 no-arbitrage을 기반으로 하고, (2) 미국형 옵션 및 이색옵션을 가치평가하는 데에 직관적이고 유용하며, (3) 위험중립가치평가(Risk-neutral valuation)을 사용한다는 점에서 매우 중요합니다.

13.1 A one-step binomial model and a no-arbitrage argument

옵션의 만기를 T 라고 할 때, 향후 주가가 T 시점까지 오르거나 내리는 단순한 구조로 되어있다고 가정하고, 현재 주가를 S_0 , 주가 상승시 $S_T = S_0 \times u$ 및 하락시 $S_T = S_0 \times d$, 행사가격 K 의 유럽형 옵션의 현재가격이 f_0 로 주어져있다고 해보겠습니다.

현재시점에 주식을 Δ 만큼 매수하고, 1주에 대한 옵션을 매도하는 포트폴리오 $\Delta S_0 - f_0$ 를 만든다면, 주가 상승시 포트폴리오의 가치는 $\Delta S_0 u - f_u$ 및 하락시에는 $\Delta S_0 d - f_d$ 로 결정됩니다.

여기서, 해당 포트폴리오를 무위험포트폴리오로 만들어 옵션의 가치를 평가할 수 있습니다. 해당 포트폴리오가 무위험이라는 의미는 주가 상승 및 하락시의 포트폴리오 가치가 동일하게 되어 변동성이 0이 된다는 것을 말합니다.

즉, $\Delta S_0 u - f_u = \Delta S_0 d - f_d \Rightarrow \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$ 인 Δ 를 도출하여 주식을 매수한다면 해당 포트폴리오는 위험이 0이 될 것 입니다.

💡 13.6 Options Delta

위의 델타는 Option Greeks 중, 기초자산가격 변동에 따른 옵션가격의 민감도인 델타(Δ)에 해당합니다.

위의 주식매수+옵션매도 포트폴리오에서 우리는 만기 pay-off를 고정시키는 델타를 산출하였으므로, 이는 현재시점에서 주식가격의 변동분과 옵션가격의 변동분이 상쇄됨을 의미합니다. 즉, 포트폴리오에서 주식의 가격이 1만큼 변할때 이에 대응되는 옵션의 가치변화는 Δ 에 해당하므로, 이는 기초자산 가격에 대한 옵션가격의 민감도와 같습니다.

한편, 이렇게 옵션을 통해 주식포트폴리오의 가격변동분을 완벽히 상쇄하는 것을 델타헷지(Delta hedging)라 합니다.

따라서, 포트폴리오의 주가 상승 및 하락에 따른 가치가 $\Delta S_0 u - f_u$ 로 고정되며, no-arbitrage 가정에 따라 T 까지의 수익률은 무위험이자율 r_f 로 정해져야 합니다.

즉, 포트폴리오의 현재가치는 미래 pay-off를 무위험이자율로 할인한 현재가치와 동일해져야 하며, $(\Delta S_0 - f_0 = (\Delta S_0 u - f_u)e^{-rT})$ 여기에 $\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}$ 를 대입하여 정리하면, 아래와 같이 옵션의 현재가치를 평가할 수 있습니다.

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_0 &= \Delta S_0 - (\Delta S_0 u - f_u)e^{-rT} = \Delta S_0(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT} \\ \Rightarrow f_0 &= \frac{f_u - f_d}{u - d}(1 - ue^{-rT}) + f_u e^{-rT} = \frac{f_u - f_d - f_u ue^{-rT} + f_d ue^{-rT} + (u-d)f_u e^{-rT}}{u - d} \\ \Rightarrow f_0 &= \frac{f_u(1 - de^{-rT}) - f_d(1 - ue^{-rT})}{u - d} = e^{-rT} \frac{f_u(e^{rT} - d) + f_d(u - e^{rT})}{u - d} \\ \Rightarrow f_0 &= e^{-rT} \frac{f_u(e^{rT} - d) + f_d(1 - (e^{rT} - d))}{u - d} = e^{-rT}(f_u \times p + f_d \times (1 - p)) \text{ for } p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}\end{aligned}$$

❗ Probability of stock price

위의 1-step binomial tree는 향후 주식이 상승할때의 가격과 하락할 때의 가격만을 이용하여 전개하고 있습니다.

즉, 주식이 상승할 확률과 하락할 확률은 다루고 있지 않습니다. 따라서, 상승할 확률이 0.5 일때와 0.9 일때의 옵션 가격은 동일합니다. 이는 매우 역설적으로 보입니다.

이러한 이유는 우리가 옵션을 평가할 때, 주식의 향후 가격을 이용해 상대적으로 평가하였기 때문입니다. 주식의 상승 또는 하락확률은 이미 주식의 상승시 가격과 하락시 가격에 내재되어 있기 때문에, 다시 한번 확률을 고려할 필요가 없어지게 됩니다.

13.2 Risk-Neutral Valuation

위험중립가치평가란 파생상품을 프라이싱할 때, 모든 투자자가 위험중립적(risk-neutral)이라고 가정하는 것을 말합니다. 이는 모든 자산의 기대수익률이 무위험이자율과 동일하다는 의미이며, 이러한 투자자들만 존재하는

세상을 *risk-neutrall world*라고 합니다.

위험중립세상은 크게 두가지의 특징이 있습니다.

- (1) 모든 투자자산의 기대수익률은 무위험이자율과 같다.
- (2) 따라서, 투자자산의 향후 pay-off를 현재가치로 환산할 때 적용하는 할인률은 무위험이자율이다.

이제 다시, 현재 주가(S_0)는 T 시점까지 상승(S_0u)하거나 하락(S_0d)하고, 주가가 상승할 확률을 p 라고 가정하면 위험중립세상에서 아래와 같이 표현할 수 있습니다.

$$E(S_T) = S_0e^{rT}, E(S_T) = p \times S_0u + (1 - p) \times S_0d$$

$$\Rightarrow S_0e^{rT} = S_0(p(u - d) + d) \Rightarrow p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

즉, 위험중립세상에서 주가의 상승확률은 $\frac{e^{rT} - d}{u - d}$ 와 같으며, 이는 1-step binomial tree에서 전개한 $f_0 = e^{-rT}(f_u p + f_d(1 - p))$ 의 p 와 동일합니다. 즉, 옵션의 현재가치는 위험중립세상에서 주가의 상승/하락 확률에 따른 옵션의 미래 pay-off들의 합의 현재가치와 같다는 것을 의미하며, 이를 통해 위험중립세상에서 평가한 옵션의 가치가 실제 세상에서도 동일하게 적용된다는 중요한 사실을 알 수 있습니다.

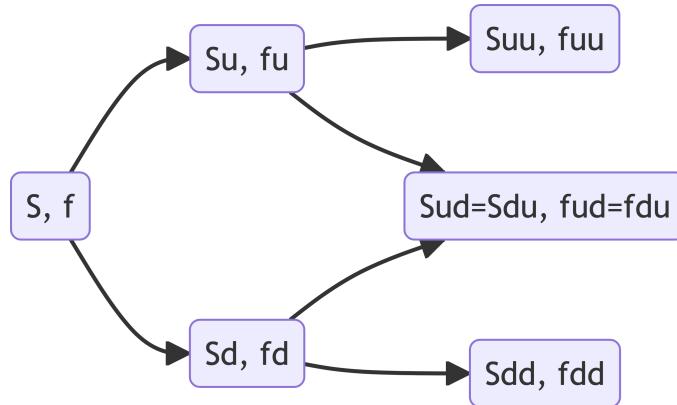
Tip

실제 세상에서 투자자는 위험자산에 투자할 때, 보다 높은 수익률을 기대(*risk-averse*)하기 때문에 실제 세상과 위험중립세상은 차이가 있습니다. 그러나, 1-step binomial tree와 위험중립세상에서 주가의 상승확률의 결과를 통해 위험중립세상에서 평가한 파생상품의 가치는 실제 세상에서 동일하게 적용된다는 것을 알 수 있습니다.

한편, 실제 세상(*risk-averse*)에서 주가의 기대수익률은 무위험이자율보다 높을 것이므로 실제 세상에서 산출한 상승확률은 위험중립세상보다 클 것입니다. 다만, 이 확률을 이용하여 옵션을 가치평가하는 경우 미래 pay-off에 적용하는 할인률을 옵션의 기대수익률로 변경해주어야 합니다.

그러나, 주식보다 위험한 자산인 옵션의 할인률을 산출하는 것은 매우 어려우므로, 위험중립세상에서 옵션을 평가하는 것이 실제 세상과 동일하다는 것은 매우 강력한 도구입니다.

13.3 Two-step binomial trees



이제, binomial tree를 확장하여 2-step model을 살펴보겠습니다. 주가가 상승하거나 하락하는 것이 2번에 걸쳐서 이루어지고, 각 기점의 시간을 Δt 라고 하면, 1-step binomial tree에 따라 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$f_0 = e^{-r\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d) \text{ for } p = \frac{e^{-r\Delta t} - d}{u - d}$$

또한, 이항모형의 2-step과정은 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

$$f_u = e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}) \text{ and } f_d = e^{-r\Delta t}(pf_{du} + (1-p)f_{dd})$$

$$\Rightarrow f_0 = e^{-r\times 2\Delta t}(p^2f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2f_{dd})$$

i 13.4 Put options example

Binomial tree의 일반화된 식은 콜옵션과 풋옵션에 관계없이 적용할 수 있습니다.

13.5 American Options

Binomial Tree는 미국형옵션을 가치평가할 때 아주 유용한 모형입니다. 유럽형옵션과 동일하게 만기까지 모든 node를 전개한 후, 현재가치로 환산할 때 하나의 node씩 진행하면서 조기행사하였을 때와 비교하면 됩니다.

$$f_u = \max[\max(K - S_u, 0), e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud})]$$

$$f_d = \max[\max(K - S_d, 0), e^{-r\Delta t}(pf_{du} + (1-p)f_{dd})]$$

$$f_0 = \max[\max(K - S_0, 0), e^{-r\Delta t}(pf_u + (1-p)f_d)]$$

즉, 위와 같이 만기시점부터 이전 step으로 내려오면서 bootstrapping 방식으로 미국형 옵션의 가치를 산출할 수 있습니다.

13.7 Matching Volatility with u and d

앞서 무위험이자율, 주가상승/하락률, 시간의 증분이 주어졌을 때 위험증립확률 $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$ 로 결정되는 것을 알아보았습니다.

이제, 주가상승률 및 하락률을 주가변동성을 이용하여 표현해보겠습니다. 주가수익률의 표준편차를 σ 라고 할 때, 시간의 증분 Δt 동안의 주가수익률의 표준편차는 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 로 표현할 수 있습니다.

! Chapter 15 : 주요 내용

주가가 Geometric Brownian Motion을 따른다고 가정하겠습니다. ($\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t$)

즉, 주가의 기대수익률이 μ , 표준편차가 σ 이면, 매우 짧은 시간에 대한 주가수익률이 정규분포($\frac{\Delta S}{S} \sim N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$)를 따른다고 할 수 있습니다.

이때, 위험증립세상을 가정하면 $\mu = r$ 입니다.

앞서 binomial tree의 한단계의 step에서 주가의 변동성을 $E[X^2] - (E[X])^2$ 으로 표현하면 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$\sigma^2\Delta t = p(u-1)^2 + (1-p)(d-1)^2 - (e^{r\Delta t} - 1)^2$$

$$= p[(u-1)^2 - (d-1)^2] + (d-1)^2 - e^{2r\Delta t} + 2e^{r\Delta t} - 1$$

$$= \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} [(u+d)(u-d) - 2(u-d)] + d^2 - 2d - e^{2r\Delta t} + 2e^{r\Delta t}$$

$$= e^{r\Delta t}(u+d) - ud - d^2 - 2e^{r\Delta t} + 2d + d^2 - 2d - e^{2r\Delta t} + 2e^{r\Delta t}$$

$$= e^{r\Delta t}(u + d) - ud - e^{2r\Delta t} \dots (13.13)$$

여기서, 주가 상승 및 하락에 따른 비율을 동일하고 시간의 증분은 매우 작아 power가 1보다 크면 0으로 수렴한다고 가정하겠습니다. 즉, $(\Delta t)^k \rightarrow 0$ for $k > 1$ & $S_0 ud = S_0 du = S_0 \Rightarrow ud = 1$

그리면, $d = \frac{1}{u}$, $u > d$ 이며 테일러전개를 통해 $e^{a\Delta t} = 1 + a\Delta t$, $e^{a\sqrt{\Delta t}} = 1 + a\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}a^2\Delta t$ 로 쓸 수 있습니다.

다시 (13.13)에 이를 적용해보겠습니다.

$$e^{r\Delta t}(u + d) - ud - e^{2r\Delta t} = \sigma^2\Delta t$$

$$\Rightarrow e^{r\Delta t}(u + d) - ud = e^{2r\Delta t} + \sigma^2\Delta t$$

$$\Rightarrow e^{r\Delta t}(u + 1/u) - 1 = 1 + 2r\Delta t + \sigma^2\Delta t = e^{2r+\sigma^2\Delta t}$$

$$\Rightarrow u + \frac{1}{u} - e^{-r\Delta t} = e^{(r+\sigma^2)\Delta t}$$

$$\Rightarrow u^2 - (e^{(r+\sigma^2)\Delta t} + e^{-r\Delta t})u + 1 = 0$$

$$\Rightarrow u^2 - (2 + \sigma^2\Delta t)u + 1 = 0$$

$$u = \frac{2 + \sigma^2\Delta t \pm \sqrt{4 + 4\sigma^2\Delta t + \sigma^4(\Delta t)^2 - 4}}{2} = 1 \pm \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t = e^{\pm\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$\therefore u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

위 전개를 통해 얻을 수 있는 u, d 가 CRR모형에서 사용하는 상승 및 하락비율입니다.

! In Real-world u&d

위의 u, d 는 위험중립세상에서 산출한 상승 및 하락비율이나, real world에서도 동일하게 적용할 수 있습니다.

실제 세상에서 주가의 기대수익률을 μ , 변동성을 σ , 주가 상승확률을 $p^* = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$ 라고 가정하고 $E[S_T^2] - (E[S_T])^2 = \sigma^2\Delta t$ 를 위와 동일하게 전개하면, 동일한 u, d 를 얻을 수 있습니다.

한편, 위험중립세상과 실제 세상에서 변동성은 동일하다고 가정하고 있는데, 이는 결사노프의 정리 (*Girsanov's Theorem*)를 이용한 결과입니다.

결사노프 정리에 따르면, 위험중립세상에서 실제세상으로 전환한다는 것은 측도를 전환(*changing measure*)하는 것인데, 측도론에서 실제세상은 P-measure 및 위험중립세상은 Q-measure에 해당합니다.

측도를 전환할 때, 기대성장률은 변화하지만 변동성은 유지되는데, 이것이 위험중립세상에서 실제세상으로

전환할 때 주가의 기대수익률은 변하는 반면 변동성은 유지된다는 것을 의미합니다.

13.8 The Binomial Tree Formulas

앞선 전개식을 요약하면, 주가의 변동성(σ) 및 무위험이자율(r), 1-step의 시차(Δt)가 주어질 때, 이항모형을 적용한 옵션의 가치를 평가할 수 있습니다.

주가상승률 $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, 주가하락률 $d = \frac{1}{u}$, 주가상승률 $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$, 주가하락률 $q = 1 - p$ 가 적용됩니다.

지금까지 1-step 또는 2-step의 간단한 이항모형만을 살펴보았으나, 실제 실무에 적용될 때는 약 30-step의 이항과정이 진행되며, 이는 옵션의 만기까지 주가흐름에 대한 경우의 수가 $2^{30} \approx 10^9 = 10\text{billions}$ 이상 된다는 것을 의미합니다. 한편, 이항과정의 step이 많아질수록, Δt 가 매우 작아질수록 이항모형의 결과값은 BSM 모형의 결과값으로 수렴하게 됩니다.(Appendix 참조)

13.11 Binomial Trees in various Options

Options on Stocks & Stock indices with continuous dividend

주가 및 주가지수의 연속복리 배당수익률이 q 로 주어진 경우입니다.

위험중립세상에서 주가 및 주가지수의 수익률은 무위험이자율과 같아야 하므로, 주가의 기대수익률 k 와 배당수익률 q 를 합산한 수익률인 무위험이자율과 같아야 합니다.

즉, $E[S_{\Delta t}] = S_0 e^{r\Delta t} = S_0 e^{k\Delta t} e^{q\Delta t}$, $k = r - q$ 입니다.

따라서, 앞선 전개식에서 $p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}$ 로 변경됩니다.

Options on Currencies

이전 장에서 통화선도계약 및 통화스왑의 논리를 생각해봅시다.

현재시점에서 자금을 차입하여 해외통화에 투자한다면, 기대수익률은 $e^{(r - r_f)\Delta t}$ 가 될 것입니다.

즉, $p = \frac{e^{(r - r_f)\Delta t} - d}{u - d}$ 가 적용됩니다.

Options on Futures

선물의 가격 $F_0 = S_0 e^{rT}$ 로 결정됩니다.

$F_T = S_T$ 이므로, 위험중립세상에서 $E[F_T] = E[S_T] = S_0 e^{rT}$ 이며 이항모형에서 이를 적용하면 선물의 기대수익률이 0임을 알 수 있습니다.

$$pF_0 u + (1-p)F_0 d = E[F_T] = E[S_T]$$

$$\Rightarrow pS_0 e^{rT} u + (1-p)S_0 e^{rT} d = S_0 e^{rT}$$

$$\therefore p = \frac{1-d}{u-d}$$

Chapter 14

위너과정 및 이토보조정리 (*Wiener Processes and Ito's Lemma*)

시간의 흐름에 따라 불확실한 경로로 움직이는 변수를 확률과정(*stochastic process*)이라고 합니다. 시간의 흐름이 이산적으로 주어지는지, 연속적으로 주어지는지에 따라서 discrete variable과 continuous variable로 나눌 수 있으며, 앞서 살펴본 이항모형이 대표적인 discrete variable을 이용한 가치평가라고 할 수 있습니다.

이 장에서는 continuous variable을 가정하고, Wiener processes 등 중요한 확률변수를 살펴볼 것이며, 옵션의 가치평가에 매우 핵심적인 이토의 보조정리도 살펴볼 예정입니다.

14.1 The Markov Property

마코프 과정(*Markov process*)는 특수한 형태의 확률과정으로, 시간의 흐름에 따라 변하는 변수의 미래값은 오직 현재 값에만 영향을 받는 확률과정입니다.

즉, 일주일 단위 주가가 마코브 과정을 따른다면 다음 주의 주가는 오직 현재의 주가에만 영향을 받으며, 일주일 전의 주가는 아무런 영향을 주지 않는다는 의미입니다.

이는 효율적 시장가설(EMH, Efficient Market Hypothesis)의 weak-form을 만족한다는 의미와 유사합니다.

14.2 Continuous-time Stochastic Processes

먼저, 마코프 과정을 따르는 확률변수를 생각해보겠습니다. 현재 가격이 P_t 이고, 하루동안의 가격변화는 표준정규분포 $\phi(0, 1)$ 를 따른다고 가정하겠습니다. 그럼 2일간의 가격변화의 분포는 어떻게 될까요?

먼저, 2일간의 가격변화는 각각 하루씩 표준정규분포를 따르는 확률변수로 분할할 수 있습니다. 각 확률변수는 마코프 과정이므로 하루의 변화가 다음 하루의 변화에 영향을 주지 않습니다. 즉, 각각 하루의 표준정규분포는 서로 독립입니다.

따라서, 2일간의 가격변화의 평균과 분산은 각각의 평균 및 분산의 합산이므로 $\phi(0, 2)$ 를 따르게 될 것입니다. 이를 일반화한다면, 기간 T 동안 주가의 변화가 $\phi(0, T)$ 를 따른다면 매우 작은 시간의 변화 Δt 동안의 주가의 변화는 $\phi(0, \Delta t)$ 를 따른다고 할 수 있습니다.

여기서, 표준편차 σ 는 기간의 누적에 $\sqrt{\cdot}$ 의 크기로 변화한다는 사실에 주목해야합니다.

Wiener Process

위너과정은 마코프 과정의 일종으로, 평균변화율(drift rate)이 0이고 변동률(variance rate)이 1인 확률과정입니다. 이는 물리학에서 분자의 움직임을 표현하는데 쓰이기도 하며, 브라운 운동(Brownian motion)이라고도 불립니다.

확률변수 z 가 위너과정을 따른다는 것은, 아래 두 성질을 만족한다는 의미입니다.

Property 1. For Δt , $\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$ for $\epsilon \sim \phi(0, 1)$ 이다.

Property 2. For any $\Delta t_1 \neq \Delta t_2$. Δz_1 and Δz_2 are independent.

첫번째 성질을 통해 Δz 의 평균은 0, 분산은 Δt , 표준편차는 $\sqrt{\Delta t}$ 임을 알 수 있고, 두번째 성질을 통해 위너과정이 마코프과정의 한 종류임을 알 수 있습니다.

또한, $\sqrt{\Delta t} \gg \Delta t$ for $\Delta t \rightarrow 0$ 이므로 단위시간 Δt 가 작아지면 작아질수록 위너과정을 따르는 확률변수 Δz 의 변동성(표준편차)은 단위시간 대비 매우 커짐을 알 수 있습니다.

이는 미시세상에서 위너과정을 따르는 확률변수가 매우 복잡하게 움직이는 것을 의미하며, 이를 통해 브라운 운동의 특징 두가지를 도출할 수 있습니다.

1. 위너과정을 따르는 확률변수 z 에 대해, 어떠한 구간의 시간을 관측하더라도 z 의 경로의 길이의 기대값은 무한대로 발산한다.
2. 특정 값의 z 에 대해, 해당 값을 가지는 횟수는 어떠한 구간의 시간을 관측하더라도 무한대로 발산한다.

Generalized Wiener Process

앞서 평균변화율(drift rate)가 0이고 변동률(variance rate)이 1인 위너과정을 살펴보았습니다.

일반화된 위너과정(GWP)이란, 단위시간에 대해 평균변화율과 변동률이 상수 a , b 로 주어진 위너과정을 말합니다.

즉, $dx = a dt + b dW$ 인 확률과정 x 는 GWP를 따르게 됩니다.

여기서 dW 는 위너과정이므로, 단위시간 Δt 가 주어져 있다면 GWP를 따르는 확률변수 x 의 변화량은 $\Delta x = a \Delta t + b \epsilon \sqrt{\Delta t}$ 으로 표현할 수 있습니다.

따라서, Δx 의 평균은 $a \Delta t$, 분산은 $b^2 \Delta t$ 이며 변동성(표준편차)은 $b \sqrt{\Delta t}$ 가 되며, 단위시간이 충분히 작다면 $\Delta x \sim \phi(a\Delta t, b^2\Delta t)$ 로 근사할 수 있습니다.

i 기간 T에 대한 GWP의 분포

x 가 GWP를 따른다고 가정하고, 기간 T 년과 충분히 작은 단위시간 Δt , $\sum_{k=1}^N \Delta t = N\Delta t = T$ 가 주어져 있다고 가정하겠습니다.

각각의 $\Delta x_i = a\Delta t + b\epsilon_i \sqrt{\Delta t}$ 도 역시 GWP를 따르게 되며, 모두 독립입니다.

그러면, 확률변수 x 의 기간중 누적변화 $x_T - x_0 = \sum \Delta x_i$ 는 아래와 같이 전개할 수 있습니다.

$$\sum \Delta x_i = \sum a\Delta t + \sum b\epsilon_i \sqrt{\Delta t} = aT + b\sqrt{\Delta t} \sum \epsilon_i$$

각각의 $\epsilon_i \sim \phi(0, 1)$ 은 독립이므로 $\sum \epsilon_i \sim \phi(0, N)$ 입니다. 따라서,

$$x_t - x_0 \sim \phi(aT, b^2 \Delta t N) = \phi(aT, b^2 T)$$

위너과정, $a dt$ 및 GWP의 경로를 도식화하면 아래와 같습니다.

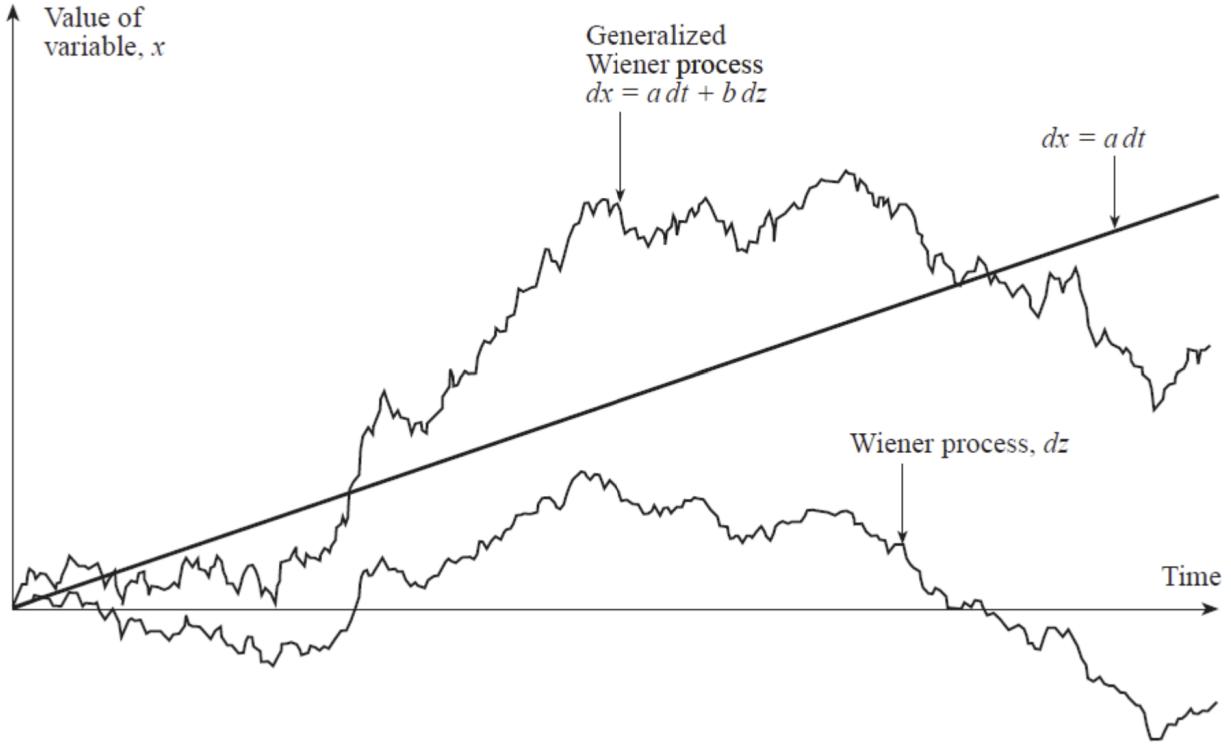


Figure 2: Path of Stochastic processes : dW , $a dt$, $a dt + b dW$

14.8 Fractional Brownian Motion

지금까지 살펴본 브라운운동(위너과정, GWP)은 마코프 과정의 특수한 형태로서 소개하였습니다.

즉, 확률변수 X 가 GWP를 따른다면 각 Δt 에 대해 ΔX 는 독립적으로 결정됩니다. 이는 $t > s > 0$ 로 시간이 주어질 때 $X(t) - X(s)$, $X(s)$ 가 독립이라는 의미이므로, 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$Var[X(t) - X(s)] = E[(X(t) - X(s))^2] - E[X(t) - X(s)]^2 = \sigma^2(t-s)$$

$$E[X(s)X(t)] = E[X(s)^2] + E[X(s)(X(t) - X(s))] = s\sigma^2$$

그러나, 실제 현실에서는 주가의 흐름이 마코프 과정을 따르지 않는 경우가 발생합니다. 즉, 주가의 흐름이 과거 주가에 영향을 받는 자기상관성이 관측되고는 합니다.

이러한 경우를 모델링(e.g. rough volatility models)하기 위해 등장한 개념이 Fractional Brownian Motion입니다.

FBM은 브라운 운동을 일반화한 개념으로, 시간이 $t > s > 0$ 로 주어졌을 때, 자기상관성의 척도로 H (Hurst exponent)가 주어지며, 다음과 같이 정의됩니다.

$$E[(X(t) - X(s))^2] = \sigma^2(t-s)^{2H}, E[X(s)X(t)] = \frac{\sigma^2}{2}(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H})$$

$H > 0.5$ 일때 양의 자기상관성, $H < 0.5$ 일때 음의 자기상관성, $H = 0.5$ 일 때 마코프 과정(랜덤워크)을

띄게 되는 브라운 운동입니다.

Ito's Process

일반화된 위너과정에서 평균변화율과 변동률이 상수로 주어졌다면, 이토과정에서는 평균변화율과 변동률이 시간과 확률변수에 대한 함수 $a(x, t)$, $b(x, t)$ 로 주어지게 됩니다. 즉,

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dW, \quad \Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

이를 통해 이토과정도 마코프과정의 한 종류임을 알 수 있습니다.

14.3 The Process for a Stock Price

이제, 배당이 없는 주식에 대해 확률과정을 모델링해보겠습니다.

먼저 주가가 일반화된 위너과정(GWP)를 따른다고 가정한다면, 평균변화율과 변동률이 상수인 확률과정 $dS = a dt + b dW$ 를 생각할 수 있습니다.

그러나, 이는 주가의 변화분이 상수로 고정되어있다는 의미인데 현실과 부합하지 않는 부분이 존재합니다. 실제 주식투자자는 현재 주가가 높고 낮음에 관계없이 투자자금 대비 기대수익률을 고려하는데, 그렇다면 동일한 기대수익률 하에 주가의 변화분이 현재 주가에 따라 달라지기 때문입니다.

따라서, 주가 대신에 주가수익률이 GWP를 따른다고 가정하는 것이 보다 현실에 부합하게 되며 평균변화율이 μ , 변동률이 σ 로 주어져있다면 주가수익률은 다음과 같은 이토과정을 따른다고 할 수 있습니다. 이러한 주식의 확률과정을 기하학적 브라운 운동(GBM, Geometric Brownian Motion)이라고도 합니다.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \Rightarrow$$

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW, \quad \frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

단위시간 Δt 에 대해 평균은 $\mu\Delta t$, 분산은 $\sigma^2\Delta t$ 이며 표준편차는 $\sigma\sqrt{\Delta t}$ 이고, 단위시간이 충분히 작다면 $\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ 입니다.

즉, μ 와 σ 는 각각 단위시간에 대한 주가의 기대수익률과 표준편차를 연율로 환산한 것입니다.

⚠ Warning

단위시간에 대한 주가수익률은 정규분포로 근사할 수 있으나, 기간 T 에 대한 주가 $S_T - S_0$ 는 평균변화율 (μS_t) 이 상수로 주어져있지 않기 때문에 14.2의 GWP와 동일한 방법으로 전개할 수 없습니다.

대신에, 주가의 연환산 기대수익률 및 표준편차가 주어져있다면 $\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ 를 이용한 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation)을 통해 주가 S_T 를 모델링할 수 있습니다.

14.6 Ito's Lemma

앞선 장에서 우리는 파생상품의 가격결정이 기초자산과의 관계로부터 시작하여 기초자산의 현재가격을 통해 결정된다는 것을 살펴보았습니다. 즉, 파생상품의 가격은 기초자산의 가격의 함수입니다.

여기서 확률과정을 적용하면, 파생상품의 가격은 확률변수인 기초자산의 가격과 시간에 대한 함수형태로 표현할 수 있다는 것입니다. 그렇다면 확률변수를 이용한 함수는 어떤 방식으로 움직이며, 어떠한 확률과정을 따르게 되는걸까요? 여기서 이토의 보조정리(*Ito's Lemma*)라고 불리는 아주 중요한 개념이 등장합니다.

이토의 보조정리란, 이토과정을 따르는 확률변수 $dx = a(x, t)dt + b(x, t)dW$ 와 확률변수 및 시간에 대한 함수 $G = f(x, t)$ 가 주어져있을 때, G 가 다음과 같은 확률과정을 따르게 된다는 정리입니다.

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dW$$

즉, 평균변화율이 $\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$ 이며 변동률이 $\frac{\partial G}{\partial x} b$ 인 이토과정을 따른다는 의미입니다.

이제, 파생상품의 가격 $G = f(S, t)$ 과 주가의 확률과정 $dS = \mu S dt + \sigma S dW$ 에 이토의 보조정리를 적용하겠습니다.

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dW$$

즉, 파생상품의 가격 역시 기초자산과 유사한 이토과정을 따르게 되며, 동일한 위너과정 dW 에 의해 그 경로가 결정됩니다. 이 개념은 다음 장의 BSM(Black Sholes Merton) 모형의 결과를 도출할 때 핵심개념으로 이용됩니다.

14.7 Application of Ito's Lemma

Forward Contract

t 시점의 선도가격은 $F_0 = S_0 e^{r(T-t)}$ 이므로, 무위험이자율이 주어져있다면 이토의 보조정리를 적용할 수 있습니다.

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial S} \mu S + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} \sigma S dW$$

$$= (e^{r(T-t)} \mu S - r S e^{r(T-t)}) dt + e^{r(T-t)} \sigma S dW$$

$$\therefore dF = (\mu - r) F dt + \sigma F dW$$

The Lognormal property

$G = \ln S$ 라고 하면, $\frac{dG}{dS} = \frac{1}{S}$, $\frac{dG}{dt} = 0$, $\frac{d^2 G}{dS^2} = -\frac{1}{S^2}$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dW$$

$$= \left(\frac{1}{S} \mu S - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{1}{S} \sigma S dW$$

$$\therefore dG = (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) dt + \sigma dW$$

이토의 보조정리에 따라, 이토과정을 따르는 주가에 자연로그를 취하면 GWP를 따르게 됩니다. 이제, 14.2의 전개식을 적용하면 기간 T 에 대한 주가의 로그수익률이 정규분포를 따르게 됨을 유도할 수 있습니다.

$$\ln S_T - \ln S_0 = \ln \frac{S_t}{S_0} \sim \phi((\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)T, \sigma^2 T)$$

선물옵션 HW(~midterm)

Chapter3

Problem 3.4 (Hedging with Futures)

A company has a **\$20 million portfolio** with a **beta of 1.2**. It would like to use futures contracts on a stock index to hedge its risk. The index **futures price currently stands at 1080**, and each contract is for delivery of **\$250 times** the index.

- (1) what is the hedge that minimizes risk?
- (2) what should the company do if it wants to reduce the beta of the portfolio to 0.6?

Solving

먼저, 선물 1계약의 가치는 $1,080 \times 250USD = 270,000USD$ 입니다.

리스크 최소화를 위한 최적 헤지비율은 $\hat{h}^* = \beta \times \frac{V_{portfolio}}{V_{futurescontract}}$ 이므로,

$$(1) \text{ 리스크 최소화를 위해서는 } \hat{h}^* = 1.2 \times \frac{20,000,000}{270,000} = 88.89 \approx 89 \text{ 을 매도하면 된다.}$$

$$(2) \text{ 베타를 0.6으로 줄이기 위해서는 포트폴리오 베타를 0.6만큼 헤지하면 된다. } h = 0.6 \times \frac{20,000,000}{270,000} = 44.44 \approx 44 \text{ 을 매도하면 된다.}$$

Problem 3.24 (CAPM)

A portfolio manager has maintained an **actively managed portfolio with a beta of 0.2**. During the last year, the **risk-free rate was 5%** and **equities performed very badly providing a return of -30%**. The portfolio manager produced a **return of -10%** and claims that in the circumstances **it was a good performance**. Discuss this claim.

Solving

CAPM에 근거하여 수익률을 산출할 때, 매니저의 주장은 옳지 않다.

먼저, CAPM에 근거한 포트폴리오 수익률은 $R_{portfolio} = r_f + \beta(r_{market} - r_f)$ 이며, 여기에 따르면 베타가 0.2인 주식포트폴리오의 기대수익률은 무위험자산 : 시장 = 8:2로 투자한 시장포트폴리오의 수익률인 $5\% + 0.2(-30\% - 5\%) = -2\%$ 이다.

즉, 매니저가 good performance라는 의미는 -2%보다 높은 수익률을 달성해서 시장포트폴리오를 out-perform 한다는 의미인데, 이를 8%나 하회하는 -10%의 성적을 거두었으니 좋은 성과를 냈다고 볼 수 없다.

⚠ 잘못된 예시

시장 전체의 수익률이 -30%일 때, 베타가 0.2인 주식포트폴리오가 시장을 beat하는 수익률은 $0.2 \times -30\% = -6\%$ 이다. 포트폴리오가 good performance라는 것은 보통 시장을 out-perform한 경우를 의미하는데, 수익률이 -6%를 하회하는 -10%이므로 좋은 성과를 냈다고 보기 어렵다.

Problem 3.25 (Changing Beta)

It is July 16. A company has a portfolio of stocks worth \$100million. The beta of the portfolio is 1.2. The company would like to use the December futures contract on a stock index to change beta of the portfolio to 0.5 during the period July 16 to November 16. The index is currently 2,000 and each contract is on \$250 times the index.

- (1) What position should the company take?
- (2) Suppose that the company changes its mind and decides to increase the beta of the portfolio from 1.2 to 1.5. What position in futures contracts should it take?

Solving

Problem 3.4와 동일한 방식이다. 먼저, 선물 1계약의 가치는 $2,000 \times 250USD = 500,000USD$ 이며,

- (1) 포트폴리오 베타를 0.5로 줄이려면 베타를 0.7만큼 햇지하면 된다. $h = 0.7 \times \frac{100,000,000}{500,000} = 140$ 을 매도 하면 된다.
- (2) 포트폴리오 베타를 1.5로 늘리려면 베타를 -0.3만큼 햇지하면 된다. 즉, 매도햇지 대신 선물매수를 통해 베타를 0.3만큼 늘리면 된다. $h = -0.3 \times \frac{100,000,000}{500,000} = -60 = 60$ 하면 된다.

Chapter4

Problem 4.2

1. Problem 4.2 (face value \$100)

The 6-month and 1-year zero rates are both 5% per annum. For a bond that has a life of 18 months and pays a coupon of 4% per annum (with semiannual payments and one having just been made), the yield is 5.2% per annum. What is the bond's price? What is the 18-month zero rate? All rates are quoted with semiannual compounding.

Figure 3: Chapter4-2

Solving

$$Price = \frac{2}{(1 + 5.2\%/2)^1} + \frac{2}{(1 + 5.2\%/2)^2} + \frac{102}{(1 + 5.2\%/2)^3} = 98.29$$

$$\frac{2}{(1 + 5\%/2)^1} + \frac{2}{(1 + 5\%/2)^2} + \frac{102}{(1 + z_{1.5}/2)^3}, z_{1.5} = 5.204\%$$

Problem 4.14

2. Problem 4.14

A 10-year 8% coupon bond currently sells for \$90. A 10-year 4% coupon bond currently sells for \$80. What is the 10-year zero rate? (Hint: Consider taking a long position in two of the 4% coupon bonds and a short position in one of the 8% coupon bonds.)

Figure 4: Chapter4-14

Solving

4% 쿠폰 채권을 액면 \$200만큼 매수한다면, 액면 \$100의 8% 쿠폰 채권과 액면 \$100의 10년 무이표채 채권을 매수한 것과 동일한 현금흐름이 발생한다.

이 경우, 10년 무이표채 채권의 가격은 $\$160 - \$90 = \$70$ 이며 10-year zero rate는 다음과 같다.

$$70 = \frac{100}{(1 + z_{10})^{10}}, z_{10} \approx 3.63\%$$

Problem 4.29

3. (Extra Problem 9ed. 4.29)

A bank can borrow or lend at LIBOR. The two-month LIBOR rate is 0.28% per annum with continuous compounding. Assuming that interest rates cannot be negative, what is the arbitrage opportunity if the three-month LIBOR rate is 0.1% per year with continuous compounding? How low can the three-month LIBOR rate become without an arbitrage opportunity being created?

Figure 5: Chapter4-29, 9ed.

Solving

먼저, 2개월 후 1개월간 Libor Foward rate는 다음과 같다.

$$F_{2m,1m} = \frac{\frac{3}{12}0.1\% - \frac{2}{12}0.28\%}{\frac{1}{12}} = 0.3\% - 0.56\% = -0.26\%$$

그리나, 이자율은 음수가 될 수 없으므로 선도이자율은 0%이다. 빌려주는 사람 입장에서, 안빌려주고 현금을 보유하면 이자율은 0%이므로 이는 자연스러운 현상이다.

이 때, Libor금리로 3개월간 자금을 빌리고 2개월간 Libor로 빌려준 다음 3개월까지는 현금을 보유(또는 0%에 빌려줌)한다면 무위험 차익을 얻을 수 있다.

차익거래가 발생하지 않으려면, 선도이자율의 균형가격이 0%까지 상승해야 한다.

$$F_{2m,1m} = 0\% = \frac{\frac{3}{12}Libor_{3m} - \frac{2}{12}0.28\%}{\frac{1}{12}} \Rightarrow Libor_{3m} \approx 0.1867\%$$

그러기 위해서는 약 0.1867%까지 3개월 Libor가 상승해야 한다.

Problem 4.39

4. (Extra Problem 9ed. 4.30)

A bank can borrow or lend at LIBOR. Suppose that the six-month rate is 5% and the nine-month rate is 6%. The rate that can be locked in for the period between six months and nine months using an FRA is 7%. What arbitrage opportunities are open to the bank? All rates are continuously compounded

Figure 6: Chapter4-39, 9ed.

Solving

먼저, 6개월 및 9개월 금리로부터 $F_{6m,3m}$ 의 균형가격을 산출하면,

$$F_{6m,3m} = \frac{\frac{9}{12}6\% - \frac{6}{12}5\%}{\frac{3}{12}} = 8\%$$

그러나, 현재 FRA 계약금리는 7%이므로 1%p만큼 저평가되어있다.

따라서,

1. 6개월간 5%로 자금을 빌리고
2. 9개월간 6%에 자금을 빌려주고,
3. FRA 매수계약(변동금리 수취 및 고정금리 지급)을 동일한 명목금액만큼 체결 -> 6개월 후 9개월까지 3개월간 Libor금리로 자금을 빌리면 FRA 계약금리인 7%로 빌리는 효과

9개월간 effective rate는 $\frac{12}{9}(\frac{6}{12}5\% + \frac{3}{12}7\%) \approx 5.6667\%$ 이므로, 0.333%만큼 무위험 차익을 만들 수 있다.

Chapter5

Problem 5.1

1. Problem 5.1. What is the difference between the forward price and the value of a forward contract?

Figure 7: Chapter5-1

Forward price : 선도가격

선도계약 체결시 계약당사자가 합의한 기초자산의 인도가격을 말하며, 기초자산의 현재가격과 선도계약 만기까지 기초자산을 보유하면서 발생하는 비용과 수익을 통해 이론적으로 산출할 수 있습니다.

Value of a forward contract : 선도계약의 가치

과거에 체결된 선도계약을 현재시점에서 평가할 때, 현재시점에서 동일한 선도계약을 체결한다면 예상되는 선도가격과 과거 체결시점의 선도가격의 차이로부터 산출되는 계약의 가치입니다. 즉, 과거의 선도계약을 현재 시점에서 반대거래를 통해 청산하고자 할 때 예상되는 손익과 같습니다.

이를 통해, 현재시점에서 선도계약의 가치를 “0”으로 만드는 가격이 이론적으로 산출되는 선도가격임을 알 수 있습니다.

Problem 5.7

2. Problem 5.7. A 1-year long forward contract on a non-dividend-paying stock is entered into when the stock price is \$40 and the risk-free rate of interest is 5% per annum with continuous compounding.

- (a) What are the forward price and the initial value of the forward contract?
- (b) Six months later, the price of the stock is \$45 and the risk-free interest rate is still 5%. What are the forward price and the value of the forward contract?

Figure 8: Chapter5-7

(a) 선도가격 $F = S_0 e^{rT} = 40e^{0.05} = 42.05$, 현재시점의 선도계약의 가치 “0”

(b) 6개월 후의 선도가격 $F = 45e^{0.05 \times 0.5} = 46.14$, 이 때 매수선도계약의 가치는 $V_t - F_t = 4.09$

Problem 5.10

3. Problem 5.10. Suppose that the risk-free interest rate is 6% per annum with continuous compounding and that the dividend yield on a stock index is 4% per annum. The index is standing at 400, and the futures price for a contract deliverable in four months is 405. What arbitrage opportunities does this create?

Figure 9: Chapter5-10

무위험이자율 $r_f = 0.06$, 배당률 $d = 0.04$, 현재 지수가 400인 경우의 4개월 뒤 만기가 도래하는 주가지수선물의 이론가격은 $F = 400e^{\frac{4}{12}(0.06-0.04)} = 402.68$ 입니다.

그러나, 현재 주가지수선물의 시장가격은 405로 다소 고평가된 가격에 거래되고 있습니다. 따라서,

- (1) 현재시점에서 주가지수선물을 405에 매도하고
- (2) 400만큼 무위험이자율에 자금을 차입하여,
- (3) 해당 지수를 복제한 주식포트폴리오를 400에 매수한다면,

4개월 뒤에 선물 만기도래시 주식포트폴리오를 405에 매도할 수 있고, 차입금에 대한 이자비용, 주식포트폴리오의 보유기간 동안 배당수익을 모두 합산하면 $405 - 402.68 = 2.32$ 만큼의 무위험 차익거래를 할 수 있습니다.

Problem 5.24

4. Problem 5.24. Suppose the current USD/euro exchange rate is 1.2000 dollar per euro. The six-month forward exchange rate is 1.1950. The six-month USD interest rate is 1% per annum continuously compounded. Estimate the six-month euro interest rate.

Figure 10: Chapter5-24

$S_0 = 1.2USD/EUR$, $F_0 = 1.195$, $r_{domestic} = 0.01$ 이면, 선도가격 수식을 통해 아래와 같이 산출가능합니다.

$$F_0 = S_0 e^{(r^d - r^f)T} \Rightarrow 1.195 = 1.2 e^{(0.01 - r^f)0.5} \Rightarrow r^f = 0.0184$$

Chapter7 : Swap

Problem 7.1

1. **Problem 7.1.** Companies A and B have been offered the following rates per annum on a \$20 million five-year loan:

	<i>Fixed rate</i>	<i>Floating rate</i>
Company A	5.0%	SOFR + 0.1%
Company B	6.4%	SOFR + 0.6%

Company A requires a floating-rate loan; Company B requires a fixed-rate loan. Design a swap that will net a bank, acting as intermediary, 0.1% per annum and that will appear equally attractive to both companies.

Figure 11: Chapter7-1

두 회사를 비교하면 A는 Fixed rate에서 1.4%만큼, Floating rate에서 0.5%만큼 절대우위에 있습니다.

이를 다시 이야기하면, A는 Fixed rate에서 비교우위가 있고 B는 Floating rate에서 비교우위가 있다는 뜻과 같습니다.

A가 변동금리로 자금을 조달하고자 한다면 비교우위를 이용해서 고정금리로 먼저 돈을 빌리고, B와 스왑계약을 체결하면 됩니다. (A=매도=고정금리수취, 변동금리지급)

이 스왑계약이 SOFR와 Swap rate를 주고 받는 스왑이라면, A가 본인이 직접 변동금리로 조달하는 것보다 이익이 발생하는 swap rate는 4.9%보다 크거나 같아야 합니다.

한편, B가 변동금리로 돈을 빌려서 스왑계약을 맺는 경우 B의 이익이 발생하는 swap rate는 5.8% 보다 작거나 같아야합니다.

즉, Swap rate의 범위는 4.9% ~ 5.8%입니다. 여기서 은행이 양 회사를 중개하고 swap rate의 0.1%를 수수료로 받는다면 Swap rate는 5.0% ~ 5.8%에서 결정될 것입니다.

예를 들어, Swap rate가 5.4%에서 결정되는 경우,

A는 고정금리 5%로 자금을 조달해서 SOFR를 지급하고 5.3% 고정금리를 수취(0.1%는 중개수수료)한다면 SOFR-0.3%에 자금을 조달하는 효과로 0.4%를 아낄 수 있고,

B는 변동금리 SOFR+0.6%에 자금을 조달해서 5.4%를 지급하고 SOFR를 수취한다면, 6.0%에 자금을 조달하는 효과로, 0.4%를 아낄 수 있습니다.

마지막으로, 비교우위간 차분인 0.9%는 스왑을 이용한 비교우위전략으로 누릴 수 있는 총 효용으로 예시에서는 A가 0.4%, B가 0.4%, 중개기관이 0.1%를 나눠서 누리게 됩니다.

Problem 7.4

2. Problem 7.4. A currency swap has a remaining life of 15 months. It involves exchanging interest at 10% on £20 million for interest at 6% on \$30 million once a year. The term structure of risk-free interest rates in the United Kingdom is flat at 7% and the term structure of risk free interest rates in the United States is flat at 4% (both with annual compounding). The current exchange rate (dollars per pound sterling) is 1.5500. What is the value of the swap to the party paying sterling? What is the value of the swap to the party paying dollars?

Figure 12: Chapter7-4

해당 스왑계약은 Fixed-fixed currency swap이며, 현재 스왑계약의 잔존 현금흐름을 살펴보면, 3개월 뒤에 이자교환 + 9개월 뒤에 이자 교환 + 15개월 뒤에 원금과 이자 교환이 남았습니다.

미국을 자국, 영국을 타국으로 보면 $S_0 = 1.55$, $r_f^d = 0.04$, $r_f^f = 0.07$ 와 같고, 해당 스왑계약의 가치는 두가지 방법으로 평가할 수 있습니다.

(1) 선도환율을 이용한 현금흐름 방식

먼저 3개월/9개월/15개월 뒤의 선도환율을 각각 계산해보겠습니다.

$$f_{3m} = 1.55e^{\ln \frac{1.04}{1.07} \times \frac{3}{12}}, f_{9m} = 1.55e^{\ln \frac{1.04}{1.07} \times \frac{9}{12}}, f_{15m} = 1.55e^{\ln \frac{1.04}{1.07} \times \frac{15}{12}}$$

! Interest Compounding method

문제의 이자율은 annual compounding이므로, 연속복리이자율을 사용해서 선도환율을 구하려면 continuous compounding으로 치환해서 이용해야 합니다.

$$\text{즉}, 1 + r_{\text{annual}} = e^{r_{\text{continuous}}} \Rightarrow \ln(1 + r_{\text{annual}}) = r_{\text{continuous}}$$

이제, 기간별 sterling payer의 현금흐름을 살펴보면 아래와 같습니다.

구분	Cash-Inflow	Cash-Outflow	forward rate	Outflow(\$)	Net
3month	\$1.8m	S2m	1.54	3.08	-1.278
15month	\$31.8m	S22m	1.50	32.91	-1.109

마지막으로, Net의 현재가치 -\$2.32m가 Sterling payer의 스왑계약 가치가 되며, Dollar payer의 가치는 정확히 반대가 됩니다.

(2) 채권 방식

위의 현금흐름표를 보면, 각 통화의 현금흐름은 채권으로 환산하여 계산할 수 있습니다.

달러채권과 스텔링채권의 현재공정가치를 각각 계산하면 아래와 같습니다.

$$Bond_{usd} = \frac{1.8}{(1 + 0.04)^{\frac{3}{12}}} + \frac{31.8}{(1 + 0.04)^{\frac{15}{12}}}$$

$$Bond_{sterling} = \frac{2}{(1 + 0.07)^{\frac{3}{12}}} + \frac{22}{(1 + 0.07)^{\frac{15}{12}}}$$

Sterling payer의 현금흐름은 달러채권을 사고 스텔링채권을 발행하는 것과 동일하므로, 스왑의 가치는 $B_{usd} - 1.55 \times B_{sterling} = 32.061 - 1.55 \times 22.182 = -\$2.321m$ 과 같습니다.

Problem 7.8

3. Problem 7.8. Companies X and Y have been offered the following rates per annum on a \$5 million 10-year investment:

	<i>Fixed rate</i>	<i>Floating rate</i>
Company X	8.0%	LIBOR
Company Y	8.8%	LIBOR

Company X requires a fixed-rate investment; company Y requires a floating-rate investment. Design a swap that will net a bank, acting as intermediary, 0.2% per annum and will appear equally attractive to X and Y.

Figure 13: Chapter7-8

Problem 7-1과 동일한 풀이방법입니다.

고정금리는 X가 0.8%만큼 절대우위에 있고, 변동금리는 동일하므로 자금을 차입할 때의 비교우위는 X가 고정금리에, Y가 변동금리에 있습니다.

해당 상황은 투자이므로, 비교우위 활용은 X가 변동금리에 투자하고 Y와 스왑계약을 맺는 방법으로 이루어집니다.(X=매도=고정수취,변동지급)

스왑계약의 swap rate는 8%~8.8%에서 이루어질 수 있으며, 수수료 0.2%를 감안하면 8.2%~8.8%에서 이루어질 것 입니다.

예를 들어, 8.5%에서 이루어진다면

X는 Libor에 투자하고 (Libor지급-8.3%수취) 스왑계약을 체결한다면 8.3%인 고정금리에 투자하는 효과가 있어 0.3%의 이익이 발생합니다.

마찬가지로 Y는 고정금리 8.8%에 투자하고 (Libor수취-8.5%지급) 스왑계약을 체결한다면 Libor+0.3%에 투자하는 효과가 있어 0.3%의 이익이 발생합니다.

총 효용인 0.8%는 매수자(Y) 0.3%, 매도자(X) 0.3%, 중개인 0.2%로 나누어 가집니다.

Problem 7.21

4. Problem 7.21. A financial institution has entered into a swap where it agreed to receive quarterly payments at a rate of 2% per annum and pay the SOFR three-month reference rate on a notional principal of \$100 million. The swap now has a remaining life of 10 months.

Assume the risk-free rates with continuous compounding (calculated from SOFR) for 1 month, 4 months, 7 months, and 10 months are 1.4%, 1.6%, 1.7%, and 1.8%, respectively. Assume also that the continuously compounded risk-free rate observed for the last two months is 1.1%. Estimate the value of the swap.

Figure 14: Chapter7-21

해당 OIS는 OIS rate=2% 및 SOFR를 3개월 주기로 명목금액 \$100m에 대해 교환하는 스왑계약입니다.

해당 스왑계약의 가치를 평가하기 위해서는 OIS를 SOFR를 지급하는 FRN과 2%를 지급하는 채권으로 나누어서 각각 평가할 수 있습니다.

SOFR-FRN의 경우, 1개월 뒤 이자를 지급받은 직후에 가격이 Par value로 형성되어야 하는데 이를 이용해서 가치를 평가할 수 있습니다. 1개월 뒤 지급받을 이자는 \$0.3m이며 이자지급 직후 SOFR-FRN의 가격은 Par 이므로, 현재가치는 $100.3e^{-0.014 \times \frac{1}{12}} = 100.1831$

2% 지급 채권의 경우, $0.5 \sum_{k=1}^4 e^{-r_i \times \frac{3k-2}{12}} + 100e^{-r_4 \times \frac{10}{12}} = 100.4956$

해당 기관은 스왑매도(고정금리 수취, 변동금리 지급)이므로, FRN을 발행하고 2% 채권을 매수한 것과 같습니다. 따라서 스왑계약의 가치는 아래와 같습니다.

$$Value_{OIS} = Bond_{2\%} - FRN = 100.4956 - 100.1831 = \$0.3124m$$

i OIS vs. Libor-IRS

Libor와 달리 Backward-looking 방식으로 산출되는 SOFR average rate를 이용하여 OIS를 체결하는 경우, 향후 변동금리는 현재시점에서 결정되지 않고 이자지급시점으로부터 과거 3개월간 SOFR를 누적하여 산출합니다.

즉, 10개월이 남은 현재 남은 이자지급시기는 1/4/7/10개월까지 4개인데, 1개월 뒤에 받게 될 변동금리는

과거 2개월 및 주어진 1개월간 SOFR 금리를 누적하여 산출됩니다.

$$e^{0.011 \times \frac{2}{12}} \times e^{0.014 \times \frac{1}{12}} \Rightarrow SOFR_{3month} = \frac{0.022 + 0.014}{3} = 1.2\%$$

Problem 7.22

5. Problem 7.22. Company A, a British manufacturer, wishes to borrow U.S. dollars at a fixed rate of interest. Company B, a U.S. multinational, wishes to borrow sterling at a fixed rate of interest. They have been quoted the following rates per annum:

	Sterling	U.S. Dollars
Company A	11.0%	7.0%
Company B	10.6%	6.2%

(Rates have been adjusted for differential tax effects.) Design a swap that will net a bank, acting as intermediary, 10 basis points per annum and that will produce a gain of 15 basis points per annum for each of the two companies.

Figure 15: Chapter7-22

Fixed-fixed Currency swap

A는 USD payer, USD 6.85% pay / Sterling 11.0% receive

B는 Sterling payer, Sterling 10.45% pay / USD 6.2% receive

And, 중개기관은 USD에서 0.65% 이익 / Sterling에서 0.55% 손실 - 0.1% 차익 발생

Problem 7.extra1

(Extra Problem 1) Under the terms of an interest rate swap, a financial institution has agreed to pay 10% per annum and receive three-month LIBOR in return on a notional principal of \$100 million with payments being exchanged every three months. The swap has a remaining life of 14 months. The average of the bid and offer fixed rates currently being swapped for three-month LIBOR is 12% per annum for all maturities. The three-month LIBOR rate one month ago was 11.8% per annum. All rates are compounded quarterly. What is the value of the swap?

Figure 16: Chapter7-E1

먼저, Libor-IRS의 구조를 Libor만큼 쿠폰을 지급하는 FRN과 Swap rate만큼 쿠폰을 지급하는 채권으로 구분한다면, 스왑계약 개시시점에서 FRN의 가치는 항상 Par value입니다.

개시시점에서 스왑계약의 가치는 0이므로, Swap rate만큼 쿠폰을 지급하는 채권의 가치도 par value가 되어야 합니다. 즉, Swap rate는 스왑 개시시점에서 Par rate가 되므로, 이는 동일한 듀레이션을 가지는 채권의 YTM이 됩니다.

현재 bid-offer 중간값이 12%라는 것은 swap rate가 모든 기간에 대해 12%라는 뜻입니다. 즉, 채권의 yield curve가 12%로 flat하다는 의미입니다. 이는 quarterly-compounding 금리로, 연속복리로 표현하면 $(1 + 0.12/4)^4 = e^r \Rightarrow r = 0.1182$ 로 쓸 수 있습니다.

이제, 1개월 전 11.8%에 체결된 스왑은 현재시점의 매수자(Swap rate지급, Libor 수취) 입장에서 평가해보면, 14개월 남은 FRN과 11.8% 쿠폰의 채권을 할인율 0.1182를 적용하여 비교하면 됩니다.

현재 FRN의 가치는 par value를 활용해 구할 수 있습니다. 2개월 후 쿠폰이 지급되고 난 직후 FRN의 가치는 par value가 될 것 입니다. 즉, 2개월 후 FRN의 가치는 $100 + 2.95$ (쿠폰)입니다.

이를 현재가치로 환산하면 $102.95e^{-0.1182 \times \frac{2}{12}} = 100.941$

11.8% 쿠폰의 채권의 현재가치는 아래와 같습니다.

$$2.5(e^{-0.1182 \times \frac{2}{12}} + e^{-0.1182 \times \frac{5}{12}} + e^{-0.1182 \times \frac{8}{12}} + e^{-0.1182 \times \frac{11}{12}}) \\ + 102.5e^{-0.1182 \times \frac{14}{12}} = 98.678$$

해당 기관은 Fixed rate payer이므로, FRN을 사고 11.8% 쿠폰의 채권을 매도한 것과 같습니다. 즉, 스왑계약의 가치는 $FRN - 11.8\% Note = 100.941 - 98.678 = \$2.263m$

i 직관적인 풀이방법

한편, Swap rate가 현재 12%라는 것은 현재시점에서 동일한 스왑계약을 체결하면 고정금리가 12%가 된다는 의미입니다.

즉, 1개월 전에 10%를 지급하는 스왑계약을 현재시점에서 다시 체결한다면 12%로 체결해야하므로, 2% 만큼 더 지급해야한다는 뜻입니다.

이러한 초과지급분을 모두 현재가치로 환산하면 현재 스왑의 가치가 될 것 입니다. 다만, 2개월 뒤 있을 최초 이자교환분은 이미 1개월 전에 11.8%로 결정되었으므로 초과지급분은 1.8%입니다.

$$0.45e^{-0.1182 \times \frac{2}{12}} + 0.5(e^{-0.1182 \times \frac{5}{12}} + e^{-0.1182 \times \frac{8}{12}} + e^{-0.1182 \times \frac{11}{12}} + e^{-0.1182 \times \frac{14}{12}})$$

Problem 7.extra2

(Extra Problem 2) Suppose that the term structure of interest rates is flat in the United States and Australia. The USD interest rate is 7% per annum and the AUD rate is 9% per annum. The current value of the AUD is 0.62 USD. In a swap agreement, a financial institution pays 8% per annum in AUD and receives 4% per annum in USD. The principals in the two currencies are \$12 million USD and 20 million AUD.

Payments are exchanged every year, with one exchange having just taken place. The swap will last two more years. What is the value of the swap to the financial institution? Assume all interest rates are continuously compounded.

Figure 17: Chapter7-E2

Continuous compounding 금리이므로, 선도환율을 이용하여 현금흐름을 할인하는 방식으로 스왑계약을 평가하겠습니다.

먼저, $S_0 = 0.62$, $r_f^d = 0.07$, $r_f^f = 0.09$ 이고 잔여 현금흐름은 1년뒤 이자교환 및 2년뒤 이자+원금교환입니다.

선도환율은 다음과 같습니다.

$$f_{1y} = 0.62e^{0.07 - 0.09}, f_{2y} = 0.62e^{-0.02 \times 2}$$

현금흐름을 정리하면 아래와 같습니다.

구분	Cash-Inflow	Cash-Outflow	forward rate	Outflow(\$)	Net
1year	\$0.48m	AUD 1.6m	0.608	0.972	-0.492
2year	\$12.48m	AUD 21.6m	0.596	12.867	-0.387

달러로 표시된 Net의 현재가치 -\$0.795m가 스왑계약의 가치가 됩니다.

Chapter10 : Mechanics of Options Markets

Problem 10.3, 10.13

1. Problem 10.3 An investor sells a European call option with strike price of K and maturity T and buys a put with the same strike price and maturity. Describe the investor's position.

2. Problem 10.13 Consider an exchange-traded call option contract to buy 500 shares with a strike price of \$40 and maturity in four months. Explain how the terms of the option contract change when there is

- a) A 10% stock dividend
- b) A 10% cash dividend
- c) A 4-for-1 stock split

(Extra) Explain carefully the difference between writing a put option and buying a call option

Figure 18: Chapter10

10.3

만기 T , 행사가격 K 의 유럽형 콜옵션을 매도하고 풋옵션을 매수하는 경우 만기 Pay-off를 정리하면 아래와 같습니다.

$$-Max(S_T - K, 0) + Max(K - S_T, 0) = K - S_T$$

즉, 현재시점에서 액면 K 의 무이표채에 투자하고 현물을 공매도하는 것과 동일한 포트폴리오입니다.

💡 Tip

Put-call parity : $c + Ke^{-rT} = p + S_0 \Rightarrow p - c = Ke^{-rT} - S_0$ 이므로, 위와 동일한 결과를 얻을 수 있습니다.

10.13

문제의 옵션은 만기는 4개월, 행사가격 40usd 및 거래승수 500에 대한 유럽형 콜옵션입니다.

- (a) 만기 내 주식배당이 발생하는 경우, 행사가격 및 거래승수 변경을 통해 옵션 보유자의 손익을 보전합니다. 10%의 주식배당이 있으므로 콜옵션의 행사가격은 $40 \times \frac{10}{11}$, 거래승수는 $500 \times \frac{11}{10}$ 으로 조정되고 손익에는 영향이 없습니다.
- (b) 만기 내 10%의 현금배당이 있는 경우, 별도의 옵션포지션 조정은 없으며 배당락으로 주가가 10%만큼 하락할 것입니다. 따라서 콜옵션의 가치는 하락합니다.
- (c) 만기 내 4-for-1 주식분할이 발생하는 경우, 행사가격 및 거래승수 변경을 통해 옵션 보유자의 손익을 보전합니다. 주식 보유자는 3주를 추가로 받게되므로, 행사가격은 $40/4 = 10$, 거래승수는 $500 * 4 = 2000$ 이 됩니다. 손익에는 영향이 없습니다.

Extra

콜매수와 풋매도는 모두 주가 상승시 포지션의 가치가 상승하는 구조입니다. 그러나 두 포지션은 근본적으로 권리(Option)를 가지고 있는지, 권리가 상대방에게 있어 계약이행의무만 있는지에 대한 차이가 있습니다.

콜옵션 매수 포지션은 권리를 가지고 있으며, 이에 따라 옵션 매수시 가격(프리미엄)을 매도자에게 지급하므로 초기비용이 발생합니다. 주식 가격이 상승하면 권리를 행사하여 이익을 실현할 것이고, 주식 가격이 행사가격보다 낮으면 권리를 포기함으로써 손실을 회피할 것 이므로 손실의 최대폭은 매수시 지불한 프리미엄으로 한정됩니다.

풋옵션 매도 포지션은 계약이행의무만 있으며, 이에 따라 옵션 매도시 프리미엄을 받게 되므로 초기수익이 발생합니다. 주식 가격이 상승하면 계약상대방은 권리행사를 포기하므로 프리미엄만큼 확정이익이 발생하고, 주식 가격이 행가가격보다 하락하면 계약상대방이 권리행사를 하게되므로, 손실이 발생합니다. 이익은 프리미엄으로 상한이 있으나 주가 상승에 따른 손실은 하방이 없습니다.

Chapter11 : Properties of Stock Options

Problem 11.5, 18, 23, 24, 25

1. Problem 11.5. Why is an American call option on a dividend-paying stock is always worth at least as much as its intrinsic value. Is the same true of a European call option? Explain your answer.

2. Problem 11.18. Prove the result in equation (11.11)

3. Problem 11.23. The prices of European call and put options on a non-dividend-paying stock with an expiration date in 12 months and a strike price of \$120 are \$20 and \$5, respectively. The current stock price is \$130. What is the implied risk-free rate?

4. Problem 11.24. A European call option and put option on a stock both have a strike price of \$20 and an expiration date in three months. Both sell for \$3. The risk-free interest rate is 10% per annum, the current stock price is \$19, and a \$1 dividend is expected in one month. Identify the arbitrage opportunity open to a trader.

5. Problem 11.25. Suppose that c_1 , c_2 , and c_3 are the prices of European call options with strike prices K_1 , K_2 , and K_3 , respectively, where $K_3 > K_2 > K_1$ and $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$. All options have the same maturity. Show that $c_2 \leq 0.5(c_1 + c_3)$.

Figure 19: Chapter11

11.5

내재가치(intrinsic value)는 옵션을 현재시점에 권리행사한다면 얻을 수 있는 이익입니다. 따라서, 현재시점을 t 라고 하면, 콜옵션의 내재가치는 $\max(S_t - K)$ 입니다.

미국형 옵션은 옵션매수자가 원하는 때에 권리행사를 할 수 있으므로, 즉시 권리행사를 한다면 항상 내재가치만큼의 이익을 실현할 수 있습니다. 따라서 내재가치가 옵션가치의 하한이 됩니다.

한편, 유럽형 옵션은 만기시점에만 권리행사를 할 수 있으므로 기초자산에서 배당과 같은 중도현금흐름이 발생하면 옵션의 시간가치가 (-)로 형성될 수 있고, 이에 따라 내재가치보다 낮게 형성될 수 있습니다.

예를 들어, 다음달 배당이 예정된 주식에 대한 만기 2개월의 콜옵션을 보유하고 있다면 배당락이 발생하기 전에 권리행사를 통해 내재가치만큼 이익을 얻고, 배당수익도 누리는 것이 최적의 선택일 것입니다. 그러나, 유럽형 옵션은 만기까지 권리행사할 수 없으므로 이러한 콜옵션의 가격은 현재 내재가치보다 낮게 형성될 것 입니다.

11.18

?@sec-AmericanParity

11.23

각 파라미터는 $T = 1$, $S_0 = 130$, $K = 120$, $c = 20$, $p = 5$ 이므로, 풋콜패리티를 이용하면 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \Rightarrow 20 + 120e^{-r} = 5 + 130 \Rightarrow r = \ln \frac{120}{145} \approx 4.26\%$$

11.24

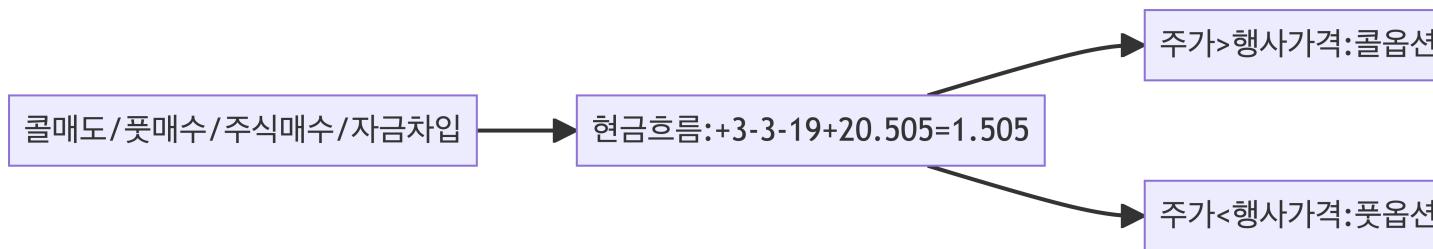
각 파라미터는 $T = \frac{1}{4}$, $K = 20$, $r = 0.1$, $S_0 = 19$, $D = 1e^{-0.1/12}$, $c = 3$, $p = 3$ 입니다.

풋콜패리티를 이용하여 콜옵션의 가치를 평가해보면,

$$c + Ke^{-rT} + D = p + S_0 \Rightarrow c + 20e^{-0.025} + e^{-0.1/12} = 3 + 19 \Rightarrow c \approx 1.495$$

그러나, 현재 콜옵션의 시장가격이 3이므로 고평가되어있는 상태입니다.

따라서, (1) 콜옵션을 매도하고, 이와 동시에 (2) 풋옵션과 주식을 매수, 행사가격과 배당의 현재가치($Ke^{-rT} + D$) 만큼의 무이표채권을 발행(자금을 차입)한다면, 현재시점에 1.505만큼 무위험차익을 얻을 수 있습니다.



즉, 현재시점에 1.505만큼 수익이 발생하고 만기시점의 pay-off는 0이 됩니다.

11.25

만기 Payoff를 살펴보면 확인 가능합니다.

Part II

Python('24봄)

1 Python Basics

1.1 Values and Variables

1.1.1 - Values

```
type("Hello, World")
```

str

```
type(())
```

tuple

```
type([])
```

list

```
type(set())
```

set

```
type({})
```

dict

```
# 파이썬에서는 복소수 i를 j로 표현함  
type(2+3j)
```

complex

1.1.2 - Variables

```
message="Hello, world!"  
n=42  
e=2.71  
print(n)  
print(message)
```

42

Hello, world!

```
length=4.2  
height=3.5  
area=length*height  
print(area)
```

14.700000000000001

```
# 변수는 방문앞에 이름만 바꾼것... 새로운 변수에 기존 변수를 할당하고, 기존 변수를 변경하면 새로운 변수도 영향  
a=[1,2,3]  
b=a  
a[0]=10  
print(b)
```

[10, 2, 3]

1.1.3 - Variable names

- 숫자로 시작하면 안됨

```
x=1.0  
X=1.0  
X1=1.0  
x1=1.0  
dell=1.0  
# not allowed  
# x:, 1X, X1-1, for
```

```
x,y,z=1,3.14,'a'  
print(x,y,z)
```

1 3.14 a

1.2 Core Data Types

1.2.1 - Floating Point(float)

```
x=1  
y=1.0  
z=float(1)  
xx=1.234e-5  
print(x,y,z,xx)  
print(type(z),type(float(True)))
```

1 1.0 1.0 1.234e-05
<class 'float'> <class 'float'>

```
# float 타입은 근사치를 사용하기 때문에 사용에 유의  
1-0.9==0.1
```

```
False
```

```
float('inf')
```

```
inf
```

1.2.2 - Complex

```
x=1j  
y=2+3j  
z=complex(1)  
print(x,y,z,y.real,y.imag)  
print(type(y.imag))
```

```
1j (2+3j) (1+0j) 2.0 3.0
```

```
<class 'float'>
```

1.2.3 - Integer

```
# Integer는 float와 달리 정확하다  
x=2**127+2**65  
x
```

```
170141183460469231768580791863303208960
```

1.2.4 - Boolean(bool)

```
print(bool(1),bool(1.2),bool(-1),bool(0.1))
```

```
True True True True
```

```
print(bool(0),bool(0.0),bool(0.0000),bool(None),bool(""),bool(()))
```

False False False False False False

3>4

False

1.3 Operators

1.3.1 - Arithmetic Operators

$$\begin{aligned}a &= 10 \\b &= 20\end{aligned}$$

```
# 나누기 연산은 항상 float로 반환됨을 유의  
print(a+b,a-b,a*b,b/a)
```

30 -10 200 2.0

나머지 연산자
b%a

0

목 연산자
b//a

2

거듭제곱 연산자, 우선순위가 가장 높음
ab**

10000000000000000000000

1.3.2 - Relational Operators

```
print(a==b,a!=b,a>b,a<b,a>=b,a<=b)
```

False True False True False True

1.3.3 - Assignment Operators

```
t=0  
t+=1  
t
```

1

```
t/=2  
t
```

0.5

```
t**=2  
t
```

1.0

1.3.4 - Logical Operators

```
print(True and False, True or False, not True)
```

False True False

```
# 논리연산자는 container가 bool이 아닌 경우 용법이 다름  
# or은 가장 먼저나오는 True값을 반환, and는 가장 먼저나오는 false값을 반환  
print('' or 'abc', 0 or 1, 'abc' or '', 'abc' or 'ab')  
print(1 and 0, 'abc' and 0, None and '' and 0)
```

```
abc 1 abc abc  
0 0 None
```

1.4 Python Operators Precedence

1.4.1 - Python Operators Precedence

```
# 거듭제곱 > 덧셈뺄셈 > 나눗셈, 곱, 나머지 > 부등호 > 논리  
1+3/2
```

2.5

```
2400//500*500+2000%500
```

2000

```
(2400//500)*500+(2000%500)
```

2000

1.5 Mathematical Function

```
# built-in  
print(abs(-1),round(1.111,1))
```

1 1.1

```
# functional in math module  
import math  
  
# factorial, floor, isfinite, isinf, isnan, trunc  
# exp, log, log10, sqrt, cos, sin, tan, degrees, radians, pi, e
```

```
print(  
    math.ceil(1.11),  
    math.log(10),  
    math.log(10,10),  
    math.exp(1),  
    math.e,  
    math.pi,  
    math.trunc(math.pi),  
    math.degrees(1),  
    math.cos(math.pi)  
)
```

```
2 2.302585092994046 1.0 2.718281828459045 2.718281828459045 3.141592653589793 3 57.29577951308
```

1.6 Python I/O

1.6.1 - Python Output

```
# print(object1, object2, ... , sep=' ', end='\n',...)  
print(1,2,3,4)  
print(1,2,3,4,sep='*')  
print(1,2,3,4,end='END')  
print(1,2,3,4,sep='')
```

```
1 2 3 4  
1*2*3*4  
1 2 3 4END1234
```

```
# formatting  
x=5; y=10  
print('The value of x is {} and y is {}'.format(x,y))  
print('I love {} and {}, but hate {}'.format('cucumber','butter','bread'))
```

```
The value of x is 5 and y is 10  
I love bread and butter, but hate cucumber
```

1.6.2 - Python Input

```
# Input value is a string  
num=input('Enter a number:')  
print(num)  
print(int(num))
```

```
10  
10
```

2 Containers

- 초기적인 내용, String / Integer / Dictionary 많이 사용함 ## Strings

Strings : An immutable sequence of unicode characters

```
"You can put single quotes ' in a string with double quotes on the outside"
```

```
"You can put single quotes ' in a string with double quotes on the outside"
```

```
'and visa versa ("')'
```

```
'and visa versa ("')'
```

```
print(  
    """multi-line strings  
    with three quotes""")
```

```
multi-line strings  
with three quotes
```

2.0.1 - Accessing Values in Strings

```
# 잘 알아둘것, 많이 사용  
word='KAIST MFE Program'  
# indexing  
print(word[0],word[5],word[6],sep="/")  
# slicing  
# str[a:b:c] = start a, end b, jump c
```

```
# a is inclusive, b is exclusive, c can be minus
# default : a =0, b=n+1, c=1 but when c is minus then default : a=n, b=0(inclusive)
print(word[0:5],word[6:9],word[10:])
print(word[:2],word[-2:])
print(word[0:10:2])
print(word[::-1])
```

K/ /M
KAIST MFE Program
KA am
KITME
margorP EFM TSIAK

```
text='Python strings are sliceable.'
text[10]
```

'i'

```
length=len(text)
text[length]
```

IndexError: string index out of range

```
text[length-1]
```

'.'

2.0.2 - String operations

- +, -, in, not in

```
a='Hello'; b='Python'
print(a+b, a*2+b*3, 'H' in a, 'm' not in a)
```

```
HelloPython HelloHelloPythonPythonPython True True
```

```
'123'+1
```

```
TypeError: can only concatenate str (not "int") to str
```

```
'123'+str(1)
```

```
'1231'
```

```
int('123')+1
```

```
124
```

2.0.3 - Built-in string function and methods

```
# len, .find, .count, .lower, .upper, .split, .replace, .startswith, .endswith
# .isalpha, .isnumeric, .isalnum
# len is function, others are methods
print(
    word,
    len(word),
    word.find('I'),
    word.count(' '),
    word.lower(),
    word.upper(),
    word.split(' '),
    word.replace(' ', '-'),
    sep='\n'
)
```

2

```
kaist mfe program
KAIST MFE PROGRAM
['KAIST', 'MFE', 'Program']
KAIST-MFE-Program
True
False
False
True
False
True
False
```

```
print(
    word.startswith('K'),
    word.endswith('M'),
    word.isalpha(),
    word.replace(' ', '').isalpha(),
    word.isnumeric(),
    '123'.isnumeric(),
    word.isalnum(),
    word.replace(' ', '1').isalnum(),
    sep='\n'
)
```

```
True
False
False
True
False
True
False
True
```

2.0.4 - Immutable String

```
# string = immutable, not possible to modify
# method or operations on string != modify but make new string
sequence="ACGT"
sequence.replace("A","G")
```

'GCGT'

```
sequence
```

'ACGT'

```
id(sequence)
```

2053186997616

```
sequence=sequence.replace("A","G")
did(sequence)
```

2053183781744

2.1 Lists

```
# a mutable sequence of objects, important!!
# To create List object, use [] or list()
x1=[1,2,3,4]
x2=[1,1.0,1+0j,'one',None,True]
x3=[[1,2,3,4],[5,6,7],[8,9]] # nested list
# 리스트 안에는 무엇이든 올 수 있음
print(x1,x2,x3,sep='\n')
```

```
[1, 2, 3, 4]  
[1, 1.0, (1+0j), 'one', None, True]  
[[1, 2, 3, 4], [5, 6, 7], [8, 9]]
```

```
e1=list()  
type(e1)
```

```
list
```

```
len(e1)
```

```
NameError: name 'e1' is not defined
```

```
list('cat')
```

```
['c', 'a', 't']
```

```
a_tuple=('abc')  
list(a_tuple)
```

```
['a', 'b', 'c']
```

2.1.1 - Accessing Items in lists

```
# indexing -> original object, slicing -> make sub-list  
myList=[5,2.3,'hello']  
print(  
    myList[0],  
    myList[-1],  
    myList[-3])
```

```
5 hello 5
```

```
many_types=[1,55.5,"Am I in a list?",True,"the end"]
print(
    many_types[2:4],
    many_types[2:],
    many_types[:3],
    many_types[-4:-2],
    many_types[-2:-5:-1],
    many_types[:-3],
    many_types[:3:2],
    many_types[:-2:2],
    sep='\n'
)
```

```
['Am I in a list?', True]
['Am I in a list?', True, 'the end']
[1, 55.5, 'Am I in a list?']
[55.5, 'Am I in a list?']
[True, 'Am I in a list?', 55.5]
[1, 55.5]
[1, 'Am I in a list?']
[1, 'Am I in a list?']
```

```
# Multidimensional lists can also be indexed and sliced.
x=[[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9,0]]
x[0]
```

```
[1, 2, 3]
```

```
x[0][1]
```

```
x[0][0:2]
```

```
[1, 2]
```

2.1.2 - Updating Lists

```
# List object is an immutable!!
colorList=['red','blue','green','black','white']
print(id(colorList),colorList)
```

```
2665431628288 ['red', 'blue', 'green', 'black', 'white']
```

```
colorList[2]='yellow'
print(id(colorList),colorList)
```

```
2665431628288 ['red', 'blue', 'yellow', 'black', 'white']
```

```
colorList[2:4]=['gray','purple']
colorList
```

```
['red', 'blue', 'gray', 'purple', 'white']
```

```
colorList[1:4]='r e d'
colorList
```

```
['red', 'r', ' ', 'e', ' ', 'd', 'white']
```

```
colorList[1:]=['orange']
colorList
```

```
['red', 'orange']
```

2.1.3 - Basic List Operations

```

L1=[1,2,3]; L2=[4,5,6]; L3=[7,8,9,0]
print(
    L1+L2+L3,
    [L1],
    [L1]+[L2]+[L3],
    sep='\n')

```

```

[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0]
[[1, 2, 3]]
[[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9, 0]]

```

```

print(
    L1*3,
    3*L1,
    [L1]*3,
    [L1+L2]*3,
    [1,2,3] in [L1]+[L2],
    sep='\n'
)

```

```

[1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]
[1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]
[[1, 2, 3], [1, 2, 3], [1, 2, 3]]
[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 3, 4, 5, 6]]
True

```

2.1.4 - Built-in List Functions and Methods

```

# len, min, max, del x[slice]
# x.append(value), x.extend(list), x.remove(value), x.count(value),
# x.insert(index, value), x.index(value), x.sort(), x.reverse()
x=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]
del x[0] # 많이 사용
x

```

```
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
del x[:3]  
x
```

```
[4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
del x[:]  
x
```

```
[]
```

```
x=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9]  
len(x)
```

```
10
```

```
# in place  
x.reverse()  
x
```

```
[9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0]
```

```
# not in place  
sorted(x)
```

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

```
x
```

```
[9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0]
```

```
# in place  
x.sort()  
x
```

```
[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

2.1.5 - Coping List

```
pockets=[5,3,6,7]
pockets_copy=pockets
pockets_copy.append(1)
pockets_copy
```

```
[5, 3, 6, 7, 1]
```

```
# pockets_copy is just labeling of pockets
pockets
```

```
[5, 3, 6, 7, 1]
```

```
# [:] makes copy of original list object
# At list [:] is copy, but at Array(numpy) [:] is view
pockets_realcopy=pockets[:]
pockets_realcopy.append(1)
pockets_realcopy
```

```
[5, 3, 6, 7, 1, 1]
```

```
pockets
```

```
[5, 3, 6, 7, 1]
```

```
pockets_method=pockets.copy()
pockets_method.append(1)
pockets_method
```

```
[5, 3, 6, 7, 1, 1]
```

```
pockets
```

```
[5, 3, 6, 7, 1]
```

2.2 Tuples

2.2.0.1 : tuples are basically immutable lists. To create a tuple, () or tuple()

```
t=(12345,54321,'hello')
```

```
t
```

```
(12345, 54321, 'hello')
```

```
# if it contains a single variables, should include comma!
```

```
x=(2)
```

```
type(x)
```

```
int
```

```
x=(2,)
```

```
type(x)
```

```
tuple
```

```
a=1,2,3,'hello'
```

```
a
```

```
(1, 2, 3, 'hello')
```

```
w,x,y,z=a
```

```
print(w,x,y,z)
```

```
1 2 3 hello
```

```
x,_ ,y,_ =a  
print(x,y)
```

1 3

```
x,*y=a  
print(x,y)
```

1 [2, 3, 'hello']

2.2.1 - Accesing values in tuples

```
# can be indexed or sliced.  
  
x=(1,2,3,4,5,6,7,8,9)  
print(  
    x[5],  
    x[-3],  
    x[3:7],  
    x[3:7:2],  
    sep='\n'  
)
```

6
7
(4, 5, 6, 7)
(4, 6)

2.2.2 - Updating Tuples

```
# Tuples are immutable : impossible to add/remove/replace elements in a tuple  
tup1=(12,34.56)  
tup1[0]=100
```

```
TypeError: 'tuple' object does not support item assignment
```

```
tup2=[[1,2],[3,4])  
tup2[0][0]=100  
tup2
```

```
([100, 2], [3, 4])
```

2.2.3 - Basic tuples operations

```
tup1=(1,2,3,4)  
tup2='a','b','c'  
tup1+tup2
```

```
(1, 2, 3, 4, 'a', 'b', 'c')
```

```
tup1*3
```

```
(1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4)
```

```
'a' in tup2
```

```
True
```

```
tup1[0:1]+tup2[1:]
```

```
(1, 'b', 'c')
```

```
tup1[0:1]+tup2[1]
```

```
TypeError: can only concatenate tuple (not "str") to tuple
```

```
# concatenation
tup_even=tup1[1::2]+(6,)
tup_even
```

(2, 4, 6)

2.2.4 - Built-in tuple functions and methods

```
# len, max, min, x.index, x.count
animals=('lama','sheep','lama',48)
len(animals)
```

4

```
print(
    animals.index('lama'),
    animals.count('sheep'),
    sep='\n')
```

0

1

```
# to fix tuple, tuple -> list -> tuple
x_list=list(x)
x_list.reverse()
x=tuple(x_list)
x
```

(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)

```
# tuple is faster than list!
%timeit x=[1,2,3,4,5]
%timeit x=(1,2,3,4,5)
```

```
47.3 ns ± 0.743 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10,000,000 loops each)
10.2 ns ± 0.0818 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 100,000,000 loops each)
```

2.3 Dictionaries

2.3.0.1 : a mutable, unordered collection of key-value pairs

2.3.0.1.1 : unordered collection 최근 업데이트로 입력순으로 order가 생김. 그러나 sequence는 여전히 아님

2.3.0.2 : To create a dict, {key1:value1, key2:value2} initiate with {}, dict()

2.3.0.3 : Keys must be unique and immutable data! (If tuples, it can only contain immutable data.)

```
type({})
```

dict

```
# two-value sequenced can convert to dict easy!
lot=[(1,2),(3,4),(5,6)]
dict(lot)
```

{1: 2, 3: 4, 5: 6}

```
los=['a1','b2','c3']
dict(los)
```

{'a': '1', 'b': '2', 'c': '3'}

```
dict(a=1,b=2,c=3)
```

{'a': 1, 'b': 2, 'c': 3}

```
a="abc"
dict(a=1,b=2,c=3)
```

{'a': 1, 'b': 2, 'c': 3}

2.3.1 - Accesing values in dictionary

```
dict1=dict(Name='Zara', Age=7, Class='First')
```

```
dict1
```

```
{'Name': 'Zara', 'Age': 7, 'Class': 'First'}
```

```
dict1['Name']
```

```
'Zara'
```

2.3.2 - Updating dict

```
dict1['Age']=8
```

```
dict1['School']='ABC School'
```

```
dict1
```

```
{'Name': 'Zara', 'Age': 8, 'Class': 'First', 'School': 'ABC School'}
```

```
a='Town'
```

```
dict1[a]='Downtown'
```

```
dict1
```

```
{'Name': 'Zara',
 'Age': 8,
 'Class': 'First',
 'School': 'ABC School',
 'Town': 'Downtown'}
```

2.3.3 - Basic dict operations

```
# Check only key value!!
print(
    'Name' in dict1,
    'Age' in dict1,
    'Country' in dict1,
    'Country' not in dict1,
    'Zara' in dict1,
    sep='\n'
)
```

```
True
True
False
True
False
```

2.3.4 - Built-in dict functions and methods

```
# len, del x[key]
# x.clear(), x.items(), x.keys(), x.values(), x.update(dict2)
print(dict1, len(dict1), sep='\n')
```

```
{'Name': 'Zara', 'Age': 8, 'Class': 'First', 'School': 'ABC School', 'Town': 'Downtown'}
5
```

```
del dict1['Town']
dict1
```

```
{'Name': 'Zara', 'Age': 8, 'Class': 'First', 'School': 'ABC School'}
```

```
dict1.clear()
dict1
```

```
{}
```

```
del dict1  
dict1
```

```
NameError: name 'dict1' is not defined
```

```
dict1=dict(a=1,b=2,c=3)  
dict1.keys()
```

```
dict_keys(['a', 'b', 'c'])
```

```
list(dict1.keys())
```

```
['a', 'b', 'c']
```

```
dict1.values()
```

```
dict_values([1, 2, 3])
```

```
list(dict1.values())
```

```
[1, 2, 3]
```

```
dict1.items()
```

```
dict_items([('a', 1), ('b', 2), ('c', 3)])
```

```
d2=dict(apples=1,oranges=2,pears=2)  
ud=dict(pears=4,grapes=5,lemons=6)  
d2.update(ud)  
d2
```

```
{'apples': 1, 'oranges': 2, 'pears': 4, 'grapes': 5, 'lemons': 6}
```

2.3.5 - Coping Dictionary

```
dict1
```

```
{'a': 1, 'b': 2, 'c': 3}
```

```
dict2=dict1.copy()  
dict2.clear()  
dict1
```

```
{'a': 1, 'b': 2, 'c': 3}
```

```
dict2=dict1  
dict2.clear()  
dict1
```

```
{}
```

2.4 Sets

2.4.0.1 : unordered collection with immutable and unique elements -> Just dict.key !

2.4.0.2 : initiate should be set(), {} is dict!!

```
# elements of set should be immutable!  
list1=[[1,2],[3,4]]  
set(list1)
```

```
TypeError: unhashable type: 'list'
```

```
list2=[(1,2),(3,4)]  
set(list2)
```

```
{(1, 2), (3, 4)}
```

```
# if elements are not unique, automatically remove duplicates
list3=[1,2,2,3,4]
set(list3)
```

{1, 2, 3, 4}

```
dict1=dict(a=1,b=2,c=3)
set(dict1)
```

{'a', 'b', 'c'}

```
set(dict1.keys())
```

{'a', 'b', 'c'}

```
set(dict1.values())
```

{1, 2, 3}

```
set(dict1.items())
```

{('a', 1), ('b', 2), ('c', 3)}

2.4.1 - Accesing or Updating items in a Set

2.4.1.1 indexing and slicing not supported!!

2.4.1.2 set is mutable but set elements are immutable

2.4.2 - Basic sets operation

2.4.3 Warning!

2.4.3.1 Shallow copy vs. Deep copy

```
import copy as cp
```

```
A=dict(a=1,b=2,c=[1,2,3])
```

```
B=A.copy()
```

```
C=cp.deepcopy(A)
```

```
B['a']=9
```

```
B['c'][0]=9
```

```
print(A,B,C,sep='\n')
```

```
{'a': 1, 'b': 2, 'c': [9, 2, 3]}
```

```
{'a': 9, 'b': 2, 'c': [9, 2, 3]}
```

```
{'a': 1, 'b': 2, 'c': [1, 2, 3]}
```

3 Control Flows

3.0.0.1 - Control statements in Python

- Conditional Constructs : if
- Loops : for, while

3.1 Statements & Comments

3.2 if Conditionals

```
# if condition:  
#     statement  
# ---optional!---  
# elif condition:  
#     statement  
# elif condition:  
#     statement  
# else:  
#     statement  
exam1=90; exam2=85  
if(exam1>=90) and (exam2>=90):  
    print('Excellent!')
```

```
if(exam1>=90) | (exam2>=90):  
    print('Good')
```

Good

```
a=10  
if a>10:  
    print("a>10")  
else:  
    print("a=10")
```

a=10

```
# Exercise 1  
a=[1,2,3,4,6,7,9]  
b=a.copy()  
b.sort()  
  
if a==b:  
    print("a is sorted")  
else:  
    print("a is not sorted")
```

a is sorted

```
# Exercise2  
x=[1,2,3,4,5,6,7,8]  
  
x_sort=x.copy()  
x.sort()  
  
len_x=len(x_sort)  
mid_even=(x_sort[int(len(x_sort)/2-1)]+x_sort[int(len(x_sort)/2)])//2  
mid_odd=x_sort[int(len(x_sort)//2)]  
  
if len(x_sort)%2==0:  
    print("n={}이고, 중간값은 {}입니다.".format(len_x,mid_even))  
elif len(x_sort)%2==1:  
    print("n={}이고, 중간값은 {}입니다.".format(len_x,mid_odd))
```

```
else :  
    print("중간값을 산출할 수 없습니다.")
```

n=80이고, 중간값은 4.5입니다.

3.3 Loops - for loop

```
# for interating_var in iterable:  
#     statements  
  
# exercise 3  
  
a=input("When you enter...")  
a_int=int(a)  
print("Input a number: "+a,  
      "The output will be... ",  
      sep="\n")  
for i in range(1,10):  
    print(a+" x "+str(i)+" = "+str(a_int*i))
```

```
Input a number: 99  
The output will be...  
99 x 1 = 99  
99 x 2 = 198  
99 x 3 = 297  
99 x 4 = 396  
99 x 5 = 495  
99 x 6 = 594  
99 x 7 = 693  
99 x 8 = 792  
99 x 9 = 891
```

```

# exercise 4

sum_even=0
sum_odd=0
for i in range(10001):
    if i%2==0:
        sum_even+=i
    else:sum_odd+=i

print(sum_even,
      sum_odd,
      sum_even+sum_odd,
      sep='\n')

```

25005000

25000000

50005000

```

# exercise 5

fibonacci=[1,1]
for i in range(10):
    fibonacci.append(fibonacci[i]+fibonacci[i+1])
print(
    fibonacci,
    sum(fibonacci),
    sep='\n'
)

```

[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144]

376

```

# exercise 6

a=input("When you enter alpha-num string...")
letter_index=list()
digits_index=list()

```

```

non_index=list()
print(
    "Sample Data : "+a,
    "The output will be...",
    sep='\n'
)
for i in range(0,len(a)):
    if a[i].isalpha():
        letter_index.append(i)
    elif a[i].isnumeric():
        digits_index.append(i)
    else: non_index.append(i)

print(
    "Letters {} at {}".format(len(letter_index),letter_index),
    "Digits {} at {}".format(len(digits_index),digits_index),
    "And there are {} at {} which are NOT alphanumeric".format(len(non_index),non_index),
    sep='\n'
)

```

Sample Data : sample asdf111231,2,1,3.2 21
 The output will be...
 Letters 11 at [0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11]
 Digits 11 at [12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 27, 28]
 And there are 7 at [6, 17, 19, 21, 23, 25, 26] which are NOT alphanumeric

4 Functions

4.0.0.1 Sqrt 사용자 정의 함수 실습

```
def mySqrt (n):
    old=0
    new=n/2
    while abs(old-new)>1e-10 :
        old=new
        new=1/2*(old+n/old)
    return new
```

```
mySqrt(3)
```

1.7320508075688772

```
list_int=[1,2,3,4,5,6,7,8]
list_str=["1","2","3","4","5","6","7","8"]
```

```
list(filter(lambda x:x,list_str))
```

['1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8']

```
list(filter(lambda x:x+"1",list_str))
```

['1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8']

```
bool("2")
```

True

```
list(filter(lambda x:x,list_int))
```

```
[]
```

```
list(filter(lambda x:bool(x-1),list_x))
```

```
[2, 3, 4]
```

```
filter(lambda x:x-1,list_int)
```

```
<filter at 0x1f5d235af10>
```

5 Numpy

```
import numpy as np
```

```
a=np.array([np.arange(6)*6]+np.arange(0,51,10).reshape(6,1)
```

```
a
```

```
array([[ 0,  1,  2,  3,  4,  5],  
       [10, 11, 12, 13, 14, 15],  
       [20, 21, 22, 23, 24, 25],  
       [30, 31, 32, 33, 34, 35],  
       [40, 41, 42, 43, 44, 45],  
       [50, 51, 52, 53, 54, 55]])
```

```
a[0,3:5]
```

```
array([3, 4])
```

```
a[4:,4:]
```

```
array([[44, 45],  
       [54, 55]])
```

```
a[0:,2]
```

```
array([ 2, 12, 22, 32, 42, 52])
```

```
a[0:,2:3]
```

```
array([[ 2],  
       [12],  
       [22],  
       [32],  
       [42],  
       [52]])
```

```
a[0:,2]=[1,2,3,4,5,6]  
a
```

```
array([[ 0,   1,   1,   3,   4,   5],  
       [10,  11,   2,  13,  14,  15],  
       [20,  21,   3,  23,  24,  25],  
       [30,  31,   4,  33,  34,  35],  
       [40,  41,   5,  43,  44,  45],  
       [50,  51,   6,  53,  54,  55]])
```

```
a[2::2,0:6:2]
```

```
array([[20,   3,  24],  
       [40,   5,  44]])
```

```
# Operations on Arrays  
# Numpy aggregates  
  
# Exercise 4  
# F=9/5C+32  
  
c=np.arange(20,31)  
c*9/5+32
```

```
array([68. , 69.8, 71.6, 73.4, 75.2, 77. , 78.8, 80.6, 82.4, 84.2, 86. ])
```

```
# Exercise 5
np.random.seed(1)
Z=np.random.rand(5)
print(Z,(Z-Z.min())/(Z.max()-Z.min()),sep="\n")
```

```
[4.17022005e-01 7.20324493e-01 1.14374817e-04 3.02332573e-01
 1.46755891e-01]
[0.57886944 1.          0.          0.41962504 0.20360935]
```

```
# Exercise 6
Z=np.random.uniform(0,10,10)
np.floor(Z)
```

```
array([6., 4., 5., 1., 1., 8., 9., 3., 6., 8.])
```

```
np.ceil(Z)-1
```

```
array([6., 4., 5., 1., 1., 8., 9., 3., 6., 8.])
```

```
Z-Z%1
```

```
array([6., 4., 5., 1., 1., 8., 9., 3., 6., 8.])
```

```
# Exercise 7
x=np.zeros((6,6))
y=np.arange(0,6)
```

```
x+y
```

```
array([[0., 1., 2., 3., 4., 5.],
       [0., 1., 2., 3., 4., 5.],
       [0., 1., 2., 3., 4., 5.],
       [0., 1., 2., 3., 4., 5.],
       [0., 1., 2., 3., 4., 5.],
       [0., 1., 2., 3., 4., 5.]])
```

```
x+y[:,np.newaxis]
```

```
array([[0., 0., 0., 0., 0.],
       [1., 1., 1., 1., 1.],
       [2., 2., 2., 2., 2.],
       [3., 3., 3., 3., 3.],
       [4., 4., 4., 4., 4.],
       [5., 5., 5., 5., 5.]])
```

```
x+y.reshape(6,1)
```

```
array([[0., 0., 0., 0., 0.],
       [1., 1., 1., 1., 1.],
       [2., 2., 2., 2., 2.],
       [3., 3., 3., 3., 3.],
       [4., 4., 4., 4., 4.],
       [5., 5., 5., 5., 5.]])
```

```
# Exercise 9
```

```
np.random.seed(123)
mat = np.random.randn(6, 4); mat
```

```
array([[-1.0856306 ,  0.99734545,  0.2829785 , -1.50629471],
       [-0.57860025,  1.65143654, -2.42667924, -0.42891263],
       [ 1.26593626, -0.8667404 , -0.67888615, -0.09470897],
       [ 1.49138963, -0.638902 , -0.44398196, -0.43435128],
       [ 2.20593008,  2.18678609,  1.0040539 ,  0.3861864 ],
       [ 0.73736858,  1.49073203, -0.93583387,  1.17582904]])
```

```
mat=np.concatenate([mat,np.exp(mat[:,0])[:,np.newaxis]],axis=1)
mat
```

```
array([[-1.0856306 ,  0.99734545,  0.2829785 , -1.50629471,  0.33768877],
       [-0.57860025,  1.65143654, -2.42667924, -0.42891263,  0.56068263],
```

```
[ 1.26593626, -0.8667404 , -0.67888615, -0.09470897,  3.54641154] ,
[ 1.49138963, -0.638902 , -0.44398196, -0.43435128,  4.44326571] ,
[ 2.20593008,  2.18678609,  1.0040539 ,  0.3861864 ,  9.07869158] ,
[ 0.73736858,  1.49073203, -0.93583387,  1.17582904,  2.09042747]])
```

```
mat=mat+[1,-1,1,-1,1]; mat
```

```
array([[ -8.56306033e-02, -2.65455342e-03,  1.28297850e+00,
         -2.50629471e+00,  1.33768877e+00],
       [ 4.21399748e-01,  6.51436537e-01, -1.42667924e+00,
        -1.42891263e+00,  1.56068263e+00],
       [ 2.26593626e+00, -1.86674040e+00,  3.21113848e-01,
        -1.09470897e+00,  4.54641154e+00],
       [ 2.49138963e+00, -1.63890200e+00,  5.56018040e-01,
        -1.43435128e+00,  5.44326571e+00],
       [ 3.20593008e+00,  1.18678609e+00,  2.00405390e+00,
        -6.13813601e-01,  1.00786916e+01],
       [ 1.73736858e+00,  4.90732028e-01,  6.41661316e-02,
        1.75829045e-01,  3.09042747e+00]])
```

```
mat=mat*np.array([1/10,1/10,1/10,10,10,10]).reshape(6,1)
```

```
mat
```

```
array([[ -8.56306033e-03, -2.65455342e-04,  1.28297850e-01,
         -2.50629471e-01,  1.33768877e-01],
       [ 4.21399748e-02,  6.51436537e-02, -1.42667924e-01,
        -1.42891263e-01,  1.56068263e-01],
       [ 2.26593626e-01, -1.86674040e-01,  3.21113848e-02,
        -1.09470897e-01,  4.54641154e-01],
       [ 2.49138963e+01, -1.63890200e+01,  5.56018040e+00,
        -1.43435128e+01,  5.44326571e+01],
       [ 3.20593008e+01,  1.18678609e+01,  2.00405390e+01,
        -6.13813601e+00,  1.00786916e+02],
       [ 1.73736858e+01,  4.90732028e+00,  6.41661316e-01,
        1.75829045e+00,  3.09042747e+01]])
```

```
np.median(mat, axis=0)
```

```
array([ 8.80013969,  0.0324391 ,  0.38497958, -0.19676037, 15.67945792])
```

```
np.percentile(mat, 70, axis=0)
```

```
array([21.14379101,  2.48623197,  3.10092086, -0.12618108, 42.66846589])
```

```
np.sort(mat[2, :])[::-1]
```

```
array([ 0.45464115,  0.22659363,  0.03211138, -0.1094709 , -0.18667404])
```

```
np.argsort(mat[2, :])[::-1]
```

```
array([4, 0, 2, 3, 1])
```

```
np.sum(np.where(np.exp(mat)>3, 1, 0), axis=1)
```

```
array([0, 0, 0, 3, 4, 4])
```

```
# or  
np.sum(np.exp(mat)>3, axis=1)
```

```
array([0, 0, 0, 3, 4, 4])
```

```
np.nonzero(mat>np.mean(mat, axis=0))
```

```
(array([0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5]),  
 array([3, 1, 3, 3, 0, 2, 4, 0, 1, 2, 4, 0, 1, 3]))
```

금융공학프로그래밍3, Quiz1

1. Calculate the following

```
import math
```

(1) 근의 공식 코드 작성

```
a=2.0;b=-1.0;c=-15.0;  
print(  
    (-b+math.sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a),  
    (-b-math.sqrt(b**2-4*a*c))/(2*a)  
)
```

3.0 -2.5

(2) 정규분포 확률밀도함수 코드 작성

```
mean=2; std=math.sqrt(3); x=1;  
print(  
    (1/(math.sqrt(2*math.pi)*std))*(math.e**(-( (x-mean)**2)/(2*(std)**2)))  
)
```

0.19496965572274114

2. Why the error occurs?

(1) Input error

```
a=input("enter a number:")  
  
a+3
```

input 값은 string 타입으로 받게 되므로, integer 타입인 3과 더하기 연산을 하면 오류 발생, input 값을 받아 integer로 변환하여 integer 간 연산을 하거나, 3을 string으로 변환하여 문자열 간 연산을 하거나 해야 함.

(2) Range error

```
tmp='My String'  
tmp[10]
```

tmp는 공백 포함 9자리 문자열이므로 index는 0~8까지만 할 수 있고 9부터는 범위 밖이므로 오류 발생.

(3) method error

```
ex1='sample string'  
ex2=ex1.upper  
ex2[:4]
```

method를 사용할 때, 뒤에 ()를 붙여야 작동함. 붙이지 않을 경우 단순히 함수를 호출하는 것.

3. String

```
grade='ABCDF'
```

(1) ‘+’를 이용해서 ’ABC~~D~~FFFDCBA’ 만들기

```
grade_str=grade+grade[-1]+grade[::-1]  
grade_str
```

'ABC~~D~~FFFDCBA'

(2) A의 개수

```
grade_str.count('A')
```

2

(3) ’FFF’를 반환하는 4가지 다른 표현식

```
print(  
    grade_str[4:7],  
    grade_str[6:3:-1],  
    grade_str[-7:-4],  
    grade_str[-5:-8:-1]  
)
```

FFF FFF FFF FFF

(4) ’ABC~~D~~AAADCBA’로 수정하기

```
grade_str=grade_str.replace('F','A')  
grade_str
```

'ABC~~D~~AAADCBA'

(5) 소문자로 모두 바꾸기

```
grade_str=grade_str.lower()  
grade_str
```

'abcdaaadcba'

4. Why the error occurs?

(1) slicing 반환 형식

```
L=[[1,3,5,7,9],[2,4,6,8,10]]  
L[0][1:2]=30
```

list를 원소로 가지는 list에서 slicing하는 경우, output은 list로 나타나게 되는데, list에 integer 30을 할당하려고 하므로 오류가 발생함.

30을 list로 만들어 할당하거나, slicing 대신 indexing을 통해 output을 integer로 만드는 방법을 사용해야 함.

(2) 단일 원소 tuple 표현

```
T=(10,20,30)  
T[:2]+(40)
```

tuple에 더하기를 사용하는 경우인데, (40)은 tuple이 아니라 integer이므로 오류가 발생함. 단일 원소를 가지는 tuple을 표현하려면 (40,)으로 써야함.

(3) 변수 할당 labeling vs. copy

```
D=dict(A=10,B=20,C=30)

# Copy method를 써야 복사본이 할당됨
# D2=D.copy()

D2=D

del D2['A']

D['A']
```

D2=D는 D2에 D.copy가 할당되는게 아니라 단순히 D에 D2라는 label만 새로 달아준것임. 따라서, D2에 'A' key를 제거하면 D의 'A' key도 사라지게 되므로 호출시 오류 발생.

(4) Key값은 **Immutable** 해야함

```
D3={[ 'Park','Male']:30,}
```

Dictionary 타입의 key값은 immutable한 값만 허용되므로 mutable한 list를 사용하면 오류 발생. tuple을 쓰던지 해야함.

(5) slicing&indexing for Dict

```
dict_y={(1,):10,(2,):20,(3,):30,(4,):40}
dict_y[(1,)]
```

Dictionary은 순서가 없음. slicing이 불가하며 indexing도 key값으로만 접근 가능.

5. List

```
days=['Mon','Tues','Wed','Thur','Fri',['Sat','Sun']]
```

(1) indexing, slicing

```
print(  
    [days[5]] ,  
    days[-1::-2] ,  
    days[5][0] ,  
    sep='\\n'  
)
```

```
[['Sat', 'Sun']]  
[['Sat', 'Sun'], 'Thur', 'Tues']  
Sat
```

(2) ‘+’ 활용

```
days2=[days[0:5]]+days[5][0:1]+days[5][1:]  
days2
```

```
[['Mon', 'Tues', 'Wed', 'Thur', 'Fri'], 'Sat', 'Sun']
```

(3) remove method

```
days2[0].remove('Wed')  
days2[0].remove('Fri')  
days2
```

```
[['Mon', 'Tues', 'Thur'], 'Sat', 'Sun']
```

(4) insert method

```
days2[0].insert(2,'W')  
days2
```

```
[['Mon', 'Tues', 'W', 'Thur'], 'Sat', 'Sun']
```

6. list2

```
Nums=[1,5,2,7,3,6,4]
```

(1) append method

```
Nums.append(7)
```

```
Nums
```

```
[1, 5, 2, 7, 3, 6, 4, 7]
```

(2) sorting list

```
Nums.sort()
```

```
Nums.reverse()
```

```
Nums
```

```
[7, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]
```

(3) slicing and replacing

```
Nums[::2]=['a','a','a','a']
```

```
Nums
```

```
['a', 7, 'a', 5, 'a', 3, 'a', 1]
```

7. tuple

```
price=(180,130,110,160,140,170)
```

(1) sorting tuple via translate to list

```
price_list=list(price)
price_list.sort()
price=tuple(price_list)
price
```

(110, 130, 140, 160, 170, 180)

(2) basic operation

```
170 in price
```

True

(3) concatenating tuple

```
price=price[0:4]+(0,)*3+price[len(price)-1:]
price
```

(110, 130, 140, 160, 0, 0, 0, 180)

금융공학프로그래밍3, Quiz2

1. Dictionary

```
icecream=dict(cheery=[12,100],cookies=[18,200],greentea=[15,140],mango=[10,200])
```

(1)

Change the price of ‘cookies’ as 13

```
icecream['cookies'][0]=13  
icecream['cookies']
```

[13, 200]

(2)

Add the following information to the dictionary ‘icecream’. - ‘Strawberry’ is priced at 12 and inventory is 170. - ‘pistachio’ is priced at 15 and inventory is 100.

```
update_dict=dict(Strawberry=[12,170],pistachio=[15,100])  
icecream.update(update_dict)  
icecream
```

```
{'cheery': [12, 100],  
'cookies': [13, 200],  
'greentea': [15, 140],  
'mango': [10, 200],  
'Strawberry': [12, 170],  
'pistachio': [15, 100]}
```

2. Dictionary2

```
d1=dict(key1=1,key2=3,key3=2,key10=7)
d2=dict(key3=1,key2=2,key7=2,key5=4,key1=7,key9=8,key0=7)
```

(1)

Select the largest two values of the dictionary ‘d2’.

```
d2_list=list(d2.values())
d2_list.sort()
d2_list.reverse()
d2_list[0:2]
```

[8, 7]

(2)

Create a set of values which are the unique values of ‘d2’.

```
set(d2.values())
```

{1, 2, 4, 7, 8}

(3)

Write code that returns True if keys of ‘d1’ are all contained in the key of ‘d2’ and False otherwise.

```
set(d1.keys()) <= set(d2.keys())
```

False

(4)

Create a set of values which are common in both ‘d1’ and ‘d2’

```
set(d1.values())&set(d2.values())
```

```
{1, 2, 7}
```

3. if statement

For any arbitrary string object A, if the first character of A is ‘#’, we want it to be replaced with ‘*’. Otherwise, we want to add ‘*’ as the first character of A. Write appropriate code using an if statement for this

```
A="#abcde"

if A[0]=="#":
    A="*"+A[1:]
else:
    A="*"+A

A
```

```
'*abcde'
```

4. for loop

Calculate the following by using ‘for’ loop : $\sum_{i=1}^{10} i^4$

```
result=int()

for i in range(1,11):
    result+=i**4

result
```

25333

금융공학프로그래밍3, Quiz3

1. Calculate the following by using ‘while’ loop.

$$\sum_{i \geq 1, i^4 < 1000}^{10} i^4$$

```
i=1
sum_i4=0
while i>=1 and i**4<1000 and i<=10:
    sum_i4+=i**4
    i+=1
sum_i4
```

979

2. List comprehension

```
x=[1,2,3,4]
y=[5,6,7,8]
```

(1) Cartesian product

```
z=list([i,j] for i in x for j in y)
z
```

```
[[1, 5],  
 [1, 6],  
 [1, 7],  
 [1, 8],  
 [2, 5],  
 [2, 6],  
 [2, 7],  
 [2, 8],  
 [3, 5],  
 [3, 6],  
 [3, 7],  
 [3, 8],  
 [4, 5],  
 [4, 6],  
 [4, 7],  
 [4, 8]]
```

(2) Cartesian product with condition

```
z=list([i,j] for i in x for j in y if i+j>=8)  
z
```

```
[[1, 7],  
 [1, 8],  
 [2, 6],  
 [2, 7],  
 [2, 8],  
 [3, 5],  
 [3, 6],  
 [3, 7],  
 [3, 8],  
 [4, 5],  
 [4, 6],  
 [4, 7],
```

[4, 8]]

3. Function

```
def grading (score):
    if type(score)!=int and type(score)!=float:
        print("Score must be integer or float type.")
    elif score>100 or score<0:
        print("Score must be a number between 0 and 100!!")
    elif score>90:
        print("Grade is A !")
    elif score>80:
        print("Grade is B !")
    elif score>70:
        print("Grade is C !")
    elif score>60:
        print("Grade is D !")
    else:
        print("Grade is F !")
```

```
grading(score=75)
```

Grade is C !

```
grading(score=-5)
```

Score must be a number between 0 and 100!!

4. Explain why the error occurs

- (1) positional argument와 keyword argument를 혼용하는 경우, positional argument가 먼저 와야합니다. keyword argument를 먼저 사용하는 경우 오류가 발생합니다.

```
def infoprint( name, age, gender):
    print(name, 'is', age, 'years old', gender, '.')

infoprint (name='Kim', 30, 'male')
```

- (2) 'Kim'은 positional argument로 name에 할당, 'male'은 keyword로 gender에 할당되고 age는 할당 값이 없어서 오류가 발생하였습니다. 함수 정의시 age는 default값을 정의하지 않았으므로 반드시 값을 할당해야 합니다.

```
def infoprint( name, age, gender):
    print(name, 'is', age, 'years old', gender, '.')

infoprint ( 'Kim', gender='male' )
```

- (3) 함수 myfactorial 정의시 변수 fac을 사용하는데, 해당 변수는 함수 안에서 정의된바 없으므로 함수 밖에서 정의된 global variable인 fac을 가져와서 사용하게 됩니다. 그러나, 이런 경우 global variable의 읽기만 가능하고 쓰기는 불가능하므로 for문 내에 fac을 수정하는 것은 허용되지 않습니다.

```
fac = 1

def myfactorial(n):
    for i in range(n):
        fac *= i+1
    return fac

myfactorial(n=5)
```

금융공학프로그래밍3, Quiz4

1. Find out which one of following is wrong?

```
game/
__init__.py
sound/
__init__.py
echo.py
wav.py
graphic/
__init__.py
screen.py
render.py
play/
__init__.py
run.py
test.py
```

① >>> from game.sound import echo

```
>>> echo.echo_test()
```

Right

② >>> from game.sound.echo import echo_test

```
>>> echo_test()
```

Right

③ >>> import game

```
>>> game.sound.echo.echo_test()
```

FALSE!! : `__init__.py`가 empty이므로 game package import 시 하단의 하부구조가 자동으로 import 되지 않습니다. 따라서, eco.py 내의 함수 `echo_test()`를 호출하기 위해서는 `eco.py` 또는 `echo_test()`를 직접 호출하여야 합니다.

④ >>> import game.sound.echo

```
>>> game.sound.echo.echo_test()
```

Right

2.

`np.arange[5]`를 이용하여 array구조를 만들면, `dtype`이 `integer`인 array가 생성됩니다.

이중 하나의 `object`를 `float`타입으로 수정하더라도, `dtype`은 `integer`로 고정되므로 입력한 `float`타입의 데이터가 `integer`로 수정되어 할당됩니다.

3.

`indexing`방식으로 호출하였으므로 1-dimensional이 됩니다. 2-dimensional을 유지하기 위해서는 `slicing` 방식으로 호출하여야 합니다.

(ex: `rmat[0:1]`)

4.

`np.hstack` 함수는 array를 병합하는 함수로, `np.concatenate`에 `axis=1` 옵션과 동일한 함수입니다.

병합하는 두 array간 dimension이 동일해야하는데, `a=2, b=1`이므로 오류가 발생합니다.

다른 dimension간 병합을 수행하려면 `np.column_stack`함수를 사용하여야 합니다.

5.

a는 2-dim. 3X5 array, b는 0-dim. 3 array입니다.

b[np.newaxis,:]는 0-dim인 b에 x축을 추가하여 1X3 array로 만들어주게 됩니다.

3X5와 1X3간에 덧셈이 성립하지 않으므로 오류가 발생합니다.

한편, b[:,np.newaxis]를 사용하면 3X1 array가 되므로, 덧셈이 가능합니다.

Python Midterm

20249132 김형환

Problem 1.

1. 채권의 가격과 드레이션

- 각 시점 $t = 1, \dots, n$ 에서 C_t 의 현금흐름이 발생함.
- 연간 쿠폰 지급 횟수가 f 번이며 ($f = 1, 2, 4$ 인 경우만 고려), 쿠폰 이자율은 연 $r\%$ 임.
- 쿠폰은 매 시점마다 지급되며, 액면가격은 PV 원은 만기 시점에 쿠폰과 함께 지급됨.
- 채권의 만기는 M (년)임.
- 시장의 만기수익률이 연 $y\%$ 임.
- 이 경우 해당 채권 가격과 드레이션은 다음 식으로 계산될 수 있음

$$\text{채권 가격} : P = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+(y/100)/f)^t}, \text{ 드레이션} : D = \sum_{t=1}^n t \cdot \frac{\frac{C_t}{(1+(y/100)/f)^t}}{P}$$

(1)

5개의 인자 `facevalue=`, `couprate=`, `yield=`, `maturity=` 으로 입력하고, `frequency=`에 맞게 “annual”, “semi-annual”, “quarterly” 중 하나의 문자 값으로 입력하면, 위 식에 따라 계산된 채권가격과 드레이션을 아래와 같은 형태의 튜플로 반환하는 함수 `bondftn`을 작성하여라.

```
def bondftn(pv,r,y,m,f="annual",rnd=3):  
    if type(pv)!=float and type(pv)!=int : return print("error: pv should be number!!!!")  
    if type(r)!=float and type(r)!=int: return print("error: r should be number!!!!")  
    if type(y)!=float and type(y)!=int: return print("error: y should be number!!!!")
```

```

if type(m)!=int: return print("error: M should be integer!!!")
if f=="annual": fre=1
elif f=="semi-annual": fre=2
elif f=="quarterly": fre=4
else: return print("error: f can be 'annual', 'semi-annual', 'quarterly'")
n=fre*m
coupon=pv*r/100/fre
price=0.0
value_duration=0.0
for i in range(n):
    if i==n-1: cf_i=pv+coupon
    else: cf_i=coupon
    pv_cf_i=cf_i/((1+(y/100/fre))**(i+1))
    tw_pv_cf_i=((i+1)/fre)*cf_i/(1+(y/100/fre))**(i+1)
    price+=pv_cf_i
    value_duration+=tw_pv_cf_i
duration=value_duration/price
result=(round(price,rnd),round(duration,rnd))
return result

```

```
bondftn(pv=100,r=5,y=4.5,m=2,f="quarterly")
```

(100.951, 1.916)

(2)

만기 M이 5, 4, 3, 2, 1인 각 경우에 대해, 쿠폰이자율이 5%, 4%, 3%, 2%, 1% 인 각각에 대하여 만기수익률이 10%에 11%로 상승함에 따라 채권 가격의 변화율이 몇 %인지를 모두 계산한 뒤, 아래와 같은 중첩된 딕셔너리 result_dict으로 저장하여라.

단, 액면가는 100, 쿠폰 지급 횟수는 연간 1회라고 하자.

```

result_dict=dict()
for i in range(5):
    m_i=5-i

```

```

result_dict['M='+str(m_i)]=dict()
for j in range(5):
    r_j=5-j
    price_before=bondftn(pv=100,r=r_j,y=10,m=m_i,f="annual")[0]
    price_after=bondftn(pv=100,r=r_j,y=11,m=m_i,f="annual")[0]
    price_return=(price_after-price_before)/price_before
    result_dict['M='+str(m_i)][str(r_j)+'%']=round(price_return,5)
result_dict

```

```

{'M=5': {'5%': -0.03974,
          '4%': -0.04046,
          '3%': -0.04126,
          '2%': -0.04215,
          '1%': -0.04314},
 'M=4': {'5%': -0.03287,
          '4%': -0.03332,
          '3%': -0.03381,
          '2%': -0.03434,
          '1%': -0.03491},
 'M=3': {'5%': -0.02544,
          '4%': -0.02568,
          '3%': -0.02593,
          '2%': -0.02619,
          '1%': -0.02648},
 'M=2': {'5%': -0.01749,
          '4%': -0.01758,
          '3%': -0.01765,
          '2%': -0.01776,
          '1%': -0.01784},
 'M=1': {'5%': -0.00901,
          '4%': -0.009,
          '3%': -0.009,
          '2%': -0.009,
          '1%': -0.00901}}

```

```
result_dict['M=5']['5%']
```

-0.03974

(3)

만기 M이 5, 4, 3, 2, 1인 각 경우에 대해, 쿠폰이자율이 5%, 4%, 3%, 2%, 1% 인 각각에 대하여 만기수익률이 10%로 주어졌을 때의 듀레이션을 (1)에서의 bondftn을 활용하여 모두 계산하여라.

또한 이를 (2)에서와 동일한 구조를 가지는 (중첩된) 덕셔너리 result_dict_dur에 저장하여라.

즉 아래와 같은 방식으로 값을 추출할 수 있어야 한다. 단, 여기서도 액면가는 100, 쿠폰 지급 횟수는 연간 1회라고 하자.

```
result_dict_dur=dict()
for i in range(5):
    m_i=5-i
    result_dict_dur['M='+str(m_i)]=dict()
    for j in range(5):
        r_j=5-j
        result_dict_dur['M='+str(m_i)][str(r_j)+'%']=bondftn(pv=100,r=r_j,
                                                               y=10,m=m_i,
                                                               f="annual",rnd=5)[1]
result_dict_dur
```

```
{'M=5': {'5%': 4.48786,
          '4%': 4.57019,
          '3%': 4.66101,
          '2%': 4.76171,
          '1%': 4.874},
 'M=4': {'5%': 3.6951,
          '4%': 3.74653,
          '3%': 3.80216,
          '2%': 3.8625,
          '1%': 3.9282},
```

```

'M=3': {'5%': 2.84899,
        '4%': 2.87566,
        '3%': 2.90394,
        '2%': 2.93397,
        '1%': 2.96593},
'M=2': {'5%': 1.95023,
        '4%': 1.95941,
        '3%': 1.96896,
        '2%': 1.97889,
        '1%': 1.98923},
'M=1': {'5%': 1.0, '4%': 1.0, '3%': 1.0, '2%': 1.0, '1%': 1.0}}

```

```
result_dict_dur['M=5']['4%']
```

4.57019

Problem 2.

2. 자동차 보험회사에 관한 몬테카를로 시뮬레이션

어느 자동차 보험회사의 보험료 수입과 보험금 지급은 다음의 프로세스로 설명된다고 하자.

-
- 보험금의 연간 청구 건수는 평균이 100인 포아송 분포를 가짐.
- 각 청구 건수 별 청구금액은 모양이 2, 척도가 $1/2$ (즉, 평균은 1이고 분산은 $1/2$)인 감마분포로부터 나오며, 청구가 이루어지자 마자 보험금은 지급된다고 가정.
- 각 청구 건수 별 청구 발생시점은 0에서 1(년) 사이의 균일분포를 따른다고 가정.
- 보험회사의 보험료 수입은 연간 150의 비율로 1년 균등히 보험료를 받게 됨. 즉 어떤 해에 t 시점 ($0 \leq t \leq 1$)까지 받게 되는 전체 보험료는 $150t$ 임.

(1)

어떤 1년 동안 발생하는 모든 청구들의 시간과 금액을 모의실험해 보자.

0에서 시작하여 1년 동안 보험회사의 잔고를 계산한 뒤 balance라는 리스트로 저장하여라.

단, balance의 첫번째 값은 0이며, 보험 청구가 발생하는 시점()에만, 해당 시점의 balance (그 시점까지 받은 보험료 수익(150)을 더하고, 그 시점에서 청구로 지급되는 보험금을 빼 주는 방식)를 계산하여 순서대로 저장할 것.

Answer

먼저, 보험금의 연간 청구건수가 평균이 100인 포아송분포를 따르므로 pmf, $P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, $\lambda = 100$ 입니다.

다음으로, 보험금의 청구금액은 평균은 1, 분산은 1/2인 감마분포를 따르므로 pdf, $f(x) = x^{k-1} \frac{e^{-\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}$, $k\theta = 1$, $k\theta^2 = 1/2$ 입니다. 즉, $k = 2$, $\theta = 1/2$ 입니다.

각 청구금액은 즉시 지급되며, 발생시점은 0~1 사이의 uniform distribution을 따르므로 pdx . $f(x) = \frac{1}{1-0} = 1$ 입니다.

이제, 1년간 발생하는 보험손익의 모의실험에 대한 청구건수(포아송분포)를 N 번이라고 하고, 청구금액(감마분포) 및 청구시점(균등분포)을 각각 g_i 와 t_i for $1, \dots, N$ 라고 하면, $t = t_i$ 시점의 balance는 아래와 같이 계산됩니다.

$$balance_{t_i} = 150t_i - \sum_{k=1}^i g_k$$

또한, 기말시점($t=1$)의 최종 balance는 $150 - \sum_{all k} g_k$ 가 됩니다.

```
# 포아송, 감마, 균등분포에 대한 모의실험은 numpy의 random module 활용
import numpy as np
from numpy import random as rd
```

```
rd.seed(0) # seed를 설정하여 통제
N=rd.poisson(lam=100,size=1)
N=N[0]
t=rd.uniform(low=0.0,high=1.0,size=N)
t=np.sort(t)
g=rd.gamma(shape=2.,scale=0.5,size=N)
balance=[0] # balance의 초기값은 0
for i in range(N):
```

```
balance.append(round(t[i]*150-sum(g[:i+1]),4))
balance.append(round(150-sum(g),4)) # balance의 기말값
```

```
print(balance[:5],balance[N-5:],sep="\n")
```

```
[0, -1.9755, -2.1182, -2.7092, -3.9799]
[44.5214, 47.2399, 48.4395, 48.2655, 47.6871, 48.74, 50.4839]
```

(2)

위 모의실험을 10000회 반복하여 다음에 대한 확률을 추정해 보자.

- 보험회사가 최종적으로 가지게 되는 balance의 기대값(모의실험을 10000회 반복하였을 때 각 모의실험마다 계산된 balance의 최종값들의 평균으로 추정)은 얼마인가?
- 보험회사의 balance가 1년 중 한번 이상 -5 이하로 떨어질 확률(10000회의 모의실험 중에서 balance가 -5이하로 떨어진 적이 있었던 경우의 비율로 추정)은 얼마인가?

Answer

평균은 약 49.86, -5이하로 떨어질 확률은 약 7.05%입니다.

```
last_balance=list()
minus5_balance=0
for k in range(10000):
    rd.seed(k)
    N=rd.poisson(lam=100,size=1)
    N=N[0]
    t=rd.uniform(low=0.0,high=1.0,size=N)
    t=np.sort(t)
    g=rd.gamma(shape=2.,scale=0.5,size=N)
    balance=[0]
    for i in range(N):
        balance.append(round(t[i]*150-sum(g[:i+1]),4))
    last_balance.append(round(150-sum(g),4))
    balance.sort()
```

```
if balance[0]<=-5:minus5_balance+=1
print(sum(last_balance)/10000,
      minus5_balance/10000,sep="\n")
```

49.864134890000095

0.0705

Part III

채권분석('24봄)

채권분석 과제1

1. CB

(*Question*)

전환사채를 액면 F 만큼 매입할 때 전환가가 P라면, 전환주식수는 F/P 로 주어진다. 특정 전환사채를 액면 1 억원 만큼 시장에서 매입하였다. 매입가는 1억 1천만원이다. 전환가격은 5만원으로 주어져 있다.

해당 주식의 시장가 가 6만원일 때 전환하여 매도하였다면 투자자의 수익률은 무엇인가? %로 쓰되, 소수점 둘째 자리까지만 쓰시오.

(*Answer*) 9.09%

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} = 2,000 \\ &= 2000 \times 60,000 = 120,000 \\ &= 11\%, \quad = \frac{1.2}{1.1} - 1 \approx 9.09\% \end{aligned}$$

2. FRN

(*Question*)

정부가 2년 만기 변동금리채권을 발행한다고 가정하자. 기준금리는 만기 1년 현물 이자율 (spot rate 또는 1년 만기 무이표채 국채의 이자율)이고, 해당 변동금리채권의 이자는 1년마다 계산하여 지급한다, 즉 1년 말에 지급하고 2년 만기시 원금과 함께 지급한다.

현재 1년 spot rate 을 $r_{1,0}$, 1년 후 spot rate 을 $r_{1,1}$ 이라 하면 받게 되는 총 금액은 액면 100 당 $100r_{1,0}$ (1년 시점) 과 $100(1 + r_{1,1})$ (2년 시점)이다. 물론 $r_{1,1}$ 은 현재 시점에서는 알 수 없는 확률변수이다.

액면이 100 인 위의 2년 만기 변동금리채권의 현재 시점의 공정한 가격을 구하시오. 투자자는 시장에서 1년 만기 무이표채 국채를 현재 시점이던 1년 후 시점이던 자유롭게 거래할 수 있다.

(Answer) 100

상기 FRN은 1년 만기 무이표 국채의 이자율만큼의 쿠폰을 지급하고 있다. 이러한 액면 100인 FRN의 현금흐름은 현재 1년 만기 무이표국채에 $100r_{1,0}$ 만큼 투자하고, 1년 뒤 만기시점에 다시 1년 만기 무이표국채에 $100 + r_{1,1}$ 투자함으로써 복제할 수 있다.

즉, 해당 FRN은 무위험이자율 만큼의 연수익률을 보장하는 채권으로서 쿠폰=할인율이므로 공정가격은 100(par-value)에 형성되어야 한다.

i Foward rate를 이용한 풀이

$r_{1,1}$ 은 확률변수이므로, FRN의 2년뒤 현금흐름 $100(1 + r_{1,1})$ 을 현재가치로 환산한다면 그 공정가치는 $\frac{100(1+E[r_{1,1}])}{(1+r_{2,0})^2}$ 으로 표현할 수 있다.

한편, 1년뒤 1년 spot-rate의 기댓값은 foward rate으로 볼 수 있고, 현재시점의 2년 spot-rate는 $(1 + r_{1,0})(1 + f_{1,1})$ 로 표현할 수 있다. 따라서, FRN의 공정가격은 다음과 같다.

$$FRN\ price = \frac{100r_{1,0}}{1 + r_{1,0}} + \frac{100(1 + E[r_{1,1}])}{1 + r_{2,0}} = \frac{100r_{1,0}}{1 + r_{1,0}} + \frac{100(1 + f_{1,1})}{(1 + r_{1,0})(1 + f_{1,1})} = \frac{100(1 + r_{1,0})}{1 + r_{1,0}} = 100$$

3. YTM

(Question)

잔존만기가 3년이고 연 8% 이자를 6개월마다 제공하는 채권을 가정하자. A 투자자는 이 채권에 관심이 있고 거래하는 딜러는 100달러 액면당 92.5067 달러를 요구한다.

이때 이 채권의 수익률은 얼마인가? % 로 표시하되 소수점은 반올림하여 정수로 나타내시오.

(Answer) 11%

채권의 수익률 y 와 가격에 관한 산식은 다음과 같다.

$$92.5067 = \sum_{k=1}^{6} \frac{8/2}{(1 + y/2)^k} + \frac{100}{(1 + y/2)^6}$$

이를 엑셀 해찾기 기능으로 근사한 y 값은 약 11%이다.

4. Continuous compounding

(Question) 10.71%

위의 문제는 compounding frequency 를 연 1회로 가정하고 있다. 이것은 이산복리법이다. 이 frequency가 무한이 되는 연속복리법에 따르면 1달러 투자가 1년 후에 e^y 가 된다. 여기서 y 는 연속복리이자율이다.

위 현금흐름 수익률을 연속복리이자율로 표현하시오. %로 나타내되 소수점 둘째 자리까지 쓰시오.

(Answer)

(3)의 현금흐름을 연속복리로 표현하면 다음과 같다.

$$92.5067 = \sum_{k=1}^6 \frac{8}{2} e^{-0.5ky} + 100e^{-3y}$$

이를 엑셀 해찾기 기능으로 근사한 y 값은 10.71%이다.

i 수익률 관계를 이용한 풀이

(3)의 수식과 비교하여 단순히 $e^{0.5y_{continuous}} = (1+y_{annual}/2) = 1.055$ 로 표현할 수 있고 값은 10.71%로 오차범위 내에서 동일하다.

5. Arbitrage

(Question)

아래와 같은 세 개의 채권이 시장에서 거래되고 있다. 트레이더 B 는 이를 보고 곧 차익거래의 기회가 있음을 파악하고 전략적으로 거래하여 이익을 얻었다. 어떤 전략이 가능할지 본인의 생각을 기술하시오.

- 채권 a: 만기 1년 무이표채, 액면 100 당 가격 90
- 채권 b: 만기 2년 무이표채, 액면 100 당 가격 80
- 채권 c: 만기 2년 이표채, coupon rate 10%, 매년 말 이자지급, 액면 100 당 가격 100

(Answer) 채권a:채권b=1:11로 투자하여 채권c를 만들고 시장에 매도

채권a와 채권b의 수익률은 zero-rates이며, 이를 y_a, y_b 라고 할 때, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{100}{1+y_a} = 90, \frac{100}{(1+y_b)^2} = 80 \Rightarrow \frac{1}{1+y_a} = 0.9, \frac{1}{(1+y_b)^2} = 0.8$$

이를 이용하여 채권c의 현금흐름을 평가하면, $\frac{10}{1+y_a} + \frac{110}{(1+y_b)^2} = 9 + 88 = 97$

즉, 액면 100인 채권c의 공정가격은 97이나, 현재 100에 거래되고 있으므로 3만큼 고평가되어있는 상태이다. 따라서 트레이더B가 채권a:채권b=1:11 비중으로 매수한다면 액면이 10인 채권c의 현금흐름을 정확하게 복제할 수 있는데, 이를 이용하면 무위험 차익거래를 할 수 있다.

예를 들어,

- (1) 액면 100억원 채권c를 시장에 매도(공매도 or 발행)하여 100억원의 자금을 조달
- (2) 액면 10억원 채권a를 9억원에, 액면 110억원 채권b를 88억원에 매수
- (3) 1년뒤 채권a의 원금 10억을 받아 채권c의 이표 10억원을 값고, 2년뒤 채권b의 원금 110억을 받아 채권c의 원금+이표 110억원을 값을 수 있으므로 현재 시점에서 미래현금흐름은 0임(리스크=0)
- (4) 한편, 현재 100억원을 빌려 97억원을 사용하였으므로 3억원의 무위험차익 실현 (또는, 남은 3억원을 채권b에 투자하여 현재시점의 투입자본없이 2년뒤 3.75억의 수익 실현 가능)

채권분석 과제2

1. Callable bond

(Question)

만기 2년, 액면이자율 10% (연 1회 지급), 액면가 100 인 수의상환채권 callable bond 를 생각하자. 이 채권의 상환액 call price 는 100, 상환기간은 1년부터 (이자지급 이후) 만기까지이다. 즉, 채권발행자 (기채자, 채무자) 는 상환기간 동안 원하는 때 100으로 채권을 상환할 수 있다. 1년이 지난 시점에서 만기수익률을 10.05% 라 가정하자.

채권의 가격 P_0 를 구하시오.

시중금리변화에 따라 이 만기수익률이 즉각적으로 10bp 상승할 때의 가격 P_+ 를 구하시오.

그리고 만기수익률이 즉각적으로 10bp 하락할 때의 가격 P_- 를 구하시오.

채권발행자는 채권의 가치가 100을 넘어서면 상환할 인센티브가 있음을 고려하라. 이를 세 값을 바탕으로 우리는 수의상환채권에 대하여 유효한 드레이션을 $-\frac{1}{P_0} \times \frac{P_+ - P_-}{20bp}$ 로 구할 수 있다. 소수점 네째자리까지 리포트하시오.

(Answer)

1년이 지난 시점에서 수의상환채권의 잔여현금흐름은 만기 일시납 110이며, YTM은 10.05%이므로 가격 P_0 는 약 99.9546입니다.

$$P_0 = 110 / (1 + 0.1005)$$

$$P_0$$

[1] 99.95457

만기수익률이 10bp씩 즉각적으로 움직일 때, 수의상환부를 고려하지 않은 채권가격은 아래와 같습니다.

```
P0_up=110/(1+0.1005+0.001)
P0_down=110/(1+0.1005-0.001)
c(P0_up,P0_down)
```

[1] 99.86382 100.04548

그러나, 수의상환채권의 가격은 call price를 초과할 수 없으므로 $P_+ = 99.8638$, $P_- = 100$ 입니다.

위 가격으로부터 산출한 잔존만기 1년의 수의상환채권의 듀레이션은 약 0.6812입니다.

$$D_{callable} - \frac{1}{P_0} \times \frac{P_+ - P_-}{20bp} = 0.6812$$

```
duration=(-1/P0)*(P0_up-100)/0.002
round(duration,4)
```

[1] 0.6812

2. Spot rate

(Question)

hw2.xlsx에는 Treasury par yield (%) 값이 일부 주어져 있다. 이것은 2024년 3월 21일 기준 US Treasury Par Yield Curve 이다.

선형보간법을 이용하여 빈 곳을 채우고, 1년에 2회 이자를 지급하는 기준으로 하여 spot rate 을 구하시오. 단, 0.5년과 1년 채권은 무이표 채권이다. 제출할 때에는 % 로 소수점 둘째 자리까지 보이시오.

(Answer)

먼저, 선형보간법을 통해 기간별 Par-yield를 구하도록 하겠습니다.

```
library(tidyverse)
par_yield <- tibble("year"=seq(0.5,10,0.5),
                     "period"=c(1:20),
                     "paryield"=c(5.36,5.01,NA,4.62,NA,
                                4.42,NA,NA,NA,4.26,
```

```

NA,NA,NA,4.28,NA,
NA,NA,NA,NA,4.27))

par_yield <- par_yield %>%
  mutate(interpolation=if_else(paryield %>% is.na(),
                                (lag(paryield)+lead(paryield))/2,
                                paryield)) %>%
  mutate(interpolation=if_else(interpolation %>% is.na(),
                                (lag(lag(interpolation))+lead(lead(interpolation)))/2,
                                interpolation)) %>%
  mutate(interpolation=if_else(interpolation %>% is.na(),
                                (lag(interpolation)+lead(interpolation))/2,
                                interpolation))

par_yield <- par_yield %>%
  mutate(interpolation=if_else(interpolation %>% is.na(),
                                ((20-period)*par_yield$interpolation[14]
                                 +(period-14)*par_yield$interpolation[20])/6,
                                interpolation))

par_yield %>% as.data.frame()

```

	year	period	paryield	interpolation
1	0.5	1	5.36	5.360000
2	1.0	2	5.01	5.010000
3	1.5	3	NA	4.815000
4	2.0	4	4.62	4.620000
5	2.5	5	NA	4.520000
6	3.0	6	4.42	4.420000
7	3.5	7	NA	4.380000
8	4.0	8	NA	4.340000
9	4.5	9	NA	4.300000
10	5.0	10	4.26	4.260000
11	5.5	11	NA	4.265000
12	6.0	12	NA	4.270000

13	6.5	13	NA	4.275000
14	7.0	14	4.28	4.280000
15	7.5	15	NA	4.278333
16	8.0	16	NA	4.276667
17	8.5	17	NA	4.275000
18	9.0	18	NA	4.273333
19	9.5	19	NA	4.271667
20	10.0	20	4.27	4.270000

다음으로, Par-yield와 6개월/1년 spot rate를 통해 기간별 spot rate를 boot-strapping 방식으로 산출하도록 하겠습니다.

Par-yield는 채권의 현재가격을 액면가격으로 만들어주는 coupon-rate입니다. 즉, 액면가 100의 채권이 연간 par-yield만큼 쿠폰을 semi-annually 지급한다면 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$100 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Par/2}{(1 + Spot_k/2)^k} + \frac{100 + Par/2}{(1 + Spot_n/2)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1 + Spot_n/2)^n} = \frac{1}{100 + Par/2} (100 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{Par/2}{(1 + Spot_k/2)^k})$$

$$\Rightarrow Spot_n = ((\frac{100 + Par/2}{100 - \text{Sum of Coupon PV}})^{\frac{1}{n}} - 1) \times 2$$

위 수식을 R을 이용해서 산출하고, 소수점 둘째자리까지 반올림한 결과는 아래와 같습니다.

```
spot <- par_yield %>%
  select(year, period, interpolation) %>%
  mutate(coupon=interpolation/2,
         spot=if_else(period<=2, interpolation, NA)) %>%
  mutate(dc=1/(1+spot/100/2)^period) %>%
  mutate(cum_dc=cumsum(dc)) %>%
  mutate(sum_pvc=coupon*(cum_dc-dc))

for (i in 3:20){
  spot$sum_pvc[i] <- spot$coupon[i]*spot$cum_dc[i-1]
  spot$dc[i] <- (100-spot$sum_pvc[i])/(100+spot$coupon[i])
```

```

spot$spot[i] <- {{(1/spot$dc[i])^(1/spot$period[i])-1}*200}
spot$cum_dc[i] <- spot$cum_dc[i-1]+spot$dc[i]
}
spot <- spot %>% mutate(spot2=spot %>% round(2))
spot %>% select(year,period,interpolation,spot2)

```

```

# A tibble: 20 x 4
  year period interpolation spot2
  <dbl>   <int>        <dbl>   <dbl>
1     0.5      1          5.36    5.36
2     1        2          5.01    5.01
3     1.5      3          4.81    4.81
4     2        4          4.62    4.61
5     2.5      5          4.52    4.51
6     3        6          4.42    4.4
7     3.5      7          4.38    4.36
8     4        8          4.34    4.32
9     4.5      9          4.3     4.28
10    5       10          4.26    4.24
11    5.5     11          4.26    4.25
12    6       12          4.27    4.25
13    6.5     13          4.28    4.26
14    7       14          4.28    4.27
15    7.5     15          4.28    4.27
16    8       16          4.28    4.26
17    8.5     17          4.27    4.26
18    9       18          4.27    4.26
19    9.5     19          4.27    4.26
20   10      20          4.27    4.26

```

3. Forward rate

(*Question*)

위의 문제에서 구한 현물이자율을 이용하여 선도이자율을 구하여라. 이 때 선도이자율은 6개월 구간마다 주어진다. 물론 0 부터 6개월까지의 선도이자율은 6개월 현물이자율과 같다. 선도이자율도 %로 소수점 둘째 자리까지 구하시오.

(Answer)

semi-annually 현물이자율에서 6개월 선도이자율에 대한 수식은 다음과 같습니다.

$$(1 + Spot_{n-1})^{n-1} (1 + Forward_{n-1,n}) = (1 + Spot_n)^n$$

$$\Rightarrow Forward_{n-1,n} = \frac{(1 + Spot_n)^n}{(1 + Spot_{n-1})^{n-1}} - 1$$

위 수식과 (2)의 소수점 둘째자리까지 반올림한 **Spot rate**를 이용하여 산출한 선도이자율은 아래와 같습니다.

```
forward <- spot %>%
  select(year, period, spot, spot2) %>%
  mutate(spot_yield=(1+spot/100/2)^period,
         spot_yield2=(1+spot2/100/2)^period) %>%
  mutate(forward={{spot_yield/lag(spot_yield)-1}*200} %>% round(2),
         forward2={{spot_yield2/lag(spot_yield2)-1}*200} %>% round(2))
forward %>% select(year, period, spot, forward2)
```

```
# A tibble: 20 x 4
  year period   spot forward2
  <dbl> <int> <dbl>     <dbl>
1    0.5      1  5.36     NA
2     1       2  5.01     4.66
3    1.5       3  4.81     4.41
4     2       4  4.61     4.01
5    2.5       5  4.51     4.11
6     3       6  4.40     3.85
7    3.5       7  4.36     4.12
8     4       8  4.32     4.04
9    4.5       9  4.28     3.96
10    5      10  4.24     3.88
```

11	5.5	11	4.25	4.35
12	6	12	4.25	4.25
13	6.5	13	4.26	4.38
14	7	14	4.27	4.4
15	7.5	15	4.27	4.27
16	8	16	4.26	4.11
17	8.5	17	4.26	4.26
18	9	18	4.26	4.26
19	9.5	19	4.26	4.26
20	10	20	4.26	4.26

🔥 Spot rate 소수점 자리 문제

Forward rate를 산출할 때, Spot rate를 소수점 두번째 자리까지 반올림하지 않는다면, Spot rate의 오차는 미미하더라도 Forward rate 산출에 영향을 주게 되며, 오차는 기간이 길어질수록 커집니다.

```
forward %>% select(year,period,forward2, forward) %>% filter(year>=8)
```

```
# A tibble: 5 x 4
  year period forward2 forward
  <dbl>   <int>    <dbl>    <dbl>
1     8      16     4.11     4.25
2    8.5      17     4.26     4.24
3     9      18     4.26     4.24
4    9.5      19     4.26     4.23
5    10      20     4.26     4.23
```

4. Continuous compounding - Forward rate

(Question)

챕터2에서 우리는 선도이자율이 구간별로 주어질 수 있음을 배웠다.

Semi-annual 베이스로 현물이자율을 정의했을 때, r_1 은 1년 현물이자율, $r_{1.5}$ 는 1년 6개월 현물이자율을 나타낸다. 그리고 6개월부터 1년까지 기간에 대한 선도이자율은 $(1 + r_1/2)^2 = (1 + r_{0.5}/2)(1 + f_{[0.5,1]}/2)$ 를 만족한다.

현물이자율을 연속복리법으로 정의했을 때, 1년 현물이자율을 r_1 이라 놓으면 시작점에서 1의 투자는 e_1^r 으로 성장한다. 마찬가지로 시간 t 에 대한 현물이자율을 r_t 라 놓으면 시작점에서의 1의 투자는 e^{tr_t} 로 성장한다. 두 시점 $a < b$ 에 대하여 연속복리법에 의한 현물이자율 r_a, r_b 가 주어져 있다. 투자자는 (a, b) 구간에 적용되는 선도거래를 체결하려고 한다.

이 때 중요한 것은 선도이자율인데, 무차익원리에 의한 선도이자율 $f(a, b)$ 를 a, b, r_a, r_b 를 이용하여 나타내시오. 물론 연속복리법을 적용한다.

(Answer)

연속복리법 하에서, $f(a, b), a, b, r_a, r_b$ 간에는 아래와 같은 식이 성립해야 합니다.

$$e^{a \times r_a} \times e^{(b-a) \times f(a, b)} = e^{b \times r_b}$$

이를 통해 $f(a, b)$ 를 표현하면,

$$\Rightarrow e^{ar_a + (b-a)f(a, b)} = e^{br_b}$$

$$ar_a + (b-a)f(a, b) = br_b \Rightarrow f(a, b) = \frac{br_b - ar_a}{b-a}$$

5. Pricing convention - full price

(Question)

2024년 3월 15일 호가가 액면 100 당 103-22+로 주어진 미 국채가 있다. 이 채권의 만기는 2029년 10월 15일이고 표면금리는 6.125%이다. 이자는 매 4월 15일, 10월 15일 지급될 때, full price를 구하시오. 소수점 여섯째자리까지 반올림하여 나타내시오.

(Answer)

미국 국채의 가격표시방법에 따라, 103-22+의 가격표시는 아래와 같습니다.

$$103 - 22+ = 103 + \frac{22}{32} + \frac{1}{64} = 103.703125$$

```
options(digits=10)
clean_price <- 103+22/32+1/64
clean_price
```

```
[1] 103.703125
```

해당 가격은 호가가격이므로, clean price=103.703125입니다.

경과이자(accrued interest)를 가산해야 Full price를 산출할 수 있습니다.

경과이자는 $\frac{x}{2} \times \text{---}$ 을 통해 구할 수 있습니다.

경과일은 152일, 이자지급기간은 183일이고, 산출된 경과이자는 약 2.543716입니다.

따라서, full price = clean(quoted) price + accrued interest = **106.246841**입니다.

```
library(lubridate)

accrued_date <- ymd("20240315")-ymd("20231015")
interest_period <- ymd("20240415")-ymd("20231015")
accrued_interest={(100*0.06125)/2}*(as.integer(accrued_date)/as.integer(interest_period))
full_price=round(clean_price+accrued_interest,6)

paste(accrued_date,interest_period,accrued_interest,full_price,sep=" / ")
```

```
[1] "152 / 183 / 2.54371584699454 / 106.246841"
```

채권분석 과제3

Question 1

투자자 A 는 표면금리 7% 미 국채를 액면 1,000 usd 구입하였다. 이 국채의 호가는 101-25+ 이다. 결제일은 2024년 2월 5일이고, 쿠폰 지급일은 매년 4월 15일, 10월 15일이다. 지불한 invoice price(full price)를 센트 까지만 구하시오.

Answer

먼저, 액면 100당 Quote price(clean price)= $101-25+=101+25/32+1/64=101.7969$ 입니다.

다음으로 경과이자(accrued interest)는 “(지난이자지급일로부터 경과일)/이자지급주기*이자”로 계산할 수 있습니다. (real/real 기반)

경과일은 113일(2023.10.15~2024.02.05), 이자지급주기는 183일(2023-10-15~2024.04.15)이므로, 경과이자는 약 21.6120입니다.

따라서, **Full price**는 약 1039.58입니다.

```
library(tidyverse)
```

```
clean <- (101+25/32+1/64)*10
day_interest <- as.integer(ymd(20240415)-ymd(20231015))
day accrued <- as.integer(ymd(20240205)-ymd(20231015))
accrued <- 35*day accrued/day interest
full <- clean+accrued
paste(clean,accrued %>% round(6),full %>% round(6),sep=" / ")
```

```
[1] "1017.96875 / 21.612022 / 1039.580772"
```

Question 2

시장에서 현물이자율이 1년 4%, 2년 5% 라 가정하자. 그리고 1년 현물이자율의 연 변동(log rate)의 표준편차는 0.005 라 하자. 1년 후 1년 현물이자율의 시나리오를 r_u, r_d 라 놓으면 시장 정보를 반영하는 이 두 값을 구하시오.

Answer

1년 후 현물이자율이 상승하였을 때를 r_u , 하락하였을 때를 r_d 로 나눌 수 있으며 현물이자율의 로그수익률의 연표준편차가 0.005이므로, 아래와 같이 표현할 수 있습니다.

$$r_u = r_d e^{2\sigma} = r_d e^{0.01}$$

한편, 2년 현물이자율에 투자한 zero-coupon bond 와 1년 zero-coupon 및 1년 후에 다시 zero-coupon(forward)에 투자한 포트폴리오의 가치는 같아야 하므로,

$$\frac{100}{1.05^2} = \frac{100}{(1.04)(1 + E(r_1))} = 0.5 \times \frac{100}{1.04(1 + r_u)} + 0.5 \times \frac{100}{1.04(1 + r_d)}$$

이분법을 통해 값을 추정하면, $r_u \approx 6.04\%$. $r_d \approx 5.98\%$

```
initial_d <- 0.01; initial_u <- 0.10
r_d <- (initial_u+initial_d)/2; r_u <- r_d*exp(0.01)

while(abs(0.5*100/(1.04*(1+r_u))+0.5*100/(1.04*(1+r_d))-100/1.05^2)>0.001){
  if(0.5*100/(1.04*(1+r_u))+0.5*100/(1.04*(1+r_d))-100/1.05^2>0){initial_d <- r_d}
  if(0.5*100/(1.04*(1+r_u))+0.5*100/(1.04*(1+r_d))-100/1.05^2<=0){initial_u <- r_d}
  r_d <- (initial_u+initial_d)/2
  r_u <- r_d*exp(0.01)}
paste(r_u %>% round(4),r_d %>% round(4))
```

[1] "0.0604 0.0598"

Question 3

2년 만기이고 표면금리가 8% 인 회사채를 가정하자. 표면금리의 지급은 연 1회이다. 그리고 이 회사채는 1년 시점에서 액면가 100 으로 call 할 수 있는 수의상환채이다. 신용위험 때문에 시장 에서는 이 회사채를 위에서 구한 금리모형에 스프레드를 더하여 그 가치를 계산한다.

시장가가 101.9 라 할 때, static spread 와 option-adjusted spread 를 구하여라

Answer

먼저, 수의상환부회사채의 시장가격 101.9와 문제 2의 zero-rate를 통해 **Static spread**를 산출하면 아래와 같습니다.

$$101.9 = \frac{8}{(1.04 + ss)} + \frac{108}{(1.05 + ss)^2} \Rightarrow ss \approx 1.988\%$$

```
market_price <- 101.9; initial_d <- 0.001; initial_u <- 0.1
ss <- (initial_u+initial_d)/2

while(abs(8/(1.04+ss)+108/(1.05+ss)^2-market_price)>0.00001){
  if(8/(1.04+ss)+108/(1.05+ss)^2-market_price>0){initial_d <- ss}
  if(8/(1.04+ss)+108/(1.05+ss)^2-market_price<=0){initial_u <- ss}
  ss <- (initial_u+initial_d)/2}
```

[1] 0.01988313

다음으로, 문제 2의 금리모형을 이용하여 OAS를 구해보겠습니다.

먼저, OAS를 적용한 할인율은 zero rate + OAS로 표현할 수 있습니다.

문제 2에 따라 1년 zero-rate는 4%, 상승시 $r_u = 0.0604$, 하락시 $r_d = 0.0598$ 이므로,

$$r_1^* = 0.04 + OAS, r_u^* = 0.0604 + OAS, r_d^* = 0.0598 + OAS$$

수의상환회사채는 1년 후 가격이 액면가보다 높으면 100에 상환되므로, r_u^* , r_d^* 가 8%보다 높은 경우 100에 상환됩니다.

따라서, 수의상환회사채의 금리 상승/하락에 따른 가치평가는 아래와 같습니다.

$$101.9 = \frac{1}{1+r_1^*} [8 + \frac{1}{2} (\min\{\frac{108}{1+r_u^*}, 100\} + \min\{\frac{108}{1+r_d^*}, 100\})]$$
$$= \frac{1}{1.04+OAS} [8 + \frac{1}{2} (\min\{\frac{108}{1.0604+OAS}, 100\} + \min\{\frac{108}{1.0598+OAS}, 100\})]$$
$$\Rightarrow OAS \approx 1.978\%$$

```
initial_d <- 0.001; initial_u <- 0.1
OAS <- (initial_u+initial_d)/2
while(abs((1/(1.04+OAS))*(8+0.5*(min(108/(1+r_u+OAS),100)+min(108/(1+r_d+OAS),100)))-market_price)>0.001)
  if((1/(1.04+OAS))*(8+0.5*(min(108/(1+r_u+OAS),100)+min(108/(1+r_d+OAS),100)))-market_price>0)
    if((1/(1.04+OAS))*(8+0.5*(min(108/(1+r_u+OAS),100)+min(108/(1+r_d+OAS),100)))-market_price<=0)
      OAS <- (initial_u+initial_d)/2
  }
OAS
```

[1] 0.01978343

! Difference in each spreads

Nominal spread, Static spread, Options adjusted spread

1. Nominal spread : 단순히 국채 vs. 회사채의 YTM을 비교
2. Static spread : zero rate + α 를 계산, 기간구조를 반영하고 있으나 향후 금리변동은 반영하지 않고 단순 현금흐름만 비교하므로, Zero-volatility spread라고도 함
3. Options adjusted spread : 수의상환채의 옵션에 따른 향후 현금흐름 변동가능성을 고려하여 산출. 미래 금리변동으로 인해 옵션이 권리행사되는 경우를 감안하여 산출

Question 4

PSA 방법에 따르면 PSA 스피드에 따라 월별 CPR이 결정되고, 이는 다시 SMM을 결정한다. 강의노트의 PSA 방법론을 참조하여 다음의 SMM 표를 완성하시오.

월	100 PSA	60 PSA	230 PSA
1			
20			
200			

Answer

PSA란 연조기상환율(CPR:Conditional Prepayment Rate)이 매달 0.2% 증가하며, 6%까지 증가한 후 만기까지 지속되는 형태의 조기상환모형입니다.

100 PSA가 기준이며, 50 PSA인 경우 매달 0.1%씩 증가 등 비율이 달라지게 됩니다.

다음으로, 월별조기상환율(SMM:Single Monthly Mortality rate)은 CPR을 월환산한 것으로, $1 - SMM = (1 - CPR)^{\frac{1}{12}}$ 입니다.

이에 따라 산출한 (1-SMM) 표는 아래와 같습니다.

월	100 PSA	60 PSA	230 PSA
1	$(1 - 0.2\%)^{\frac{1}{12}}$	$(1 - 0.2\% \times 0.6)^{\frac{1}{12}}$	$(1 - 0.2\% \times 2.3)^{\frac{1}{12}}$
20	$(1 - 4\%)^{\frac{1}{12}}$	$(1 - 4\% \times 0.6)^{\frac{1}{12}}$	$(1 - 4\% \times 2.3)^{\frac{1}{12}}$
200	$(1 - 6\%)^{\frac{1}{12}}$	$(1 - 6\% \times 0.6)^{\frac{1}{12}}$	$(1 - 6\% \times 2.3)^{\frac{1}{12}}$

이를 정리한 SMM 표는 아래와 같습니다.

월	100 PSA	60 PSA	230 PSA
1	0.000167	0.0001	0.000384
20	0.003396	0.002022	0.008010
200	0.005143	0.003051	0.012299

Question 5

다음의 CMO 는 9% 금리를 갖는 모기지 풀을 담보로 가지고 있다.

tranche	par(m USD)	coupon rate(%)
A	300	7
B	200	6.75
C	200	7.25
D	250	7.75

투자자가 금리 9% 의 notional IO 투자를 원한다고 하자. 해당 상품의 액면가를 계산하시오.

Answer

먼저, CMO의 담보에서는 9%의 현금흐름이 발생하는 반면 각 tranche의 쿠폰은 9% 미만이므로 초과이자가 \$17.125m만큼 발생합니다.

이 초과이자분으로 금리 9%의 원금 없이 이자만 지급하는 구조화채권(Nominal IO)을 설계한다면, 액면가(명목금액)은 9%의 이자로 CMO의 초과수익인 \$17.125m를 지급해야합니다.

따라서, 액면가(명목금액)는 $\$17.125m / 9\% = \$190.2778m$ 입니다.

```
total_inflow=(300+200+200+250)*0.09
total_outflow=300*0.07+200*0.0675+200*0.0725+250*0.0775
excess_interest=total_inflow-total_outflow
notional=excess_interest/0.09
paste(excess_interest, notional, sep=" / ")
```

[1] "17.125 / 190.27777777778"

Part IV

투자분석('24봄)

투자분석 과제1

Question

You are a stock analyst and want to evaluate stocks. You may select any 3 stocks and get information from data source you prefer. You need a risk-free rate and market risk premium for this assignment. Choose appropriate risk-free rate such as 3-month T-bill rate or 1-month LIBOR and risk premium for the market portfolio. Use the constant growth dividend discount model. You may use any computer tool but do not hand in the data or the program code.

- a) What are the names of stocks you choose?
- b) Specify risk-free rate, risk premium and the data source.
- c) What are the required rates of return? Use the CAPM. You need to specify firm's beta and the expected rate of return of the market index portfolio.
- d) Calculate present value of growth opportunity (PVGO) for each stock.
- e) Find the intrinsic value (0) and 1-year value (1) for each stock.
- f) Find the expected rate of return for each stock, i.e., $(1 - 0)/0$ where 0 is the current market price.
- g) Based on the calculation above, which stock do you buy or sell? Explain briefly

문제풀이

(a) 주식 선정

저는 *CME group(CME)*, *ICE(ICE)*, *Nasdaq(NDAQ)* 세가지 종목을 선정하였습니다.

선정 배경으로는,

- (1) 제가 거래소 산업에 관심이 많고,
- (2) 세 주식 모두 미국에 상장되어있는 대표적인 글로벌 거래소이며,

(3) 동일한 거래소 산업이고 S&P500지수의 구성종목이라 동일 선상에서 비교하기 적합할 것으로 보이기 때문입니다.

관련 자료는 [Yahoo Finance](#)를 참조하였습니다.

(b) 무위험이자율 및 리스크프리미엄

risk-free rate는 최근 미국에서 대체지표금리로 선정한 SOFR기반의 금리를 누적하여 3개월 금리로 환산한 3-month SOFR Average를 risk-free rate로 선정하였습니다.

[New York Fed : SOFR Average](#)

각 주식과 시장(S&P500)의 리스크프리미엄은 과거 3년간('21~'23)의 연평균수익률 및 무위험이자율을 이용하여 산출할 예정입니다.

각 데이터를 취합하여 정리한 결과 및 무위험이자율, 리스크프리미엄의 산출은 아래와 같습니다.

```
# import data&library
rm(list = ls())
library(tidyverse)
nasdaq <- read_csv("investment_hw/투자분석_NDAQ.csv")
cme <- read_csv("investment_hw/투자분석_CME.csv")
ice <- read_csv("investment_hw/투자분석_ICE.csv")
rf <- read_csv("investment_hw/투자분석_sofrai.csv")
market <- read_csv("investment_hw/투자분석_snp500.csv")

# tidy data
rf2 <- rf %>%
  filter(`90-Day Average SOFR` %>% is.na()==FALSE) %>%
  mutate(date=paste0(substr(`Effective Date`,7,10),
                     substr(`Effective Date`,1,2),
                     substr(`Effective Date`,4,5)) %>% as.integer(),
         year=substr(`Effective Date`,7,10),
         month=substr(`Effective Date`,1,2),
         group="rfr",
         price=`90-Day Average SOFR`) %>%
  select(year,month,date,group,price)
```

```

# Data Pre-processing
tidydata <- tibble()
tidydata <- nasdaq %>%
  mutate(group="nasdaq") %>%
  union_all(cme %>% mutate(group="cme")) %>%
  union_all(ice %>% mutate(group="ice")) %>%
  union_all(market %>% mutate(group="market")) %>%
  mutate(date=paste0(substr(Date,1,4),
                     substr(Date,6,7),
                     substr(Date,9,10)) %>% as.integer(),
         year=substr(Date,1,4),
         month=substr(Date,6,7),
         price=`Adj Close`) %>%
  select(year,month,date,group,price) %>%
  union_all(rf2) %>%
  arrange(date,group)

# Use daily adj. closing price, if rfr is NA then use yesterday rfr.
tidydata_wide <- tidydata %>%
  pivot_wider(names_from = "group", values_from = "price") %>%
  filter(nasdaq %>% is.na()==FALSE,
         cme %>% is.na()==FALSE,
         ice %>% is.na()==FALSE,
         market %>% is.na()==FALSE) %>%
  mutate(rfr=if_else(rfr %>% is.na(),lag(rfr)/100,rfr/100)) %>%
  mutate(cme_yield=log(cme)-log(lag(cme)),
        ice_yield=log(ice)-log(lag(ice)),
        nasdaq_yield=log(nasdaq)-log(lag(nasdaq)),
        market_yield=log(market)-log(lag(market))) %>%
  filter(cme_yield %>% is.na()==FALSE)

```

```

rf3 <- tidydata_wide %>%
  filter(year!=2020&year!=2024,as.integer(month)%%3==0) %>%
  arrange(date %>% desc()) %>%

```

```

group_by(year,month) %>%
  slice(1) %>%
  ungroup() %>%
  summarise(rfr_3year=mean(rfr))

tidydata_wide %>% filter(date==20231229) %>% select(rfr) %>% bind_cols(rf3)

```

```

# A tibble: 1 x 2
  rfr rfr_3year
  <dbl>     <dbl>
1 0.0536    0.0223

```

```

tidydata_wide %>%
  filter(year!=2020&year!=2024) %>%
  summarise(cme_premium=sum(cme_yield)/3-rf3$rfr_3year,
            ice_premium=sum(ice_yield)/3-rf3$rfr_3year,
            nasdaq_premium=sum(nasdaq_yield)/3-rf3$rfr_3year,
            market_premium=sum(market_yield)/3-rf3$rfr_3year)

```

```

# A tibble: 1 x 4
  cme_premium ice_premium nasdaq_premium market_premium
  <dbl>        <dbl>        <dbl>        <dbl>
1 0.0679      0.0272      0.0826      0.0573

```

무위험이자율은 기간별 기준 5.36%, 과거 3개년 동안 무위험이자율에 투자한 연평균수익률은 약 2.23%, 과거 3개년 동안 실현된 각 주식과 시장의 연환산 리스크프리미엄은 아래 표와 같습니다.

구 분	S&P500	CME	ICE	NASDAQ
연수익률	7.96%	9.03%%	4.95%	10.49%
프리미엄	5.74%	6.81%%	2.73%	8.27%

⚠ Excess return vs. Risk premium

초과수익률은 과거의 값을 바탕으로 산출되며, 리스크프리미엄은 기대수익률을 기반으로 산출.

위의 풀이는 초과수익률을 산출하였으므로 오답이며, 리스크프리미엄은 CAPM 등의 기대수익률을 가지고서 산출해야 함.

$$\text{Excess return} = r - r_f$$

$$\text{Risk premium} = E[r] - r_f$$

(c) CAPM

각 종목의 베타를 산출하기 위해 필요한 파라미터는 아래와 같습니다.

- 무위험이자율, R_f : 기간말('23.12월말)의 3-month SOFR average
- 시장수익률, R_m : S&P500지수의 수익률
- 개별수익률, R_{stock} : 개별 주식의 수익률

수익률은 일간/월간 두가지를 사용하여 비교할 예정이며, 회귀분석에 사용한 값은 아래와 같습니다.

- 기간 : (일별) 2023년 250거래일, (월간) 2021년~2023년 36개월
- 산출방법 : (일별) 전일 종가 대비 당일 종가의 로그수익률, (월별) 이전달 말 종가 대비 이번달 말 종가의 로그수익률

마지막으로, 베타를 이용하여 기대수익률을 산출할 때 이용한 R_m 은 다음과 같습니다.

- (일별) 250일간 S&P500지수 일평균수익률의 연환산(=연수익률)
- (월별) 36개월간 S&P500지수 월평균수익률의 연환산(=3개년수익률/3)

⚠ Warning

로그수익률(연속복리수익률)을 사용하였으므로 보유기간수익률로 표현할 때 단순 덧셈만으로 환산할 수 있습니다.

또한, 기간 중 배당 및 CA로 인한 차이는 수정주가(Adj. close price)를 사용해서 보정하였습니다.

이에 따라, R 코드로 산출한 개별종목별 베타 / 기대수익률 / 산출기간동안 실현수익률은 아래와 같습니다.

```
# calculate beta, required return
```

```
# daily beta in '23
```

```

dailybeta <- tidydata_wide %>%
  filter(year=="2023") %>%
  summarise(beta_cme=cov(market_yield,cme_yield)/var(market_yield),
            beta_ice=cov(market_yield,ice_yield)/var(market_yield),
            beta_nasdaq=cov(market_yield,nasdaq_yield)/var(market_yield),
            market_avg_yield=sum(market_yield),
            cme_avg_yield=sum(cme_yield),
            ice_avg_yield=sum(ice_yield),
            nasdaq_avg_yield=sum(nasdaq_yield)) %>%
  mutate(group="daily")

# monthly beta
monthlybeta <- tidydata_wide %>%
  arrange(year,month,date %>% desc) %>%
  group_by(year,month) %>%
  slice(1) %>%
  ungroup() %>%
  mutate(cme_yield=log(cme)-log(lag(cme)),
        ice_yield=log(ice)-log(lag(ice)),
        nasdaq_yield=log(nasdaq)-log(lag(nasdaq)),
        market_yield=log(market)-log(lag(market))) %>%
  filter(cme_yield %>% is.na()==FALSE) %>%
  filter(year!="2024",year!="2020") %>%
  summarise(beta_cme=cov(market_yield,cme_yield)/var(market_yield),
            beta_ice=cov(market_yield,ice_yield)/var(market_yield),
            beta_nasdaq=cov(market_yield,nasdaq_yield)/var(market_yield),
            market_avg_yield=sum(market_yield)/3,
            cme_avg_yield=sum(cme_yield)/3,
            ice_avg_yield=sum(ice_yield)/3,
            nasdaq_avg_yield=sum(nasdaq_yield)/3) %>%
  mutate(group="monthly")

beta <- tibble()
beta <- dailybeta %>%

```

```

union_all(monthlybeta) %>%
  mutate(tidydata_wide %>% filter(date==20231229) %>% select(rfr)) %>%
  select(group, market_avg_yield, cme_avg_yield, ice_avg_yield, nasdaq_avg_yield,
         rfr, beta_cme, beta_ice, beta_nasdaq)

capm <- tibble()
capm <- beta %>%
  pivot_longer(cols = c("beta_cme", "beta_ice", "beta_nasdaq"),
               names_to = "stock", values_to = "beta") %>%
  mutate(expected_return=beta*(market_avg_yield-rfr)+rfr) %>%
  mutate(stock=substr(stock,6,nchar(stock))) %>%
  mutate(realized_return=if_else(stock=="cme",cme_avg_yield,
                                 if_else(stock=="ice",ice_avg_yield,nasdaq_avg_yield))) %>%
  select(group, stock, beta, expected_return, realized_return, market_avg_yield, rfr)

capm

```

```

# A tibble: 6 x 7
  group   stock   beta expected_return realized_return market_avg_yield     rfr
  <chr>  <chr>  <dbl>        <dbl>        <dbl>        <dbl>    <dbl>
1 daily    cme    0.315      0.105      0.272      0.217    0.0536
2 daily    ice     0.828      0.189      0.240      0.217    0.0536
3 daily  nasdaq  0.866      0.195     -0.0373     0.217    0.0536
4 monthly  cme    0.353      0.0628     0.0903     0.0796   0.0536
5 monthly  ice     1.12       0.0829     0.0495     0.0796   0.0536
6 monthly nasdaq 0.993      0.0795     0.105      0.0796   0.0536

```

일별/월별로 구분한 각 주식의 베타와 기대수익률입니다.

보다 일반적이고 평탄화된 결과를 위해 월별 데이터를 중심으로 설명하겠습니다.

먼저 각 주식의 베타는 **CME:0.35, ICE:1.12, Nasdaq 0.99**입니다. 이는 거래소산업이 특성상 변동성이 크지 않고 경제상황에 민감하지 않아 베타가 시장포트폴리오와 유사한 1 수준에서 형성되는 것으로 보입니다. 특히, CME는 세계 최대의 파생상품거래소로서 규모가 매우 큰 고배당 우량주인 특징이 있어 변동성이 낮아 베타가 0.35로 낮게 형성된 것으로 추정됩니다.

베타 산출방법

베타는 $R_{stock,t} = \alpha + \beta R_{m,t} + \epsilon$ 의 선형회귀분석 결과로 산출되는 계수입니다.

즉, $\beta = \rho_{stock,m} \frac{\sigma_{stock}}{\sigma_m} = \frac{Cov_{stock,m}}{\sigma_m^2}$ 로 산출할 수 있습니다.

월별수익률을 산출한 과거 3년(2021~2023)간 평균월별수익률을 연율화하면 로그수익률 특성상 지난 3년간 연평균수익률과 같습니다. 즉, 시장포트폴리오의 기대수익률은 약 7.96%라고 할 수 있으며, 무위험이자율은 2023.12월말 값인 5.36%를 사용합니다.

이제, $R_{stock} = \beta(R_m - R_f) + R_f$ 를 통해 각 주식의 요구수익률을 산출할 수 있습니다.

구 분	CME	ICE	NASDAQ
Beta	0.35	1.12	0.99
Required Return	6.28%	8.29%	7.95%

(d) PVGO

먼저, 거래소산업은 성장주보다는 우량주 성향이 강하고, 배당성향이 다소 높고 정기적인 배당을 하는 경향이 있습니다.. 따라서 배당할인모형(Constant-growth DDM)을 사용할 예정입니다.

먼저, 기업의 내재가치에 배당할인모형을 적용한 PVGO의 산식은 아래와 같습니다.

$$PVGO = V_0 - \frac{E_1}{k} = \frac{D_1}{k-g} - \frac{E_1}{k}$$

여기서, 요구수익률 k 는 (c)에서 CAPM으로 구한 요구수익률을 사용할 예정이며, D_1, E_1, g 를 구하기 위해 직전주당배당(D_0), 직전 주당수익(E_0), 직전재투자성향($b_0 = \frac{E_0 - D_0}{E_0}$), 직전 자기자본수익률 ROE_0 를 이용하여 다음과 같이 산출하도록 하겠습니다.

$$g = b_0 \times ROE_0 = \frac{E_0 - D_0}{E_0} \times ROE_0, \quad D_1 = D_0(1+g), \quad E_1 = E_0(1+g)$$

$$\Rightarrow PVGO = \frac{D_0(1+g)}{k-g} - \frac{E_0(1+g)}{k}$$

i 주당순이익 산출 : DDM

다음 년도의 주당순이익 E_1 은 올해의 순이익 E_0 에 배당할인모형의 배당성장률 g 를 반영하여 산출하였습니다.

이제, 각 주식의 재무상태표를 참조하여 D_0 , E_0 , b_0 , ROE_0 를 산출하겠습니다. 다만, 직전사업연도(2023)는 시장벤치마크(S&P500)의 수익률이 약 21%로, 과거 평균치의 약 3배를 상회하고 있어 각 기업의 EPS, DPS 등이 평소 수치보다 고평가되었을 가능성성이 있습니다. 이를 감안하여 D_0 , E_0 산출시에는 과거 3개년 당기순이익, 현금배당금의 산술평균을 사용할 것이며 ROE_0 는 과거 3개년의 기하평균을 사용하겠습니다.

각 값들은 [Yahoo Finance](#) 및 [Stockrow](#)를 참조하였습니다.

```
financial <- read_csv("investment_hw/투자분석_financialstatement.csv")
```

```
# DDM 이용
financial <- financial %>%
  group_by(stock) %>%
  summarise(eps=sum(earning)/sum(shares),
            dps=sum(dividend)/sum(shares),
            bps=sum(capital)/sum(shares),
            roe=prod(1+roe)^(1/3)-1) %>%
  mutate(reinvestment=(eps-dps)/eps) %>%
  mutate(growth=roe*reinvestment) %>%
  mutate(d1=dps*(1+growth),
         e1=eps*(1+growth)) %>%
  left_join(., capm %>% filter(group=="monthly")) %>% select(stock, expected_return, rfr),
             by="stock") %>%
  mutate(v0_ddm=d1/(expected_return-growth)) %>%
  mutate(pvgo_ddm=v0_ddm-e1/expected_return)
financial
```

```
# A tibble: 3 x 13
  stock    eps    dps    bps    roe reinvestment   growth     d1      e1 expected_return
  <chr>  <dbl>  <dbl>  <dbl>  <dbl>        <dbl>  <dbl>  <dbl>  <dbl>        <dbl>
1 cme     7.86  7.49   75.3  0.105       0.0475 0.00497 7.53   7.90       0.0628
2 ice     4.67  1.52   42.3  0.116       0.675  0.0786  1.64   5.04       0.0829
3 nasd~   2.25  0.785  15.6  0.163       0.652  0.106   0.868  2.49       0.0795
# i 3 more variables: rfr <dbl>, v0_ddm <dbl>, pvgo_ddm <dbl>
```

산출 결과는 아래와 같습니다.

구 분	CME	ICE	NASDAQ
E_0	7.86	4.67	2.25
D_0	7.49	1.52	0.79
ROE_0	10.5%	11.6%	16.3%
b_0	4.7%	67.5%	65.2%
g	0.5%	7.9%	10.6%
D_1	7.53	1.64	0.87
E_1	7.90	5.04	2.49
k	6.28%	8.29%	7.95%
V_0	130.15	380.07	-32.82(NaN)
$PVGO$	4.32	319.28	-64.19(NaN)

배당할인모형을 사용하여 평가해본 결과, $PVGO$ 는 CME가 **4.32\$**, ICE가 **319.28\$**, NASDAQ은 **-64.19\$**로 산출되었습니다. 여기서 NASDAQ 거래소의 경우 기업의 요구수익률보다 성장률이 높아($k < g$) 기업의 내재가치(V_0) 평가에 배당할인모형을 사용할 수 없는 케이스입니다. 즉, $PVGO$ 가 정상적으로 산출되지 않았습니다.

NASDAQ 거래소의 요구수익률은 7.95% 및 성장률은 10.6%로 산출되었는데, 현재시점에서 배당할인모형을 통해 이 주식을 평가한다는 것은 기업에 요구되는 수익률보다 성장하는 속도가 높아서 기업의 미래 배당가치가 발산($\rightarrow \infty$)한다는 것을 의미합니다. 이러한 이유가 발생하는 이유를 추정해보면, 아마도 NASDAQ의 현재주가가 저평가되어있거나, 최근 성과가 좋아서 단기적으로 ROE_0 가 높게 산출되었거나, CAPM의 요구수익률이 실제 주식의 요구수익률보다 낮기 때문일 것 입니다.

NASDAQ 거래소의 과거 추이를 볼 때, 최근 3년간 실현수익이 연평균 약 10.5%로 요구수익률보다 높고 성장률과 유사하므로 CAPM의 요구수익률이 실제 주식의 요구수익률을 정확하게 평가하지 못한 것이 주된 이유일 것으로 보입니다.

이러한 문제점은,

- (1) CAPM 대신 APT 등의 다른 모형으로 요구수익률(k)을 평가해보거나,
- (2) 배당할인모형(DDM) 대신 다른 모형을 이용함으로써 해결할 수 있습니다.

i CAPM의 한계

CAPM으로 산출한 요구수익률 k 는 개별주식의 여러 특성을 정확히 반영하지 못하였을 가능성이 있습니다. CAPM은 시장에 대한 민감도 β 와 시장포트폴리오의 리스크 대비 수익률($R_m - R_f$)을 이용해 주가의

기대수익률(요구수익률)을 평가하는데, 이 한가지 요인(factor)으로 기대수익률이 결정된다고 가정하기 때문입니다.

Multi-factor 모형은 배우기 이전이므로 수업시간에 배운 초과이익모형(**Residual Income Model**)을 이용하여 세 주식의 V_0 , $PVGO$ 를 다시 평가해보도록 하겠습니다.

먼저, RIM의 산식은 다음과 같습니다.

$$V_0 = BE_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E[RE_i]}{(1+k)^i}$$

여기서 BE_0 은 주당순자산으로 D_0 , E_0 과 같이 과거 3개년 평균치를 사용하고, 초과이익의 기대값 $E[RE_i]$ 는 i 년도의 주당순이익(E_i)-주당배당금(D_i)으로 결정되며, 주당순이익은 $E_i = ROE_0 \times BE_{i-1}$, 주당배당금은 $k \times BE_{i-1}$ 로 산출, $BE_i = BE_{i-1} \times (1 + R_f)$ (즉, 초과이익이 무위험이자율만큼 성장)하도록 하겠습니다.

$$V_0 = BE_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ROE_0 - k)BE_0(1 + r_f)^i}{(1+k)^i} = BE_0 + \frac{(ROE_0 - k)BE_0}{k - r_f}$$

위와 같이 RIM으로 기업의 내재가치를 산출할 수 있으며, 산출결과는 아래와 같습니다.

```
financial_rim <- financial %>%
  mutate(v0_rim=bps+(roe-expected_return)*bps/(expected_return-rfr)) %>%
  mutate(pvgo_rim=v0_rim-(eps*(1+rfr))/expected_return) %>%
  select(stock,bps,roe,rfr,expected_return,v0_rim,pvgo_rim)
```

`financial_rim`

```
# A tibble: 3 x 7
  stock     bps     roe     rfr expected_return v0_rim pvgo_rim
  <chr>   <dbl>   <dbl>   <dbl>        <dbl>    <dbl>    <dbl>
1 cme      75.3  0.105  0.0536     0.0628  417.     285.
2 ice      42.3  0.116  0.0536     0.0829  90.5     31.2
3 nasdaq   15.6  0.163  0.0536     0.0795  65.8     35.9
```

i 주당순이익 산출 : RIM

다음 년도의 주당순이익 E_1 은 올해의 순이익 E_0 에 초과이익성장률인 무위험이자율만큼 가산하여 산출하였습니다.

구 분	CME	ICE	NASDAQ
V_0, DDM	130.15	380.07	-
$PVGO, DDM$	4.32	319.28	-
V_0, RIM	417.10	90.55	65.81
$PVGO, RIM$	291.86	34.20	37.43

RIM 방식으로 내재가치를 평가한 결과, **PVGO**의 값은 CME가 **291.86\$**, ICE가 **34.20\$**, NASDAQ에서 **37.43\$**로 산출되었습니다.

(e) Find V_0, V_1

제가 사용한 RIM 산출식에서 $V_1 = V_0(1 + r_f)$ 입니다. (DDM은 $V_1 = V_0(1 + g)$)
NASDAQ에서 DDM은 사용할 수 없으므로 RIM을 기준으로 산출하겠습니다.

```
financial_rim %>%
  mutate(v1_rim=v0_rim*(1+rfr)) %>%
  select(stock,v0_rim,v1_rim)
```

```
# A tibble: 3 x 3
  stock   v0_rim   v1_rim
  <chr>     <dbl>    <dbl>
1 cme      417.     439.
2 ice      90.5     95.4
3 nasdaq   65.8     69.3
```

기준에 산출하였던 V_0 와 산출한 V_1 은 아래와 같습니다.

구 분	CME	ICE	NASDAQ
V_0, RIM	417.10	90.55	65.81
V_1, RIM	439.44	95.40	69.33

(f) Find the expected rate of return for each stock

```
stock_return <- financial_rim %>%
  mutate(v1_rim=v0_rim*(1+rfr)) %>%
  select(stock,v1_rim) %>%
  left_join(.,tidydata %>% filter(date==20240228) %>% select(group,price),
            by=c('stock'='group')) %>%
  mutate(return=(v1_rim-price)/price)
stock_return
```

```
# A tibble: 3 x 4
  stock   v1_rim price  return
  <chr>    <dbl>  <dbl>   <dbl>
1 cme      439.   220.    1.00
2 ice      95.4   138.   -0.311
3 nasdaq   69.3   56.1    0.236
```

2월말 기준 각 주식의 종가를 기준으로 계산한 연환산 기대수익률은 다음과 같습니다.

구 분	CME	ICE	NASDAQ
V_1, RIM	439.44	95.40	69.33
$ClosePrice$	219.68	138.39	56.11
$ExpectedReturn, annum$	100.03%	-31.06%	23.55%

(g) Which stock is the best?

NASDAQ exchange 주식

단순히 (f)의 기대수익률로 볼 때는 CME가 가장 높지만, 이는 BPS가 높고 배당성향이 1에 가까운 CME 거래소의 특성상 RIM 방식에서 높은 내재가치를 평가받은 것으로 보입니다. 이는 DDM 방식으로 평가하였을 때, 성장률 g 가 매우 낮아 내재가치가 다소 낮게 산출된 점에서 잘 드러납니다.

또한, CME는 시장 베타도 0.35수준으로 낮아 절대적인 요구수익률이 높지 않고 변동성도 낮아 흔히 말하는 재미없는 주식입니다. 장기적인 투자를 선호하고 자본금이 많은 기관투자자 등이 주로 투자하는 주식일 것으로 예상됩니다.

반면에 NASDAQ은 RIM방식으로 평가한 기대수익률이 연 23.55% 수준으로 양호하고, 시장 베타도 거의 1에 가까워 적당한 변동성을 가지고 있습니다. DDM방식에서는 평가가 불가능하였으나, 이 의미는 ROE와 배당성향이 높아 기대되는 배당성장률 g 가 CAPM의 요구수익률 k 보다 높다는 뜻입니다. 즉, 초과이익을 발생시켜 시장을 outperform할 확률이 높다고 생각하였습니다.

즉, 배당성향이 매우 높고 변동성이 낮아 안정적인 우량주인 CME보다는 최근 성과가 훌륭하여 성장성이 있으며, 안정적으로 요구수익률 대비 초과이익을 달성할 것으로 예상되고, 적정 수준의 변동성을 지닌 NASDAQ 거래소이 투자대상으로 가장 적합하다고 판단됩니다.

한편, ICE는 DDM에서는 내재가치가 좋게 평가되었으나 RIM에서는 낮게 평가되어 결국 기대수익률이 (-) 되는 분석결과를 고려하여 선택하지 않았습니다.

투자분석 과제2

Problems

You are a portfolio manager and want to create a portfolio. Choose any three stocks which are traded in the same currency. market. Collect monthly returns of stock prices for 5 years at least. You need to have a risk-free rate for this assignment. Assume that a short-sale is not allowed. You may use any computer tool but do not hand in the data or the program code.

- a) What are the names of the stocks you have chosen? Mention the database to provide data.
- b) Find annualized arithmetic average and variance of each stock's excess return and variance-covariance matrix of 3 stocks' excess returns.
- c) Assume the expected rate of return and future standard deviation (SD) are same as historical arithmetic average and SD for each stock. Plot investment opportunity set for the three stocks. Explain briefly how you do it.
- d) Find the Tangent portfolio and Capital Allocation Line.
- e) By some reason, you should hold more than 30% of one stock among three stocks. (Select one stock and assign weight more of 30% to the stock. Then the weights for other stocks do not exceed 70%). How does the efficient frontier change? What is the optimal portfolio that maximizes the Sharpe ratio? What are the expected return, the standard deviation, and the Sharpe ratio of the optimal portfolio? Explain why you would have this portfolio.
- f) You are worried about a worst scenario. What is the (monthly) 5% VaR of the optimal portfolio in e) under the normality assumption? What is the 5% expected shortfall without the normality and explain how you compute it.
- g) Provide suggestions on the proportion of risk-free assets to invest in when you choose the optimal risky portfolio in e). You may consider three values for the coefficient of risk aversion: 2, 3.5 and 5.

Answer

(a)

저는 *CME group(CME), ICE(ICE), Nasdaq(NDAQ)K* 세가지 종목을 선정하였습니다.

선정 배경으로는,

- (1) 제가 거래소 산업에 관심이 많고,
- (2) 세 주식 모두 미국에 상장되어있는 대표적인 글로벌 거래소이며,
- (3) 동일한 거래소 산업이고 S&P500지수의 구성종목이라 동일 선상에서 비교하기 적합할 것으로 보이기 때문입니다.

세 주식의 일별수정주가(Adj. close), 벤치마크지수인 S&P500지수의 일별수정가격, 무위험이자율로 채택한 미연준의 일별 Effective-FFR(Federal Funds Rate)를 활용하였습니다.

기간 : 직전 10년(2014.4 ~ 2024.3)

출처 : [Yahoo Finance] (<https://finance.yahoo.com/>)

산출방법 :

(월수익률) 지난달 말 대비 월말 수익률

(월초과수익률) 월수익률 - 월말FFR/12

(월분산) 월/월초과수익률의 표본표준편차

(평균수익률) 월/월초과수익률을 산술평균하여 연환산 (x12)

(평균분산) 월분산을 산술평균하여 연환산 (x12)

```
library(tidyverse)
# stocks and market index S&P500 from yahoo finance
cme <- read_csv("investment_hw/cme.csv") %>% tibble()
ndaq <- read_csv("investment_hw/ndaq.csv") %>% tibble()
ice <- read_csv("investment_hw/ice.csv") %>% tibble()
spx <- read_csv("investment_hw/spx.csv") %>% tibble()
# risk-free rate is effective-FFR(federal funds rate)
ffr <- read_csv("investment_hw/fedfunds.csv") %>% tibble()
# set period 10years
strt_dd='20140101'; end_dd='20240331'
```

(b)

```

# tidy data
raw_data <- tibble()

raw_data <- cme %>% mutate(cme=`Adj Close`) %>% select(Date,cme) %>%
  left_join(ndaq %>% mutate(ndaq=`Adj Close`) %>% select(Date,ndaq)) %>%
  left_join(ice %>% mutate(ice=`Adj Close`) %>% select(Date,ice)) %>%
  left_join(spx %>% mutate(spx=`Adj Close`) %>% select(Date,spx)) %>%
  mutate(day=gsub("-", "", Date)) %>%
  mutate(year=substr(day,1,4)) %>%
  mutate(month=substr(day,1,6)) %>%
  filter(day>=strt_dd,day<=end_dd) %>%
  left_join(ffr %>%
    mutate(ffr=FEDFUNDS/100,
          month=substr(gsub("-", "", as.character(DATE)),1,6)) %>%
    select(month,ffr)) %>%
  select(year,month,day,cme,ndaq,ice,spx,ffr,Date)

# using monthly return
monthly_raw <- tibble()
monthly_raw <- raw_data %>%
  group_by(year,month) %>%
  arrange(day %>% desc()) %>%
  slice(1) %>%
  pivot_longer(.,c("cme","ndaq","ice","spx"),
              names_to = "name",values_to = "price") %>%
  ungroup() %>%
  arrange(name,year,month) %>%
  mutate(return=price/lag(price)-1) %>% # monthly return
  mutate(excess_return=return-ffr*(1/12)) %>%
  filter(as.integer(month)>=201404)

# calculate arithmetic mean&var and var-cov matrix of excess return of stocks
monthly_stat <- tibble()
monthly_stat <- monthly_raw %>%
  ungroup() %>%
  group_by(name) %>%

```

```

summarise(avg_excess=mean(excess_return)*12,
          var_excess=sd(excess_return)^2*12,
          avg_return=mean(return)*12,
          var_return=sd(return)^2*12,
          avg_rf=mean(ffr)) # Annualized

# Cov matrix

variance_matrix <- monthly_raw %>%
  ungroup() %>%
  select(month,name,excess_return) %>%
  pivot_wider(names_from = "name", values_from = "excess_return") %>%
  select(cme,ice,ndaq,spx) %>%
  var()

# Corr matrix

cor_matrix <- monthly_raw %>%
  ungroup() %>%
  select(month,name,excess_return) %>%
  pivot_wider(names_from = "name", values_from = "excess_return") %>%
  select(cme,ice,ndaq,spx) %>%
  cor()

```

위 방법을 기준으로 산출한 각 주식의 평균초과수익률(연환산) 및 공분산행렬은 아래와 같습니다.

Excess return : CME 15.0%, ICE 14.4%, Nasdaq 18.8%

monthly_stat

```

# A tibble: 4 x 6
  name   avg_excess var_excess avg_return var_return avg_rf
  <chr>     <dbl>      <dbl>      <dbl>      <dbl>      <dbl>
1 cme       0.150     0.0340     0.165     0.0340    0.0141
2 ice       0.144     0.0414     0.158     0.0415    0.0141
3 ndaq      0.188     0.0415     0.202     0.0413    0.0141
4 spx       0.101     0.0229     0.115     0.0229    0.0141

```

Variance-Covariance Matrix of three stocks&Benchmark index

```
variance_matrix
```

	cme	ice	ndaq	spx
cme	0.0028310476	0.001767299	0.001138796	0.0008194417
ice	0.0017672988	0.003452184	0.002149990	0.0016652315
ndaq	0.0011387956	0.002149990	0.003456322	0.0016308630
spx	0.0008194417	0.001665231	0.001630863	0.0019071007

Correlation Matrix of three stocks&Benchmark index

```
cor_matrix
```

	cme	ice	ndaq	spx
cme	1.0000000	0.5653136	0.3640534	0.3526612
ice	0.5653136	1.0000000	0.6224185	0.6489942
ndaq	0.3640534	0.6224185	1.0000000	0.6352191
spx	0.3526612	0.6489942	0.6352191	1.0000000

(c)

각 주식의 기대수익률과 미래변동성이 과거실현값과 동일하다고 가정하겠습니다.

공매도는 없다고 가정하였으므로 각 주식의 비중이 양수가 되도록 설정하고, 먼저 두개의 주식으로 구성된 포트폴리오의 efficient frontier를 각각 구하도록 하겠습니다.

그 다음, 하나의 주식과 다른 두 주식의 포트폴리오를 재결합하면 새로운 포트폴리오를 구성할 수 있으며, 이를 반복하여 efficient frontier를 도식화할 수 있습니다.

아래 코드에서는 ICE의 구성비중을 5%, 10%, … , 95%로 고정하고 CME-Nasdaq 포트폴리오와 재결합을 반복하여 efficient frontier를 구현하였습니다.

```
# Portfolio return/vol of variance combinations three stocks
portfolio <- tibble()
portfolio <- tibble(cme=seq(0,1,0.002),ice=seq(1,0,-0.002)) %>%
  union_all(.,tibble(cme=seq(0,1,0.002),ice=0)) %>%
  union_all(.,tibble(cme=0,ice=seq(1,0,-0.002)))
```

```

for(i in seq(0.05,0.95,0.05)){portfolio <- portfolio %>%
  union_all(.,tibble(cme=seq(0,1-i,0.005),ice=i))}

for(i in seq(0.25,0.30,0.01)){portfolio <- portfolio %>%
  union_all(.,tibble(cme=seq(0,1-i,0.005),ice=i))}

portfolio <- portfolio %>%
  mutate(ndaq=1-cme-ice) %>%
  mutate(return=cme*monthly_stat$avg_return[1]
    +ice*monthly_stat$avg_return[2]
    +ndaq*monthly_stat$avg_return[3],
    vol=sqrt(cme^2*monthly_stat$var_return[1]
      +ice^2*monthly_stat$var_return[2]
      +ndaq^2*monthly_stat$var_return[3]
      +2*cme*ice*variance_matrix[2]
      +2*cme*ndaq*variance_matrix[3]
      +2*ndaq*ice*variance_matrix[7])) %>%
  mutate(sharpe=(return-monthly_stat$avg_rf[1])/vol)

plot_portfolio <- ggplot(data=portfolio,mapping=aes(x=vol,y=return))+

  geom_point(data=portfolio %>% filter(ndaq==0),size=0.5,color="red")+
  geom_point(data=portfolio %>% filter(ice==0),size=0.5,color="blue")+
  geom_point(data=portfolio %>% filter(cme==0),size=0.5,color="green")+
  scale_x_continuous(limits=c(0.08,0.22))+

  scale_y_continuous(limits=c(0.15,0.21))+

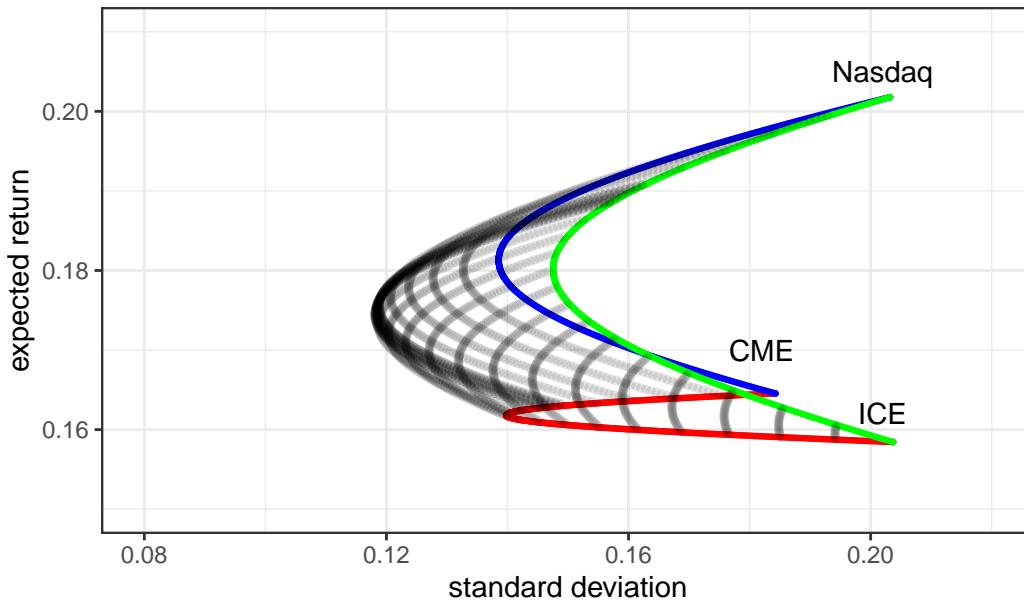
  labs(title = "Invest Opportunity of three stocks",
       x="standard deviation",y="expected return") +
  annotate(geom="text",x=0.182,y=0.17,label="CME")+
  annotate(geom="text",x=0.202,y=0.205,label="Nasdaq")+
  annotate(geom="text",x=0.202,y=0.162,label="ICE")+
  theme_bw()

plot_combination <- plot_portfolio +
  geom_point(data=portfolio %>% filter(cme!=0&ice!=0&ndaq!=0),size=1,
             color="black",alpha=0.1)

```

```
plot_combination
```

Invest Opportunity of three stocks



(d)

Tangent p/f는 Sharpe r/o를 최대화시키는 세 주식의 조합으로, 위에서 도식화한 투자기회에 대하여 무위험 이자율을 y절편으로 가지는 접선을 그려서 시각화할 수 있습니다.

접선의 기울기는 포트폴리오의 초과수익률을 변동성으로 나눈 값으로 Sharpe r/o가 되므로, 이 접선이 CAL에 해당합니다.

```
sharpe=max(portfolio$sharpe)
tangent <- tibble(vol=seq(0.08,0.17,0.01)) %>%
  mutate(return=monthly_stat$avg_rf[1]+sharpe*vol)

plot_tangent <- plot_combination+
  geom_line(data=tangent)+
  scale_x_continuous(limits=c(0.04,0.26))+ 
  scale_y_continuous(limits=c(0.11,0.25))+ 
  annotate(geom="text",x=0.125,y=0.23,label="CAL, y=1.3667x+0.0141")+
  annotate(geom="text",x=0.125,y=0.22,label="sharpe r/o=1.3667")+
  annotate(geom="text",x=0.1,y=0.18,label="Tangent p/f")
```

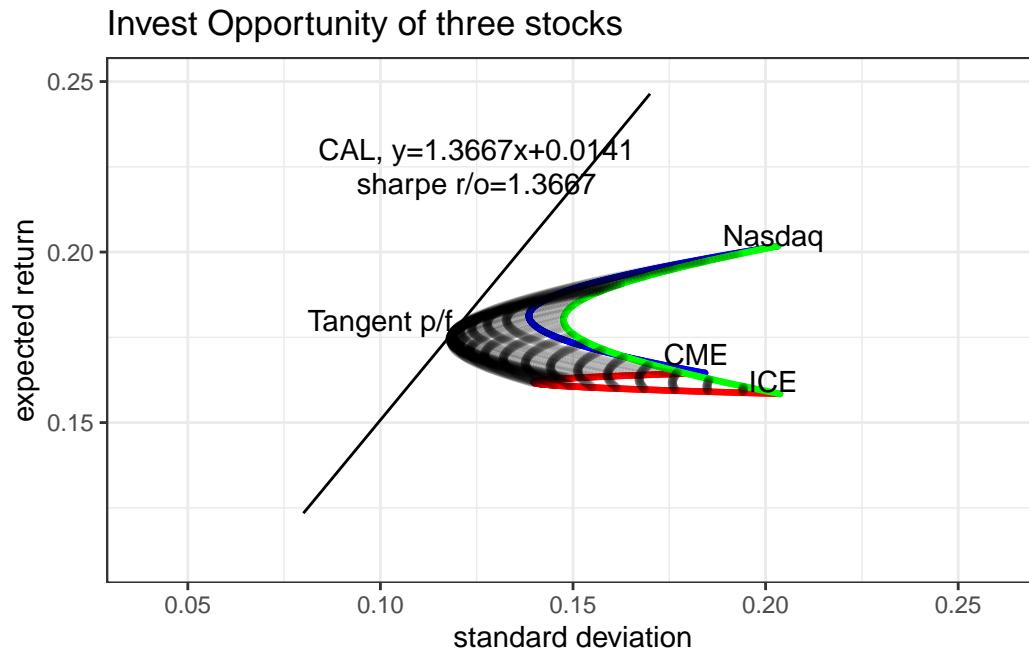
Scale for x is already present.

Adding another scale for x, which will replace the existing scale.

Scale for y is already present.

Adding another scale for y, which will replace the existing scale.

```
plot_tangent
```



이 때, Tangent p/f의 기대수익률/변동성/구성비율은 아래와 같습니다.

```
portfolio %>% arrange(sharpe %>% desc()) %>% slice(1)
```

```
# A tibble: 1 x 6
  cme    ice   ndaq return    vol sharpe
  <dbl> <dbl> <dbl>  <dbl> <dbl>  <dbl>
1  0.36  0.27  0.37  0.177 0.119  1.37
```

(e)

Tangent p/f에서 CME, Nasdaq의 비중은 각각 36%, 37%로 이미 30%를 초과하였습니다. 따라서 30%를 초과보유할 주식을 선정할 때 두 주식을 선정한다면 최적포트폴리오는 (d)의 Tangent p/f와 동일할 것입니다.

한편, ICE를 선정한다면 (d)의 Tangent p/f 구성이 불가능합니다. 이 경우 새로운 efficient frontier는 아래와 같이 도식화할 수 있으며, 새로운 최적포트폴리오는 ICE의 비중이 정확히 30%일 때 결정됩니다.

```

# Set ice>=0.3

portfolio2 <- portfolio %>% filter(ice>=0.3)
sharpe2=max(portfolio2$sharpe)
tangent2 <- tibble(vol=seq(0.1,0.14,0.01)) %>%
  mutate(return=monthly_stat$avg_rf[1]+sharpe2*vol)

portfolio2 %>% arrange(desc(sharpe))

```

```

# A tibble: 1,905 x 6
  cme    ice   ndaq return     vol sharpe
  <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl>
1 0.34    0.3  0.36   0.176 0.119  1.36
2 0.34    0.3  0.36   0.176 0.119  1.36
3 0.345   0.3  0.355  0.176 0.119  1.36
4 0.345   0.3  0.355  0.176 0.119  1.36
5 0.335   0.3  0.365  0.176 0.119  1.36
6 0.335   0.3  0.365  0.176 0.119  1.36
7 0.35    0.3  0.35   0.176 0.119  1.36
8 0.35    0.3  0.35   0.176 0.119  1.36
9 0.33    0.3  0.37   0.176 0.119  1.36
10 0.33   0.3  0.37   0.176 0.119  1.36
# i 1,895 more rows

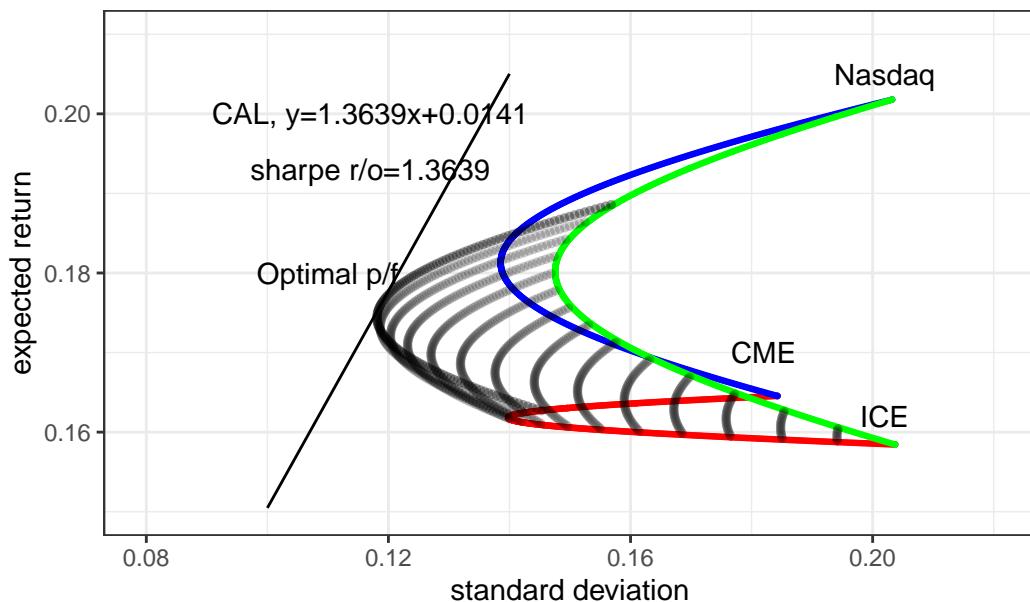
```

```

plot_tangent2 <- plot_portfolio +
  geom_point(data=portfolio2 %>% filter(cme!=0&ice!=0&ndaq!=0) ,
              size=1,color="black",alpha=0.2) +
  geom_line(data=tangent2) +
  annotate(geom="text",x=0.117,y=0.2,label="CAL, y=1.3639x+0.0141") +
  annotate(geom="text",x=0.117,y=0.193,label="sharpe r/o=1.3639") +
  annotate(geom="text",x=0.11,y=0.18,label="Optimal p/f")
plot_tangent2

```

Invest Opportunity of three stocks



Optimal p/f의 기대수익률/변동성/구성비율은 아래와 같습니다.

```
optimal <- portfolio2 %>% arrange(sharpe %>% desc()) %>% slice(1)
optimal
```

```
# A tibble: 1 x 6
  cme    ice   ndaq return    vol sharpe
  <dbl> <dbl> <dbl>   <dbl> <dbl>   <dbl>
1 0.34    0.3   0.36   0.176 0.119   1.36
```

(f)

먼저, 포트폴리오의 연환산수익률이 정규분포를 따른다면 표준정규분포표를 참조하여 **Value at Risk**를 다음과 같이 산출할 수 있습니다.

$$5\% \text{ VaR} = E(r_p) - 1.65\sigma_p = 0.176 - 1.65 \times 0.119 = -1.99\%$$

```
VaR=optimal$return-1.65*optimal$vol; VaR
```

```
[1] -0.01990571
```

만약 수익률의 분포가 정규분포가 아니라면, Historical VaR 및 ES(Expected Shortfall)을 산출할 수 있습니다. 이를 데이터의 참조기간인 과거 10년간 최적포트폴리오의 월수익률이 필요합니다.

위의 최적포트폴리오는 **CME 34%**, **ICE 30%**, **Nasdaq 36%**로 구성된 포트폴리오이므로, 거래비용 등을 무시하고 매월말 포트폴리오의 구성비율을 조정한다고 가정하고 포트폴리오의 명목금액을 P_t , 각 주식의 $(t, t+1)$ 월수익률을 $r_{t,k}$ 라고 한다면 $(t, t+1)$ 간 포트폴리오의 월수익률 r_t 는 다음과 같습니다.

$$P_{t+1} = 0.34 \times P_t \times (1 + r_{t,cme}) + 0.3 \times P_t \times (1 + r_{t,ice}) + 0.36 \times P_t \times (1 + r_{t,ndaq})$$

$$\Rightarrow 1 + r_t = \frac{P_{t+1}}{P_t} = 0.34 \times (1 + r_{t,cme}) + 0.3 \times (1 + r_{t,ice}) + 0.36 \times (1 + r_{t,ndaq})$$

이를 적용하면 과거 10년간 최적포트폴리오의 월수익률 120개를 얻을 수 있습니다.

이를 오름차순으로 정렬하면 **Historical 5% VaR**은 6번째 관측값이며, **5% ES**는 6개의 관측값의 평균으로 산출할 수 있습니다. 이는 월수익률 기반 VaR 및 ES이므로 $\sqrt{12}$ 를 곱하여 연환산하도록 하겠습니다.

```
optimal_monthly <- tibble()
optimal_monthly <- monthly_raw %>%
  select(month, name, return) %>%
  pivot_wider(names_from = "name", values_from = "return") %>%
  mutate(pf_return = optimal$cme * (1 + cme) + optimal$ice * (1 + ice) + optimal$ndaq * (1 + ndaq) - 1) %>%
  select(month, cme, ice, ndaq, pf_return) %>%
  arrange(pf_return) %>%
  slice(1:6)
optimal_monthly
```

```
# A tibble: 6 x 5
  month      cme      ice     ndaq pf_return
  <chr>    <dbl>    <dbl>    <dbl>    <dbl>
1 202204 -0.0779 -0.123   -0.117   -0.106
2 202002 -0.0842 -0.105   -0.119   -0.103
3 202003 -0.127   -0.0917  -0.0697  -0.0957
4 202209 -0.0899 -0.101   -0.0448  -0.0769
5 202201  0.00455 -0.0739  -0.147   -0.0734
6 202205 -0.0935 -0.116   -0.0134  -0.0714
```

Annualized 5% VaR은 -24.78%, ES는 -30.38%입니다.

정규분포 가정 하에 산출한 VaR과 큰 차이가 나는 이유는 지난 22년 Covid-19 팬데믹으로 인해 아래적으로 주가가 월 7% 이상 하락하는 급락장이 지속(Left fat tail)되었는데, 이때의 outlier 표본이 Historical VaR 산출을 지배한 반면 정규분포 근사시에는 반영되지 않아 차이가 발생하는 것으로 추정됩니다.

```
hist_VaR <- optimal_monthly$pf_return[6]*sqrt(12)
hist_ES <- mean(optimal_monthly$pf_return[1:6])*sqrt(12)
paste(round(hist_VaR,6), round(hist_ES,6) , round(VaR,6), sep=" / ")
```

```
[1] "-0.247279 / -0.303873 / -0.019906"
```

(g)

위의 최적포트폴리오와 무위험자산을 이용하여 투자를 결정한다면, 최종적인 포트폴리오의 기대수익률 및 변동성은 자본배분선($E(r_p) = 1.3639\sigma_p + 0.0141$) 위에서 결정될 것입니다.

이때, 무위험자산의 비중은 투자자의 위험회피정도에 따른 효용함수 $U = E(r_p) - \frac{1}{2}A\sigma_p^2$ 를 최대화시키는 수준에서 결정됩니다.

이에 따라 산출한 무위험자산의 비중은 모든 경우(A=2, 3.5, 5)에서 0이 됩니다. 이는 과거기간 중 제로금리 기간이 다소 길어 무위험자산의 수익률이 낮은 반면, 선정한 주식의 기대수익률은 상대적으로 높아 일어난 것으로 추정됩니다.

부가적으로, 무위험자산의 비중 산식 $r^* = 1 - \frac{E(r_p) - r_f}{A\sigma_p^2}$ 를 역산하여 위험회피정도 A를 역산해보면, 약 11.48 까지는 최적포트폴리오를 100% 보유하는 것이 효용을 극대화시키는 투자결정입니다.

```
# Utility function to verify risk-free asset ratio
utility <- tibble(vol=seq(optimal$vol,0,-0.0001)) %>%
  mutate(return=sharpe2*vol+monthly_stat$avg_rf[1]) %>%
  mutate(rf_ratio=(optimal$return-return)/(optimal$return-monthly_stat$avg_rf[1])) %>%
  mutate(a2{return-0.5*2*vol^2,
           a3.5{return-0.5*3.5*vol^2,
           a5{return-0.5*5*vol^2)
utility %>% arrange(desc(a5)) %>% slice(1)
```

```
# A tibble: 1 x 6
  vol return rf_ratio     a2    a3.5     a5
  <dbl>   <dbl>     <dbl>   <dbl>   <dbl>
```

```
<dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl> <dbl>
1 0.119 0.176 0 0.162 0.151 0.141
```

```
(optimal$return-monthly_stat$avg_rf[1])/optimal$vol^2
```

```
[1] 11.48027
```

Part V

재무회계('24봄)

재무회계 Ch1-3 과제

(1) Question 1-31

31. **Accrual versus cash basis of accounting.** The following information is based on the financial statements of Hewston, a large manufacturing firm. Annual revenues are \$66,387 million and net expenses (including income taxes) are \$62,313 million. During the year, the firm collected \$65,995 million in cash from customers and had cash outflows associated with payments to suppliers and vendors of \$56,411 million.
- Calculate net income and net cash flow for the year.
 - How can cash collected from customers be less than revenues?
 - How can cash payments to suppliers and vendors be less than expenses?

Figure 5.1: Chapter1-31

Answer

$$(a) \text{net income} = 66387 - 62313 = 4,074\text{million\$}$$

$$\text{net cash flow} = 65995 - 56411 = 9,584\text{million\$}$$

(b) If customer buy a product of Hewston and want to pay later, then Hewston get a certain amount of revenue but get no cash. Instead, Hewston get a asset, namely accrued revenue, that will be paid for cash.

In that case, a company can get revenues more than collected cash.

(c) If Hewston buy material from suppliers and vendors to produce its own products but want to pay after selling product, then there exists a certain amount of expense and occurs a liability, namely accrued expense, that will pay for cash.

In that case, a company's expenses is bigger than its cash payments.

(2) Question 1-34

34. Balance sheet relations. Selected balance sheet amounts for SinoTwelve, a Chinese manufacturer, appear next. All amounts are in thousands of U.S. dollars (\$). Compute the missing amounts.

	2013	2012
Total Assets	?	\$5,450,838
Current Liabilities	\$4,488,461	3,527,504
Current Assets	?	3,062,449
Total Liabilities and Shareholders' Equity	7,199,847	?
Noncurrent Liabilities	1,098,123	?
Shareholders' Equity	?	1,134,276
Noncurrent Assets	2,494,481	?
Total Liabilities.	?	?

Figure 5.2: Chapter1-34

Answer

$$\text{Total Assets} = \text{Current Assets} + \text{Noncurrent Assets}$$

$$\text{Total Liabilities} = \text{Current Liabilities} + \text{Noncurrent Liabilities}$$

$$\text{Total Liabilities and Shareholders' Equity} = \text{Total Liabilities} + \text{Shareholders' Equity}$$

$$\text{And, Total Assets} = \text{Total Liabilities and Shareholders' Equity}$$

Apply above,

Category	2013	2012
Total Assets	7,199,847	5,450,838
Current Liabilities	4,488,461	3,527,504
Current Assets	4,705,366	3,062,449
Total Liabilities and Shareholders' Equity	7,199,847	5,450,838
Noncurrent Liabilities	1,098,123	789,058
Shareholders' Equity	1,613,263	1,134,276
Noncurrent Assets	2,494,481	2,388,389
Total Liabilities	5,586,594	4,316,562

(3) Question 2-10

PROBLEMS

10. **Dual effects of transactions on balance sheet equation and journal entries.** Assume that during Year 15, Bullseye Corporation, a U.S. retailer, engages in the following six transactions. Bullseye Corporation applies U.S. GAAP and reports its results in millions of U.S. dollars (\$). Do not be concerned that after these transactions, the balance in the Cash account is negative. The firm will deal with that issue in transactions not shown here.

- (1) The firm issues 20 million shares of \$0.0833 par value common stock for a total of \$960 million cash.
- (2) It purchases merchandise costing \$1,500 million on account.
- (3) The firm acquires a new store location, consisting of a building costing \$3,200 million and land costing \$930 million. It pays cash to the owner of the property.
- (4) The firm purchases fixtures for the new store costing \$860 million, on account.
- (5) The firm pays the merchandise supplier in transaction (2) the amount due.
- (6) The firm pays the supplier of the fixtures in transaction (4) half of the amount due in cash. The firm pays the other half by issuing 8.6 million common shares to the

supplier. At the time of this transaction, Bullseye Corporation's shares traded at \$50 per share in the market.

- a. Indicate the effects of these six transactions on the balance sheet equation using this format:

Transaction Number	Assets	=	Liabilities	+	Shareholders' Equity
(1)	<u>+\$960</u>		\$0		<u>+\$960</u>
Subtotal	\$960	=	\$0	+	\$960

- b. Give the journal entries for each of the six transactions.

Figure 5.3: Chapter2-10

Answer

(a)

Transaction Number	Assets	=	Liabilities	+	Shareholder's Equity
(1)	+\$960m		\$0		+\$960m
(2)	+\$1,500m		+\$1,500m		\$0

Transaction Number	Assets =	Liabilities +	Shareholder's Equity
(3)	+\$3,200m	\$0	\$0
	+\$930m		
	-\$4,130m		
(4)	+\$860m	+\$860m	\$0
(5)	-\$1,500m	-\$1,500m	\$0
(6)	-\$430m	-\$430m	+\$430m
	+\$430m	-\$430m	
	-\$430m		
Total	\$1,390m =	\$0 +	\$1,390m

(b)

Transaction Num. (1)	Debit	Credit
Cash	\$960m	
Common stock		\$1.7m
Additional capital		\$958.3m

Transaction Num. (2)	Debit	Credit
Inventory	\$1,500m	
Payable		\$1,500m

Transaction Num. (3)	Debit	Credit
Building	\$3,200m	
Landscape	\$930m	
Cash paid		\$4,130m

Transaction Num. (4)	Debit	Credit
Fixture	\$860m	
Payable		\$860m

Transaction Num. (5)	Debit	Credit
Payable	\$1,500m	
Cash		\$1,500m

Transaction Num. (6)	Debit	Credit
Payable	\$430m	
Cash paid		\$430m
Cash	\$430m	
Common stock		\$0.7m
Additional capital		\$429.3m
Payable	\$430m	
Cash paid		\$430m

(4) Question 3-12

12. Relations between financial statements. The following selected information is based on the Year 7 financial statements adapted from those of Beyond Petroleum (BP). BP applies IFRS and reports its results in millions of U.S. dollars. Compute the missing information in each of the following four independent cases. The letters in parentheses refer to the following:

BS—Balance sheet

IS—Income statement

SCF—Statement of cash flows

a.	Accounts Receivable, January 1, Year 7 (BS)	\$?
	Sales on Account for Year 7 (IS)	288,951
	Collections from Customers on Account during Year 7 (SCF)	289,623
	Accounts Receivable, December 31, Year 7 (BS)	38,020
b.	Income Taxes Payable, January 1, Year 7 (BS)	\$ 2,635
	Income Tax Expense for Year 7 (IS)	10,442
	Payments to Governments during Year 7 (SCF)	?
	Income Taxes Payable, December 31, Year 7 (BS)	3,282
c.	Trade Payables, January 1, Year 7 (BS)	\$ 42,236
	Purchases of Supplies during Year 7 (SCF)	15,162
	Payments to Suppliers during Year 7 (SCF)	?
	Trade Payables, December 31, Year 7 (BS)	43,152
d.	Retained Earnings, January 1, Year 7 (BS)	\$ 88,453
	Net Income for Year 7 (IS)	21,169
	Dividends Declared and Paid during Year 7 (SCF)	8,106
	Retained Earnings, December 31, Year 7 (BS)	?

Figure 5.4: Chapter3-10

Answer

(a)

$$\text{Accounts Receivable in Jan.} + 288,951 - 289,623 = 38,020$$

$$\text{Accounts Receivable in Jan.} = \$38,692$$

(b)

$$2,635 + 10,442 - \text{Payments to Gov.} = 3,282$$

$$\text{Payments to Gov.} = \$9,795$$

(c)

$$42,236 + 15,162 - \text{Payments to suppliers} = 43,152$$

$$\text{Payments to suppliers} = \$14,246$$

(d)

$$88,453 + 21,169 - 8,106 = \text{Retained Earnings in Dec.}$$

$$\text{Retained Earnings in Dec.} = \$101,516$$

재무회계 Ch4 과제

(1) Question 4-9

9. For each of the following items, indicate whether the item meets all of the criteria in the definition of a liability. If so, how does the firm value it?
 - a. Interest accrued but not paid on a note.
 - b. Advances from customers for goods and services to be delivered later.
 - c. Confirmed orders from customers for goods and services to be delivered later.
 - d. Product warranties.
 - e. Damages the company must pay if it loses a pending lawsuit.
 - f. Contractual promises to purchase specific quantities of natural gas for each of the next 10 years.
 - g. Promises by an airline to provide flights in the future in exchange for miles flown, if customers accumulate a certain number of miles at regular fares.

Figure 5.5: Chapter4-9

First, the criteria in the definition of a liability is following :

- (1) Probably, future sacrifices of economic benefits.
- (2) Arising from present obligation to transfer assets or provide services.
- (3) As a result of a past transaction.

In this perspective,

- (a) **is a liability.** accrued interest payable.
- (b) **is a liability.** (Advances from customers) It is equal to amount of received cash.
- (c) **is not a liability.** criteria (3) is not satisfied.
- (d) **is a liability.** (Provisions) It can be valued by some ratio of original product's price.
- (e) **can be liability or not.** It depends on a probability of lawsuit.

If a probability of loss lawsuit is more than certain level,(In GAAP 80%, IFRS 50%) then it will be a liability. In that case, it can be valued by expected loss that should pay.

(f) is not a liability. criteria (3) is not satisfied.

(g) is a liability. It can be valued by some ratio of flight ticket's regular price.

(2) Question 4-15

- 15. Balance sheet relations.** Jennings Group, a Malaysian investment management company, reported the following data for four recent years. Jennings applies Malaysian accounting standards and reports its results in millions of ringgit (RM). Compute the missing balance sheet amounts for each of the four years. In answering this question, assume that Jennings uses U.S. GAAP. (Adapted from the financial statements of Genting Group.)

	Year 7	Year 6	Year 5	Year 4
Noncurrent Assets.....	?	RM18,717.4	RM11,289.1	RM9,713.9
Shareholders' Equity	RM21,537.3	16,666.9	9,002.0	?
Total Assets	?	28,224.7	?	?
Current Liabilities.....	?	4,351.3	1,494.2	1,755.2
Current Assets	10,999.2	?	?	6,882.6
Noncurrent Liabilities	5,721.7	?	?	3,540.7
Total Liabilities and Shareholders' Equity.....	30,178.9	?	18,491.3	?

Figure 5.6: Chapter4-15

$$\text{Total Assets} = \text{Current Assets} + \text{Noncurrent Assets}$$

$$\text{Total Liabilities} = \text{Current Liabilities} + \text{Noncurrent Liabilities}$$

$$\text{Total Liabilities and Shareholders' Equity} = \text{Total Liabilities} + \text{Shareholders' Equity}$$

$$\text{And, Total Assets} = \text{Total Liabilities and Shareholders' Equity}$$

Apply above,

Category	Year7	Year6	Year5	Year4
Noncurrent Assets	19,179.7	18,717.4	11,289.1	9,713.9
Shareholders' Equity	21,537.3	16,666.9	9,002.0	11,300.6
Total Assets	30,178.9	28,224.7	18,491.3	16,596.5

Category	Year7	Year6	Year5	Year4
Current Liabilities	2,919.9	4,351.3	1,494.2	1,755.2
Current Assets	10,999.2	9,507.3	7,202.2	6,882.6
Noncurrent Liabilities	5,721.7	7,206.5	7,995.1	3,540.7
Total Liabilities and Equity	30,178.9	28,224.7	18,491.3	16,596.5

재무회계 Ch5 과제

(1) Question 5-12

12. **Revenue recognition.** Fonterra Cooperative Group Limited (Fonterra), a New Zealand dairy cooperative, uses the accrual basis of accounting and recognizes revenue at the time it sells products or renders services. Fonterra applies New Zealand accounting standards and reports its results in millions of New Zealand dollars (NZ\$). In answering this problem, assume Fonterra uses IFRS. Indicate which of the following transactions or events immediately give rise to Fonterra's recognition of revenue.
- a. Fonterra has completed the pasteurization of an order of 13,000 liters of milk it will deliver to a grocery store chain next week. Fonterra has not yet delivered the milk or invoiced the grocery store. The selling price of the milk is NZ\$26,000.
 - b. Refer to part a, and assume that the grocery store paid Fonterra a deposit of NZ\$5,000 on the order of the milk.
 - c. Fonterra delivered the milk and billed the grocery store. The grocery store has not yet paid the invoice.
 - d. One day after delivery, the grocery store called Fonterra and reported that it has to destroy 3,000 liters of milk because it had spoiled sometime prior to its delivery. The grocer refuses to pay for these 3,000 liters.
 - e. Fonterra spent NZ\$10 million to develop a technique to transform a by-product of casein (a protein found in milk and cheese) into ethanol. Fonterra expects to use this technique to generate sales of at least NZ\$2 million over the next year.
 - f. Refer to part e, and assume that Fonterra signed contracts worth NZ\$400 million for ethanol sales.

Figure 5.7: Chapter5-12

- (a) NOT recognized. It is before a completion of the earning process.
- (b) NOT recognized. It is before a completion of the earning process.
- (c) **Revenue recognized.** There is a completion of the earning process and receipt.(account receivable)
- (d) NOT recognized. It can be an expense.
- (e) NOT recognized. It is an investment, which is an expense.
- (f) NOT recognized. There is no completion of the earning process.

(2) Question 5-18

- 18. Income statement relations.** Selected income statement information for Years 11, 12, and 13 for SwissTek, a Swiss engineering firm. SwissTek applies U.S. GAAP and reports its results in millions of U.S. dollars.

	Year 13	Year 12	Year 11
Sales of Products	\$24,816	?	\$17,622
Income Tax Expense	595	?	464
Earnings Before Interest and Taxes	4,023	2,557	?
Sales of Services.....	4,367	3,778	3,342
Selling and Administrative Expenses	4,975	?	3,780
Cost of Services Sold	?	2,570	2,305
Income Before Taxes	?	2,076	1,199
Other Operating Income (Expense).....	?	139	37
Interest and Other Financial Expense	286	?	407
Gross Profit	8,968	6,744	?
Cost of Products Sold.....	17,292	13,967	13,205
Other Non-operating Income (Expense)	?	(321)	(258)
Interest and Dividend Income.....	273	147	?
Net Income	3,757	1,390	?

Compute the missing amounts for each of the three years.

Figure 5.8: Chapter5-18

The following table is the re-organized income statement.

Category	Year 13	Year 12	Year 11
(+) Sales of Products	24,816	19,503	17,622
(-) Cost of Products Sold	17,292	13,967	13,205
(+) Sales of Service	4,367	3,778	3,342
(-) Cost of Services Sold	2,923	2,570	2,305
(=) Gross Profit	8,968	6,744	5,454
(-) Selling and Administrative Expenses	4,975	4,326	3,780
(+) Other Operating Income	(30)	139	37
(=) Earning Before Interest and Taxes	4,023	2,557	1,711

Category		Year 13	Year 12	Year 11
(+) Other Non-operating Income		342	(321)	(258)
(+) Interest and Dividend Income		273	147	153
(-) Interest and Other Financial Expense		286	307	407
(=) Income Before Taxes		4,352	2,076	1,199
(-) Income Tax Expense		595	686	464
(=) Net Income		3,757	1,390	735

재무회계 Ch6 과제

14. Derive sales revenue from data in the statement of cash flows and balance sheet. Microchem Corporation reported a balance of €5,196 million in accounts receivable at the beginning of the year and €5,334 million at the end of the year. Its statement of cash flows using the direct method reported cash collections from customers of €33,551 million for the year. Assuming that Microchem Corporation makes all sales on account, compute the amount of sales during the year.

Answer

Because a company makes all sales on account, **total sales is sum of cash collections and account receivable.**

There are EUR33,551m cash collections and EUR138m increase in account receivable, so $33551 + 138 = \text{EUR}33,689\text{m}$ will be a total sales of company during the year.

16. Derive cost of goods sold from data in the statement of cash flows. The section showing cash flow from operations, using the indirect method, for Taylor Stores reported an increase in inventories of \$5.7 million during the year. It reported also that the balance in accounts payable for inventories increased by \$5.9 million. The direct method would show cash payments for merchandise inventory purchased of \$646.9 million. Compute Taylor's cost of goods sold for the year.

Answer

Cost will be **cash payments + increase payable - increase inventories.**

$646.9 + 5.9 - 5.7 = \text{USD}647.1\text{m}$ is cost of goods sold of company for the year.

26. Preparing a statement of cash flows from changes in balance sheet accounts. The comparative balance sheets of Incloud Airlines show the following information for a recent year (amounts in thousands of US\$):

	Change	Amount	Direction
Cash	\$ 40,308 ^a	40,308 ^a	Increase
Accounts Receivable	15,351	15,351	Decrease
Inventories	15,117	15,117	Increase
Prepayments	16,776	16,776	Increase
Property, Plant, and Equipment (at Cost)	1,134,644 ^b	1,134,644 ^b	Increase
Accumulated Depreciation	264,088 ^b	264,088 ^b	Increase
Other Non-operating Assets	8,711	8,711	Increase
Accounts Payable	660	660	Decrease
Other Current Liabilities	114,596	114,596	Increase
Long-Term Debt	244,285	244,285	Increase
Other Non-operating Liabilities	140,026	140,026	Increase
Common Stock	96,991	96,991	Increase
Retained Earnings	340,879 ^c	340,879 ^c	Increase

^aCash was \$378,511 at the beginning of the year and \$418,819 at the end of the year.

^bIncloud Airlines did not sell any property, plant, and equipment during the year.

^cNet income was \$474,378.

- a. Prepare a statement of cash flows for Incloud Airlines for the year. Treat changes in non-operating assets as investing transactions and changes in non-operating liabilities as financing transactions.

Answer

Incloud Airlines

Statement of Cash Flow for the recent year (thousands\$)

Category	Name	Amount
Cashflow from operations		\$835,860
+	Net income	474378
+	Increase in accumulated depreciation	264088
+	Decrease in account receivable	15351
-	Increase in other current liabilities	114596
-	Increase in inventories	15117

Category	Name	Amount
-	Increase in Prepayments	16776
-	Decrease in account payable	660
Cashflow from investing		(\\$1,143,355)
-	Increase in property, plant, equipment	1134644
-	Increasing in other non-operating assets	8711
Cashflow from financing		\\$347,803
+	Increasing in long-term debt	244285
+	Increasing in common stock	96991
+	Increasing in non-operating liabilities	140026
-	Payment of dividends	133499
Net Change in Cash		\\$40,308
Cash, beginning of year		\\$378,511
Cash, end of year		\\$418,819

29. Calculating and interpreting cash flows. Market Star is a marketing services firm that creates advertising copy for clients and places the advertising in television, magazines, and other media. Accounts receivable represent amounts owed by clients, and accounts payable represent amounts payable to various media. Market Star has purchased other marketing services firms in recent years. Selected data for Market Star for three recent years appear next (amounts in millions of US\$):

	2013	2012	2011
Net Income	\$ 499	\$ 363	\$279
Depreciation and Amortization Expense	226	196	164
Increase (Decrease) in Accounts Receivable	514	648	238
Increase (Decrease) in Inventories.....	98	13	35
Increase (Decrease) in Prepayments.....	125	(10)	64
Increase (Decrease) in Accounts Payable	277	786	330
Increase (Decrease) in Other Current Liabilities	420	278	70
Acquisition of Property, Plant, and Equipment.....	150	130	115
Acquisition of Investments in Securities (noncurrent).....	885	643	469
Dividends Paid	122	104	88
Long-Term Debt Issued	599	83	208
Common Stock Issued (Reacquired)	(187)	(252)	42

- a. Prepare a comparative statement of cash flows for Market Star for the three years. Use the indirect method of computing cash flow from operations.

Answer

Market Star

Statement of Cash Flow for 2011 ~ 2013(millions\$)

Category	Name	2013	2012	2011
Cashflow from operations		\$685m	\$972m	\$506m
+ Net income		499	363	279
+ Increase in depreciation and amortization		226	196	279
+ Increase in account payable		277	786	330
- Increase in account receivable		514	648	238
- Increase in other current liabilities		420	278	70
- Increase in inventories		98	13	35
- Increase in Prepayments		125	(10)	64
Cashflow from investing		(\$1,035)	(\$773)	(\$584)
- Increase in property, plant, equipment		150	130	115
- Increase in investments in securities		885	643	469
Cashflow from financing		\$290	(\$273)	\$162
+ Increasing in long-term debt		599	83	208
+ Increasing in common stock		(187)	(252)	42
- Payment of dividends		122	104	88
Net Change in Cash		(\$60)	(\$74)	\$84

Part VI

경영통계분석('24봄)

경영통계분석 과제1

1. Type of variables

Question

Identify whether the following variables are numerical or categorical. If numerical, state whether the variable is discrete or continuous. If categorical, state whether the variable is nominal or ordinal.

a. Number of companies going bankrupt in a year.

: Numerical and Discrete

b. Petal area of rose flowers.

: Numerical and Continuous

c. Key on the musical scale.

: Categorical and Ordinal

d. Heart beats per minute of a Tour de France cyclist, averaged over the duration of the race.

: Numerical and Continuous

e. Stage of fruit ripeness.

: Categorical and Ordinal

f. Angle of flower orientation relative to position of the sun.

: Numerical and Continuous

g. Tree species

: Categorical and Nominal

h. year of birth

: Numerical and Discrete

i. Gender

: Categorical and Nominal

j. Birth weight

: Numerical and Continuous

2. Discrete data

Question

Birds of the Caribbean islands of the Lesser Antilles are descended from immigrants originating from larger islands and the nearby mainland. The data presented here are the approximate dates of immigration, in millions of years, of each of 37 bird species now present on the Lesser Antilles. The dates were calculated from the difference in mitochondrial DNA sequences between each of the species and its closest living relative on larger islands or the mainland.

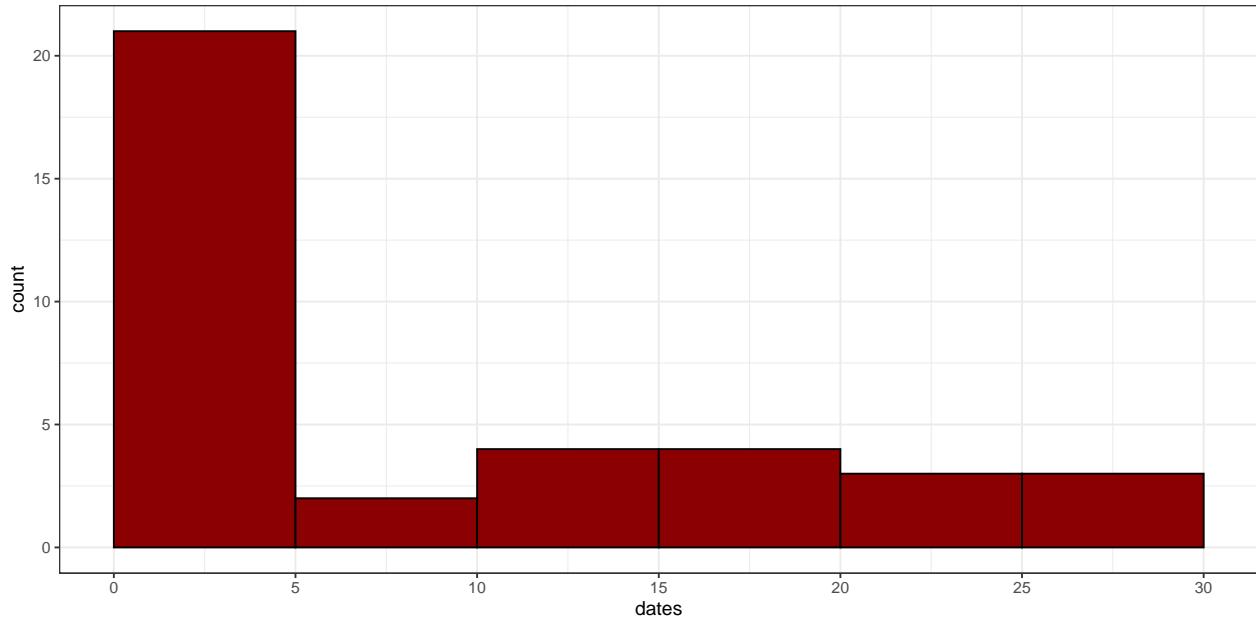
```
library(tidyverse)
birds_caribbean <- tibble("dates"=c(0.00,0.00,0.04,0.21,0.29,
0.54,0.63,0.88,0.96,1.25,
1.67,1.75,1.84,1.96,2.01,
2.51,2.72,3.30,3.51,4.05,
4.85,6.94,8.73,10.57,11.11,
12.45,14.00,17.30,17.92,18.05,
18.43,22.48,22.48,23.48,26.32,
26.45,28.87))
```

```
birds_caribbean$dates
```

```
[1] 0.00 0.00 0.04 0.21 0.29 0.54 0.63 0.88 0.96 1.25 1.67 1.75
[13] 1.84 1.96 2.01 2.51 2.72 3.30 3.51 4.05 4.85 6.94 8.73 10.57
[25] 11.11 12.45 14.00 17.30 17.92 18.05 18.43 22.48 22.48 23.48 26.32 26.45
[37] 28.87
```

a. Plot the data in a histogram and describe the shape of the frequency distribution.

```
ggplot(data=birds_caribbean, aes(x=dates))+
  geom_histogram(binwidth=5, boundary=0, color="black", fill="darkred")+
  scale_x_continuous(breaks = seq(0,30,5)) +
  theme_bw()
```



히스토그램은 위와 같으며, 0~5구간에 전체 37종의 조류 중 20종 이상이 넘는 빈도가 집중되어 있습니다. 이는 과반 이상의 조류가 비교적 최근인 500만년 이내에 Lesser Antilles 섬으로 이주해왔다는 것을 의미합니다. 나머지 약 15종의 조류는 각각 2~4종씩 ~1천만년, ~1500만년, …, ~3천만년 구간에 고르게 분포되어 있습니다.

b. By viewing the graph alone, approximate the mean and median of the distribution. Which should be greater? Explain your reasoning.

: 히스토그램은 왼쪽으로 치우쳐져 있으며, 이는 $Skewness >> 0$ 이라는 것을 말합니다. 이러한 경우 평균은 중간값보다 크게 형성되고, 오른쪽 꼬리가 다소 긴 점을 감안하여 추정해보면, 중간값은 약 4, 평균은 약 10일 것으로 보입니다.

c. Calculate the mean and median. Was your intuition in part (b) correct?

```
birds_caribbean %>%
  summarise(mean=mean(dates),
            mid=median(dates))
```

```
# A tibble: 1 x 2
  mean    mid
  <dbl> <dbl>
1     8.66   3.51
```

: 대략적인 경향성은 맞습니다. 실제 중간값은 3.51 및 평균은 8.66입니다.

d. Calculate the first and third quantiles and the inter quartile range.

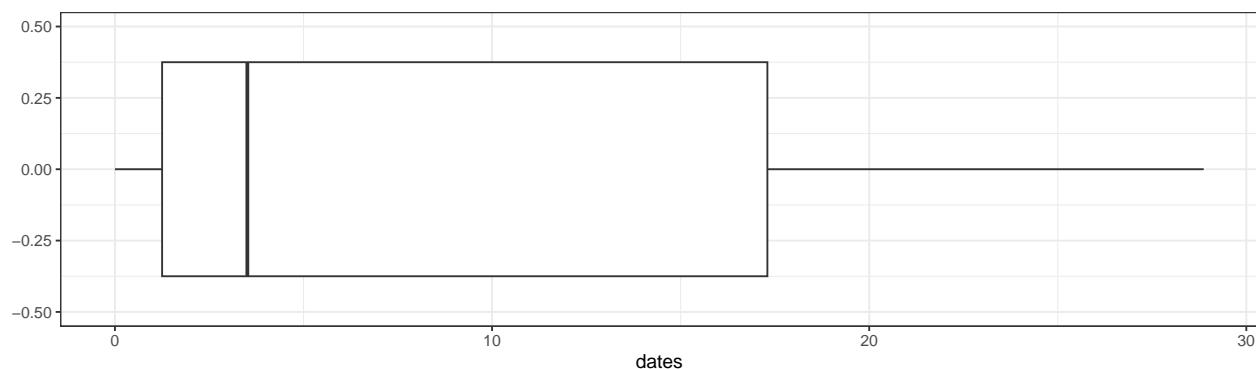
```
birds_caribbean %>%
  reframe(quantile=quantile(dates))
```

```
# A tibble: 5 x 1
  quantile
  <dbl>
1     0
2     1.25
3     3.51
4    17.3
5    28.9
```

: First(25%) quantiles은 1.25이며, third(75%) quantiles은 17.30입니다. IQR은 16.05입니다.

e. Draw a box plot for these data

```
ggplot(birds_caribbean, aes(x=dates))+
  geom_boxplot()+
  scale_y_continuous(limits=c(-0.5,0.5))+
  theme_bw()
```



3. Histogram

Question

Francis Galton presented the following data on the flight speeds of 3207 “old” homing pigeons traveling at least 90 miles.

- a. What type of graph is this?

: Histogram

- b. Examine the graph and visually determine the approximate value of the mean (to the nearest 100 yards per minute). Explain how you obtained your estimate.

: 그래프는 bell-shape의 히스토그램이며, 오른쪽 꼬리가 긴 형태입니다. 아마 $skewness > 0$ 일 것으로 보이며, 평균은 중간값보다 클 것 입니다.

그래프에서 중간값은 오른쪽 꼬리가 긴 분포를 고려할 때 약 1,000일 것으로 추정할 수 있는데, 평균값은 이보다 큰 약 1,100이 될 것으로 추정됩니다.

- c. Examine the graph and visually determine the approximate value of the median (to the nearest 100 yards per minute). Explain how you obtain your estimate.

: 그래프에서 900~1000이 중심막대인데, bell-shape와 오른쪽 꼬리가 긴 분포를 고려할 때, 중간값은 약 1,000이 될 것으로 추정됩니다.

- d. Examine the graph and visually determine the approximate value of the mode (to the nearest 100 yards per minute). Explain how you obtained your estimate.

: 최빈값은 가장 많은 빈도를 가지는 값 또는 구간으로, 히스토그램의 가장 높은 막대인 1000~1100에 존재할 것입니다. 막대 왼쪽에 빈도가 더 많은 점을 고려할 때 최빈값은 약 1,000일 것으로 보입니다.

- e. Examine the graph and visually determine the approximate value of the standard deviation (to the nearest 100 yards per minute). Explain how you obtained your estimate.

: 먼저, 정규분포를 따르는 확률변수에 대해 다음 식이 성립합니다.

$$\text{for } X \sim \text{Normal Dist. then } P[-\sigma < X < \sigma] \approx 68.2\%$$

문제의 히스토그램은 bell-shape로 정규분포를 따른다고 가정하는 것에 큰 문제는 없어보입니다. 히스토그램에서 어림잡아봤을 때, 약 $1,100 \pm 200$ 구간이 70~80%에 해당한다고 보여지는데, ($P[900 < x < 1300] = 70 \sim 80\%$)

이는 (b)의 추정 평균을 이용하면 ± 200 입니다. 즉, 히스토그램이 정규분포를 따른다고 가정하면, 히스토그램의 형태는 $N(1050, \sigma^2 = (200 - \alpha)^2)$ 의 확률밀도함수가 유사할 것입니다. 한편, 히스토그램은 오른쪽 꼬리가 긴 형태를 가지고 있어 변동성은 정규분포 대비 다소 클 것입니다.

따라서, 최종적으로 히스토그램 데이터의 표준편차는 약 200으로 추정됩니다.

4. Sample Statistics

```
handheight <- tibble("person"=c("A", "B", "C", "D", "E"),
                      "hand"=c(17, 15, 19, 17, 21),
                      "height"=c(150, 154, 169, 172, 175))
```

handheight

```
# A tibble: 5 x 3
  person   hand height
  <chr>   <dbl>  <dbl>
1 A         17     150
2 B         15     154
3 C         19     169
4 D         17     172
5 E         21     175
```

a. Calculate the sample variances for hand and height, respectively.

표본 분산은 $s_x^2 = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2}{n-1}$ 입니다.

```
sample_var <- handheight %>%
  mutate(hand_tmp=hand-mean(handheight$hand),
        height_tmp=height-mean(handheight$height)) %>%
  mutate(hand_tmp=hand_tmp^2,
        height_tmp=height_tmp^2) %>%
```

```

  summarise(s_var_hand = sum(hand_tmp) / 4,
            s_var_height = sum(height_tmp) / 4)
sample_var

```

```

# A tibble: 1 x 2
  s_var_hand s_var_height
  <dbl>        <dbl>
1      5.2       126.

```

b. Calculate the sample covariance.

표본 공분산은 $s_{xy} = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y})}{n-1}$ 입니다.

```

sample_cov <- handheight %>%
  mutate(s_cov_tmp = (hand - mean(handheight$hand)) * (height - mean(handheight$height))) %>%
  summarise(s_cov = sum(s_cov_tmp) / 4)
sample_cov

```

```

# A tibble: 1 x 1
  s_cov
  <dbl>
1 18.5

```

c. Calculate the sample correlation and interpret the result.

표본 상관계수는 $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$ 입니다.

```

sample_corr = sample_cov$s_cov / sqrt(sample_var$s_var_hand * sample_var$s_var_height)
sample_corr

```

[1] 0.7213147

표본상관계수는 약 0.72이며, 이는 두 변수간에 강한 양의 선형관계가 존재하는 것을 말합니다. 즉, 손의 크기와 키 사이에는 양의 상관관계가 있어 손이 큰 집단은 키도 큰 경향이 있고, 키가 큰 집단은 손도 큰 경향이 있다는 것을 의미합니다.

💡 R 내장함수

참고로, R 내장함수는 표본연산을 기본으로 하고 있어 내장함수를 이용하여 표현 가능합니다.

```
var(handheight$hand)
```

```
[1] 5.2
```

```
var(handheight$height)
```

```
[1] 126.5
```

```
cov(handheight$hand, handheight$height)
```

```
[1] 18.5
```

```
cor(handheight$hand, handheight$height)
```

```
[1] 0.7213147
```

경영통계분석 과제2

Question 1

At one large midwest university, about 40% of the college seniors have a social science major. Five seniors will be selected at random. Let X denote the number that **don't** have a social science major.

(a) List the probability distribution

학생을 선정할 때, 사회과학 전공이 아닌 경우를 1로, 사회과학 전공인 경우를 0으로 하면 이는 확률 0.6의 독립된 베르누이 시행으로 볼 수 있습니다.

따라서, 이를 5번 반복하는 확률변수 X 는 $X \sim B(5, 0.6)$ 를 따른다고 볼 수 있으며, $P(X = k) = \binom{5}{k} 0.6^k 0.4^{(5-k)}$ 이므로 이에 따른 확률분포는 아래와 같습니다.

k X	0	1	2	3	4	5
P(X=k)	0.0102	0.0768	0.230	0.346	0.259	0.0778

```
library(tidyverse)
```

```
binomial <- tibble(k=c(0,1,2,3,4,5), prob=choose(5,k)*0.6^k*0.4^(5-k))  
binomial
```

```
# A tibble: 6 x 2  
  k     prob  
  <dbl>   <dbl>  
1     0  0.0102  
2     1  0.0768  
3     2  0.230
```

```

4      3 0.346
5      4 0.259
6      5 0.0778

```

(b) Calculate mean and variance from the entries in the list from part (a).

평균은 3, 분산은 1.2입니다.

```

mean=sum(binomial$k*binomial$prob)
variance=sum(binomial$k^2*binomial$prob)-mean^2
paste(mean,variance,sep=" / ")

```

```
[1] "3 / 1.2"
```

(c) Calculate $E(X)=np$ and $\text{Var}(X)=np(1-p)$ and compare your answer with part (b).

np 와 $np(1-p)$ 의 값은 각각 3, 1.2로, 평균 및 분산과 같습니다.

Question 2

If X has a normal distribution with $\mu = 100$ and $\sigma = 5$, find b such that

(a) $P(X < b) = 0.67$

$b = 102.2$

```

# Set parameter
mean <- 100; std <- 5
# (a) P(X<b)=0.67, Using bisection method
i <- mean-3*std;j <- mean+3*std;mid <- (i+j)/2
while(abs(pnorm(mid,mean,std)-0.67)>0.000001){
  if(pnorm(mid,mean,std)-0.67>=0){j <- mid}
  if(pnorm(mid,mean,std)-0.67<0){i <- mid}
  mid=(i+j)/2
}
paste(j, pnorm(j,mean,std),sep=" / ")

```

```
[1] "102.200012207031 / 0.670032330457297"
```

(b) $P(X > b) = 0.011$

$b = 111.451$

```
# (b) P(X>b)=0.011, Using bisection method
i <- mean-3*std;j <- mean+3*std;mid <- (i+j)/2
while(abs(pnorm(mid,mean,std)-(1-0.011))>0.000001){
  if(pnorm(mid,mean,std)-(1-0.011)>=0){j <- mid}
  if(pnorm(mid,mean,std)-(1-0.011)<0){i <- mid}
  mid=(i+j)/2
paste(i,1-pnorm(i,mean,std),sep=" / ")
```

```
[1] "111.451416015625 / 0.0110024524392477"
```

(c) $P(|X-100| < b) = 0.966$

$b = 10.601$

```
# (c) P(|X-100| < b)=0.966, Using bisection method
i <- mean-3*std;j <- mean+3*std;mid <- (i+j)/2
while(abs(1-(1-pnorm(j,mean,std))*2-0.966)>0.000001){
  if(pnorm(mid,mean,std)-(1-(1-0.966)/2)>=0){j <- mid}
  if(pnorm(mid,mean,std)-(1-(1-0.966)/2)<0){i <- mid}
  mid=(i+j)/2
}
paste(j-100,1-(1-pnorm(j,mean,std))*2,sep=" / ")
```

```
[1] "10.6003761291504 / 0.966000298159686"
```

(d) $P(X < 110) = b$

$b = 0.9772$

```
# (d) P(X<110)=b, Using bisection method
b_d <- pnorm(110,mean,std); b_d
```

[1] 0.9772499

(e) $P(X>95)=b$

$b=0.8413$

```
# (e) P(X>95)=b
b_e <- 1-pnorm(95,mean,std); b_e
```

[1] 0.8413447

Question 3

Suppose the amount of sun block lotion in plastic bottles leaving a filling machine has a normal distribution. The bottles are labeled 300 milliliter(ml) but the actual mean is 302 ml and the standard deviation is 2 ml.

(a) What is the probability that an individual bottle will contain less than 299 ml?

로션의 양(ml)에 대한 확률변수 X 는 $X \sim N(302, 2^2)$ 를 따르므로, $P(X < 299) \approx 6.68\%$

```
pnorm(299,302,2)
```

[1] 0.0668072

(b) If you pick up 5 bottles and check the amount of sun block lotion in each bottle, what is the probability that all of 5 bottles contain less than 299 ml? (Assume that they are independent.)

각각의 병의 확률변수 X_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ 라고 하면 $X_i \sim N(302, 2^2)$ 이며 각 확률변수는 독립이므로 $P(X_i \in k_1, X_j \in k_2) = P(X_i \in k_1)P(X_j \in k_2)$ 가 성립합니다.

따라서, 모든 병이 299ml 미만일 확률 $P(X_i < 299 \text{ for all } i) = \prod_{k=1}^5 P(X_i < 299) \approx 0.668^5$

```
pnorm(299,302,2)^5
```

```
[1] 1.330811e-06
```

Question 4

The number of complaints per day, X , received by a cable TV distributor has the probability distribution

x	0	1	2	3
f(x)	0.4	0.3	0.1	0.2

- (a) Find the expected value and the standard deviation of the number of complaints per day.

평균은 1.1, 표준편차는 $\sqrt{1.29} \approx 1.136$ 입니다.

```
complaints <- tibble(x=c(0,1,2,3), prob=c(0.4,0.3,0.1,0.2))
mean <- sum(complaints$x*complaints$prob)
vol <- sum(complaints$x^2*complaints$prob)-mean^2
std <- sqrt(vol)
paste(mean,std,sep=" / ")
```

```
[1] "1.1 / 1.13578166916005"
```

- (b) What is the approximate probability that the distributor will receive more than 2 complaints in average during 100 days?

먼저, X_i 를 i일 뒤에 캠플레인이 들어오는 횟수라고 한다면 X_i 는 위 분포를 따르게 될 것입니다. 100일 뒤까지의 캠플레인이 들어오는 횟수를 X_1, X_2, \dots, X_{100} 이라고 한다면, 각각의 X_i 는 독립이고 동일한 분포(iid)를 가지는 표본입니다.

한편, 중심극한정리(Central Limit Theorem)에 따라, 표본의 크기가 충분히 크다면 해당 표본들을 정규분포로 근사시킬 수 있습니다.

$$\text{if } X_i \text{ are iid, } \frac{\sum_{k=1}^n (X_i - \mu)}{\sqrt{n} \times \sigma} \sim N(0, 1) \text{ for large } n$$

100번의 독립시행 $X_1 \sim X_{100}$ 은 정규근사하기 충분한 표본이므로 이를 적용하면 다음과 같습니다.

$$\text{By CLT, } \frac{\sum_{k=1}^{100} (X_i - 1.1)}{\sqrt{100} \times \sqrt{1.29}} = \frac{\sum_{k=1}^{100} X_i - 110}{\sqrt{129}} \sim N(0, 1)$$

이제, 100일 동안의 일평균 커플레인 횟수가 2보다 클 확률은 다음과 같습니다.

$$P\left[\frac{\sum_{k=1}^{100} X_i}{100} > 2\right] = P\left[\frac{\sum_{k=1}^{100} X_i - 110}{\sqrt{129}} = Z > \frac{90}{\sqrt{129}}\right]$$

해당 확률을 R을 통해 구해보면, 0에 가깝습니다.

```
1-pnorm(90/sqrt(129), 0, 1)
```

[1] 1.110223e-15

(c) If we observe for five days, what is the probability that the distributor will receive exactly 1 complaint only for two days?

커플레인을 1개만 받을 확률은 0.3입니다.

하루를 커플레인을 1개만 받는 경우를 1, 1개가 아닌 경우를 0으로만 나눈다면, 해당 시행은 확률 0.3의 베르누이 시행입니다. 이를 5일 동안 관측한다면 각각은 독립이므로 해당 분포는 $B(5, 0.3)$ 인 이항분포입니다.

즉, 5일중 2일만 커플레인을 정확히 1개 받을 확률은 $\binom{5}{2} 0.3^2 0.7^3 = 30.87\%$

```
choose(5, 2)*0.3^2*0.7^3
```

[1] 0.3087

(d) If we observe for 100 days, what is the approximate distribution of the number of days that the distributor will not receive any complaint?

하루에 커플레인이 없을 확률은 0.4로, 커플레인이 없는 경우를 1, 있는 경우를 0으로 나눈다면 해당 시행은 확률 0.4의 베르누이 시행으로 볼 수 있습니다.

이를 100일간의 표본으로 나누어 시행하면 하루단위 시행은 각각 독립이므로, 이는 확률 0.4 및 시행횟수 100의 이항분포($B(100, 0.4)$)를 따르게 됩니다.

한편, 해당 이항분포는 동일한 확률을 가진 100개의 베르누이시행($B_i \sim B(1, 0.4)$)으로 나누어 볼 수 있고, (b)와 동일하게 CLT를 이용한다면 아래와 같이 표현할 수 있습니다.

$$\frac{\sum_{k=1}^{100} (B_i - 0.4)}{\sqrt{100 \times 0.4 \times 0.6}} \sim N(0, 1), \text{ Since } X = \sum_{k=1}^{100} B_i, \frac{X - 40}{\sqrt{24}} \sim N(0, 1) \Rightarrow X \sim N(40, 24)$$

즉, 평균이 40이고 분산이 24인 정규분포로 근사할 수 있습니다.

(e) Using the approximate distribution in (d), what is the approximate probability that the number of days that the distributor will not receive any complaint is at most 30 days?

해당 확률은 $P(X \leq 30)$ for $X \sim B(100, 0.4)$ 과 같습니다.

위의 정규분포 근사를 활용하면 $X \sim N(40, 24)$, then $P(X \leq 30) \approx 2.06\%$

```
pnorm(30, 40, sqrt(24))
```

```
[1] 0.02061342
```

Question 5

The probability that a voter will believe a rumor about a politician is 0.3.

(a) Find the probability that the first 3 voters don't believe the rumor but the 4th voter believe it.

$$0.7 \times 0.7 \times 0.7 \times 0.3 = 0.1029 = 10.29\%$$

(b) Find the probability that the exactly one person believe the rumor if 5 voters are told individually

각 유권자는 소문을 개별적으로 확인하였으므로 유권자들이 루머를 믿는 확률변수는 각각 독립입니다.

루머를 믿을 확률은 0.3이므로 루머를 믿는 경우를 1, 안믿는 경우를 0이라고 한다면 이는 확률 0.3의 베르누이 시행입니다. 이를 5번 반복하면 5명의 유권자 중 루머를 믿는 유권자의 수는 $B(5, 0.3)$ 을 따릅니다.

정확히 한사람만 루머를 믿을 확률은, $\binom{5}{1} 0.3^1 0.7^4 \approx 36.02\%$

```
choose(5,1)*0.3*0.7^4
```

[1] 0.36015

Question 6

Here is the assignment of probabilities that describes the age (in years) and the gender of a randomly selected American College student.

Category	14~18	18~25	25~35	35~
Male	0.01	0.28	0.13	0.04
Femail	0.02	0.3	0.14	0.08

A college student will be selected at random. Let A=[student is Female] and B=[student is at least 25 but less than 35 years old]. Find,

(a) $P(A)$ and $P(B)$

$$P(A) = 0.02 + 0.3 + 0.14 + 0.08 = 0.54$$

$$P(B) = 0.13 + 0.14 = 0.27$$

(b) $P(A \text{ or } B)$

$$P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.54 + 0.27 - 0.14 = 0.67$$

Question 7

Show the following statement: If $X \sim t[k]$, then $X^2 \sim F[1, k]$

$$X \sim t[k] \Leftrightarrow X = \frac{Z}{\sqrt{(V/k)}} \text{ for } Z \sim N(0, 1), V \sim \chi^2(k)$$

$$\Leftrightarrow X^2 = \frac{Z^2}{V/k} = \frac{U/1}{V/k} \text{ for } U = Z^2 \sim \chi^2(1)$$

$$\Leftrightarrow F = X^2 = \frac{U/1}{V/k} \sim F(1, k) \text{ for } U \sim \chi^2(1), V \sim \chi^2(k) \quad \square$$

경영통계분석 과제3

Question 1

if X_1, X_2, \dots, X_n are i.i.d random variables with mean μ and variance σ^2 , calculate the covariance \bar{X} and $X_i - \bar{X}$ for any $i = 1, \dots, n$.

Answer

먼저, 임의의 확률변수 U, V 에 대하여 $Cov(U, V) = E[(U - E[U])(V - E[V])] = E[UV] - E[U]E[V]$ 입니다.

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \Rightarrow E[\bar{X}] = \mu, E[X_i - \bar{X}] = 0$ for all i 이고, 각각의 X_i 는 독립이므로 $E[X_i X_j] = E[X_i]E[X_j] = \mu^2$ for $i \neq j$ 이며, $E[X_i^2] = Var[X_i] + E[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$ 입니다.

이를 이용하면 $E[\bar{X}^2] = E\left[\frac{\sum_i X_i^2 + \sum_{i,j}^{i \neq j} X_i X_j}{n^2}\right] = \frac{n(\sigma^2 + \mu^2) + n(n-1)\mu^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2 + n^2\mu^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$ 입니다.

이제 공분산을 구해보겠습니다.

$$\begin{aligned} Cov[\bar{X}, X_i - \bar{X}] &= E[\bar{X}(X_i - \bar{X})] - \mu \times 0 = E[\bar{X}X_i] - E[\bar{X}^2] \\ &= \frac{E[X_i(X_1 + \dots + X_n)]}{n} - \frac{\sigma^2}{n} - \mu^2 = \frac{E[X_i^2] + (n-1)\mu^2 - \sigma^2 - n\mu^2}{n} \\ &= \frac{\sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 - \sigma^2}{n} = 0 \end{aligned}$$

즉, 공분산은 0입니다.

i 간결한 풀이방법

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_i, X_j] &= 0 \text{ for } i \neq j, \text{ Cov}[X_i, X_i] = \text{Var}[X_i] = \sigma^2, \text{ Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \text{ 이므로,} \\ \text{Cov}[\bar{X}, X_i - \bar{X}] &= \text{Cov}[\bar{X}, X_i] - \text{Cov}[\bar{X}, \bar{X}] = \frac{\text{Var}[X_i]}{n} - \text{Var}[\bar{X}] = 0 \end{aligned}$$

Question 2

A commercial for a manufacturer of household appliance claims that 3% of all its products require a service call in the first year. A consumer protection association wants to check the claim by surveying 400 households that recently purchased one of the company's appliances. What is the probability that more than 5% require a service call within the first year?

- Calculate the probability using the approximate normal approach.
- Calculate the probability using the binomial distribution.

Answer

각각의 가구를 조사하는 일은 독립이며, 클레임이 있는 경우를 1, 없는 경우를 0으로 나누면 이는 $Ber(0.03)$ 의 베르누이시행입니다.

이를 400번 반복하므로 분포는 $B(400, 0.03)$ 의 이항분포이며, 정규분포로 근사하면 아래와 같습니다.

$$\text{By CLT, } \frac{\sum_{i=1}^{400}(X_i - 0.03)}{\sqrt{400} \sqrt{0.03 \times 0.97}} \sim N(0, 1) \Rightarrow X \sim N(12, 11.64) \text{ for } X \sim B(400, 0.03)$$

클레임이 있는 가구가 5%를 초과할 확률은 20가구를 초과할 확률 $P(X > 20)$ 이므로, (a) 0.95% 및 (b) 1.05%입니다.

정규분포 근사는 n 이 매우 크고 p 가 0.5와 인접할 때 정확도가 높은데, n 은 충분히 크지만 p 가 매우 작아 다소 오차가 발생하는 것으로 추정됩니다.

```
# (a) normal dist.  
1-pnorm(20, 12, sqrt(11.64))
```

[1] 0.009517584

```
# (b) binomial dist.

prob=0
for(i in 0:20){
  prob=prob+choose(400,i)*0.03^i*0.97^(400-i)
}
1-prob
```

[1] 0.01045374

Question 3

Suppose that X has normal dist. with $\mu = 10$, $\sigma = 2$

(a) $P(6 < X < 14) : 0.9545$

```
mean=10; std=2
pnorm(14,mean,std)-pnorm(6,mean,std)
```

[1] 0.9544997

i Note

이 $P(X \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma))$ 이므로, 95.45% 임이 잘 알려져 있습니다.

(b) $P(X \leq c) = 0.95 : c=13.29$

```
# (a) P(X<=c)=0.95, Using bisection method
i <- mean-3*std
j <- mean+3*std
mid <- (i+j)/2
while(abs(pnorm(mid,mean,std)-0.95)>0.000001){
  if(pnorm(mid,mean,std)-0.95>=0){j <- mid}
  if(pnorm(mid,mean,std)-0.95<0){i <- mid}
  mid=(i+j)/2
}
paste(j,pnorm(j,mean,std),sep=" / ")
```

```
[1] "13.2897644042969 / 0.950002947051978"
```

(c) for sample X_1, \dots, X_4 , $P(\bar{X} \leq 12) : 0.9772$

$E(\bar{X}) = 10$, $Var(\bar{X}) = \frac{4}{4} = 1$ 이고, 각각의 X_i 는 i.i.d 정규분포이므로 $\bar{X} \sim N(10, 1)$ 입니다.

```
pnorm(12, 10, 1)
```

```
[1] 0.9772499
```

Question 4

Bits are sent over a communications channel in packets of 160. If the probability of a bit being corrupted (one error) over this channel is 0.2 and such errors are independent. Let X denotes the number of bits that are corrupted over this channels

- (a) What is the distribution of X ? Can it be approximated as normal distribution?
- (b) Approximately, what is the probability that more than 50 bits in a packet are corrupted?

Answer

한번의 전송에 에러가 발생하는 경우를 1, 아닌 경우를 0으로 나누면 이는 확률 0.2의 베르누이 시행입니다. 이를 160번 반복하고 에러가 발생하는 횟수인 X 는 $B(160, 0.2)$ 이항분포를 따를 것 입니다.

해당 이항분포는 시행횟수가 충분히 크지만(>30), 확률이 0.2로 다소 낮아 정규분포 $N(32, 25.6)$ 을 사용할 때 근소한 오차가 발생할 수 있습니다.

$P(X > 30)$ 을 구해보면, 정규분포는 34.63%, 이항분포는 39.05%으로 오차가 다소 존재하므로 이에 유의해야 합니다.

```
prob=0
for(i in 0:30){
  prob=prob+choose(160,i)*0.2^i*0.8^(160-i)
}
paste(pnorm(30,32,sqrt(25.6)),prob,sep=" / ")
```

```
[1] "0.34631639202098 / 0.390465138866041"
```

에리가 50번을 초과하여 발생할 확률은 $P(X > 50)$ 이므로, 정규분포를 이용한 확률은 0.0187%입니다. 한편, 이항분포를 이용한 확률은 0.0265%입니다.

```
prob=0
for(i in 0:50){
  prob=prob+choose(160,i)*0.2^i*0.8^(160-i)
}
paste(1-pnorm(50,32,sqrt(25.6)),1-prob,sep=" / ")
```

[1] "0.000187156123554355 / 0.000264520708086802"

Question 5

A large population is described by the probability distribution, Let X_1 and X_2 be a random sample of size 2 from the distribution.

X	f(x)
0	0.1
1	0.2
2	0.7

- (a) Determine the sampling distribution of $\max(X_1, X_2)$
- (b) Determine the sampling distribution of $X_1 + X_2$

Answer

먼저 X_1, X_2 는 모집단으로부터 추출한 표본으로 i.i.d를 만족할 것 입니다. 따라서 $f(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = f(x_1)f(x_2)$ 로 산출할 수 있습니다.

$x_m \in \{0, 1, 2\}$ for $x_m \sim \max(X_1, X_2)$ 이고, 순서쌍 (x_1, x_2) 로 경우의 수를 나타내면 $(0, 0) \Rightarrow x_m = 0$ 및 $(0, 1), (1, 0), (1, 1) \Rightarrow x_m = 1$ 및 $(2, 0), (2, 1), (2, 2), (0, 2), (1, 2) \Rightarrow x_m = 2$ 입니다. 따라서, $\max(X_1, X_2)$ 의 분포는,

x_m	$\max(X_1, X_2)$
0	0.01
1	$0.02+0.02+0.04=0.08$
2	$0.7+0.21=0.91$

위와 유사한 방법으로 $X_1 + X_2$ 의 경우의 수를 나타내면 다음과 같습니다.

$x_1 \in X_1$	$x_2 \in X_2$	$\Rightarrow x_+ \in X_1 + X_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2
2	0	2
0	2	2
1	2	3
2	1	3
2	2	4

따라서, $X_1 + X_2$ 의 분포는,

x_+	$X_1 + X_2$
0	0.01
1	$0.02+0.02=0.04$
2	$0.04+0.07+0.07=0.18$
3	$0.14+0.14=0.28$
4	0.49

경영통계분석 과제4

Problem 1.

Assume that the standard deviation of the heights of five-year-old boys is 3.5 inches. How many five-year-old need to be sampled if we want to be 90% sure that the population mean height is estimated within .5 inch?

Answer

크기가 N인 표본을 임의추출하고, 충분히 크다고 가정하겠습니다.

표준편차가 3.5(inch)이므로, 크기가 N인 표본평균 \bar{X} 은 중심극한정리(CLT)에 의해 정규분포 $N(\mu, \frac{3.5^2}{N})$ 을 따르게 될 것입니다.

이를 이용하여 신뢰수준이 90%인 모평균의 신뢰구간을 양편으로 추정해보겠습니다.

$$P(z_{0.95} = -z_{0.05} < \frac{\bar{X} - \mu}{3.5/\sqrt{N}} < z_{0.05}) = 0.9 \Rightarrow P(\bar{X} - z_{0.05} \frac{3.5}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{X} + z_{0.05} \frac{3.5}{\sqrt{N}}) = 0.9$$

여기서, 모평균을 0.5inch 이내로 추정하는 것의 의미는, 표본오차가 0.5이내, 즉 $z_{0.05} \frac{3.5}{\sqrt{N}} < 0.5$ 라는 뜻입니다.

$$z_{0.05} \approx 1.65 \text{이므로, 이를 정리하면 } 1.65 \times 7 < \sqrt{N} \Rightarrow 133.4025 < N$$

즉, 표본의 수가 134명 이상이라면 90% 신뢰구간을 0.5inch 오차 이내로 추정할 수 있습니다.

또한, 이는 충분히 큰 표본이므로 앞서 CLT를 이용하는 것에 위배되지 않습니다.

Problem 2.

An employee of an on-campus copy center wants to determine the mean number of copies before a cartridge needs to be replaced. She records the life length in thousands of copies for 43 cartridges and obtains $n = 43$, $\bar{x} = 8.12$, $s = 1.78$ thousand copies. Obtain a 90% confidence interval for the population mean, μ , number of copies in thousands before a cartridge should be replaced.

Answer

먼저, 43개의 샘플이 충분히 크다고 생각하고 시작하겠습니다.

CLT에 따라 표본평균 $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{43})$ 이며, 표본분산 $\frac{42 \times s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(42)$ 입니다.

이를 정리하면 $\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{43}} \sim t(42)$ 가 되는데, 표본의 크기가 충분히 크므로 $t(n-1) \rightarrow N(0, 1)$ 로 근사할 수 있습니다.

이제, 이를 이용하여 모평균의 90% 신뢰구간을 추정해보겠습니다.

$$P(\mu \in (\bar{X} \pm z_{0.05} \frac{s}{\sqrt{43}})) = 0.90 \Rightarrow P(\mu \in (7.672, 8.568)) = 0.90$$

즉, 신뢰구간은 (7.672, 8.568)입니다.

Problem 3.

Data on the average weekly earnings were obtained from a survey of 50 nonsupervisory production workers in the mining industry. The sample mean and standard deviation were found to be \$630 and \$35, respectively.

- Estimate the true mean weekly earnings and determine the 95% error margin.
- Construct a 95% confidence interval for the true mean weekly earnings

Answer

먼저, 표본평균 \bar{X} 의 성질에 따라 $E(\bar{X}) = \mu$, $\bar{X} \xrightarrow{p} \mu$ 이므로 \bar{X} 는 모평균에 대한 불편(unbiased) 및 일치(consistent) 추정량입니다.

따라서 모평균의 estimator로 표본평균을 선정하고, 모평균을 \$630으로 추정하겠습니다.

한편, 표본의 수가 50으로 충분히 크므로 앞서 이용한 논리를 그대로 준용하여 $\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{50}} \sim t(49) \approx N(0, 1)$ 라고 할 수 있습니다.

따라서 95%의 error margin은 $z_{0.05} \frac{s}{\sqrt{50}} = 8.167$ 입니다.

마지막으로, 95%의 신뢰수준으로 추정한 모평균의 신뢰구간은 아래와 같습니다.

$$P\left(\bar{X} - z_{0.025} \frac{s}{\sqrt{50}} < \mu < \bar{X} + z_{0.025} \frac{s}{\sqrt{50}}\right) \Rightarrow \text{Confidence interval is } (620.299, 639.702)$$