<SVD>

1. 특이값분해

1) 개요

- 고유값 분해와 같이 행렬을 대각화하는 방법
- 행렬이 정방행렬이든 아니든 관계없이 모든 mxn 행렬에 대해 적용 가능

2) 수식

$$A = U\sum V^T$$

U : mxm 직교행렬, AA^T를 고유값분해해서 얻어진 직교행렬

- U의 열벡터들을 left singular vector 라고 부름

** 직교행렬 : $U^{-1}=U^T$, $UU^T = I$*

V : nxn 직교행렬, A^TA를 고유값분해해서 얻어진 직교행렬

- U의 열벡터들을 right singular vector 라고 부름

$\sum$: U와 V의 고유값들의 square root를 대각원소로하는 mxn 직사각행렬, 각 대각원소들을 A의 특이값(singular value)라고 부름

3) 성질

(1) U,V는 직교행렬

- 대칭행렬의 성질
    1. 무조건 고유값 분해가 가능
    2. 직교행렬로 대각화 가능

-> AAT는 대칭행렬이기 때문에 항상 U와 V가 존재하고 직교행렬이 됨.

(2) 특이값은 모두 양수이다

- AA^T와 A^TA의 고유값들은 1. 모두 0 이상
    - $A^TAv = \lambda v$에 양변에 v^T를 곱해보면, $v^TA^TAv = \lambda v^Tv$ 에서 $(Av)^TAv = \lambda v^Tv$
    - 즉, $Av\ ^2 = \lambda\ v\ ^2$
- 0이 아닌 고유값들은 서로 동일.
    - $(A^TA)v=\lambda v$ 이다. 양변에 A를 곱해보면 $A(A^TA)v = \lambda Av$ 즉, $AA^T(Av) = \lambda(Av)$
    - 즉, $Av \neq 0$이면 λ는 또한 AA^T의 고유값
    - 만일 $Av=0$라 하면 $(A^TA)v=\lambda v$에서 $\lambda=0$이어야 한다. 그런데 $AA^T(Av) = \lambda(Av)$ 여기에서 Av는 고유벡터이어야 하기 때문에 $Av \neq 0$ -> 성립하지 않음.
    - 이와같이 구한 공통의 고유값들 $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \ldots \geq \sigma_s^2 \geq 0$ (단, s = min(m, n)), 이들의 square root를 취한 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_s \geq 0$ 이 A의 특이값(singular value)>=0*(square root 중 양수값을 특이값으로 하기로*

약속)

* positive define, negative define

-

(3) A가 정방행렬일때, 특이값에 0이 포함되면 A는 특이행렬(singular matrix).

- $A^TAv = \lambda v \rightarrow (A^TA - \lambda I)v = 0 \rightarrow (A^TA)v = 0$

-이때, 만약에 A의 역행렬이 존재하면 v≠0 이라는 성질이 성립하지 않기 때문에 A는 역행렬이 존재하지 않음

(4) $$Av_i = \sigma_i u_i, \ 1 \le i \le s$$

ui : left singular vector

σ_i : 특이값

v_i : right singular vector

-> 고유값 분해와 유사

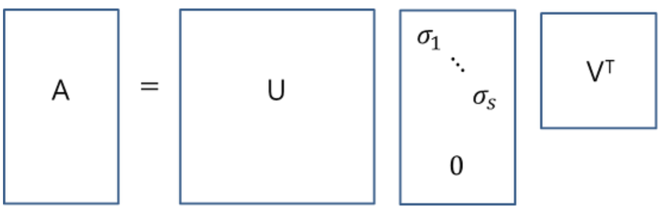
4) 특이값분해(SVD)의 기하학적 의미

- 행렬은 선형변환
  - 직교행렬 : 회전변환/반전된 회전변환
  - 대각행렬 : 각 좌표성분으로의 스케일변환

이때, 행렬 R이 직교행렬(orthogonal matrix)이라면 $RR^T = E$이다. 따라서 $\det(RR^T) = \det(R)\det(R^T) = \det(R)^2 = 1$이므로 det(R)는 항상 +1, 또는 -1이다. 만일 det(R)=1라면 이 직교행렬은 회전변환을 나타내고 det(R)=-1라면 뒤집혀진(reflected) 회전변환

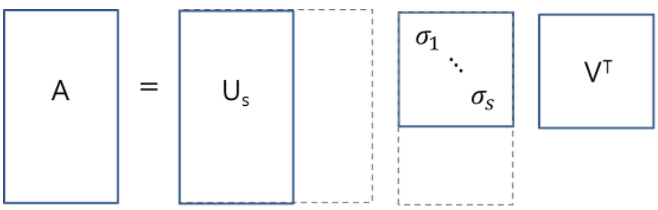
5) SVD를 이용한 데이터 압축(A:mxn, m>n)

- full SVD



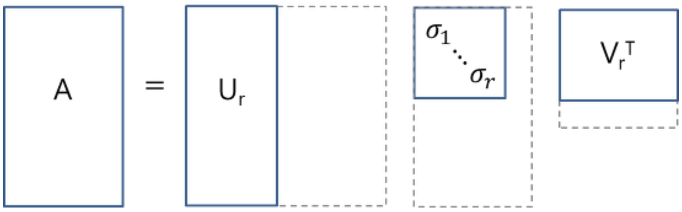
: 행렬을 단순히 분해하는 것

- thin SVD



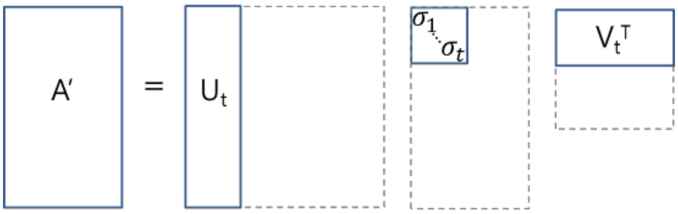
: 비대각원소가 0으로 구성된 부분을 없애고, U에서 이에 대응되는 열벡터들을 제거한 형태.

- Compact SVD



: 비대각원소들 뿐만 아니라 0인 대각원소들도 모두 제거한 형태

- Truncated SVD



: 0dl 아닌 대각원소들까지 제거한 형태, 다른 방법들과 달리 원래의 A가 보존되지 않고 근사행렬이 나옴. 데이터 압축을 위해서 많이 사용

참고자료 : https://darkpgmr.tistory.com/106