확률변수의 함수

<확률변수의 함수의 확률밀도함수를 구하는 방법>

- $P_X(x) = f(x), y = u(x)$

1. **누적분포함수법** : F(y)를 구한 후, 미분하여 f(y)를 구하는 방법

**연속확률변수에 대해서만 적용 가능(미분을 하기 때문)*

2. **변수변환법** : x를 y에 대한 함수로 표현하여 확률밀도함수에 대입하는 방법

- 조건 : 변환하려는 함수의 변수가 일대일 대응관계여야 함(새로운 변수의 값에 대응하는 변수를 찾아서 해당 확률을 반환하는 것을 전제로 하기 때문)

**이산확률변수, 연속확률변수 모두 적용 가능*

- <u>이산확률변수의 경우</u> : 확률밀도함수 == 확률이기 때문에,

(1) 확률변수가 1개인 경우: $f_Y(y) = f_X(u^{-1}(y))$

(2) 확률변수가 2개인 경우: $f_{Y1,\,Y2}(y1, y2) = f_{X1,\,X2}(w_1(y1, y2), w_2(y1, y2))$

- <u>연속확률변수의 경우</u> : 확률밀도함수 != 확률이기 때문에,

(1) 확률변수가 1개인 경우: $f_Y(y) = f(u^{-1}(y))|[u^{-1}(y)]'|$

(2) 확률변수가 2개인 경우:

$$f_{Y1,\,Y2}(y1, y2) = f(w_1(y1, y2),\, w_2(y1, y2))|J|$$

$$J = \begin{vmatrix} dx1/dy1 & dx1/dy2 \\ dx2/dy1 & dx2/dy2 \end{vmatrix}$$

3. 적률모함수

3-1) 모멘트(moment)

- 어떠한 확률변수의 특성을 표현하는 방법 : 평균, 표준편차 ---> 유일하지 않음(확률분포는 다르더라도 동일한 평균과 표준편차를 가질 수 있음)
- 확률분포를 특정할 수 있는 척도 -> 모멘트
- k번째 모멘트 : $\mu_k' = E(x^k)$ .... 1차 모멘트 : 평균($\mu_1' = \mu$)
- 적률모함수의 유일성 : 만약 확률변수 X와 Y가 모든 k에 대해서 동일한 k번째 모멘트를 가진다면, 확률변수 X와 Y는 동일한 확률분포를 따른다고 할 수 있다.

3-2) 적률모함수(moment generating function)

- 다양한 모멘트들을 하나의 함수에 모두 표현한 것. => 확률변수의 적률모함수가 같으면, 확률변수의 확률분포가 같음. <-> 모든 k에 대한 moment가 같음

- $m(t) = E(e^{tx}) = \Sigma_x(e^{tx}f(x))$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx$$

3-3) 적률모함수법
- 서로 독립인 확률변수들의 합으로 표현되는 확률변수의 분포를 유도하는 데 유용하게 사용됨

서로 독립인 확률변수 x1,x2, ... , xn이 있을 때,

$y = x1 + x2 + x3 + \ldots + x_n$
$m_y(t) = m_{x1}(t) * m_{x2}(t) * \ldots * m_{x_n}(t)$

4. 서로 독립인 확률변수(x1, x2, ..., xn)의 선형결합 확률변수 y($y = a1x1 + a2x2 + \ldots + a_n x_n$)

- 평균 : $E_y(y) = a1\mu(x1) + a2\mu(x2) + \ldots + a_n\mu(xn)$
- 분산 : $Var(y) = a_1^2 Var(x1) + a_2^2 Var(x2) + \ldots + a_n^2 Var(x_n)$

* $Var(ax + by) = a^2 Var(x) + b^2 Var(y) + 2Cov_{x,y}(x,y)$

-> 정규분포를 따르는 확률변수의 선형함수 : 정규분포

번외) 서로 독립인 확률변수의 합의 확률분포
- 확률변수가 서로 독립, 포아송분포 확률변수들의 합 : $Y \sim poi(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n)$
- 확률변수가 서로 독립, 정규분포 -> 확률변수들의 합 :
  $Y \sim N(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2)$

<몰랐던 수학 개념>

1) 이항정리의 일반항

$(a+b)^n = \Sigma_{r=0}^{n}({}_nC_r(a^{n-r}b^r))$

<문제 풀이 시 주의할 점>
- 확률변수의 범위가 결합확률분포가 되었을 때, 다른 분포에 의해서 범위가 달라질 수 있음