CHƯƠNG 3:
BIỂU DIỄN FOURIER CỦA TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG LTI

3.3. BIẾN ĐỔI FOURIER RỜI RẠC

- Lấy mẫu tần số.
- Biến đổi Fourier rời rạc.
- Định lý lấy mẫu.

Lấy mẫu phổ Fourier của tín hiệu rời rạc.

- Phổ Fourier $X(\Omega)$ của một tín hiệu rời rạc tuần hoàn với chu kỳ 2π → chúng ta chỉ lấy mẫu tín hiệu với một chu kỳ như sau:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Trong đó, N là số lượng mẫu trong đoạn $[0,2\pi]$ → chu kỳ lấy mẫu là $\frac{2\pi}{N}$

- Bây giờ, sử dụng $X(k)$ thay cho $X(\frac{2\pi}{N}k)$ biểu diễn phổ Fourier rời rạc của $x(n)$.

Lấy mẫu phổ Fourier của tín hiệu rời rạc.

- $X(k)$ được biến đổi như sau:

$$X(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(n-lN) e^{-j\frac{2\pi}{N}k(n-lN)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Trong đó,

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(n-lN)$$

Lấy mẫu phổ Fourier của tín hiệu rời rạc.

- $x_p(n)$ là một tín hiệu tuần hoàn theo chu kỳ N → $x_p(n)$ có thể được biểu diễn bằng chuỗi Fourier sau:

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

trong đó, các hệ số $\{c_k |\ k = 0, \dots, N-1\}$ được tính toán như sau:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \rightarrow c_k = \frac{1}{N}\mathrm{X(k)}$$

Lấy mẫu phổ Fourier của tín hiệu rời rạc.

- Từ phổ Fourier rời rạc của tín hiệu $x(n)$, chúng ta khôi phục lại tín hiệu tuần hoàn $x_p(n)$ như sau:

$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- Có thể khôi phục $x(n)$ từ $X(k)$?
  - ✓ Có: Nếu độ dài của $x(n)$ không lớn hơn N và tất cả các giá trị khác không của nó nằm trong đoạn [0, N-1], do đó:

$$x(n) = \begin{cases} x_p(n) & (0 \leq n \leq N-1) \\ 0 & \text{nếu khác} \end{cases}$$

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT) của tín hiệu tuần hoàn rời rạc

- Tín hiệu tuần hoàn rời rạc $x(n)$ có năng lượng vô hạn → không tồn tại biến đổi Fourier liên tục của $x(n)$.
- Do đó, định nghĩa biến đổi Fouirer rời rạc của $x(n)$ dựa trên biểu diễn chuỗi Fourier của một tín hiệu tuần hoàn rời rạc.

Biến đổi Fourier rời rạc (DFT) của tín hiệu tuần hoàn rời rạc

- Biến đổi Fourier rời rạc (DFT) của một tín hiệu $x(n)$ tuần hoàn rời rạc có chu kỳ *N* được định nghĩa là:

$$DFT[x(n)] = X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

$X(k)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ *N*.

- DFT ngược được định nghĩa như sau:

$$x(n) = DFT^{-1}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}$$

Các tính chất DFT của tín hiệu tuần hoàn

- Dịch thời gian

$$DFT[x(n-n_0)] = X(k)e^{-j2\pi k n_0/N}$$

- Tích chập tuần hoàn của hai tín hiệu tuần hoàn có cùng chu kỳ N :

Định nghĩa: $x_1(n) *_N x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k)$

Do đó:

$$DFT[x_1(n) *_N x_2(n)] = X_1(k)X_2(k)$$

Các tính chất DFT của tín hiệu tuần hoàn

- Tương quan của hai tín hiệu tuần hoàn thực có cùng chu kỳ tuần hoàn:

$$r_{x_1x_2} = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)x_2(n-k)$$

Do đó:

$$R_{x_1x_2} = X^*{}_1\,(k)X_2(k) = X_1(k)X^*{}_2\,(k)$$

DFT của tín hiệu có độ dài hữu hạn rời rạc theo thời gian

- Xét một tín hiệu thời gian rời rạc $x(n)$ có độ dài hữu hạn L, tạo ra một tín hiệu tuần hoàn $x_p(n)$ có chu kỳ $N \geq L$ như sau:

$$x_p(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(n - lN)$$

- Biến đổi Fourier rời rạc có độ dài N của tín hiệu $x(n)$ được định nghĩa là DFT của tín hiệu tuần hoàn $x_p(n)$:

$$DFT_N[x(n)] = DFT_N\left[x_p(n)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}$$

Các tính chất DFT của tín hiệu có độ dài hữu hạn

- Dịch vòng:

$$DFT_N[x(n-n_0)_N] = DFT[x(n)]e^{-j2\pi k n_0/N}$$

- Tích chập vòng của hai tín hiệu có độ dài hữu hạn:

  Định nghĩa:

$$x_1(n) \circledast_N x_2(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_1(k)\, x_2(n-k)_N$$

  Do đó:

$$DFT_N[x_1(n) \circledast_N x_2(n)] = DFT_N[x_1(n)]DFT_N[x_2(n)]$$

Định lý lấy mẫu: Lấy mẫu tín hiệu có băng tần hữu hạn

- Xét một tín hiệu năng lượng thời gian liên tục $x(t) \rightarrow$ phổ của nó là hữu hạn $\rightarrow$ tồn tại một tần số lớn nhất ω_a trong tín hiệu, tức là, $\forall|\omega| > |\omega_a|: X(\omega) = 0$.

- Lấy mẫu tín hiệu $x(t)$ với tốc độ lấy mẫu ω_s để thu được một tín hiệu thời gian rời rạc $x(n)$. Nếu $\omega_s = 2\omega_a$, tín hiệu liên tục $x(t)$ có thể được khôi phục chính xác từ tín hiệu rời rạc $x(n)$ bằng cách sử dụng công thức sau:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{\sin(\omega_a t - n\pi)}{\omega_a t - n\pi}$$

Định lý lấy mẫu: Định lý lấy mẫu Shannon

- Một tín hiệu băng tần hữu hạn có tần số không lớn hơn băng tần ω_a có thể được khôi phục chính xác từ các tín hiệu lấy mẫu của nó nếu tốc độ lấy mẫu $\omega_s \geq 2\omega_a$.

- Tốc độ lấy mẫu $\omega_s = 2\omega_a$ được gọi là tốc độ Nyquist

Định lý lấy mẫu: Định lý lấy mẫu Shannon

- Nếu $\omega_s = 2\omega_a$: *x(n)* có phổ tuần hoàn với chu kỳ 2π và dạng phổ của nó trong đoạn $[-\pi, \pi]$ tương tự với dạng của phổ $x(t)$ trong đoạn $[-\omega_a, +\omega_a]$.

- Nếu $\omega_s > 2\omega_a$: $x(n)$ có phổ tuần hoàn với chu kỳ 2π và dạng phổ của $x(t)$ trong đoạn $[-\omega_a, +\omega_a]$ được nén vào trong một phần nào đó thuộc $[-\pi, \pi]$ trong phổ của $x(n)$.

Định lý lấy mẫu: Định lý lấy mẫu Shannon

- Nếu $\omega_s < 2\omega_a$: Xảy ra hiện tượng sai lệch và chồng lấn → $x(n)$ có phổ tuần hoàn với chu kỳ 2π và dạng phổ của nó trong $[-\pi, +\pi]$ được tạo ra bằng cách xếp chồng dạng phổ của $x(t)$ trong đoạn $[-\omega_a, +\omega_a]$ xung quanh tần số chồng lấn (hay còn gọi là tần số Nyquist, bằng một nữa tốc độ lấy mẫu) → việc khôi phục chính xác $x(t)$ từ $x(n)$ là không thể
  - ✓ Sai lệch: Các tần số khác nhau của $x(t)$ xuất hiện trong cùng một vị trí của phổ $x(n)$.
  - ✓ Chồng lấn: là một dạng đặc biệt của sai lệch trong đó các tần số bị xếp chồng lên vị trí của nhau xung quanh tần số chồng lấn.