Bài 1.1. Hãy tính tích phân, năng lượng, độ rộng trung bình của các tín hiệu sau đây:

a) $x(t) = \Lambda(t)$ d) $x(t) = te^{-|t|}$

b) $x(t) = e^{-\pi t^2}$ e) $x(t) = e^{2t}1(-t) + e^{-t}1(t)$

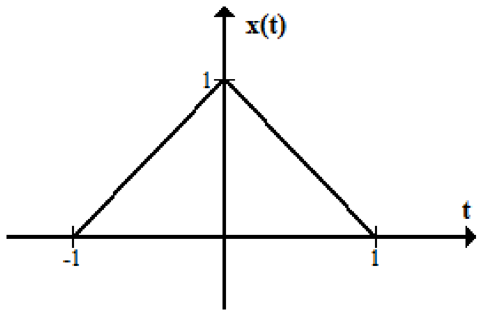
c) $x(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ f) $x(t) = \cos t\Pi\left(\dfrac{t}{3\pi}\right)$

Giải

a)Tích phân của tín hiệu là:

$$[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{-1}^{0}(t+1)dt + \int_{0}^{1}(1-t)dt$$

$$= 2\int_{0}^{1}(1-t)dt = \left(t - \frac{1}{2}t^2\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(1-\frac{1}{2}\right) = 1$$



Năng lượng của tín hiệu là:

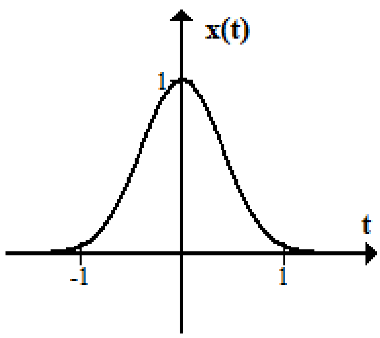
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2 dt = 2\int_{0}^{1}(1-t)^2 dt$$

$$= \frac{-2}{3}(1-t)^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

b) $x(t) = e^{-\pi t^2}$

*Tích phân của tín hiệu là:

$$[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\pi t^2)}dt$$



Đặt $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\pi t^2)}dt$

$$\Rightarrow I^2 = \int e^{-\pi x}\, dx \int e^{-\pi y}\, dy$$

$$= \iint e^{-\pi(x^2+y^2)}dxdy$$

đặt $x = r\cos\varphi$ và $y = r\sin\varphi$

$$\Rightarrow I^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r dr = 2\pi \times \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} dr^2 = -e^{-\pi r^2}\Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow I = 1$$

*Năng lượng của tín hiệu là:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-2\pi t^2)} dt$$

Đặt $M = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-2\pi t^2)} dt$

$$\Rightarrow M^2 = \int e^{-2\pi x^2} dx \int e^{-2\pi y^2} dy$$

$$= \iint e^{-\pi 2(x^2+y^2)} dxdy$$

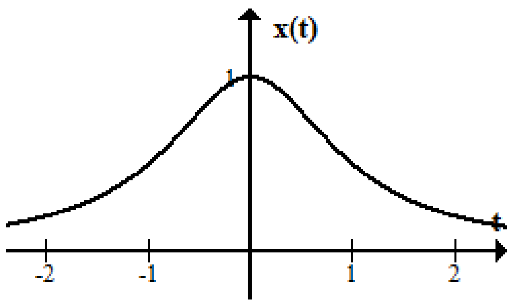
đặt $x = r\cos\varphi$ và $y = r\sin\varphi$

$$\Rightarrow M^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-2\pi r^2} r dr = 2\pi \times \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2\pi r^2} dr^2 = \frac{-1}{2} e^{-2\pi r^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = M = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) $x(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

* Tích phân của tín hiệu là:



$$[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = acrtgt\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

* Năng lượng của tín hiệu là:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

Đặt $t = tgu$

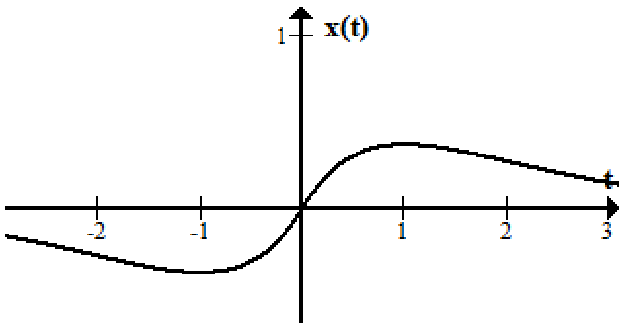
$$\Rightarrow E_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+tg^2u)^2}\frac{1}{\cos^2 u}du$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u \frac{1}{\cos^2 u}du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 udu$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos 2u + 1)du = \frac{1}{4}\left(\sin 2u + 2u\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}(\pi + \pi) = \frac{\pi}{2}$$

d) $x(t) = te^{-|t|}$



* Tích phân của tín hiệu là:

$$[x] = \int_{-\infty}^{0} te^{t}dt + \int_{0}^{\infty} te^{-t}dt$$

$$= \left(te^{t} - e^{t}\right)\Big|_{-\infty}^{0} + \left(te^{-t} + e^{-t}\right)\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= -1 + 1 = 0$$

* Năng lượng của tín hiệu là:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} t^2e^{2t}dt + \int_{0}^{\infty} t^2e^{-2t}dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^2e^{2t} - \frac{1}{2}te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t}\right)\Big|_{-\infty}^{0} - \left(\frac{1}{2}t^2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right)\Big|_{0}^{\infty}$$

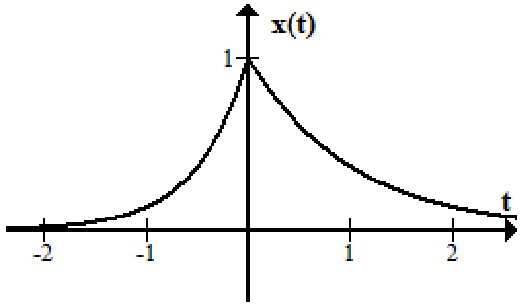
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

e) $x(t) = e^{2t}1(-t) + e^{-t}1(t)$

* Tích phân của tín hiệu là:

$$[x] = \int_{-\infty}^{0} e^{2t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{2t}\Big|_{-\infty}^{0} - e^{-t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$



* Năng lượng của tín hiệu là:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{4t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t}dt$$

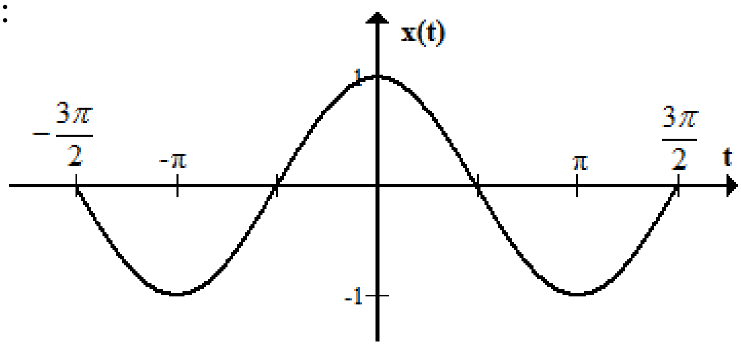
$$= \frac{1}{4}e^{4t}\Big|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

f) $x(t) = \cos t\Pi\left(\frac{t}{3\pi}\right)$

* Tích phân của tín hiệu là:

$$[x] = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t dt$$

$$= \sin t\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 1 = -2$$



* Năng lượng của tín hiệu là:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt$$

$$= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 - \sin 2t)dt$$

$$= \frac{1}{4}(2t + \cos 2t)\Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}(3\pi + 3\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

Bài 1.2 Dòng điện i(t) = I$e^{-\beta t}$ 1(t) chạy qua điện trở R .Hãy tìm :
a)Năng lượng tiêu hao trên điện trở R trong khoảng t(0;∞)
b)Năng lượng tiêu hao trên điện trở R trong khoảng t(0;1/β)

Giải

a)Năng lượng tiêu hao trên điện trở R trong khoảng t(0;∞) là:

$$E = R\int_0^{\infty}\left|i(t)\right|^2 d(t)$$

$$= R\int_0^{\infty}\left|Ie^{-\beta t}\right|^2 d(t)$$

$$= RI^2\int_0^{\infty}\left|e^{-\beta t}\right|^2 d(t)$$

$$= \frac{RI^2}{-2\beta}\left|e^{-2\beta t}\right|\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{RI^2}{-2\beta}(0-1)$$

$$= \frac{RI^2}{2\beta}$$

b)Năng lượng tiêu hao trên điện trở R trong khoảng t(0;1/β) là :

$$E = R\int_0^{1/\beta}\left|i(t)\right|^2 d(t)$$

$$= R\int_0^{1/\beta}\left|Ie^{-\beta t}\right|^2 d(t)$$

$$= RI^2\int_0^{1/\beta}\left|e^{-\beta t}\right|^2 d(t)$$

$$= \frac{RI^2}{-2\beta}\left|e^{-2\beta t}\right|\Big|_0^{1/\beta}$$

$$= \frac{RI^2}{-2\beta}(e^{-2}-1)$$

$$= 0.865\frac{RI^2}{2\beta}$$

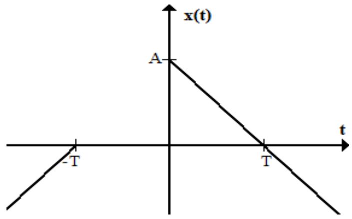
Bài 1.3

Hãy tìm thành phần chẵn , lẻ của các tín hiệu sau đây và chứng minh rằng các thành phần này trực giao , năng lượng của tín hiệu bằng tổng các năng lượng thành phần:

Giải

a)Ta có:

$x(t) = A\,(1-\frac{t}{T})[\,1(t)-1(t-T)\,]$

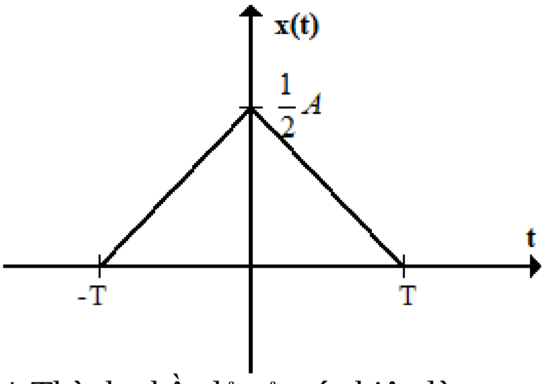


* Thành phần chẵn của tín hiệu là:

$x_{ch} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$

$= \frac{1}{2}(A\,(1-\frac{t}{T})[\,1(t)-1(t-T)] + A\,(1+\frac{t}{T})[\,1(-t)-1(-t-T)]\,)$

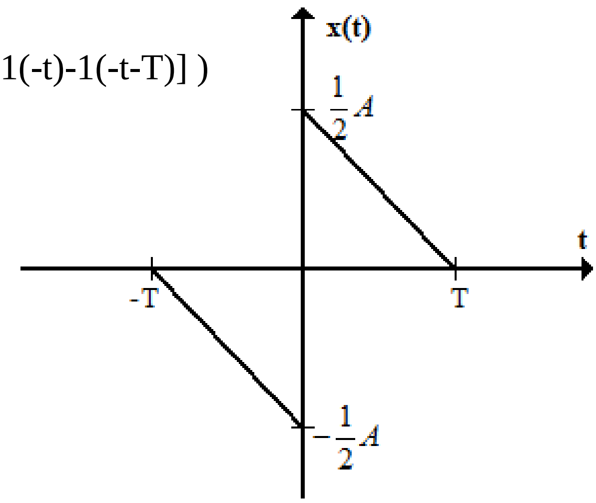
$= \frac{1}{2}A\,\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$



* Thành phần lẻ của tín hiệu là

$x_{le} = \frac{1}{2}(A\,(1-\frac{t}{T})[\,1(t)-1(t-T)] - A\,(1+\frac{t}{T})[\,1(-t)-1(-t-T)]\,)$

$= \frac{1}{2}A\,\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\,\mathrm{sgn}(t)$



Xét tích vô hướng sau

$\int_{-T}^{T} x_{ch}(t)x_{le}^*(t)dt$

$= \frac{1}{4}A^2 \int_{-T}^{T}[(1-\frac{t}{T})^2 - (1+\frac{t}{T})^2]dt = 0$

$\rightarrow$ thành phần này trực giao

Năng lượng của tín hiệu là:

$$E_x = A^2\int_0^T (1-\frac{t}{T})^2 dt = A^2(t-\frac{t^2}{T}+\frac{t^3}{3T})\Big|_0^T = A^2\frac{T}{3}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần chẵn:

$$E_{ch} = \frac{1}{4}A^2\left(\int_{-T}^{0}(1+\frac{t}{T})^2 dt + \int_0^T(1-\frac{t}{T})^2 dt\right) = \frac{1}{4}A^2\frac{2T}{3} = A^2\frac{T}{6}$$

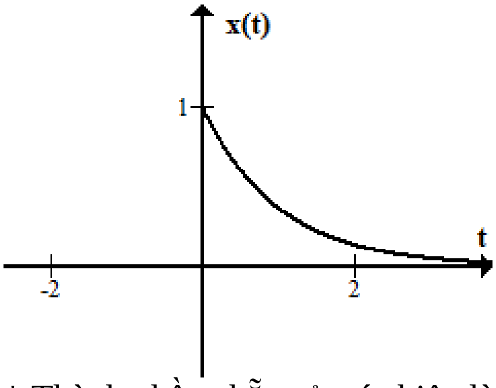
Năng lượng của tín hiệu thành phần lẻ là:

$$E_{le} = \frac{1}{4}A^2\left(\int_{-T}^{0}(1+\frac{t}{T})^2 dt + \int_0^T(1-\frac{t}{T})^2 dt\right) = A^2\frac{T}{6}$$

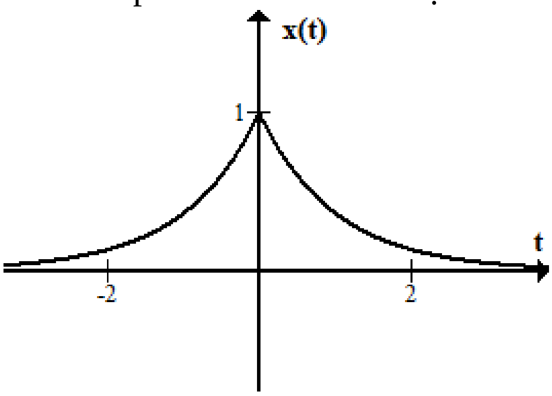
$$\rightarrow E_x = E_{ch} + E_{le} = A^2\frac{T}{3}$$

b) Ta có

$x(t) = e^{-\alpha t}1(t)$

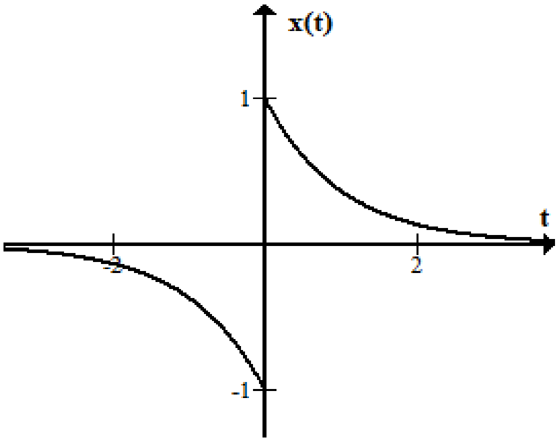


* Thành phần chẵn của tín hiệu là:



$$x_{ch}(t) = \frac{1}{2}[e^{-\alpha t}1(t) + e^{\alpha t}1(-t)] = \frac{1}{2}e^{-\alpha|t|}$$

* Thành phần lẻ của tín hiệu là:



$x_{le}(t) = \frac{1}{2}[e^{-\alpha t}1(t) - e^{\alpha t}1(-t)] = \frac{1}{2}e^{-\alpha|t|}\operatorname{sgn}(t)$

Xét tích vô hướng sau

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{ch}(t)x_{le}*(t)dt = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{-2\alpha t}1(t) - e^{2\alpha t}1(-t)]dt$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha t}dt + \frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t}dt$$

$$= \frac{1}{8\alpha}\left(-e^{2\alpha t}\Big|_{-\infty}^{0} + e^{-2\alpha t}\Big|_{0}^{\infty}\right) = 0$$

$\rightarrow$thành phần này trực giao

Năng lượng của tín hiệu là:

$$E_x = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t}dt$$

$$= -\frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần chẵn:

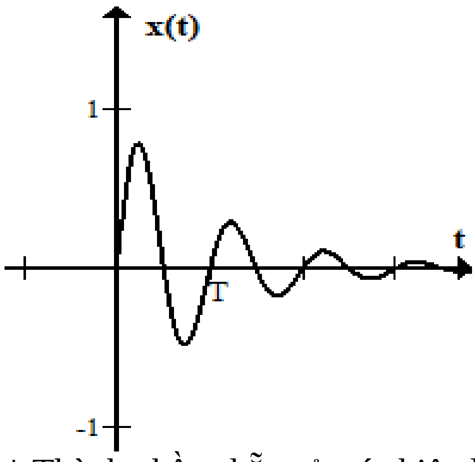
$$E_{ch} = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t}dt\right) = \frac{1}{4\alpha}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần lẻ là:

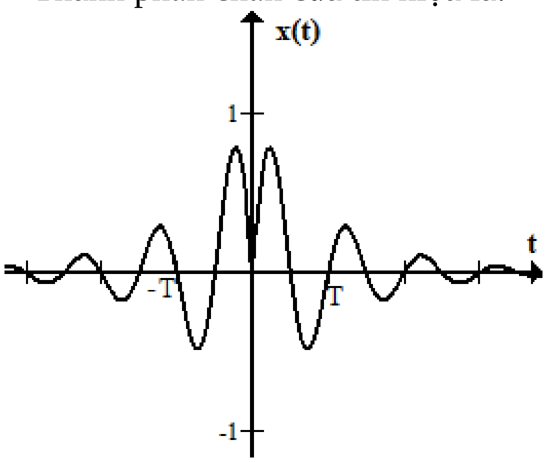
$$E_{le} = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t}dt\right) = \frac{1}{4\alpha}$$

Ta có $E_x = E_{ch} + E_{le} = \frac{1}{2\alpha}$

c) $x(t) = e^{-\alpha t}\sin(\omega t)1(t)$



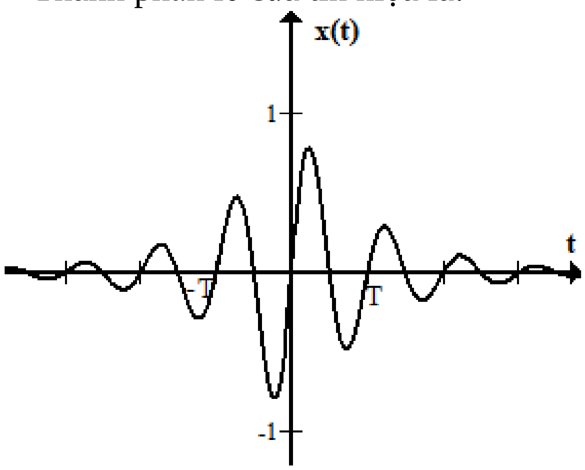
* Thành phần chẵn của tín hiệu là:



$$x_{ch} = \frac{1}{2}[\,e^{-\alpha t}\sin(\omega t)1(t) - e^{\alpha t}\sin(\omega t)1(-t)\,]$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{-\alpha|t|}\sin(\omega t)\mathrm{sgn}(t)$$

* Thành phần lẻ của tín hiệu là:



$$x_{le} = \frac{1}{2}[\,e^{-\alpha t}\sin(\omega t)1(t) + e^{\alpha t}\sin(\omega t)1(-t)\,]$$

$$= \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-\alpha|t|}\sin(\omega t)$$

Xét tích vô hướng sau:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{ch}(t)x_{le}*(t)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t}\sin^2(\omega t)dt - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha t}\sin^2(\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{8}\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t}(1-\cos 2\omega t)dt - \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha t}(1-\cos 2\omega t)dt$$

$$= -\frac{1}{16\alpha}\left(e^{-2\alpha t}\Big|_{0}^{\infty} + e^{2\alpha t}\Big|_{-\infty}^{0} \right) + \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha t}\cos 2\omega t dt - \frac{1}{8}\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t}\cos 2\omega t dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{\alpha}{2(\alpha^2+\omega^2)} - \frac{\alpha}{2(\alpha^2+\omega^2)} \right] = 0$$

$\rightarrow$ thành phần này trực giao

Năng lượng của tín hiệu là:

$$E = \int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t}\sin^2(\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần chẵn:

$$E_{ch} = \frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t}\sin^2(\omega t)dt + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha t}\sin^2(\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{4(\alpha^2+\omega^2)} + \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{4(\alpha^2+\omega^2)}$$

$$= \frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2(\alpha^2+\omega^2)}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần lẻ:

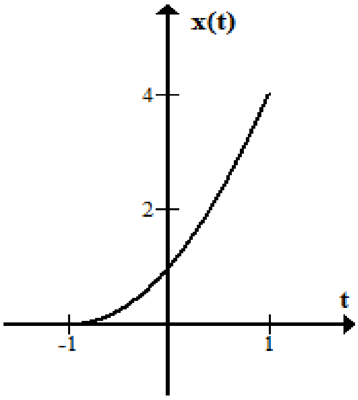
$$E_{le} = \frac{1}{4}\int_{0}^{\infty} e^{-2\alpha t}\sin^2(\omega t)dt + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha t}\sin^2(\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{4(\alpha^2+\omega^2)} + \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{4(\alpha^2+\omega^2)}$$

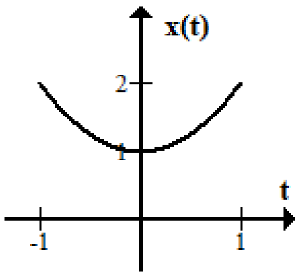
$$= \frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2(\alpha^2+\omega^2)}$$

Ta có $\mathrm{E}_x = \mathrm{E}_{ch} + \mathrm{E}_{le}$

d) $x(t) = (t+1)^2 \prod \frac{t}{2}$

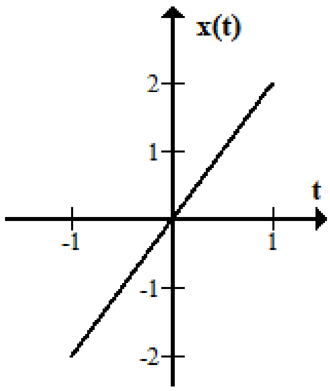


* Thành phần chẵn của tín hiệu là:



$$x_{ch} = \frac{1}{2}\left[(t+1)^2 \prod \frac{t}{2} + (1-t)^2 \prod \frac{-t}{2}\right]$$
$$= (t^2+1) \prod \frac{t}{2}$$

* Thành phần lẻ của tín hiệu là:



$$x_{le} = \frac{1}{2}\left[(t+1)^2 \prod \frac{t}{2} - (1-t)^2 \prod \frac{-t}{2}\right]$$
$$= 2t \prod \frac{t}{2}$$

Xét tích vô hướng sau:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_{ch}(t) x_{le}{}^{*}(t)\,dt$$
$$= \int_{-1}^{1} 2t(t^2+1)\,dt$$
$$= \left(\frac{1}{2}t^4 + t^2\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - 1 = 0$$

$\rightarrow$ thành phần này trực giao

Năng lượng của tín hiệu là:

$$E = \int_{-1}^{1} (t+1)^4 dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^2 + 2t + 1)^2 dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 1) dt$$

$$= \left(\frac{1}{5} t^5 + t^4 + \frac{2}{3} t^3 + 2t^2 + t \right) \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần chẵn:

$$E = \int_{-1}^{1} (t^2 + 1)^2 dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (t^4 + 2t^2 + 1) dt$$

$$= \left(\frac{1}{5} t^5 + \frac{2}{3} t^3 + t \right) \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{56}{15}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần lẻ:

$$E = \int_{-1}^{1} 4t^2 dt$$

$$= \frac{4}{3} t^3 \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

Ta có $E_x \neq E_{ch} + E_{le}$

Bài 1.4. Hãy tìm thành phần chẵn, lẻ của các tín hiệu sau. Trong mỗi trường hợp hãy chứng minh rằng các thành phần đó trực giao và công suất trung bình của mỗi tín hiệu bằng tổng công suất trung bình thành phần.

a) $x(t) = e^{j\omega t}$

b) $x(t) = 1(t)$

c) $x(t) = (1 - e^{-\alpha t})1(t)$

d) $x(t) = \delta\left(t - \frac{1}{2} \right)$

e) $x(t) = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

Giải

a) $x(t) = e^{j\omega t}$

Thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$x_{ch}(t) = \frac{1}{2}[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] = \cos\omega t$$

Thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$x_l(t) = \frac{1}{2}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] = j\sin\omega t$$

Xét tích vô hướng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_{ch} x_l^* dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\omega t(-j\sin\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_0^T (-j\sin\omega t)d(\sin\omega t)$$

$$= -\frac{j}{\omega}\frac{1}{2}\sin^2\omega t\Big|_0^T = 0$$

Vậy hàm trực giao.

Năng lượng của tín hiệu là:

$$p_x = \frac{1}{T}\int_0^T e^{2j\omega t}.dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{2j\omega}e^{2j\omega t}\right]\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{1}{4j\pi}(e^{4j\pi} - 1)$$

$$= \frac{1}{4j\pi}[\cos(4\pi) - 1] = 0$$

Năng lượng thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$p_{x_{ch}} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2T}\int_0^T (1+\cos 2\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2T}\frac{1}{2\omega}(2\omega t + \sin 2\omega t)\Big|_0^T$$

$$= \frac{1}{2}$$

Năng lượng thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$P_{x_l} = -\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt$$

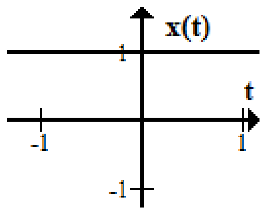
$$= -\frac{1}{2T}\int_0^T (1-\cos 2\omega t)dt$$

$$= -\frac{1}{2T}\frac{1}{2\omega}(2\omega t - \sin 2\omega t)\Big|_0^T$$

$$= -\frac{1}{2}$$

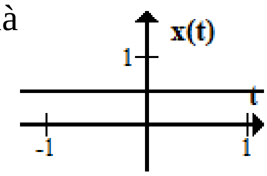
$$p_x = p_{x_{ch}} + p_{x_l}$$

b) $x(t) = 1(t)$



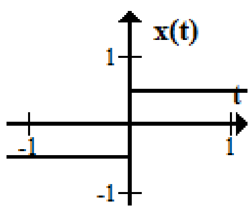
Thành phần chẵn của tín hiệu là

$$x_{ch}(t) = \frac{1}{2}$$



Thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$x_l(t) = \frac{1}{2}[1(t) - 1(-t)]$$



Xét tích vô hướng

$$\int_{t_1}^{t_2} x_{ch} x_l{}^*(t)dt = \frac{1}{4}[1^2(t) - 1^2(-t)] = 0$$

Vậy hàm trực giao.

Năng lượng của tín hiệu là:

$$p_x = \lim_{T\to 0}\frac{1}{2T}\int_0^T 1dt = \frac{1}{2}$$

Năng lượng thành phần chẵn của tín hiệu là:

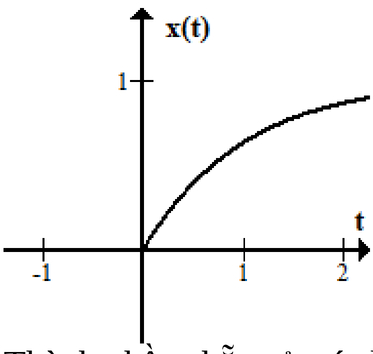
$$p_{x_{ch}} = \lim_{T\to 0}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}$$

Năng lượng thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$p_{x_l} = \lim_{T\to 0}[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{0}\frac{1}{4}dt + \frac{1}{2T}\int_{0}^{T}\frac{1}{4}dt] = \frac{1}{4}$$

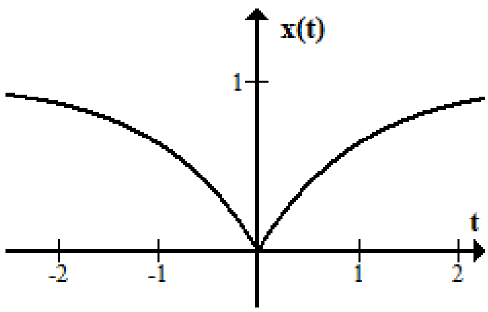
$$p_x = p_{x_{ch}} + p_{x_l}$$

c) $x(t) = (1-e^{-\alpha t})1(t)$



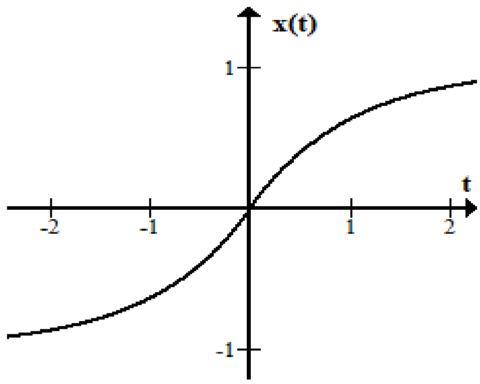
Thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$x_{ch}(t) = \frac{1}{2}(1-e^{-\alpha|t|})$$



Thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$x_{l(t)=}\frac{1}{2}[(1-e^{-\alpha t})1(t)-(1-e^{\alpha t})1(-t)]$$



Năng lượng của tín hiệu là:

$$p_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T (1-e^{-\alpha t})^2 dt$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T (1-2e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t})dt$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[t + \frac{2}{\alpha}e^{-\alpha t} - \frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t}\right]\Bigg|_0^T$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[T + \frac{2}{\alpha}e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha T} - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\right]$$
$$= \frac{1}{2}$$

Năng lượng thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$p_{x_{ch}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}[\int_0^T \frac{1}{4}(1-e^{-\alpha t})^2 dt + \int_{-T}^0 \frac{1}{4}(1-e^{\alpha t})^2 dt]$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{8T}[\int_0^T (1-2e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t})dt + \int_{-T}^0 (1-2e^{\alpha t} + e^{2\alpha t})dt]$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{8T}\left[\left(t + \frac{2}{\alpha}e^{-\alpha t} - \frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t}\right)\Bigg|_0^T + \left(t - \frac{2}{\alpha}e^{\alpha t} + \frac{1}{2\alpha}e^{2\alpha t}\right)\Bigg|_{-T}^0\right]$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{8T}\left[\left(T + \frac{2}{\alpha}e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha T} - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\right) + \left(-\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} + T + \frac{2}{\alpha}e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha T}\right)\right]$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{8T}\left[2T + \frac{4}{\alpha}e^{-\alpha T} - \frac{1}{\alpha}e^{-2\alpha T} - \frac{4}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right]$$
$$= \frac{1}{4}$$

Năng lượng thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$p_{x_l} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\int_0^T \frac{1}{4}(1-e^{-\alpha t})^2 dt + \int_{-T}^0 \frac{1}{4}(1-e^{\alpha t})^2 dt\right]$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{8T}\left[\int_0^T (1-2e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t})dt + \int_{-T}^0 (1-2e^{\alpha t} + e^{2\alpha t})dt\right]$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{8T}\left[\left(t + \frac{2}{\alpha}e^{-\alpha t} - \frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha t}\right)\Bigg|_0^T + \left(t - \frac{2}{\alpha}e^{\alpha t} + \frac{1}{2\alpha}e^{2\alpha t}\right)\Bigg|_{-T}^0\right]$$
$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{8T}\left[\left(T + \frac{2}{\alpha}e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha T} - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\right) + \left(-\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} + T + \frac{2}{\alpha}e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha}e^{-2\alpha T}\right)\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{8T}\left[2T+\frac{4}{\alpha}e^{-\alpha T}-\frac{1}{\alpha}e^{-2\alpha T}-\frac{4}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right]$$

$$=\frac{1}{4}$$

$$p_x = p_{x_{ch}} + p_{x_l}$$

Xét tích vô hướng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_{ch}.x_l dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[-\int_{-T}^{0}(1-e^{\alpha t})^2dt+\int_{0}^{T}(1-e^{-\alpha t})^2dt\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\int_{0}^{T}(1-2e^{-\alpha t}+e^{-2\alpha t})dt-\int_{-T}^{0}(1-2e^{\alpha t}+e^{2\alpha t})dt\right]$$

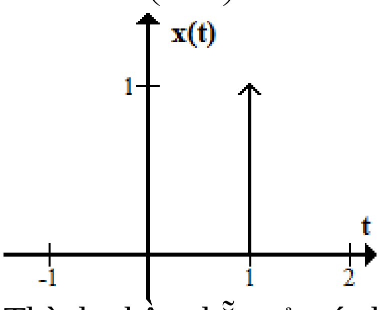
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\left(t+\frac{2}{\alpha}e^{-\alpha t}-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t}\right)\Bigg|_{0}^{T}-\left(t-\frac{2}{\alpha}e^{\alpha t}+\frac{1}{2\alpha}e^{\alpha t}\right)\Bigg|_{-T}^{0}\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\left(T+\frac{2}{\alpha}e^{-\alpha T}-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha T}-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{2\alpha}\right)-\left(-\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{2\alpha}+T+\frac{2}{\alpha}e^{-\alpha T}-\frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha T}\right)\right]$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{4}{\alpha}e^{-\alpha T}-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha T}-\frac{4}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right]=0$$

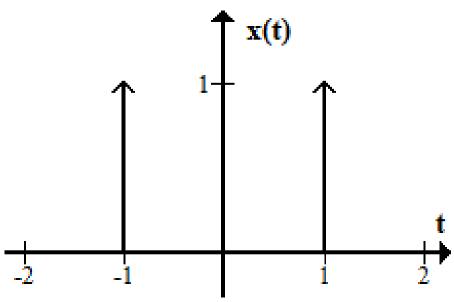
Vậy hàm trực giao.

d) $x(t)=\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)$



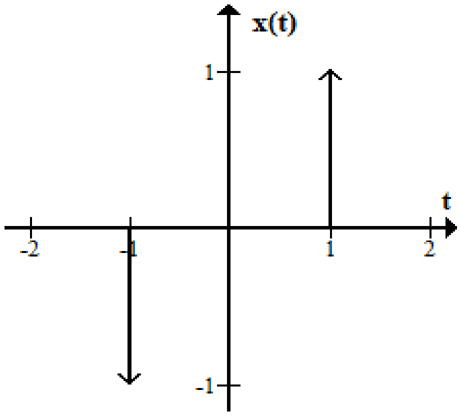
Thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$x_{ch}(t)=\frac{1}{2}\left[\delta\left(t-\frac{1}{2}\right)+\delta\left(-t-\frac{1}{2}\right)\right]$$



Thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$x_l(t) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) - \delta\left(-t - \frac{1}{2}\right)\right]$$



Xét tích vô hướng

$$\int_{t_1}^{t_2} x_{ch}(t)x_l(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{4}\left[\delta^2\left(t - \frac{1}{2}\right) - \delta^2\left(-t - \frac{1}{2}\right)\right] = 0$$

Vậy hàm trực giao.

Năng lượng của tín hiệu là:

$$p_x = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t_1 - t_0}|x(t)|^2 dt = 1$$

Năng lượng thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$p_{x_{ch}} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t_1 - t_0}|x_{ch}(t)|^2 dt$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

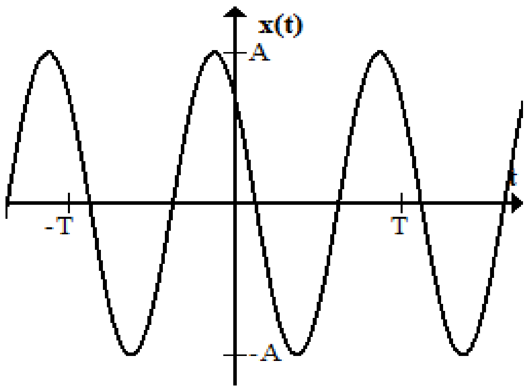
Năng lượng thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$p_{x_l} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t_1 - t_0}|x_l(t)|^2 dt$$

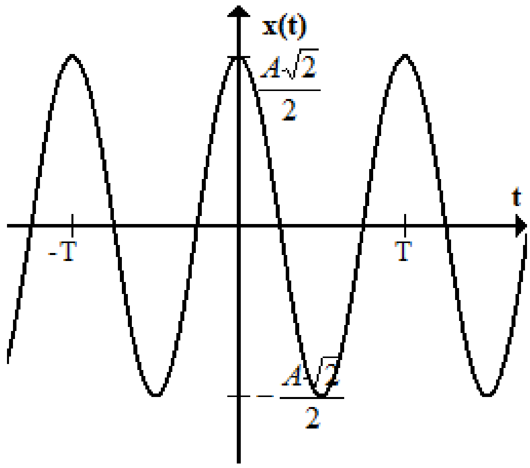
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$p_x = p_{x_{ch}} + p_{x_l}$$

e) $x(t) = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$



Thành phần chẵn của tín hiệu là:

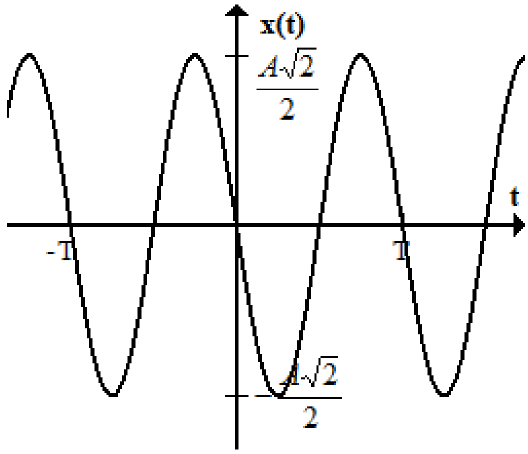


$$x_{ch}(t)=\frac{1}{2}A\left[\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\omega t+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=A\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\omega t)\right]$$

$$=\frac{A\sqrt{2}}{2}\cos(\omega t)$$

Thành phần lẻ của tín hiệu là:



$$x_l(t)=\frac{1}{2}A\left(\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(-\omega t+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{2}A.2.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).\sin(\omega t)$$

$$=\frac{-A\sqrt{2}}{2}\sin(\omega t)$$

Xét tích vô hướng

$$\int_0^T\frac{-A^2}{2}\cos(\omega t).\sin(\omega t)dt$$

$$=\int_0^T\frac{-A^2}{2\omega}.\sin(\omega t).d(\sin\omega t)$$

$$=\frac{-A^2}{2\omega}\left(\frac{1}{2}\sin^2(\omega t)\right)\Bigg|_0^T$$

$$=\frac{-A^2}{4\pi}\frac{1}{2}\sin^2(2\pi)=0$$

Vậy hàm trực giao.

Năng lượng của tín hiệu là:

$$p_x=\frac{1}{T}\int_0^T A^2\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$=\frac{1}{T}A^2\int_0^T\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(2\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]dt$$

$$=\frac{A^2}{2T}\frac{1}{2\omega}\left[2\omega t+\sin\left(2\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]\Bigg|_0^T$$

$$=\frac{A^2}{4\omega T}[2\omega T+1-1]=\frac{A^2}{2}$$

Năng lượng thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$p_{x_{ch}} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{A\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cos^2(\omega t)dt$$

$$= \frac{A^2}{2T}\int_0^T \frac{1}{2}(1+\cos 2\omega t)dt$$

$$= \frac{A^2}{4T}\left[\frac{1}{2\omega}(2\omega t + \sin 2\omega t)\right]_0^T$$

$$= \frac{A^2}{8\omega T}(2\omega T) = \frac{A^2}{4}$$

Năng lượng thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$p_{x_l} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{-A\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sin^2(\omega t)dt$$

$$= \frac{A^2}{4T}\int_0^T (1-\cos 2\omega t)dt$$

$$= \frac{A^2}{8\omega T}(2\omega t - \sin 2\omega t)\Big|_0^T = \frac{A^2}{8\omega T}(2\omega T) = \frac{A^2}{4}$$

$$p_x = p_{x_{ch}} + p_{x_l}$$

Bài 1.5. Cho tín hiệu $x(t) = [1+\cos\omega t]\cos(\omega t + \varphi)$
a)Hãy tìm thành phần một chiều, thành phần xoay chiều và chứng mình rằng chứng trực giao.
b) Hãy tìm thành phần chẵn, lẻ và chứng minh chúng trực giao.

Giải

a) có

$$x(t) = [1+\cos\omega t]\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\left(\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\varphi) + \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + \varphi)$$

* Vậy thành phần một chiều là:

$$\overline{x} = \frac{1}{2}\cos\varphi$$

* Thành phần xoay chiều là:

$$\tilde{x} = \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + \varphi)$$

* Xét tích vô hướng sau

$$\int_0^T \frac{1}{2}\cos\varphi\left[\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\omega t + \varphi)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \left[\cos\varphi\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}\cos\varphi\cos(2\omega t + \varphi)\right]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T \left[\frac{1}{2}\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\cos(\omega t + 2\varphi) + \frac{1}{4}\cos(2\omega t) + \frac{1}{4}\cos(2\omega t + 2\varphi)\right]dt$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{1}{\omega}\sin(\omega t + 2\varphi) + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t) + \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\varphi)\right]\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\omega}\sin(2\pi + 2\varphi) + \frac{1}{2\omega}\sin(4\pi + 2\varphi) - \frac{1}{\omega}\sin(2\varphi) - \frac{1}{2\omega}\sin(2\varphi)\right]$$

$$= 0$$

Vậy 2 thành phần trực giao.

b) Thành phần chẵn là:

$$x_{ch} = \frac{1}{2}[1 + \cos\omega t]\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}[1 + \cos\omega t]\cos(-\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}[1 + \cos\omega t].[\cos(\omega t + \varphi) + \cos(-\omega t + \varphi)]$$

$$= [1 + \cos\omega t]\cos\varphi\cos(\omega t)$$

* Thành phần lẻ là:

$$x_l = \frac{1}{2}[1 + \cos\omega t]\cos(\omega t + \varphi) - \frac{1}{2}[1 + \cos\omega t]\cos(-\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}[1+\cos\omega t].[\cos(\omega t+\varphi)-\cos(-\omega t+\varphi)]$$
$$= -[1+\cos\omega t]\sin\varphi\sin\omega t$$

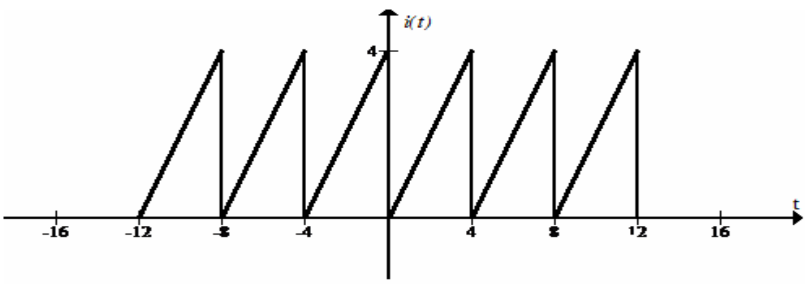
* Xét tích vô hướng

$$\int_0^T x_{ch}(t)x_l(t)dt$$
$$= -\int_0^T [1+\cos\omega t]^2 \cos\varphi\cos(\omega t)\sin\varphi\sin(\omega t)dt$$
$$= -\frac{1}{\omega}\int_0^T [1+\cos\omega t]^2 \cos\varphi\cos(\omega t)\sin\varphi d(\cos\omega t)$$
$$= -\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\omega}\int_0^T \left[1+2\cos\omega t+\cos^2\omega t\right]\cos\omega t d(\cos\omega t)$$
$$= -\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\omega}\left[\frac{1}{2}\cos^2\omega t+\frac{2}{3}\cos^3\omega t\frac{1}{4}\cos^4\omega t\right]_0^T$$
$$= -\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\omega}\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right]=0$$

Vậy 2 thành phần trực giao,

Bài 1.6. Tín hiệu điện áp răng cưa được cho trên hình B1.6 được đưa qua điện trở R. Hãy tính công suất trung bình của i(t) và công suất trung bình của thành phần một chiều và xoay chiều trên R.

Biết $I = 10mA$; $R = 1k\Omega$



Giải

*Công suất trung bình của i(t) trên R là:

$$P = R\frac{1}{4}\int_0^4 \left(I - \frac{I}{4}t \right)^2 dt$$

$$= -R\frac{4I^2}{4}\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}t\right)^3 \Bigg|_0^4 = \frac{1}{3}RI^2$$

$$= \frac{1}{3}10^3 \times 10^{-4} = \frac{1}{30}(w)$$

Thành phần một chiều là:

$$\bar{i} = \langle i \rangle = \frac{1}{4}\int_0^4 \left(I - \frac{I}{4}t \right) dt$$

$$= -4 \times \frac{I}{4}\int_0^4 \left(1 - \frac{1}{4}t \right) d\left(1 - \frac{1}{4}t \right)$$

$$= -I \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}t \right)^2 \Bigg|_0^4 = \frac{I}{2}$$

* Công suất một chiều là:

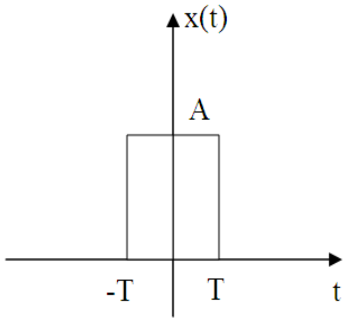
$$P_{\bar{i}} = \frac{I^2}{4}R = \frac{10^{-4} \times 10^3}{4} = \frac{1}{40}(w)$$

* Công xuất xoay chiều là:

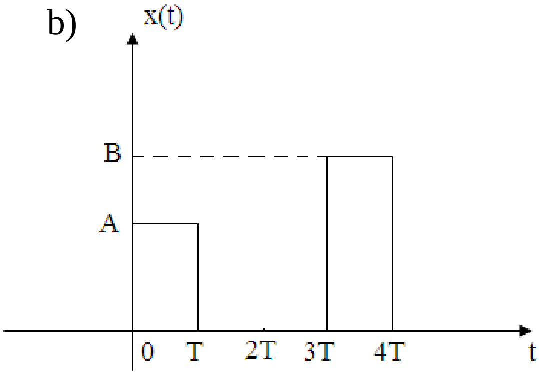
$$P_{\tilde{i}} = P - P_{\bar{i}} = \frac{I^2}{3}R - \frac{I^2}{4}R = \frac{I^2}{12}R = \frac{1}{120}(w)$$

Bài 2.1. Hãy xác định hàm tự tương quan

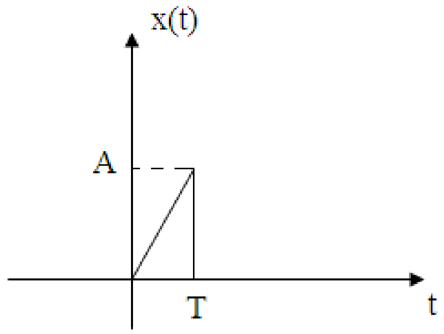
a)



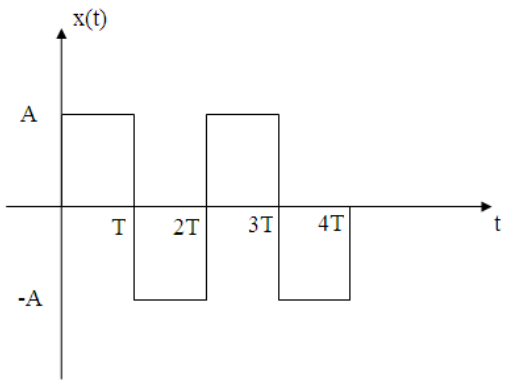
b)



c)



d)



Giải

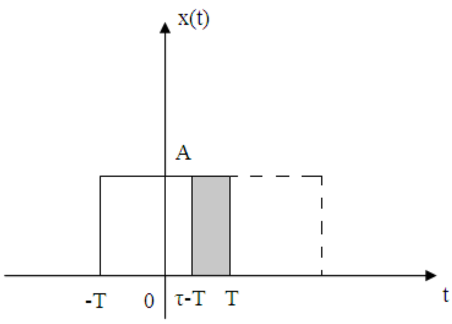
a)

$$x(t) = A\prod\left(\frac{t}{2T}\right)$$

Hàm tự tương quan của tín hiệu :

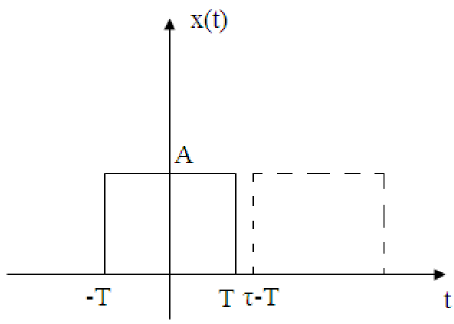
$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

x(t) là hàm thực $\Rightarrow \varphi_{xx}(\tau)$ là hàm chẵn



$* \ 0 \leq \tau < 2T$

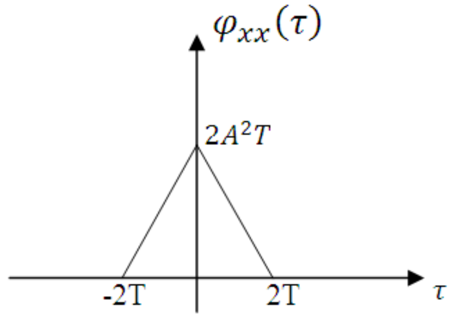
$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau-T}^{T} A^2\,dt = A^2(2T-\tau)$$



$* \ \tau \geq 2T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = 0$$

Vậy $\varphi_{xx}(\tau) = \begin{cases} A^2(2T - |\tau|)\ ; & |\tau| \le 2T \\ 0 & ;\ |\tau| \ge 2T \end{cases}$

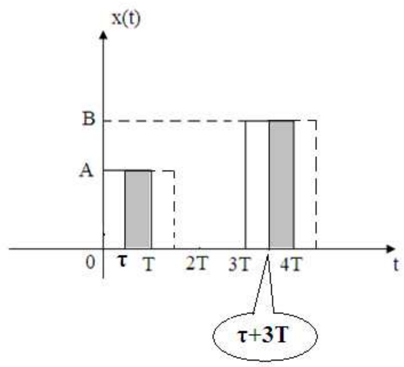


b)

$$x(t) = A\prod\frac{t-\frac{T}{2}}{T} + B\prod\frac{t-\frac{7T}{2}}{T}$$

Hàm tự tương quan của tín hiệu :

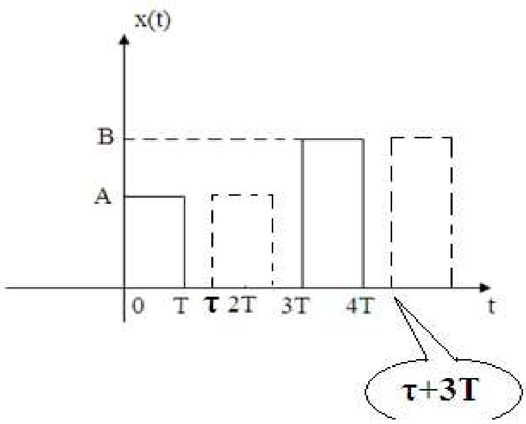
$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$



$* \ 0 \le \tau < T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{T} A^2dt + \int_{\tau+3T}^{4T} B^2dt = (A^2 + B^2)(T-\tau)$$

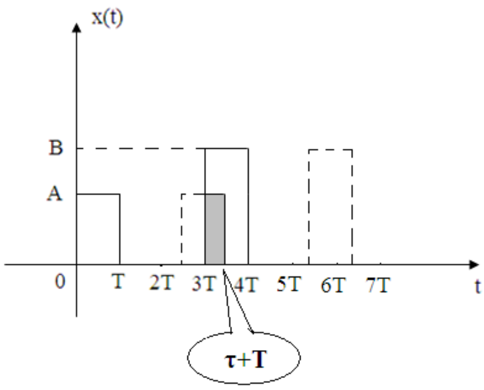
$* \ T \le \tau < 2T$



$$\varphi_{xx}(\tau) = 0$$

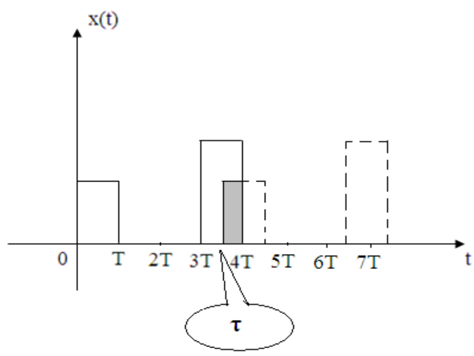
$* \ 2T \le \tau < 3T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{3T}^{\tau+T} AB\,dt = AB(\tau - 2T)$$



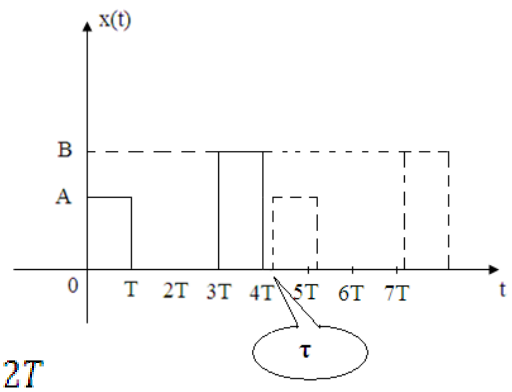
$* \, 3T \le \tau < 4T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{4T} AB\,dt = AB(4T - \tau)$$

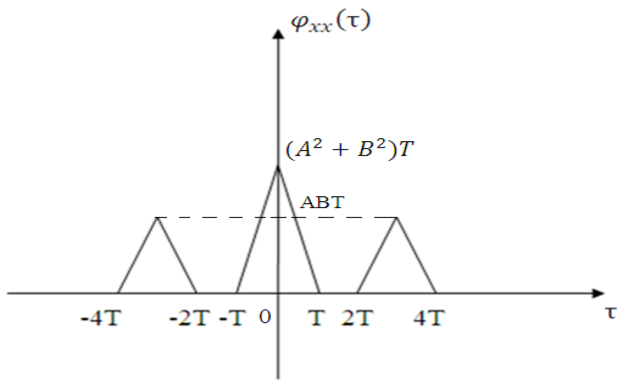


$* \, \tau \ge 4T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = 0$$



$$\text{Vậy} \quad \varphi_{xx}(\tau) = \begin{cases} 0; & T \le |\tau| < 2T \\ 0; & |\tau| \ge 4T \\ (A^2 + B^2)(T - |\tau|)\,; & |\tau| < T \\ AB(\tau - 2T); & 2T \le |\tau| < 3T \\ AB(4T - \tau); & 3T \le |\tau| < 4T \end{cases}$$

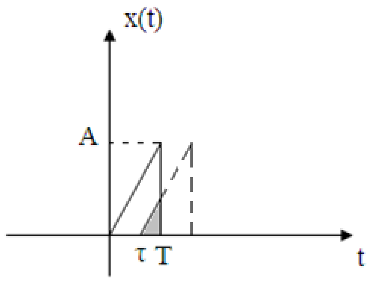


c)

$$x(t) = \frac{A}{T}t[1(t) - 1(t-T)]$$

Hàm tự tương quan của tín hiệu :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

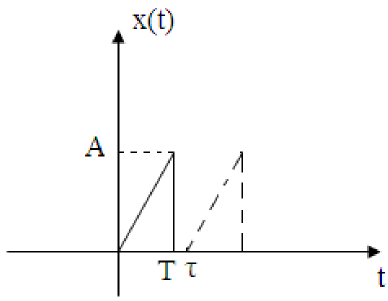


❖ $0 \le \tau < T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{T} \left(\frac{A}{T}t\right)\left(\frac{A}{T}(t-\tau)\right)dt$$

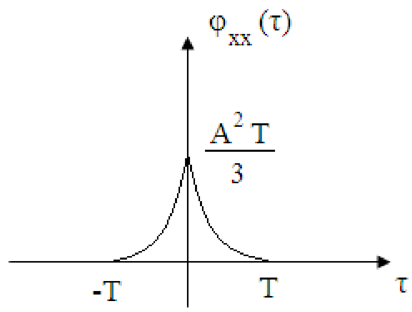
$$= \frac{A^2}{T^2}\left(\frac{T^3}{3} - \frac{\tau T^2}{2} - \frac{\tau^3}{6}\right)$$

❖ $\tau \ge T$



$$\varphi_{xx}(\tau) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_{xx}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{A^2}{T^2}\left(\dfrac{T^3}{3} - \dfrac{|\tau|\, T^2}{2} - \dfrac{|\tau^3|}{6}\right); & |\tau| < T \\ 0 \qquad ; & |\tau| \ge T \end{cases}$$



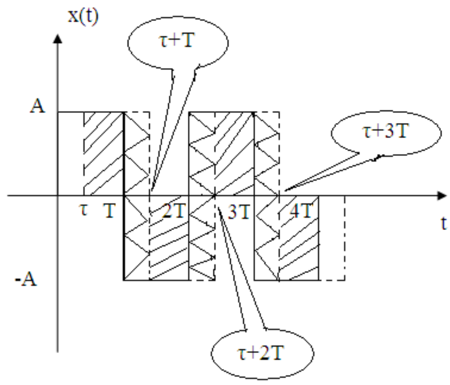
d)

$$x(t) = A\prod\frac{t+\frac{T}{2}}{T} - A\prod\frac{t+\frac{3T}{2}}{T} + A\prod\frac{t+\frac{5T}{2}}{T} - A\prod\frac{t+\frac{7T}{2}}{T}$$

Hàm tự tương quan của tín hiệu :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

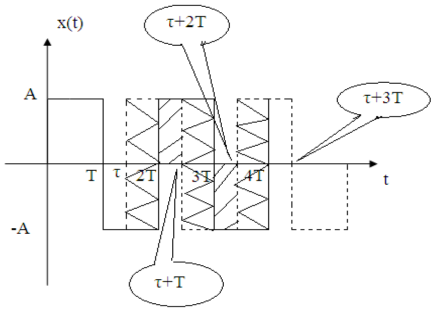
❖ $0 \le \tau < T$



$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{T} A^2 dt - \int_{T}^{\tau+T} A^2 dt + \int_{\tau+T}^{2T} A^2 dt - \int_{2T}^{\tau+2T} A^2 dt + \int_{\tau+2T}^{3T} A^2 dt - \int_{3T}^{\tau+3T} A^2 dt$$

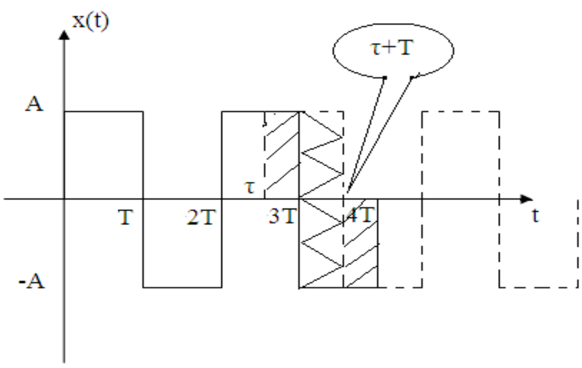
$$+ \int_{\tau+3T}^{4T} A^2 dt = 4A^2(T-\tau) - 3A^2\tau = A^2(4T - 7\tau)$$

❖ $T \le \tau < 2T$



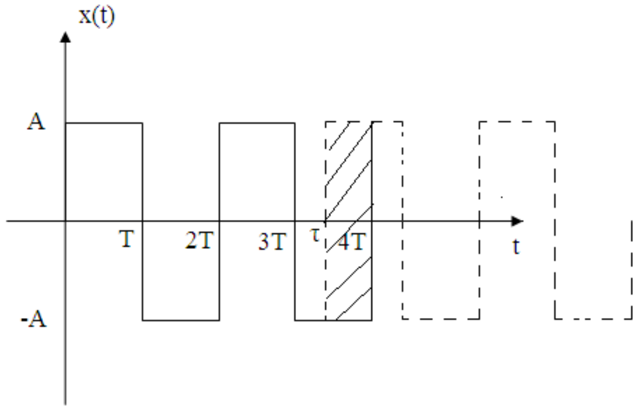
$$\varphi_{xx}(\tau) = -\int_{\tau}^{2T} A^2 dt + \int_{2T}^{\tau+T} A^2 dt - \int_{\tau+T}^{3T} A^2 dt + \int_{3T}^{\tau+2T} A^2 dt - \int_{\tau+2T}^{4T} A^2 dt = A^2(-8T + 5\tau)$$

❖ $2T \le \tau < 3T$



$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{3T} A^2\,dt - \int_{3T}^{\tau+T} A^2\,dt + \int_{\tau+T}^{4T} A^2\,dt = A^2(8T - 3\tau)$$

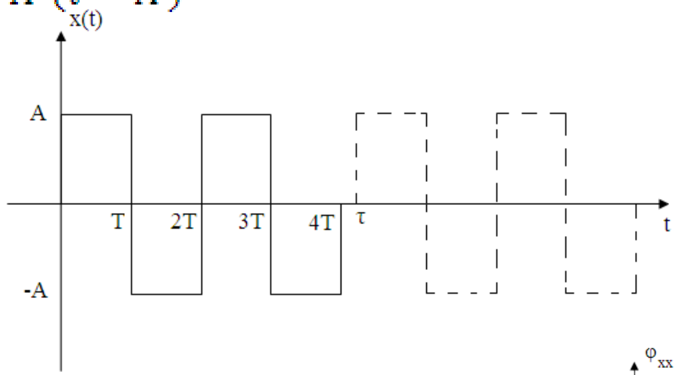
❖ $3T \leq \tau < 4T$



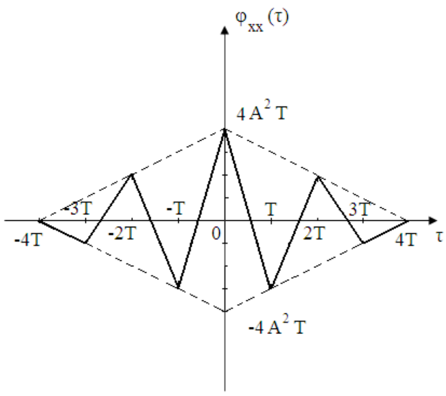
$$\varphi_{XX}(\tau) = -\int_{\tau} A^2\,dt \quad = A^2(\tau - 4T)$$

❖ $\tau \geq 4T$

$$\varphi_{XX}(\tau) = 0$$



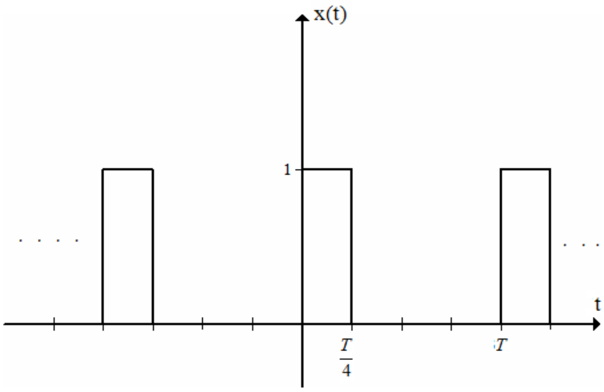
$$\varphi_{XX}(\tau) = \begin{cases} A^2(4T - 7|\tau|) & ;\ |\tau| < T \\ A^2(-8T + 5|\tau|) & ;\ T \leq |\tau| < 2T \\ A^2(8T - 3|\tau|) & ;\ 2T \leq |\tau| < 3T \\ A^2(|\tau| - 4T) & ;\ 3T \leq |\tau| < 4T \\ 0 & ;\ |\tau| \geq 4T \end{cases}$$



Bài 2.2. Hãy xác định và vẽ hàm tự tương quan của tín hiệu tuần hoàn trên hình 2.2. Hãy cho biết hàm tự tương quan của hàm này trong trường hợp tín hiệu bị dịch chuyển một đoạn t_o>0

Giải

Ta có x(t)=$\prod\left(\frac{t-\frac{T}{8}}{\frac{T}{4}}\right)$



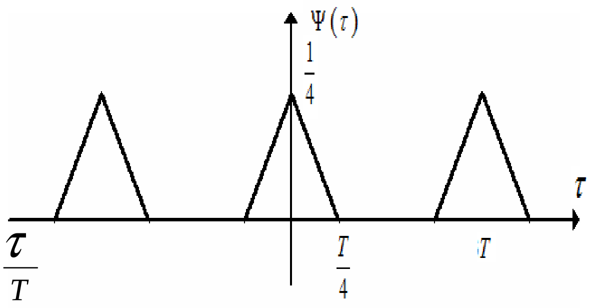
Vậy hàm tự tương quan của x(t) là

$$\Psi(\tau)=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{T}x(t)x^{*}(t-\tau)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{\frac{T}{4}}1^{2}dt=\frac{1}{T}\left(\frac{T}{4}-\tau\right)=\frac{1}{4}-\frac{\tau}{T}$$

*Khi tín hiệu bị dịch chuyển một đoạn t_o>0

$$\Rightarrow x(t)=\prod\left(\frac{t-\frac{T}{8}-t_0}{\frac{T}{4}}\right)$$



$$\Psi(\tau)=\frac{1}{T}\int_{\tau}^{T}x(t)x^{*}(t-\tau)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{\tau+t_0}^{\frac{T}{4}+t_0}1^{2}dt=\frac{1}{T}\left(\frac{T}{4}+t_0-(\tau+t_0)\right)=\frac{1}{4}-\frac{\tau}{T}$$

Bài 2.3. Tìm hàm tự tương quan của các tín hiệu sau:

a) $x(t)=A$; A là hằng số.

b) $x(t)=A\left(1-e^{-\alpha t}\right)$

c) $x(t)=\delta(t)$

Giải

a) Hàm tự tương quan của tín hiệu là:

$$\Psi_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int A^2 dt$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}A^2 T = \frac{A^2}{2}$$

b) Hàm tự tương quan của tín hiệu là:

$$\Psi_{xx} = \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^T A^2\left(1-e^{-\alpha t}\right)\left(1-\alpha^{-\alpha(t-\tau)}\right)dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2T}A^2\int^T\left(1-e^{-\alpha(t-\tau)}-e^{-\alpha t}+e^{-\alpha(2t-\tau}\right)dt$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2T}A^2\left[T+e^{\alpha\tau}\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha t}-1\right)+\frac{1}{\alpha}\left(e^{-\alpha t}-1\right)+\frac{e^{\alpha\tau}}{2\alpha}\left(e^{-2\alpha T}-1\right)\right]$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\frac{A}{2T}\left(T+\frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}+\frac{e^{\alpha\tau}}{2\alpha}\right)$$

$$= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\frac{A^2}{2}+\frac{1}{T}\left(\frac{e^{\alpha\tau}}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}+\frac{e^{\alpha\tau}}{2\alpha}\right)\right)$$

$$= \frac{A^2}{2}$$

c) Hàm tự tương quan của tín hiệu là:

$$\Psi_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\delta(t-\tau)dt$$

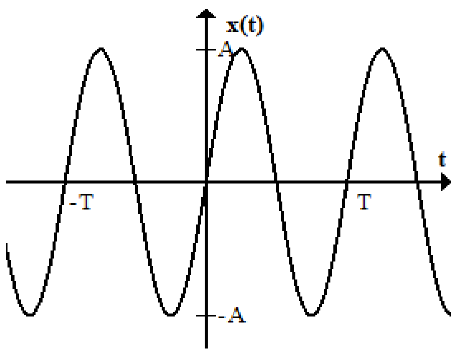
$$= \delta(\tau)*\delta(\tau) = \delta(\tau)$$

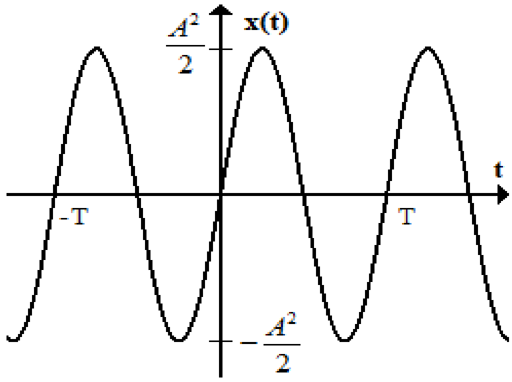
Bài 2.4 Tìm hàm tự tương quan của tín hiệu điều hòa:

$$x(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$$

Giải

Ta có: $x(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$





Hàm tự tương quan của tín hiệu là:

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{T}\int_0^T \left[A^2 \sin(\omega t + \varphi)\sin[\omega(t-\tau)+\varphi]\right]dt$$

$$= \frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\left[\cos\omega\tau - \cos(2\omega - \omega\tau + 2\varphi)\right]dt$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left[t\cos\omega\tau - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\varphi - \omega\tau)\right]\Bigg|_0^T$$

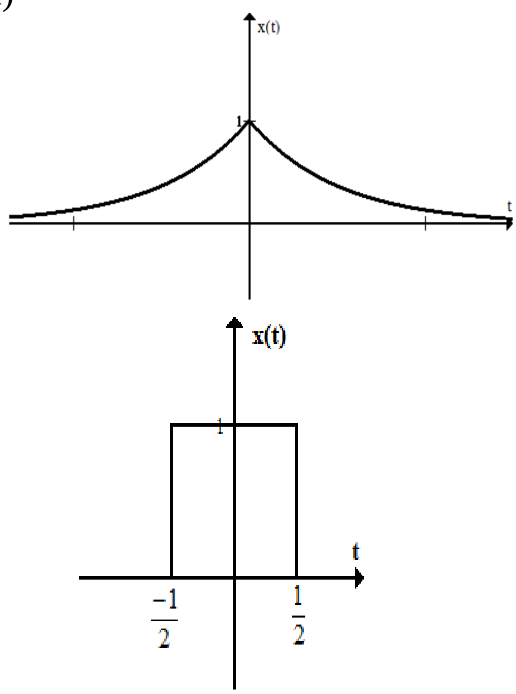
$$= \frac{A^2}{2T}\left[T\cos\omega\tau - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega T + 2\varphi - \omega\tau) + \frac{1}{2\omega}\sin(2\varphi - \omega\tau)\right]$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left\{T\cos\omega\tau - \frac{1}{2\omega}\left[\sin 2\omega T\cos(2\varphi-\omega\tau) - \cos 2\omega T\sin(2\varphi - \omega\tau) + \sin(2\varphi - \omega\tau)\right]\right\}$$

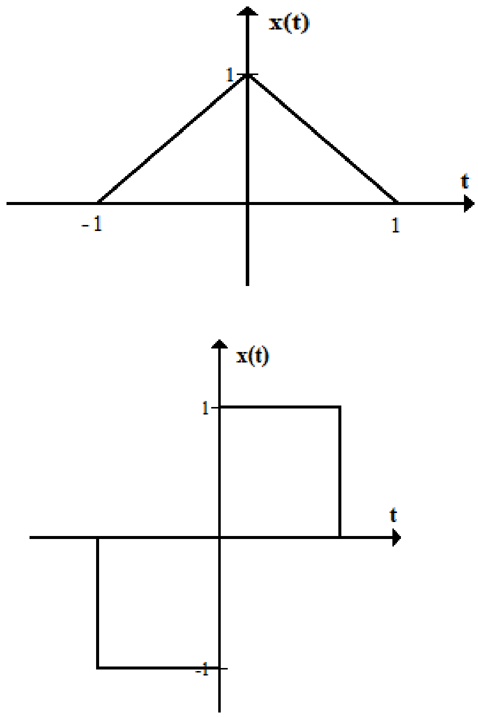
$$= \frac{A^2}{2T}T\cos\omega\tau = \frac{A^2\cos\omega\tau}{2}$$

Bài 2.5. hãy xác định và vẽ hàm tường quan của các hàm sau:

a)



b)



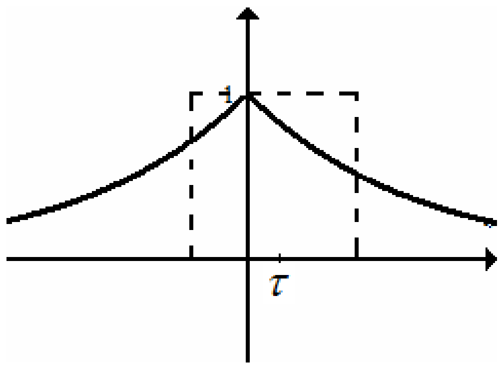
Giải

a) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\varphi_{ui} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2^{*}(t-\tau)dt$$

Ta có x_1 và x_2 là hàm chẵn

* Xét $0 < \tau \le \frac{1}{2}$



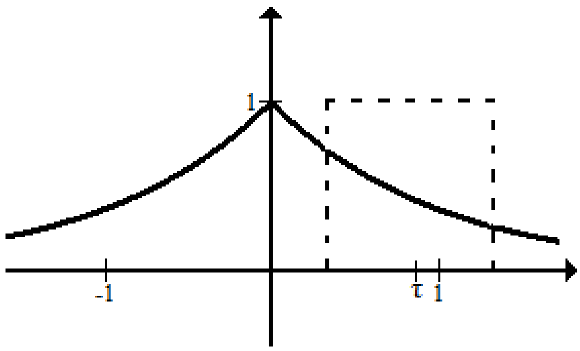
$$\varphi = \int_{\tau-\frac{1}{2}}^{0} e^{t} dt + \int_{0}^{\tau+\frac{1}{2}} e^{-t} dt$$

$$= e^{t}\Big|_{\tau-\frac{1}{2}}^{0} - e^{-t}\Big|_{0}^{\tau+\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - e^{\tau-\frac{1}{2}} - e^{-\tau-\frac{1}{2}} + 1$$

$$= 2 - \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{\tau} + e^{-\tau}\right)$$

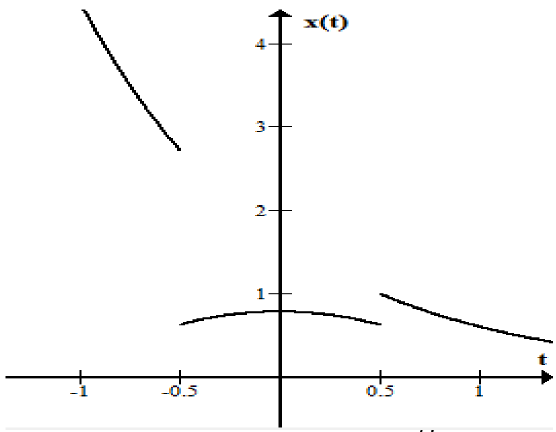
* Xét $\tau > \frac{1}{2}$



$$\varphi = \int_{\tau-\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-t} dt$$

$$= -e^{-t}\Big|_{\tau-\frac{1}{2}}^{\infty} = e^{-\tau+\frac{1}{2}}$$

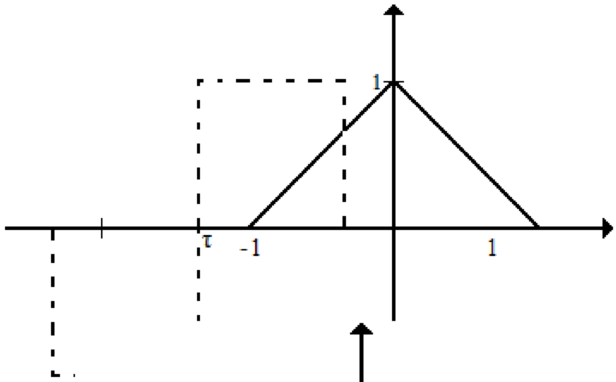
$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} 2 - \frac{1}{\sqrt{e}}\left(e^{\tau} + e^{-\tau}\right) & |\tau| < \frac{1}{2} \\ e^{-\tau+\frac{1}{2}} & |\tau| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



b) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\varphi_{ui} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^{*}(t-\tau)dt$$

* Xét $-2 < \tau < -1$

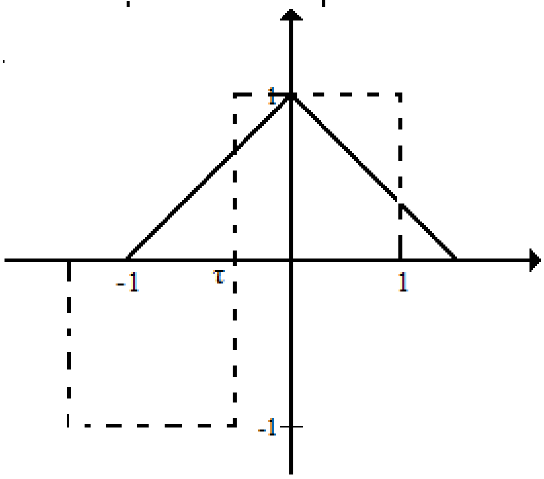


$$\varphi_{12} = \int_{-1}^{\tau+1}(t+1)dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\Bigg|_{-1}^{\tau+1} = \frac{1}{2}(\tau+1)^2 + \tau + 1 - \frac{1}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{2}\tau^2 + 2\tau + 2$$

* Xét $-1 < \tau < 0$

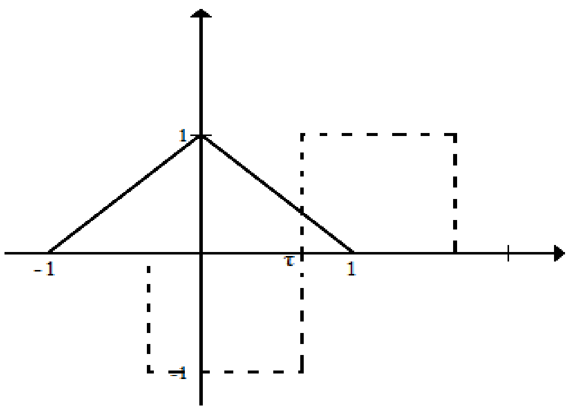


$$\varphi_{12} = -\int_{-1}^{\tau}(t+1)dt + \int_{\tau}^{0}(t+1)dt + \int_{0}^{\tau+1}(1-t)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\tau^2 - \tau + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}\tau^2 - \tau + \tau + 1 - \frac{1}{2}(\tau+1)^2$$

$$= -\frac{3}{2}\tau^2 - 2\tau$$

* Xét $0 < \tau < 1$



$$\varphi_{12} = -\int_{\tau-1}^{0}(t+1)dt - \int_{0}^{\tau}(1-t)dt + \int_{\tau}^{1}(1-t)dt$$

$$= \frac{1}{2}(\tau-1)^2 + \tau - 1 + \frac{1}{2}\tau^2 - \tau + 1 - \frac{1}{2} - \tau + \frac{1}{2}\tau^2$$

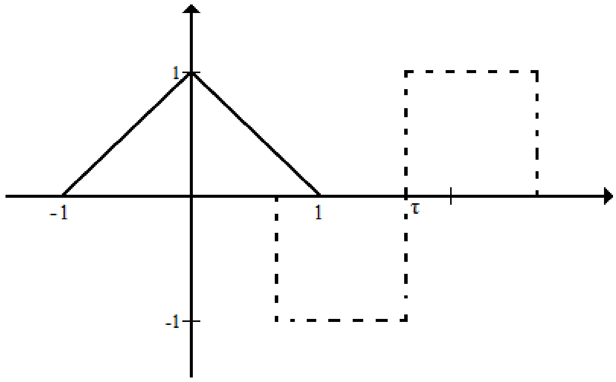
$$= \frac{3}{2}\tau^2 - 2\tau$$

* Xét $1 < \tau < 2$

$$\varphi_{12} = -\int_{\tau-1}^{1} (1-t)dt$$

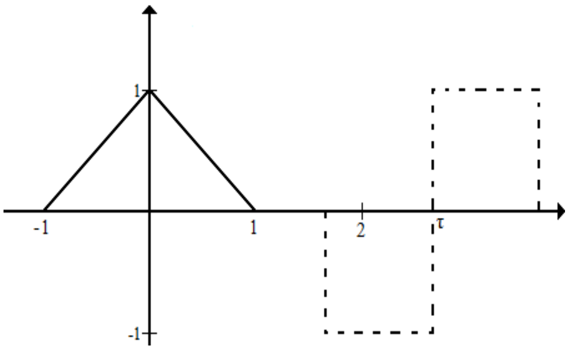
$$= -1 + \frac{1}{2} + \tau - 1 - \frac{1}{2}(\tau-1)^2$$

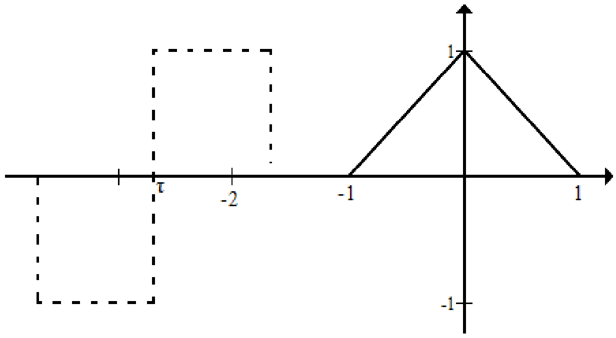
$$= -\frac{1}{2}\tau^2 + 2\tau - 2$$



* Xét $|\tau| > 2$

$\varphi = 0$





Vậy hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} \frac{1}{2}\tau^2 + 2\tau + 2 & -2 < \tau < -1 \\ -\frac{3}{2}\tau^2 - 2\tau & -1 < \tau < 0 \\ \frac{3}{2}\tau^2 - 2\tau & 0 < \tau < 1 \\ -\frac{1}{2}\tau^2 + 2\tau - 2 & 1 < \tau < 2 \\ 0 & |\tau| > 2 \end{cases}$$

Bài 2.6. Tìm hàm tương quan giữa điện áp u(t) và dòng điện i(t) sau:

a) $u(t) = U$ $\quad U$ là hằng số

$i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_1)$

d) $u(t) = U\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$

$i(t) = I\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$

b) $u(t) = U_m\cos(\omega_0 t+\varphi_1)$

$i(t) = I_m\cos(\omega_0 t+\varphi_1)$

c) $u(t) = U_m\cos(\omega_0 t+\varphi_1)$

$i(t) = I_m\cos(2\omega_0 t+\varphi_1)$

e) $u(t) = Usa\omega_0 t$

$i(t) = 2I\delta(t)+I\delta(t-T)+I\delta(t+T)$

f) $u(t) = U\Pi\left(\dfrac{t-T}{2T}\right)$

$i(t) = I\delta(t)$

Giải

a) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\Psi_{ui}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)i^*(t-\tau)dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T UI_m\sin(\omega_0 t-\omega_0\tau+\varphi_1)dt$$
$$=-\frac{UI_m}{T\omega_0}\cos(\omega_0 t-\omega_0\tau+\varphi_1)\Big|_0^T$$
$$=-\frac{UI_m}{T\omega_0}\left[\cos(\omega_0 T-\omega_0\tau+\varphi_1)-\cos(-\omega_0\tau+\varphi_1)\right]$$
$$=0$$

b) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\Psi_{ui}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)i^*(t-\tau)dt$$
$$=\frac{1}{T}\int_0^T U_m\cos(\omega_0 t+\varphi_u)I_m\cos(\omega_0 t-\omega_0\tau+\varphi_i)dt$$
$$=\frac{U_mI_m}{2T}\int_0^T\left[\cos(\omega_0\tau+\varphi_u-\varphi_i)+\cos(2\omega_0 t-\omega_0\tau+\varphi_u+\varphi_i)\right]dt$$
$$=\frac{U_mI_m}{2T}\left[t\cos(\omega_0\tau+\varphi_u-\varphi_i)+\frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 t-\omega_0\tau+\varphi_u+\varphi_i)\right]\Bigg|_0^T$$
$$=\frac{U_mI_m}{2T}\left[T\cos(\omega_0\tau+\varphi_u-\varphi_i)+\frac{1}{2\omega_0}\sin(2\omega_0 T-\omega_0\tau+\varphi_u+\varphi_i)-\frac{1}{2\omega_0}\sin(-\omega_0\tau+\varphi_u+\varphi_i)\right]$$
$$=\frac{U_mI_m}{2}\cos(\omega_0\tau+\varphi_u-\varphi_i)$$

c) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\Psi_{ui}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_u) I_m \cos(2\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + \varphi_i)dt$$

$$= \frac{U_m I_m}{2T}\int_0^T \left[\cos(-\omega_0 t - 2\omega_0\tau + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(3\omega_0 t - 2\omega_0\tau + \varphi_u - \varphi_i)\right]dt$$

$$= \frac{U_m I_m}{2T}\left[-\frac{1}{\omega_0}\sin(-\omega_0 t - 2\omega_0\tau + \varphi_u + \varphi_i) + \frac{1}{3\omega_0}\sin(3\omega_0 t - 2\omega_0\tau + \varphi_u - \varphi_i)\right]\Bigg|_0^T$$

$$= \frac{U_m I_m}{2T}\begin{bmatrix} -\frac{1}{\omega_0}\sin(-\omega_0 T - 2\omega_0\tau + \varphi_u + \varphi_i) + \frac{1}{\omega_0}\sin(-2\omega_0\tau + \varphi_u + \varphi_i) \\ +\frac{1}{3\omega_0}\sin(3\omega_0 T - 2\omega_0\tau + \varphi_u - \varphi_i) - \frac{1}{3\omega_0}\sin(-2\omega_0\tau + \varphi_u - \varphi_i) \end{bmatrix} = 0$$

d) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\varphi_{ui} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) i^*(t-\tau)dt$$

Có $u(t)$ và $i(t)$ là hàm chẵn

Xét $0 \le \tau \le \frac{T}{2}$

$$\Rightarrow \varphi_{ui} = \int_{\tau - \frac{T}{2}}^{\tau + \frac{T}{2}} UIdt$$

$$= UI\left(\tau + \frac{T}{2} - \tau + \frac{T}{2}\right) = UIT$$

Xét $\frac{T}{2} < \tau \le \frac{3T}{2}$

$$\Rightarrow \varphi_{ui} = \int_{\tau - \frac{T}{2}}^{T} UIdt$$

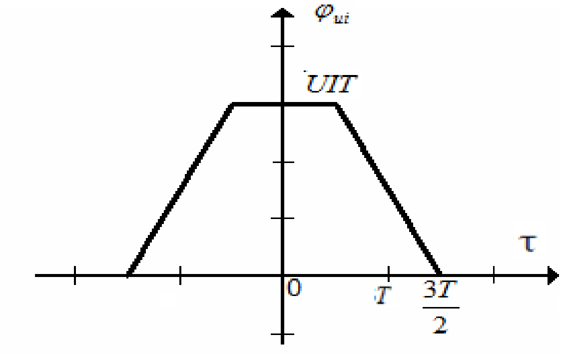
$$= UI\left(T - \tau + \frac{T}{2}\right) = UI\left(\frac{3T}{2} - \tau\right)$$

Xét $\tau > \frac{3T}{2}$

$$\Rightarrow \varphi_{ui} = 0$$

Vậy ta có hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\varphi_{ui} = \begin{cases} UIT & \text{với} \quad 0 \le \tau < \dfrac{T}{2} \\ UI\left(\dfrac{3T}{2} - |\tau|\right) & \text{với} \quad \dfrac{T}{2} \le \tau \le \dfrac{3T}{2} \\ 0 & \text{với} \quad \tau > \dfrac{3T}{2} \end{cases}$$



e) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\Psi_{ui}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)i(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} USa(\omega_0 t)[2I\delta(t) + I\delta(t-T) + I\delta(t+t)]dt$$

$$= UI\int_{-\infty}^{\infty} Sa(\omega_0 t)[2\delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t+t)]dt$$

$$= UISa(\omega_0 \tau) * [2\delta(\tau) + \delta(\tau - T) + \delta(\tau + T)]$$

$$= UI[Sa(\omega_0 \tau) * 2\delta(\tau) + Sa(\omega_0 \tau) * \delta(\tau - T) + Sa(\omega_0 \tau) * \delta(\tau + T)]$$

$$= UI[2Sa(\omega_0 \tau) + Sa\omega_0(\tau - T) + Sa\omega_0(\tau + T)]$$

f) Hàm tương quan của tín hiệu là:

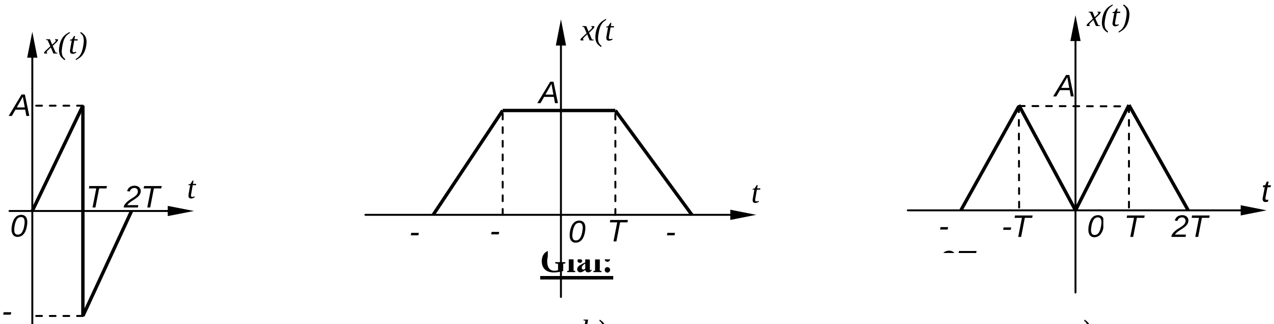
$$\Psi_{ui}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)i(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} U\Pi\left(\frac{t-T}{2T}\right) I\delta(t)dt$$

$$= UI\Pi\left(\frac{\tau - T}{2T}\right) * \delta(\tau)$$

$$= UI\Pi\left(\frac{\tau - T}{2T}\right)$$

Bài 3.1: *Hãy xác định phổ của các tín hiệu trên hình B. 3.1.*



Giải:

có dạng

a) b) c)

Hình B.3.1

$$\begin{cases} \quad T & : 0 < t < T \\ \frac{A}{T}t - 2A & : T < t < 2T \\ 0 & : t < 0; t > 2T \end{cases}$$

Theo định nghĩa:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

vậy phổ của tín hiệu x(t) là

$$X(\omega) = \frac{A}{T}\int_0^T t\, e^{-j\omega t} dt + \frac{A}{T}\int_T^{2T} t\, e^{-j\omega t} dt - 2A\int_T^{2T} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{A}{T}\left[-\frac{te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2}\right]_0^T + \frac{A}{T}\left[-\frac{te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2}\right]_T^{2T} - 2A\left[-\frac{je^{-j\omega t}}{\omega}\right]_T^{2T}$$

$$= \frac{A}{T}\left[-\frac{Te^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{(j\omega)^2} + \frac{1}{(j\omega)^2}\right] + \frac{A}{T}\left[-\frac{2Te^{-j\omega 2T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega 2T}}{(j\omega)^2} + \frac{Te^{-j\omega T}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega T}}{(j\omega)^2}\right]$$

$$-2A\frac{j}{\omega}[e^{-j\omega 2T} - e^{-j\omega T}]$$

$$= \frac{A}{T}\frac{1}{(j\omega)^2} - \frac{2A}{T}\frac{Te^{-j\omega 2T}}{j\omega} - \frac{A}{T}\frac{e^{-j\omega 2T}}{(j\omega)^2} - \frac{2Aje^{-j\omega 2T}}{\omega} + \frac{2Aje^{-j\omega T}}{\omega}$$

$$= Ae^{-j\omega T}\left[\frac{e^{j\omega T}}{T(j\omega)^2} - \frac{2e^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{T(j\omega)^2} - \frac{2je^{-j\omega T}}{\omega} + \frac{2j}{\omega}\right]$$

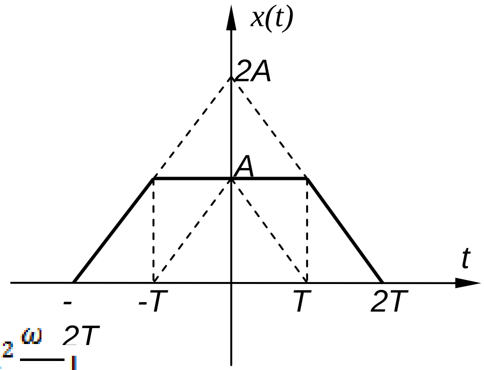
$$= Ae^{-j\omega T}\left[-\frac{e^{j\omega T}}{T\omega^2} + \frac{2je^{-j\omega T}}{\omega} + \frac{e^{-j\omega T}}{T\omega^2} - \frac{2je^{-j\omega T}}{\omega} + \frac{2j}{\omega}\right]$$

$$= Ae^{-j\omega T}\left[\frac{e^{-j\omega T}-e^{j\omega T}}{\omega^2 T}+\frac{2j}{\omega}\right] = Ae^{-j\omega T}\left[\frac{-2j\sin\omega T}{\omega^2 T}+\frac{2j}{\omega}\right]$$

$$= \frac{j2Ae^{-j\omega T}}{\omega}\left[-\frac{\sin\omega T}{\omega T}+1\right] = \frac{j2Ae^{-j\omega T}}{\omega}[1-Sa\omega t]$$

b)

Tín hiệu x(t) *có dạng*



$$x(t) = 2A\bigwedge\left(\frac{t}{2T}\right) - A\bigwedge\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\bigwedge\left(\frac{t}{2T}\right) \leftrightarrow 2TSa^2\,\omega T \Rightarrow 2A\bigwedge\left(\frac{t}{2T}\right) \leftrightarrow 4ATSa^2\omega T$$

$$\bigwedge\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow TSa^2\frac{\omega T}{2} \Rightarrow A\bigwedge\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow ATSa^2\frac{\omega T}{2}$$

Vậy phổ của tín hiệu x(t) *là:*

$$X(\omega) = 4ATSa^2\omega T - ATSa^2\frac{\omega T}{2} = AT\left[4Sa^2\omega T + Sa^2\frac{\omega}{2}\right]$$

$$= AT\left[4\left(\frac{e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}}{2j\omega T}\right)^2 - 4\left(\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}}-e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{j\omega T}\right)^2\right]$$

$$= AT\left[4\left(\frac{e^{2j\omega T}-2+e^{-2j\omega T}}{(2j\omega T)^2}\right) - \left(\frac{e^{j\omega T}-2+e^{-j\omega T}}{(j\omega T)^2}\right)\right]$$

$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2}\left[e^{2j\omega T}+e^{-2j\omega T}-e^{j\omega T}-e^{-j\omega T}\right]$$

$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2}\left[\left(e^{2j\omega T}-e^{j\omega T}\right)+\left(e^{-2j\omega T}-e^{-j\omega T}\right)\right]$$

$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2}\left[e^{\frac{j3\omega T}{2}}\left(e^{\frac{j\omega T}{2}}-e^{\frac{-j\omega T}{2}}\right).e^{\frac{-j3\omega T}{2}}\left(e^{\frac{-j\omega T}{2}}-e^{\frac{j\omega T}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2}\left[\left(e^{\frac{j\omega T}{2}}-e^{\frac{-j\omega T}{2}}\right).\left(e^{\frac{j3\omega T}{2}}-e^{\frac{-j3\omega T}{2}}\right)\right]$$

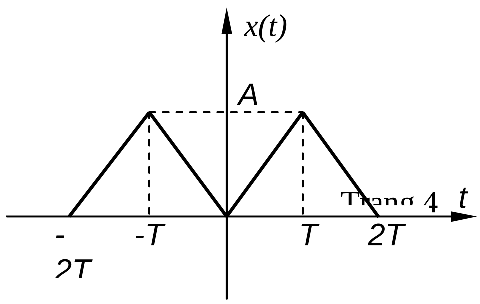
$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2}\left[2j\sin\frac{\omega T}{2}.2j\sin\frac{3\omega T}{2}\right]$$

$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2}.(2j)^2.\frac{\omega T}{2}.\frac{3\omega T}{2}\left[\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right).\left(\frac{\sin\frac{3\omega T}{2}}{\frac{3\omega T}{2}}\right)\right]$$

$$= 3ATSa\frac{\omega T}{2}.Sa\frac{3\omega T}{2}$$

c)

Tín hiệu x(t) *có dạng*



$$x(t) = A\bigwedge\left(\frac{t+T}{T}\right) + A\bigwedge\left(\frac{t-T}{T}\right)$$

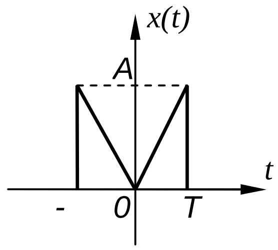
Vậy phổ của tín hiệu x(t) *là:*

$$X(\omega) = ATSa^2\frac{\omega T}{2}e^{j\omega T} + ATSa^2\frac{\omega T}{2}e^{-j\omega T}$$

$$= ATSa^2\frac{\omega T}{2}\left[e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right] = 2ATSa^2\frac{\omega T}{2}\cos\omega T$$

Bài 3.2: *Hãy xác định phổ của tín hiệu* x(t) *trên hình B.3.2 bằng các cách sau:*

a) *Trực tiếp từ định nghĩa*
b) *Từ phổ xung vuông và xung tam giác.*
c) *Áp dụng định lý vi phân trong miền tần số.*



Hình B.3.2

Giải:

a)

Tín hiệu x(t) *có dạng*

$$\begin{cases} \dfrac{A}{T}t & : 0 < t < T \\ -\dfrac{A}{T}t & : -T < t < 0 \\ 0 & : t < -T; t > T \end{cases}$$

Theo định nghĩa ta có:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}dt = -\frac{A}{T}\int_{-T}^{0} t\,e^{-j\omega t}dt + \frac{A}{T}\int_{0}^{T} t\,e^{-j\omega t}dt$$

$$= -\frac{A}{T}\left[\frac{-te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2}\right]_{-T}^{0} + \frac{A}{T}\left[\frac{-te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2}\right]_{0}^{T}$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{1}{(j\omega)^2} + \frac{Te^{j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{j\omega T}}{(j\omega)^2}\right] + \frac{A}{T}\left[-\frac{Te^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{(j\omega)^2} + \frac{1}{(j\omega)^2}\right]$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{2}{(j\omega)^2} + \frac{T}{j\omega}\left(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right) - \frac{1}{(j\omega)^2}\left(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right)\right]$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{T}{j\omega}2j\sin\omega t - \frac{1}{(j\omega)^2}\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T} - 2\right)\right]$$

$$= \frac{A}{T}\left[2T^2\left(\frac{\sin\omega t}{\omega t}\right) - \frac{2}{(j\omega)^2}(\cos\omega t - 1)\right]$$

$$= \frac{A}{T}\left[2T^2 Sa\omega t + \frac{4}{(j\omega)^2} sin^2 \frac{\omega t}{2}\right] = \frac{A}{T}\left[2T^2 Sa\omega t - \frac{4}{\omega^2} . \frac{sin^2 \frac{\omega t}{2}}{\left(\frac{\omega t}{2}\right)^2} . \frac{\omega t^2}{4}\right]$$

$$= \frac{A}{T}\left[2T^2 Sa\omega t + T^2 Sa^2 \frac{\omega t}{2}\right] = AT\left[2Sa\omega t - Sa^2 \frac{\omega t}{2}\right]$$

b) x(t) có dạng:

$$x(t) = A\prod\left(\frac{t}{2T}\right) - A\bigwedge\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$A\prod\left(\frac{t}{2T}\right) \to 2TASa\omega t$$

$$A\bigwedge\left(\frac{t}{T}\right) \to TASa^2 \frac{\omega t}{2}$$

Vậy phổ của tín hiệu x(t) là: X(ω) $= AT\left[2Sa\,\omega t - Sa^2 \frac{\omega t}{2}\right]$

c)

tín hiệu x(t) có dạng:

$$x(t) = \frac{At}{T}\prod\left(\frac{t - T/2}{T}\right) - \frac{At}{T}\prod\left(\frac{t + T/2}{T}\right)$$

$$= \frac{A}{T}\left[t\prod\left(\frac{t - T/2}{T}\right) - t\prod\left(\frac{t + T/2}{T}\right)\right]$$

$$\prod\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \to TSa\left(\frac{\omega T}{2}\right)e^{\frac{-j\omega T}{2}} = T\left[\frac{e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{\frac{-j\omega T}{2}}}{2j\frac{\omega T}{2}}\right]e^{\frac{-j\omega T}{2}} = \frac{T}{j\omega T}\left[1 - e^{-j\omega T}\right]$$

Vậy

$$t\prod\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \to T\left[\frac{j\omega T^2 e^{-j\omega T} - T(1 - e^{-j\omega T})}{\omega^2 T^2}\right] = T\left[\frac{je^{-j\omega T}}{\omega} - \frac{1 - e^{-j\omega T}}{\omega^2 T}\right]$$

$$= \frac{Tje^{-j\omega T}}{\omega} - \frac{1 - e^{-j\omega T}}{\omega^2}$$

$$t\prod\left(\frac{t + T/2}{T}\right) \to \frac{jTe^{j\omega T}}{\omega} - \frac{e^{j\omega T} - 1}{\omega^2}$$

Vậy phổ tín hiệu x(t) là

$$X(\omega) = \frac{A}{T}\left[\frac{Tje^{-j\omega T}}{\omega} - \frac{1 - e^{-j\omega T}}{\omega^2} - \frac{jTe^{j\omega T}}{\omega} + \frac{e^{j\omega T} - 1}{\omega^2}\right]$$

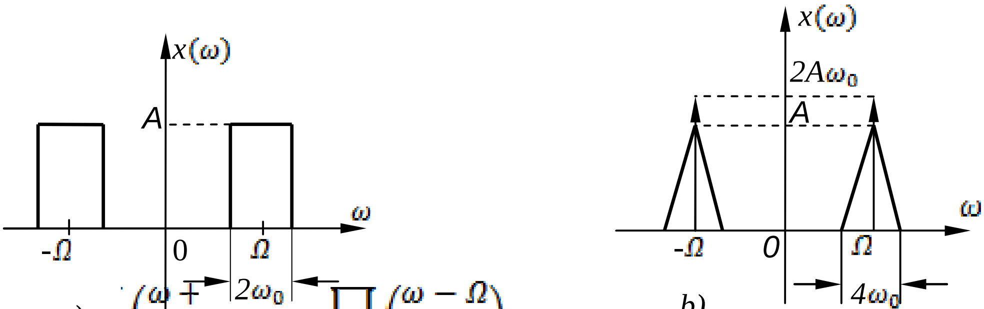
$$= \frac{A}{T}\left[\frac{jT}{\omega}\left(e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}\right) + \frac{1}{\omega^2}\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T} - 2\right)\right]$$

$$= \frac{A}{T}\left[\frac{jT}{\omega}(-2j\sin\omega T) + \frac{1}{\omega^2}(2\cos\omega T - 2)\right]$$

$$= \frac{2A}{T}\left[\frac{\omega T.T}{\omega}.\frac{\sin\omega T}{\omega T} - \frac{\sin^2\frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}.\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2.\frac{1}{\omega^2}\right] = \frac{2A}{T}\left[T^2 Sa\omega T - \frac{1}{2}T^2 Sa^2\frac{\omega T}{2}\right]$$

$$= AT\left[2Sa\omega T - Sa^2\frac{\omega T}{2}\right]$$

Bài 3.3: *Áp dụng định lý điều chế để tìm quá trình thời gian của các tín hiệu có phổ trên hình B.3.3a,b.*



a)

$X(\omega) =$ *a)* $\left(\frac{\omega+}{2\omega_0}\right.$ $\prod\left(\frac{\omega-\Omega}{2\omega_0 T}\right)$

$$\frac{\pi}{\omega_0}\prod\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) \to Sa\omega_0 t$$

Hình B.3.3

Vậy

$$\prod\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) \to \frac{\omega_0}{\pi}Sa\omega_0 t$$

$$A\prod\left(\frac{\omega+\Omega}{2\omega_0}\right) \to \frac{A\omega_0}{\pi}Sa\omega_0 t.e^{-j\Omega t}$$

$$A\prod\left(\frac{\omega-\Omega}{2\omega_0}\right) \to \frac{A\omega_0}{\pi}Sa\omega_0 t.e^{j\Omega t}$$

tín hiệu x(t) *của phổ* $X(\omega)$ *là:*

$$x(t) = \frac{A\omega_0}{\pi}Sa\omega_0 t.e^{-j\Omega t} + \frac{A\omega_0}{\pi}Sa\omega_0 t.e^{j\Omega t} = \frac{A\omega_0}{\pi}Sa\omega_0 t[e^{-j\Omega t} + e^{j\Omega t}]$$

$$= \frac{2A\omega_0}{\pi}Sa\omega_0 t.\cos\Omega t$$

b)

$$X(\omega) = A\bigwedge\left(\frac{\omega+\Omega}{2\omega_0}\right) + 2\omega_0 A\delta(\omega+\Omega) + A\bigwedge\left(\frac{\omega-\Omega}{2\omega_0}\right) + 2\omega_0 A\delta(\omega-\Omega)$$

$$A\bigwedge\left(\frac{\omega+\Omega}{2\omega_0}\right) \to \frac{A\omega_0}{\pi}Sa^2\omega_0 t.e^{-j\Omega t}$$

$$A\bigwedge\left(\frac{\omega-\Omega}{2\omega_0}\right)\rightarrow\frac{A\omega_0}{\pi}Sa^2\omega_0 t.e^{j\Omega t}$$

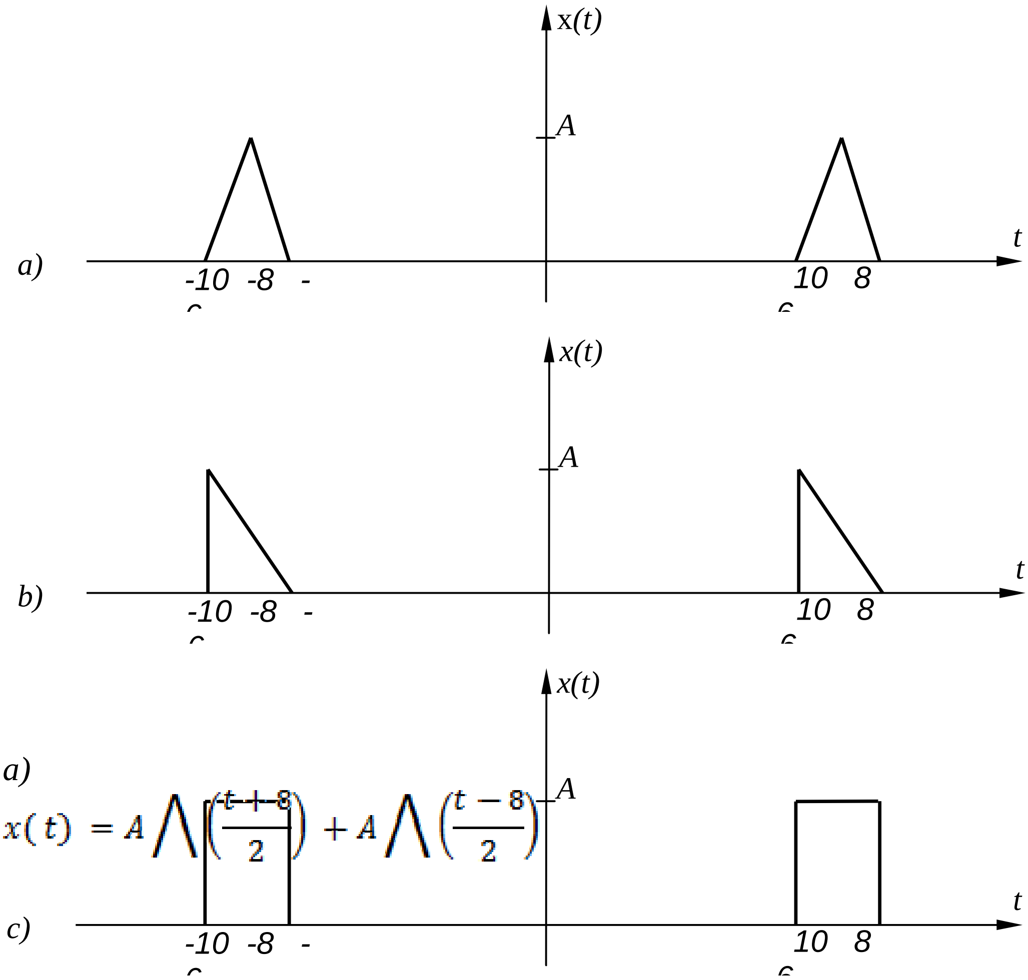
$$2\omega_0 A\delta(\omega+\Omega)\rightarrow 2\omega_0 Ae^{-j\Omega t}.\frac{1}{2\pi}=\frac{A\omega_0}{\pi}e^{-j\Omega t}$$

$$2\omega_0 A\delta(\omega-\Omega)\rightarrow 2\omega_0 Ae^{j\Omega t}.\frac{1}{2\pi}=\frac{A\omega_0}{\pi}e^{j\Omega t}$$

$$x(t)=\frac{A\omega_0}{\pi}Sa^2\omega_0 t(e^{j\Omega t}+e^{-j\Omega t})+\frac{A\omega_0}{\pi}(e^{j\Omega t}+e^{-j\Omega t})$$

$$=\frac{A\omega_0}{\pi}(e^{j\Omega t}+e^{-j\Omega t})(1+Sa^2\omega_0 t)=\frac{2A\omega_0}{\pi}\cos\Omega t.(1+Sa^2\omega_0 t)$$

Bài 3.4: *Áp dụng định lý dịch chuyển trong miền thời gian để tìm phổ của các tín hiệu trên hình B.3.4a,b,c.*



Hình B.3.4

a)

$$x(t)=A\bigwedge\left(\frac{t+8}{2}\right)+A\bigwedge\left(\frac{t-8}{2}\right)$$

$$A\bigwedge\left(\frac{t+8}{2}\right)\rightarrow 2Sa^2$$

Vậy $X(\omega)$ của tín hiệu dịch chuyển trong miền thời gian trên là

$$X(\omega)=2ASa^2\omega(e^{j8\omega}+e^{-j8\omega})=2ASa^2\omega.2\cos 8\omega=4ASa^2\omega.\cos 8\omega$$

b)

$$\begin{cases} A\left(-\frac{3}{2}-\frac{t}{4}\right) & : -10 < t < -6 \\ 0 & : t < -10; t > 10; -6 < t < 6 \\ A\left(\frac{5}{2}-\frac{t}{4}\right) & : 6 < t < 10 \end{cases}$$

Theo định nghĩa

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

$$X(\omega) = A\left[\int_{6}^{10}\left(\frac{5}{2}-\frac{t}{4}\right)e^{-j\omega t}dt - \int_{-10}^{-6}\left(\frac{3}{2}+\frac{t}{4}\right)e^{-j\omega t}dt\right]$$

$$= A\left[\int_{6}^{10}\frac{5}{2}e^{-j\omega t}dt - \int_{6}^{10}\frac{t}{4}e^{-j\omega t}dt - \int_{-10}^{-6}\frac{3}{2}e^{-j\omega t}dt - \int_{-10}^{-6}\frac{t}{4}e^{-j\omega t}dt\right]$$

$$= A\left[\frac{5}{2}\left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right]_{6}^{10} - \frac{1}{4}\left[-\frac{te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2}\right]_{6}^{10} - \frac{3}{2}\left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right]_{-10}^{-6}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4}\left[-\frac{te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2}\right]_{-10}^{-6}\right]$$

$$= A\left[\frac{5}{2}\left[\frac{-e^{j\omega 10}+e^{-j\omega 6}}{j\omega}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{-10e^{-j\omega 10}+6e^{-j\omega 6}}{j\omega} + \frac{-e^{-j\omega 10}+e^{-j\omega 6}}{(j\omega)^2}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{3}{2}\left[\frac{-e^{j\omega 6}+e^{j\omega 10}}{j\omega}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{6e^{j\omega 6}-10e^{j\omega 10}}{j\omega} + \frac{-e^{j\omega 6}+e^{j\omega 10}}{(j\omega)^2}\right]\right]$$

$$= A\left[\frac{1}{2j\omega}\left(2e^{-j\omega 6}+2e^{j\omega 10}\right) - \frac{1}{4(j\omega)^2}\left(e^{-j\omega 6}+e^{j\omega 10} - \left(e^{j\omega 6}+e^{-j\omega 10}\right)\right)\right]$$

$$= A\left[\frac{e^{j\omega 2}}{j\omega}.2\cos 8\omega - \frac{1}{4(j\omega)^2}\left(e^{j\omega 2}\left(e^{-j\omega 8}+e^{j\omega 8}\right) - e^{-j\omega 2}\left(e^{j\omega 8}+e^{-j\omega 8}\right)\right)\right]$$

$$= A\left[\frac{e^{j\omega 2}}{j\omega}\left(e^{-j\omega 8}+e^{j\omega 8}\right) - \frac{1}{4(j\omega)^2}.\left(e^{-j\omega 8}+e^{j\omega 8}\right).\left(e^{j\omega 2}-e^{-j\omega 2}\right)\right]$$

$$= \frac{A}{j\omega}2\cos 8\omega\left[e^{j\omega 2} - \frac{1}{4j\omega}2j\sin 2\omega\right] = \frac{A}{j\omega}2\cos 8\omega\left[\cos 2\omega + j\sin 2\omega - \frac{\sin 2\omega}{2\omega}\right]$$

$$= \frac{A2\cos 8\omega}{j}\left[\frac{\cos 2\omega}{\omega} + \frac{j\sin 2\omega}{\omega} - \frac{\sin 2\omega}{2\omega^2}\right]$$

$$= 2jA\cos 8\omega\left[\frac{\sin 2\omega}{2\omega^2} - \frac{2j\omega\sin 2\omega}{2\omega^2} - \frac{\cos 2\omega}{\omega}\right]$$

$$= 2jA\cos 8\omega\left[\frac{\sin 2\omega}{2\omega^2}(1-2j\omega)-\frac{\cos 2\omega}{\omega}\right]$$

c)

$$x(t) = A\prod\left(\frac{t+8}{4}\right) + A\prod\left(\frac{t-8}{4}\right)$$

$$X(\omega) = 4ASa2\omega.e^{j8\omega} + 4ASa2\omega.e^{-j8\omega}$$

$$= 4ASa2\omega.2\cos 8\omega = 8ASa2\omega.\cos 8\omega$$

Bài 3.5: *Dòng điện* $i(t) = Ie^{-\beta t} - 1(t)$ *chảy qua điện trở R. Hãy áp dụng định lý Perseval để tính:*

a) Toàn bộ năng lượng tiêu hao trên R.

b) Một phần năng lượng trong dải tần (0 ÷ β)[rd/s *].*

Giải:

a)

$$i(t) = Ie^{-\beta t} - 1(t)$$

$$e^{-\beta t} \to \frac{1}{\beta + j\omega}$$

Vậy $I(\omega) = \frac{I}{\beta + j\omega}$ *(Phổ tín hiệu i(t)).*

$$|I(\omega)|^2 = I^2.\frac{1}{\beta^2+\omega^2}$$

Tìm hàm tương quan của $i(t)$

$$\varphi_{(\tau)} \to |I(\omega)|^2;\ e^{-\beta|\tau|} \to \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

Vậy $\varphi_{(\tau)} = \frac{I^2}{2\beta}.e^{-\beta|\tau|}$

Mà $E_x = \varphi_{(0)} = \frac{I^2}{2\beta}$

Vậy năng lượng tiêu hao trên R:

$$E = RE_x = \frac{I^2R}{2\beta}$$

b) $E = RE_x \to E_{(0,\beta)} = RE_{x(0,\beta)}$

$$E_{x(0,\beta)} = \frac{I^2}{2\pi}\int_0^{\beta}\frac{1}{\beta^2+\omega^2}d\omega = \frac{I^2}{2\pi\beta^2}\int_0^{\beta}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2}d\omega$$

$$\omega = \beta\, tg\, t \Rightarrow d\omega = \beta\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \to t = 0 \\ \omega = \beta \to t = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$E_{x(0,\beta)} = \frac{I^2}{2\pi\beta^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1/cos^2t}.\beta\frac{1}{cos^2t}dt = \frac{I^2}{2\pi\beta}.\frac{\pi}{4} = \frac{I^2}{8\beta}$$

Vậy

$$E_{(0,\beta)} = RE_{x(0,\beta)} = \frac{I^2R}{8\beta} = \frac{1}{4}E$$

Bài 3.6: *Cho tín hiệu* $x(t) = e^{-\alpha|t|}; \alpha > 0$.

a) *Hãy xác định phổ, hàm tự tương quan, mật độ phổ năng lượng của* x(t). *Tính năng lượng của tín hiệu trong dải tần (0,α).*
b) *Tìm hàm tự tương quan và mật độ phổ công suất của tín hiệu* x1(t) = a + x(t). (a *là hằng số).*

Giải:

a) $x(t) = e^{-\alpha|t|}; \alpha > 0$

$$e^{-\alpha|t|} \to \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

Phổ $x(t)$ *là:*

$$X(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} \Rightarrow |X(\omega)|^2 = \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

Mật độ phổ năng lượng của $x(t)$ *là:* $\frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$

Hàm tự tương quan $x(t)$

$$\varphi_{(\tau)} \to \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

$$e^{-\alpha|t|} \to \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$\left(e^{-\alpha|t|}\right)' \to 2\alpha\frac{j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$-\alpha e^{-\alpha|t|}\text{Signt} \to 2\alpha\frac{j\omega}{\alpha^2+\omega^2}$$

$$-\alpha e^{-\alpha|t|}|t| \to 2\alpha jj\frac{\alpha^2-\omega^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

$$\Rightarrow |t|e^{-\alpha|t|} \to 2\left[\frac{2\alpha^2-(\alpha^2+\omega^2)}{(\alpha^2+\omega^2)^2}\right] = \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2} - \frac{2}{\alpha^2+\omega^2}$$

Vậy $\varphi_{(\tau)} = |\tau| e^{-\alpha|\tau|} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$

Do đó năng lượng tín hiệu:

$$E_x = \varphi_{(0)} = \frac{1}{\alpha}$$

$$E_{(-\alpha,\alpha)} = 2E_{(0,\alpha)} = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2} d\omega$$

$$E_{(-\alpha,\alpha)} = \frac{4\alpha^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{\frac{1}{\cos^4 t}} \frac{\alpha}{\cos^2 t} dt = \frac{4}{\pi\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \frac{2}{\alpha}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\right] = 0{,}818.\frac{1}{\alpha}$$

b) $x_1(t) = a + x(t)$

$$X_1(\omega) = a2\pi\delta(\omega) + \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} j |X_1(\omega)|^2 = a^2 4\pi^2 [\delta(\omega)]^2 + \frac{4a\pi\alpha\delta(\omega)}{\alpha^2+\omega^2} + \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

$$= a^2 4\pi^2 \delta(\omega) + \frac{4a\pi}{\alpha}\delta(\omega) + \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2} = 2a\pi\delta(\omega)\left[2a\pi + \frac{2}{\alpha}\right] + \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$$

$$a \to 2\pi a\delta(\omega)$$

Vậy

$$\varphi_{(\tau)} = a\left[2a\pi + \frac{2}{\alpha}\right] + |\tau| e^{-\alpha|\tau|} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

Bài 3.7: *Hãy chứng minh rằng, nếu X(ω) là phổ của tín hiệu phức* x(t) = Rex(t) + jI$_m$x(t), *thì:*

$$\mathcal{F}[Rex(t)] = \frac{1}{2}[X(\omega) + X^*(-\omega)]$$

$$\mathcal{F}[I_m x(t)] = \frac{1}{2j}[X(\omega) - X^*(-\omega)]$$

Giải:

$x(t) = Rex(t) + jI_m x(t)$

Theo tính chất của tín hiệu trong miền tần số

Quan hệ: $x(-t) \to X(-\omega)$

$x^*(t) \to X^*(-\omega)$

$x^*(-t) \to X^*(\omega)$

Mặt khác ta có:

$$Rex(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x^*(t)] \qquad (1)$$

$$I_m x(t) = \frac{1}{2j}[x(t) - x^*(t)] \qquad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow \mathcal{F}[Rex(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}x(t)\right] + \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}x^*(t)\right]$$

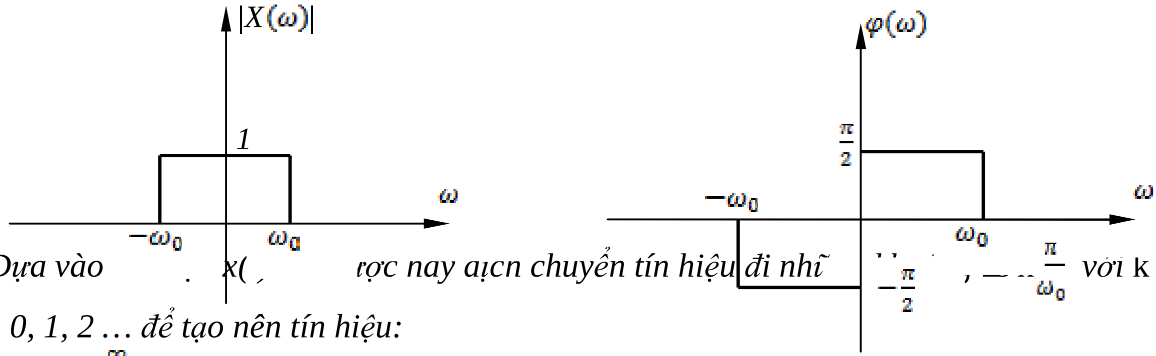
$$(2) \Leftrightarrow \mathcal{F}[Imx(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}x(t)\right] - \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}x^*(t)\right]$$

$$\begin{cases} x(t) \to X(\omega) \\ x^*(t) \to X^*(-\omega) \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{cases} \mathcal{F}[Rex(t)] = \dfrac{1}{2}[X(\omega) + X^*(-\omega)] \\ \mathcal{F}[Imx(t)] = \dfrac{1}{2j}[X(\omega) - X^*(-\omega)] \end{cases}$$

Bài 3.8: *Hãy tìm tín hiệu x(*t*) nếu phổ biên độ và phổ pha của nó được cho trên hình B.3.8*



Dựa vào ... x(... ược nay ạcn chuyển tín hiệu đi nhĩ ... $\frac{\pi}{\omega_0}$ *với* k *= 0, 1, 2 … để tạo nên tín hiệu:*

Hình B.3.8

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t - 3k\frac{\pi}{\omega_0}\right)$$

Hãy tìm biểu thức thời gian của z(t)*.*

Giải:

theo định nghĩa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_0}^{0} e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\omega t}d\omega + \int_{0}^{\omega_0} e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\omega t}d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\omega_0}^{0} e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}d\omega + \int_{0}^{\omega_0} e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\left[\frac{e^{j\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}}{jt}\right]_{-\omega_0}^{0} + \left[\frac{e^{j\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)}}{jt}\right]_{0}^{\omega_0}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{jt} - \frac{e^{j\left(-\omega_0 t-\frac{\pi}{2}\right)}}{jt} + \frac{e^{j\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)}}{jt} - \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{jt}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi jt}\left[e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)} + e^{j\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)} - e^{j\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{1}{2\pi jt}\left[-2j + 2j\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{-1}{\pi t}\left[1 - \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{-1}{\pi t}[1 - \cos\omega_0 t] = \frac{-1}{\pi t}.2\sin^2\frac{\omega_0 t}{2}$$
$$= \frac{-2}{\pi t}.2\sin^2\frac{\omega_0 t}{2}$$

$b)$
$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(t - 3k\frac{\pi}{\omega_0}\right)$$

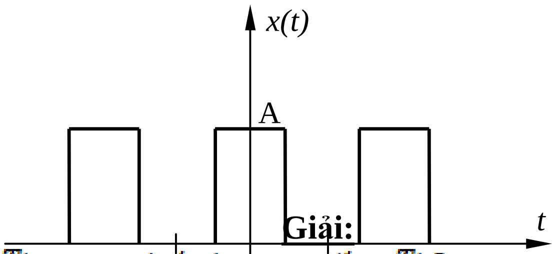
$z(t)$ là tín hiệu được lặp lại của z(t) với chu kỳ $\frac{3\pi}{\omega_0}$

Phổ của tín hiệu
$$Z(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{x(n\omega_1)}{T}.\delta(\omega - n\omega_1)$$

Với
$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{3\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega = \frac{2\omega_0}{3};$$

Vậy
$$Z(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(n\frac{2\omega_0}{3})}{\frac{3\pi}{\omega_0}}.\delta\left(\omega - n\frac{2\omega_0}{3}\right) = \frac{2\pi\omega_0}{3\pi}X(\omega)\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - n\frac{2\omega_0}{3}\right)$$
$$= \frac{2\omega_0}{3}X(\omega)\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - n\frac{2\omega_0}{3}\right)$$
$$= \frac{2\omega_0}{3}\left[1.e^{-j\frac{\pi}{2}}\delta\left(\omega - \frac{2\omega_0}{3}\right) + 1.e^{j\frac{\pi}{2}}\delta\left(\omega + \frac{2\omega_0}{3}\right) + \delta(\omega)\right]$$
$$\Rightarrow z(t) = \frac{2\omega_0}{3}\left[\frac{1}{2\pi}\left(e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\omega_0 t}{3}\right)} + e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\omega_0 t}{3}\right)} + 1\right)\right] = \frac{\omega_0}{3\pi}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\omega_0 t}{3}\right) + 1\right]$$
$$= \frac{\omega_0}{3\pi}\left[-2\sin\frac{2\omega_0 t}{3} + 1\right]$$

Bài 3.9: *Hãy xác định và vẽ hàm tự tương quan của tín hiệu trên hình B.3.9. Tìm năng lượng của tín hiệu từ hàm tự tương quan của nó.*



Giải:

$$x(t) = A\left[\prod\left(\frac{t+T}{T/2}\right) + \prod\left(\frac{t}{T/2}\right) + \prod\left(\frac{t-T}{T/2}\right)\right]$$

Hình B.3.9

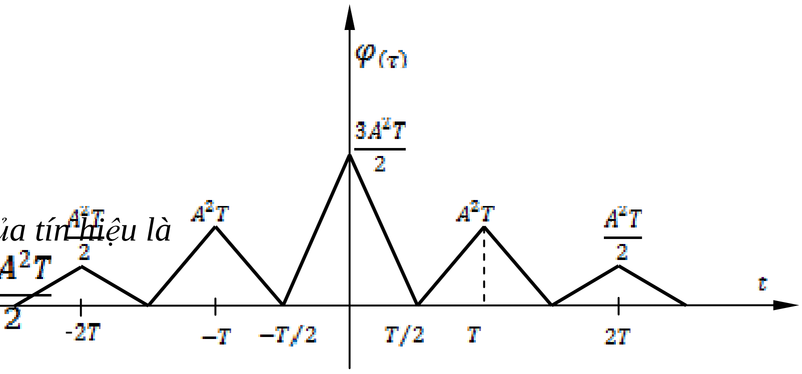
$$X(\omega) = A\left[\frac{T}{2}\left(Sa\frac{\omega T}{4}e^{j\omega T} + Sa\frac{\omega T}{4} + Sa\frac{\omega T}{4}e^{-j\omega T}\right)\right] = \frac{AT}{2}Sa\frac{\omega T}{4}\left[e^{j\omega T} + 1 + e^{-j\omega T}\right]$$
$$= \frac{AT}{2}Sa\frac{\omega T}{4}\left[1 + 2\cos\omega T\right]$$

Mật độ phổ tín hiệu x(t) *là:*

$$|X(\omega)|^2 = \left(\frac{AT}{2}\right)^2 Sa^2\frac{\omega T}{4}\left[1 + 4\cos\omega T + 4\cos^2\omega T\right]$$
$$= \left(\frac{AT}{2}\right)^2 Sa^2\frac{\omega T}{4}\left[1 + 4\cos\omega T + 2 + 2\cos 2\omega T\right]$$
$$= \frac{A^2T^2}{4}Sa^2\frac{\omega T}{4}\left[3 + 4\cos\omega T + 2\cos 2\omega T\right]$$
$$= \frac{3A^2T^2}{4}Sa^2\frac{\omega T}{4} + A^2T^2Sa^2\omega T.\cos\omega T + \frac{A^2T^2}{2}Sa^2\frac{\omega T}{4}.\cos 2\omega T$$

Biết $\varphi_{(\tau)} \to |X(\omega)|^2$

$$\Rightarrow \varphi_{(\tau)} = \frac{3A^2T^2}{4}\frac{2}{T}\bigwedge\left(\frac{\tau}{T/2}\right) + \frac{A^2T^2}{T}\left[\bigwedge\left(\frac{\tau+T}{T/2}\right) + \bigwedge\left(\frac{\tau-T}{T/2}\right)\right]$$
$$+ \frac{A^2T^2}{2T}\left[\bigwedge\left(\frac{\tau+2T}{T/2}\right) + \bigwedge\left(\frac{\tau-2T}{T/2}\right)\right]$$
$$= \frac{3A^2T}{2}\bigwedge\left(\frac{\tau}{T/2}\right) + A^2T\left[\bigwedge\left(\frac{\tau+T}{T/2}\right) + \bigwedge\left(\frac{\tau-T}{T/2}\right)\right]$$
$$+ \frac{A^2T}{2}\left[\bigwedge\left(\frac{\tau+2T}{T/2}\right) + \bigwedge\left(\frac{\tau-2T}{T/2}\right)\right]$$



Năng lượng của tín hiệu là

$$E = \varphi_{(0)} = \frac{3A^2T}{2}$$

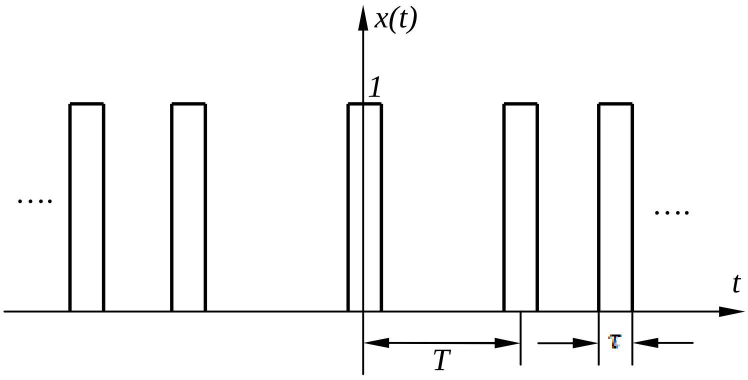
Bài 3.10: *Cho tín hiệu* $x(t)$ *tuần hoàn với chu kỳ T; xét tín hiệu* $x_{nT}(t) = x(t)\prod\left(\frac{t}{nT}\right)$*, trong đó* n = 2m + 1*; m = 0, 1 …, là phần tín hiệu được cắt ra từ tín hiệu* x(t)*, sao cho* $x_{nT}(t) = 0$ *với* $|t| > n\frac{T}{2}$*, còn tín hiệu* $x_{nT}(t)$ *bao gồm* n = 2m + 1 *phần giữa của tín hiệu tuần hoàn* $x(t)$.

a) *Hãy tìm phổ* $x_{nT}(t)$ *và chứng minh rằng:*

$$X_{nT}(\omega) = \mathcal{F}[x_{nT}(t)] = X_T(\omega)\frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

Trong đó $X_{nT}(\omega)$ là phổ của tín hiệu $x_{nT}(t)$ với n *=1,(là phổ của phần trung tâm của tín hiệu tuần hoàn).*

b) *Áp dụng kết quả này cho dãy xung vuông góc đơn cực (H.B.3.7) với* n = 3; n = 5 *và suy ra kết quả khi $n \to \infty$.*



c) *Hãy vẽ phổ trong hai trường hợp trên.*

Giải:

$$x_{nT}(t) = x(t)\prod\left(\frac{t}{nT}\right)\ (n = 2m + 1;\ m = 0,1 \ldots)$$

Tín hiệu $x_T(t)$ với $n = 1$

$$x_T(t) = x_\tau \prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\prod\left(\frac{t}{nT}\right) \to nTSa\frac{n\omega T}{2} = \frac{2\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\omega}$$

$$\prod\left(\frac{t}{T}\right) \to TSa\frac{\omega T}{2} = \frac{2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}$$

$x(t) \to X(\omega)$

Vậy phổ $x_{nT}(t)$ *là*

$$X_{nT}(\omega) = \frac{X(\omega) * 2\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{2\pi}$$

Phổ $x_T(t)$ *là*

$$X_T(\omega) = \frac{X(\omega) * 2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{2\pi}$$

$$\frac{X_{nT}(\omega)}{X_T(\omega)} = \frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \Rightarrow X_{nT}(\omega) = X_T(\omega).\frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

b)

$$n = 3 \Leftrightarrow X_{3T}(\omega) = X_T(\omega).\frac{sin\left(\frac{3\omega T}{2}\right)}{sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

Tín hiệu trung tâm của $x(t)$ *là*

$$x_T(t) = 1.\prod\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow \tau Sa\frac{\omega\tau}{2}$$

Vậy

$$X_{3T}(\omega) = \tau Sa\frac{\omega\tau}{2}.\frac{sin\left(\frac{3\omega T}{2}\right)}{sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

$$X_{5T}(\omega) = \tau Sa\frac{\omega\tau}{2}.\frac{sin\left(\frac{5\omega T}{2}\right)}{sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

Baøi 3.11:

$X_0 = a$ $\qquad X_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$

$a_n = X_n + X_{-n}$; $\quad b_n = j(X_n + X_{-n})$

Tröôøng hôïp chaün: $b_n = 0$

Tröôøng hôïp leû: $a_n = 0$

$x(t) = \sum X_n e^{jwnt}$ $\qquad w_0 = \frac{2\pi}{T}$

Tín hieäu tuaàn hoaøn $\quad X_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t).e^{-jnwt}dt(w_0 = \frac{2\pi}{T})$

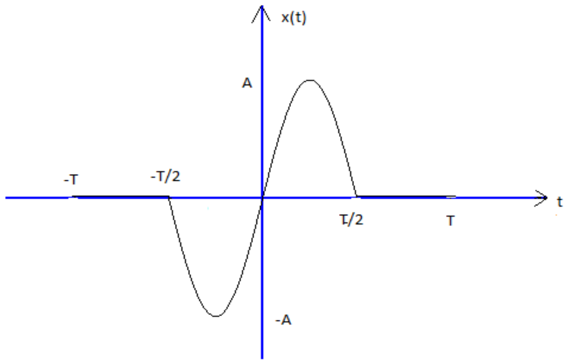
Tín hieäu khoâng tuaøn hoaøn (-L;L) $\longrightarrow w = \frac{2\pi}{T}$

$$X(\omega) = 2\pi\sum_{-\infty}^{\infty} X_n d(\omega - n\omega_0)$$

$$X_n = \frac{X_T(n\omega_0)}{T}$$

$$X(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n.e^{jnw_0t}$$

a)



$$X(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n.e^{jnw_0 t}$$

$$X(t) = A\sin\frac{2\pi}{T} + \prod(\frac{t}{T})$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$$

$$\prod(\frac{t}{T}) \longleftrightarrow T.Sa\frac{wT}{2}$$

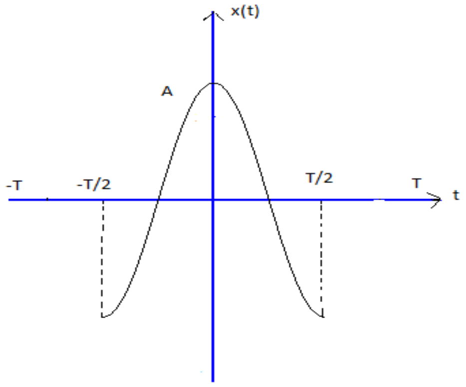
$$A\prod(\frac{t}{T}).\sin\frac{2\pi}{T}t \longleftrightarrow \frac{AT}{2j}[Sa(w-\frac{2\pi}{T})\frac{T}{2} - Sa(w+\frac{2\pi}{T})\frac{T}{2}]$$

$$X_n = \frac{X_T(w)}{2T} = \frac{A}{4j}[Sa(\frac{n\pi}{T}-\frac{2\pi}{T}).\frac{T}{2} - Sa(\frac{n\pi}{T}+\frac{2\pi}{T}).\frac{T}{2})]$$

$$X_n = \frac{A}{4j}[Sa(n-2).\frac{\pi}{2})] - Sa(n+2).\frac{\pi}{2})]$$

$$X_n = \begin{cases} 0 : n = 2k; n \neq \pm 2 \\ \dfrac{(-1)^k.2A}{j\pi(4-n^2)} : n = 2k+1 \\ \dfrac{-Aj}{4} : n = 2 \\ \dfrac{Aj}{4} : n = -2 \end{cases}$$

b)



$$x(t) = A.\cos(\frac{2\pi}{T}.t)\prod(\frac{t}{T})$$

$$w_0 = \frac{\pi}{T}$$

$$\prod(\frac{t}{T}) \leftrightarrow T.Sa(\frac{wT}{2})$$

$$A\prod(\frac{t}{T}).\cos(\frac{2\pi}{T}t) \leftrightarrow \frac{AT}{2}[Sa(w-\frac{2\pi}{T})\frac{T}{2} + Sa(w-\frac{2\pi}{T})\frac{T}{2}] \quad = X_T(w)$$

$$X_n = \frac{X_t(w)}{2T}$$

$$X_n = \frac{A}{4}[Sa(w-\frac{2\pi}{T})\frac{T}{2} + Sa(w-\frac{2\pi}{T})\frac{T}{2}]$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n.e^{jwnt}$$

$$X_n = \frac{A}{4}[Sa(n-2)\frac{\pi}{2} + Sa(n+2)\frac{\pi}{2}]$$

$$X_n = \begin{cases} \frac{A}{4} : n = \pm 2 \\ 0 : n = 2k \\ \frac{(-1)^k.A.n}{\pi(4-n^2)} : n = 2k+1 \end{cases}$$

Bai 3.12:

a)

Chu ki T’=2T

$w_0 = \frac{2\pi}{T'} = \frac{\pi}{T}$

$x(t) = \begin{cases} \frac{-A}{T} t + A, & 0 < t < T \\ & \end{cases}$

$\frac{A}{T}$t + A , -T < t < 0

x(t)= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{-jnwot}$

X_n= $\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)\, e^{-jnwot}\,dt$

= $\frac{1}{2T}\left[\int_{-T}^{0}\left(\frac{A}{T}t + A\right)e^{-jnwot}dt + \int_{0}^{T}\left(\frac{-A}{T}t + A\right)e^{-jnwot}dt\right]$

= $A/(2T)[1/T \int_{(-T)/2}^{0} t\, e^{(-jnwot)}\, dt + \int_{(-T)/2}^{0} e^{(-jnwot)}\, dt - 1/T \int_{0}^{T}$
]

= $\frac{A}{2T}\left[-\frac{cosn\pi}{jnwo} + \frac{1}{Tn^2wo^2} - \frac{cosn\pi}{Tn^2wo^2} + \frac{1}{-jnwo} - \frac{cosn\pi}{-jnwo} + \frac{cosn\pi}{jnwo} + \frac{cosn\pi}{Tn^2wo^2} + \frac{}{T}\right.$

= $\frac{A}{2T}\frac{2(1-cosn\pi)}{Tn^2wo^2} = \frac{A(1-cosn\pi)}{n^2\pi^2}$

- Voi n=2k ; k=±1, ±2…

  Suy ra X_n= 0
- Voi n=2k+1 ; k=0, ±1, ±2…

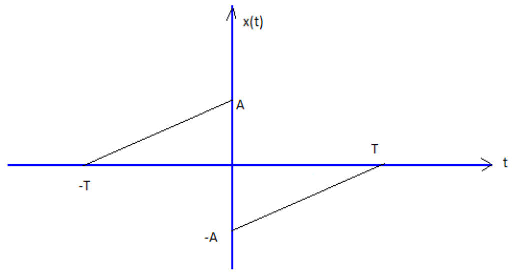
  Suy ra X_n=$\frac{2A}{n^2\pi^2}$
- Voi n= 0

  Suy ra X_n= $\frac{1}{2T}\left[\int_{-T}^{0}\left(\frac{A}{T}t + A\right)dt + \int_{0}^{T}\left(-\frac{A}{T}t + A\right)dt\right] = \frac{A}{2}$

Vaäy X_n= $\begin{cases} 0 & , n=2k , k= \pm1, \pm2\ldots \\ \frac{2A}{n^2\pi^2} & , n=2k+1, k=0, \pm1, \pm2\ldots \end{cases}$

$\frac{A}{2}$, n=0

Baøi 3.12: b)



Chu kì: T' = 2T

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T'} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$

x(t) = $\begin{cases} \frac{A}{T}.t \quad + A \quad (-T < t < 0) \\ \frac{A}{T}.t \quad - A \quad (0 < t < T) \end{cases}$

X(n) = $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t).e^{-jn\omega_0 t}.dt$

$= \frac{1}{2T}\left[\int_{-T}^{0}\left(\frac{A}{T}.t \quad + A\right).e^{-jn\omega_0 t}.dt \quad + \int_{0}^{T}\left(\frac{A}{T}.t \quad - A\right).e^{-jn\omega_0 t}.dt\right]$

$= \frac{A}{2T}\left[\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} t.e^{-jn\omega_0 t}.dt \quad + \int_{-T}^{0} e^{-jn\omega_0 t}.dt \quad + \frac{1}{T}\int_{0}^{T} t.e^{-jn\omega_0 t}.dt \quad - \int_{0}^{T} e^{-jn\omega_0 t}.dt\right]$

$= \frac{A}{2T}.j.\frac{2}{n\omega_0}$ = j. $\frac{A}{n\pi}$

$*$Với: $n \neq 0$

X(n)= j. $\frac{A}{n\pi}$

$*$Với: n=0

X(n)= $\frac{1}{2T}\left[\int_{-T}^{0}(\frac{A}{T}.t + A).dt \quad + \int_{0}^{T}(\frac{A}{T} - A).dt\right]$

$= \frac{A}{2T}\left\{(\frac{t^2}{2T} \quad + t)\Big|_{-T}^{0} \quad + \quad (\frac{t^2}{2T} \quad - t)\Big|_{0}^{T}\right\}$

=0

$**$Vậy: X(n) = $\left\{\begin{array}{c} 0 \quad ,n = 0 \\ \hline j.\frac{A}{n\pi} \quad ,n \neq 0 \end{array}\right\}$

Bai 3.13:

a) Chu ki T'=2T

$w_0 = \frac{2\pi}{T'} = \frac{\pi}{T}$

$$x(t) = \begin{cases} A, & \frac{-T}{2} < t < 0 \\ -A, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{-jnwot}$

$X_n = \frac{1}{2T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jnwot} dt$

$= \frac{1}{2T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} A e^{-jnwot} dt - \int_{0}^{\frac{T}{2}} A e^{jnwot} dt\right]$

$= A/(2T)[\, j\, 1/(nw_o) - j\frac{\frac{\cos n\pi}{2} + j\sin\frac{n\pi}{2}}{nwo} - j\frac{\frac{\cos n\pi}{2} - j\sin\frac{n\pi}{2}}{nwo} + j\frac{1}{nw_o}]$

- Voi n=4k ; k=±1, ±2…

  Suy ra $X_n = \frac{A}{2T}[j\frac{1}{nwo} - j\frac{1}{nwo} - j\frac{1}{nwo} + j\frac{1}{nwo}] = 0$

- Voi n=4k+2 ; k=0, ±1, ±2…

  Suy ra $X_n = \frac{A}{2T}[j\frac{1}{nwo} + j\frac{1}{nwo} + j\frac{1}{nwo} + j\frac{1}{nwo}]$

  $= \frac{A}{2T} j \frac{4}{nw_o} = j\frac{2A}{n\pi}$

- Voi n= 2k+1 , k=0, ±1, ±2…

  Suy ra $X_n = \frac{A}{2T}\left[j\frac{1}{nwo} + j\frac{1}{nwo}\right] = \frac{A}{2T} j\frac{2}{nwo} = j\frac{A}{n\pi}$

$$\text{Vay } X_n = \begin{cases} 0 & , n=4k, k=0, \pm1, \pm2\ldots \\ j\frac{2A}{n\pi} & , n=4k+2, k=0, \pm1, \pm2\ldots \end{cases}$$

$j\frac{A}{n\pi}$, n=2k+1, k=0, ±1, ±2…

b) $w_0 = \frac{2\pi}{T'} = \frac{\pi}{T}$

x(t)= $\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{-jnwot}$

x(t)= $A\delta\left(A+\frac{T}{2}\right) + A\delta\left(A-\frac{T}{2}\right)$

$X_T(w) = Ae^{-j\frac{wT}{2}} + Ae^{j\frac{wT}{2}}$

$X_T(w) = 2A\cos(wT/2)$

$X_n = X_T(nw_0)/(2T) = \frac{\frac{A}{T}\cos n\pi}{2}$

$$X_n = \begin{cases} 0 & n=2k+1 \\ \frac{A}{T}(-1)^k & n=2k \end{cases}$$

Baøi 3.14 Khai trieån chuoãi thaønh fourier

$X(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$

$X(t) = A\prod\left(\frac{t-T/4}{T/2-2\tau}\right) - A\prod\left(\frac{t+T/4}{T/2-2\tau}\right)$

Ñaët b=T/2-2τ

$X_T(\omega) = AbSa\frac{\omega b}{2}[\ e^{-j\omega T/4} - e^{j\omega T/4}]$

$= AbSa\frac{\omega b}{2}(-2j)\sin\frac{\omega T}{4}$

$\omega_0 = \frac{2\Pi}{T}$

$X_n = \frac{X_T(n\omega_0)}{T} = \frac{-2jAb}{T} Sa\frac{n\Pi b}{T}\sin\frac{n\Pi}{2}$

$X_n = 0 \quad n=0$

$X_n = -2j\frac{Ab}{T}(-1)^k Sa(\frac{n\Pi b}{t}) \quad n=2k+1$

$b_n = 2jX_n$

keát quaû theo ñònh nghóa $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin n\omega t dt$

$b_n = \frac{2A}{n\Pi}[\cos n\omega_0 T(1-(-1)^n]$

$b_n = 0 \qquad n=2k$

$b_n = \frac{4A}{n\Pi}\cos\omega_0 T \qquad n=2k+1$

Chương 4 : Truyền tín hiệu qua mạch tuyến tính

Bài 4.2:

$u_1(t) = t.e^{-\alpha|t|} \quad ,\alpha = \frac{R}{L}$

tìm $U_1(\omega)$.

Ta có

$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$

⇨ $t.e^{-\alpha|t|} = -j.\dfrac{2\alpha.2\omega}{(\alpha^2+\omega^2)}$

⇨ $U_1(\omega) = -j.\dfrac{4\alpha\omega}{(\alpha^2+\omega^2)^2}$

Tìm K(ω)

$U_2 =(-\dfrac{-2R}{R+j\omega L}+1).U_1$

$= -\dfrac{R-j\omega L}{R+j\omega L}.U_1$

$K(\omega)=\dfrac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = -\dfrac{R-j\omega L}{R+j\omega L}$

$= \dfrac{(\frac{R}{L})-j\omega}{\frac{R}{L}+j\omega} = \dfrac{-(\frac{R}{L})^2+\omega^2}{(\frac{R}{L}+j\omega)^2} = \dfrac{\alpha^2+\omega^2}{(\alpha+j\omega)^2}$

⇨ $U_2 =K(\omega).U_1(\omega)= j\dfrac{4\alpha\omega}{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha+j\omega)^2}$

⇨ Tìm U_2 (t)

⇨ Ta có $U_2(\omega)$ <=> u_2 (t)

⇨

⇨ $U_2(\omega) = j\dfrac{4\alpha\omega}{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha+j\omega)^2}$

$= j\dfrac{4\alpha\omega}{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha^2-\omega^2+j2\alpha\omega)}$

Ta có

$\dfrac{1}{\alpha^2+\omega^2} + \dfrac{1}{(\alpha-j\omega)^2} = \dfrac{2\alpha^2+j2\omega}{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha+j\omega)^2}$

$= \dfrac{2\alpha(\alpha+j\omega)}{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha+j\omega)^2}$

Mặt khác ta lại có

$j\dfrac{4\alpha\omega}{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha+j\omega)^2} = \dfrac{2\alpha(\alpha+j\omega)-2\alpha(\alpha-j\omega)}{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha+j\omega)^2}$

$= \dfrac{2\alpha(\alpha+j\omega)}{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha+j\omega)^2} - \dfrac{2\alpha}{(\alpha+j\omega)^3}$

$$= \frac{1}{\alpha^2+\omega^2} + \frac{1}{(\alpha-j\omega)^2} - \frac{2\alpha}{(\alpha+j\omega)^3}$$

$$\Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{2\alpha}.e^{-\alpha|t|} + t\, e^{-\alpha t}.1(t)\ \alpha t^2 .\ e^{-\alpha t}.1(t)$$

$$= \frac{1}{2\alpha}.e^{-\alpha|t|} + (t+\alpha t^2).e^{-\alpha t}.1(t)$$

Bài 4.3:

$e(t)=\omega.Sa\omega t.cosnt$

$u(t)= u_1(t)*k(t)$

$k(t)= £^{-1}[K(\omega)]$

$k(\omega)=\pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$

Tìm k(t) , $k(t)\Leftrightarrow k(\omega)$

Tacó

$$Sa\ \omega_0 t \Leftrightarrow \prod\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

$$k(t) = \frac{\omega_0}{\pi} Sa.\omega_0 t$$

a, Ta lại có:

$u(t)=u_1(t)*k(t)$

$$\Rightarrow u(\omega)=I_1(\omega)\ \frac{U(\omega)}{K(\omega)}$$

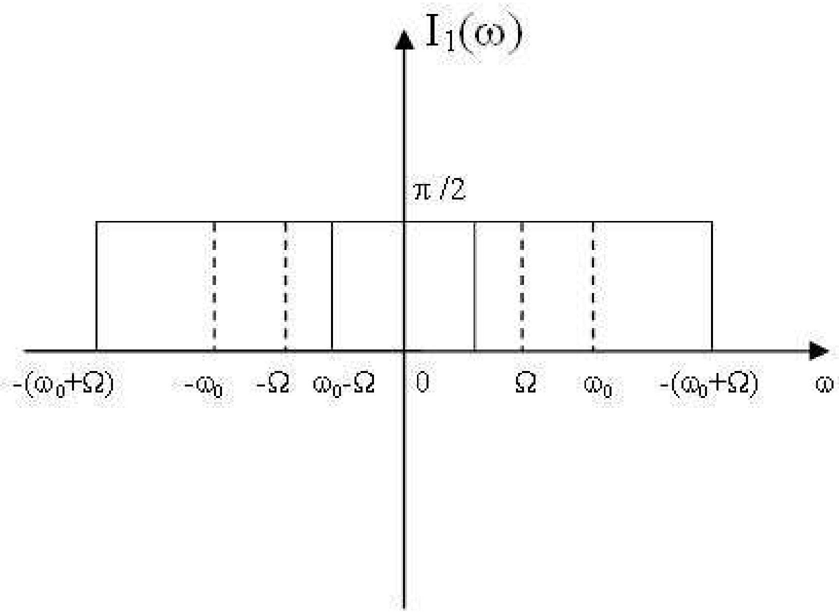
Mà $i_1(t)$

$$i_1 = \frac{e(t)}{R_1} = e(t)\text{-}cosSa\omega_0\, t.cos\ \pi\ t$$

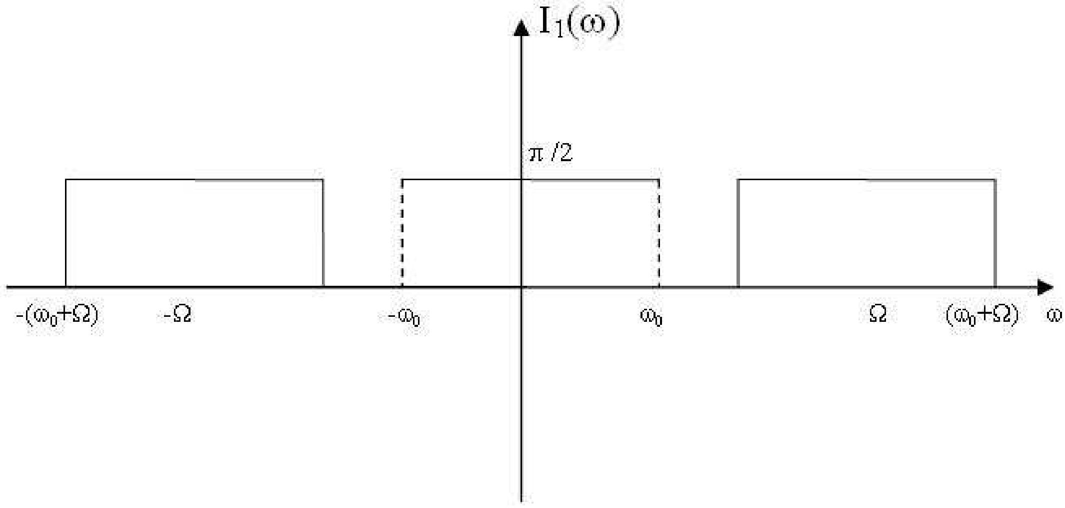
$$\Rightarrow I_1(\omega)= \frac{\pi}{2}\left[\pi\left(\frac{\omega-\pi}{2\omega_0}\right) + \pi\left(\frac{\omega+\pi}{2\omega_0}\right)\right]$$

Vẽ $I_1(\omega)$

Trường hợp $0 < \Omega < \omega_0$



Trường hợp $\omega_0 < \Omega$



b, Tìm $i_2(t)$?

$u(t) = i_1(t)*k(t)$

$i_2(t) = \dfrac{u(t)}{R_2} = u(t)$

$k(t) = F^{-1}[K(\omega)]$

$K(\omega) = \prod\left(\dfrac{\omega}{2\omega_0}\right)$

Theo câu a ta được : $I_1(\omega)= \dfrac{\pi}{2}[\pi(\dfrac{\omega-\pi}{2\omega_0}) + \pi(\dfrac{\omega+\pi}{2\omega_0})]$

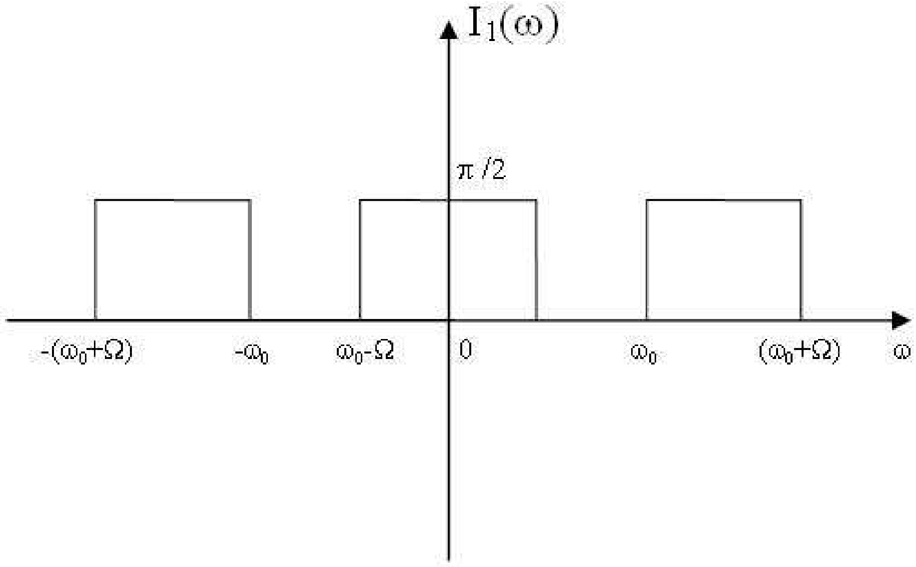
Phổ của $i_2(t)$ là :

$I_2(\omega) = U(\omega) = K(\omega).I(\omega)$

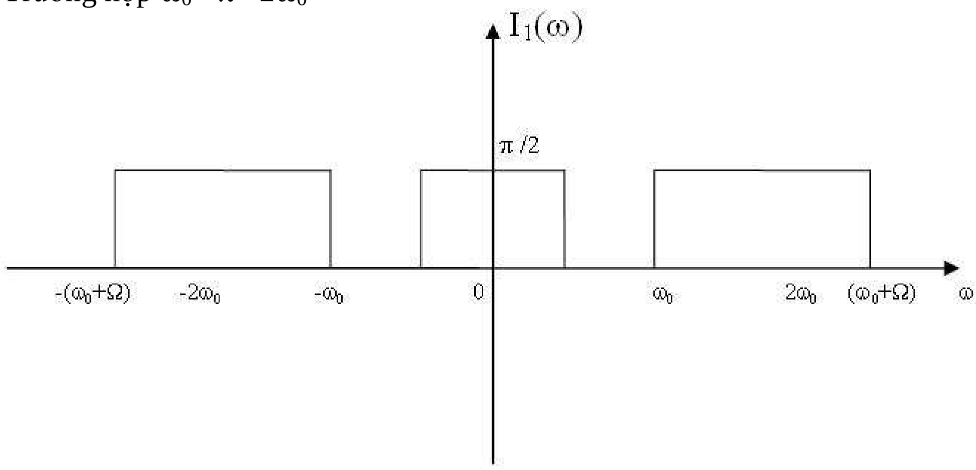
$$= \frac{\pi}{2}\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)\left[\Pi\left(\frac{\omega-\pi}{2\omega_0}\right)+\Pi\left(\frac{\omega+\pi}{2\omega_0}\right)\right]$$

Vẽ $I_2(\omega)$

Trường hợp $0<\pi<\omega$



Trường hợp $\omega_0 <\pi <2\omega_0$



d, Tìm $i_2(t)$?

$$\Omega = \frac{3}{2}\omega$$

Dựa vào hình vẽ (câu b, trường hợp $\omega \leq \Omega \leq \omega_0$) suy ra phổ của $i_2(t)$ là:

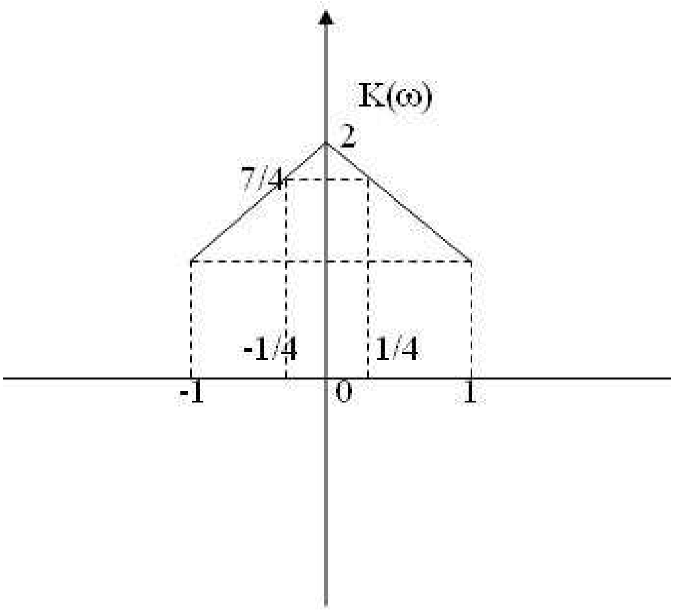
$$I_2(\omega) = \frac{\pi}{2}\left(\Pi\left(\frac{\omega - \frac{3}{4}\omega_o}{\frac{1}{2}\omega_o}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + \frac{3}{4}\omega_o}{\frac{1}{2}\omega_o}\right)\right)$$

Mà $\pi\prod\left(\frac{\omega}{\frac{1}{2}\omega_0}\right) \leftrightarrow \frac{1}{4}\omega_0 Sa\frac{1}{2}\omega_0 t$

$\Rightarrow i_2(t) = \frac{1}{4}\omega_0 Sa\frac{1}{4}\omega_0 t.\cos\frac{3}{4}\omega_0 t$

Bài 4.4:

Tín hiệu $x(t) = \frac{1}{4} Sa(\frac{t-2}{4})$ có phổ $X(\omega)$



Ta có: $\frac{1}{4}Sa\frac{t}{4} \Leftrightarrow \pi.\prod(2\omega)$

$\Rightarrow \frac{1}{4} Sa(\frac{t-2}{4}) \Leftrightarrow \pi . \prod(2\omega).e^{-j2\omega}$

$Y(\omega) = K(\omega).X(\omega)$

$= \frac{7}{4}.\pi.\prod(2\omega).e^{-j2\omega} + \frac{1}{4}.\pi.\Lambda(4\omega).e^{-j2\omega}$

$\Rightarrow y(t) = \frac{7}{16}Sa(\frac{t-2}{4}) + \frac{1}{32}Sa^2(\frac{t-2}{4})$

Năng lượng E_y :

$\phi_y(\omega) = |Y(\omega)|^2$

$=[\frac{7}{4}.\pi.\prod(2\omega) + \frac{1}{4}.\pi.\Lambda(4\omega)]^2$

$= \frac{1}{16}.\pi^2.[7.\prod(2\omega) + \Lambda(4\omega)]^2$

$= \frac{1}{16}.\pi^2\{49.\prod(2\omega) + [\Lambda(4\omega)]^2 + 14\Lambda(4\omega)\}$

$= \frac{1}{16}.\pi^2[49.\prod(2\omega) + 14\Lambda(4\omega) + (16\omega^2 - 8|\omega| + 1)\prod(2\omega)]$

$\Rightarrow E_y = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(\omega)d\omega$

$= \frac{1}{2\pi} . \frac{1}{16}.\pi^2[49.\frac{1}{2} + 14.\frac{1}{4} + 2\int_0^{1/4}(16\omega^2 - 8\omega + 1)d\omega]$

$= \frac{1}{2\pi} . \frac{1}{16}.\pi^2[49.\frac{1}{2} + 14.\frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}]$

$= \frac{\pi}{32}.[\frac{147}{6} + \frac{21}{6} + \frac{1}{6}]$

$= \frac{169}{192}\pi$

Bài 4.5:

$\varphi_x(\tau) = e^{-|\tau|}$

$K(\omega) = \prod(\frac{\omega}{2})$

Ta có $E_x = \varphi_x(0) = 1$

$\varphi_x(\tau) \Leftrightarrow \Phi_x(\omega)$

$\Rightarrow \Phi_x(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$

$\Phi_y(\omega) = |K(\omega)|^2.\Phi_x(\omega)$

$= \prod(\frac{\omega}{2}) . (\frac{2}{1+\omega^2})$

$E_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_y(\omega)\, d\omega$

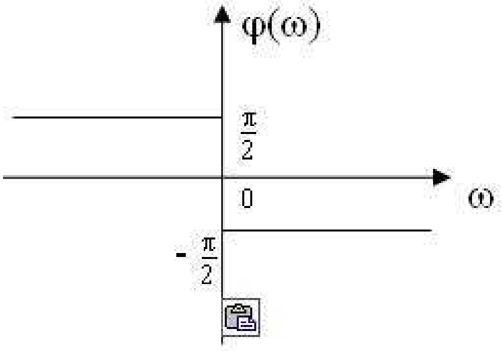
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}(\frac{2}{1+\omega^2})d\omega$

$= \frac{1}{2\pi} 4 \int_0^1 \frac{d\omega}{1+\omega^2}$

$$E_y = \frac{2}{\pi}[\text{arctg}\omega]\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

Bài 4.6:

$$K(\omega) = A(\omega).e^{j\varphi(\omega)}$$



a,

$$x(t) = 2$$

$$\Rightarrow X(\omega) = 4\pi\delta\,(\omega)$$

$$Y\omega) = K\omega).X(\omega) = K\omega).4\pi\delta\,(\omega) = K(0).4\pi\delta\,(\omega) = 0$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)]^2\,.dt = 4$$

$$P_y = 0$$

b,

$$x(t) = 2.1(t)$$

$$X(\omega) = 2\pi\,\delta\,(\omega) + \frac{2}{j\omega}$$

$$Y(\omega) = K(\omega).X(\omega)$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} e^{j(\pi/2)}\dfrac{2}{j\omega} & ,\ \omega > 2 \\ e^{-j(\pi/2)}\dfrac{2}{j\omega} & ,\ \omega < -2 \\ \dfrac{\omega}{2}e^{j(\pi/2)}\dfrac{2}{j\omega} & ,0 < \omega < 2 \\ \dfrac{\omega}{2}e^{-j(\pi/2)}\dfrac{2}{j\omega} & ,\ -2 < \omega < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1\ \ ,|\,\omega\,| < 2 \\ \end{cases}$$

$Y(\omega) =$

$$\frac{2}{|\omega|} \quad , |\ \omega\ | > 2$$

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x(t)]^2 .dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} 4.dt = 2$$

$$\phi_y(\omega) = |\ Y(\omega)\ |^2 = \begin{cases} 1\ , |\omega| < 2 \\ \dfrac{4}{\omega^2}\ , |\omega| > 2 \end{cases}$$

$$P_y = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \phi_y(\omega).d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{2} d\omega + \int_{2}^{\infty} \frac{4}{\omega^2} d\omega \right] = \frac{4}{\pi}$$

c,

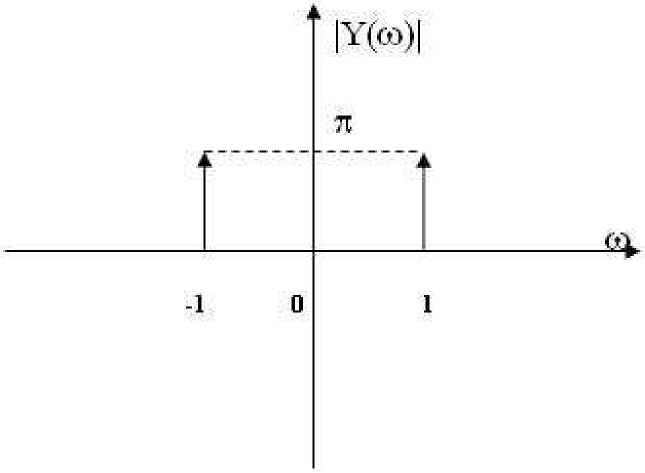
$x(t) = 2\cos t$

$X(\omega) = 2\pi\ [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$

$Y(\omega) = X(\omega).K(\omega)$

$$= 2\pi \frac{1}{2} [e^{j(\pi/2)}\delta(\omega - 1) + e^{-j(\pi/2)}\delta(\omega + 1)]$$

$$= \pi.[e^{j(\pi/2)}\delta(\omega - 1) + e^{-j(\pi/2)}\delta(\omega + 1)]$$



$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [x(t)]^2 .dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 4\cos^2 t.dt = 2$$

$$\varphi_y(\omega) = 2\pi.[\frac{1}{4}\delta(\omega - 1) + \frac{1}{4}\delta(\omega + 1)]$$

$$P_y = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \varphi_y(\omega).d\omega = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

d,

$x(t) = 2\sin t$

$$X(\omega) = \frac{-1}{2} 2\pi j.[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$$

$$Y(\omega) = \frac{-1}{2} 2\pi j.[e^{j(\pi/2)}\delta(\omega - 1) - e^{-j(\pi/2)}\delta(\omega + 1)]$$

$$= \pi.[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} 4\sin^2 t.dt = 2$$

$$\varphi_y(\omega) = 2\pi.[\frac{1}{4}\delta(\omega - 1) + \frac{1}{4}\delta(\omega + 1)]$$

$$P_y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(\omega).d\omega = \frac{1}{2\pi}[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}].2\pi = \frac{1}{2}$$

e,

$x(t) = 2\cos^2 t + 4\cos t\cos 2t$

$= 1 + 2\cos t + \cos 2t + 2\cos t3t$

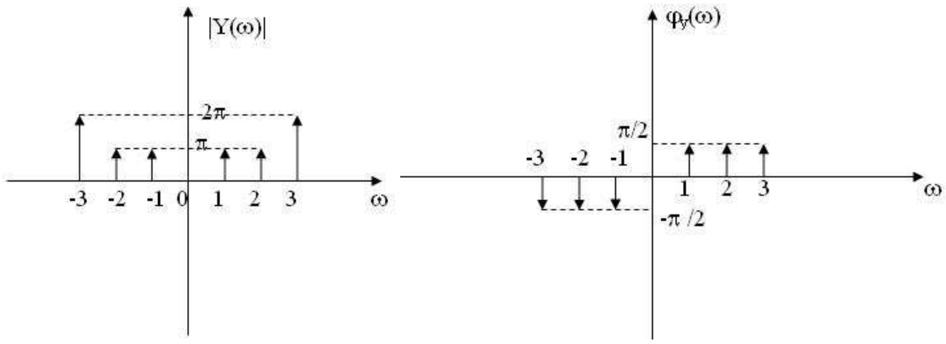
$X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega) + 2\pi\,[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)] + \pi\,[\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)]$

$+ 2\pi\,[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]$

$Y(\omega) = K(\omega).X(\omega)$

$= \pi e^{j(\pi/2)}[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega - 2) + \delta(\omega - 3)]$

$+\pi e^{-j(\pi/2)}[\delta(\omega + 1) + \delta(\omega + 2) + \delta(\omega + 3)]$



$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (1 + 2\cos t + \cos 2t + 2\cos t3t)^2$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} [(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) + 4(\cos^2 t + 2\cos t\cos 3t + \cos^2 3t)$$

$$+ 4(\cos t + \cos 3t + \cos t\cos 2t + \cos 2\cos 3t)].dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{0}^{T} (4 + 1 + \frac{1}{2})dt = 5{,}5$$

$$\varphi_y(\omega) = 2\pi[\frac{1}{4}\delta(\omega - 1) + \frac{1}{4}\delta(\omega - 2) + \delta(\omega - 3)]$$

$$+2\pi[\frac{1}{4}\delta(\omega + 1) + \frac{1}{4}\delta(\omega + 2) + \delta(\omega + 3)]$$

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(\omega).d\omega = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 3$$

Bài 4.7:

$$x(t) = A.\frac{t}{T}.\prod(\frac{t}{2T})$$

a, Ta có $\prod(\frac{t}{2T}) \Leftrightarrow 2TSa\omega T$

$$\frac{A}{T}\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \Leftrightarrow 2ASa\omega T$$

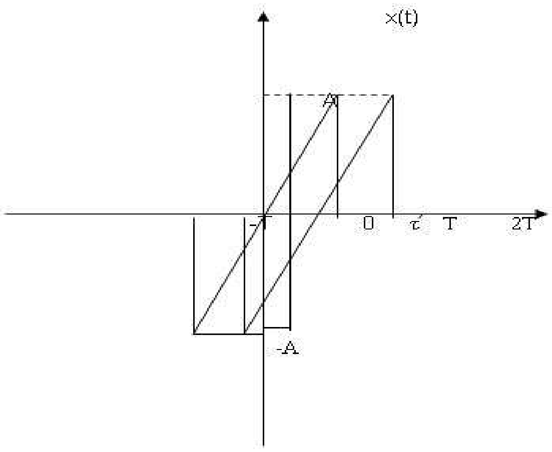
$$t.\frac{A}{T}\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \Leftrightarrow j.2A\left(\frac{\sin\omega T}{\omega T}\right)$$

$$\Rightarrow X(\omega) = j.2A.\left(\omega T^2\cos\omega T - T\sin\omega T\right).\frac{1}{(\omega T)^2}$$

$$= j.\frac{2A}{\omega}\left(\mathrm{Cos}\,\omega T - Sa\omega T\right)$$

$$E_x = \int_{-T}^{T}\left(A.\frac{t}{T}\right)^2.dt = \frac{2A^2}{T^2}\int_0^T t^2dt = \frac{2A^2}{T}.\frac{T^3}{3}\Bigg|_0^T = \frac{2}{3}AT^2$$

Xét 0 <= τ < T

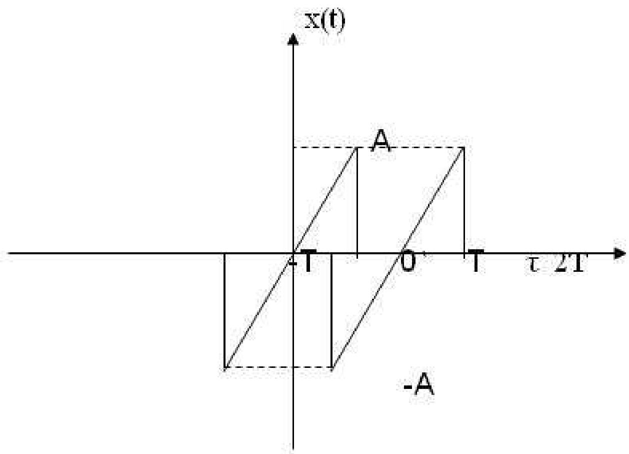


$$\varphi_x(\tau) = \int_{\tau-T}^{T}\frac{A}{T}t.\frac{A}{t}(t-\tau)dt$$

$$= \frac{A^2}{T^2}\int_{\tau-T}^{T}(t^2 - t\tau)dt$$

$$= \frac{A^2}{T^2}\left[\frac{T^3}{6} - T^2\tau + \frac{2}{3}T^3\right]$$

Xét T < τ < 2T



$$\varphi_x(\tau) = \int_{\tau-T}^{T} \frac{A}{T}t.\frac{A}{t}(t-\tau)dt$$

$$= \frac{A^2}{T^2}\left[\frac{T^3}{6} - T^2\tau + \frac{2}{3}T^3\right]$$

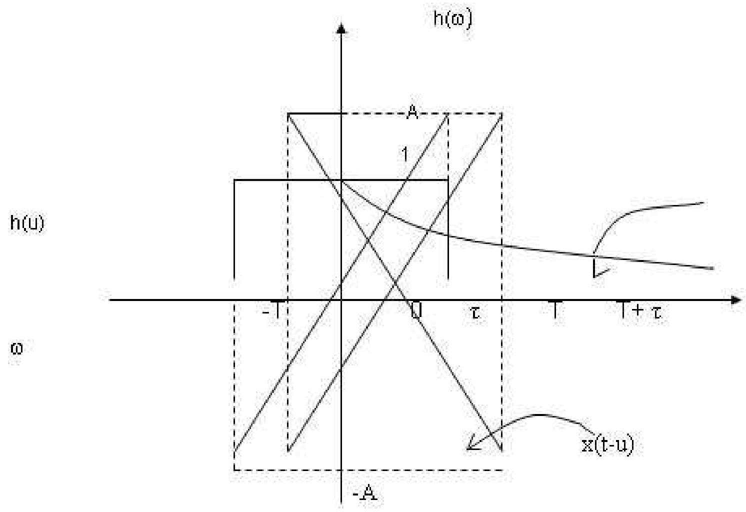
Xét 2T < τ : $\varphi_x(\tau) = 0$

Vậy $\varphi_x(\tau) = \frac{A^2}{T^2}\left(\frac{1}{6}|T|^3 - T^2|\tau| + \frac{2}{3}T^3\right)\prod\left(\frac{\tau}{4T}\right)$

b, y(t) = h(t)*x(t)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u).x(t-u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u}.1(t)(t-u)\prod\frac{(t-u)}{2T}du$$



Xét -T < t <T

$$y(t) = \int_{o}^{T+t} e^{-\alpha u}\frac{A}{T}(t-u)du$$

$$y(t) = \frac{A}{T}\,t\int_{o}^{T+t} e^{-\alpha u}du - \frac{A}{T}\int_{o}^{T+t} u.e^{-\alpha u}du$$

$$= \frac{A}{T}\,t.\frac{e^{-\alpha u}}{-\alpha}\Bigg|_{0}^{T+t} + \frac{A}{T}u.\frac{e^{-\alpha u}}{-\alpha}\Bigg|_{0}^{T+t} + \frac{A}{T}\frac{e^{-\alpha u}}{\alpha^2}\Bigg|_{0}^{T+t}$$

$$= A\left(t - T + \frac{2T}{e}e^{\frac{-t}{T}}\right)$$

Xét t > T

$$y(t) = \int_{t-T}^{t+T} e^{-\alpha u}\frac{A}{T}(t-u)du$$

$$= \frac{2A}{e}t.e^{\frac{-t}{T}}$$

Xét t < -T

$y(t) = 0$

Vậy

$$y(t) = \begin{cases} A\left(t - T + \frac{2T}{e}e^{\frac{-t}{T}}\right) & , |t| < T \\ \frac{2A}{e}t.e^{\frac{-t}{T}} & , t > T \end{cases}$$

0 , t <-T

Ta có $h(t) = e^{-\alpha t}.1(t)$, $\alpha = \frac{1}{T}$

$$H(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{T}{1 + j\omega T}$$

$$|H(\omega)| = \frac{T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$Y(\omega) = H(\omega).X(\omega)$$

$$= \frac{T}{1 + j\omega T}.\, j\frac{2A}{\omega}(\cos\omega T - Sa\omega T)$$

$$\phi_y(\omega) = |Y(\omega)|^2$$

$$= \frac{4A^2T^2}{1 + (\omega T)^2}(\cos\omega T - Sa\omega T^2)\,.\frac{1}{\omega^2}$$

Bài 4.8:

a,

$$x(t) = A \prod \left(\frac{t}{\frac{T}{2}}\right)$$

$$x(t) \rightarrow X_T(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad X_T(\omega) = \frac{AT}{2} Sa\left(\frac{\omega T}{4}\right)$$

$$X_n = \frac{X_T(\omega)}{T} = \frac{A}{2} Sa\left(\frac{\omega T}{4}\right) = \frac{A}{2} Sa\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} X_n\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{A}{2} Sa\left(n\frac{\pi}{2}\right) \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \pi A \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} Sa\left(n\frac{\pi}{2}\right) \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T}\right)$$

b,

$Y(\omega) = K(\omega).X(\omega)$

Với $n = 0 \Rightarrow X(\omega) = 0 \Rightarrow Y(\omega) = 0$

Với $n = \pm 2; \pm 4 \Rightarrow X(\omega) = 0 \Rightarrow Y(\omega) = 0$

Với $n = \pm 1; \pm 3$

$$X(\omega) = \pi A[\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}) + \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega + \frac{2\pi}{T}) - \frac{1}{\frac{3\pi}{2}}\delta(\omega - \frac{6\pi}{T}) - \frac{1}{\frac{3\pi}{2}}\delta(\omega + \frac{6\pi}{T})]$$

$$Y\omega) = \pi A[\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}) + \frac{12}{\frac{\pi\pi}{2}}\delta(\omega + \frac{2\pi}{T}) - \frac{1}{\frac{3\pi}{2}}\frac{3\pi}{2}\delta(\omega - \frac{6\pi}{T}) - \frac{1}{\frac{3\pi}{2}}\frac{3\pi}{2}\delta(\omega + \frac{6\pi}{T})]$$

$$\Rightarrow Y\omega) = \pi A[\ \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}) + \delta(\omega + \frac{2\pi}{T}) - \delta(\omega - \frac{6\pi}{T}) - \delta(\omega + \frac{6\pi}{T})]$$

c,

Ta có: $Y\omega) = 2\pi[\frac{A}{2}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}) + \frac{A}{2}\delta(\omega + \frac{2\pi}{T}) - \frac{A}{2}\delta(\omega - \frac{6\pi}{T}) - \frac{A}{2}\delta(\omega + \frac{6\pi}{T})]$

$$\Psi_y(\omega) = 2\pi[\frac{A^2}{4}\delta(\omega - \frac{2\pi}{T}) + \frac{A^2}{4}\delta(\omega + \frac{2\pi}{T}) - \frac{A^2}{4}\delta(\omega - \frac{6\pi}{T}) - \frac{A^2}{4}\delta(\omega + \frac{6\pi}{T})]$$

$$= \frac{\pi A^2}{2}[\ \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}) + \delta(\omega + \frac{2\pi}{T}) - \delta(\omega - \frac{6\pi}{T}) - \delta(\omega + \frac{6\pi}{T})]$$

$$P_y = \frac{\pi A^2}{2\pi.2}(1 + 1 + 1 + 1) = A^2$$

Bài 4.9:

a,

$$x(t) = z(t)*Sa4\omega_0 t$$

mà $z(t) = \pi \prod(\frac{2t}{T})*\frac{1}{T}|||(\frac{t}{T})$, $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Ta thấy z(t) là tín hiệu tuần hoàn với chu kì T

$$z(t) = x_1(t)*\frac{1}{T}\ |||(\frac{t}{T})$$

$$Z(\omega) = X_1(\omega).\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\delta(\omega - n\omega_0)$$

Xét tín hiệu $x_1(t)$

$$x_1(t) = \pi \prod(\frac{t}{\frac{T}{2}})$$

$$\Rightarrow X_1(\omega) = \frac{\pi T}{2} Sa(\frac{\omega T}{4})$$

$$= \frac{\pi T}{2} Sa(n\frac{\pi}{2})$$

$\Rightarrow$ $Z(\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} Sa\,(n\frac{\pi}{2}).\ \delta\,(\omega - n\omega_0)$

$X(\omega) = Z(\omega).\ \frac{\pi}{4\omega_0} \prod (\frac{\omega}{8\omega_0})$

$= \frac{\pi^3}{4\omega_0}\,[\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\delta\,(\omega - \omega_0) + \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\delta\,(\omega + \omega_0) + \frac{1}{\frac{-3\pi}{2}}\delta\,(\omega - 3\omega_0) + \frac{1}{\frac{-3\pi}{2}}\delta\,(\omega + 3\omega_0)]$

$= \frac{\pi^2}{2\omega}\,[\delta\,(\omega - \omega_0) + \delta\,(\omega + \omega_0) - \frac{1}{3}\delta\,(\omega - 3\omega_0) - \frac{1}{3}\delta\,(\omega + 3\omega_0)]$

$= \frac{\pi T}{4}\,[\delta\,(\omega - \omega_0) + \delta\,(\omega + \omega_0) - \frac{1}{3}\delta\,(\omega - 3\omega_0) - \frac{1}{3}\delta\,(\omega + 3\omega_0)]$

$\Rightarrow X(\omega) = 2\pi\,[\frac{T}{8}\delta\,(\omega - \omega_0) + \frac{T}{8}\delta\,(\omega + \omega_0) - \frac{T}{24}\delta\,(\omega - 3\omega_0) - \frac{T}{24}\delta\,(\omega + 3\omega_0)]$

$\Psi_x(\omega) = 2\pi\frac{T^2}{64}\,[\ \frac{\pi^2}{4}\delta(\omega) + \delta\,(\omega - \omega_0) + \delta\,(\omega + \omega_0) + \frac{1}{9}\delta\,(\omega - 3\omega_0) + \frac{1}{9}\delta\,(\omega + 3\omega_0)]$

$P_x = \frac{1}{2\pi}.2\pi.\frac{T^2}{64}\,[\ 1 + 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \ \frac{\pi^2}{4}\ ] = 0{,}0347T^2$

b,

$Y(\omega) = K(\omega).X(\omega)$

$Y(\omega) = \frac{\pi T}{4}\,[\frac{1}{3}\delta\,(\omega - \omega_0) + \frac{1}{3}\delta\,(\omega + \omega_0) - \frac{1}{3}\delta\,(\omega - 3\omega_0) - \frac{1}{3}\delta\,(\omega + 3\omega_0)]$

$= 2\pi\,[\frac{T}{24}\delta\,(\omega - \omega_0) + \frac{T}{24}\delta\,(\omega + \omega_0) - \frac{T}{24}\delta\,(\omega - 3\omega_0) - \frac{T}{24}\delta\,(\omega + 3\omega_0)]$

$\Psi_y(\omega) = 2\pi\,\frac{T^2}{576}\,[\delta\,(\omega - \omega_0) + \delta\,(\omega + \omega_0) + \delta\,(\omega - 3\omega_0) + \delta\,(\omega + 3\omega_0)]$

$P_y = \frac{1}{2\pi}.2\pi.\frac{T^2}{576}[\ 1 + 1 + 1 + 1\ ] = 0{,}0069T^2 = 0{,}1938P_x$

c,

Ta có:

$Y(\omega) = \frac{\pi T}{12}\,[\ \delta\,(\omega - \omega_0) + \delta\,(\omega + \omega_0) - \delta\,(\omega - 3\omega_0) - \delta\,(\omega + 3\omega_0)]$

$\Rightarrow\ \ y(t) = \frac{T}{12}\,(\ \cos\omega_0 t - \cos 3\omega_0 t\ )$

$\Psi_y(\omega) = \frac{T^2}{288}\,[\pi\delta\,(\omega - \omega_0) + \pi\delta\,(\omega + \omega_0) + \pi\delta\,(\omega - 3\omega_0) + \pi\delta\,(\omega + 3\omega_0)]$

$\Rightarrow \varphi_y(t) = \frac{T^2}{288}\,(\ \cos\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t\ )$

Bài 4.10:

$x(t)=\pi|\sin\omega_0 t|$

ta thấy

x(t) là tín hiệu tuần hoàn của $x_1(t)$ với chu kì $\frac{\pi}{2}$

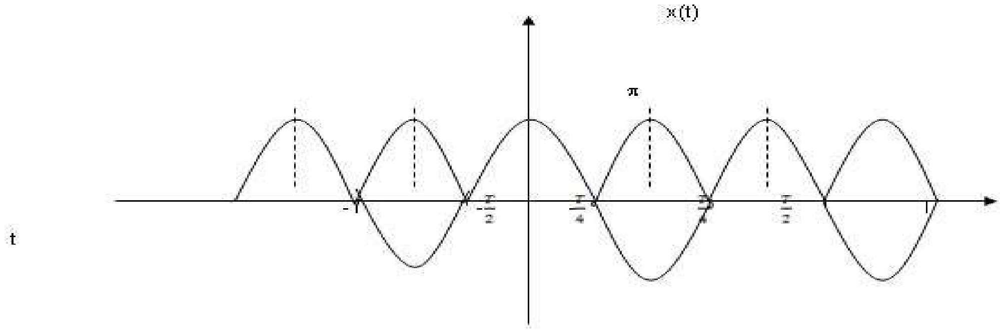
$x_1(t)=\pi\sin\omega_0 t.\pi\left(\frac{t}{\frac{T}{2}}\right)$

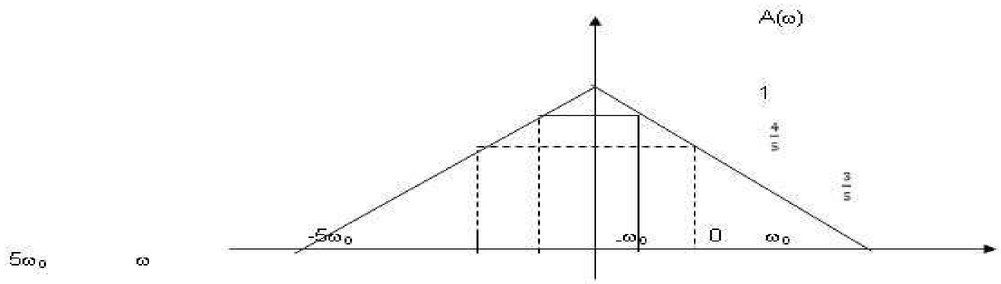
$X_1(\omega)=\frac{\pi T}{j4}\left[Sa\frac{(\omega-\omega_0)T}{4}-Sa\frac{(\omega+\omega_0)T}{4}\right]$

$=> X(\omega)=\frac{\pi^2}{j4}\sum_{i=n=-\infty}^{i=\infty}\left(Sa\frac{(n-1)\pi}{2}-Sa\frac{(n+1)\pi}{2}\right)$

$Y(\omega)=K(\omega).X(\omega)$

Vẽ hình





$Y(\omega)=\frac{\pi_2}{j4}\left[\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\frac{3\pi}{2}}\right)\right]\frac{4}{5}j.\ \delta(\omega-\omega_0)+\left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right).\frac{4}{5}(-j).\delta(\omega-\omega_0)$

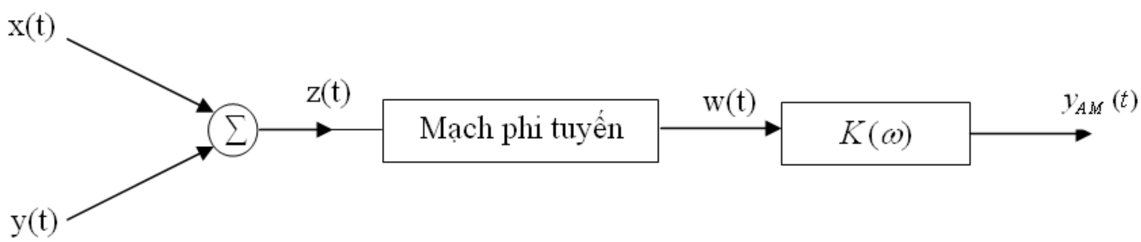
CHƯƠNG 5 – TÍN HIỆU ĐIỀU CHẾ

Bài 5.1 Một máy phát làm việc trong hệ điều chế AM, có tần số của sóng mang f_0=104kHz. Bề rộng phổ của tín hiệu tin tức là 300 Hz - 3.4kHz. Hỏi máy thu tín hiệu trên cần bề rộng dải thông là bao nhiêu và làm việc ở dải tần nào?

Bài 5.2 Ở đầu vào của mạch lọc thông thấp có đặc tuyến tần số $K(\omega) = \Lambda\left(\dfrac{\omega}{\omega_o}\right)$ được đưa đến tín hiệu $y_{AM}(t) = [A + x(t)].\cos 2\pi 10^5 t$; cho biết hệ số độ sâu điều chế $m = 0.5$ và $\omega_1 = \dfrac{1}{2}\omega_o$. Hãy tìm tín hiệu ở đầu ra mạch lọc z(t), phổ $Z(\omega)$ và công suất của tín hiệu.

Bài 5.3 Tín hiệu AM có dạng $y_{AM}(t) = [A + x(t)].\cos 2\pi 10^5 t$, trong đó tín hiệu tin tức x(t) lá tín hiệu tuần hoàn được biểu diễn trên hình B5.1.Hãy tìm biên độ nhỏ nhất của sóng mang $A_{\min}$,để tín hiệu $y_{AM}(t)$ được tách sóng khong bị méo trong mạch tách sóng hình bao. Hãy vẽ tín hiệu AM tương ứng với biên độ tìm được và tín hiệu AM-SC, $y_{AM-SC}(t) = x(t).\cos 2\pi 10^5 t$

Bài 5.4 Tín hiệu AM được tạo trong mạch điều chế như trên hình B.5.4. ở đầu vào hệ thống được đưa tới tín hiệu tin tức $x(t) = 15.\cos 10^3 t$ và $y(t) = 5.\cos 10^6 t$.Hãy tính hệ số độ sâu điều chế của tín hiệu $y_{AM}(t)$ ở đầu ra của mạch điều chế. Cho biết đặc tuyến của mạch phi tuyến là $\mathrm{w} = 10 + 2z + 0.02z^2$; còn đặc tuyến tần số của mạch lọc là: $K(\omega) = \Pi\left(\dfrac{\omega - 10^6}{3.10^3}\right) + \Pi\left(\dfrac{\omega + 10^6}{3.10^3}\right)$



Bài 5.5 Cho tín hiệu điều biên $u_{AM}(t) = U(1 + m\cos\omega t).\cos\Omega t$. Hãy đưa ra công thức tính hệ số độ sâu điều chế m, với $m \le 1$, theo các thông số của tín hiệu:

a) Giá trị cực đại $U_{\max}$ và giá trị cực tiểu $U_{\min}$ của hình bao $u_{AM}(t)$.

b) Hệ số sóng hài $h = \sqrt{\dfrac{P_m}{P_{AM}}}$, trong đó P_{AM} là công suất trung bình của tín hiệu và P_m là công suất trung bình khi lọc bỏ sóng mang.

Bài 5.6 Áp dụng kết quả bài 5.5, để tìm các hệ số sâu điều chế của tín hiệu AM sau đây:

$$u_{AM}(t) = U(1 + 0.3\cos\omega t + 0.4\cos 2\omega t).\cos\Omega t$$

Bài 5.7 Ở đầu vào của một mạch lọc có đặc tuyến tần số $K(\omega)$, được đưa đến tín hiệu điều biên có dạng:

$$x_v(t) = A\left[1 + x(t)\right]\cos\Omega t$$

Tín hiệu ở đầu ra của mạch cũng là tín hiệu điều biên:

$$x_r(t) = B\left[1 + y(t)\right]\cos\Omega t$$

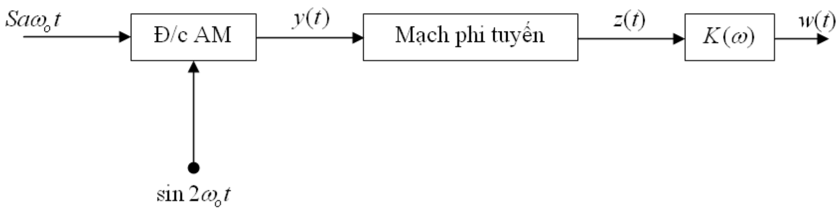
a)Hãy vẽ phổ của tín hiệu đầu ra mạch lọc.

b)Tìm quá trình y(t) và năng lượng của nó. Cho biết: $A = 2$; $\Omega = 10rd/s$; $x(t) = Sa2t$; $K(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega - 10}{4}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega + 10}{4}\right)$

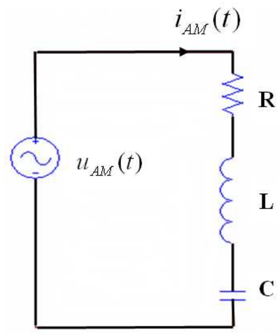
Bài 5.8 Sóng mang $\sin 2\omega_o t$ bị điều chế bởi tín hiệu $Sa\omega_o t$ trong hệ AM, ở đầu ra của mạch điều chế nhận được $y_{AM}(t) = \left(1 + Sa\omega_o t\right)\sin 2\omega_o t$. Tín hiệu $y_{AM}(t)$ được đưa đến mạch phi tuyến có đặc tuyến $z = |y|$(hình 5.8),và sau đó cho qua mạch lọc thông dải có đặc tuyến tần số:

$$K(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - 4\omega_o}{2\omega_o}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + 4\omega_o}{2\omega_o}\right)$$

Hãy tìm tín hiệu $w(t)$ và công suất trung bình của nó.



Bài 5.9 Một đài phát làm việc với song mang có bước sóng $\lambda = 300m$, sóng mang bị điều chế bởi tín hiệu $x(t) = a\cos 2\pi 10^3 t$ trong hệ AM. Điện áp của tín hiệu điều biên AM được đưa đến mạch cộng hưởng với tần số sóng mang (hình 5.9). Hãy tìm hệ số phẩm chất nhỏ nhất cần có của mạch cộng hưởng, để tỉ số giữa biên độ dải bên với biên độ sóng mang của dòng $i_{AM}(t)$ suy giảm không lớn hơn 3dB so với tỷ số giữa biên độ sóng bên với biên độ sóng mang của tín hiệu $u_{AM}(t)$.



Bài 5.10 Ở đầu vào mạch cộng hưởng nối tiếp trên hình 5.9, được đưa đến tín hiệu điều biên:

$$u_{AM}(t) = \left(100 + 50\cos 10^4 t\right)\cos 10^6 t\,(V)$$

Mạch được điều chỉnh cộng hưởng ở tần số sóng mang.

a) Hãy tính hệ số phẩm chất,nếu biết rằng, đường bao của tín hiệu dòng điện $i_{AM}(t)$ bị dịch chuyển so với đường bao của tín hiệu điện áp $u_{AM}(t)$ một góc $\frac{\pi}{3}$.

b) Tìm các thông số L, R của mạch, cũng như hệ số độ sâu điều chế dòng điện m_i, nếu $C = 2nF$

BÀI GIẢI

Bài 5.1

Tần số sóng mang: $f_o = 104kHz$

Bề rộng phổ của tín hiệu tin tức: 300 Hz – 400 kHz ($f_{\min} - f_{\max}$)

Bề rộng dải thông:

$B_{AM} = 2\omega_{\max} = 2.2\pi f_{\max} = 2\pi.2.3,4 = 2\pi.6,8$ (rad/s)

Dải tần làm việc của máy thu tín hiệu:

$f'_{\min} = f_o - f_{\max} = 104 - 3,4 = 100,6$ kHz

$f'_{\max} = f_o + f_{\max} = 104 + 3,4 = 107,4$ kHz

Bài 5.2

$$y_{AM}(t) = (1 + m\cos\omega_1 t)\cos\left(\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y_{AM}(t) = (1 + 0.5\cos\frac{\omega_o}{2}t)\cos\left(\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right) + 0.5\cos\frac{\omega_o}{2}t.\cos\left(\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left(\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\omega_o}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Phổ của tín hiệu $y_{AM}(t)$ là:

$$Y_{AM}(\omega) = \pi\left(\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)\right)e^{j\omega\frac{\pi}{4}}$$

$$+\frac{1}{4}\pi\left(\delta\left(\omega - \frac{1}{2}\omega_o\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{2}\omega_o\right) + \delta\left(\omega - \frac{3}{2}\omega_o\right) + \delta\left(\omega + \frac{3}{2}\omega_o\right)\right)e^{j\omega\frac{\pi}{4}}$$

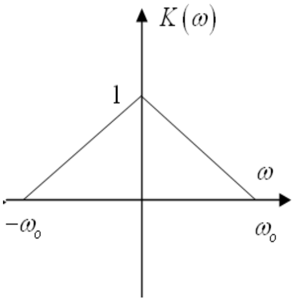
Đặt:

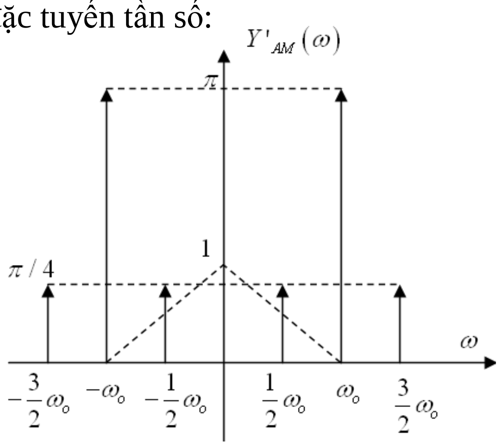
$$Y'_{AM}(\omega) = \pi\left(\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o)\right)$$

$$+\frac{1}{4}\pi\left(\delta\left(\omega - \frac{1}{2}\omega_o\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{2}\omega_o\right) + \delta\left(\omega - \frac{3}{2}\omega_o\right) + \delta\left(\omega + \frac{3}{2}\omega_o\right)\right)$$

Ở đầu vào mạch lọc thông thấp có đặc tuyến tần số:

$$K(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$





Phổ của tín hiệu ở đầu ra mạch lọc:

$$Z(\omega) = Y_{AM}(\omega).K(\omega) = Y'_{AM}.K(\omega).e^{j\omega\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\pi\left[\delta\left(\omega - \frac{1}{2}\omega_o\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{2}\omega_o\right)\right]e^{j\omega\frac{\pi}{4}}$$

Tín hiệu ở đầu ra mạch lọc: $z(t) = \frac{1}{8}\cos\left(\frac{1}{2}\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right)$

Công suất của tín hiệu z(t):

$$P_z = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{2} = \frac{1}{128}$$

Kết luận:

*Tín hiệu ở đầu ra mạch lọc:

$$z(t) = \frac{1}{8}\cos\left(\frac{1}{2}\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right)$$

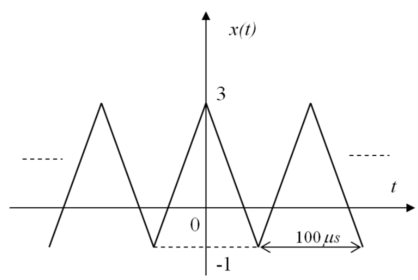
*Phổ của tín hiệu:

$$Z(\omega) = \frac{1}{8}\pi\left[\delta\left(\omega - \frac{1}{2}\omega_o\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{2}\omega_o\right)\right]e^{j\omega\frac{\pi}{4}}$$

*Công suất của tín hiệu:

$$P_z = \frac{1}{128}$$

Bài 5.3

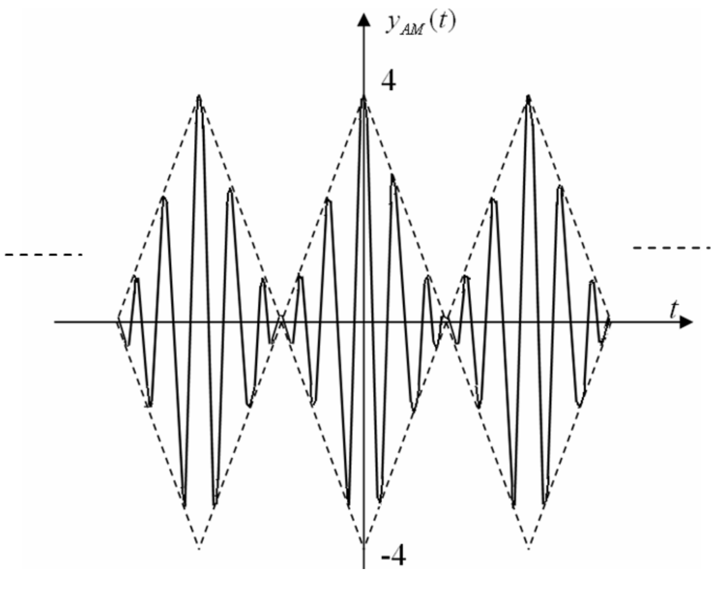


$y_{AM}(t) = [A + x(t)].\cos 2\pi 10^5 t$

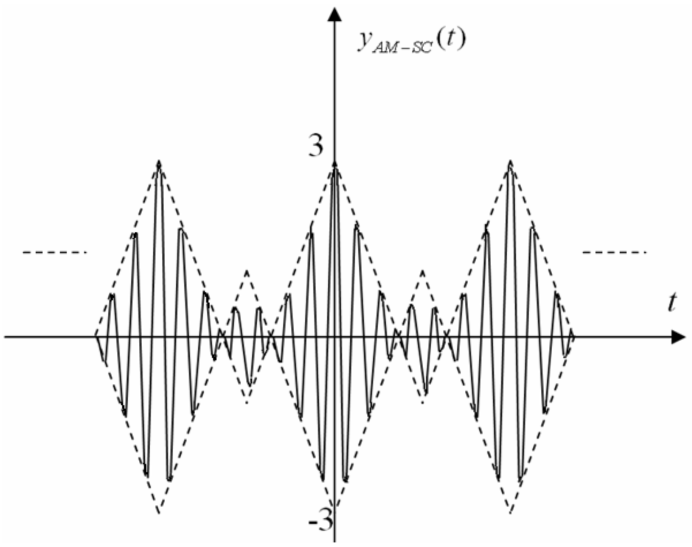
Biên độ nhỏ nhất của sóng mang A_{min} để tín hiệu $y_{AM}(t)$ được tách sóng không bị méo trong mạch tách sóng hình bao

$A \geq \max\{|x(t)| : x(t) < 0\}$ => $A_{min} = 1$

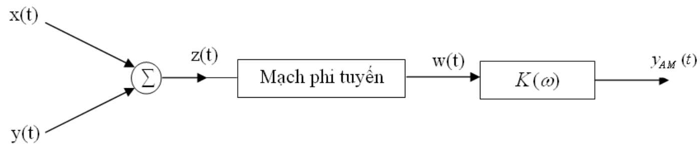
Tín hiệu AM tương ứng với biên độ A=1



Tín hiệu AM-SC: $y_{AM-SC}(t) = x(t)\cos 2\pi 10^5 t$



Bài 5.4



Ta có:

$z(t) = x(t) + y(t) = 15\cos 10^3 t + 5\cos 10^6 t$

Mà $w = 10 + 2z + 0.02z^2$

=> $\text{w(t)} = 10 + 30\cos 10^3 t + 10\cos 10^6 t + \frac{9}{2}\cos^2 10^3 t + \frac{1}{2}\cos^2 10^6 t + 3\cos 10^3 t.\cos 10^6 t$

$$= 10 + 30\cos 10^3 t + 10\cos 10^6 t + \frac{9}{4} + \frac{9}{4}\cos 2.10^3 t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2.10^6 t + 3\cos 10^3 t.\cos 10^6 t$$

$$= \frac{25}{2} + 30\cos 10^3 t + 10\cos 10^6 t + \frac{9}{4}\cos 2.10^3 t + \frac{1}{4}\cos 2.10^6 t + \frac{3}{2}\left(\cos(10^3 - 10^6)t + \cos(10^6 + 10^3)t\right)$$

Phổ của tín hiệu w(t):

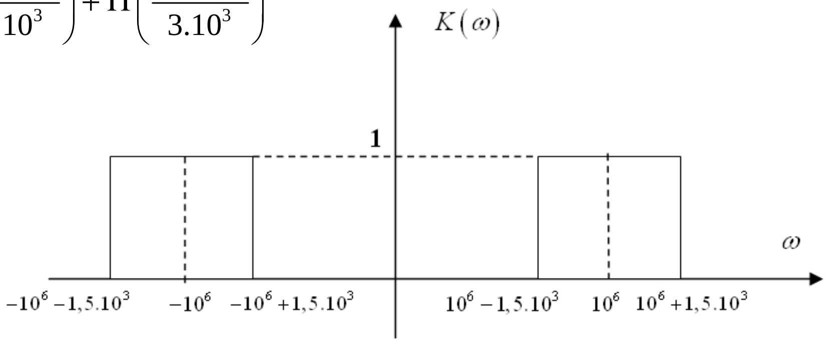
$$\text{W}(\omega) = 25\pi\delta(\omega) + 30\pi\left[\delta(\omega - 10^3) + \delta(\omega + 10^3)\right] + 10\pi\left[\delta(\omega - 10^6) + \delta(\omega + 10^6)\right]$$

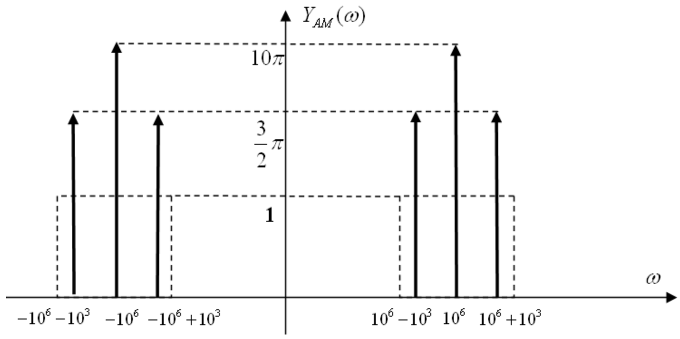
$$+\frac{9}{4}\pi\left[\delta(\omega - 2.10^3) + \delta(\omega + 2.10^3)\right] + \frac{1}{4}\pi\left[\delta(\omega - 2.10^6) + \delta(\omega + 2.10^6)\right]$$

$$+\frac{3}{2}\pi\left[\delta(\omega - (10^3 - 10^6)) + \delta(\omega + (10^3 - 10^6)) + \delta(\omega - (10^3 + 10^6)) + \delta(\omega + (10^3 + 10^6))\right]$$

Đặc tuyến của mạch lọc:

$$K(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - 10^6}{3.10^3}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + 10^6}{3.10^3}\right)$$





Phổ của tín hiệu ra sau khi qua mạch lọc:

$$Y_{AM}(\omega) = W(\omega).K(\omega)$$
$$= 10\pi\left[\delta(\omega-10^6)+\delta(\omega+10^6)\right]+\frac{3}{2}\pi\left[\delta(\omega-(10^3-10^6))+\delta(\omega+(10^3-10^6))\right]$$
$$+\frac{3}{2}\pi\left[\delta(\omega-(10^3+10^6))+\delta(\omega+(10^3+10^6))\right]$$

Tín hiệu đầu ra mạch lọc:

$$y_{AM}(t) = 10\cos 10^6 t+\frac{3}{2}\cos\left(10^3-10^6\right)t+\frac{3}{2}\cos\left(10^3+10^6\right)t$$
$$= 10\cos 10^6 t + 3\cos 10^3 t\cos 10^6 t$$

Vậy hệ số độ sâu điều chế của tín hiệu $y_{AM}(t)$: $m=\frac{3}{10}=0.3$

Bài 5.5

a) $u_{AM}(t)=U(1+m\cos\omega t).\cos\Omega t$

Đặt $x=\cos\omega t$ $(x\in[-1;1])$

$f(x)=U(1+mx) \quad => U-mU \le f(x)\le U+mU$

$U_{max} = f_{max}(x)=U+mU$

$U_{\min} = f_{\min}(x)=U-mU$

=> $U_{max}-U_{\min}=2mU$, $U_{max}+U_{\min}=2U$

$$=> m=\frac{U_{max}-U_{\min}}{U_{max}+U_{\min}}$$

b)

$$h=\sqrt{\frac{P_m}{P_{AM}}}$$

$$u_{AM}(t)=U(1+m\cos\omega t).\cos\Omega t = U\cos\Omega t + mU\cos\omega t\cos\Omega t$$
$$= U\cos\Omega t+\frac{1}{2}mU\left[\cos\left(\omega+\Omega\right)t+\cos\left(\omega-\Omega\right)t\right]$$

$P_m = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(mU)^2$, $P_{AM} = \frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(mU)^2$

$$h^2 = \frac{P_m}{P_{AM}} = \frac{\frac{1}{2}(mU)^2}{U^2 + \frac{1}{2}(mU)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{2+m^2}{m^2} = \frac{2}{m^2} + 1 \Leftrightarrow m^2 = \frac{2h^2}{1-h^2} \Leftrightarrow m = h\sqrt{\frac{2}{1-h^2}}$$

Bài 5.6

a)

$u_{AM}(t) = U(1 + 0.3\cos\omega t + 0.4\cos 2\omega t).\cos\Omega t$

$= U(0.6 + 0.3\cos\omega t + 0.8\cos^2\omega t).\cos\Omega t$

Đặt $\cos\omega t = x$ với $x \in [-1;1]$

$f(x) = 0,6 + 0,3x + 0,8x^2$

$f'(x) = 0,3 + 1,6x$

$f'(x) = 0 <=> x = \frac{-3}{16}$

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{-3}{16}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1,1 ↘	0,57	↗ 1,7

=> $f_{\max}(x) = 1,7$, $f_{\min}(x) = 0,57$

$U_{max} = U.f_{\max} = 1.7U$

$U_{\min} = U.f_{\min} = 0.57U$

$$m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} - U_{\min}} = \frac{1,7U - 0,57U}{1,7U + 0,57U} = \frac{1,13}{2,27} \approx 0.498$$

b) $u_{AM}(t) = U(1 + 0.3\cos\omega t + 0.4\cos 2\omega t).\cos\Omega t$

$= U\cos\Omega t + 0.3U\cos\omega t.\cos\Omega t + 0.4U\cos 2\omega t.\cos\Omega t$

$= U\cos\Omega t + \frac{0.3}{2}\left[U\cos(\omega+\Omega)t + U\cos(\omega-\Omega)\right]t + \frac{0.4}{2}\left[U\cos(2\omega+\Omega)t + U\cos(2\omega-\Omega)t\right]$

$$P_m = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(0.3U)^2 + \frac{1}{2}(0.4U)^2\right] = \frac{1}{16}U^2$$

$$P_{AM} = \frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(0.3U)^2 + \frac{1}{2}(0.4U)^2\right] = \frac{9}{16}U^2$$

$$h = \sqrt{\frac{P_m}{P_{AM}}} = \frac{1}{3}$$

=> $m = h\sqrt{\frac{2}{1-h^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{1-\frac{1}{9}}} = 0.5$

Kết luận:

a) $m = 0.498$

b) $m = 0.5$

Bài 5.7

a)

b)

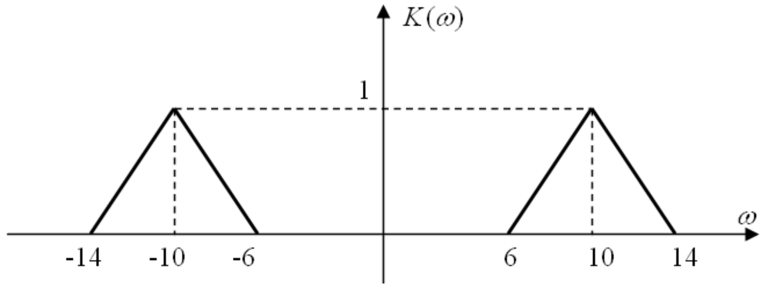
$x_v(t) = A[1 + x(t)]\cos\Omega t$

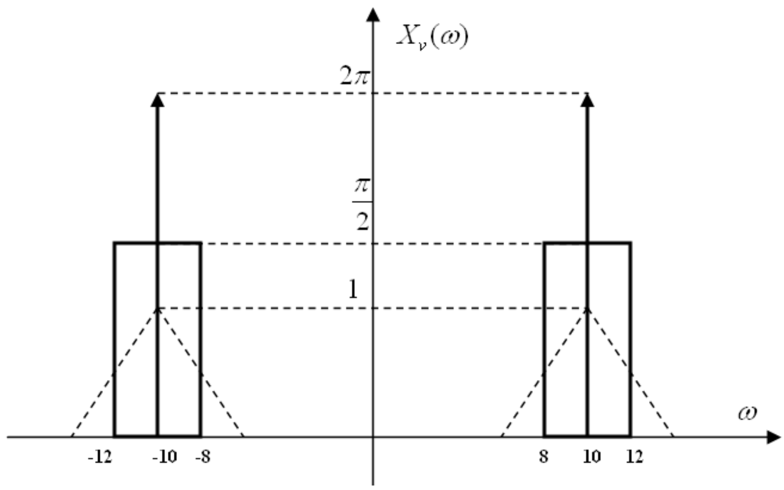
$x_v(t) = 2[1 + Sa2t]\cos 10t = 2\cos 10t + 2Sa2t.\cos 10t$

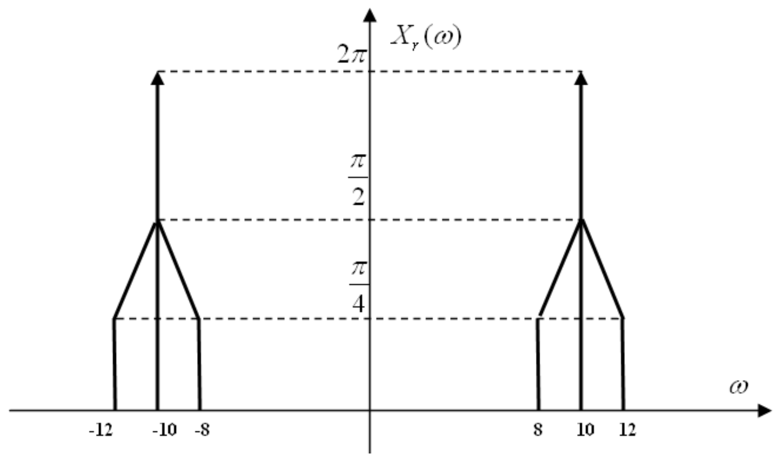
Phổ của tín hiệu $x_v(t)$:

$$X_v(\omega) = 2\pi[\delta(\omega - 10) + \delta(\omega + 10)] + \frac{\pi}{2}\Pi\left(\frac{\omega - 10}{4}\right) + \frac{\pi}{2}\Pi\left(\frac{\omega + 10}{4}\right)$$

Mạch lọc có đặc tuyến tần số: $K(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega - 10}{4}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega + 10}{4}\right)$







Phổ của tín hiệu $x_r(t)$:

$$X_r(\omega) = X_v(\omega).K(\omega)$$

$$= 2\pi\left[\delta(\omega-10)+\delta(\omega+10)\right]+\frac{\pi}{4}\Pi\left(\frac{\omega-10}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\Lambda\left(\frac{\omega-10}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\Pi\left(\frac{\omega+10}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\Lambda\left(\frac{\omega+10}{2}\right)$$

$$x_r(t) = 2\cos 10t + \frac{1}{2}Sa2t.e^{j10t} + \frac{1}{4}Sa^2t.e^{j10t} + \frac{1}{2}Sa2t.e^{-j10t} + \frac{1}{4}Sa^2t.e^{-j10t}$$

$$= 2\cos 10t + \frac{1}{2}Sa2t.\left(e^{j10t}+e^{-j10t}\right)+\frac{1}{4}Sa^2t.\left(e^{j10t}+e^{-j10t}\right)$$

$$= 2\cos 10t + \frac{1}{2}Sa2t.2\cos 10t + \frac{1}{4}Sa^2t.2\cos 10t$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{2}Sa2t+\frac{1}{4}Sa^2t\right)\cos 10t$$

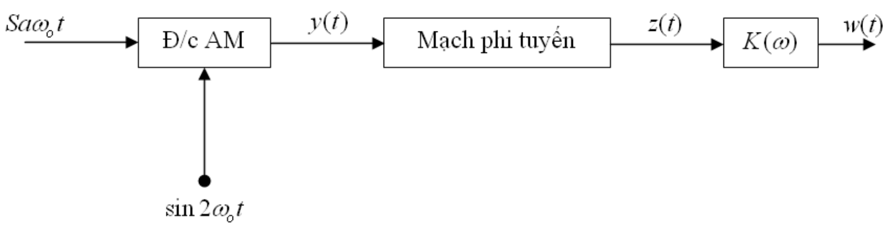
Mà $x_r(t) = B\left[1+y(t)\right]\cos\Omega t$

$$=> y(t) = \frac{1}{2}Sa2t + \frac{1}{4}Sa^2t$$

Năng lượng của tín hiệu y(t):

$$\to E_y = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}.\frac{2}{3}.\frac{\pi}{1} = \frac{5\pi}{12}$$

Bài 5.8



Tín hiệu $y_{AM}(t) = (1+Sa\omega_o t)\sin 2\omega_o t$ sau khi qua mạch phi tuyến có dạng:

$$z(t) = \left|y_{AM}(t)\right| = \left|(1+Sa\omega_o t)\sin 2\omega_o t\right| = (1+Sa\omega_o t).\left|\sin 2\omega_o t\right|$$

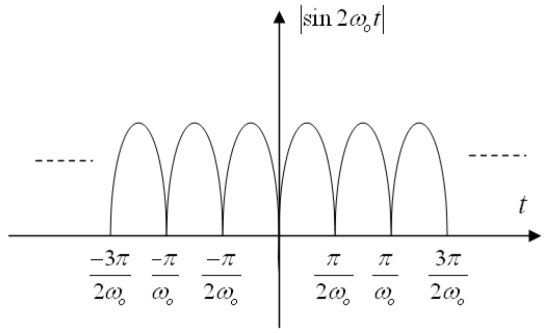
Vì $1+Sa\omega_o t \ge 0$

Phổ của $x(t) = \left|\sin(2\omega_o t)\right|$ có dạng:

$$X(\omega) = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n.\delta(\omega - n\omega')$$

$x(t) = \left|\sin(2\omega_o t)\right|$ là tín hiệu tuần hoàn với:

- Chu kỳ: $T = \dfrac{\pi}{2\omega_o}$,



- Tần số góc $\omega' = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2\omega_o}} = 4\omega_o$

Tín hiệu $\left|\sin(2\omega_o t)\right|$ trong 1 chu kỳ $T,\ t\in[0,T]$ có dạng:

$$x_T(t)=\sin(2\omega_o t).\Pi\left(\frac{t-\frac{\pi}{4\omega_o}}{\frac{\pi}{2\omega_o}}\right)$$

$$=>\ X_T(\omega)=\frac{1}{2j}.\frac{\pi}{2\omega_o}\left(Sa\frac{(\omega-2\omega_o)\pi}{4\omega_o}.e^{-j\frac{(\omega-2\omega_o)\pi}{4\omega_o}}-Sa\frac{(\omega+2\omega_o)\pi}{4\omega_o}.e^{-j\frac{(\omega+2\omega_o)\pi}{4\omega_o}}\right)$$

$$X_N=\frac{X(n\omega')}{T}=\frac{X(4n\omega_o)}{T}$$

$$=\frac{1}{2j}.\frac{\pi}{2\omega_o}.\frac{2\omega_o}{\pi}\left(Sa\frac{(4n\omega_o-2\omega_o)\pi}{4\omega_o}.e^{-j\frac{(4n\omega_o-2\omega_o)\pi}{4\omega_o}}-Sa\frac{(4n\omega_o+2\omega_o)\pi}{4\omega_o}.e^{-j\frac{(4n\omega_o+2\omega_o)\pi}{4\omega_o}}\right)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(Sa\frac{(2n-1)\pi}{2}.e^{-j\frac{(2n-1)\pi}{2}}-Sa\frac{(2n+1)\pi}{2}.e^{-j\frac{(2n+1)\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)}{\frac{(2n-1)\pi}{2}}.e^{-j\frac{(2n-1)\pi}{2}}-\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{\frac{(2n+1)\pi}{2}}.e^{-j\frac{(2n+1)\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2j}.\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)}{2n-1}.e^{-j\frac{(2n-1)\pi}{2}}-\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{2n+1}.e^{-j\frac{(2n+1)\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{j\pi}.\left[\frac{1}{2n-1}.\left(\frac{\sin((2n-1)\pi)}{2}-j\sin^2\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right)-\frac{1}{2n+1}.\left(\frac{\sin((2n+1)\pi)}{2}-j\sin^2\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{j\pi}.\left[\frac{1}{2n-1}.\left(0-j\cos^2(n\pi)\right)-\frac{1}{2n+1}.\left(0-j\cos^2(n\pi)\right)\right]$$

$$=\frac{1}{j\pi}.\left[\frac{-j\cos^2(n\pi)}{2n-1}+\frac{j\cos^2(n\pi)}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{\cos^2(n\pi)}{\pi}.\left[\frac{-1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}.\left[\frac{2}{1-4n^2}\right]\ \text{vì}\ \cos^2(n\pi)=1$$

Do đó:

$$X(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\pi(1-4n^2)}.\delta(\omega-4n\omega_0)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{4}{1-4n^2}.\delta(\omega-4n\omega_0)$$

Vậy ta có: $1+Sa\omega_o t\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)+\dfrac{\pi}{\omega_o}\Pi\left(\dfrac{\omega}{2\omega_o}\right)$

$$\left|\sin 2\omega_o t\right|\leftrightarrow\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{4}{1-4n^2}.\delta(\omega-4n\omega_o)$$

Áp dụng định lý phổ của tích tín hiệu ta có:

$$(1+Sa\omega_o t).\left|\sin 2\omega_o t\right|\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}\left[\left(2\pi\delta(\omega)+\frac{\pi}{\omega_o}\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_o}\right)\right)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{4}{1-4n^2}.\delta(\omega-4n\omega_o)\right]$$

Phổ của tín hiệu $z(t)$ là:

$$Z(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{4}{1-4n^2}.[\delta(\omega)*\delta(\omega-4n\omega_o)]+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\omega_o(1-4n^2)}.\left[\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_o}\right)*\delta(\omega-4n\omega_o)\right]$$

Áp dụng tính chất tích chập của phân bố $\delta(\omega)$ với hàm bất kỳ, ta có:

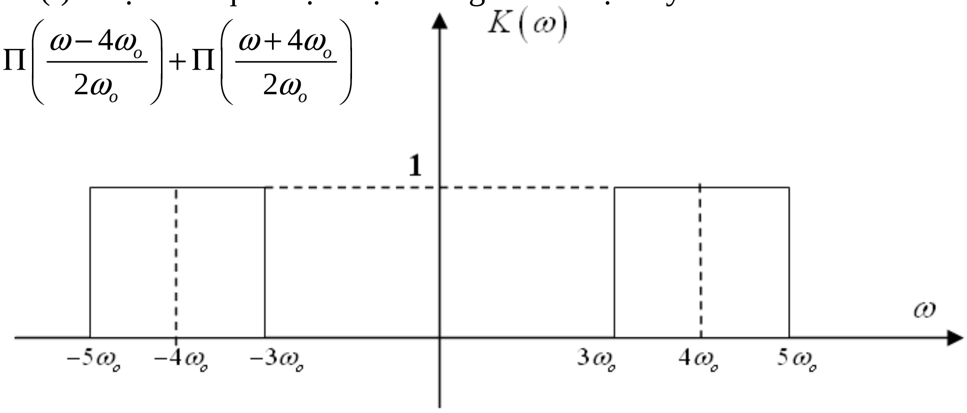
$$\delta(\omega)*\delta(\omega-4n\omega_o)=\delta(\omega-4n\omega_o)$$

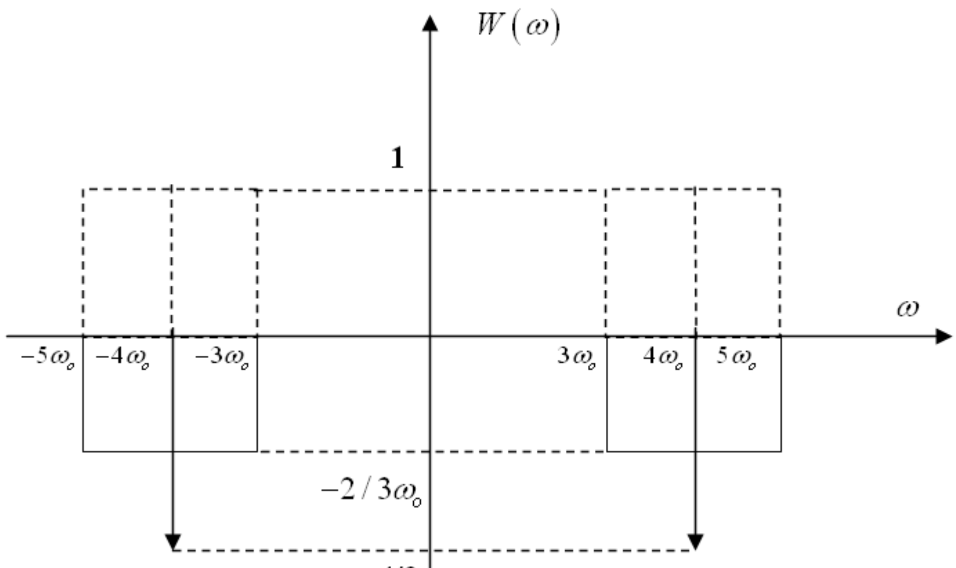
$$\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_o}\right)*\delta(\omega-4n\omega_o)=\Pi\left(\frac{\omega-4n\omega_o}{2\omega_o}\right)$$

Vậy: $Z(\omega)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{4}{1-4n^2}.\delta(\omega-4n\omega_o)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\omega_o(1-4n^2)}.\Pi\left(\frac{\omega-4n\omega_o}{2\omega_o}\right)$

Tín hiệu $z(t)$ được đưa qua mạch lọc thông dải có đặc tuyến tần số:

$$K(\omega)=\Pi\left(\frac{\omega-4\omega_o}{2\omega_o}\right)+\Pi\left(\frac{\omega+4\omega_o}{2\omega_o}\right)$$





Phổ của $w(t)$ là:

$$W(\omega) = Z(\omega).K(\omega)$$

$$= \frac{4}{-3}.\delta(\omega - 4\omega_o) + \frac{2}{-3\omega_o}.\Pi\left(\frac{\omega - 4\omega_o}{2\omega_o}\right) + \frac{4}{-3}.\delta(\omega + 4\omega_o) + \frac{2}{-3\omega_o}.\Pi\left(\frac{\omega + 4\omega_o}{2\omega_o}\right)$$

$$= \frac{4}{-3}.\left[\delta(\omega - 4\omega_o) + \delta(\omega + 4\omega_o)\right] + \frac{2}{-3\omega_o}.\left[\Pi\left(\frac{\omega + 4\omega_o}{2\omega_o}\right) + \Pi\left(\frac{\omega - 4\omega_o}{2\omega_o}\right)\right]$$

$$=> w(t) = \frac{8}{-3}.\frac{1}{2\pi}.\cos 4\omega_o t + \frac{4}{-3\omega_o}.\frac{\omega_o}{\pi}.Sa\omega_o t.\cos 4\omega_o t$$

$$= \frac{4}{3\pi}\cos(4\omega_o t - \pi) + \frac{4}{3\pi}Sa\omega_o t.\cos(4\omega_o t - \pi)$$

$$= \frac{4}{3\pi}\left(1 + Sa\omega_o t\right).\cos(4\omega_o t - \pi)$$

Xét tín hiệu $w'(t) = \frac{4}{3\pi}Sa\omega_o t.\cos\left(4\omega_o t - \pi\right)$:

* $w'(t)$ tồn tại vô hạn

* $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{4}{3\pi}Sa\omega_o t.\cos\left(4\omega_o t - \pi\right) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{4}{3\pi}\frac{\sin\omega_o t}{\omega_o t}\cos\left(4\omega_o t - \pi\right) = 0$

=> $\frac{4}{3\pi}Sa\omega_o t.\cos\left(4\omega_o t - \pi\right)$ là tín hiệu năng lượng nên $P_{w'(t)} = 0$

Vậy công suất trung bình của $w(t)$ là:

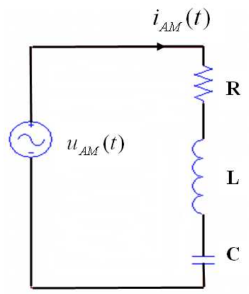
$$P_w = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 = 0.09$$

Kết luận:

Tín hiệu $w(t) = \frac{4}{3\pi}\left(1 + Sa\omega_o t\right).\cos(4\omega_o t - \pi)$

Công suất trung bình: $P_w = 0.09$

Bài 5.9



Sóng mang có bước sóng: $\lambda = 300m$

Tần số sóng mang: $f_o = \dfrac{C}{\lambda n} = \dfrac{3.10^8}{300.1} = 10^6 Hz$ => $\omega_o = 2\pi 10^6 (rad/s)$

Điện áp:

$u_{AM}(t) = (A + a\cos 2\pi 10^3 t)\cos 2\pi 10^6 t$ [V]

$= A\cos 2\pi 10^6 t + a\cos 2\pi 10^3 t.\cos 2\pi 10^6 t$

$= A\cos 2\pi 10^6 t + \dfrac{a}{2}\left(\cos(2\pi 10^6 - 2\pi 10^3)t + \cos(2\pi 10^6 + 2\pi 10^3)t\right)$

=> $\overset{o}{U}_{AM} = A\angle 0 + \dfrac{a}{2}\angle 0 + \dfrac{a}{2}\angle 0$

Đặt:

$\omega_1 = 2\pi(10^6 - 10^3)$ rad/s $\qquad \omega_2 = 2\pi(10^6 + 10^3)$ rad/s

Dòng điện chạy qua mạch:

$$\overset{o}{I}_{AM} = \frac{A\angle 0}{|Z_{\omega_0}|\angle\varphi_0} + \frac{\frac{a}{2}\angle 0}{|Z_{\omega_1}|\angle\varphi_1} + \frac{\frac{a}{2}\angle 0}{|Z_{\omega_2}|\angle\varphi_2}$$

Mạch cộng hưởng với tần số sóng mang nên $\omega_o L = \dfrac{1}{\omega_o C}$

=> $|Z_{\omega_o}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_o L - \dfrac{1}{\omega_o C}\right)^2} = \sqrt{R^2} = R$

$$\varphi_o = arctg\frac{\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C}}{R} = arctg 0 = 0$$

$$|Z_{\omega_1}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2} \qquad \varphi_1 = arctg\frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R}$$

$$|Z_{\omega_2}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2} \qquad \varphi_2 = arctg\frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R}$$

Ta thấy:

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \omega_1 L - \frac{\omega_o^2}{\omega_1}L = \left(\omega_1 - \frac{\omega_o^2}{\omega_1}\right)L = \left(2\pi(10^6 - 10^3) - \frac{4\pi^2 10^{12}}{2\pi(10^6 - 10^3)}\right)L = -12572.L$$

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = \omega_2 L - \frac{\omega_o^2}{\omega_2}L = \left(\omega_2 - \frac{\omega_o^2}{\omega_2}\right)L = \left(2\pi(10^6 + 10^3) - \frac{4\pi^2 10^{12}}{2\pi(10^6 + 10^3)}\right)L = 12560.L$$

=> $\left|Z_{\omega_1}\right| \approx \left|Z_{\omega_2}\right|$ =Z

$\varphi_1 = -\varphi_2 = -\varphi$

Vậy:

$$\overset{o}{I}_{AM} = \frac{A}{R}\angle 0 + \frac{a}{2Z}\angle\varphi + \frac{a}{2Z}\angle -\varphi$$

=> $i_{AM}(t) = \frac{A}{R}\cos 2\pi 10^6 t + \frac{a}{2Z}\cos((2\pi 10^6 - 2\pi 10^3)t + \varphi) + \frac{a}{2Z}\cos((2\pi 10^6 + 2\pi 10^3)t - \varphi)$

$$= \frac{A}{R}\cos 2\pi 10^6 t + \frac{a}{2Z}\cos(2\pi 10^6 t - (2\pi 10^3 t - \varphi)) + \frac{a}{2Z}\cos(2\pi 10^6 t + (2\pi 10^3 t - \varphi))$$

Tỉ số giữa biên độ sóng bên với biên độ sóng mang của tín hiệu $u_{AM}(t)$ là:

$$\beta_u = \frac{\frac{a}{2}}{A} = \frac{a}{2A}$$

Tỉ số giữa biên độ giải bên với biên độ sóng mang của dòng $i_{AM}(t)$ là:

$$\beta_i = \frac{\frac{a}{2|Z_{\omega_2}|}}{\frac{A}{R}} = \frac{\frac{a}{2A}}{\frac{|Z_{\omega_2}|}{R}} = \frac{\beta_u}{\frac{|Z_{\omega_2}|}{R}} = \beta_u \frac{R}{|Z_{\omega_2}|}$$

Theo đề: β_i suy giảm không quá 3dB so với β_u nên $\frac{R}{|Z_{\omega_2}|} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ => $\frac{|Z_{\omega_2}|}{R} \ge \sqrt{2}$

=> $\frac{\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}}{R} \ge \sqrt{2}$ => $\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R}\right)^2} \ge \sqrt{2}$

=> $1 + \left(\frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R}\right)^2 \ge 2$ => $\left(\frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R}\right)^2 \ge 1$

Vì R, L, C >0 nên $\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = 12560.L > 0$

Do đó: $\frac{12560.L}{R} \ge 1$ => $\frac{L}{R} \ge \frac{1}{12560}$

Hệ số phẩm chất:

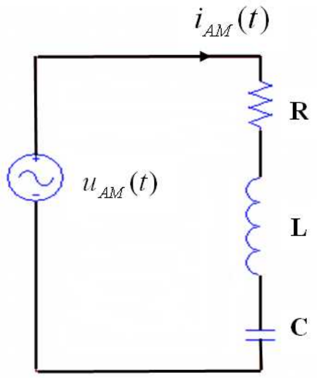
$Q = \frac{\omega_o L}{R} \ge \omega_o.\frac{1}{12560} = \frac{2\pi 10^6}{12456} \approx 500$ Vậy $Q_{\min} = 500$

Bài 5.10

$u_{AM}(t) = (100 + 50\cos 10^4 t)\cos 10^6 t$ [V]

a)

$u_{AM}(t) = (100 + 50\cos 10^4 t)\cos 10^6 t = 100\cos 10^6 t + 25(\cos(10^6 - 10^4)t + \cos(10^6 + 10^4)t)$



$\overset{o}{U} = 100\angle 0 + 25\angle 0 + 25\angle 0$

=> $\overset{o}{I} = \dfrac{100\angle 0}{|Z_{\omega_0}|\angle\varphi_0} + \dfrac{25\angle 0}{|Z_{\omega_1}|\angle\varphi_1} + \dfrac{25\angle 0}{|Z_{\omega_2}|\angle\varphi_2}$

Với:

$\omega_o = 10^6$ rad/s

$\omega_1 = (10^6 - 10^4)$ rad/s

$\omega_1 = (10^6 + 10^4)$ rad/s

Mạch cộng hưởng với tần số sóng mang nên $\omega_o L = \dfrac{1}{\omega_o C}$

=> $|Z_{\omega_0}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_o L - \dfrac{1}{\omega_o C}\right)^2} = \sqrt{R^2} = R$

$$\varphi_o = arctg\frac{\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C}}{R} = arctg 0 = 0$$

$|Z_{\omega_1}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \dfrac{1}{\omega_1 C}\right)^2}$ $\qquad \varphi_1 = arctg\dfrac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R}$

$|Z_{\omega_2}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \dfrac{1}{\omega_2 C}\right)^2}$ $\qquad \varphi_2 = arctg\dfrac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R}$

Nhận thấy:

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \omega_1 L - \frac{\omega_o^2}{\omega_1}L = \left(\omega_1 - \frac{\omega_o^2}{\omega_1}\right)L = \left((10^6 - 10^4) - \frac{10^{12}}{(10^6 - 10^4)}\right)L = \text{- }20000.L$$

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = \omega_2 L - \frac{\omega_o^2}{\omega_2}L = \left(\omega_2 - \frac{\omega_o^2}{\omega_2}\right)L = \left((10^6 + 10^4) - \frac{10^{12}}{(10^6 + 10^4)}\right)L = 19900.L$$

=> $|Z_{\omega_1}| \approx |Z_{\omega_2}| = Z$

$\varphi_1 = -\varphi_2 = -\varphi$

=> $\overset{o}{I} = \dfrac{100}{R}\angle 0 + \dfrac{25}{Z}\angle\varphi + \dfrac{25}{Z}\angle -\varphi$

Vậy:

$$i_{AM}(t)=\frac{100}{R}\cos 10^6 t+\frac{25}{Z}\cos((10^6-10^4)t+\varphi)+\frac{25}{Z}\cos((10^6+10^4)t-\varphi)$$

$$=\frac{100}{R}\cos 10^6 t+\frac{25}{Z}\cos(10^6 t-(10^4 t-\varphi))+\frac{25}{Z}\cos(10^6 t+(10^4 t-\varphi))$$

$$=\frac{100}{R}\cos 10^6 t+\frac{50}{Z}\cos(10^4 t-\varphi).\cos 10^6 t$$

$$=\left(\frac{100}{R}+\frac{50}{Z}\cos(10^4 t-\varphi)\right).\cos 10^6 t$$

Đường bao của tín hiệu dòng điện $i_{AM}(t)$ là: $\frac{100}{R}+\frac{50}{Z}\cos(10^4 t-\varphi)$

Đường bao của tín hiệu điện áp $u_{AM}(t)$ là: $100+50\cos 10^4 t$

Theo đề: đường bao của tín hiệu dòng điện $i_{AM}(t)$ bị dịch chuyển so với đường bao của tín hiệu điện áp $u_{AM}(t)$ một góc $\frac{\pi}{3}$ nên ta có: $\varphi=\frac{\pi}{3}$

$$=> \left| arctg\frac{\omega_1 L-\frac{1}{\omega_1 C}}{R}\right|=\frac{\pi}{3} => \frac{20000.L}{R}=\sqrt{3} => \frac{L}{R}=\frac{\sqrt{3}}{20000}$$

Hệ số phẩm chất:

$$Q=\frac{\omega_o L}{R}=\frac{10^6\sqrt{3}}{20000}=50\sqrt{3}$$

b)

$$C=2nF=2.10^{-9}F$$

Ta có:

$$\omega_o L=\frac{1}{\omega_o C} => L=\frac{1}{\omega_o^2 C}=\frac{1}{10^{12}.2.10^{-9}}=0,5.10^{-3}H=0,5mH$$

$$R=\frac{20000}{\sqrt{3}}L=\frac{20000}{\sqrt{3}}.0,5.10^{-3}=\frac{10}{\sqrt{3}}\Omega$$

$$i_{AM}(t)=\left(\frac{100}{R}+\frac{50}{Z}\cos(10^4 t-\varphi)\right).\cos 10^6 t \text{ [A]}$$

Hệ số độ sâu điều chế dòng điện $i_{AM}(t)$ là:

$$m_i=\frac{\frac{50}{Z}}{\frac{100}{R}}=\frac{50R}{100Z}=0,5.\frac{\frac{10}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(20000.0,5.10^{-3}\right)^2}}=0,25$$

<u>Kết luận:</u> a) $Q=50\sqrt{3}$ b) $L=0,5mH$, $R=\frac{10}{\sqrt{3}}\Omega$, $m_i=0,25$

TÓM TẮT LÝ THUYẾT TÍN HIỆU

1. Chương 1: Các khái niệm cơ bản

Câu 1.1: Tín hiệu là gì? Trình bày các cơ sở phân loại tín hiệu? Phân loại tín hiệu?

Trả lời:

- Khái niệm: Tín hiệu là biểu hiện vật lý của tin tức mà nó mang từ nguồn tin đến nơi nhận tin.
- Tín hiệu xác định và ngẫu nhiên:

  Tín hiệu xác định là tín hiệu mà quá trình thời gian của nó được biểu diễn bằng các hàm thực hay phức theo thời gian. Ví dụ: Tín hiệu điện áp u(t) = 10 sin(300t + 45^0).

  Tín hiệu ngẫu nhiên là tín hiệu mà quá trình thời gian của nó không thể biểu diễn bằng các hàm thời gian như tiếng nói, âm nhạc, hình ảnh,…..
- Tín hiệu liên tục và rời rạc:

Có thể tiến hành rời rạc thang giá trị hoặc thang thời gian và tương ứng ta sẽ có các tín hiệu sau:

- Tín hiệu có giá trị liên tục theo thời gian liên tục được gọi là tín hiệu tương tự.
- Tín hiệu có giá trị rời rạc theo thời gian liên tục được gọi là tín hiệu lượng tử.
- Tín hiệu có giá trị liên tục theo thời gian rời rạc, được gọi là tín hiệu rời rạc.
- Tín hiệu có giá trị và thời gian đều rời rạc được gọi là tín hiệu số.

- Các tín hiệu khác:

Dựa vào các thông số đặc trưng cho tín hiệu, người ta còn phân loại như sau:

- Tín hiệu năng lượng và công suất
- Tín hiệu tần thấp, tần cao, dải rộng, dải hẹp.
- Tín hiệu có thời gian hữu hạn và vô hạn.
- Tín hiệu có giá trị hữu hạn.
- Tín hiệu nhân quả.

Câu 1.2: Định nghĩa và chức năng của lý thuyết truyền tin (LTTT)?

Trả lời:

- Định nghĩa: LTTT là lý thuyết ngẫu nhiên của tin tức, có nghĩa là nó xét đến tính chất bất ngờ của tin tức đối với ngươi nhận tin.

- Chức năng: LTTT nghiên cứu các phương pháp mã hoá tin tức nghĩa là tìm ra các quy tắc để biểu diễn tin tức nhằm sử dụng hữu hiệu kênh truyền, tăng tính chống nhiễu và bảo đảm tính bí mật tin tức

Câu 1.3: Định nghĩa và Tính chất của tín hiệu vật lý?

Trả lời: Một tín hiệu là biểu diễn của một quá trình vật lý, do đó nó phải là một tín hiệu vật lý thực hiện được và phải toả mãn các yêu cầu sau:

- ✓ Có năng lượng hữu hạn
- ✓ Có biên độ hữu hạn
- ✓ Biên độ là hàm liên tục
- ✓ Có phổ hữu hạn và tiến tới 0 khi tần số → ∞

Câu 1.4: Định nghĩa tín hiệu xác định và tín hiệu ngẫu nhiên?

Trả lời:

- Tín hiệu xác định là tín hiệu mà quá trình biến thiên của nó được biểu diễn bằng một hàm toán học xác định. Ví dụ: Tín hiệu điện áp $u(t) = 10 \sin(300t + 45^0)$.
- Tín hiệu ngẫu nhiên là tín hiệu mà quá trình biến thiên không biết trước được → không thể biểu diễn bằng các hàm toán học xác định mà chỉ sử dụng các công cụ thống kê như thời gian như tiếng nói, âm nhạc, hình ảnh,…..

Câu 1.5: Định nghĩa và dấu hiệu nhận biết tín hiệu năng lượng?

Trả lời:

- Định nghĩa: Tín hiệu năng lượng là tín hiệu có năng lượng hữu hạn
- Nhận biết:
  - ✓ x(t) tồn tại hữu hạn trong khoảng thời gian t
  - ✓ x(t) tồn tại vô hạn nhưng lim x(t) = 0 khi t→∞

Câu 1.6: Định nghĩa và dấu hiệu nhận biết tín hiệu công suất?

Trả lời:

- Định nghĩa: Tín hiệu công suất là tín hiệu có công suất trung bình hữu hạn.
- Nhận biết:
  - ✓ x(t) tồn tại hữu hạn trong khoảng thời gian t
  - ✓ x(t) tồn tại vô hạn nhưng lim x(t) ≠ 0 khi t→∞.

Câu 1.7: Phân loại tín hiệu năng lượng và tín hiệu rời rạc?

Trả lời: Có 4 loại:

- Tín hiệu có biên độ và thời gian liên tục được gọi là tín hiệu tương tự (Analog).
- Tính hiệu có biên độ rời rạc và thời gian liên tục được gọi là tín hiệu lượng tử.
- Tính hiệu có biên độ liên tục và thời gian rời rạc được gọi là tín hiệu rời rạc.
- Tín hiệu có biên độ và thời gian rời rạc được gọi là tín hiệu số (Digital).

2. Chương 2: Phân tích miền thời gian

Câu 2.1: Trình bày các thông số đặc trưng của tính hiệu?

Trả lời:

a. **Tích phân tín hiệu.**

- Với tín hiệu tồn tại trong khoảng thời gian hữu hạn (t_1-t_2)

$$[x] = \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

- Với tín hiệu tồn tại vô hạn (-∞, + ∞):

$$[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$$

b. **Trị trung bình của tín hiệu**

- Với tín hiệu thời hạn hữu hạn:

$$< x >= \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt}{t_2 - t_1} = \frac{[x]}{T}$$

- Với các tín hiệu có thời gian vô hạn:

$$< x >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)dt$$

- Tín hiệu tuần, chu kỳ T:

$$< x >= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt$$

c. **Năng lượng của tín hiệu.**

Năng lượng tín hiệu được định nghĩa bởi tích phân của bình phương tín hiệu:

$$E_x = [x^2]$$

- Với tín hiệu có thời hạn hữu hạn

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt$$

- Và tín hiệu có thời hạn vô hạn

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$$

d. Công suất trung bình của tín hiệu.

- Với tín hiệu có thời hạn hữu hạn:

$$P_x = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt}{t_2 - t_1} = \frac{[x]}{T}$$

- Với các tín hiệu có thời hạn vô hạn:

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t)dt$$

- Với tín hiệu tuần hoàn, chu kỳ T:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt$$

Câu 2.2: Tín hiệu phân bố được dùng trong những trường hợp nào?

Trả lời:

- Phân bố được dùng như một mô hính toán học cho một loại tín hiệu nào đó.
- Phân bố được dùng để mô tả các phép toán tác động lên tín hiệu ví dụ như phép rời rạc tín hiệu hay lặp tuần hoàn tín hiệu
- Phân bố được dùng để mô tả phổ của tín hiệu trong trương hợp tín hiệu không có phổ Fourier thông thường. Ví dụ như bước nhảy đơn vị, tín hiệu tuần hoàn và nhiều tín hiệu có năng lượng không xác định

Câu 2.3: Định nghĩa và tính chất của phân bố Delta Diract?

Trả lời:

- Định nghĩa:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , t \neq 0 \\ \infty & , t = 0 \end{cases}$$

và $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

- Tính chất:
  1) Tính chất chẵn:

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

  2) Tính chất rời rạc.

$$x(t)\,\delta(t) = x(0)\,\delta(t)$$

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

3) Tính chất lặp :

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$
$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$$

Câu 2.4: Định nghĩa và tính chất của phân bố lược?

Trả lời:

- Định nghĩa: $$x(t) = \frac{1}{T} III\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$$

- Tính chất:
  1) Tính chất chẵn:

$$III(t) = III(-t)$$

  2) Tính chất rời rạc:

$$x(t).\frac{1}{T} III\left(\frac{t}{T}\right) = x(t).\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

  3) Tính chất lặp tuần hoàn:

$$x(t) * \frac{1}{T} III\left(\frac{t}{T}\right) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-nT)$$

Câu 2.5: Khái niệm, tính chất hàm tương quan và tự tương quan của tín hiệu? Ý nghĩa của hàm tự tương quan?

Trả lời:

1) Hàm tương quan của tín hiệu năng lượng:

- Cho hai tín hiệu năng lượng x(t), y(t)

  Hàm tương quan chéo:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t+\tau)x^*(t)dt$$

  Hàm tự tương quan:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

- Tính chất:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi^*_{xy}(-\tau)$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \varphi^*_{xx}(-\tau)$$

Nếu x(t) là hàm thực → φ_{xx} : hàm chẵn

$$\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

→ Năng lượng tín hiệu chính bằng giá trịhàm tự tương quan tại $\tau = 0$

2) Hàm tương quan của tín hiệu công suất:
   a) Tín hiệu tuần hoàn

- Cho hai tín hiệu tuần hoàn x(t), y(t)
  Hàm tương quan chéo:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)y^*(t-\tau)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t+\tau)y^*(t)dt$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)x^*(t-\tau)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t+\tau)x^*(t)dt$$

  Hàm tự tương quan:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)x^*(t-\tau)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t+\tau)x^*(t)dt$$

- Tính chất:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi^*_{yx}(-\tau)$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \varphi^*_{xx}(-\tau)$$

Nếu x(t) là hàm thực → φ_{xx} : hàm chẵn

$$|\varphi_{xx}(\tau)| \le \varphi_{xx}(0)$$

$$P_x = \varphi_{xx}(0)$$

→ Công suất của tín hiệu tuần hoànchính bằng giá trị hàm tự tương quan tại $\tau = 0$

   b) Tín hiệu có công suất trung bình hữu hạn:

- Cho hai tín hiệu x(t), y(t)
  Hàm tương quan chéo:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) y^*(t-\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+\tau) y^*(t)dt$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t) x^*(t-\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} y(t+\tau) x^*(t)dt$$

- Hàm tự tương quan:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t) x^*(t-\tau)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t+\tau) x^*(t)dt$$

❖ Ý nghĩa: -Hàm tự tương quan: thể hiện sự tương quan (phụ thuộc) giữa các giá trị ở các thời điểm khác nhau của một quá trình ngẫu nhiên (R(x1, x2, t1, t2)).

-Hàm tương quan (hay tương quan chéo): thể hiện sự tương quan giữa các giá trị của hai quá trình ngẫu nhiên ở các thời điểm khác nhau (R(x1, x2, t1, t2)).

Khi R=0 thì điều đó có nghĩa là các giá trị ở các thời điểm tương ứng là không tương quan (độc lập thống kê)

Câu 2.6: Có bao nhiêu cách tính Px, Ex, trình bày cụ thể ?

Trả lời:

- Có 3 cách tính E_x:

$Ex = [\, x^2]$

$Ex = \varphi_{xx}(0)$

$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega)d(\omega).$

- 3 cách tính P_x:

$Px = < x^2 >$

$Px = \Psi xx(0)$

$$P_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega)d(\omega)$$

Câu 2.7: Tín hiệu trực giao được hiểu như thế nào?

Trả lời: Hai tín hiệu X(t) và Y(t) được gọi là trực giao với nhau trên $[t_1, t_2]$ khi tích vô hướng của chúng bằng không.

$$<x,y>=0$$

Câu 2.8: Ưu điểm của phân tích tín hiệu so với phân tích thời gian, phân tích tương quan, phân tích thống kê?

Trả lời:

- Sử dụng để phân tích nhiều loại tín hiệu: tín hiệu xác định, tín hiệu ngẫu nhiên…
- Cơ sở lý thuyết được phân tích đầy đủ
- Có mối liên hệ với các phương pháp khác như phân tích thời gian, phân tích tương quan…..
- Có biểu diễn vật lý rõ ràng

3. Chương 3: Phân tích miền tần số

Câu 3.1: Định nghĩa bề rộng phổ? Phân loại tín hiệu dựa vào bề rộng phổ?

Trả lời:

- Bề rộng phổ của tín hiệu là dải tần số (dương hoặc âm) tập tung công suất của tín hiệu.
- Ký hiệu: B, xác định theo công thức:

$$B = f_2 - f_1$$

Trong đó: $0 \le f_1 < f_2$, f_2 :tần số giới hạn trên của tín hiệu.

- Dựa vào bề rông phổ có thể phân loại tín hiệu:
  - ✓ Tín hiệu tần số thấp.
  - ✓ Tín hiệu tần số cao.
  - ✓ Tín hiệu dải hẹp.
  - ✓ Tín hiệu dải rộng

Câu 3.2: Định nghĩa và tính chất của phổ?

Trả lời:

- Định nghĩa:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad \text{(Biến đổi thuận)}$$

$$\mathrm{x(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$ (Biến đổi ngược)

X (ω) được gọi là phổ của tín hiệu x(t). Ký hiệu: $\mathrm{x(t)} \overset{F}{\leftrightarrow} \mathrm{X}(\omega)$

X (ω) là phổ của một hàm phức → phân tích ra thành các thành phần

$$X(\omega) = \left|X(\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)} \quad X(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

X (ω): phổ biên độ — P (ω): phổ thực

$\varphi(\omega)$: phổ pha — Q (ω): phổ ảo

- Tính chất:
  1) Tính chất chẵn lẻ:

     Nếu x(t) là tín hiệu thực, thì:

     Phổ thực là hàm chẵn : P(ω) = P(-ω)

     phổ ảo là hàm lẻ: Q(ω) = Q(-ω)

     Và,

     phổ biên độ là hàm chẵn: │X(ω)│=│X(-ω)│

     phổ pha là hàm lẻ: φ(ω)= φ (-ω)
  2) Tính chất tuyến tính:

     Nếu : x(t) ↔x(ω), y(t) ↔y(ω)

     Thì ax(t) + by(t) ↔ bx(t) + ay(t)
  3) Tính chất đối ngẫu:

     $$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$
  4) Tính chất thay đổi thang đo:

     $$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow x(\frac{t}{a}) \leftrightarrow \left|a\right| X(a\omega); a \neq 0;$$
  5) Tính chất dịch chuyển trong miền thời gian:

     $$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow x(t-t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$
  6) Tính chất dịch chuyển trong miền tần số:

     $$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow \begin{cases} x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega-\omega_0) \\ x(t)e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega+\omega_0) \end{cases}$$

     →Tính chất điều chế:

$$x(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)]$$

$$x(t)\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2j}[X(\omega-\omega_0)-X(\omega+\omega_0)]$$

Câu 3.3: Phổ của tín hiệu tuần hoàn có dạng gì? Cách xác định Xn trong phổ của tín hiệu tuần hoàn?

Trả lời:

- Phổ của tín hiệu tuần hoàn có dạng

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

- Xác định Xn trong phổ của tín hiệu tuần hoàn
  - ✓ Cách 1: Sử dụng công thức

$$X_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

  - ✓ Cách 2:

  Xét tín hiệu $X_T(t)$ trong một chu kỳ T,t[$t_{0,}t_0$+T]

  Xác định X_T(□)dung biến đổi Fourier cho $X_t(t)$

$$X_n = X_T(\frac{n\omega_0}{T})$$

4. Chương 4: Truyền tín hiệu qua mạch tuyến tính

Câu 4.1: Định nghĩa và tính chất và ý nghĩa của tích chập?

Trả lời:

- Định nghĩa: Tích chập giữa hai tín hiệu x(t) và y(t), ký hiệu: x(t)*y(t), được xác định như sau:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

- Tính chất:
  1. Tính chất giao hoán:

  $$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

  2. Tính chất kết hợp:

  $$x(t) * [y(t) * z(t)] = [x(t) * y(t)] * z(t)$$

3. Tính chất phân phối:

$$x(t)*[\,y(t) + z(t)] = x(t)*\,y(t) + x(t)*\,z(t)$$

4. Nhân với hằng số:

$$a[x(t)*\,y(t)]=[ax(t)]*\,y(t) = x(t)*[ay(t)]$$

5. Liên hệ với hàm tương quan:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = x(\tau)*y^*(-\tau)$$

- Ý nghĩa: Tích chập giúp xác định tác đông của hệ thống lên tín hiệu ngõ vào .Nghĩa là nó giúp xác định tín hiệu ngõ ra của hệ thống LTI khi biết tín hiệu ngõ vào và đáp ứng xung của hệ thống.

Câu 4.2: Định nghĩa hệ thống bất biến LTI?

Trả lời:

Hệ thống bất biến LTI là hệ thống thoả mãn đồng thời tính chất tuyến tính và bất biến.

- Tính chất tuyến tính:

Nếu: $x1(t) \rightarrow y1(t)$

$X2(t) \rightarrow y2(t)$

Thì:

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t),\ (\forall a_1, a_2)$$

- Tính chất bất biến:

Nếu: $x(t) \rightarrow y(t)$

Thì: $x(t - t0) \rightarrow y(t - t0)$

Câu 4.3: Biểu thức quan hệ các đặc trưng ngõ vào – ngõ ra của mạch tuyến tính?

Trả lời:

$$Input \xrightarrow[X(\omega)]{x(t)} \boxed{\frac{h(t)}{H(\omega)}} \xrightarrow[Y(\omega)]{y(t)} Output$$

Trong miền thời gian: y(t)=h(t)*x(t)

Trong miền tần số: $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$

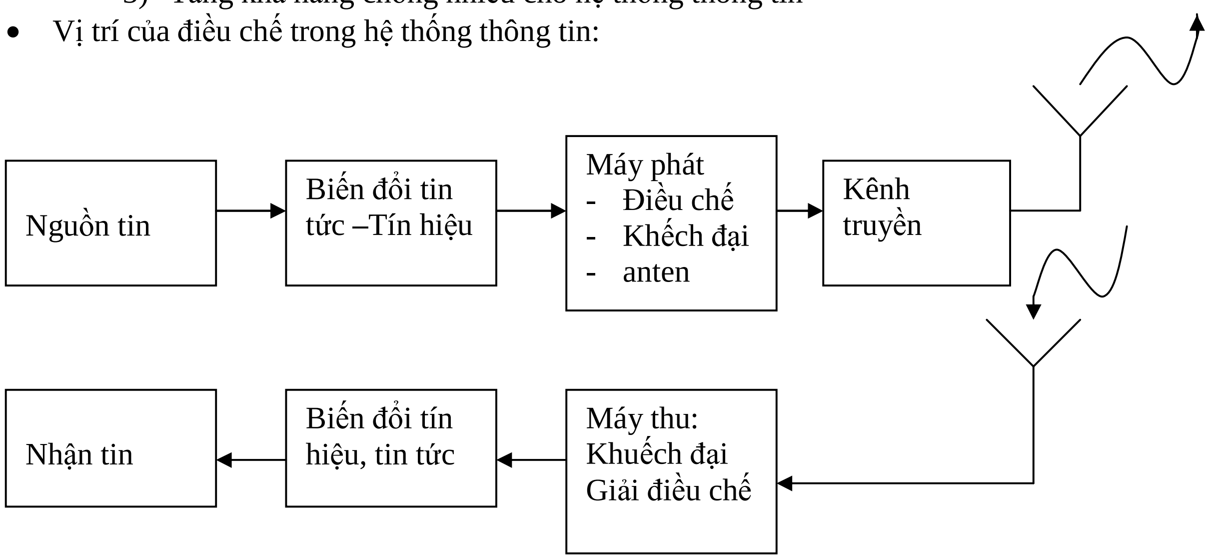
5. Chương 5: Tín hiệu điều chế

Trả lời:

Câu 5.1: Điều chế là gì? Mục đích điều chế? Tầm quan trọng của điều chế tín hiệu trong hệ thống thông tin?

Trả lời:

- Điều chế là quá trình ánh xạ tin tức vào sóng mang bằng cách thay đổi thông số của sóng mang (biên độ, tần số hay pha) theo tin tức
  Điều chế đóng vai trò rất quan trọng không thể thiếu trong hệ thống thông tin
- Mục đích:
  1) Tạo ra tín hiệu phù hợp với kênh truyền. Để có thể bức xạ tín hiệu vào không gian dưới dạng sóng điện từ.
  2) Cho phép tạo nhiều kênh truyền. và sử dụng hữu hiệu kênh truyền.
  3) Tăng khả năng chống nhiễu cho hệ thống thông tin
- Vị trí của điều chế trong hệ thống thông tin:

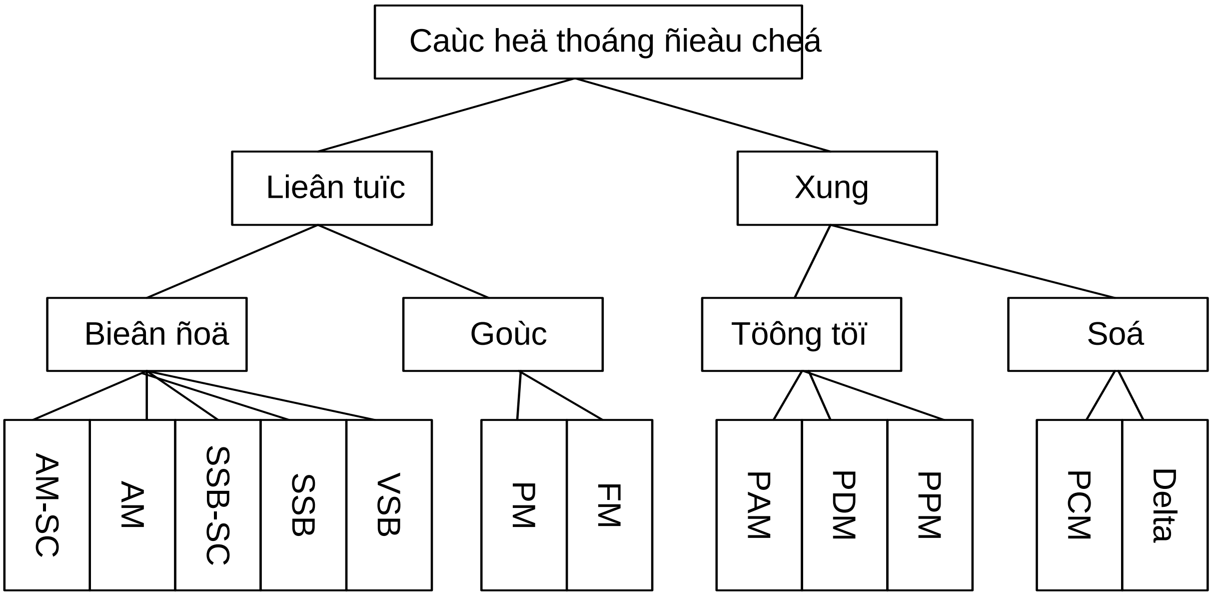


Câu 5.2: Phân loại các phương pháp điều chế tín hiệu?

Trả lời:

Có 2 phương pháp điều chế tín hiệu là điều chế xung và điều chế liên tục

- Trong các hệ thống điều chế liên tục, tin tức sẽ tác động làm thay đổi các thông số của sóng mang điều hoà như: biên độ, tần số và góc pha. Sóng mang có các thông số thay đổi ngẫu nhiên theo tin tức được gọi là tín hiệu bị điều chế – tín hiệu điều chế.
- Trong các hệ thống điều chế xung, tin tức tác động làm thay đổi các thông số của dãy xung như: biên độ, chu kỳ (vị trí) và độ rộng. Dãy xung vuông góc tuần hoàn có các thông số thay đổi ngẫu nhiên theo tin tức được gọi tín hiệu bị điều chế – tín hiệu điều chế.



Câu 5.3: Sóng mang là gì? Trong thực tế người ta thường dùng mấy loại sóng mang?

Trả lời:

- Trong hệ thống điều chế xung: sóng mang là các dãy xung vuông góc tuần hoàn, tin tức sẽ làm thay đổi các thông số của nó là biên độ, độ rộng và vị trí xung.
- Trong thực tế thì người ta thường dùng hai loại sóng mang là dao động điều hòa cao tần hoặc các dãy xung.

Câu 5.4: Tại sao lại phải điều chế tín hiệu trước khi truyền đi xa?

Trả lời: Tin tức thường có tần số thấp, không thể truyền đi xa được. Để truyền đi xa, người ta phải tìm cách ghép nó với tín hiệu có tần số cao, gọi là sóng mang. Quá trình này gọi là điều chế tín hiệu cao tần.

Câu 5.5: Sự khác nhau khi điều chế tín hiệu AM, FM, PM?

Trả lời:

Điều chế tín hiêu AM, FM, PM đều là loại điều chế tương tự nhằm mục đích là điêu chế tín hiệu thông tin vào sóng cao tần để có thể chuyển tín hiệu thông tin đi xa. Ba loại điều chế này có các đặc điểm:

- Giống nhau: đều chuyển phổ của tín hiêu thông tin vào sóng mang cao tần để truyền đi.
- Khác nhau: Khi điều chế tín hiệu:
  - ✓ AM thì tín hiệu thông tin sẽ được điều chế vào biên độ của sóng mang hay nói đúng hơn là nó làm thay đổi biên độ của sóng mang.
  - ✓ FM thì tín hiệu thông tin sẽ được điêu chế vào tần số của sóng mang.
  - ✓ PM thì tín hiệu thông tin sẽ được điều chế vào pha của sóng mang.

Câu 5.6: Ưu và nhược điểm của sóng FM?

Trả lời:

- Sóng FM có nhiều ưu điểm về mặt tần số, dải tần âm thanh sau khi tách sóng điều tần có chất lượng rất tốt, cho âm thanh trung thực và có thể truyền âm thanh Stereo, sóng FM ít bị can nhiễu hơn só với sóng AM.
- Nhược điểm của sóng FM là cự ly truyền sóng ngắn, chỉ truyền được cự ly từ vài chục đến vài trăm Km, do đó sóng FM thường được sử dụng làm sóng phát thanh trên các địa phương.

Câu 5.7: Tại sao PM dải hẹp điều hòa tương đương với AM? FM và PM có thể hoán đổi cho nhau được không? Tại sao?

Trả lời:

Dạng tín hiệu AM: $y_{AM}(t)=[A+x(t)]\cos\Omega t$

Quan hệ trong miền tần số

$$Y_{AM}(\omega)=A\pi\left[\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)\right]+\frac{1}{2}\left[X(\omega-\Omega)+X(\omega+\Omega)\right]$$

$$\Psi_{AM}(\omega)=\frac{\pi A^2}{2}\left[\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)\right]+\frac{1}{4}\left[\Psi_X(\omega-\Omega)+\Psi_X(\omega+\Omega)\right]$$

Dạng tín hiệu số PM dải hẹp:

$$Y_{PM}(t)=Y[\cos\Omega t-k_p XSin\omega t.\sin\Omega t]$$

$$=Y[\cos\Omega t-\frac{1}{2}k_p X\cos(\Omega-\omega)t+\frac{1}{2}k_p X\cos(\Omega+\omega)t]$$

Quan hệ miền tần số:

$$Y_{NBPM}(\omega)=Y\pi[\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)]-\frac{Y}{2j}k_p\left[X(\omega-\Omega)+X(\omega+\Omega)\right]$$

$$\Psi_{NBPM}(\omega)=\frac{Y^2\pi}{2}[\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)]+\frac{\left(Yk_p\right)^2}{4}\left[\Psi_X(\omega-\Omega)+\Psi_X(\omega+\Omega)\right]$$

Ta thấy tín hiệu PM dải hẹp tương đương với tín hiệu AM có độ sâu điều chế $m = k_pX$, nó chính bằng độ lệch pha của tín hiệu PM. Sự khác nhau chỉ ở chỗ, pha của dải dưới của tín hiệu PM dải hẹp khác pha của dải dưới tín hiệu AM một góc π.

Câu 5.8: Sự khác nhau giữa tín hiệu PM và FM?

Trả lời:

Tín hiệu	Tín hiệu FM	Tín hiệu PM
1.	Pha tức thời tỷ lệ với tích phân của tín hiệu	Pha tức thời tỷ lệ trực tiếp vào x(t)
2.	Tần số tỷ lệ trực tiếp vào x(t)	Tần số tỷ lệ với đạo hàm của x(t)
3.	Tín hiêu tin tức làm biến đổi tần số tức thời → biến đổi pha tức thời	Tín hiệu tin tức biến đổi → pha tức thời biến đổi → tần số tức thời biến đổi
4.	Được điều chế bởi tín hiệu x(t)	Được điều chế bởi $\int x(t)dt$

Câu 5.9: Tại sao gọi biểu thức *2x(t)cos(ωot)* ↔ *X(ω-ωo)+X(ω+ ωo)* là biểu thức điều chế?

Trả lời: Bởi vì trong điều chế biên độ thì ngườI ta giử nguyên θ(t) nên sóng mang sau điều chế có dạng $y(t)=Y(t)\cos(\omega_0 t+\varphi)$

Câu 5.10: Trong điều chế tương tự thế nào là điều biên, điều pha?

Trả lời: Trong điều chế tương tự:

- Gọi là điều biên khi ta cho pha tức thời của sóng mang điều chế giữ nguyên.
- Gọi là điều pha khi ta cho biên độ tức thời trong sóng mang điều chế giữ

nguyên

- ✓ Sóng mang ban đầu $y(t)=Y\cos(\Omega t+\varphi)$
- ✓ Sóng mang sau điều chế $y(t)=Y(t)\cos(\theta(t))$

Câu 5.11: Sự khác nhau căn bản giữa điều chế liên tục và điều chế xung?

Trả lời:

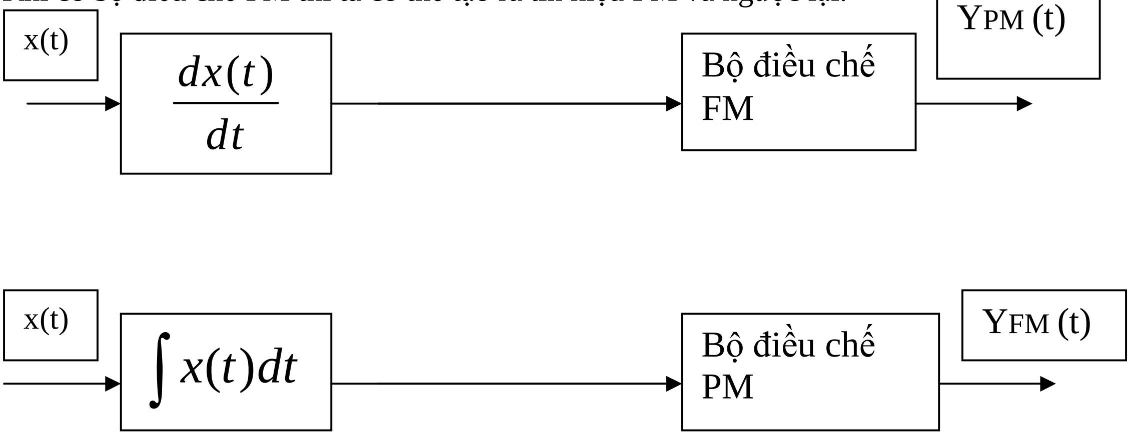
Sự khác nhau căn bản giữa điều chế liên tục và điều chế xung là ở chỗ:

- Hệ thống điều chế liên tục tin tức được truyền đi liên tục theo thời gian .
- Hệ thống điều chế xung, tín hiệu tin tức chỉ được truyền trong khoảng thời gian có xung.

Câu 5.12: Mối quan hệ giữa hệ thống FM và PM? Ưu điểm của hai hệ thống so với AM

Trả lời:

- Mối quan hệ:
  Khi có bộ điều chế FM thì ta có thể tạo ra tín hiệu PM và ngược lại.



- Ưu điểm:
  - ✓ Khả năng chống nhiễu cao hơn AM
  - ✓ Băng thông tín hiệu PM và FM rông hơn nhiều so với AM