Biến đổi Z và Biến đổi Laplace

NGUYEN Hong Thinh

Signal and System Laboratory
FET-UET-VNU

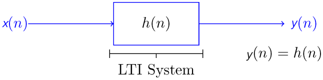
Ngày 1 tháng 7 năm 2020

Biến đổi Z/Laplace

Nội dung

- Định nghĩa.
- Tính chất của biến đổi Z/Laplace.
- Biến đổi ngược.
- Phân tích hệ thống sử dụng biến đổi Z/Laplace.
- Các ứng dụng của biến đổi Z/Laplace.
- Bài tập tổng hợp

LTI system

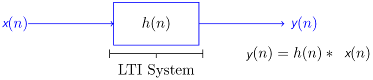


$y(n) = h(n) * x(n)$

Xác định HỆ THỐNG khi biết tín hiệu vào ra?

- VD: Biết x(n), y(n). Xác định h(n)?

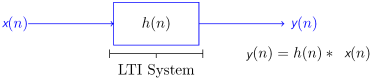
LTI system



Xác định HỆ THỐNG khi biết tín hiệu vào ra?

- VD: Biết x(n), y(n). Xác định h(n)?
- LTI: $y(n) = x(n) * h(n)$

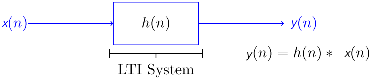
LTI system



Xác định HỆ THỐNG khi biết tín hiệu vào ra?

- VD: Biết x(n), y(n). Xác định h(n)?
- LTI: $y(n) = x(n) * h(n)$
- Không thể xác định được h(n) biết x(n), y(n)

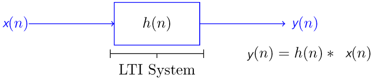
LTI system



Xác định HỆ THỐNG khi biết tín hiệu vào ra?

- VD: Biết x(n), y(n). Xác định h(n)?
- LTI: $y(n) = x(n) * h(n)$
- Không thể xác định được h(n) biết x(n), y(n)
- Miền tần số: $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$

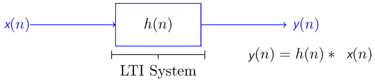
LTI system



Xác định HỆ THỐNG khi biết tín hiệu vào ra?

- VD: Biết x(n), y(n). Xác định h(n)?
- LTI: $y(n) = x(n) * h(n)$
- Không thể xác định được h(n) biết x(n), y(n)
- Miền tần số: $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$
- $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

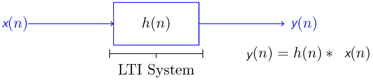
LTI system



Xác định HỆ THỐNG khi biết tín hiệu vào ra?

- VD: Biết x(n), y(n). Xác định h(n)?
- LTI: $y(n) = x(n) * h(n)$
- Không thể xác định được h(n) biết x(n), y(n)
- Miền tần số: $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$
- $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$
- $h(n) = FT^{-1}(H(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(\omega)e^{j\omega n}d\omega$

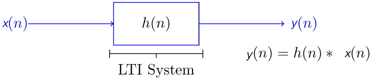
LTI system



Xác định HỆ THỐNG khi biết tín hiệu vào ra?

- Bài toán chỉ có thể giải được nếu tồn tại $H(\omega), Y(\omega), X(\omega)$

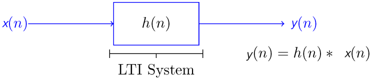
LTI system



Xác định HỆ THỐNG khi biết tín hiệu vào ra?

- Bài toán chỉ có thể giải được nếu tồn tại $H(\omega), Y(\omega), X(\omega)$
- Bài toán chỉ có thể giải được nếu x(n), y(n), h(n) là tín hiệu năng lượng.

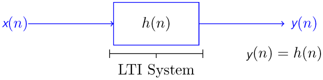
LTI system



Xác định HỆ THỐNG khi biết tín hiệu vào ra?

- Bài toán chỉ có thể giải được nếu tồn tại $H(\omega), Y(\omega), X(\omega)$
- Bài toán chỉ có thể giải được nếu x(n), y(n), h(n) là tín hiệu năng lượng.
- Trong các trường hợp khác thì sao?

LTI system



$y(n) = h(n) * x(n)$

Xác định HỆ THỐNG khi biết tín hiệu vào ra?

- Bài toán chỉ có thể giải được nếu tồn tại $H(\omega), Y(\omega), X(\omega)$
- Bài toán chỉ có thể giải được nếu x(n), y(n), h(n) là tín hiệu năng lượng.
- Trong các trường hợp khác thì sao?
- $\Rightarrow$Phép biến đổi Z/Laplace

Biến đổi Z, Biến đổi Laplace

Miền thời gian LIÊN TỤC

Biến đổi Laplace : $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$

s là 1 số phức

Miền thời gian RỜI RẠC

Biến đổi Z: $x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$

z là 1 số phức

Miền hội tụ Region of convergence (ROC)

$$ROC = \{s|\ |X(s)| < \infty\}$$

$$ROC = \{z|\ |X(z)| < \infty\}$$

Biến đổi Fourier

$$x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Fourier}} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$ROC = \{x(t)|\ |X(\omega)| < \infty\}$$

Biến đổi Laplace

$$x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$ROC = \{s|\ |X(s)| < \infty\}$$

Biến đổi Laplace vs Biến đổi Fourier

Biến đổi Laplace vs Biến đổi Fourier

Biến đổi Fourier

$$x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Fourier}} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$ROC = \{x(t)| \; |X(\omega)| < \infty\}$$

Biến đổi Laplace

$$x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$ROC = \{s| \; |X(s)| < \infty\}$$

Biến đổi Laplace vs Biến đổi Fourier

- $X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$

Biến đổi Laplace vs Biến đổi Fourier

Biến đổi Fourier

$$x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Fourier}} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$ROC = \{x(t)|\ |X(\omega)| < \infty\}$$

Biến đổi Laplace

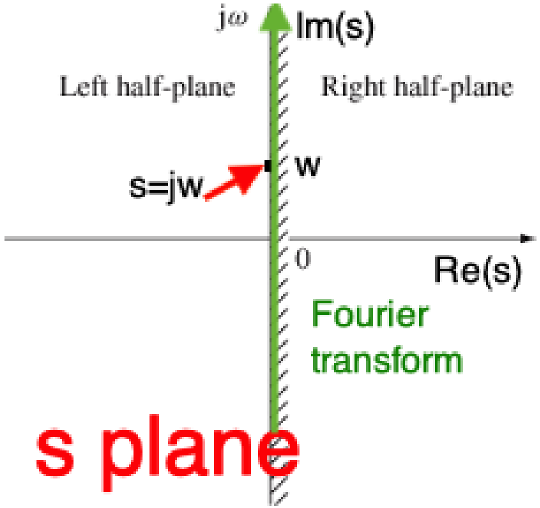
$$x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$ROC = \{s|\ |X(s)| < \infty\}$$

Biến đổi Laplace vs Biến đổi Fourier

- $X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$
- ROC: từ điều kiện với tín hiệu x(t) chuyển sang điều kiện với biến s

Biến đổi Laplace vs Biến đổi Fourier



Biến đổi Z vs Biến đổi Fourier

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Biến đổi Fourier

$$x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Fourier}} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$ROC = \{x(n) \mid |X(\omega)| < \infty\}$$

Biến đổi Z

$$x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$$

$$ROC = \{z \mid |X(z)| < \infty\}$$

Biến đổi Z vs Biến đổi Fourier

Biến đổi Z vs Biến đổi Fourier

Biến đổi Fourier

$$x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Fourier}} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$ROC = \{x(n)|\ |X(\omega)| < \infty\}$$

Biến đổi Z

$$x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$$

$$ROC = \{z|\ |X(z)| < \infty\}$$

Biến đổi Z vs Biến đổi Fourier

- $X(\omega) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$

Biến đổi Fourier

$$x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Fourier}} X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$ROC = \{x(n) |\ |X(\omega)| < \infty\}$$

Biến đổi Z

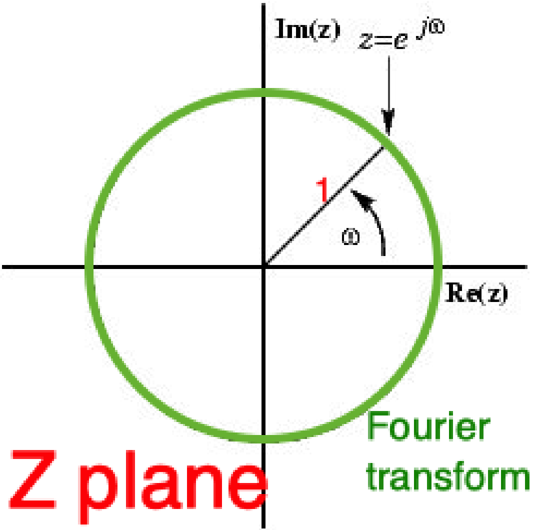
$$x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n}$$

$$ROC = \{z |\ |X(z)| < \infty\}$$

Biến đổi Z vs Biến đổi Fourier

- $X(\omega) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$
- ROC: từ điều kiện với tín hiệu x(n) chuyển sang điều kiện với biến z

Biến đổi Z vs Biến đổi Fourier



Ví dụ về phép biến đổi Z

Xác định biến đổi Z của các tín hiệu sau

1. $x(n) = \{1, 2, \underline{3}, 4, 5, 6\}$
2. $x(n) = a^n u(n)$
3. $x(n) = a^n u(-n-1)$
4. $x(n) = a^n$
5. $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$
6. $x(n) = cos(\omega n) u(n)$
7. $x(n) = cos(\omega n)$

Examples 1

- $x(n) = \{1, 2, \underline{3}, 4, 5, 6\}$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} =$
  $1.z^2 + 2.z^1 + 3.z^0 + 4.z^{-1} + 5.z^{-2} + 6.z^{-3}$
- $|X(z)| < \infty$ khi và chỉ khi $z \neq 0$ và $z \neq \pm\infty$
- Hay $ROC : \forall z : z \neq 0,\ z \neq \pm\infty$

Examples 2

- $x(n) = a^n u(n)$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n).z^{-n}$

Examples 2

- $x(n) = a^n u(n)$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n).z^{-n}$
- $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a.z^{-1})^n$

Examples 2

- $x(n) = a^n u(n)$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u(n).z^{-n}$
- $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a.z^{-1})^n$
- Áp dụng công thức tổng luỹ thừa:

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \begin{cases} \frac{1-a^{N+1}}{1-a}, & \text{với } a \neq 1 \\ N+1, & \text{với } a = 1 \end{cases}$$

Examples 2

- $X(z) = \begin{cases} \frac{1-(a.z^{-1})^{+\infty}}{1-az^{-1}} \text{với } az^{-1} \neq 1 \\ \infty \text{ với } az^{-1} = 1 \end{cases}$

Examples 2

- $X(z) = \begin{cases} \frac{1-(a.z^{-1})^{+\infty}}{1-az^{-1}} \text{với } az^{-1} \neq 1 \\ \infty \text{ với } az^{-1} = 1 \end{cases}$
- $X(z) < \infty$ khi và chỉ khi $|a.z^{-1}| < 1$ or $|z| > |a|$.

Biến đổi Z

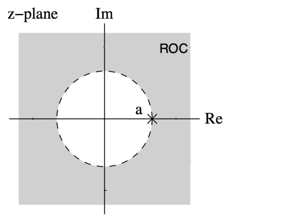
Examples 2

- $X(z) = \begin{cases} \frac{1-(a.z^{-1})^{+\infty}}{1-az^{-1}} \text{với } az^{-1} \neq 1 \\ \infty \text{ với } az^{-1} = 1 \end{cases}$
- $X(z) < \infty$ khi và chỉ khi $|a.z^{-1}| < 1$ or $|z| > |a|$.
- Khi đó $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

Examples 2

- $X(z) = \begin{cases} \frac{1-(a.z^{-1})^{+\infty}}{1-az^{-1}} \text{với } az^{-1} \neq 1 \\ \infty \text{ với } az^{-1} = 1 \end{cases}$
- $X(z) < \infty$ khi và chỉ khi $|a.z^{-1}| < 1$ or $|z| > |a|$.
- Khi đó $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$
- Vậy:$x(n) = a^n u(n) \overset{Z}{\Rightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, ROC = |z| > |a|$

Examples 2

- $X(z) = \begin{cases} \frac{1-(a.z^{-1})^{+\infty}}{1-az^{-1}} \text{với } az^{-1} \neq 1 \\ \infty \text{ với } az^{-1} = 1 \end{cases}$
- $X(z) < \infty$ khi và chỉ khi $|a.z^{-1}| < 1$ or $|z| > |a|$.
- Khi đó $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$
- Vậy:$x(n) = a^n u(n) \overset{Z}{\Rightarrow} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, ROC = |z| > |a|$
- 

Examples 3

- $x(n) = a^n u(-n-1) = \begin{cases} a^n \text{ với } n \leq -1 \\ 0 \text{ với } n > -1 \end{cases}$

Examples 3

- $x(n) = a^n u(-n-1) = \begin{cases} a^n \text{ với } n \leq -1 \\ 0 \text{ với } n > -1 \end{cases}$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n.z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n$

Examples 3

- $x(n) = a^n u(-n-1) = \begin{cases} a^n \text{ với } n \leq -1 \\ 0 \text{ với } n > -1 \end{cases}$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n.z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n$
- $X(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n - 1$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Định nghĩa

VD Z trans

VD Laplace

Tính chất của biến đổi Z

Biến đổi Z ngược

Tính chất của biến đổi Laplace

Biến đổi Laplace ngược

Examples 3

- $x(n) = a^n u(-n-1) = \begin{cases} a^n \text{ với } n \leq -1 \\ 0 \text{ với } n > -1 \end{cases}$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n.z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n$
- $X(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n - 1$
- $X(z) = \begin{cases} \frac{1-(a^{-1}z)^{+\infty}}{1-a^{-1}z} - 1 \text{ với } a^{-1}z \neq 1 \\ +\infty \text{ với } a^{-1}z = 1 \end{cases}$

Examples 3

- $|X(z)| < \infty \Leftrightarrow |z.a^{-1}| < 1$ or $|z| < |a|$

Examples 3

- $|X(z)| < \infty \Leftrightarrow |z.a^{-1}| < 1$ or $|z| < |a|$
- Khi đó: $X(z) = \frac{1}{1-z.a^{-1}} - 1 = \frac{za^{-1}}{1-za^{-1}} = \frac{1}{z^{-1}a-1} = \frac{-1}{1-az^{-1}}$

Examples 3

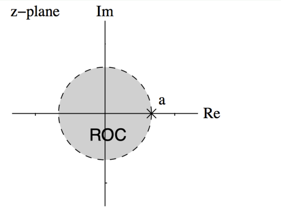
- $|X(z)| < \infty \Leftrightarrow |z.a^{-1}| < 1$ or $|z| < |a|$
- Khi đó: $X(z) = \frac{1}{1-z.a^{-1}} - 1 = \frac{za^{-1}}{1-za^{-1}} = \frac{1}{z^{-1}a-1} = \frac{-1}{1-az^{-1}}$
- Cuối cùng ta có:

$$x(n) = a^n u(-n-1) \stackrel{Z}{\Rightarrow} X(z) = \frac{-1}{1 - az^{-1}}, ROC = |z| < |a|$$

Examples 3

- $|X(z)| < \infty \Leftrightarrow |z.a^{-1}| < 1$ or $|z| < |a|$
- Khi đó: $X(z) = \frac{1}{1-z.a^{-1}} - 1 = \frac{za^{-1}}{1-za^{-1}} = \frac{1}{z^{-1}a-1} = \frac{-1}{1-az^{-1}}$
- Cuối cùng ta có:

$$x(n) = a^n u(-n-1) \overset{Z}{\Rightarrow} X(z) = \frac{-1}{1-az^{-1}}, ROC = |z| < |a|$$

- 

Examples 4

- $x(n) = a^n$

Examples 4

- $x(n) = a^n$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n.z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.z^{-n}$

Examples 4

- $x(n) = a^n$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n.z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.z^{-n}$
- $|X(z)| < \infty : |z| < |a|$ và $|z| > |a|$

Examples 4

- $x(n) = a^n$
- $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n.z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n.z^{-n}$
- $|X(z)| < \infty : |z| < |a|$ và $|z| > |a|$
- Hay không tồn tại giá trị nào của z để $|X(z)| < \infty$

Examples 5

- $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$

Examples 5

- $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$
- $X(z) = ZT(a^n u(n)) - ZT(b^n u(-n-1))$

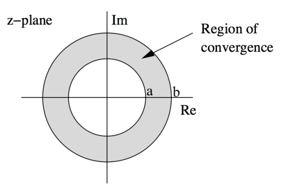
Examples 5

- $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$
- $X(z) = ZT(a^n u(n)) - ZT(b^n u(-n-1))$
- Sử dụng kết quả 2 câu trên ROC: $|z| > |a|$and $|z| < |b|$.

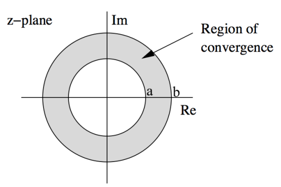
Examples 5

- $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$
- $X(z) = ZT(a^n u(n)) - ZT(b^n u(-n-1))$
- Sử dụng kết quả 2 câu trên ROC: $|z| > |a|$and $|z| < |b|$.
- Nếu $|a| < |b|$, $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}$

Examples 5

- $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$
- $X(z) = ZT(a^n u(n)) - ZT(b^n u(-n-1))$
- Sử dụng kết quả 2 câu trên ROC: $|z| > |a|$and $|z| < |b|$.
- Nếu $|a| < |b|$, $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}$
- 

Examples 5

- $x(n) = a^n u(n) - b^n u(-n-1)$
- $X(z) = ZT(a^n u(n)) - ZT(b^n u(-n-1))$
- Sử dụng kết quả 2 câu trên ROC: $|z| > |a|$and $|z| < |b|$.
- Nếu $|a| < |b|$, $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}$
- 

- Nếu $|a| > |b|$, $ROC = \emptyset$ hay $X(z) = \infty$

Examples 6

- $x(n) = cos(\omega n)u(n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n}u(n) + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}u(n)$

Examples 6

- $x(n) = cos(\omega n)u(n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n}u(n) + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}u(n)$
- $X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega}z^{-1}}$

Examples 6

- $x(n) = cos(\omega n)u(n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n}u(n) + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}u(n)$
- $X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega}z^{-1}}$
- $X(z) = \frac{1}{2}\frac{2-(e^{j\omega}+e^{-j\omega})z^{-1}}{(1-e^{j\omega}z^{-1})(1-e^{-j\omega}z^{-1})} = \frac{1-cos(\omega)z^{-1}}{1-2cos(\omega)z^{-1}+z^{-2}}$

Examples 6

- $x(n) = cos(\omega n)u(n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n}u(n) + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}u(n)$
- $X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega}z^{-1}}$
- $X(z) = \frac{1}{2}\frac{2-(e^{j\omega}+e^{-j\omega})z^{-1}}{(1-e^{j\omega}z^{-1})(1-e^{-j\omega}z^{-1})} = \frac{1-cos(\omega)z^{-1}}{1-2cos(\omega)z^{-1}+z^{-2}}$
- ROC: $|z| > |e^{j\omega}|$ và $|z| > |e^{-j\omega}|$ hay $|z| > 1$

Examples 6

- $x(n) = cos(\omega n)u(n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n}u(n) + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}u(n)$
- $X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega}z^{-1}}$
- $X(z) = \frac{1}{2}\frac{2-(e^{j\omega}+e^{-j\omega})z^{-1}}{(1-e^{j\omega}z^{-1})(1-e^{-j\omega}z^{-1})} = \frac{1-cos(\omega)z^{-1}}{1-2cos(\omega)z^{-1}+z^{-2}}$
- ROC: $|z| > |e^{j\omega}|$ và $|z| > |e^{-j\omega}|$ hay $|z| > 1$
- Vậy:
  $x(n) = cos(\omega n)u(n) \overset{Z}{\Rightarrow} X(z) = \frac{1-cos(\omega)z^{-1}}{1-2cos(\omega)z^{-1}+z^{-2}}, |z| > 1$

Biến đổi Z

Examples 6

- $x(n) = cos(\omega n)u(n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n}u(n) + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}u(n)$
- $X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega}z^{-1}}$
- $X(z) = \frac{1}{2}\frac{2-(e^{j\omega}+e^{-j\omega})z^{-1}}{(1-e^{j\omega}z^{-1})(1-e^{-j\omega}z^{-1})} = \frac{1-cos(\omega)z^{-1}}{1-2cos(\omega)z^{-1}+z^{-2}}$
- ROC: $|z| > |e^{j\omega}|$ và $|z| > |e^{-j\omega}|$ hay $|z| > 1$
- Vậy:
  $x(n) = cos(\omega n)u(n) \overset{Z}{\Rightarrow} X(z) = \frac{1-cos(\omega)z^{-1}}{1-2cos(\omega)z^{-1}+z^{-2}}, |z| > 1$
- Tương tự: $x(n) = cos(\omega n)u(-n-1) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(z) = -\frac{1-cos(\omega)z^{-1}}{1-2cos(\omega)z^{-1}+z^{-2}}, |z| < 1$

Biến đổi Z

Examples 7

- $x(n) = cos(\omega n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}$

Examples 7

- $x(n) = cos(\omega n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}$
- Áp dụng kết quả ở ví dụ 4, $ROC = \emptyset$ nên $X(z) = \infty$

Examples 7

- $x(n) = cos(\omega n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}$
- Áp dụng kết quả ở ví dụ 4, $ROC = \emptyset$ nên $X(z) = \infty$
- Tuỳ thuộc đề bài cho tín hiệu vào dạng nào mà áp dụng biến đổi thích hợp:

Examples 7

- $x(n) = cos(\omega n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}$
- Áp dụng kết quả ở ví dụ 4, $ROC = \emptyset$ nên $X(z) = \infty$
- Tuỳ thuộc đề bài cho tín hiệu vào dạng nào mà áp dụng biến đổi thích hợp:

Biến đổi Z

Examples 7

- $x(n) = cos(\omega n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}$
- Áp dụng kết quả ở ví dụ 4, $ROC = \emptyset$ nên $X(z) = \infty$
- Tuỳ thuộc đề bài cho tín hiệu vào dạng nào mà áp dụng biến đổi thích hợp:
-
  - $x(n) = cos(\omega n)$ hoặc $x(n) = sin(\omega n)$: sử dụng biến đổi Fourier và đáp ứng tần số của hệ thống

Examples 7

- $x(n) = cos(\omega n) = \frac{1}{2}e^{j\omega n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega n}$
- Áp dụng kết quả ở ví dụ 4, $ROC = \emptyset$ nên $X(z) = \infty$
- Tuỳ thuộc đề bài cho tín hiệu vào dạng nào mà áp dụng biến đổi thích hợp:
-
  - $x(n) = cos(\omega n)$ hoặc $x(n) = sin(\omega n)$: sử dụng biến đổi Fourier và đáp ứng tần số của hệ thống
  - $x(n) = cos(\omega n)u(n)$ hoặc $x(n) = cos(\omega n)u(-n-1)$ hoặc $x(n) = sin(\omega n)u(n)$ hoặc $x(n) = sin(\omega n)u(-n-1)$: sử dụng biến đổi Z

Ví dụ về phép biến đổi Laplace

Xác định biến đổi Laplace của các tín hiệu sau

Examples

1. $x(t) = e^{at}u(t)$
2. $x(t) = e^{at}u(-t)$
3. $x(t) = e^{at}$
4. $x(t) = cos(\omega t)u(t)$
5. $x(t) = sin(\omega t)u(t)$

Examples

Example 1

- $x(t) = e^{at}u(t) = \begin{cases} e^{at}, \text{với } t \geq 0 \\ 0, \text{với } t < 0 \end{cases}$
- $X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t}dt$

Examples

Example 1

- $x(t) = e^{at}u(t) = \begin{cases} e^{at}, \text{với } t \geq 0 \\ 0, \text{với } t < 0 \end{cases}$
- $X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t}dt$
- $X(s) = \begin{cases} \frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}|_0^{+\infty} = \frac{(e^{(a-s).+\infty}-1)}{a-s}, \text{với } s \neq a \\ \int\limits_{0}^{+\infty} 1dt = +\infty, \ \text{với } s = a \end{cases}$

Examples

Example 1

- $x(t) = e^{at}u(t) = \begin{cases} e^{at}, \text{với } t \geq 0 \\ 0, \text{với } t < 0 \end{cases}$
- $X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t}dt$
- $X(s) = \begin{cases} \frac{1}{a-s}e^{-(s-a)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{(e^{(a-s).+\infty}-1)}{a-s}, \text{với } s \neq a \\ \int\limits_0^{+\infty} 1dt = +\infty, \ \text{với } s = a \end{cases}$
- X(s) sẽ hữu hạn khi và chỉ khi $s \neq a$ và $e^{(a-s).+\infty} = 0$

Examples

Example 1

- s,a là số phức nên s=Re(s) + j Im(s), a=Re(a) + j Im(a)

Examples

Example 1

- s,a là số phức nên s=Re(s) + j Im(s), a=Re(a) + j Im(a)
- $e^{(a-s).+\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].+\infty}$

Examples

Example 1

- s,a là số phức nên s=Re(s) + j Im(s), a=Re(a) + j Im(a)
- $e^{(a-s).+\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].+\infty}$
- Hay $e^{(a-s).+\infty} = e^{Re(a-s).+\infty} e^{jIm(a-s).+\infty}$

Examples

Example 1

- s,a là số phức nên s=Re(s) + j Im(s), a=Re(a) + j Im(a)
- $e^{(a-s).+\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].+\infty}$
- Hay $e^{(a-s).+\infty} = e^{Re(a-s).+\infty}e^{jIm(a-s).+\infty}$
- Do $|e^{-j\Phi}| = 1 \forall \Phi$, nên $e^{(a-s).+\infty} = 0$ khi và chỉ khi $e^{Re(a-s).+\infty} = 0$ hay $Re(a-s) < 0 \Rightarrow Re(s) > Re(a)$

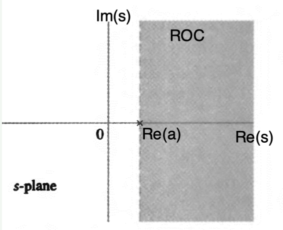
Examples

Example 1

- s,a là số phức nên s=Re(s) + j Im(s), a=Re(a) + j Im(a)
- $e^{(a-s).+\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].+\infty}$
- Hay $e^{(a-s).+\infty} = e^{Re(a-s).+\infty}e^{jIm(a-s).+\infty}$
- Do $|e^{-j\Phi}| = 1\forall\Phi$, nên $e^{(a-s).+\infty} = 0$ khi và chỉ khi $e^{Re(a-s).+\infty} = 0$ hay $Re(a-s) < 0 \Rightarrow Re(s) > Re(a)$
- Khi đó: $X(s) = \frac{1}{s-a}$ và ROC: $Re(s) > Re(a)$

Examples

Example 1

- s,a là số phức nên s=Re(s) + j Im(s), a=Re(a) + j Im(a)
- $e^{(a-s).+\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].+\infty}$
- Hay $e^{(a-s).+\infty} = e^{Re(a-s).+\infty} e^{jIm(a-s).+\infty}$
- Do $|e^{-j\Phi}| = 1 \forall \Phi$, nên $e^{(a-s).+\infty} = 0$ khi và chỉ khi $e^{Re(a-s).+\infty} = 0$ hay $Re(a-s) < 0 \Rightarrow Re(s) > Re(a)$
- Khi đó: $X(s) = \frac{1}{s-a}$ và ROC: $Re(s) > Re(a)$
- 

Examples

Example 2

- $x(t) = e^{at}u(-t) = \begin{cases} e^{at}, \text{với } t \leq 0 \\ 0, \text{với } t > 0 \end{cases}$
- $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt$

Examples

Example 2

- $x(t) = e^{at}u(-t) = \begin{cases} e^{at}, \text{với } t \leq 0 \\ 0, \text{với } t > 0 \end{cases}$
- $X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-st}dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt$
- $X(s) = \begin{cases} \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}|_{-\infty}^{0} = \frac{(1-e^{(a-s).-\infty})}{a-s}, \text{với } s \neq a \\ \int\limits_{-\infty}^{0} 1dt = +\infty, \ \text{với } s = a \end{cases}$

Examples

Example 2

- $x(t) = e^{at}u(-t) = \begin{cases} e^{at}, \text{với } t \leq 0 \\ 0, \text{với } t > 0 \end{cases}$
- $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt$
- $X(s) = \begin{cases} \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}|_{-\infty}^{0} = \frac{(1-e^{(a-s).-\infty})}{a-s}, \text{với } s \neq a \\ \int_{-\infty}^{0} 1dt = +\infty, \text{ với } s = a \end{cases}$
- X(s) sẽ hữu hạn khi và chỉ khi $s \neq a$ và $e^{(a-s).-\infty} = 0$

Examples

Example 2

- Tương tự như trên, s,a là số phức nên:

Examples

Example 2

- Tương tự như trên, s,a là số phức nên:
- $e^{(a-s).-\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].-\infty}$

Example 2

- Tương tự như trên, s,a là số phức nên:
- $e^{(a-s).-\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].-\infty}$
- Hay $e^{(a-s).-\infty} = e^{Re(a-s).-\infty} e^{jIm(a-s).-\infty}$

Example 2

- Tương tự như trên, s,a là số phức nên:
- $e^{(a-s).-\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].-\infty}$
- Hay $e^{(a-s).-\infty} = e^{Re(a-s).-\infty} e^{jIm(a-s).-\infty}$
- nên $e^{(a-s).-\infty} = 0$ khi và chỉ khi $e^{Re(a-s).-\infty} = 0$ hay $Re(a-s) > 0 \Rightarrow Re(a) > Re(s)$

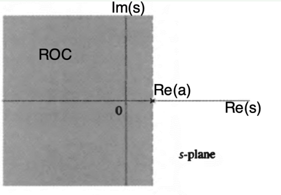
Examples

Example 2

- Tương tự như trên, s,a là số phức nên:
- $e^{(a-s).-\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].-\infty}$
- Hay $e^{(a-s).-\infty} = e^{Re(a-s).-\infty}e^{jIm(a-s).-\infty}$
- nên $e^{(a-s).-\infty} = 0$ khi và chỉ khi $e^{Re(a-s).-\infty} = 0$ hay $Re(a-s) > 0 \Rightarrow Re(a) > Re(s)$
- Khi đó: $X(s) = \frac{1}{a-s} = \frac{-1}{s-a}$ và ROC: $Re(s) < Re(a)$

Examples

Example 2

- Tương tự như trên, s,a là số phức nên:
- $e^{(a-s).-\infty} = e^{[Re(a-s)+jIm(a-s)].-\infty}$
- Hay $e^{(a-s).-\infty} = e^{Re(a-s).-\infty}e^{jIm(a-s).-\infty}$
- nên $e^{(a-s).-\infty} = 0$ khi và chỉ khi $e^{Re(a-s).-\infty} = 0$ hay $Re(a-s) > 0 \Rightarrow Re(a) > Re(s)$
- Khi đó: $X(s) = \frac{1}{a-s} = \frac{-1}{s-a}$ và ROC: $Re(s) < Re(a)$
- 

Nhận xét của Region of convergent (ROC)

- Cùng X(s) nhưng các tín hiệu khác nhau sẽ có điều kiện hội tụ ROC $\rightarrow$ khác nhau
- ROC của Laplace có dạng mặt phẳng đứng "vertical plane"

Examples

Example 3

- $x(t) = e^{at}$
- $X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt =$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t}dt$$

Example 3

- $x(t) = e^{at}$
- $X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt =$
  $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t}dt$
- Để X(s) sẽ hữu hạn thì mỗi thành phần của tổng trên đều phải hữu hạn. Áp dụng kết quả từ 2 ví dụ trước

Examples

Example 3

- $x(t) = e^{at}$
- $X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt =$
  $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t}dt$
- Để X(s) sẽ hữu hạn thì mỗi thành phần của tổng trên đều phải hữu hạn. Áp dụng kết quả từ 2 ví dụ trước
- X(s) sẽ hữu hạn khi và chỉ khi $Re(s) < Re(a)$ và $Re(s) > Re(a)$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Định nghĩa

VD Z trans

VD Laplace

Tính chất của biến đổi Z

Biến đổi Z ngược

Tính chất của biến đổi Laplace

Biến đổi Laplace ngược

Example 3

- $x(t) = e^{at}$
- $X(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{at}e^{-st}dt =$
  $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{(a-s)t}dt + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{(a-s)t}dt$
- Để X(s) sẽ hữu hạn thì mỗi thành phần của tổng trên đều phải hữu hạn. Áp dụng kết quả từ 2 ví dụ trước
- X(s) sẽ hữu hạn khi và chỉ khi $Re(s) < Re(a)$ và $Re(s) > Re(a)$
- $ROC = \emptyset$ nên $X(s) = \infty$

Examples

Example 4

- $x(t) = cos(\omega t)u(t)$

Example 4

- $x(t) = cos(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có:
  $x(t) = cos(\omega t)u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}u(t)$

Examples

Example 4

- $x(t) = cos(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có: $x(t) = cos(\omega t)u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}$

Example 4

- $x(t) = cos(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có: $x(t) = cos(\omega t)u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

Example 4

- $x(t) = cos(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có:
  $x(t) = cos(\omega t)u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
- ROC: $Re(s) > Re(j\omega)$ và $Re(s) > Re(-j\omega)$

Examples

Example 4

- $x(t) = cos(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có: $x(t) = cos(\omega t)u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
- ROC: $Re(s) > Re(j\omega)$ và $Re(s) > Re(-j\omega)$
- hay ROC: $Re(s) > 0$

Examples

Example 4

- $x(t) = cos(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có:
  $x(t) = cos(\omega t)u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
- ROC: $Re(s) > Re(j\omega)$ và $Re(s) > Re(-j\omega)$
- hay ROC: $Re(s) > 0$
- Vậy $x(t) = cos(\omega t)u(t)$ thì $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ với $Re(s) > 0$

Examples

Example 4

- $x(t) = cos(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có: $x(t) = cos(\omega t)u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$
- ROC: $Re(s) > Re(j\omega)$ và $Re(s) > Re(-j\omega)$
- hay ROC: $Re(s) > 0$
- Vậy $x(t) = cos(\omega t)u(t)$ thì $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$ với $Re(s) > 0$
- Tương tự $x(t) = cos(\omega t)u(-t)$ thì $X(s) = \frac{-s}{s^2+\omega^2}$ với $Re(s) < 0$

Examples

Example 5

- $x(t) = sin(\omega t)u(t)$

Examples

Example 5

- $x(t) = sin(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có:
  $x(t) = sin(\omega t)u(t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t}u(t) - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}u(t)$

Examples

Example 5

- $x(t) = sin(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có:
  $x(t) = sin(\omega t)u(t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t}u(t) - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s+j\omega}$

Examples

Example 5

- $x(t) = sin(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có:
  $x(t) = sin(\omega t)u(t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t}u(t) - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Example 5

- $x(t) = sin(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có:
  $x(t) = sin(\omega t)u(t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t}u(t) - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
- ROC: $Re(s) > Re(j\omega)$ và $Re(s) > Re(-j\omega)$

Examples

Example 5

- $x(t) = sin(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có:
  $x(t) = sin(\omega t)u(t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t}u(t) - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
- ROC: $Re(s) > Re(j\omega)$ và $Re(s) > Re(-j\omega)$
- hay ROC: $Re(s) > 0$

Examples

Example 5

- $x(t) = sin(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có:
  $x(t) = sin(\omega t)u(t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t}u(t) - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
- ROC: $Re(s) > Re(j\omega)$ và $Re(s) > Re(-j\omega)$
- hay ROC: $Re(s) > 0$
- Vậy $x(t) = sin(\omega t)u(t)$ thì $X(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ với $Re(s) > 0$

Examples

Example 5

- $x(t) = sin(\omega t)u(t)$
- Áp dụng công thức Euler, ta có:
  $x(t) = sin(\omega t)u(t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t}u(t) - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}u(t)$
- Áp dụng kết quả từ ví dụ 1: $X(s) = \frac{1}{2j}\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{2j}\frac{1}{s+j\omega}$
- Quy đồng mẫu số và rút gọn: $X(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
- ROC: $Re(s) > Re(j\omega)$ và $Re(s) > Re(-j\omega)$
- hay ROC: $Re(s) > 0$
- Vậy $x(t) = sin(\omega t)u(t)$ thì $X(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ với $Re(s) > 0$
- Tương tự $x(t) = sin(\omega t)u(-t)$ thì $X(s) = \frac{-\omega}{s^2+\omega^2}$ với $Re(s) < 0$

Tính chất của biến đổi Z:

Tuyến tính :

- $x_1(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X_1(z), ROC1,$
- $x_2(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X_2(z), ROC2$
- Thì: $(a_1x_1(n) + a_2x_2(n)) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} (a_1X_1(z) + a_2X_2(z))$
- ROC = ROC1 và ROC2

Tính chất của biến đổi Z :

Dịch thời gian:

- $x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} X(z), ROC$
- $x(n-1) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} z^{-1}X(z)$
- $x(n-n_0) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} z^{-n_0}X(z)$
- ROC'=ROC
- Nhân thêm z^{-1} trong miền Z tương ứng với dịch 1 bước trong miền thời gian
- Nhân thêm z trong miền Z tương ứng với dịch -1 bước trong miền thời gian

Tính chất của biến đổi Z :

Phép lật

- $x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(z), ROC$
- $x(-n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(z^{-1})$ (Thay z trong công thức X(z) bởi z^{-1})
- ROC': Thay z trong công thức ROC bởi z^{-1}

Ứng dụng:

- $a^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$
- $a^{-n} u(-n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-az}$
- Chú ý: u(-n) chứ không phải u(-n-1); nên ko áp dụng ngay kết quả ở ví dụ 3 vào!
- ROC: $|z^{-1}| > |a|$ hay $|z| < 1/|a|$

Tính chất của biến đổi Z :

Đạo hàm trong miền Z

- $x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(z), ROC$
- $nx(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} -z\frac{d(X(z))}{dz}$
- Nhân thêm n trong miền thời gian tương ứng với lấy đạo hàm bậc nhất trong miền Z nhân thêm với (-z)

Ứng dụng:

- $a^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$
- $na^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} -z\frac{d(X(z))}{dz} = -z(\frac{1}{1-az^{-1}})' = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$
- ROC: |z|>|a|

Tính chất của biến đổi Z :

Co giãn trong miền Z:

- $x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(z), ROC$
- $a^n x(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X(a^{-1}z)$ (Thay z trong công thức X(z) bởi $a^{-1}z$)
- ROC: $|a|R_{x-} < |z| < a.R_{x+}$ (Thay z trong công thức ROC bằng biến $a^{-1}z$)

Ứng dụng:

- $cos(\omega n)u(n) \overset{Z}{\Rightarrow} \frac{1-cos(\omega)z^{-1}}{1-2cos(\omega)z^{-1}+z^{-2}}, |z| > 1$
- $a^n cos(\omega n)u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1-cos(\omega)az^{-1}}{1-2cos(\omega)az^{-1}+a^2z^{-2}}$
- ROC: $|a^{-1}z| > 1$ hay $|z| > |a|$

Nhân chập:

- $x_1(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X_1(z), ROC1,$
- $x_2(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X_2(z), ROC2$
- Thì: $x_1(n) * x_2(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} X_1(z)X_2(z)$
- Nhân chập trong miền thời gian tương ứng với phép nhân trong miền Z
- ROC = ROC1 và ROC2

Sử dụng các tính chất của biến đổi Z và các kết quả đã có, xác định biến đổi Z của tín hiệu sau:

- $x(n) = n.(\frac{-1}{2})^n u(n) * (\frac{1}{4})^{-n} u(-n) + (\frac{1}{2})^n u(n-2)$

Examples

$x(n) = n.(\frac{-1}{2})^n u(n) * (\frac{1}{4})^{-n} u(-n) + (\frac{1}{2})^n u(n-2)$

- Đặt: $x_1(n) = n.(\frac{-1}{2})^n u(n)$
- $x_2(n) = (\frac{1}{4})^{-n} u(-n)$
- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2)$
- Thì $x(n = x_1(n) * x_2(n) + x_3(n)$. Do đó $X(z) = X_1(z).X_2(z) + X3(z)$

Examples

- $x_1(n) = n.(\frac{-1}{2})^n u(n)$

Examples

- $x_1(n) = n.(\frac{-1}{2})^n u(n)$
- $\Rightarrow$ tính chất đạo hàm

Examples

- $x_1(n) = n.(\frac{-1}{2})^n u(n)$
- $\Rightarrow$ tính chất đạo hàm
- $(\frac{-1}{2})^n u(n) \xRightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$

Examples

- $x_1(n) = n.(\frac{-1}{2})^n u(n)$
- $\Rightarrow$ tính chất đạo hàm
- $(\frac{-1}{2})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$
- $n(\frac{-1}{2})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} -z(\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}})' = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}$

Examples

- $x_1(n) = n.(\frac{-1}{2})^n u(n)$
- $\Rightarrow$ tính chất đạo hàm
- $(\frac{-1}{2})^n u(n) \xRightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$
- $n(\frac{-1}{2})^n u(n) \xRightarrow[\text{Transform}]{Z} -z(\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}})' = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}$
- Vậy $X_1(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}$

Examples

- $x_1(n) = n.(\frac{-1}{2})^n u(n)$
- $\Rightarrow$ tính chất đạo hàm
- $(\frac{-1}{2})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} \frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$
- $n(\frac{-1}{2})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} -z(\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}})' = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}$
- Vậy $X_1(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}$
- ROC1: |z|>1/2

Examples

- $x_2(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u(-n)$

Examples

- $x_2(n) = (\frac{1}{4})^{-n}u(-n)$
- $\Rightarrow$ tính chất lật

Examples

- $x_2(n) = (\frac{1}{4})^{-n} u(-n)$
- $\Rightarrow$ tính chất lật
- $\frac{1}{4})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/4$

Examples

- $x_2(n) = (\frac{1}{4})^{-n}u(-n)$
- $\Rightarrow$ tính chất lật
- $\frac{1}{4})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/4$
- $(\frac{1}{4})^{-n} u(-n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{1}}$, với ROC: $|z^{-1}| > 1/4$

Examples

- $x_2(n) = (\frac{1}{4})^{-n} u(-n)$
- $\Rightarrow$ tính chất lật
- $\frac{1}{4})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/4$
- $(\frac{1}{4})^{-n} u(-n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{1}}$, với ROC: $|z^{-1}| > 1/4$
- Vậy $X_2(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z}$, ROC2: $|z|<4$

Examples

- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2)$

Examples

- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2)$
- $\Rightarrow$ tính chất dịch

Examples

- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2)$
- $\Rightarrow$ tính chất dịch
- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2) = (\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2)(\frac{1}{2})^2$

Examples

- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2)$
- $\Rightarrow$ tính chất dịch
- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2) = (\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2)(\frac{1}{2})^2$
- $(\frac{1}{2})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$

Examples

- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2)$
- $\Rightarrow$ tính chất dịch
- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2) = (\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2)(\frac{1}{2})^2$
- $(\frac{1}{2})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$
- $(\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Z}} z^{-2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$

Examples

- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2)$
- $\Rightarrow$ tính chất dịch
- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2) = (\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2)(\frac{1}{2})^2$
- $(\frac{1}{2})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$
- $(\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} z^{-2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$
- Vậy $X_3(z) = \frac{1}{4}\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, ROC3: $|z|>1/2$

Examples

- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2)$
- $\Rightarrow$ tính chất dịch
- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2) = (\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2)(\frac{1}{2})^2$
- $(\frac{1}{2})^n u(n) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$
- $(\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2) \xrightarrow[\text{Transform}]{Z} z^{-2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$
- Vậy $X_3(z) = \frac{1}{4}\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, ROC3: $|z|>1/2$
- Cuối cùng: $X(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z} + \frac{1}{4}\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

Examples

- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2)$
- $\Rightarrow$ tính chất dịch
- $x_3(n) = (\frac{1}{2})^n u(n-2) = (\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2)(\frac{1}{2})^2$
- $(\frac{1}{2})^n u(n) \xRightarrow[\text{Transform}]{Z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$
- $(\frac{1}{2})^{n-2} u(n-2) \xRightarrow[\text{Transform}]{Z} z^{-2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, với ROC: $|z| > 1/2$
- Vậy $X_3(z) = \frac{1}{4}\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, ROC3: $|z|>1/2$
- Cuối cùng: $X(z) = \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z} + \frac{1}{4}\frac{z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$
- ROC: $1/2 < |z| < 4$

Bảng biến đổi Z

Sequence	Transform	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 or ∞
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$\begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > 0$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$r^n \cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2 z^{-2}}$	$\|z\| > r$

Nhận xét:

- Biến đổi Z là ánh xa 1:1

Nhận xét:

- Biến đổi Z là ánh xa 1:1
- $x(n)$ sẽ có duy nhất $X(z)$ và ROC tương ứng

Nhận xét:

- Biến đổi Z là ánh xa 1:1
- x(n) sẽ có duy nhất X(z) và ROC tương ứng
- 1 cặp X(z)+ROC cũng tương ứng với duy nhất x(n)

Nhận xét:

- Biến đổi Z là ánh xa 1:1
- x(n) sẽ có duy nhất X(z) và ROC tương ứng
- 1 cặp X(z)+ROC cũng tương ứng với duy nhất x(n)
- ROC của biến đổi Z có dạng "circle"

Nhận xét:

- Biến đổi Z là ánh xa 1:1
- x(n) sẽ có duy nhất X(z) và ROC tương ứng
- 1 cặp X(z)+ROC cũng tương ứng với duy nhất x(n)
- ROC của biến đổi Z có dạng "circle"
- Cùng 1 dạng X(z); tuỳ thuộc vào ROC, mà tín hiệu có thể là nhân quả hoặc không nhân quả

Nhận xét:

- Biến đổi Z là ánh xa 1:1
- x(n) sẽ có duy nhất X(z) và ROC tương ứng
- 1 cặp X(z)+ROC cũng tương ứng với duy nhất x(n)
- ROC của biến đổi Z có dạng "circle"
- Cùng 1 dạng X(z); tuỳ thuộc vào ROC, mà tín hiệu có thể là nhân quả hoặc không nhân quả
- Ví dụ: $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$. Nếu |z|> |a| thì $x(n) = a^n u(n)$: (nhân quả). Ngược lại Nếu |z|< |a| thì $x(n) = -a^n u(-n-1)$(không nhân quả)

Nhận xét:

- Biến đổi Z là ánh xa 1:1
- x(n) sẽ có duy nhất X(z) và ROC tương ứng
- 1 cặp X(z)+ROC cũng tương ứng với duy nhất x(n)
- ROC của biến đổi Z có dạng "circle"
- Cùng 1 dạng X(z); tuỳ thuộc vào ROC, mà tín hiệu có thể là nhân quả hoặc không nhân quả
- Ví dụ: $X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$. Nếu |z|> |a| thì $x(n) = a^n u(n)$: (nhân quả). Ngược lại Nếu |z|< |a| thì $x(n) = -a^n u(-n-1)$(không nhân quả)
- Khi tính biến đổi Z, phải chỉ ra ROC tương ứng

Biến đổi Z ngược

Định nghĩa

- Cho biến đổi Z và miền hội tụ của 1 tín hiệu. Xác định công thức của tín hiệu trong miền thời gian tương ứng?

Cách thực hiện

Biến đổi Z ngược

Định nghĩa

- Cho biến đổi Z và miền hội tụ của 1 tín hiệu. Xác định công thức của tín hiệu trong miền thời gian tương ứng?
- Biết X(z), ROC. Xác định x(n)?

Cách thực hiện

Biến đổi Z ngược

Định nghĩa

- Cho biến đổi Z và miền hội tụ của 1 tín hiệu. Xác định công thức của tín hiệu trong miền thời gian tương ứng?
- Biết X(z), ROC. Xác định x(n)?

Cách thực hiện

- Áp dụng tính chất tuyến tính và phương pháp phân tích-tổng hợp

Biến đổi Z ngược

Định nghĩa

- Cho biến đổi Z và miền hội tụ của 1 tín hiệu. Xác định công thức của tín hiệu trong miền thời gian tương ứng?
- Biết X(z), ROC. Xác định x(n)?

Cách thực hiện

- Áp dụng tính chất tuyến tính và phương pháp phân tích-tổng hợp
- Phân tích: X(z) thành tổ hợp các thành phần đơn giản$X_i(z)$**đã biết** dạng tín hiệu tương ứng $x_i(n)$ trong miền thời gian

Định nghĩa

- Cho biến đổi Z và miền hội tụ của 1 tín hiệu. Xác định công thức của tín hiệu trong miền thời gian tương ứng?
- Biết X(z), ROC. Xác định x(n)?

Cách thực hiện

- Áp dụng tính chất tuyến tính và phương pháp phân tích-tổng hợp
- Phân tích: X(z) thành tổ hợp các thành phần đơn giản$X_i(z)$**đã biết** dạng tín hiệu tương ứng $x_i(n)$ trong miền thời gian
- Tổng hợp: Tín hiệu x(n) sẽ là tổ hợp tương ứng của các $x_i(n)$

Biến đổi Z ngược

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Z

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Z
- $1 \xRightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \delta(n)$

Biến đổi Z ngược

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Z
- $1 \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \delta(n)$
- $\frac{1}{1-az^{-1}} \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \begin{cases} a^n u(n) \text{ nếu ROC: } z| > |a| \\ -a^n u(-n-1) \text{ nếu ROC: } |z| < |a| \end{cases}$

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Z
- $1 \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \delta(n)$
- $\frac{1}{1-az^{-1}} \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \begin{cases} a^n u(n) \text{ nếu ROC: } z| > |a| \\ -a^n u(-n-1) \text{ nếu ROC: } |z| < |a| \end{cases}$
- $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \begin{cases} na^n u(n) \text{ nếu} z| > |a| \\ -na^n u(-n-1) \text{ nếu } |z| < |a| \end{cases}$

Biến đổi Z ngược

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Z
- $1 \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \delta(n)$
- $\frac{1}{1-az^{-1}} \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \begin{cases} a^n u(n) \text{ nếu ROC: } z| > |a| \\ -a^n u(-n-1) \text{ nếu ROC: } |z| < |a| \end{cases}$
- $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \begin{cases} na^n u(n) \text{ nếu} z| > |a| \\ -na^n u(-n-1) \text{ nếu } |z| < |a| \end{cases}$
- $z^{-k}F(z) \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} f(n-k)$, F(z) là 1 trong các dạng bên trên, f(n) là tín hiệu tương ứng trong miền thời gian

Biến đổi Z ngược

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Z
- $1 \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \delta(n)$
- $\frac{1}{1-az^{-1}} \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \begin{cases} a^n u(n) \text{ nếu ROC: } z| > |a| \\ -a^n u(-n-1) \text{ nếu ROC: } |z| < |a| \end{cases}$
- $\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \begin{cases} na^n u(n) \text{ nếu} z| > |a| \\ -na^n u(-n-1) \text{ nếu } |z| < |a| \end{cases}$
- $z^{-k}F(z) \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} f(n-k)$, F(z) là 1 trong các dạng bên trên, f(n) là tín hiệu tương ứng trong miền thời gian
- VD $z^{-k} \xrightarrow[\text{Z Transform}]{\text{Inverse}} \delta(n-k)$

Biến đổi Z ngược

Tổng quát

- Viết X(z) thành dạng hàm của biến z^{-1}

Biến đổi Z ngược

Tổng quát

- Viết X(z) thành dạng hàm của biến z^{-1}
- Áp dụng nguyên tắc: Phân tích -tổng hợp

Biến đổi Z ngược

Tổng quát

- Viết X(z) thành dạng hàm của biến z^{-1}
- Áp dụng nguyên tắc: Phân tích -tổng hợp

$$
\begin{tikzcd}
X(z) \arrow[r, "\text{Phân}", "\text{tích}"'] & a_1X_1(z) \arrow[d, "\text{ROC}"] & +a_2X_2(z) \arrow[d, "\text{ROC}"] & +a_3X_3(z) \arrow[d, "\text{ROC}"] \\
x(n) & a_1x_1(n) \arrow[l, "\text{hợp}"', "\text{Tổng}"] & +a_2x_2(n) & +a_3x_3(n)
\end{tikzcd}
$$

-

Biến đổi Z ngược

Tổng quát

- Viết X(z) thành dạng hàm của biến z^{-1}
- Áp dụng nguyên tắc: Phân tích -tổng hợp

$$
\begin{array}{ccccc}
X(z) \xrightarrow[\text{tích}]{\text{Phân}} & a_1X_1(z) & +a_2X_2(z) & +a_3X_3(z) \\
& \downarrow \text{ROC} & \downarrow \text{ROC} & \downarrow \text{ROC} \\
x(n) \xleftarrow[\text{Tổng}]{\text{hợp}} & a_1x_1(n) & +a_2x_2(n) & +a_3x_3(n)
\end{array}
$$

-
- Nếu không cho ROC, ta có thể tuỳ theo giá trị của z biện luận kết quả

Tính chất của biến đổi Laplace:

Tuyến tính :

- $x_1(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X_1(s), ROC1,$
- $x_2(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X_2(s), ROC2$
- Thì: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} a_1X_1(\mathbf{S}) + a_2X_2(\mathbf{S})$
- ROC $=$ ROC1 và ROC2

Tính chất của biến đổi Laplace:

Dịch thời gian:

- $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s), ROC$
- $x(t-t_0) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} e^{-st_0}X(s)$
- ROC'=ROC

VD Ứng dụng:

- $e^{2t}u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{1}{s-2}, Re(s) > 2$
- $e^{2t}u(t-3) = e^6 e^{2(t-3)}u(t-3) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} e^6.e^{-3s}\frac{1}{s-2}$
- ROC: Re(s) >2

Tính chất của biến đổi Laplace:

Dịch trong miền Laplace:

- $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s), ROC$
- $e^{s_0 t}x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s - s_0)$
- ROC'=ROC với biến $(s - s_0)$

Ứng dụng: sin(wt) u(t) ==>w/ (s^2+w^2)

- $cos(\omega t)u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{s}{s^2+\omega^2}, Re(s) > 0$
- $e^{at}.cos(\omega t)u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
- ROC: Re(s-a) > 0 hay Re(s) >Re(a)
- Tương tự: $e^{at}.sin(\omega t)u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{W}{(s-a)^2+\omega^2}$
- ROC: Re(s) >Re(a)

Tính chất của biến đổi Laplace:

Co giãn

- $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s), ROC$
- $x(at) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$
- ROC' $=$ thay biến s trong ROC bởi $\frac{s}{a}$

Ứng dụng:

- $e^{2t}u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{1}{s-2}, Re(s) > 2$
- $e^{6t}u(t) = e^{3.2t}u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{1}{3}s-2} = \frac{1}{s-6}$
- ROC: $Re(\frac{1}{3}s) > 2$ hay $Re(s) > 6$
- Kết quả hoàn toàn giống với áp dụng kết quả ví dụ 1

Tính chất của biến đổi Laplace:

Nhân chập:

- $x_1(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X_1(s), ROC1$
- $x_2(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X_2(s), ROC$
- $x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X_1(s).X_2(s)$
- ROC' $=$ ROC1 và ROC2

Ứng dụng:

- Hệ thống LTI có tín hiệu vào x(t), tín hiệu ra y(t) và đáp ứng xung h(t)
- Trong miền thời gian: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Trong miền Laplace: $Y(s) = X(s).H(s)$
- $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$: hàm truyền (transfer function) của hệ thống

Tính chất của biến đổi Laplace:

Đạo hàm theo thời gian:

- $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s), ROC$
- $\frac{dx(t)}{dt} \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} s.X(s)$
- $\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} s^2.X(s)$
- ROC' = ROC
- Đạo hàm 1 lần trong miền thời gian, tương ứng với nhân thêm s trong miền Laplace

VD Ứng dụng:

- 1 hệ thống LTI xác định bởi phương trình vi phân: $a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + .. + a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} = b_0 x(t) + .. + b_M \frac{d^M \mathbf{X}(t)}{dt^M}$
- Biến đổi Laplace 2 vế và áp dụng tính chất đạo hàm:
- $a_0 Y(s) + a_1 s Y(s) + .. + a_N s^N Y(s) =$ $b_0 X(s) + b_1 s X(s) + .. + b_M s^M X(s)$
- $Y(s)[a_0 + a_1 s + .. + a_N s^N] = X(s)[b_0 + b_1 s + .. + b_M s^M]$
- $H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + .. + b_M s^M}{a_0 + a_1 s + ... + a^N s^N}$: hàm truyền của hệ thống có thể xác định từ các hệ số phương trình vi phân

Tính chất của biến đổi Laplace:

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Đạo hàm theo biến s (trong miền Laplace):

- $x(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} X(s), ROC$
- $-tx(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{d}{ds}X(s)$

Ứng dụng:

- $e^{at}u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} \frac{1}{s-a}, Re(s) > Re(a)$
- $te^{at}u(t) \xrightarrow[\text{Transform}]{\text{Laplace}} -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{+1}{(s-a)^2}$
- Với ROC: Re(s)>Re(a)

u(t) => 1/s

tu(t) => - (1/s)’=

Biến đổi Laplace: Tính chất

X(s)=?

- $x(t) = e^{5t}u(-t+3)$
- $x(t) = e^{-t}tu(t-2)$
- $x(t) = t^2e^{(-2t)}u(t)$

Cách 2: Dùng định nghĩa

Bảng biến đổi Laplace

f(t)	$\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}, \quad s > a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$

Biến đổi Laplace ngược

Định nghĩa

- Cho biến đổi Laplace và miền hội tụ của 1 tín hiệu. Xác định công thức của tín hiệu trong miền thời gian tương ứng?

Cách thực hiện

Biến đổi Laplace ngược

Định nghĩa

- Cho biến đổi Laplace và miền hội tụ của 1 tín hiệu. Xác định công thức của tín hiệu trong miền thời gian tương ứng?
- Biết X(s), ROC. Xác định x(t)?

Cách thực hiện

Biến đổi Laplace ngược

Định nghĩa

- Cho biến đổi Laplace và miền hội tụ của 1 tín hiệu. Xác định công thức của tín hiệu trong miền thời gian tương ứng?
- Biết X(s), ROC. Xác định x(t)?

Cách thực hiện

- Áp dụng tính chất tuyến tính và phương pháp phân tích-tổng hợp

Biến đổi Laplace ngược

Định nghĩa

- Cho biến đổi Laplace và miền hội tụ của 1 tín hiệu. Xác định công thức của tín hiệu trong miền thời gian tương ứng?
- Biết X(s), ROC. Xác định x(t)?

Cách thực hiện

- Áp dụng tính chất tuyến tính và phương pháp phân tích-tổng hợp
- Phân tích: X(s) thành tổ hợp các thành phần đơn giản$X_i(s)$**đã biết** dạng tín hiệu tương ứng $x_i(t)$ trong miền thời gian

Biến đổi Laplace ngược

Định nghĩa

- Cho biến đổi Laplace và miền hội tụ của 1 tín hiệu. Xác định công thức của tín hiệu trong miền thời gian tương ứng?
- Biết X(s), ROC. Xác định x(t)?

Cách thực hiện

- Áp dụng tính chất tuyến tính và phương pháp phân tích-tổng hợp
- Phân tích: X(s) thành tổ hợp các thành phần đơn giản$X_i(s)$**đã biết** dạng tín hiệu tương ứng $x_i(t)$ trong miền thời gian
- Tổng hợp: Tín hiệu x(t) sẽ là tổ hợp tương ứng của các $x_i(t)$

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Laplace

Biến đổi Laplace ngược

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Laplace
- $1 \xrightarrow[\text{Laplace Trans}]{\text{Inverse}} \delta(t)$

Biến đổi Laplace ngược

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Laplace
- $1 \xrightarrow[\text{Laplace Trans}]{\text{Inverse}} \delta(t)$
- $\frac{1}{s-a} \xrightarrow[\text{Laplace Trans}]{\text{Inverse}} \begin{cases} e^{at}u(t) \text{ nếu } Re(s) > Re(a) \\ -e^{at}u(-t) \text{ nếu } Re(s) < Re(a) \end{cases}$

Biến đổi Laplace ngược

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Laplace
- $1 \xrightarrow[\text{Laplace Trans}]{\text{Inverse}} \delta(t)$
- $\frac{1}{s-a} \xrightarrow[\text{Laplace Trans}]{\text{Inverse}} \begin{cases} e^{at}u(t) \text{ nếu } Re(s) > Re(a) \\ -e^{at}u(-t) \text{ nếu } Re(s) < Re(a) \end{cases}$
- $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \xrightarrow[\text{L Trans}]{\text{Inv}} \begin{cases} e^{at}sin(\omega t)u(t), Re(s) > Re(a) \\ -e^{at}sin(\omega t)u(-t), Re(s) < Re(a) \end{cases}$

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Laplace
- $1 \xrightarrow[\text{Laplace Trans}]{\text{Inverse}} \delta(t)$
- $\frac{1}{s-a} \xrightarrow[\text{Laplace Trans}]{\text{Inverse}} \begin{cases} e^{at}u(t) \text{ nếu } Re(s) > Re(a) \\ -e^{at}u(-t) \text{ nếu } Re(s) < Re(a) \end{cases}$
- $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \xrightarrow[\text{L Trans}]{\text{Inv}} \begin{cases} e^{at}sin(\omega t)u(t), Re(s) > Re(a) \\ -e^{at}sin(\omega t)u(-t), Re(s) < Re(a) \end{cases}$
- $\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2} \xrightarrow[\text{L Trans}]{\text{Inv}} \begin{cases} e^{at}cos(\omega t)u(t), Re(s) > Re(a) \\ -e^{at}cos(\omega t)u(-t), Re(s) < Re(a) \end{cases}$

Biến đổi Laplace ngược

Các dạng cơ bản?

- Có trong bảng biến đổi Laplace
- $1 \xrightarrow[\text{Laplace Trans}]{\text{Inverse}} \delta(t)$
- $\frac{1}{s-a} \xrightarrow[\text{Laplace Trans}]{\text{Inverse}} \begin{cases} e^{at}u(t) \text{ nếu } Re(s) > Re(a) \\ -e^{at}u(-t) \text{ nếu } Re(s) < Re(a) \end{cases}$
- $\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \xrightarrow[\text{L Trans}]{\text{Inv}} \begin{cases} e^{at}sin(\omega t)u(t), Re(s) > Re(a) \\ -e^{at}sin(\omega t)u(-t), Re(s) < Re(a) \end{cases}$
- $\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2} \xrightarrow[\text{L Trans}]{\text{Inv}} \begin{cases} e^{at}cos(\omega t)u(t), Re(s) > Re(a) \\ -e^{at}cos(\omega t)u(-t), Re(s) < Re(a) \end{cases}$
- $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \xrightarrow[\text{L Trans}]{\text{Inv}} \begin{cases} t^n e^{at}u(t), Re(s) > Re(a) \\ -t^n e^{at}u(-t), Re(s) < Re(a) \end{cases}$