BÀI TẬP CHƯƠNG 1 – PHẦN TÍN HIỆU

I. PHÂN LOẠI TÍN HIỆU

a. Tín hiệu chẵn (đối xứng)/lẻ (phản đối xứng)/đối xứng liên hợp phức

Bài 1: Tín hiệu

$$x(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) & với -T \le t \le T \\ 0 & với\ các\ giá\ trị\ t\ khác \end{cases}$$

Xét tại -t:

$$x(-t) = \begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi t}{T}\right) & với -T \le t \le T \\ 0 & với\ các\ giá\ trị\ t\ khác \end{cases}$$

⬄

$$x(-t) = \begin{cases} -\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) & với -T \le t \le T \\ 0 & với\ các\ giá\ trị\ t\ khác \end{cases} = -x(t)$$

KL: Vậy tín hiệu $x(t)$ là hàm lẻ theo t

Bài 2: Công thức áp dụng: $\begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) & phần\ chẵn \\ x_o(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big) & phần\ lẻ \end{cases}$

a. $x(t) = e^{-2t}\cos t$

Ta có: $x(t) = e^{-2t}\cos t,\ \ x(-t) = e^{2t}\cos t$

⇨ $\begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) = \frac{1}{2}(e^{-2t}\cos t + e^{2t}\cos t) = \frac{e^{-2t}+e^{2t}}{2}\cos t \\ x_o(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big) = \frac{1}{2}(e^{-2t}\cos t - e^{2t}\cos t) = \frac{e^{-2t}-e^{2t}}{2}\cos t \end{cases}$, $\quad KL$

b. $x(t) = \cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t)$

Ta có: $x(t) = \cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t)$, $\ x(-t) = \cos(t) - \sin(t) - \sin(t)\cos(t)$

⇨ $\begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) = \cos(t) \\ x_o(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big) = \sin(t) + \sin(t)\cos(t) \end{cases}$, $\quad KL$

c. $x(t) = 1 + t + 3t^2 + 5t^3 + 9t^4$

Ta có: $x(t) = 1 + t + 3t^2 + 5t^3 + 9t^4, x(-t) = 1 - t + 3t^2 - 5t^3 + 9t^4$

⇨ $\begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) = 1 + 3t^2 + 9t^4 \\ x_o(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big) = t + 5t^3 \end{cases}$, $\quad KL$

d. $x(t) = 1 + t\,cos(t) + t^2\sin(t) + t^3\sin(t)\cos(t)$

Ta có: $x(t) = 1 + t\,cos(t) + t^2\sin(t) + t^3\sin(t)\cos(t)$,

$x\,(-t) = 1 + t\,cos(t) + t^2\sin(t) + t^3\sin(t)\cos(t)$

⇨ $\begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) = 1 + t^3\sin(t)\cos(t) \\ x_o(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big) = t\,cos(t) + t^2\sin(t) \end{cases}$, $\quad KL$

e. $x(t) = (1 + t^3)cos^3(10t)$

Ta có: $x(t) = (1 + t^3)cos^3(10t)$,
$x\,(-t) = (1 - t^3)cos^3(10t)$

⇨ $\begin{cases} x_e(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) + x(-t)\big) = cos^3(10t) \\ x_o(t) = \frac{1}{2}\big(x(t) - x(-t)\big) = t^3cos^3(10t) \end{cases}$, *KL*

Bài 3:

Ta có: $x(t) = x_1(t) + j.x_2(t)$

Từ hình vẽ ta thấy: hình (a) cho $x_1(-t) = x_1(t)$

(b) cho $x_2(-t) = -x_2(t)$

=> $x(-t) = x_1(-t) + j.x_2(-t) = x_1(t) - j.x_2(t) = x^*(t)$

KL: Vậy tín hiệu $x(t)$ là tín hiệu đối xứng liên hợp phức

b. Tín hiệu tuần hoàn/không tuần hoàn:

$*$ $x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn khi tồn tại $T \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x(t) = x(t + T)$

$*$ $x[n]$ là tín hiệu tuần hoàn khi tồn tại $N \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x[n] = x[n + N]$

Bài 1:

$x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn khi tồn tại T thỏa mãn $x(t) = x(t + T)$

Xét $x(t) = x(t + T)$ => $T = 0{,}2k$ $\quad (k \in \mathbb{N}^*)$

⇨ Chu kì cơ sở ứng với $k = 1,\ T = 0{,}2\ s$
⇨ Tần số cơ sở $f = \frac{1}{T} = 5\ Hz$

KL:

Bài 2:

Từ đồ thị ta thấy $a[n] = a[n + 8k]$

⇨ Tín hiệu (a) là tín hiệu tuần hoàn với $N = 8$

Tần số cơ sở $f = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ (rad)

Bài 3:

a. $x(t) = \cos^2 2\pi t = \frac{1+\cos 4\pi t}{2}$
⇨ Tuần hoàn với $w = 4\pi \Leftrightarrow f = \frac{w}{2\pi} = 2\ Hz$

b. $x(t) = sin^3\, 2t = \frac{\sin 2t - \sin 6}{4}$
⇨ $w_1 = 2, w_2 = 6$

$\Longrightarrow w = 2\ \Longrightarrow f = \frac{1}{\pi}$

c. $x(t) = e^{-2t}\cos 2\pi t$

$\cos 2\pi t$ tuần hoàn nhưng e^{-2t} không tuần hoàn nên $x(t)$ không tuần hoàn

d. $x[n] = (-1)^n$

$n\ lẻ\ thì\ x[n] = -1$

$n\ chẵn\ thì\ x[n] = 1$

⇨ $x[n]\ tuần\ hoàn\ N = 1$

e. $x[n] = (-1)^{n^2}$

$n\ lẻ\ thì\ x[n] = -1$

$n\ chẵn\ thì\ x[n] = 1$

⇨ $x[n]\ tuần\ hoàn\ N = 1$

f. $x[n] = \cos 2n$

$N = \dfrac{2\pi}{w} = \pi \notin \mathbb{N}$

⇨ Không tuần hoàn

g. $x[n] = \cos 2\pi n$

Tuần hoàn với $N = \frac{2\pi}{w} = 1$

c. Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất

Bài 1:

(a) Tín hiệu tuần hoàn nên là tín hiệu công suất. $T = 0{,}2\ s, f = 5\ Hz$

(b) Tín hiệu không tuần hoàn nên là tín hiệu năng lượng

Bài 2:

Xét $x(t)$ với $0 \le t \le 0{,}2$

⇨ Phương trình đường thẳng $x(t) = \begin{cases} 20t - 1\ với\ 0 \le t \le 0{,}1 \\ -20t + 3\ với\ 0{,}1 \le t \le 0{,}2 \end{cases}$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{0{,}2}\left(\int_0^{0{,}1} (20t-1)^2\,dt + \int_{0{,}1}^{0{,}2} (-20t+3)^2\,dt\right) = \frac{1}{3}$$

Bài 3:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x^2[n]) = \sum_{n=-1}^{n=1} 1^2 = 3$$

Bài 4:

Tín hiệu **năng lượng**	Tín hiệu **công suất**	Tín hiệu Zero
$0 < E < \infty$ $P = 0\ hoặc\ \infty$	$E = 0\ hoặc\ \infty$ $0 < P < \infty$	$E = 0\ hoặc\ \infty$ $P = 0\ hoặc\ \infty$

(a) Tín hiệu năng lượng: $E = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2\,dt = \frac{2}{3}$

(b) Tín hiệu năng lượng: $E = \sum_0^4 n^2 + \sum_5^{10} (10-n)^2 = 85$

(c) Tín hiệu công suất: $P = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (5\cos \pi t + \sin 5\pi t)^2 dt = 13$

(d) Tín hiệu năng lượng: $E = \int_{-1}^{1} 25cos^2(\pi t)dt = 25$

(e) Tín hiệu năng lượng: $E = \int_{-0,5}^{0,5} 25cos^2(\pi t)dt = 12,5$

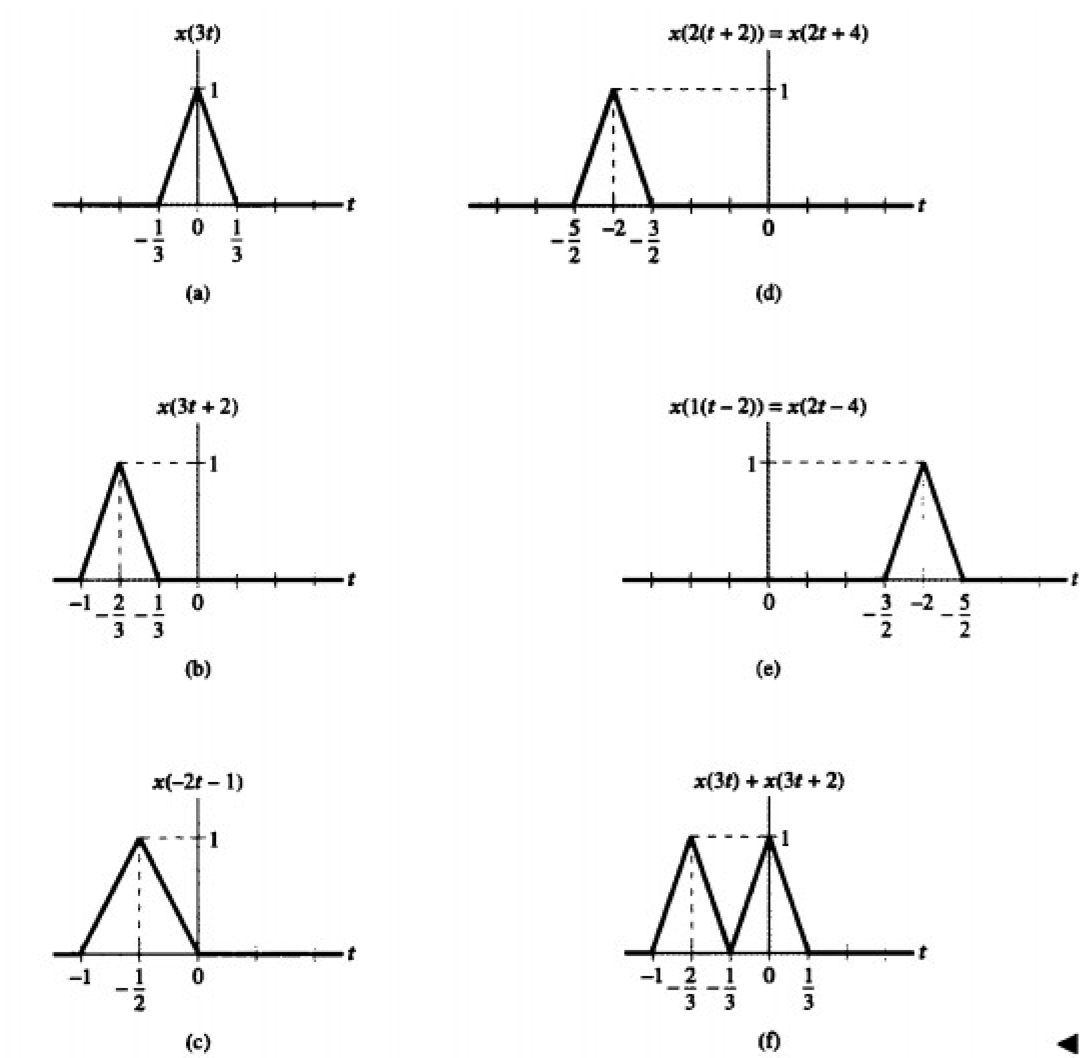
(f) Tín hiệu Zero: $E = \sum_{n=-4}^{4} Sin^2(\pi n) = 0,\ P = 0$

(g) Tín hiệu năng lượng: $E = \sum_{n=-4}^{4} Cos^2(\pi n) = 9$

(h) Tín hiệu công suất: $E = \sum_{n=0}^{\infty} Cos^2(\pi n) = \infty,\ P = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{2-1} Cos^2(\pi n) = 1$

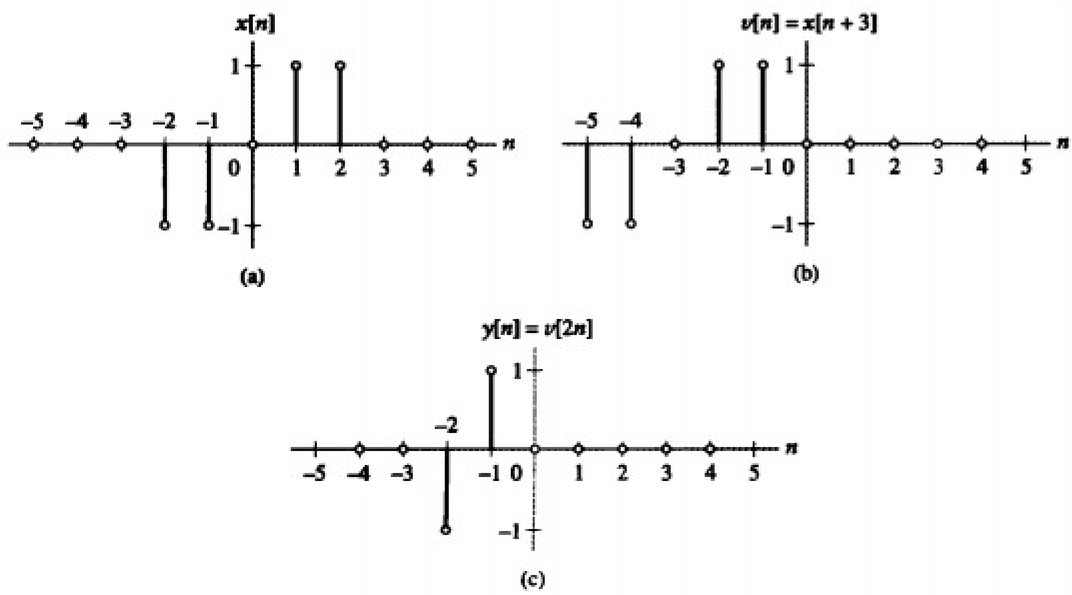
II. Các phép toán trên tín hiệu

Bài 1:



Bài 2:

Answer: $y[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$



III. Các tín hiệu cơ sở

a. Tín hiệu dạng sin

Bài 1:

a. $x[n] = 5sin(2n)$

Xét: $5sin(2n) = 5sin(2(n + N))$

⇨ $N = k\pi \notin \mathbb{N}$

⇨ Không tuần hoàn

b. $x[n] = 5cos(0{,}2\pi n)$

Xét: $5cos(0{,}2\pi n) = 5cos(0{,}2\pi(n + N))$

⇨ $N = 10k$

⇨ Tín hiệu tuần hoàn với chu kì cơ sở $N_0 = 10$

c. $x[n] = 5cos(6\pi n)$

Xét: $5cos(6\pi n) = 5cos(6\pi(n + N))$

⇨ $N = \frac{k}{3}$

⇨ Tín hiệu tuần hoàn với chu kì cơ sở $N_0 = 1$ khi $k = 3$

d. $x[n] = 5sin(\frac{6\pi n}{35})$

Xét: $5sin\left(\frac{6\pi n}{35}\right) = 5sin(\frac{6\pi(n+N)}{35})$

⇨ $N = \frac{35k}{3}$

⇨ Tín hiệu tuần hoàn với chu kì cơ sở $N_0 = 1$ khi $k = 3$

Bài 2: Áp dụng công thức: $\Omega = \frac{2\pi}{N}$

a. $\Omega = \frac{\pi}{4}$
b. $\Omega = \frac{\pi}{16}$
c. $\Omega = \frac{\pi}{32}$
d. $\Omega = \frac{\pi}{64}$

b. Tín hiệu hình sin suy giảm theo hàm mũ

Bài 1:

a. $x(t) = Ae^{\alpha_1 t + j\omega t}$

$$= Ae^{\alpha_1 t}.e^{j\omega t}$$

$$= Ae^{\alpha_1 t}.(Cos\ \omega t + j.Sin\ \omega t)$$

⇨ $\begin{cases} Re\big(x(t)\big) = Ae^{\alpha_1 t}.Cos\ \omega t \\ Im\big(x(t)\big) = Ae^{\alpha_1 t}.Sin\ \omega t \end{cases}$

b. $x(t) = Ae^{j\omega_1 t + j\omega t}$

$$= Ae^{j\omega_1 t}.e^{j\omega t}$$

$$= A.(Cos\ \omega_1 t + j.Sin\ \omega_1 t).(Cos\ \omega t + j.Sin\ \omega t)$$

$$= A.Cos(\omega_1 t + \omega_1 t) + jASin(\omega_1 t + \omega t)$$

⇨ $\begin{cases} Re\big(x(t)\big) = A.Cos(\omega_1 t + \omega_1 t) \\ Im\big(x(t)\big) = ASin(\omega_1 t + \omega t) \end{cases}$

c. $x(t) = Ae^{\alpha_1 t + j(\omega_1 + \omega)t}$

$$= Ae^{\alpha_1 t}.e^{j(\omega_1 + \omega)t}$$

$$= Ae^{\alpha_1 t}.(Cos\ ((\omega_1 + \omega)t) + j.Sin\ ((\omega_1 + \omega)t))$$

⇨ $\begin{cases} Re\big(x(t)\big) = Ae^{\alpha_1 t}.Cos\ ((\omega_1 + \omega)t) \\ Im\big(x(t)\big) = Ae^{\alpha_1 t}.Sin\ ((\omega_1 + \omega)t) \end{cases}$

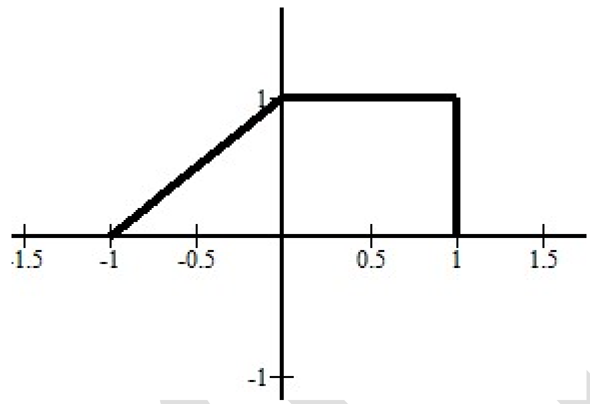
Bài 2:

a. $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = Ae^{\alpha t}.(Cos\ \omega t + j.Sin\ \omega t) = Ae^{\alpha t + j\omega t}$
b. $a(t) = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} = \sqrt{A^2.e^{2\alpha t}} = |A|e^{\alpha t},\ \ t \geq 0$
c. $a(t) = |A|e^{\alpha t},\ \ t \geq 0$
   - $t = 0\ \rightarrow a(0) = |A|$
   - $0 < t < \infty\ \rightarrow a(t)\ giảm\ theo\ hàm\ mũ$
   - $t = \infty \rightarrow\ \lim_{t\to\infty} a(t) = 0$

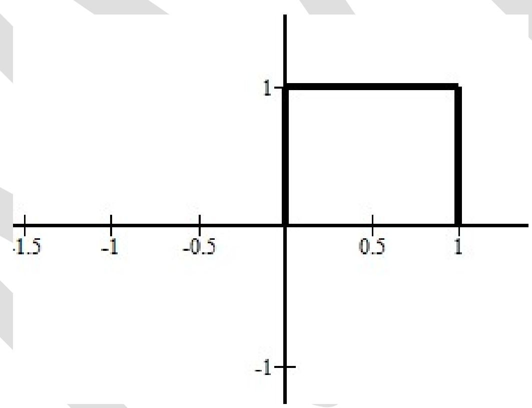
d. Biểu diễn tín hiệu

Bài 1:

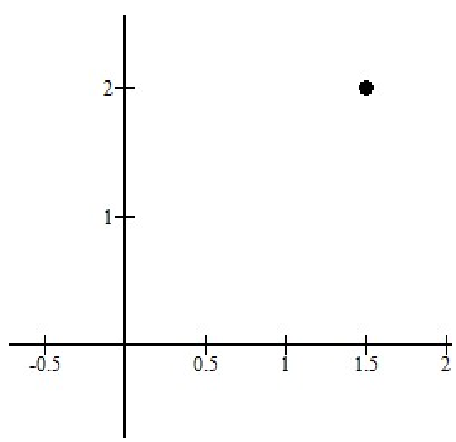
a. $x(t)u(1-t)$



b. $x(t)[u(t)-u(t-1)]$

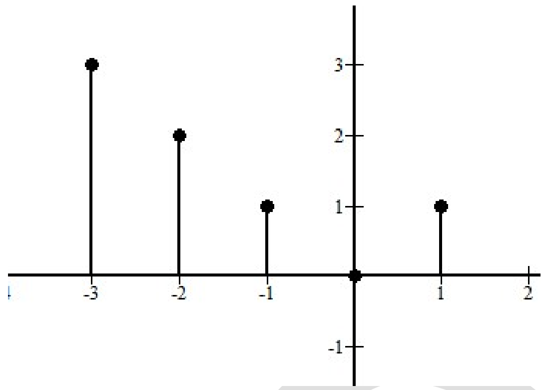


c. $x(t)\delta(t-\frac{3}{2})$

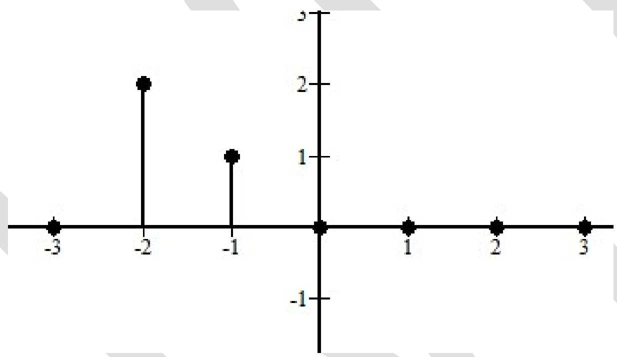


Bài 2:

a. $x[n]u[1-n]$



b. $x[n]\{u[n+2]-u[n]\}$



c. $x[n]\delta[n-1]$