

# Bai tap Fourier

NGUYEN Hong Thinh

FET-UET-VNU

Ngày 4 tháng 8 năm 2021

# Đề bài.

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

Cho tín hiệu đầu vào  $x(t)$  đi qua một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng tần số cho như bên dưới. Xác định tín hiệu đầu ra:

Vẽ phổ biên độ, phổ pha của tín hiệu vào, tín hiệu ra và hệ

$$x(t) = 1 + 2 \cos(\pi t) + 4 \cos(3\pi t).$$

$$\text{Biên độ } |H^f(\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq 2\pi \\ 0, & |\omega| > 2\pi \end{cases}$$

$$\text{Pha } \angle H^f(\omega) = -2\omega$$

**Bài 2.** Cho một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung  $h(n) = (1/2)^n u(n)$ .

Cho tín hiệu  $x(n) = \cos(\pi n/2) + \cos(\pi n/3 + \pi/4)$  đi qua hệ thống. Xác định tín hiệu ra.

**Bài 3**

Cho tín hiệu đầu vào  $x(t)$  đi qua một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng tần số cho như bên dưới. Xác định tín hiệu đầu ra:

Vẽ phổ biên độ, phổ pha của tín hiệu vào tín hiệu ra và hệ

$$x(t) = 2 + \cos(\pi t) + 0.5 \sin(2\pi t) + 3 \cos(6\pi t).$$

$$H^f(\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| \leq 4\pi \\ 0, & |\omega| > 4\pi \end{cases}$$

# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

Biểu diễn tần số của tín hiệu:

- Tín hiệu có tần số nào ?
- Độ lớn thành phần tần số đó bằng bao nhiêu ?
- VD Tín hiệu có tần số  $\omega_1$  với độ lớn  $a_1$  và  $\omega_2$ , độ lớn  $a_2$  thì

$$x(t) = a_1 e^{j\omega_1 t} + a_2 e^{j\omega_2 t}$$

- Nếu  $a_1, a_2$  là số phức: Tách riêng biên độ và pha
- $a_1 = |a_1| e^{j\phi_1}, a_2 = |a_2| e^{j\phi_2}$



# Biểu diễn tần số của tín hiệu:u

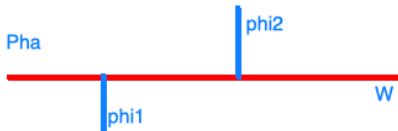
DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- VD Tín hiệu có tần số  $\omega_1$  với độ lớn  $a_1$  và  $\omega_2$ , độ lớn  $a_2$  thì

$$x(t) = a_1 e^{j\omega_1 t} + a_2 e^{j\omega_2 t}$$

- Nếu  $a_1, a_2$  là số phức: Tách riêng biên độ và pha  
 $|a_1| e^{j\phi_1} e^{j\omega_1 t} + |a_2| e^{j\phi_2} e^{j\omega_2 t}$
- $a_1 = |a_1| e^{j\phi_1}, a_2 = |a_2| e^{j\phi_2}$



# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Phổ của  $\cos(\omega_0 t)$   $\Rightarrow$  tần số  $\omega_0$

# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

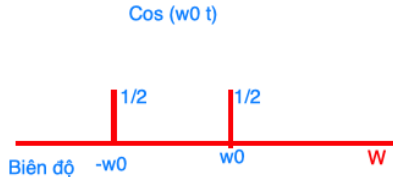
- Phổ của  $\cos(\omega_0 t)$
- $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$

# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Phổ của  $\cos(\omega_0 t)$
- $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$



Pha



# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Phổ của  $\cos(\omega_0 t + \textit{Phi})$



# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

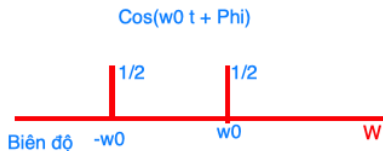
- Phổ của  $\cos(\omega_0 t + \Phi)$
- $\cos(\omega_0 t + \Phi) = \frac{1}{2}e^{j\Phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\Phi}e^{-j\omega_0 t}$

# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

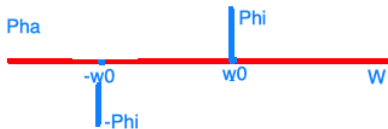
DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Phổ của  $\cos(\omega_0 t + \Phi)$
- $\cos(\omega_0 t + \Phi) = \frac{1}{2}e^{j\Phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\Phi}e^{-j\omega_0 t}$



$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$



# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Phổ của  $\sin(\omega_0 t)$

# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Phổ của  $\sin(\omega_0 t)$
- $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{-j\omega_0 t}$

# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Phổ của  $\sin(\omega_0 t)$
- $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{-j\omega_0 t}$
- hoặc viết  $\sin(\omega_0 t) = \cos(\pi/2 - \omega_0 t) = \cos(\omega_0 t - \pi/2)$

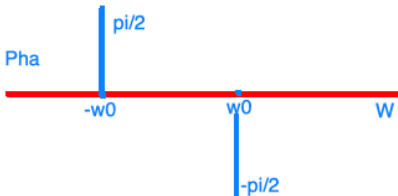
# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Phổ của  $\sin(\omega_0 t)$
- $\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t} = \frac{1}{2}e^{-j\pi/2}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{-j\omega_0 t}$
- hoặc viết  $\sin(\omega_0 t) = \cos(\pi/2 - \omega_0 t) = \cos(\omega_0 t - \pi/2)$

Sin( $\omega_0 t$ )



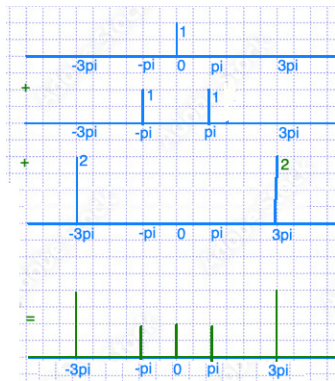
# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

$$\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$$

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Tính chất tuyến tính của biểu diễn Fourier hoặc chuỗi Fourier :
- $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xrightarrow{\text{FT/FS}} a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
- $\Rightarrow$  Có thể cộng đồ thị các phổ biên độ và pha
- VD Phổ của tín hiệu  $x(t) = 1 + 2\cos(\pi t) + 4\cos(3\pi t)$



# Biểu diễn tần số của tín hiệu:

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Đi qua hệ thống TTBB có đáp ứng tần số  $H(\omega)$  :
- $e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{H(\omega)} e^{j\omega_0 t} H(\omega_0) = e^{j\omega_0 t} |H(\omega_0)| e^{j\Phi_H(\omega_0)}$
- Tại tần số  $\omega_0$ , Biên độ bị nhân thêm  $|H(\omega_0)|$  và pha bị cộng thêm  $\Phi_H(\omega_0)$
- $x(t) = \cos(\omega_0 t + \Phi)$  đi qua hệ thống?
- $x(t) = \frac{1}{2} e^{j\Phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\Phi} e^{-j\omega_0 t} \xrightarrow{H(\omega)} \frac{1}{2} e^{j\Phi} e^{j\omega_0 t} H(\omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\Phi} e^{-j\omega_0 t} H(-\omega_0)$
- hay  $y(t) = \frac{1}{2} e^{j\Phi} e^{j\omega_0 t} |H(\omega_0)| e^{j\Phi_H(\omega_0)} + \frac{1}{2} e^{-j\Phi} e^{-j\omega_0 t} |H(-\omega_0)| e^{j\Phi_H(-\omega_0)}$
- $y(t) = \frac{1}{2} e^{j\Phi + j\Phi_H(\omega_0)} |H(\omega_0)| e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\Phi + j\Phi_H(-\omega_0)} |H(-\omega_0)| e^{-j\omega_0 t}$
- Phổ biên độ là hàm chẵn, phổ pha là hàm lẻ:  $|H(\omega_0)| = |H(-\omega_0)|$  và  $\Phi_H(-\omega_0) = -\Phi_H(\omega_0)$  nên rút gọn ta có :
- $y(t) = |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \Phi + \Phi_H(\omega_0))$



## Câu 1

$$x(t) = 1 + 2 \cos(\pi t) + 4 \cos(3\pi t)$$

$$y(t) = e^{j0t} |H(0)| e^{j\text{pha}H(0)} + 2 |H(\pi)| \cos(\pi t + \text{pha}H(\pi)) + 4 |H(3\pi)| \cos(3\pi t + \text{pha}H(3\pi))$$

### Câu 3

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

$$y(t) = 2 H(0) + |H(\pi)| \cos(\pi t + \text{Pha}H(\pi)) + \\ 0.5 |H(2\pi)| \cos(2\pi t - \pi/2 + \text{Pha}H(2\pi)) + \\ 3 |H(6\pi)| \cos(6\pi t + \text{Pha}H(6\pi))$$

## Câu 2

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- $h(n) = (1/2)^n u(n)$
- Xem ví dụ 4, slide FT (p2):
- $H(\omega) = \frac{1}{1 - 1/2 e^{-j\omega}}$
- $|H(\omega)| = \sqrt{\frac{1}{(1 - \frac{1}{2} \cos(\omega))^2 + \sin^2(\omega)}}$
- $\phi(H(\omega)) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2} \sin(\omega)}{1 - \frac{1}{2} \cos(\omega)}\right)$

$$y(n) = |H(\pi/2)| \cos(\pi n/2 + \phi H(\pi/2)) + |H(\pi/3)| \cos(\pi n/3 + \pi/4 + \phi H(\pi/3))$$

# Đề bài.

DSP

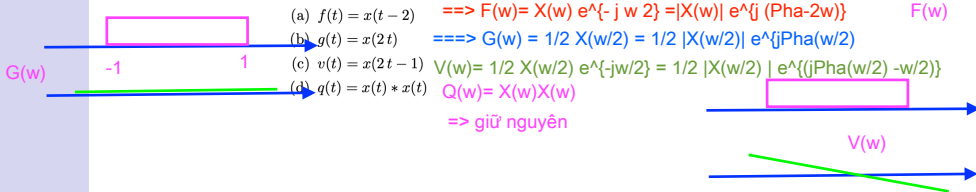
NGUYEN  
Hong Thinh

3.1.4 The Fourier transform of  $x(t)$  is  $X^f(\omega) = \text{rect}(\omega)$ .

$$\text{rect}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 0.5 \\ 0 & |\omega| > 0.5 \end{cases}$$



Use the Fourier transform properties to sketch the magnitude and phase of the Fourier transform of each of the following signals.



3.1.5 Find and sketch the Fourier transform of each of the following signals.

(a)  $x(t) = \cos(6\pi t)$

(b)  $x(t) = \text{sinc}(3t)$

(c)  $x(t) = \cos(6\pi t) \text{sinc}(3t)$

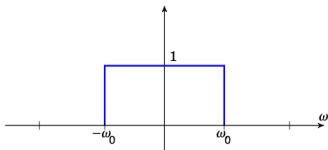
(d)  $x(t) = \cos(3\pi t) \cos(2\pi t)$

# Tín hiệu có phổ dạng xung chữ nhật?

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

- Xét phổ dạng xung chữ nhật  $\text{rect}(\omega_0)$



$$= \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \omega_0 < |\omega| \end{cases} \quad \text{X} \pi.$$

- Tín hiệu trong miền thời gian tương ứng:

$$\blacksquare x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega$$

$$\blacksquare \text{ Hay } x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2\pi jt} = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\pi t} = \frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t)$$

- Phổ của xung chữ nhật có dạng sinc và phổ của tín hiệu sinc có dạng xung chữ nhật

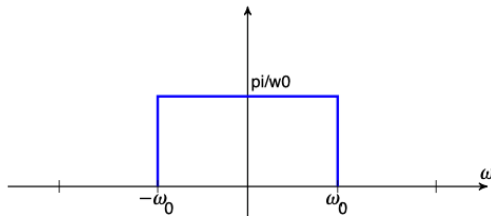
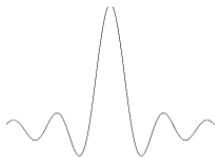
# Phương pháp cửa sổ

DSP

NGUYEN  
Hong Thinh

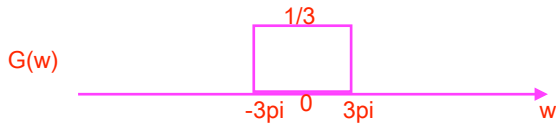
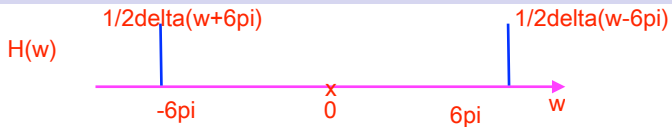
- $\frac{\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t) \xrightarrow{\text{FT}} \text{rect}(\omega_0)$
- Nên  $\text{sinc}(\omega_0 t) \xrightarrow{\text{FT}} \text{rect}(\omega_0) \cdot \frac{\pi}{\omega_0}$

$$\text{sinc}(\omega_0 t) = \sin(\omega_0 t) / (\omega_0 t)$$



$$\text{sinc } 3t = \sin 3\pi t / (3\pi t)$$



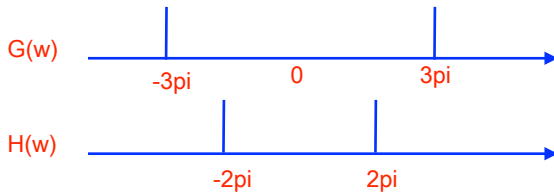


$$G(w) * \delta(w) = G(w)$$

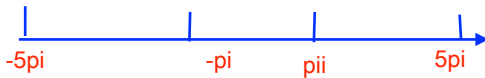
$$G(w) * \delta(w-6\pi) = G(w-6\pi)$$

$$G(w) * H(w) \implies 1/2 G(w+6\pi) + 1/2 G(w-6\pi)$$





$$G(w)*H(w) = G(w+2\pi) + G(w-2\pi) = H(w+3\pi) + H(w-3\pi)$$



$$\cos(a) \cdot \cos(b) = 1/2 [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$