

Bài 3: Phân tích và biểu diễn hệ thống TTBB rời rạc trong miền thời gian.

Nguyễn Hồng Thịnh
Lâm Sinh Công

Bài 3: Phân tích và biểu diễn hệ thống TTBB rời rạc trong miền thời gian.

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

Nội dung:

- Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung.
- Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân hệ số hằng.
- Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối.

Mục tiêu

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

- Xác định được đáp ứng xung của hệ thống.
- Áp dụng đáp ứng xung để phân tích các tính chất của hệ thống.
- Biết cách tính tích chập
- Biết cách giải phương trình sai phân.
- Chuyển đổi qua lại giữa biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối và phương trình sai phân.

Biểu diễn hệ thống TTBB rời rạc trong miền thời gian.

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

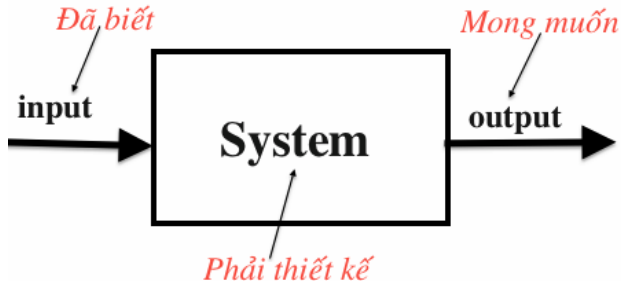
Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng đồ khối

Mục đích của phép biểu diễn?

- Mô tả mối quan hệ giữa tín hiệu vào $x(n)$ và ra $y(n)$.
- Xác định được đầu ra tương ứng khi biết tín hiệu đầu vào.
- Phân tích các tính chất của hệ thống
- Thiết kế được cấu trúc của hệ thống.



Biểu diễn hệ thống TTBB rời rạc trong miền thời gian.

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

Phân loại

Có 3 cách thông dụng để biểu diễn một hệ thống TTBB rời rạc:

- Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung.
- Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân hệ số hằng.
- Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối.

1. Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Khái niệm

Đáp ứng xung, $h(n)$, là đầu ra của hệ thống **TTBB** khi tín hiệu đầu vào là $\delta(n)$.

Cho hệ thống T , $y(n) = T(x(n))$.

Đáp ứng xung của hệ thống: $h(n) = T(\delta(n))$

Ví dụ:

Xác định đáp ứng xung của hệ thống:

$$y(n] = x(n) + 2x(n - 1) + x(n - 2).$$

Khi $x(n) = \delta(n)$:

$$h(n) = \delta(n) + 2\delta(n - 1) + \delta(n - 2)$$

Biểu diễn hệ thống TTBB rời rạc trong miền thời gian.

Signal and Systems

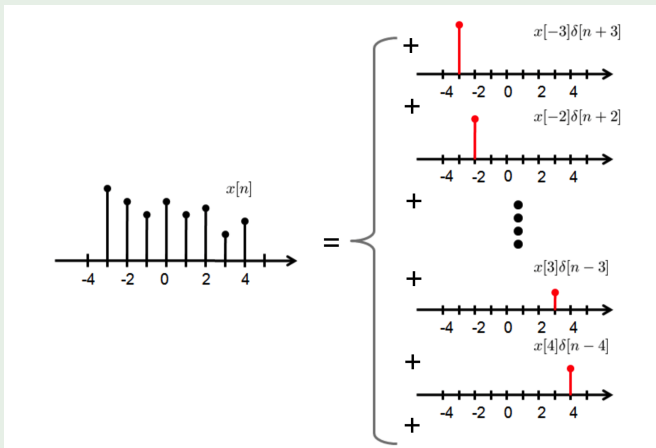
Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng đồ khối

Bổ túc toán: Biểu diễn tín hiệu qua hàm $\delta(n)$



Biểu diễn hệ thống TTBB rời rạc trong miền thời gian.

Signal and Systems

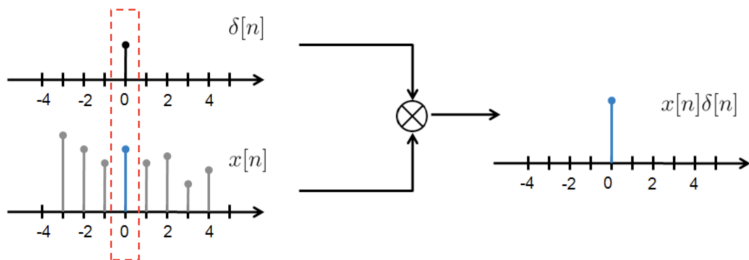
Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng đồ khối

Bổ túc toán: Biểu diễn tín hiệu qua hàm $\delta(n)$



$$\Rightarrow x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

1. Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Signal and
Systems

Biểu diễn hệ
thống bằng
đáp ứng xung

Sử dụng đáp
ứng xung để
phân tích hệ
thống

Biểu diễn hệ
thống bằng
phương trình
sai phân

Biểu diễn hệ
thống bằng sơ
đồ khối

Mối quan hệ đầu vào, đầu ra và đáp ứng xung

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Vì hệ thống là tuyến tính nên:

$$\begin{aligned}y(n) &= T(x(n)) \\&= T\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)\right) \\&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)T(\delta(n-k))\end{aligned}$$

Vì hệ thống là bất biến nên:

$$T(\delta(n)) = h(n) \text{ thì } T(\delta(n-k)) = h(n-k)$$

$$\text{Do đó: } y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(n-k) = x(n) * h(n)$$

1. Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Định nghĩa tích chập

Tích chập của 2 tín hiệu $a(n)$ và $b(n)$ là một tín hiệu, ký hiệu $a(n) * b(n)$, được xác định như sau:

$$\begin{aligned} a(n) * b(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(k)b(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b(k)a(n-k) \end{aligned}$$

1. Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Các tính chất của tích chập

- Nhân chập với xung đơn vị: $a(n) * \delta(n) = a(n)$
- Giao hoán:
$$a(n) * b(n) = b(n) * a(n)$$
- Kết hợp:
$$(a(n) * b_1(n)) * b_2(n) = a(n) * (b_1(n) * b_2(n))$$
- Phân phối:
$$a(n) * (b_1(n) + b_2(n)) = a(n) * b_1(n) + a(n) * b_2(n)$$
- Dịch thời gian:
$$c(n - n_0) = a(n - n_0) * b(n) = a(n) * b(n - n_0)$$

1. Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Cách tính tích chập

Giả sử, cần tính tích chập của 2 tín hiệu $a(n)$ và $b(n)$.

Ký hiệu $c(n) = a(n) * b(n)$.

Sử dụng định nghĩa, tính lần lượt các giá trị đầu ra:

$$\blacksquare c(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} a(k)b(-k)$$

$$\blacksquare c(1) = \sum_{-\infty}^{\infty} a(k)b(1-k)$$

$$\blacksquare c(-1) = \sum_{-\infty}^{\infty} a(k)b(-1-k)$$

$$\blacksquare c(-2) = \sum_{-\infty}^{\infty} a(k)b(-2-k)$$

■ ...

■ Tính lần lượt đến hết ta xác định được $c(n)$

1. Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

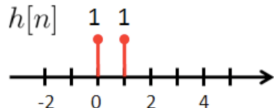
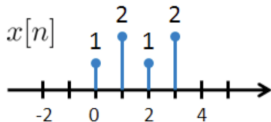
Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng đồ khối

Cách tính tích chập

Sử dụng đồ thị:

- Đổi biến $n \rightarrow k$, vẽ $a(k)$, $b(k)$.

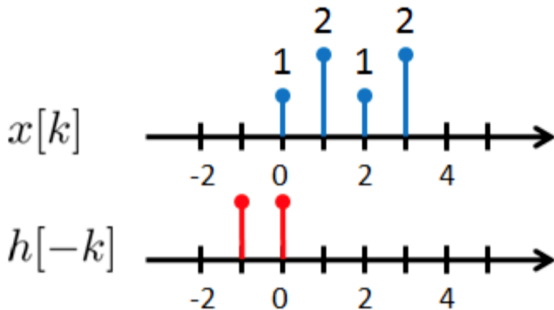


1. Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Cách tính tích chập

Sử dụng đồ thị:

- Lật tín hiệu $b(-k)$: $b(k) \rightarrow b(-k)$: lấy đối xứng (k) qua trục tung.

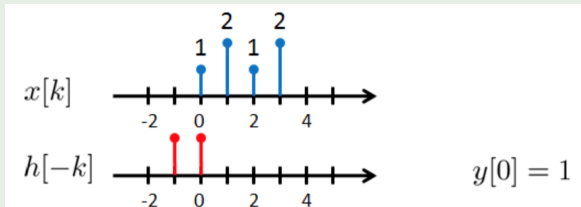


1. Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Cách tính tích chập

Sử dụng đồ thị:

- Dịch chuyển $b(-k)$ theo từng giá trị n ta thu được $b(n - k)$
 - nếu $n > 0$ dịch chuyển về phía bên phải
 - nếu $n < 0$ dịch chuyển về phía bên trái
- Thực hiện phép nhân $a(k).b(n - k)$ (nhân 2 vector)
- Cộng dồn các giá trị $x(k).h(n - k)$ thu được 1 giá trị $c(n)$



Biểu diễn hệ thống TTBB rời rạc trong miền thời gian.

Signal and
Systems

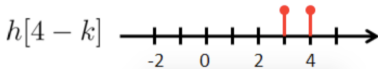
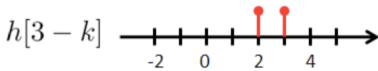
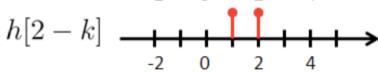
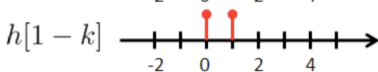
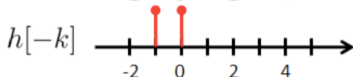
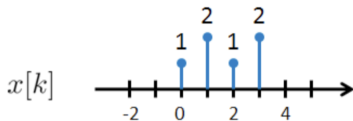
Ví dụ

Biểu diễn hệ
thống bằng
đáp ứng xung

Sử dụng đáp
ứng xung để
phân tích hệ
thống

Biểu diễn hệ
thống bằng
phương trình
sai phân

Biểu diễn hệ
thống bằng sơ
đồ khối



$$y[0] = 1$$

$$y[1] = 1 + 2 = 3$$

$$y[2] = 2 + 1 = 3$$

$$y[3] = 1 + 2 = 3$$

$$y[4] = 2$$

1. Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Signal and
Systems

Biểu diễn hệ
thống bằng
đáp ứng xung

Sử dụng đáp
ứng xung để
phân tích hệ
thống

Biểu diễn hệ
thống bằng
phương trình
sai phân

Biểu diễn hệ
thống bằng sơ
đồ khối

Ví dụ: Cách tính tích chập

Tính tích chập của 2 chuỗi sau đây: $a(n) = \{1, 3, 2\}$
 $b(n) = \{1, 2\}$

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống I

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

Tính nhân quả

Một hệ TTBB là nhân quả nếu và chỉ nếu các đáp ứng xung của nó bằng 0 đối với các giá trị âm của n : $h(n) = 0 \forall n < 0$.

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống II

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng đồ khối

Chứng minh:

- Đầu ra của hệ thống:

$$\begin{aligned}y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\&= \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)\end{aligned}$$

- Hệ thống là nhân quả nếu đầu ra $y(n)$ không phụ thuộc vào vào các giá trị tương lai của tín hiệu đầu vào $x(n)$.

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n-k) = 0 \forall n \quad (1)$$

Hay $h(k) = 0 \forall k < 0$

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống III

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

Hệ thống nhân quả

Hệ thống nào sau đây là hệ thống nhân quả

a) $h(n) = \sin(\pi n/2)$

b) $h(n) = (-1)^n u(-n)$

c) $h(n) = u(n) - 2u(n-5)$

d) $h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-2k)$

e) $h(n) = (1/2)^{|n|}$

f) $h(n) = 2^n [u(n) - u(n-2)]$

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống IV

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

Tính ổn định

Một hệ TTBB là ổn định nếu và chỉ nếu đáp ứng xung của nó thoả mãn:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống V

Signal and
Systems

Biểu diễn hệ
thống bằng
đáp ứng xung

Sử dụng đáp
ứng xung để
phân tích hệ
thống

Biểu diễn hệ
thống bằng
phương trình
sai phân

Biểu diễn hệ
thống bằng sơ
đồ khối

Chứng minh:

Hệ thống là ổn định nên

$$\exists M_x, M_y : |x[n]| < M_x < \infty, |y[n]| < M_y < \infty \forall n$$

Ta có:

$$\begin{aligned} |y(n)| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \right| < \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \\ &= M_x \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \end{aligned} \quad (2)$$

Do vậy, để $|y(n)| < M_y < \infty \forall n$ thì $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống VI

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

Hệ thống ổn định

Xác định a, b để hệ thống sau đây là ổn định:

$$h(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 1 & n = -1 \\ b^n & n < -1 \end{cases}$$

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống VII

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

Hệ thống ổn định

Hệ thống nào sau đây là hệ thống ổn định:

a) $h(n) = \sin(\pi n/2)$

b) $h(n) = (-1)^n u(-n)$

c) $h(n) = u(n) - 2u(n-5)$

d) $h(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-2k)$

e) $h(n) = (1/2)^{|n|}$

f) $h(n) = 2^n [u(n) - u(n-2)]$

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống VIII

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

Hệ thống có nhớ/không nhớ

Một hệ TTBB là không nhớ (hệ thống tĩnh) nếu và chỉ nếu đáp ứng xung của nó thoả mãn:

$$h(k) = 0 \forall k \neq 0$$

.

Nếu $\exists h(k) \neq 0, k \neq 0$ hệ thống là có nhớ (hệ thống động).

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống IX

Chứng minh:

- Hệ thống là không nhớ nên tín hiệu ra $y(n)$ chỉ phụ thuộc vào thời điểm hiện tại của tín hiệu
- Ta có tín hiệu ra ở thời điểm n :

$$\begin{aligned}y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\&= \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n-k) + h(0).x(n) + \sum_{k=1}^{\infty} h(k)x(n-k)\end{aligned}$$

- Do đó để hệ thống là không nhớ thì

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n-k) + \sum_{k=1}^{\infty} h(k)x(n-k) &= 0 \forall n \\ \rightarrow h(k) &= 0 \forall k = (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \text{ hay } h(k) = 0 \forall k \neq 0\end{aligned}$$

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống X

Signal and Systems

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

Hệ thống có nhớ/không nhớ

Hệ thống nào sau đây là hệ thống không nhớ?

a) $h(n) = (-1)^n u(-n)$

b) $h(n) = (1/2)^{|n|}$

c) $h(n) = 2^n [u(n) - u(n-2)]$

d) $h(n) = \cos(\pi n/8) [u(n) - u(n-10)]$

2. Biểu diễn HT bằng ptrình sai phân hệ số hằng I

Phương trình sai phân

Dạng tổng quát:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$$

- 1 Nếu $a_k = 0, k \in (1, N)$, $y(n)$ chỉ phụ thuộc vào $x(n)$: hệ thống là **không đệ quy**.
- 2 Nếu $\exists a_k \neq 0, k \in (1, N)$: $y(n)$ phụ thuộc vào cả tín hiệu ra tại các thời điểm quá khứ, hệ thống là **đệ quy**.
- 3 Bằng cách giải phương trình sai phân nói trên tín hiệu ra $y(n)$ hoàn toàn xác định khi biết tín hiệu vào $x(n)$

2. Biểu diễn HT bằng ptring sai phân hệ số hằng II

Cách giải phương trình sai phân

- Mọi PT sai phân có nghiệm dạng tổng quát là:
 $y(n) = y_0(n) + y_s(n)$
- $y_0(n)$: đáp ứng thuần nhất, không phụ thuộc tín hiệu vào $x(n)$
 $y_0(n)$ là nghiệm của phương trình: $\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$
- $y_s(n)$: đáp ứng riêng, là đáp ứng của hệ thống khi **điều kiện đầu** bằng 0.
Dạng của $y_s(n)$ được xác định căn cứ bởi dạng của tín hiệu vào $x(n)$.

Nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân

- PT thuần nhất $\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$ có nghiệm dạng λ^n .
Phương trình đặc trưng

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^{N-k} = 0$$

- Nếu PT đặc trưng có N: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \Rightarrow$ Nghiệm của PT thuần nhất có dạng:

$$y_0(n) = \sum_{i=1}^N c_i \lambda_i^n$$

c_i xác định bằng các điều kiện ban đầu của bài toán.

Nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân

- PT thuần nhất $\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = 0$ có nghiệm dạng λ^n .
Phương trình đặc trưng

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^{N-k} = 0$$

- Nếu PT đặc trưng có nghiệm λ_1 lặp M lần \Rightarrow Nghiệm của PT thuần nhất có dạng:

$$y_0(n) = \sum_{i=1}^M c_i n^i \lambda_i^n + \sum_{i=1}^{N-M} c_i \lambda_i^n$$

Xác định nghiệm thuần nhất của pt sai phân sau đây:

- $y(n) + 2y(n-1) = x(n)$

- $y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = 3x(n)$

$$y(n) + 2y(n-1) = x(n)$$

- $N = 1; a_0 = 1$ và $a_1 = 2$

- Phương trình thuần nhất

$$a_0\lambda^{N-0} + a_1\lambda^{N-1} = 0 \rightarrow \lambda = -2 \quad (3)$$

- Nghiệm thuần nhất

$$y_0(n) = c_1(-2)^n$$

3. Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối.

Signal and
Systems

Biểu diễn hệ
thống bằng
đáp ứng xung

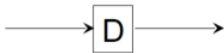
Sử dụng đáp
ứng xung để
phân tích hệ
thống

Biểu diễn hệ
thống bằng
phương trình
sai phân

Biểu diễn hệ
thống bằng sơ
đồ khối

Các phần tử cơ bản:

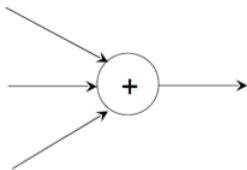
■ Bộ trễ



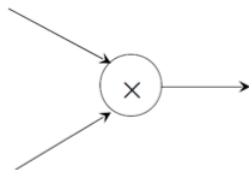
■ Bộ nhân hằng số



■ Bộ cộng tín hiệu



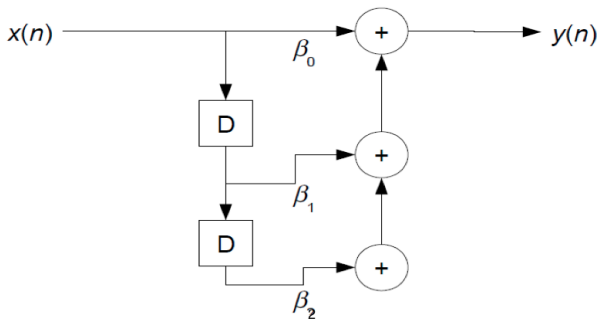
■ Bộ nhân tín hiệu



3. Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối. I

Ví dụ:

$$\text{Phương trình: } y(n] = \beta_0 x[n] + \beta_1 x[n - 1] + \beta_2 x[n - 2]$$



Biểu diễn hệ
thống bằng
đáp ứng xung

Sử dụng đáp
ứng xung để
phân tích hệ
thống

Biểu diễn hệ
thống bằng
phương trình
sai phân

Biểu diễn hệ
thống bằng sơ
đồ khối

3. Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối. II

Signal and Systems

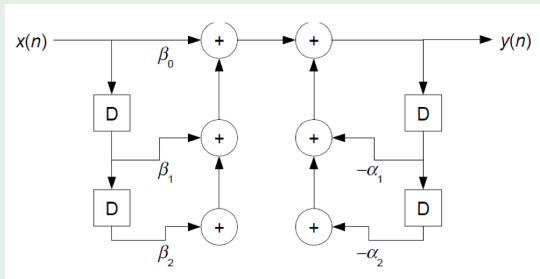
Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Sử dụng đáp ứng xung để phân tích hệ thống

Biểu diễn hệ thống bằng phương trình sai phân

Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối

Ví dụ:

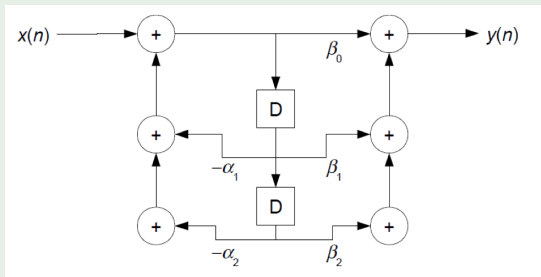


Xác định phương trình sai phân tương ứng?

3. Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối. III

Signal and
Systems

Ví dụ:



Xác định phương trình sai phân tương ứng?

3. Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối.

Ví dụ:

3. Biểu diễn hệ thống bằng sơ đồ khối phương trình sai phân sau:

a) $y(n] = y(n - 1) + 2x(n)$

b) $y(n] = y(n - 1) + x(n) + x(n - 1)$

c) $y(n] + y(n - 1) - y(n - 3) = x(n) + 2x(n - 2)$