Ngày: 19/10/2021

LUYỆN TẬP MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ FS và FT

Bài 1:

a) Cho hệ thống LTI có đáp ứng tần số H(w), xác định tín hiệu lối ra của hệ thống khi tín hiệu lối vào $x(t)=e^{jwt}$.

b) Dựa trên kết quả câu (a) xác định H(w) của hệ thống LTI có phương trình vi phân:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t).$$

Đáp án: 0,5 điểm/ý x 2 ý = 1 điểm

a)

For $x(t) = e^{j\omega t}$,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,d\tau \\ &= e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau \\ &= e^{+j\omega t}H(\omega) \end{aligned}$$

b)

when $x(t) = e^{j\omega t}$, then $y(t) = e^{j\omega t}H(\omega)$

$$\frac{dy(t)}{dt} = j\omega e^{j\omega t}H(\omega)$$

Substituting, we get

$$j\omega e^{j\omega t}H(\omega) + ae^{j\omega t}H(\omega) = e^{j\omega t}$$

Hence,

$$j\omega H(\omega) + aH(\omega) = 1, \qquad \text{or}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Bài 2: Tìm hệ số FS của các tín hiệu sau:

(a) $x(t) = \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

(b) $x(t) = 1 + \cos(2\pi t)$

(c) $x(t) = [1 + \cos(2\pi t)]\left[\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

Đáp án: 0,5 điểm/ý x 3 ý = 1,5 điểm

(a) $x(t) = \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \frac{e^{j\pi/6}}{2j} e^{j2\pi t5} - \frac{e^{-j\pi/6}}{2j} e^{-j2\pi t5}$$

We choose ω_0, the fundamental frequency, to be 2π.

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t},$$

where

$$a_5 = \frac{e^{j\pi/6}}{2j}, \qquad a_{-5} = \frac{-e^{-j\pi/6}}{2j}$$

Otherwise $a_k = 0$.

(b) $x(t) = 1 + \cos(2\pi t)$

$$= 1 + \frac{e^{j2\pi t}}{2} + \frac{e^{-j2\pi t}}{2}$$

For $\omega_0 = 2\pi$, $a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}$, and $a_0 = 1$. All other a_k's $= 0$.

(c) $x(t) = [1 + \cos(2\pi t)]\left[\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= \sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(2\pi t)\sin\left(10\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{j\pi/6}}{2j} e^{j2\pi t5} - \frac{e^{-j\pi/6}}{2j} e^{-j2\pi t5}\right) + \left(\tfrac{1}{2}e^{j2\pi t} + \tfrac{1}{2}e^{-j2\pi t}\right)\left(\frac{e^{j\pi/6}}{2j} e^{j2\pi t5} - \frac{e^{-j\pi/6}}{2j} e^{-j2\pi t5}\right)$$

$$= \frac{e^{j\pi/6}}{2j} e^{j2\pi t5} - \frac{e^{-j\pi/6}}{2j} e^{-j2\pi t5} + \frac{e^{j\pi/6}}{4j} e^{j2\pi t6} - \frac{e^{-j\pi/6}}{4j} e^{-j2\pi t4}$$
$$+ \frac{e^{j\pi/6}}{4j} e^{j2\pi t4} - \frac{e^{-j\pi/6}}{4j} e^{-j2\pi t6}$$

Therefore,

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t},$$

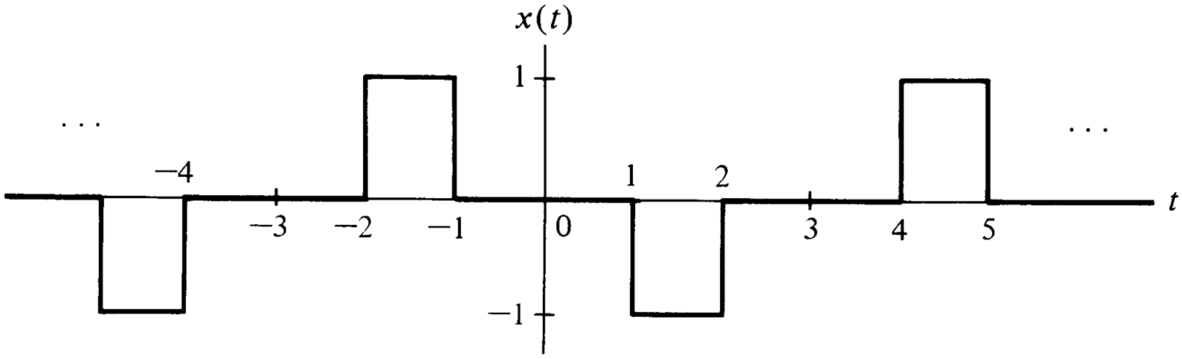
where $\omega_0 = 2\pi$.

$$a_4 = \frac{e^{j\pi/6}}{4j}, \qquad a_{-4} = \frac{-e^{-j\pi/6}}{4j},$$
$$a_5 = \frac{e^{j\pi/6}}{2j}, \qquad a_{-5} = \frac{-e^{-j\pi/6}}{2j},$$
$$a_6 = \frac{e^{j\pi/6}}{4j}, \qquad a_{-6} = \frac{-e^{-j\pi/6}}{4j}$$

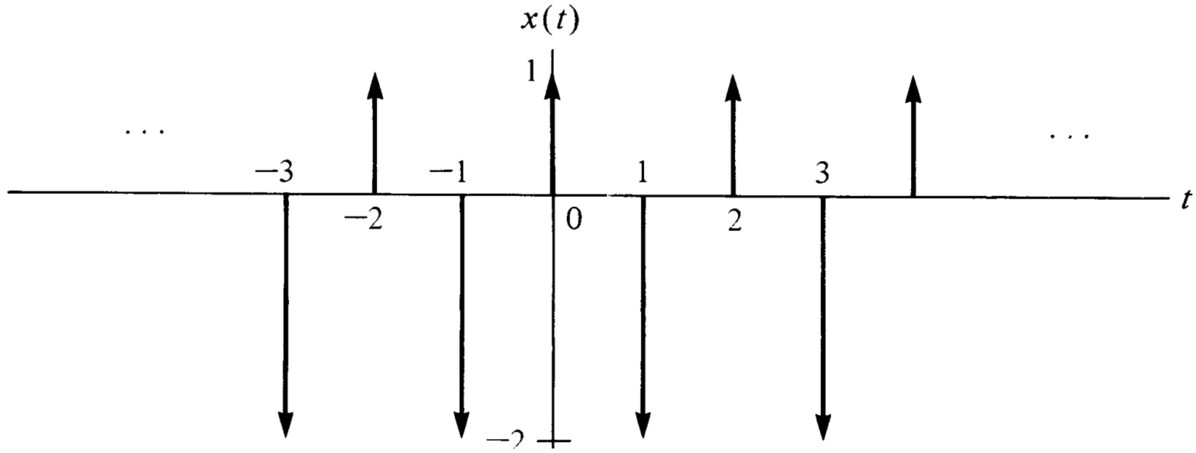
All other a_k's $= 0$.

<u>Bài 3</u>: Tìm hệ số FS của các tín hiệu sau:

a)



b)



<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 2 ý = 1 điểm

a) $T_0=6$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

We take $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/3$. Choosing the period of integration as -3 to 3, we have

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{6}\int_{-2}^{-1} e^{-jk(\pi/3)t}\, dt - \frac{1}{6}\int_{1}^{2} e^{-jk(\pi/3)t}\, dt \\
&= \frac{1}{6}\,\frac{1}{-jk(\pi/3)}\, e^{-jk(\pi/3)t}\Big|_{-2}^{-1} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{-jk(\pi/3)}\, e^{-jk(\pi/3)t}\Big|_{1}^{2} \\
&= \frac{1}{-j2\pi k}\left[e^{+j(\pi/3)k} - e^{+j(2\pi/3)k} - e^{-j(2\pi/3)k} + e^{-j(\pi/3)k}\right] \\
&= \frac{\cos(2\pi/3)k}{j\pi k} - \frac{\cos(\pi/3)k}{j\pi k}
\end{aligned}$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{\pi}{3}$$

$$a_k = \frac{\cos(2\pi/3)k - \cos(\pi/3)k}{j\pi k}$$

b)

The period is $T_0 = 2$, with $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$. The Fourier coefficients are

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

Choosing the period of integration as $-\frac{1}{2}$ to $\frac{3}{2}$, we have

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{3/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{3/2} [\delta(t) - 2\delta(t-1)]e^{-jk\omega_0 t}\,dt \\ &= \frac{1}{2} - e^{-jk\omega_0} = \frac{1}{2} - (e^{-j\pi})^k \end{aligned}$$

Therefore,

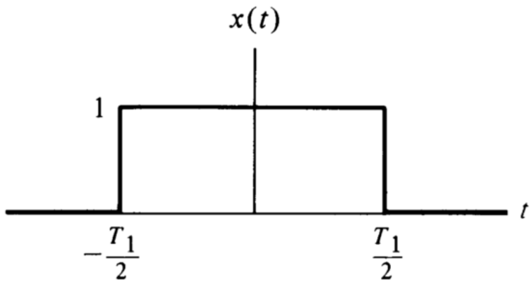
$$a_0 = -\tfrac{1}{2}, \qquad a_k = \tfrac{1}{2} - (-1)^k$$

<u>Bài 4</u>: Cho tín hiệu x(t) có dạng xung hình chữ nhật, chiều cao bằng 1, độ rộng T_1, không tuần hoàn.

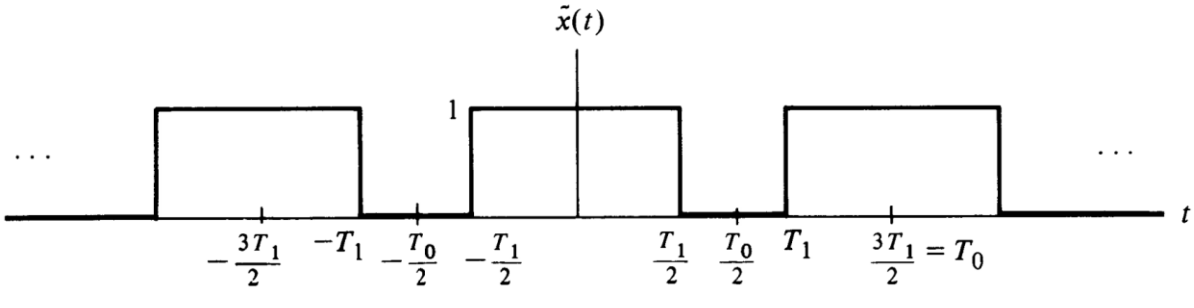
a) Vẽ x(t)
b) Vẽ $\tilde{x}(t)$ là tín hiệu tuần hoàn được tạo bởi x(t) với chu kì tuần hoàn $T_0 = \frac{3}{2}T_1$
c) Tính biến đổi Fourier X(w) của x(t). Vẽ phác họa |X(w)| trong khoảng $|X(\omega)| \le 6\pi/T_1$
d) Tính các hệ số FS của tín hiệu $\tilde{x}(t)$. Vẽ các a_k với $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3$

<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 4 ý = 2 điểm

a)



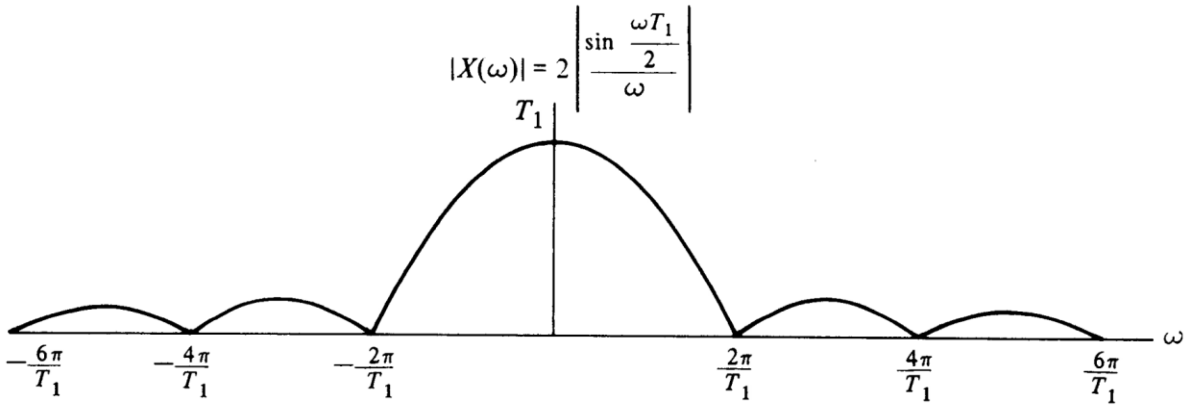
b)



c)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} 1e^{-j\omega t}\,dt \quad \text{since } x(t) = 0 \quad \text{for} \quad |t| > \frac{T_1}{2}$$

$$= \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1/2}^{T_1/2} = \frac{-1}{j\omega}(e^{-j\omega T_1/2} - e^{j\omega T_1/2}) = \frac{2\sin\frac{\omega T_1}{2}}{\omega}$$



d)

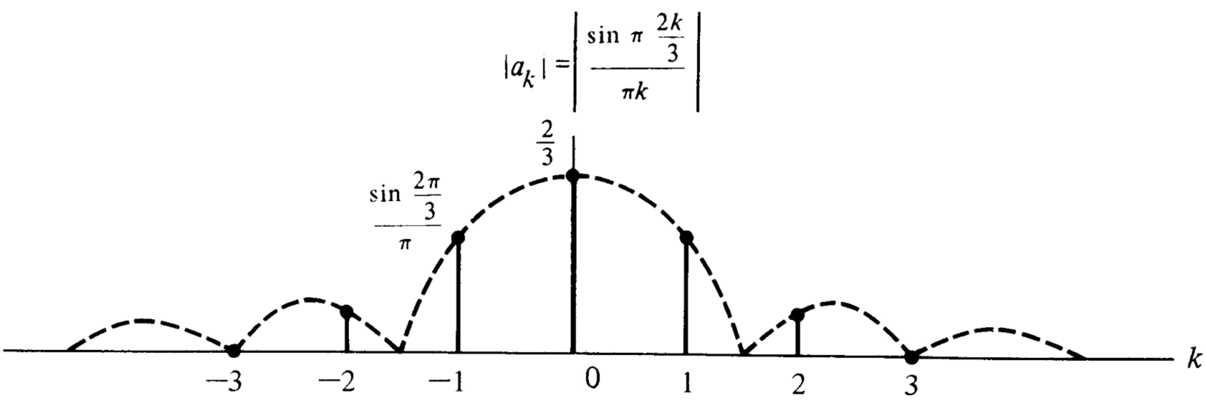
Using the analysis formula, we have

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt,$$

where we integrate over *any* period.

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)e^{-jk(2\pi/T_0)t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1/2}^{T_1/2} e^{-jk(2\pi/T_0)t}\,dt,$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{T_0}}\right)(e^{-jk\pi T_1/T_0} - e^{jk\pi T_1/T_0}) = \frac{\sin k\pi(T_1/T_0)}{\pi k} = \frac{\sin \pi(2k/3)}{\pi k}$$



Bài 5: Xác định biến đổi Fourier của các tín hiệu sau. Vẽ đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.

(a) $\delta(t-5)$

(b) $e^{-at}u(t)$, $\quad a$ real, positive

(c) $e^{(-1+j2)t}u(t)$

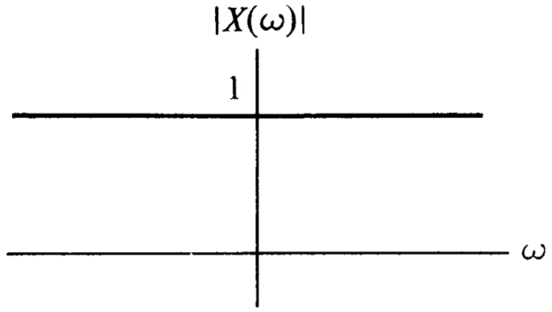
Đáp án: 0,5 điểm/ý x 3 ý = 1,5 điểm

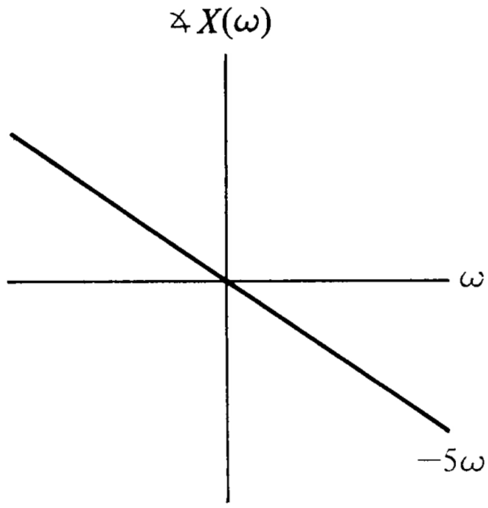
(a) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-5)e^{-j\omega t}\,dt = e^{-j5\omega} = \cos 5\omega - j\sin 5\omega,$

by the sifting property of the unit impulse.

$$|X(\omega)| = |e^{j5\omega}| = 1 \qquad \text{for all } \omega,$$

$$\sphericalangle X(\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{Im\{X(\omega)\}}{Re\{X(\omega)\}}\right] = \tan^{-1}\left(\frac{-\sin 5\omega}{\cos 5\omega}\right) = -5\omega$$





(b) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\,dt$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt = \frac{-1}{a+j\omega}e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty}$$

Since $Re\{a\} > 0$, e^{-at} goes to zero as t goes to infinity. Therefore,

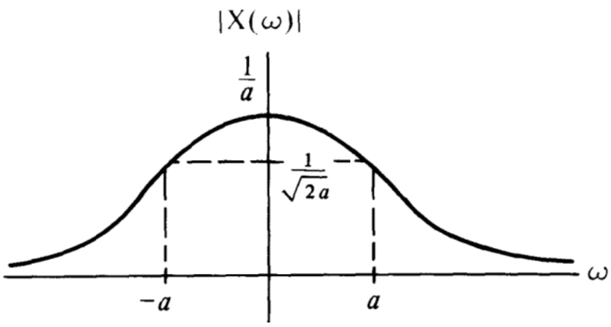
$$X(\omega) = \frac{-1}{a+j\omega}(0-1) = \frac{1}{a+j\omega},$$

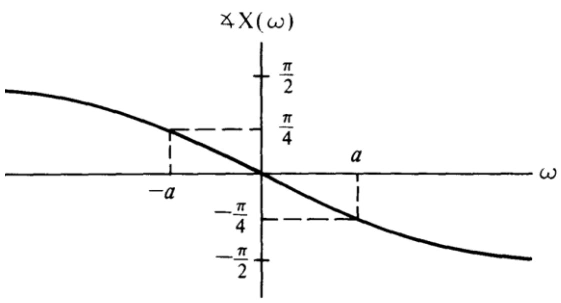
$$|X(\omega)| = [X(\omega)X^*(\omega)]^{1/2} = \left[\frac{1}{a+j\omega}\left(\frac{1}{a-j\omega}\right)\right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}},$$

$$Re\{X(\omega)\} = \frac{X(\omega)+X^*(\omega)}{2} = \frac{a}{a^2+\omega^2},$$

$$Im\{X(\omega)\} = \frac{X(\omega)-X^*(\omega)}{2} = \frac{-\omega}{a^2+\omega^2},$$

$$\sphericalangle X(\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{Im\{X(\omega)\}}{Re\{X(\omega)\}}\right] = -\tan^{-1}\frac{\omega}{a}$$





(c) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-1+j2)t}u(t)e^{-j\omega t}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-1+j2)t}e^{-j\omega t}\,dt$

$$= \frac{1}{-1+j(2-\omega)}\, e^{[-1+j(2-\omega)]t}\Big|_0^{\infty}$$

Since $Re\{-1+j(2-\omega)\} < 0$, $\lim_{t\to\infty} e^{[-1+j(2-\omega)]t} = 0$. Therefore,

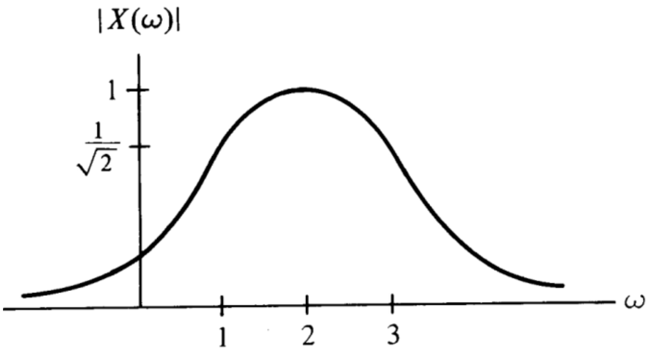
$$X(\omega) = \frac{1}{1+j(\omega-2)}$$

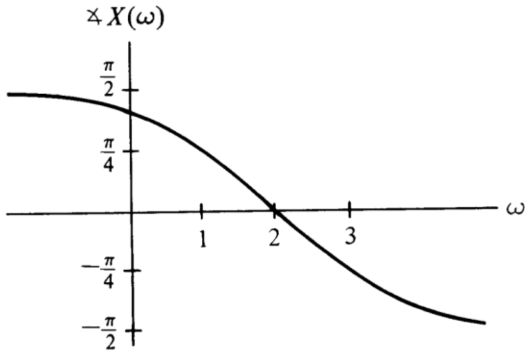
$$|X(\omega)| = [X(\omega)X^*(\omega)]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega-2)^2}}$$

$$Re\{X(\omega)\} = \frac{X(\omega)+X^*(\omega)}{2} = \frac{1}{1+(\omega-2)^2}$$

$$Im\{X(\omega)\} = \frac{X(\omega)-X^*(\omega)}{2}\ \frac{-(\omega-2)}{1+(\omega-2)^2}$$

$$\sphericalangle X(\omega) = \tan^{-1}\left[\frac{Im\{X(\omega)\}}{Re\{X(\omega)\}}\right] = -\tan^{-1}(\omega-2)$$



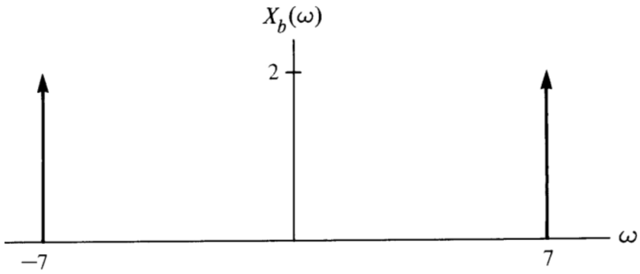


Note that there is no symmetry about $\omega = 0$ since $x(t)$ is not real.

<u>Bài 6</u>: Xác định tín hiệu miền thời gian của các phổ tương ứng sau:

a) $X_a(\omega) = \dfrac{1}{7+j\omega}$

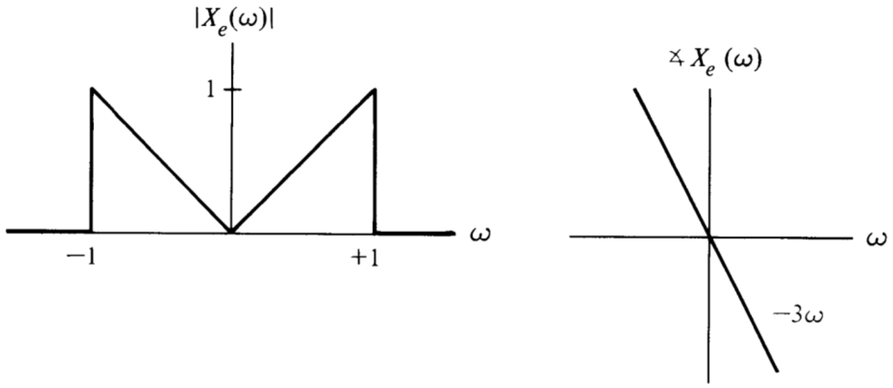
b)



c) $X_c(\omega) = \dfrac{1}{9+\omega^2}$

d) $X_d(\omega) = X_a(\omega)X_b(\omega)$

e)



<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 5 ý = 2,5 điểm

a)

$$e^{-at}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega} \qquad\qquad e^{-7t}u(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{7+j\omega}$$

b)

$$X_b(\omega) = 2\delta(\omega+7) + 2\delta(\omega-7),$$

$$x_b(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_b(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2[\delta(\omega+7)+\delta(\omega-7)]e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}e^{-j7t} + \frac{1}{\pi}e^{j7t} = \frac{2}{\pi}\cos 7t$$

c)

$$e^{-a|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2a}{a^2+\omega^2} \qquad\qquad \alpha x(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \alpha X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt = \alpha X(\omega)$$

$$\frac{1}{2a}e^{-a|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a^2+\omega^2} \qquad \text{or} \qquad \frac{1}{9+\omega^2} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{6}e^{-3|t|}$$

(d) $X_a(\omega)X_b(\omega) = X_a(\omega)[2\delta(\omega+7)+2\delta(\omega-7)]$

$$= 2X_a(-7)\delta(\omega+7) + 2X_a(7)\delta(\omega-7)$$

$$X_d(\omega) = \frac{2}{7-j7}\delta(\omega+7) + \frac{2}{7+j7}\delta(\omega-7)$$

$$x_d(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{2}{7-j7}\delta(\omega+7) + \frac{2}{7+j7}\delta(\omega-7)\right]e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$x_d(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{7-j7}e^{-j7t} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{7+j7}e^{j7t}$$

Note that

$$\frac{1}{7+j7} = \frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{-j\pi/4}, \qquad \frac{1}{7-j7} = \frac{1}{7}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) e^{+j\pi/4}$$

Thus

$$x_d(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{7}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}[e^{-j(7t-\pi/4)} + e^{j(7t-\pi/4)}] = \frac{\sqrt{2}}{7\pi}\cos\left(7t - \frac{\pi}{4}\right)$$

(e) $$X_e(\omega) = \begin{cases} \omega e^{-j3\omega}, & 0 \le \omega \le 1, \\ -\omega e^{-j3\omega}, & -1 \le \omega \le 0, \\ 0, & \text{elsewhere}, \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^1 \omega e^{-j3\omega}e^{j\omega t}\,d\omega - \int_{-1}^{0} \omega e^{-j3\omega}e^{j\omega t}\,d\omega\right]$$

Note that

$$\int x e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}(\alpha x - 1)$$

Substituting $\alpha = j(t-3)$ into the integrals, we obtain

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j(t-3)\omega}}{(j(t-3))^2}(j(t-3)\omega - 1)\Big|_0^1 - \frac{e^{j(t-3)\omega}}{(j(t-3))^2}(j(t-3)\omega - 1)\Big|_{-1}^{0}\right],$$

which can be simplified to yield

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(t-3) - 1}{(t-3)^2} + \frac{\sin(t-3)}{(t-3)}\right]$$

Bài 7: Cho hệ LTI nhân quả được biểu diễn dưới dạng phương trình vi phân:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

a) Tính đáp ứng tần số của hệ thống, vẽ phác họa đáp ứng biên độ và đáp ứng pha.
b) Xác định phổ tín hiệu lối ra Y(w) của hệ thống biết tín hiệu lối vào là $x(t) = e^{-t}u(t)$.
c) Xác định lối ra y(t) của hệ thống.

Đáp án: 0,5 điểm/ý x 3 ý = 1,5 điểm

a) Thực hiện biến đổi Fourier hai vế:

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega)$$

Hence,

$$Y(\omega)[2 + j\omega] = X(\omega)$$

and

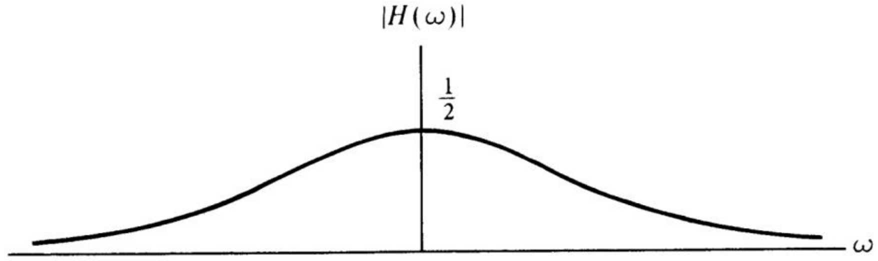
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2 + j\omega},$$

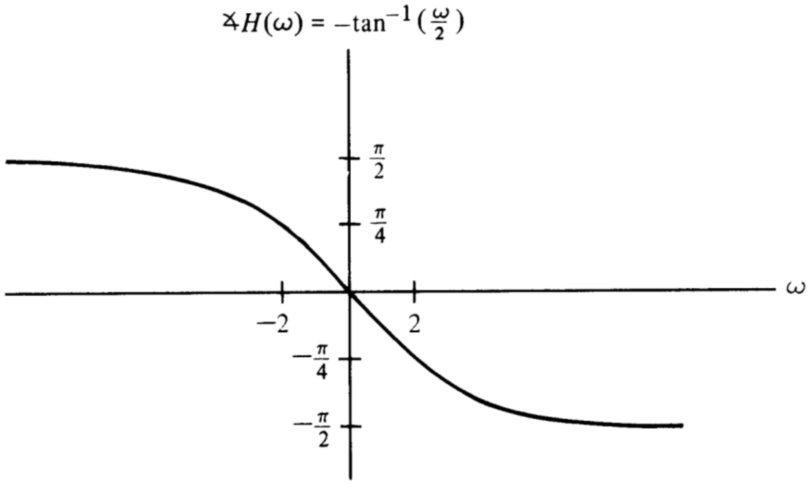
$$H(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega} = \frac{1}{2 + j\omega}\left(\frac{2 - j\omega}{2 - j\omega}\right) = \frac{2 - j\omega}{4 + \omega^2}$$

$$= \frac{2}{4 + \omega^2} - j\frac{\omega}{4 + \omega^2},$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{4}{(4 + \omega^2)^2} + \frac{\omega^2}{(4 + \omega^2)^2} = \frac{4 + \omega^2}{(4 + \omega^2)^2},$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$





(b) We are given $x(t) = e^{-t}u(t)$. Taking the Fourier transform, we obtain

$$X(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}, \qquad H(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

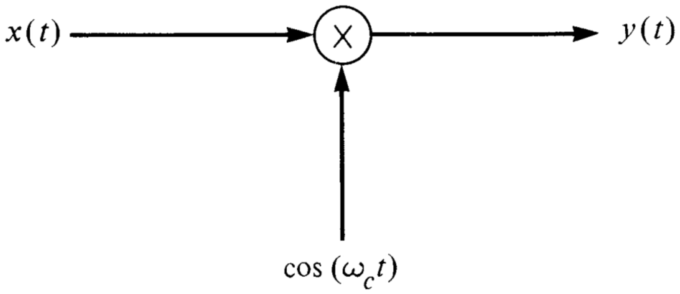
Hence,

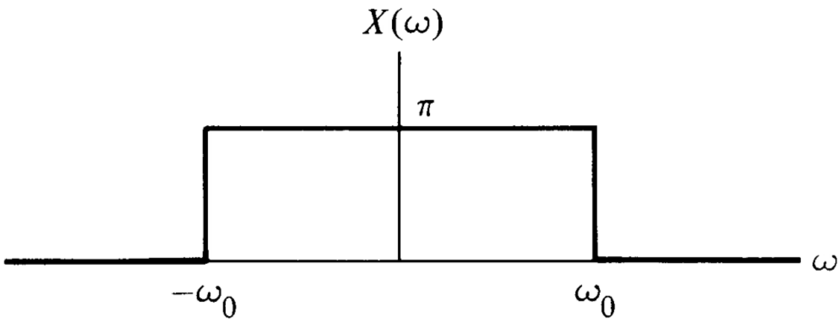
$$Y(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{2 + j\omega}$$

(c) Taking the inverse transform of $Y(\omega)$, we get

$$y(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

Bài 8: Xác định tín hiệu lối ra y(t) và vẽ phác họa phổ Y(w) biết hệ thống và lối vào được cho bởi:





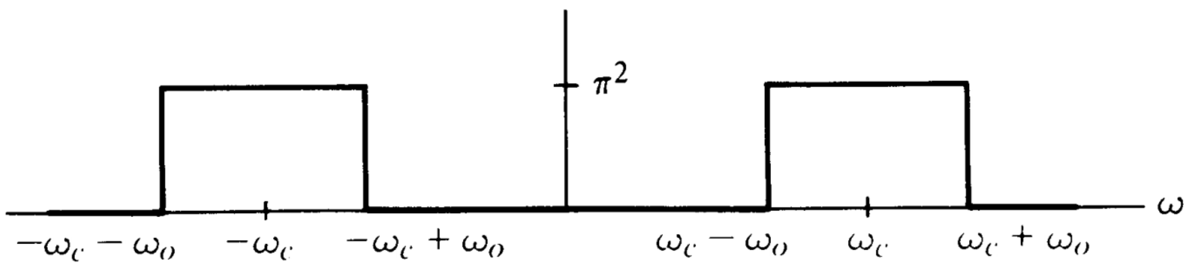
Biết rằng $\omega_c > \omega_0$.

Đáp án: 1 điểm

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \pi e^{j\omega t}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{jt}\right)(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \\
&= \frac{\sin \omega_0 t}{t}
\end{aligned}
$$

$$y(t) = \cos(\omega_c t)\left[\frac{\sin(\omega_0 t)}{t}\right]$$

$$Y(\omega) = X(\omega) * [\pi\delta(\omega - \omega_c) - \pi\delta(\omega + \omega_c)]$$



Bài 9: Xác định phổ của các tín hiệu sau:

(a) $[e^{-\alpha t}\cos \omega_0 t]u(t), \qquad \alpha > 0$

(b) $e^{-3|t|}\sin 2t$

(c) $\left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right)\left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)$

Đáp án: 1 điểm

(a) $x(t) = e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t u(t), \qquad \alpha > 0$

$$= e^{-\alpha t}u(t)\cos(\omega_0 t)$$

Therefore,

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha + j\omega} * [\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)]$$
$$= \frac{1/2}{\alpha + j(\omega - \omega_0)} + \frac{1/2}{\alpha + j(\omega + \omega_0)}$$

(b) $x(t) = e^{-3|t|}\sin 2t$

$$e^{-3|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{6}{9 + \omega^2}$$

$$\sin 2t \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)], \qquad \omega_0 = 2$$

Therefore,

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{6}{9 + \omega^2}\right) * \left\{\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]\right\}$$
$$= \frac{j3}{9 + (\omega + 2)^2} - \frac{j3}{9 + (\omega - 2)^2}$$

(c) $x(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}\left(\dfrac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right),$

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega),$$

where

$$X_1(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2\pi, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Bài 10: Cho hệ thống LTI được biểu diễn bởi phương trình vi phân:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$x(t) = A\cos\omega_0 t$ là tín hiệu vào của hệ thống.

Xác định tần số ω_0 để biên độ cực đại của tín hiệu lối ra bằng A/3.

Đáp án: 1 điểm

$$y(t) = |H(\omega_0)|\, A\cos(\omega_0 t + \phi), \qquad \text{where } \phi = \sphericalangle H(\omega_0)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

For the maximum value of $y(t)$ to be $A/3$, we require

$$\frac{1}{4+\omega_0^2} = \frac{1}{9}$$

Therefore, $\omega_0 = \pm\sqrt{5}$.

<u>Bài 11</u>: Cho hệ thống LTI được biểu diễn bởi phương trình vi phân:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{4dx(t)}{dt} - x(t)$$

Tìm đáp ứng tần số của hệ thống.

<u>Đáp án:</u> 1 điểm

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2dy(t)}{dt} + 3y(t)\right\} = -\omega^2 Y(\omega) + 2j\omega Y(\omega) + 3Y(\omega)$$
$$= (-\omega^2 + j2\omega + 3)Y(\omega),$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{4dx(t)}{dt} - x(t)\right\} = 4j\omega X(\omega) - X(\omega)$$
$$= (j4\omega - 1)X(\omega),$$

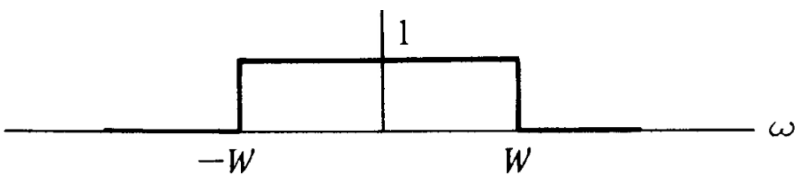
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{-1+j4\omega}{-\omega^2+3-j2\omega} = \frac{1-j4\omega}{\omega^2-3+j2\omega}$$

<u>Bài 12</u>: Tìm lối ra của hệ thống LTI có đáp ứng xung và tín hiệu lối vào sau:

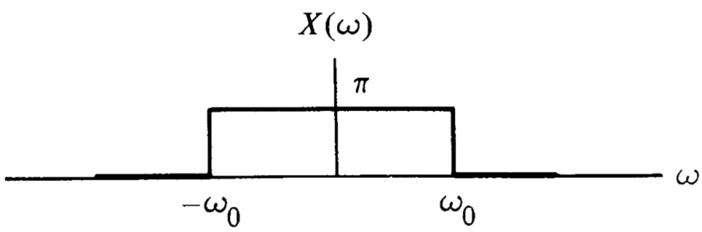
$$h(t) = \frac{\sin(2\omega_0 t)}{t} \qquad x(t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{t}$$

<u>Đáp án:</u> 1 điểm

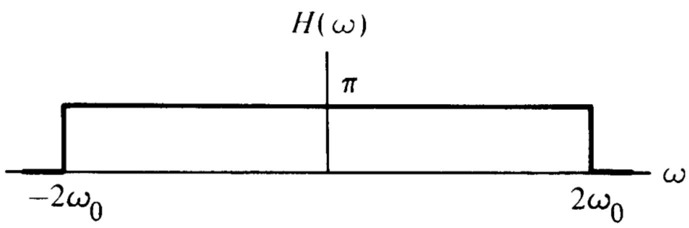
$$\frac{\sin Wt}{\pi t} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow}$$

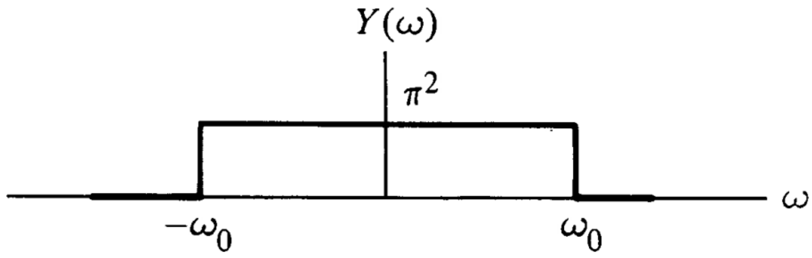


$$x(t) = \pi\frac{\sin \omega_0 t}{\pi t} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow}$$



$$h(t) = \pi\frac{\sin (2\omega_0 t)}{\pi t} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow}$$

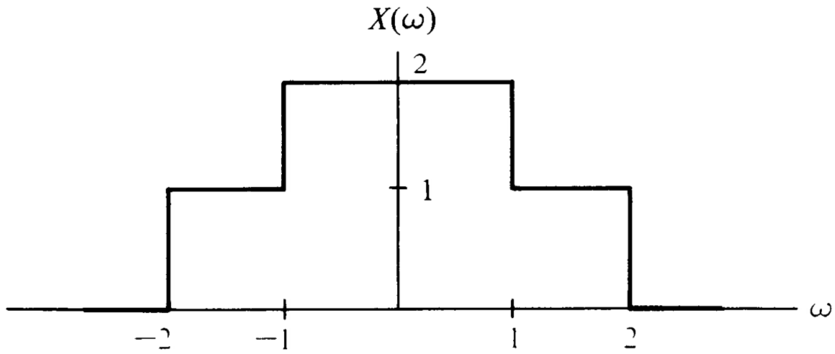


$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) =$ 

Therefore, $y(t) = \pi \dfrac{\sin(\omega_0 t)}{t}$.

<u>Bài 13</u>:

a) Xác định năng lượng của tín hiệu có phổ:

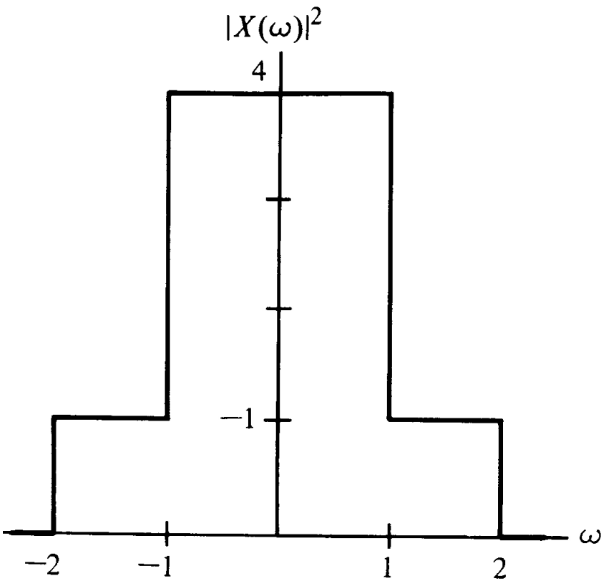


b) Tìm x(t) biết rằng x(t) có phổ được cho trong phần (a).

<u>Đáp án:</u> 1 điểm

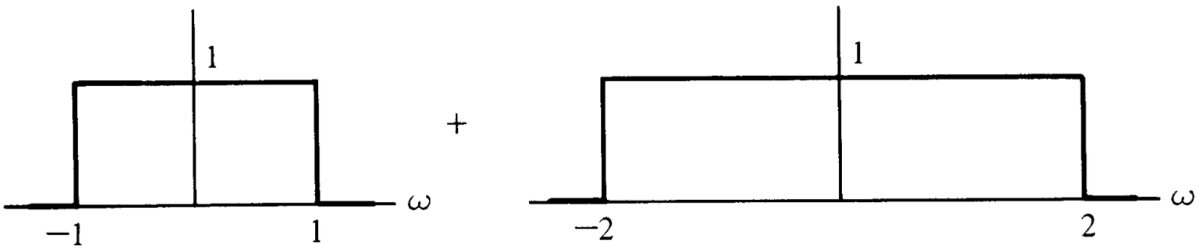
a)

$$\text{Energy} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\, d\omega = \frac{5}{\pi}$$



b)

$X(\omega) =$



$$x(t) = \frac{\sin t}{\pi t} + \frac{\sin 2t}{\pi t}$$

<u>Bài 14</u>: Chứng minh rằng biến đổi Fourier của tín hiệu

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \qquad a > 0$$

là

$$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^n}$$

<u>Đáp án:</u> 1 điểm

Let $n = 1$:

$$x(t) = e^{-at} u(t), \qquad a > 0,$$
$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Let $n = 2$:

$$x(t) = te^{-at} u(t),$$
$$X(\omega) = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{a + j\omega}\right) \qquad \text{since} \quad tx(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\frac{d}{d\omega} X(\omega)$$
$$= \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

Assume it is true for n:

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t),$$
$$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^n}$$

We consider the case for $n + 1$:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{t^n}{n!} e^{-at} u(t), \\
X(\omega) &= \frac{j}{n} \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{(a + j\omega)^n} \right] \\
&= \frac{j}{n} \frac{d}{d\omega} [(a + j\omega)^{-n}] \\
&= \frac{j}{n} (-n)(a + j\omega)^{-n-1} j \\
&= \frac{1}{(a + j\omega)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

Therefore, it is true for all n.