CHƯƠNG 3:
BIỄU DIỄN FOURIER CỦA TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG LTI

GV: ThS. Đinh Thị Thái Mai

3.2. BIỂU DIỄN HỆ THỐNG VÀ TÍN HIỆU THỜI GIAN RỜI RẠC

- Tín hiệu dạng sin và hệ thống LTI thời gian rời rạc
- Biểu diễn Fourier của tín hiệu tuần hoàn
- Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn thời gian rời rạc

Đáp ứng của hệ thống LTI thời gian rời rạc đối với tín hiệu đầu vào dạng sin

- Xét một hệ thống LTI rời rạc với đáp ứng xung *h(n)*, đáp ứng của hệ thống với một tín hiệu đầu vào thời gian rời rạc $x(n) = e^{j\Omega n}$ được tính như sau:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, e^{j\Omega(n-k)}$$
$$= e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, e^{-j\Omega k} = H(\Omega) e^{j\Omega n}$$

Trong đó, $H(\Omega)$ được gọi là đáp ứng tần số:

$$H(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, e^{-j\Omega k}$$

- Tín hiệu đầu ra có cùng tần số với tín hiệu đầu vào dạng sin.
- Sự thay đổi về pha và biên độ của tín hiệu đầu ra so với tín hiệu đầu vào được đặc trưng hóa bởi đáp ứng tần số $H(\Omega)$ với hai thành phần như sau:

$$|H(\Omega)| = \sqrt{[Im(H(\Omega))]^2 + [Re(H(\Omega))]^2}$$

$$\varphi(\Omega) = \arctan\left(\frac{Im(H(\Omega))}{Re(H(\Omega))}\right)$$

$|H(\Omega)|$ và $\varphi(\Omega)$ được gọi là đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống.

Đáp ứng của hệ thống LTI thời gian rời rạc đối với tín hiệu đầu vào dạng sin

- Khi đó tín hiệu đầu ra có thể được biểu diễn theo dạng sau:

$$y(n) = |H(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)}e^{j\Omega n} = |H(\Omega)|e^{j(\phi(\Omega)+\Omega n)}$$

Điều này có nghĩa là, khi so sánh với tín hiệu đầu vào dạng sin, tín hiệu đầu ra có biến độ gấp $|H(\Omega)|$ lần biên độ của tín hiệu đầu vào, pha của tín hiệu đầu ra bị dịch đi một góc $\phi(\Omega)$ so với tín hiệu đầu vào.

Chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn thời gian rời rạc

- Một tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ N có thể được biểu diễn chính xác bằng chuỗi Fourier:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

trong đó, $\Omega_0 = 2\pi/N$ là tần số cơ bản của $x(n)$.

- Nói cách khác, bất cứ một tín hiệu tuần hoàn thời gian rời rạc nào cũng có thể được biểu diễn là tổng tuyến tính của các tín hiệu dạng sin phức có tần số là bội nguyên lần của tần số cơ bản.

Biểu diễn đáp ứng của hệ thống LTI đối với tín hiệu đầu vào tuần hoàn

- Đáp ứng của một hệ thống LTI thời gian rời rạc có đáp ứng tần số của $H(\Omega)$ đối với mỗi thành phần $e^{jk\Omega_0 n}$ là $H(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$ → đáp ứng của hệ thống đối với tín hiệu tuần hoàn $x(n)$ có thể được biểu diễn như sau:

$$\mathrm{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k H(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}.$$

Biểu thức trên là biểu diễn chuỗi Fourier của *y(n).*

Tính trực giao của tập $\left\{e^{jk\Omega_0 n}\right\}$

- Hai tín hiệu tuần hoàn *f(n)* và *g(n)* có cùng một chu kỳ *N* được gọi là trực giao nếu điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, g^*(n) = 0.$$

- Hai tín hiệu $e^{jk\Omega_0 n}$ và $e^{jl\Omega_0 n}$, trong đó tần số cơ bản là $\Omega_0 = 2\pi/N$, là trực giao nếu $k \neq l$:

$$\forall\, k \neq l: \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk\Omega_0 n}\, e^{-jl\Omega_0 n} = 0.$$

Xác định các hệ số của chuỗi Fourier.

- Các hệ số của chuỗi Fourier của một tín hiệu tuần hoàn x(n) được tính toán bằng cách tận dụng tính trực giao của tập các thành phần dạng sin phức $\left\{e^{jk\Omega_0 n}\right\}$ như sau:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(k)e^{-jk\Omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} c_l\, e^{jl\Omega_0 n}e^{-jk\Omega_0 n}.$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} c_l \sum_{n=0}^{N-1} e^{jl\Omega_0 n}e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$= c_k N$$

$$\rightarrow\ c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-jk\Omega_0 n}$$

Các tính chất của biểu diễn chuỗi Fourier.

- Tính tuyến tính

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \text{ và } z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} d_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$\rightarrow \alpha x(n) + \beta z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha c_k + \beta d_k) e^{jk\Omega_0 n}$.

- Tính dịch thời gian:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\rightarrow x(n - n_0) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-jk\Omega_0 n_0} e^{jk\Omega_0 n}$$

Các tính chất của biểu diễn chuỗi Fourier.

- Định lý Paserval:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2$$

Giá trị $|c_k|^2$ có thể biểu diễn công suất của thành phần $e^{jk\Omega_0 n}$ trong tín hiệu *x(n)* → vẽ các đại lượng $|c_k|^2$ theo biến tần số $\Omega_k = k\Omega_0$ $(k \in Z)$ biểu diễn sự phân bố công suất của tín hiệu *x(n)* trên các tần số khác nhau và được gọi là phổ công suất của tín hiệu *x(n)*.

Lưu ý: Phổ công suất của một tín hiệu tuần hoàn là một hàm rời rạc tuần hoàn với chu kỳ N.

Các tính chất của biểu diễn chuỗi Fourier.

- Tính đối xứng: Một tín hiệu tuần hoàn *x(n)* có biểu diễn chuỗi Fourier:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

Thì phổ công suất của *x(n)* là một hàm chẵn, tức là:

$$\forall k\colon\ |c_k|^2 = |c_{-k}|^2$$

✓ Nếu *x(n)* có giá trị thực: $\forall k\colon\ c_k = c_{-k}{}^*$.

✓ Nếu *x(n)* thực và chẵn : $\forall k\colon\ c_k = c_{-k}$.

✓ Nếu *x(n)* thực và lẽ: $\forall k\colon\ c_k = -c_{-k}$.

Biểu diễn chuỗi Fourier mở rộng

- Cho một tín hiệu không tuần hoàn thời gian rời rạc x(n), chúng ta có thể xem x(n) là một tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ $N \rightarrow \infty$ (hoặc $\Omega_0 \rightarrow 0$), khi đó x(n) có thể biểu diễn bằng chuỗi Fourier sau:

$$x(n) = \lim_{\Omega_0 \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

trong đó:

$$c_k = \lim_{\Omega_0 \to 0} \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$= \lim_{\Omega_0 \to 0} \frac{\Omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jk\Omega_0 n}$$

Biểu diễn chuỗi Fourier mở rộng

- Vì $\Omega_0 \to 0$, nên Ω =kΩ_0 là liên tục, do đó chúng ta có thể viết lại phương trình trên dưới dạng như sau:

$$x(n) = \lim_{\Omega_0 \to 0} \frac{1}{\Omega_0} \int_0^{2\pi} c(\Omega)\, e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$= \lim_{\Omega_0 \to 0} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{c(\Omega)}{\Omega_0} e^{j\Omega n} d\Omega$$

trong đó: $c(\Omega)$ là một hàm tần số liên tục được định nghĩa như sau:

$$c(\Omega) = \lim_{\Omega_0 \to 0} \frac{\Omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{j\Omega n}$$

Biến đổi Fourier thời gian rời rạc

- Cho $X(\Omega) = \frac{2\pi c(\Omega)}{\Omega_0}$, chúng ta tính được công thức cho biến đổi Fourier rời rạc của tín hiệu *x(n)*:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

- Công thức biến đổi Fourier rời rạc ngược:

$$x(n) = \mathcal{F}^{-1}[X(\Omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n} d\Omega$$

- Điều kiện để tồn tại biến đổi Fourier và biến đổi Fourier ngược là *x(n)* phải là tín hiệu năng lượng.

Biến đổi Fourier thời gian rời rạc

- Một dạng khác của biến đổi Fourier thời gian rời rạc tín hiệu x(n) là sử dụng biến tần số *F* thay cho tần số góc Ω:

$$X(F) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi Fn}$$

và biến đổi Fourier ngược tương ứng là:

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(F)\, e^{j2\pi Fn} dF$$

Biến đổi Fourier thời gian rời rạc

- Hàm $X(\Omega)$ được gọi là phổ Fourier của tín hiệu x(n).
- Đại lượng $|X(\Omega)| = \sqrt{Re[X(\Omega)]^2 + Im[X(\Omega)]^2}$ được gọi là phổ biên độ của tín hiệu *x(n)* trong miền tần số.
- Hàm $\phi(\Omega) = \arctan\left[Im[X(\Omega)]/Re[X(\Omega)]\right]$ được gọi là phổ pha của tín hiệu *x(n)* trong miền tần số.

Các tính chất của biến đổi Fourier thời gian rời rạc

- Tính tuyến tính:

$$\mathcal{F}[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha X_1(\Omega) + \beta X_2(\Omega)$$

- Tính dịch thời gian:

$$\mathcal{F}[x(n - n_0)] = X(\Omega)e^{-j\Omega n_0}$$

- Tính dịch tần:

$$\mathcal{F}\left[x(n)e^{-j\Gamma n}\right] = \mathrm{X}(\Omega - \Gamma)$$

Các tính chất của biến đổi Fourier thời gian rời rạc

- Tích chập:

$$\mathcal{F}[f(n) * g(n)] = F(\Omega)G(\Omega)$$

- Tính điều biến:

$$\mathcal{F}[f(n)g(n)] = \frac{1}{2\pi} F(\Omega) \circledast_{2\pi} G(\Omega)$$

Trong đó, ký tự $\circledast_{2\pi}$ biểu diễn tích chập tuần hoàn trên khoảng $2\pi,$ tức là:

$$F(\Omega) \circledast_{2\pi} G(\Omega) = \int_0^{2\pi} F(\theta)G(\Omega - \theta)d\,\theta.$$

Các tính chất của biến đổi Fourier thời gian rời rạc

- Định lý Paserval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Đại lượng $|X(\Omega)|^2$ có thể biểu diễn năng lượng của thành phần $e^{j\Omega n}$ trong tín hiệu x(n) → vẽ $|X(\Omega)|^2$ theo biến tần số Ω sẽ biểu diễn mật độ năng lượng của x(n) trong miền tần số và được gọi là phổ năng lượng của x(n).

Lưu ý: phổ năng lượng là một hàm tuần hoàn liên tục trong chu kỳ 2π.

Các tính chất của biến đổi Fourier thời gian rời rạc

- Tính đối xứng:

➢ Phổ năng lượng của tín hiệu *x(n)* là một hàm chẵn, tức là:

$$\forall\Omega: |X(\Omega)|^2 = |X(-\Omega)|^2$$

➢ Nếu *x(n)* có giá trị thực:

$$\forall\Omega: X(\Omega) = X^*(-\Omega)$$

➢ Nếu *x(n)* thực và chẵn thì $X(\Omega)$ chẵn, tức là

$$\forall\Omega: X(\Omega) = X(-\Omega)$$

➢ Nếu *x(n)* thực và lẽ thì $X(\Omega)$ lẽ, tức là:

$$\forall\Omega: X(\Omega) = -X(-\Omega)$$