BÀI TẬP CHƯƠNG 4

I. Biến đổi Laplace

Bài 1:

(a) $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}.e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

⇨ $X(s) = \frac{1}{s+a}$, $Re(s) < -a$

(b) $x(t) = e^{at}u(-t)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(-t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} e^{-(s-a)t}dt = -\frac{1}{s-a}.e^{-(s-a)t}\Big|_{-\infty}^{0}$$

⇨ $X(s) = -\frac{1}{s-a}$, $Re(s) < a$

(c) $x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0 \le t \le T \\ 0 & otherwise \end{cases}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{T} e^{-(s+a)t}dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s-a)t}\Big|_{0}^{T}$$

⇨ $X(s) = \frac{1}{s+a}\left(1 - e^{-(s-a)T}\right)$

Bài 2:

(a) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

$$\rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}e^{-st}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-3t}e^{-st}dt$$

$$\rightarrow \ X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} = \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)}\ , Re(s) > -3$$

Điểm cực: $s = -1, s = -3$

Điểm không: $s = -\frac{5}{2}$

(b) $x(t) = e^{-3t}u(t) + e^{2t}u(-t)$

$$\rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-3t}e^{-st}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{2t}e^{-st}dt$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s-2} = \frac{-5}{(s+3)(s-2)}, \qquad Re(s) < 2$$

Điểm cực: $s = 2, s = -3$

(c) $x(t) = e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$

$$\rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{2t}e^{-st}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-3t}e^{-st}dt$$

$$\rightarrow X(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3} = \frac{-5}{(s+3)(s-2)}, \qquad Re(s) > 2 \text{ và } Re(s) < -3$$

Điểm cực: $s = 2, s = -3$

Bài 3:

(a) $x(t) = \delta(t - t_0)$

⇨ $X(s) = e^{-st_0}$

(b) $x(t) = u(t - t_0)$

⇨ $X(s) = \frac{e^{-st_0}}{s}$

(c) $x(t) = e^{-2t}[u(t) - u(t-5)] = e^{-2t}u(t) - e^{-1}\ e^{-2(t-5)}u(t-5)$

⇨ $X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{e^{-5(s+2)}}{s+2}$

(d) $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$

(e) $x(t) = \delta(at + b),\ a, b$ là số thực

Bài 4:

(a) $X(s) = 1,\ \forall s$

(b) $X(s) = s,\ \forall s$

(c) $X(s) = \frac{1}{s},\ Re(s) > 0$

(d) $X(s) = \frac{1}{s+a},\ Re(s) > -Re(a)$

(e) $X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}\ ,\ Re(s) > -Re(a)$

(f) $X(s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\ ,\ Re(s) > 0$

(g) $X(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}\ ,\ \ Re(s) > -Re(a)$

Bài 5:

(a) $X(s) = \frac{1}{s+1}\ \ , Re(s) > -1$

⇨ $x(t) = e^{-t}u(t)$

(b) $X(s) = \frac{1}{s+1}\ \ , Re(s) < -1$

⇨ $x(t) = -e^{-t}u(-t)$

(c) $X(s) = \frac{s}{s^2+4}\ \ , Re(s) > 0$

⇨ $x(t) = \cos(2t)u(t)$

(d) $X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+4}\ \ , Re(s) > -1$

⇨ $x(t) = e^{-2t}\cos(2t)u(t)$

Bài 6:

(a) $X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)}\ ,\ Re(s) > 0$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2+9}$$

⇨ $x(t) = (1 - e^{-2t}\cos(3t))u(t)$

(b) $X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}\ ,\ Re(s) > -3$

$$X(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

⇨ $x(t) = (2e^{-3t} - e^{-5t} - 10te^{-5t})u(t)$

(c) $X(s) = \frac{2s+1}{s+2}$, $Re(s) > -2$

$X(s) = 2 - \frac{3}{s+2}$

⇨ $x(t) = 2\delta(t) - 3e^{-2t}u(t)$

(d) $X(s) = \frac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2}$, $Re(s) > -1$

$X(s) = 1 + \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1}$

⇨ $x(t) = \delta(t) + (e^{-2t} + 2e^{-t})u(t)$

(e) $X(s) = \frac{s^3+2s^2+6}{s^2+3s}$, $Re(s) > 0$

$X(s) = s - 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s+3}$

⇨ $x(t) = \delta^{(1)}(t) - \delta(t) + (2 + e^{-3t})u(t)$

(f) $X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$

⇨ $x(t) = \begin{cases} te^{-a}\,u(t), & Re(s) > -Re(a) \\ -te^{-a}\,u(-t), & Re(s) < -Re(a) \end{cases}$

II. Hàm truyền

Bài 1:

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t)$$

(a) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t)$

$\rightarrow s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = X(s)$

$\rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+s-2}$

⇨ Hàm truyền của hệ thống: $H(s) = \frac{1}{s^2+s-2}$

(b) $H(s) = \frac{1}{s^2+s-2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2}$

⇨ Đáp ứng tần số của hệ thống: $H(j\omega) = \frac{1}{-1+j\omega} + \frac{1}{2+j\omega}$

(c) Đáp ứng xung

(i) Hệ thống nhân quả: $Re(s) > 1$

$h(t) = (e^t + e^{-2t})u(t)$

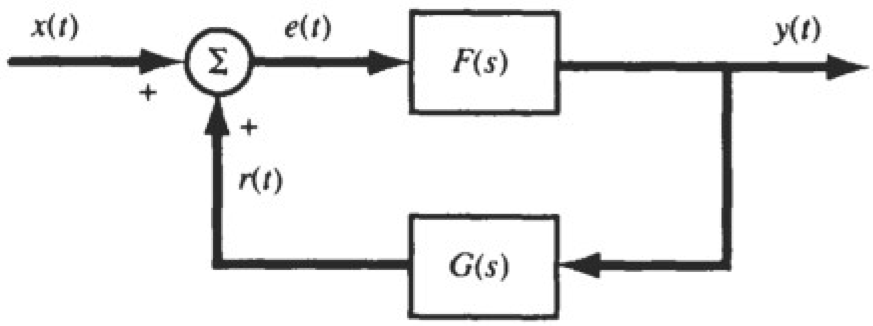
(ii) Hệ thống ổn định: $-2 < Re(s) < 1$

$h(t) = -e^tu(-t) + e^{-2t}u(t)$

(iii) Hệ thống phi nhân quả và không ổn định: $Re(s) < -2$

$h(t) = -(e^t + e^{-2t})u(-t)$

Bài 2:



Từ sơ đồ ta có các mối quan hệ sau:

$$\begin{cases} e(t) = x(t) + r(t) \\ E(s)F(s) = Y(s) \\ Y(s)G(s) = R(s) \end{cases}$$

$$\rightarrow Y(s) = [X(s) + Y(s)G(s)]F(s)$$

$$\rightarrow Y(s)[1 + G(s)F(s)] = X(s)F(s)$$

⇨ Hàm truyền của hệ thống: $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F(s)}{1+G(s)F(s)}$

III. Ứng dụng của biến đổi laplace một phía

Bài 1:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t)$$

$$\rightarrow (s^2 + 5s + 6)Y(s) - 2s - 11 = \frac{1}{s+1}$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{1}{2}.\frac{1}{s+1} + 6.\frac{1}{s+2} - \frac{9}{2}.\frac{1}{s+3}$$

⇨ $y(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} + 6e^{-2t} - \frac{9}{2}e^{-3t}\right)u(t)$