Câu 1. Trong số các hệ thống được mô tả bởi các quan hệ vào-ra dưới đây, hệ thống nào là hệ thống tuyến tính bất biến?

A. $y(t)=\sin[x(t)]$

B. $y[n]=2^n x[n]$

C. $y(t)=\int_{t-1}^{t+1} x(\tau)d\tau$

D. $y[n]=x[2^n]$

T/c tuyến tính: T(x1+x2) = y1+ y2
T/c bất biến: T(x(t-t0)) = y(t-t0)

Theo đó, ta dễ dàng loại các trường hợp không đúng:
A: hệ thống không tuyến tính (sin a + sin b != sin(a+b))
B: Hệ thống không bất biến (do thành phần 2^n phụ thuộc vào thời gian)
D: Hệ thống không bất biến (y(1) = x(2); dịch 1 bước: y(2)= x(4) != x(2+1))
Nên đáp án đúng là câu C

Câu 2. Xem xét một hệ thống tuyến tính bất biến với đáp ứng tần số được cho như sau:

$$H(\omega)=\frac{-3\omega^2+4j\omega-1}{(j\omega-1)(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

Trong số các đáp ứng xung được cho dưới đây, đáp ứng xung nào là của hệ thống trên?

A. $h(t)=e^t u(t)+e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)$

B. $h(t)=-e^t u(-t)+e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)$

C. $h(t)=e^t u(t)-e^{-t}u(-t)+e^{-2t}u(t)$

D. $h(t)=e^t u(t)+e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(-t)$

Câu này sử dụng điều kiện hội tụ / hay điều kiện tồn tại của biến đổi Fourier: Tín hiệu chỉ tồn tại biến đổi Fourier khi **nó là tín hiệu năng lượng**.
A,C,D: Ko phải (do thành phần e^t u(t) có năng lượng vô hạn)
Đáp án đúng là câu B

Câu 3. Trong số các cặp tín hiệu vào-ra được cho dưới đây, cặp nào có thể thuộc về một hệ thống tuyến tính bất biến?

A. $x[n]=2^{-n}u[n]$ và $y[n]=\sin[(\pi/4)n]$

B. $x[n]=\sin[(\pi/4)n]$ và $y[n]=2^{-n}u[n]$

C. $x[n]=2^{-n}u[n]$ và $y[n]=2^n u[-n]$

D. $x[n]=\sin[(\pi/4)n]$ và $y[n]=\sin[(\pi/8)n]$

Câu này khá khó. Trước hết ta có thể loại đáp án C: y(n) = x(-n) không thể là hệ thống bất biến được:
Còn lại 3 lựa chọn ta dùng điều kiện phổ:
Giả sử hệ thống là TTBB thì nó có thể biểu diễn dạng đáp ứng xung, hàm truyền hoặc đáp ứng tần số H(w).
Y(w)= X(w).H(w) *

B: Phổ của tín hiệu vào là rời rạc (chỉ có 2 vạch tại tần số w=+- pi/4) , phổ tín hiệu ra lại là phổ liên tục => không thể tồn tại H(w) thoả mãn đk * => B loại
D: Phổ tín hiệu vào có 2 vạch ở tần số +- pi/4, phổ tín hiệu ra ở tần sô +/- pi/8 nên cũng không thể xác định được H(w) thoả mãn.
Chỉ còn lại A: Phổ tín hiệu vào liên tục, phổ tín hiệu ra là phổ vạch. => H(w) cũng có phổ dạng vạch thì sẽ thoả mãn.
Vậy đáp án đúng là A:

Câu 4. Xem xét một hệ thống *tuyến tính bất biến rời rạc ổn định* được mô tả bởi phương trình sai phân dưới đây:

$$y[n]+\frac{3}{2}y[n-1]-y[n-2]=x[n]-x[n-1]$$

Trong số các phát biểu dưới đây về hệ thống trên, phát biểu nào đúng?

A. Hệ thống nhân quả.
B. Hệ thống phản nhân quả.
C. Hệ thống phi nhân quả (không nhân quả và cũng không phản nhân quả).
D. Tính nhân quả của hệ thống không thể xác định được.

Chú ý: Đề bài cho hệ thống là TTBB **ổn định** và hỏi về tính nhân quả của nó, nên ta sẽ dùng đặc điểm miền hội tụ của hàm truyền hệ thống H(z) phân tích:
H(z) = (1-z^-1)/(1 +3/2z^-1 -z^-2) có 2 điểm cực: |z1|<1 và |z2|>1
Hệ thống sẽ ổn định khi và chỉ khi miền hội tụ của nó chứa đường tròn đơn vị . Kết hợp với điều kiện miền hội tụ ko được chứa điểm cực thì ROC của nó sẽ có dạng |z1| <z < |z2|, hay hệ thống phi nhân quả .
Đáp án câu C

Câu 5. Xem xét một hệ thống *tuyến tính bất biến nhân quả* được mô tả bằng phương trình vi phân dưới đây:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$H(s) = \frac{s}{s^2+3s+2}$

$-2 < Re(s) < -1.$

a) Xác định đáp ứng xung $h(t)$ hệ thống. Hệ thống có ổn định không? $(-e^{-t}$

b) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(t)=u(t)-u(t-1)$. $X(s)$

c) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(t)=\sin[(\pi/4)t+\pi/2]+1$

a. Sử dụng biến đổi Laplace: 0.5 đ
H(s)= s/(s^2 +3s+2) = -1/(s+1) + 2/(s+2)
Đề bài cho **hệ thống nhân quả** nên ROC của nó phải có dạng: Re(s) > -1
h(t) = -e^(-t) .u(t) + 2 e^(-2t) u(t)
Miền hội tụ có chứa trục tung, nên hệ thống ổn định.**0.5đ**
b.
X(s) = 1/s -e^-s/s = (1- e ^-s)/s
Y(s)= X(s)H(s) = (1-e^-s)/(s^2 +3s +2)
= -1/(s+1) + 1/(s+2) + e^-s/(s+1) -s^-s/(s+2)
Hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả, tín hiệu vào nhân quả, nên ra cũng nhân quả .

Hơn nữa thành phần e^(-s) tương ứng với dịch thời gian 1 bước.
Do đó: y(t) = -e^(-t) u(t) + e^(-2t)u(t) + e^(-t+1) u(t-1) + e^(-2t+2)u(t-1)

c. Sử dụng tính chất của đáp ứng tần số với tín hiệu vào có dạng e^jw:

x(t) = sin(pi/4 t +pi/2)+1 = cos(pi/4 t) +1 = e^(j pi/4t)/2 + e^(-j pi/4t)/2 + e^(0jt)
y(t)= H(pi/4) e^(j pi/4t)/2 + H(-pi/4) e^(-j pi/4t)/2 + H(0). e^(0jt)
=...

Câu 6. Xem xét một hệ thống *tuyến tính bất biến nhân quả rời rạc* được mô tả bằng phương trình sai phân dưới đây:

$$y[n]+\frac{1}{2}y[n-1]-\frac{1}{2}y[n-2]=x[n]$$

a) Xác định đáp ứng của hệ thống với các điều kiện đầu (khi không có tín hiệu vào): $y[-1]=-1, y[-2]=0$.

b) Xác định hàm chuyển (hàm truyền đạt) $H(z)$ và đáp ứng tần số $H(e^{j\Omega})$ của hệ thống.

c) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x[n]=2^{n+1}u[n-1]$.

a. Giải phương trình sai phân, xác định nghiệm thuần nhất:
b. H(z)= Y(z) / X(z) = 1/(1+1/2 z^-1 -1/2 z^-2)

H(w) không tồn tại do hệ thống không ổn định (Hệ thống nhân quả, sẽ ổn định nếu mọi điểm cực nằm trong đường tròn đơn vị, trong trường hợp này, điểm cực nằm trên đường tròn đơn vị nên không ổn định -> không tồn tại H(w))

c. $x(n) = 4.2^{(n-1)}.u(n-1)$
$X(z) = 4z^{-1} /(1-2z^{-1})$
$Y(z) = X(z). H(z)$
=> y(n)