Chương 3

Biểu diễn tín hiệu và hệ thống tuyến tính bất biến trong miền tần số

Tần số là một đặc trưng vô cùng quan trọng của tín hiệu, tới mức trong nhiều trường hợp tần số được dùng như định danh của tín hiệu hay của kênh truyền, ví dụ như với các kênh radio. Tuy nhiên, điều đó không có nghĩa là các tín hiệu có cùng tần số sẽ giống nhau hoàn toàn. Với tín hiệu dạng sin, để xác định tín hiệu cần có đầy đủ ba đặc trưng: tần số, biên độ và pha. Việc xác định các đặc trưng này từ biểu diễn trong miền thời gian của một tín hiệu dạng sin là khá dễ dàng.

Đối với các tín hiệu không phải là tín hiệu dạng sin, như sẽ được trình bày trong chương này, chúng đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một số hữu hạn hay vô hạn các tín hiệu thành phần dạng sin, còn được gọi là các *thành phần tần số*. Mỗi thành phần tần số như vậy cho một tín hiệu cụ thể là riêng biệt và duy nhất. Nói một cách khác, một tín hiệu bất kỳ được đặc trưng bởi các thành phần tần số có trong tín hiệu đó cùng với các giá trị biên độ và pha tương ứng của mỗi thành phần tần số.

Xác định các thành phần tần số với các giá trị biên độ và pha tương ứng của một tín hiệu có nhiều thành phần tần số không phải là việc đơn giản nếu chỉ nhìn vào biểu diễn trong miền thời gian của tín hiệu đó. Chúng ta cần tới các công cụ phân tách tín hiệu thành các thành phần tần số riêng biệt, cho phép biểu diễn các đặc trưng biên độ và pha theo các thành phần tần số đó, nghĩa là biểu diễn tín hiệu dưới dạng các *phổ*, như *phổ biên độ* hay *phổ pha*. Các biểu diễn tín hiệu như vậy được gọi là các *biểu diễn trong miền tần số* của tín hiệu. Các biểu diễn này là cơ sở cho các phép phân tích các đặc trưng liên quan đến tần số của tín hiệu, cũng như cho việc thiết kế các hệ thống xử lý tín hiệu, đặc biệt là các hệ thống tuyến tính bất biến, còn được gọi là các *bộ lọc tần số* do tính chất *chọn lọc tần số* của loại hệ thống này.

3.1 Các biểu diễn Fourier của tín hiệu

3.1.1 Chuỗi Fourier của tín hiệu liên tục tuần hoàn

Theo Fourier, một tín hiệu $x(t)$ thực và tuần hoàn với chu kỳ T sẽ *khai triển* được bởi chuỗi các hàm $\cos()$ và $\sin()$ như sau:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2k\pi t/T) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(2k\pi t/T) \quad (3.1)$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \quad (3.2)$$

trong đó, ω_0 được gọi là *tần số góc cơ sở* của tín hiệu $x(t)$: $\omega_0 = 2\pi/T$, $\{a_k\}$ và $\{b_k\}$ là các hệ số thực. Áp dụng hệ quả sau đây của công thức Euler $e^{jz} = \cos(z) + j\sin(z)$ với $z = k\omega_o t$:

$$\cos(k\omega_0 t) = +\frac{1}{2}\left(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}\right) \quad (3.3)$$

$$\sin(k\omega_0 t) = -\frac{j}{2}\left(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}\right) \quad (3.4)$$

vào chuỗi khai triển ở trên chúng ta sẽ thu được phiên bản phức của *chuỗi Fourier*, viết tắt là CTFS (Continuous-Time Fourier Series), cho tín hiệu $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{3.5}$$

với $\{c_k\}$ là các hệ số phức, liên hệ với các hệ số của chuỗi Fourier thực theo các công thức sau đây:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} a_k & (k = 0) \\ \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & (k > 0) \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & (k < 0) \end{cases} \tag{3.6}$$

Để đưa ra cách tính các hệ số $\{c_k\}$ của chuỗi Fourier, chúng ta sẽ dùng công thức sau đây:

$$\forall m, k \in \mathbb{Z} : \int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & (k \neq m) \\ T & (k = m) \end{cases} \tag{3.7}$$

Nhân cả hai vế của biểu thức chuỗi Fourier (3.5) với $e^{-jm\omega_0 t}$ và lấy tích phân như sau:

$$\int_0^T x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt \tag{3.8}$$

hay:

$$\int_0^T x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt \tag{3.9}$$

Áp dụng (3.7) vào (3.9) chúng ta thu được:

$$\int_0^T x(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = c_m T \tag{3.10}$$

hay:

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt \tag{3.11}$$

Viết lại công thức trên bằng cách đổi biến $m \to k$:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{3.12}$$

chúng ta có được công thức để tính các hệ số $\{c_k\}$ của chuỗi Fourier (3.5) của tín hiệu liên tục $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ T và tần số góc cơ sở ω_0.

Để chuỗi Fourier của tín hiệu $x(t)$ nói trên tồn tại, $x(t)$ phải thỏa mãn tất cả các *điều kiện Dirichlet* sau đây:

1. $|x(t)|$ phải khả tích trong mỗi chu kỳ T
2. Số điểm cực trị của $x(t)$ trong mỗi chu kỳ T phải hữu hạn
3. Số điểm không liên tục của $x(t)$ trong mỗi chu kỳ T phải hữu hạn.

Tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ thỏa mãn các điều kiện Dirichlet nói trên là một tín hiệu công suất. Công suất của tín hiệu này tính được từ các hệ số của chuỗi Fourier, theo *định lý Parseval*:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \tag{3.13}$$

Mỗi thành phần $e^{jk\omega_0 t}$ của chuỗi Fourier (3.5) là một hàm dạng sin phức có tần số góc $k\omega_0$, hệ số c_k của $e^{jk\omega_0 t}$ do vậy có thể được coi là một giá trị đại diện cho thành phần tần số $k\omega_0$ trong tín hiệu $x(t)$. Đặt $X[k] = c_k$ $(k \in \mathbb{Z})$, $X[k]$ biểu diễn dãy các giá trị của một hàm theo tần số rời rạc: $X[k] = X(k\omega_0)$, được gọi là *phổ Fourier* của tín hiệu $x(t)$.

Dãy $|X[k]|^2$ thể hiện phân bố công suất của tín hiệu $x(t)$ theo các tần số rời rạc $\{k\omega_0 | k \in \mathbb{Z}\}$, được gọi là *phổ công suất* của tín hiệu $x(t)$.

Phổ Fourier $X[k]$ của tín hiệu tuần hoàn $x(t)$ là hàm có trị phức:

$$X[k] = \mathrm{Re}(X[k]) + j\mathrm{Im}(X[k]) \tag{3.14}$$

$X[k]$ còn có thể được biểu diễn dưới dạng sau đây:

$$X[k] = |X[k]|e^{\phi_X[k]} \tag{3.15}$$

trong đó:

$$|X[k]| = \sqrt{\mathrm{Re}(X[k])^2 + \mathrm{Im}(X[k])^2} \tag{3.16}$$

được gọi là *phổ biên độ* của tín hiệu $x(t)$, và:

$$\phi_X[k] = \arctan \frac{\mathrm{Im}(X[k])}{\mathrm{Re}(X[k])} \tag{3.17}$$

được gọi là *phổ pha* của tín hiệu $x(t)$.

Ví dụ 3.1. Xem xét một tín hiệu $x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 1$. Đây là một tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ $T = 24$ (s), tần số góc cơ sở $\omega_0 = \pi/12$ (rad/s). Chúng ta có được biểu diễn chuỗi Fourier của tín hiệu bằng cách khai triển như sau:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{3}t}e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{3}t}e^{-j\frac{\pi}{4}}) - j(e^{j\frac{\pi}{4}t} - e^{-j\frac{\pi}{4}t}) - e^{j0t} && (3.18)\\
&= \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{3}t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{3}t} - je^{j\frac{\pi}{4}t} + je^{-j\frac{\pi}{4}t} - e^{j0t} && (3.19)\\
&= \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j4\omega_0 t} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j4\omega_0 t} - je^{j3\omega_0 t} + je^{-j3\omega_0 t} - e^{j0\omega_0 t} && (3.20)
\end{aligned}$$

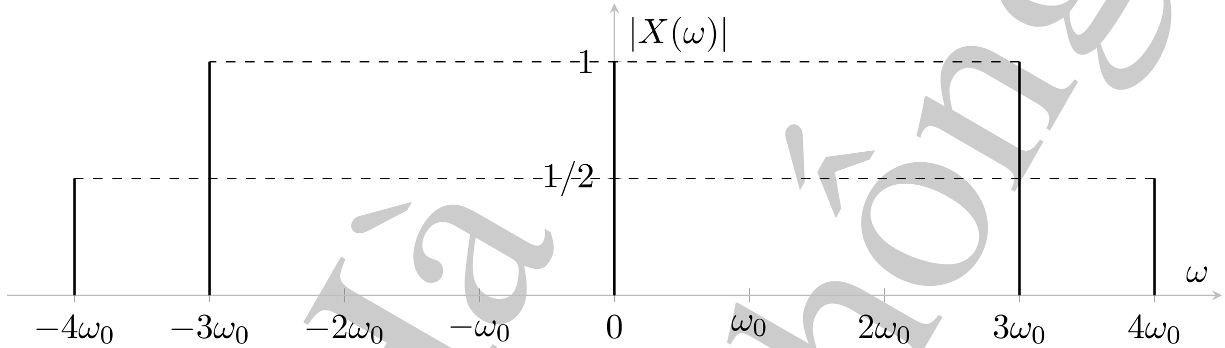
Phổ Fourier của tín hiệu $x(t)$:

$$X(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} & (\omega = 4\omega_0) \\ \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} & (\omega = -4\omega_0) \\ -j & (\omega = 3\omega_0) \\ j & (\omega = -3\omega_0) \\ -1 & (\omega = 0) \end{cases} \tag{3.21}$$

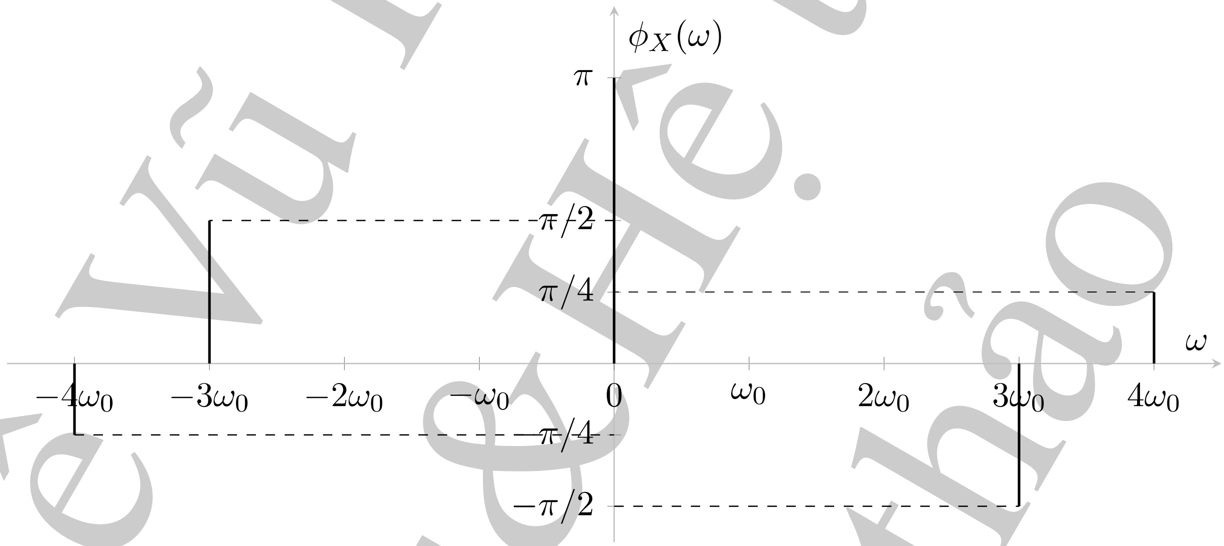
hay:

$$\begin{aligned}
X(\omega) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega - 4\omega_0) + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega + 4\omega_0)& \\
- j\delta(\omega - 3\omega_0) + j\delta(\omega + 3\omega_0) - \delta(\omega)& \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

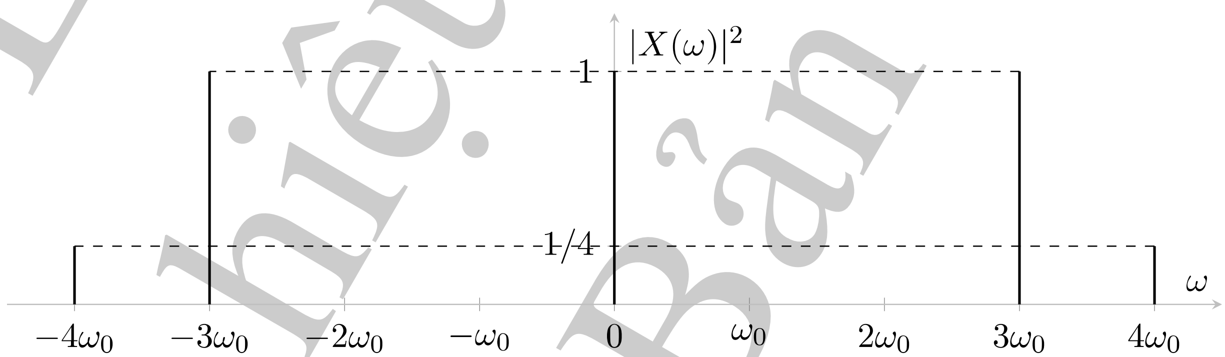
Phổ biên độ, phổ pha và phổ công suất của $x(t)$ được vẽ trong Hình 3.1.



(a) Phổ biên độ



(b) Phổ pha



(c) Phổ công suất

Hình 3.1: Các phổ của tín hiệu $x(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) - 1$, tần số góc cơ sở $\omega_0 = \pi/12$ (rad/s).

3.1.2 Biến đổi Fourier của tín hiệu liên tục không tuần hoàn

Để có được biểu diễn Fourier của tín hiệu liên tục không tuần hoàn, trước tiên chúng ta coi một tín hiệu $x(t)$ không tuần hoàn là tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ $T \to \infty$, nghĩa là tần số góc cơ sở $\omega_0 \to 0$. Khi đó $x(t)$ có thể biểu diễn bởi một chuỗi Fourier như đối với tín hiệu tuần hoàn:

$$x(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{3.23}$$

với các hệ số của chuỗi được tính theo công thức:

$$c_k = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \tag{3.24}$$

Lưu ý rằng, trong công thức (3.24) trên khoảng lấy tích phân được thay đổi từ $[0, T]$ thành $[-T/2, +T/2]$, để đảm bảo bao phủ toàn bộ miền thời gian khi $T \to \infty$.

Vì $\omega_0 \to 0$, tập giá trị $\{k\omega_0 | k \in \mathbb{Z}\}$ chính là toàn bộ miền tần số góc liên tục và dãy $\{c_k\}$ trở thành một hàm của biến tần số góc liên tục ω, gọi hàm này là $c(\omega)$. Thêm nữa, ω_0 trong trường hợp này tương đương với vi phân của biến tần số góc ω, tức là $d\omega$, nên chúng ta biến được chuỗi Fourier trong công thức (3.23) thành tích phân:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c(\omega)}{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega \tag{3.25}$$

Tương tự, công thức (3.24) trở thành:

$$c(\omega) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{3.26}$$

Đặt $X(\omega) = 2\pi c(\omega)/\omega_0$, chúng ta thu được cặp công thức biến đổi sau đây:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{3.27}$$

và:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{3.28}$$

Công thức (3.27) được gọi là *biến đổi Fourier cho tín hiệu liên tục* $x(t)$, viết tắt là CTFT (Continuous-Time Fourier Transform), ký hiệu $X(\omega) = \mathcal{F}(x(t))$; còn (3.28) được gọi là *biến đổi Fourier ngược*, ký hiệu $x(t) = \mathcal{F}^{-1}(X(\omega))$.

Các *điều kiện Dirichlet* cho tín hiệu không tuần hoàn mà $x(t)$ phải thỏa mãn để biến đổi Fourier của nó tồn tại (nghĩa là công thức biến đổi hội tụ $\forall\omega$) bao gồm:

1. $|x(t)|$ phải khả tích
2. Số điểm cực trị của $x(t)$ phải hữu hạn
3. Số điểm không liên tục của $x(t)$ phải hữu hạn.

Tín hiệu $x(t)$ thỏa mãn các điều kiện Dirichlet nói trên là một tín hiệu năng lượng. Năng lượng của tín hiệu này tính được từ biểu diễn Fourier của nó, cũng theo *định lý Parseval*:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \tag{3.29}$$

Khác với trường hợp của tín hiệu tuần hoàn, *phổ Fourier* $X(\omega)$ của tín hiệu không tuần hoàn $x(t)$ và các phổ thành phần, bao gồm *phổ biên độ* $|X(\omega)|$ và *phổ pha* $\phi_X(\omega)$, là các hàm theo tần số liên tục. $|X(\omega)|^2$ biểu diễn mật độ phổ năng lượng của tín hiệu năng lượng $x(t)$ và được gọi là *phổ năng lượng*.

3.1.3 Chuỗi Fourier của tín hiệu rời rạc tuần hoàn

Khác với trường hợp của tín hiệu liên tục tuần hoàn, *chuỗi Fourier của một tín hiệu rời rạc tuần hoàn* $x[n]$ có chu kỳ N, viết tắt là DTFS (Discrete-Time Fourier Series), là một chuỗi hữu hạn với không quá N phần tử:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \tag{3.30}$$

trong đó, tần số góc cơ sở $\Omega_0 = 2\pi/N$.

Công thức sau đây dùng để tính các hệ số $\{c_k\}$ của chuỗi Fourier (3.30)

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \tag{3.31}$$

Để chuỗi Fourier (3.30) tồn tại, tín hiệu tuần hoàn $x[n]$ phải là tín hiệu công suất. Công suất của tín hiệu này tính được từ các hệ số $\{c_k\}$ của chuỗi Fourier, theo *định lý Parseval*:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 \tag{3.32}$$

Đặt $X[k] = c_k$ $(k \in \mathbb{Z})$, $X[k]$ biểu diễn dãy các giá trị của một hàm theo tần số rời rạc: $X[k] = X(k\Omega_0)$, được gọi là *phổ Fourier* của tín hiệu $x[n]$, với các phổ thành phần cũng bao gồm *phổ biên độ* $|X[k]|$ và *phổ pha* $\phi_X[k]$.

Dãy $|X[k]|^2$ thể hiện phân bố công suất của tín hiệu $x[n]$ theo các tần số rời rạc $\{k\Omega_0 | k \in \mathbb{Z}\}$, được gọi là *phổ công suất* của tín hiệu $x[n]$.

Lưu ý rằng mọi giá trị tần số góc của tín hiệu dạng sin rời rạc (tính theo rad/mẫu) đều có thể quy về nằm trong một khoảng bất kỳ có bề rộng 2π vì $\forall\Omega : e^{j\Omega n} = e^{j(\Omega + 2k\pi)n}$ với $k \in \mathbb{Z}$ bất kỳ. Do vậy, người ta thường chỉ vẽ phổ của tín hiệu rời rạc trong một dải tần số góc có bề rộng 2π, thường chọn $[-\pi, +\pi]$ hay $[0, 2\pi]$. Nếu xét trên toàn bộ miền tần số góc $(-\infty, +\infty)$ thì các phổ của tín hiệu rời rạc đều sẽ tuần hoàn với chu kỳ 2π. Đối với tín hiệu tuần hoàn $x[n]$ đang xét, vì các phổ của tín hiệu này rời rạc theo các thành phần tần số $\{k\Omega_0\}$, số lượng các thành phần tần số $k\Omega_0$ trong mỗi chu kỳ 2π của phổ đúng bằng chu kỳ N của tín hiệu.

3.1.4 Biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn

Để có được biểu diễn Fourier của tín hiệu rời rạc không tuần hoàn $x[n]$, chúng ta cũng xuất phát từ công thức chuỗi Fourier (3.30) của tín hiệu rời rạc tuần hoàn với giả thiết $N \to \infty$ hay $\Omega_0 \to 0$:

$$x[n] = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \tag{3.33}$$

và:

$$c_k = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \tag{3.34}$$

Vì $\Omega_0 \to 0$, tập giá trị $\{k\Omega_0 | k \in \mathbb{Z}\}$ trở thành một miền tần số góc liên tục và dãy $\{c_k\}$ trở thành một hàm của biến tần số góc liên tục Ω, gọi hàm này là $c(\Omega)$, với Ω có thể quy về bất cứ một khoảng giá trị nào có bề rộng bằng 2π (rad/mẫu), ví dụ $[-\pi, +\pi]$. Thêm nữa, Ω_0 trong trường hợp này tương đương với vi phân của biến tần số góc Ω, tức là $d\Omega$, nên chúng ta biến được chuỗi Fourier trong công thức (3.33) thành tích phân:

$$x[n] = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{c(\Omega)}{\Omega_0} e^{j\Omega n} d\Omega \tag{3.35}$$

Tương tự, công thức (3.34) trở thành:

$$c(\Omega) = \frac{\Omega_0}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \tag{3.36}$$

Đặt $X(\Omega) = 2\pi c(\Omega)/\Omega_0$, chúng ta thu được cặp công thức biến đổi sau đây:

$$X(\Omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \tag{3.37}$$

và:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(\Omega) e^{j\omega n} d\Omega \tag{3.38}$$

Công thức (3.37) được gọi là *biến đổi Fourier cho tín hiệu rời rạc* $x[n]$, viết tắt là DTFT (Discrete-Time Fourier Transform), ký hiệu $X(\Omega) = \mathcal{F}(x[n])$; còn (3.38) được gọi là *biến đổi Fourier ngược*, ký hiệu $x[n] = \mathcal{F}^{-1}(X(\Omega))$.

Để biến đổi Fourier của tín hiệu $x[n]$ tồn tại (nghĩa là công thức biến đổi hội tụ $\forall\Omega$), $x[n]$ phải là tín hiệu năng lượng. Năng lượng của tín hiệu này tính được từ biểu diễn Fourier $X(\Omega)$ của $x[n]$, cũng theo *định lý Parseval*:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \tag{3.39}$$

Các phổ của tín hiệu năng lượng $x[n]$, bao gồm *phổ Fourier* $X(\Omega)$, *phổ biên độ* $|X(\Omega)|$, *phổ pha* $\phi_X(\Omega)$ và *phổ năng lượng* $|X(\Omega)|^2$ đều là các hàm theo tần số liên tục, và đều tuần hoàn với chu kỳ 2π (rad/mẫu).

3.2 Các tính chất của các biểu diễn Fourier

Trong các công thức mô tả các tính chất của các biểu diễn Fourier được trình bày trong phần này:

– Hai chuỗi $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]e^{jk\omega_0 t}$ và $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y[k]e^{jk\omega_0 t}$ lần lượt là CTFS của hai tín hiệu $x(t)$ và $y(t)$ trong trường hợp $x(t)$ và $y(t)$ là các tín hiệu tuần hoàn với tần số góc cơ sở ω_0
– Hai hàm $X(\omega)$ và $Y(\omega)$ lần lượt là CTFT của $x(t)$ và $y(t)$ trong trường hợp $x(t)$ và $y(t)$ là các tín hiệu năng lượng
– Hai chuỗi $\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{jk\Omega_0 n}$ và $\sum_{k=0}^{N-1} Y[k]e^{jk\Omega_0 n}$ lần lượt là DTFS của hai tín hiệu $x[n]$ và $y[n]$ trong trường hợp $x[n]$ và $y[n]$ là các tín hiệu tuần hoàn với tần số góc cơ sở Ω_0
– Hai hàm $X(\Omega)$ và $Y(\Omega)$ lần lượt là DTFT của $x[n]$ và $y[n]$ trong trường hợp $x[n]$ và $y[n]$ là các tín hiệu năng lượng.

1. **Tính tuyến tính**

$$ax(t) + by(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (aX[k] + bY[k])e^{jk\omega_0 t} \tag{3.40}$$

$$\mathcal{F}(ax(t) + by(y)) = aX(\omega) + bY(\omega) \tag{3.41}$$

$$ax[n] + by[n] = \sum_{k=0}^{N-1} (aX[k] + bY[k])e^{jk\Omega_0 n} \tag{3.42}$$

$$\mathcal{F}(ax[n] + by[n]) = aX(\Omega) + bY(\Omega) \tag{3.43}$$

2. **Dịch thời gian**

$$x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]e^{-jk\omega_0 t_0}e^{jk\omega_0 t} \tag{3.44}$$

$$\mathcal{F}(x(t - t_0)) = X(\omega)e^{-j\omega t_0} \tag{3.45}$$

$$x[n - n_0] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{-jk\Omega_0 n_0}e^{jk\Omega_0 n} \tag{3.46}$$

$$\mathcal{F}(x[n - n_0]) = X(\Omega)e^{-j\Omega n_0} \tag{3.47}$$

3. **Dịch tần số**

$$\mathcal{F}(x(t)e^{j\gamma t}) = X(\omega - \gamma) \tag{3.48}$$

$$\mathcal{F}(x[n]e^{j\Gamma n}) = X(\Omega - \Gamma) \tag{3.49}$$

4. **Co dãn tín hiệu**

$$\mathcal{F}(x(at)) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{3.50}$$

5. **Đạo hàm theo thời gian**

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} jk\omega_0 c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{3.51}$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) = j\omega X(\omega) \tag{3.52}$$

6. **Tích phân theo thời gian**

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{c_k}{jk\omega_0} e^{jk\omega_0 t} \tag{3.53}$$

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right) = \frac{X(\omega)}{j\omega} \tag{3.54}$$

7. **Đạo hàm theo tần số**

$$\mathcal{F}(-jtx(t)) = \frac{d}{d\omega}X(\omega) \tag{3.55}$$

$$\mathcal{F}(-jnx[n]) = \frac{d}{d\Omega}X(\Omega) \tag{3.56}$$

8. **Tích chập của tín hiệu**

$$\mathcal{F}(x(t) * y(t)) = X(\omega)Y(\omega) \tag{3.57}$$

$$\mathcal{F}(x[n] * y[n]) = X(\Omega)Y(\Omega) \tag{3.58}$$

9. **Điều chế tín hiệu**

$$\mathcal{F}(x(t)y(t)) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * Y(\omega) \tag{3.59}$$

$$\mathcal{F}(x[n]y[n]) = \frac{1}{2\pi}X(\Omega) \circledast_{2\pi} Y(\Omega) \tag{3.60}$$

trong đó $\circledast_{2\pi}$ là ký hiệu phép *nhân chập vòng* hai hàm tuần hoàn có cùng chu kỳ 2π:

$$X(\Omega) \circledast_{2\pi} Y(\Omega) = \int_{0}^{2\pi} X(\Theta)Y(\Omega - \Theta)d\Theta \tag{3.61}$$

10. **Tính đối xứng**

Với các tín hiệu có giá trị thực, phổ Fourier của chúng sẽ là hàm lẻ liên hợp phức và phổ biên độ sẽ là hàm chẵn:

$$X[k] = -X^*[-k],\ |X[k]| = |X[-k]| \tag{3.62}$$

$$X(\omega) = -X^*(-\omega),\ |X(\omega)| = |X(-\omega)| \tag{3.63}$$

$$X(\Omega) = -X^*(-\Omega),\ |X(\Omega)| = |X(-\Omega)| \tag{3.64}$$

3.3 Đáp ứng tần số của hệ thống tuyến tính bất biến

3.3.1 Đáp ứng tần số của hệ thống tuyến tính bất biến liên tục

Xét một hệ thống tuyến tính bất biền liên tục có đáp ứng xung $h(t)$. Chúng ta sẽ xem xét đáp ứng của hệ thống với các tín hiệu vào trong các trường hợp sau đây:

1. **Tín hiệu vào dạng sin**

   Xét trường hợp tín hiệu vào $x(t)$ chỉ có một thành phần tần số góc ω duy nhất: $x(t) = Ae^{j(\omega t + \phi)}$, với A là biên độ ($A \in \mathbb{R}$ và $A > 0$) và ϕ là pha của tín hiệu dạng sin phức. Đáp ứng $y(t)$ của hệ thống khi đó được tính như sau:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)Ae^{j[\omega(t-\tau)+\phi]}d\tau \\ &= Ae^{j(\omega t+\phi)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \end{aligned} \tag{3.65}$$

   Nếu đáp ứng xung $h(t)$ là tín hiệu năng lượng, (3.65) trở thành:

$$y(t) = Ae^{j(\omega t+\phi)}H(\omega) \tag{3.66}$$

   trong đó $H(\omega)$ là biến đổi Fourier của $h(t)$: $H(\omega) = \mathcal{F}(h(t))$, còn được gọi là *đáp ứng tần số* của hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung $h(t)$. Điều kiện $h(t)$ là tín hiệu năng lượng tương đương với việc hệ thống này phải ổn định.

   Thay $H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi_H(\omega)}$ vào (3.66):

$$\begin{aligned} y(t) &= A|H(\omega)|e^{j(\omega t+\phi)}e^{j\phi_H(\omega)} \\ &= A|H(\omega)|e^{j[\omega t+\phi+\phi_H(\omega)]} \end{aligned} \tag{3.67}$$

   Chúng ta có được các nhận xét sau đây từ công thức (3.67):

– Tín hiệu ra $y(t)$ cũng là một tín hiệu dạng sin phức, có tần số góc đúng bằng tần số góc của tín hiệu vào $x(t)$; điều này có nghĩa là hệ thống tuyến tính bất biến không làm thay đổi tần số của tín hiệu vào
– Biên độ của tín hiệu ra bằng biên độ của tín hiệu vào nhân với $|H(\omega)|$; $|H(\omega)|$ được gọi là *đáp ứng biên độ* của hệ thống
– Tín hiệu ra bị dịch pha một khoảng bằng $\phi_H(\omega)$ so với tín hiệu vào; $\phi_H(\omega)$ được gọi là *đáp ứng pha* của hệ thống.

2. **Tín hiệu vào tuần hoàn**

Nếu $x(t)$ là một tín hiệu tuần hoàn và biểu diễn được bởi chuỗi Fourier (3.5), đáp ứng của một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng tần số $H(\omega)$ với tín hiệu vào $x(t)$ có dạng như sau, theo kết quả ở phần trên:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[k]H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \tag{3.68}$$

Tín hiệu ra $y(t)$ trên đây cũng được biểu diễn bởi một chuỗi Fourier với các thành phần tần số $\{k\omega_0 | k \in \mathbb{Z}\}$ và các hệ số tương ứng $\{X[k]H(k\omega_0)\}$. Điều đó có nghĩa là, $y(t)$ cũng là một tín hiệu tuần hoàn có tần số góc cơ sở là một bội số của tần số góc cơ sở ω_0 của tín hiệu vào $x(t)$. Mối quan hệ giữa phổ của tín hiệu ra với phổ của tín hiệu vào được thể hiện qua công thức:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : Y(k\omega_0) = X(k\omega_0)H(k\omega_0) \tag{3.69}$$

3. **Tín hiệu vào không tuần hoàn**

Vì $y(t) = x(t) * h(t)$, nếu tồn tại phổ Fourier của tín hiệu vào, $X(\omega) = \mathcal{F}(x(t))$, và đáp ứng tần số $H(\omega)$ của hệ thống, theo tính chất biến đổi Fourier của tích chập chúng ta có được công thức tính phổ Fourier của tín hiệu ra:

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{3.70}$$

Mối quan hệ giữa phổ Fourier của tín hiệu ra và của tín hiệu vào trong các trường hợp khác nhau của tín hiệu vào hoàn toàn tương đồng với nhau và thể hiện tính chất *chọn lọc tần số* của hệ thống tuyến tính bất biến. Mối quan hệ này còn có thể biểu diễn qua các công thức của các phổ thành phần và các thành phần tương ứng của đáp ứng tần số:

– Phổ biên độ và đáp ứng biên độ:

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)| \tag{3.71}$$

– Phổ pha và đáp ứng pha:

$$\phi_Y(\omega) = \phi_X(\omega) + \phi_H(\omega) \tag{3.72}$$

– Phổ năng lượng/công suất:

$$|Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2|H(\omega)|^2 \tag{3.73}$$

Biểu diễn hệ thống bởi đáp ứng tần số còn mang đến cho chúng ta thêm một phương pháp để tính toán đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y(\omega)) = \mathcal{F}^{-1}(X(\omega)H(\omega)) \tag{3.74}$$

Với hệ thống tuyến tính bất biến liên tục được biểu diễn bởi phương trình vi phân:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l \frac{d^l y(t)}{dt^l} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{3.75}$$

chúng ta sẽ áp dụng biến đổi Fourier cho cả hai vế của phương trình và thu được phương trình sau đây biểu diễn mối quan hệ giữa các phổ Fourier của tín hiệu ra và của tín hiệu vào:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l (j\omega)^l Y(\omega) = \sum_{m=0}^{M} b_m (j\omega)^m X(\omega) \tag{3.76}$$

Nếu hệ thống ổn định, đáp ứng tần số $H(\omega)$ của hệ thống tồn tại và có dạng phân thức mà cả tử và mẫu đều là các đa thức của $j\omega$, các hệ số của các đa thức này chính là các hệ số của các đạo hàm trong phương trình vi phân biểu diễn hệ thống:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m (j\omega)^m}{\sum_{l=0}^{N} a_l (j\omega)^l} \tag{3.77}$$

3.3.2 Đáp ứng tần số của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc

Xét một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc có đáp ứng xung $h[n]$. Nếu hệ thống này ổn định, cũng tồn tại *đáp ứng tần số* $H(\Omega)$ của hệ thống, chính là biến đổi Fourier của $h[n]$: $H(\Omega) = \mathcal{F}(h[n]) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-jk\Omega n}$. Cách sử dụng đáp ứng tần số này cũng tương tự như của hệ thống tuyến tính bất biến liên tục đã trình bày ở trên.

1. **Tín hiệu vào dạng sin**

   Đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x[n] = Ae^{j(\Omega n + \phi)}$:

$$\begin{aligned} y[n] &= Ae^{j(\Omega n+\phi)}H(\Omega) && (3.78) \\ &= A|H(\Omega)|e^{j(\Omega n+\phi+\phi_H(\Omega))} && (3.79) \end{aligned}$$

2. **Tín hiệu vào tuần hoàn**

   Nếu $x[n]$ là một tín hiệu tuần hoàn và biểu diễn được bởi chuỗi Fourier (3.30), đáp ứng của một hệ thống với tín hiệu vào $x[n]$ có dạng như sau, theo kết quả ở phần trên:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]H(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} \tag{3.80}$$

3. **Tín hiệu vào không tuần hoàn**

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \tag{3.81}$$

Các công thức của các phổ thành phần và các thành phần tương ứng của đáp ứng tần số:

– Phổ biên độ và đáp ứng biên độ:

$$|Y(\Omega)| = |X(\Omega)||H(\Omega)| \tag{3.82}$$

– Phổ pha và đáp ứng pha:

$$\phi_Y(\Omega) = \phi_X(\Omega) + \phi_H(\Omega) \tag{3.83}$$

– Phổ năng lượng/công suất:

$$|Y(\Omega)|^2 = |X(\Omega)|^2|H(\Omega)|^2 \tag{3.84}$$

Sử dụng đáp ứng tần số và biến đổi Fourier để tính toán đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào:

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1}(Y(\Omega)) = \mathcal{F}^{-1}(X(\Omega)H(\Omega)) \tag{3.85}$$

Với hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc được biểu diễn bởi phương trình sai phân:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l y[n-l] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \tag{3.86}$$

chúng ta sẽ áp dụng biến đổi Fourier cho cả hai vế của phương trình và thu được phương trình sau đây biểu diễn mối quan hệ giữa các phổ Fourier của tín hiệu ra và của tín hiệu vào:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l e^{-j\Omega l} Y(\Omega) = \sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\Omega m} X(\Omega) \tag{3.87}$$

Nếu hệ thống ổn định, đáp ứng tần số $H(\Omega)$ của hệ thống tồn tại và có dạng phân thức mà cả tử và mẫu đều là các đa thức của $e^{-j\Omega}$, các hệ số của các đa thức này chính là các hệ số của phương trình sai phân biểu diễn hệ thống:

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m e^{-j\Omega m}}{\sum_{l=0}^{N} a_l e^{-j\Omega l}} \tag{3.88}$$

3.4 Lấy mẫu tín hiệu có phổ hữu hạn

Xét một tín hiệu liên tục $x(t)$ có phổ hữu hạn, nghĩa là tồn tại một giá trị tần số góc ω_a sao cho ω_a là một thành phần tần số của $x(t)$ và $\forall|\omega| > |\omega_a| : X(\omega) = 0$, hay ω_a là thành phần tần số góc lớn nhất của $x(t)$. Lấy mẫu tín hiệu này theo một chu kỳ lấy mẫu T_s để tạo ra tín hiệu rời rạc $x[n]$. Gọi ω_s là *tốc độ góc lấy mẫu*: $\omega_s = 2\pi/T_s$.

Định lý 3.1. *Nếu tốc độ góc lấy mẫu ω_s thỏa mãn điều kiện $\omega_s \geq 2\omega_a$, việc khôi phục chính xác tín hiệu liên tục $x(t)$ từ tín hiệu lấy mẫu $x[n]$ được đảm bảo hoàn toàn.*

Định lý 3.1 có tên gọi là *Định lý lấy mẫu Shannon-Nyquist*. Giá trị ngưỡng $2\omega_a$ theo định lý lấy mẫu được gọi là *tốc độ Nyquist*. Nếu tín hiệu $x[n]$ được lấy mẫu từ $x(t)$ theo đúng tốc độ Nyquist, công thức sau đây được dùng để khôi phục $x(t)$ từ $x[n]$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin(\omega_a t - n\pi)}{\omega_a t - n\pi} \tag{3.89}$$

Khi quá trình lấy mẫu thỏa mãn điều kiện của định lý lấy mẫu, các thành phần tần số của tín hiệu rời rạc sẽ xuất hiện trong dải tần số góc $[-\pi, +\pi]$ theo đúng thứ tự tần số thấp đến cao như các thành phần tương ứng trong phổ của tín hiệu liên tục.

Nếu $\omega_s < 2\omega_a$, hiện tượng *gập phổ* sẽ xảy ra đối với dải tần số góc $[\omega_s/2, \omega_a]$ của tín hiệu liên tục sau khi lấy mẫu: mọi thành phần tần số ω của $x(t)$ nằm trong dải này ($\omega_s/2 < |\omega| \leq \omega_a$) sẽ xuất hiện ở vị trí của một thành phần tần số thấp hơn trong phổ của tín hiệu rời rạc. Điều đó có thể gây ra hiện tượng *chồng phổ* (aliasing), nghĩa là hai thành phần tần số khác nhau trong $x(t)$ xuất hiện tại cùng vị trí trong phổ của $x[n]$, nên không thể phân tách chúng khi khôi phục tín hiệu liên tục từ tín hiệu lấy mẫu. Đó là lý do tại sao việc khôi phục chính xác không được đảm bảo nếu tốc độ lấy mẫu nhỏ hơn tốc độ Nyquist. Giá trị $\omega_s/2$ là giá trị tần số góc xác định ngưỡng gập phổ, được gọi là *tần số góc Nyquist*.

Ví dụ 3.2. Tín hiệu $x(t)$ trong Ví dụ 3.1 có thành phần tần số góc lớn nhất $\omega_a = \pi/3$ (rad/s). Tốc độ Nyquist của tín hiệu này do vậy bằng $2\pi/3$ (rad/s). Lấy mẫu tín hiệu này với tốc độ góc lấy mẫu đúng bằng tốc độ Nyquist: $\omega_s = 2\pi/3$ (rad/s), tín hiệu lấy mẫu có công thức như sau:

$$x[n] = x(nT_s) = x(n2\pi/\omega_s) = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right) - 1 \quad (3.90)$$

Tín hiệu rời rạc $x[n]$ có tần số góc cơ sở $\Omega_0 = \pi/4$ (rad/mẫu). Các phổ biên độ, phổ pha và phổ công suất của $x[n]$ được vẽ trong Hình 3.2. Do các phổ của tín hiệu rời rạc luôn tuần hoàn với chu kỳ 2π, chúng ta chỉ cần vẽ phổ trong phạm vi một chu kỳ, thường được chọn là dải tần số góc $[-\pi, +\pi]$, tức là $[-4\Omega_0, +4\Omega_0]$ trong trường hợp này.

Có thể thấy rằng, các phổ của tín hiệu lấy mẫu $x[n]$ trong dải tần số góc $[-\pi, +\pi]$ giống hệt các phổ tương ứng của tín hiệu liên tục $x(t)$. Chúng ta sẽ khôi phục được chính xác phổ Fourier của tín hiệu $x(t)$ từ phổ Fourier của tín hiệu lấy mẫu $x[n]$ nếu tính được ω_0 từ Ω_0. Khi quá trình lấy mẫu thỏa mãn điều kiện của định lý lấy mẫu như trong ví dụ này, điều đó thực hiện được bằng cách sử dụng công thức liên hệ giữa một thành phần tần số của tín hiệu liên tục với thành phần tần số tương ứng của tín hiệu lấy mẫu khi biết chu kỳ lấy mẫu, nghĩa là:

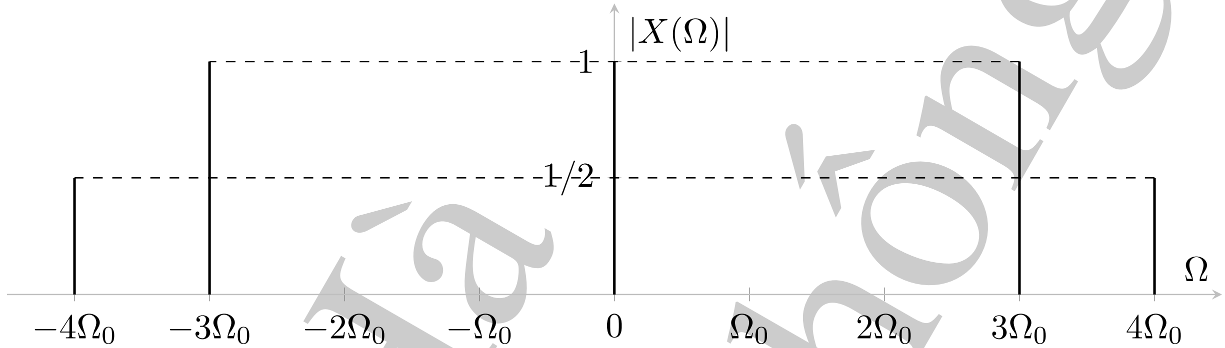
$$\omega_0 = \frac{\Omega_0}{T_s} = \frac{\omega_s}{2\pi}\Omega_0 \quad (3.91)$$

Ví dụ 3.3. Chúng ta vẫn sẽ lấy mẫu tín hiệu liên tục $x(t)$ như trong Ví dụ 3.2 ở trên, nhưng với tốc độ góc lấy mẫu $\omega_s = 7\pi/12$ (rad/s). Tốc độ góc lấy mẫu này nhỏ hơn tốc độ Nyquist, nghĩa là quá trình lấy mẫu lần này không thỏa mãn điều kiện của định lý lấy mẫu. Hiện tượng gập phổ sẽ xảy ra sau khi lấy mẫu với các thành phần tần số của $x(t)$ có tần số góc nằm ngoài dải $[-\omega_s/2, +\omega_s/2]$ xác định bởi tần số Nyquist $\omega_s/2 = 7\pi/24$ (rad/s).

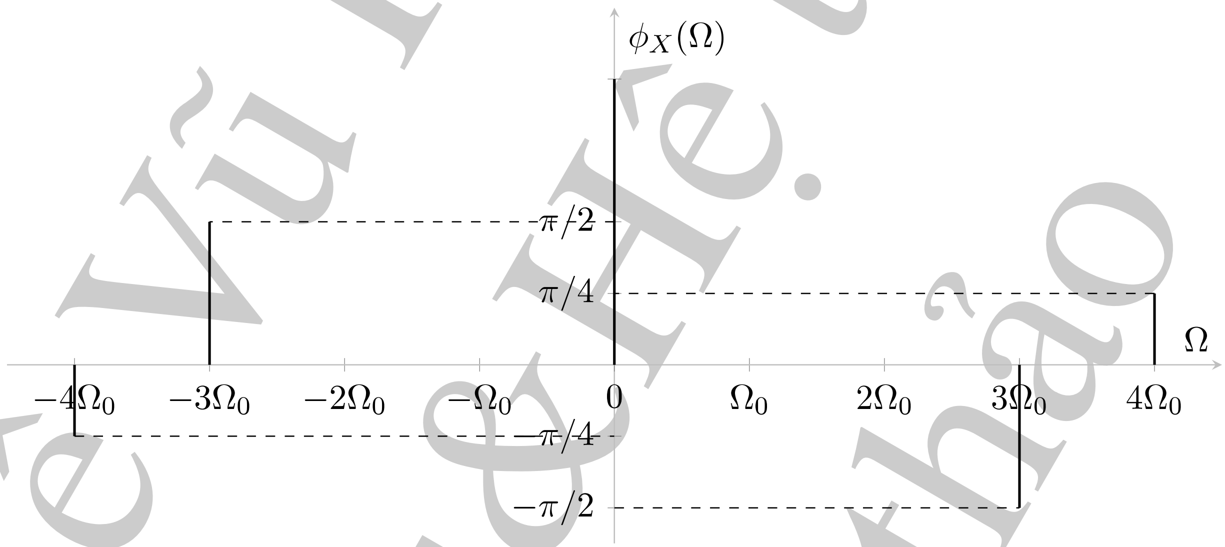
Tín hiệu lấy mẫu thu được có công thức như sau:

$$x[n] = \cos\left(\frac{8\pi}{7}n + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{6\pi}{7}n\right) - 1 \quad (3.92)$$

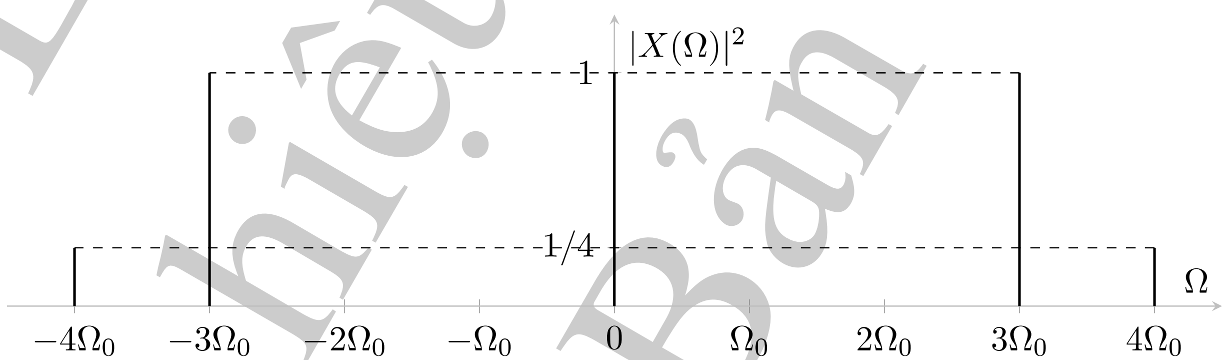
Tín hiệu rời rạc $x[n]$ có tần số góc cơ sở $\Omega_0 = 2\pi/7$ (rad/mẫu). Tương tự như trong Ví dụ 3.2, các thành phần tần số của $x[n]$ có các giá trị tần số góc lần lượt là $\pm 4\Omega_0$, $\pm 3\Omega_0$, và 0. Tuy nhiên trong trường hợp này các giá trị tần số góc $\pm 4\Omega_0 = \pm 8\pi/7$ (rad/mẫu) nằm ngoài dải $[-\pi, +\pi]$, nên phải quy chúng về các giá trị tần số góc tương



(a) Phổ biên độ



(b) Phổ pha



(c) Phổ công suất

Hình 3.2: Các phổ của tín hiệu $x[n] = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right) - 1$, tần số góc cơ sở $\Omega_0 = \pi/4$ (rad/mẫu).

đương trong dải $[-\pi, +\pi]$ trước khi vẽ phổ:

$$+\frac{8\pi}{7} \quad \Rightarrow \quad +\frac{8\pi}{7} - 2\pi = -\frac{6\pi}{7} \tag{3.93}$$

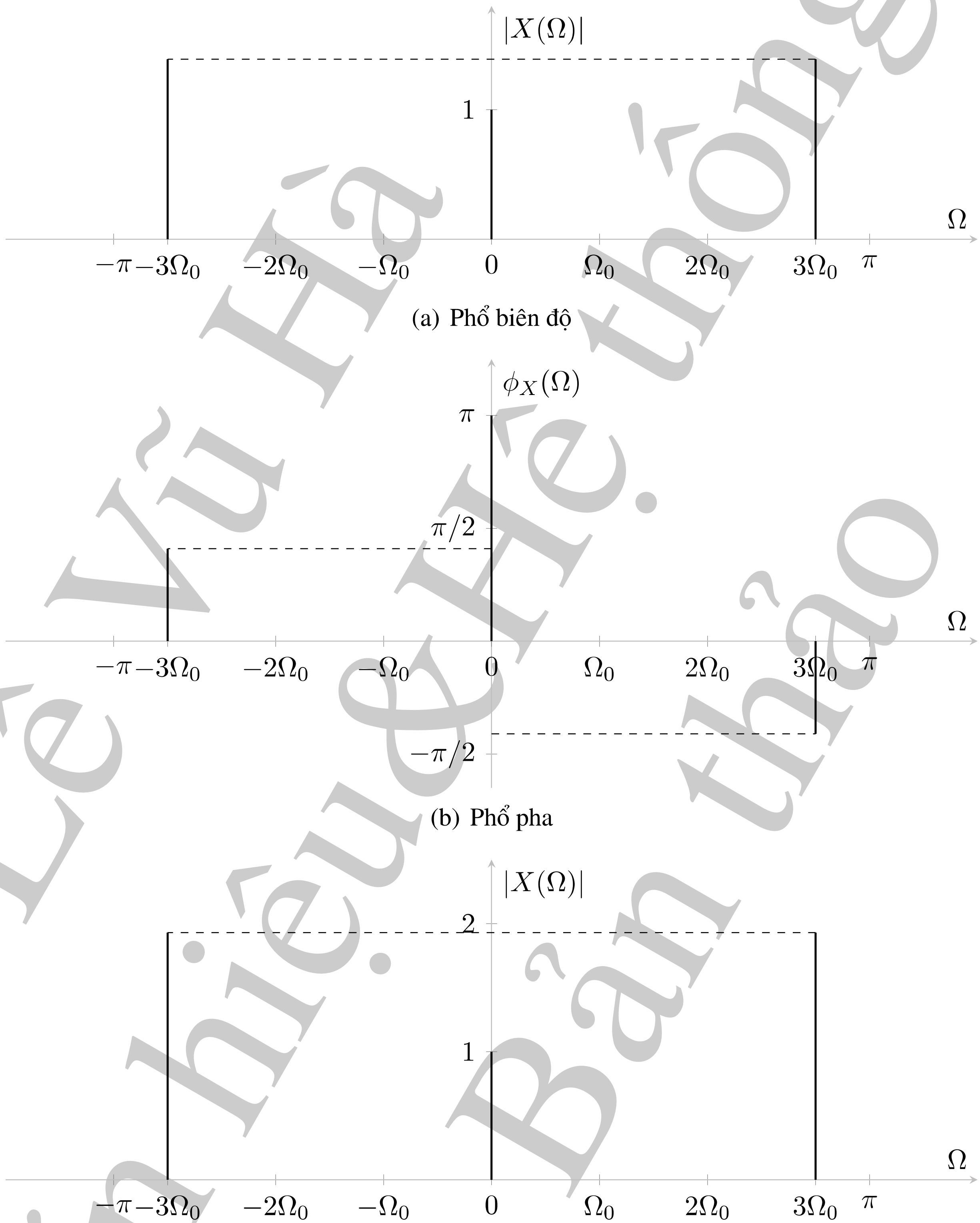
$$-\frac{8\pi}{7} \quad \Rightarrow \quad -\frac{8\pi}{7} + 2\pi = +\frac{6\pi}{7} \tag{3.94}$$

nghĩa là, sau khi gập phổ thành phần tần số góc $+4\Omega_0$ của $x[n]$ trở thành $-3\Omega_0$, và $-4\Omega_0$ trở thành $+3\Omega_0$, gây ra chồng phổ. Chuỗi Fourier của $x[n]$ trở thành:

$$x[n] = \left(-j + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)e^{j3\Omega_0 n} + \left(j + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\right)e^{-j3\Omega_0 n} - e^{j0\Omega_0 n} \tag{3.95}$$

Các phổ của $x[n]$ được vẽ trong Hình 3.3.

Trong trường hợp này, nếu không có thêm thông tin nào khác, chúng ta không thể khôi phục lại phổ của tín hiệu liên tục $x(t)$ từ phổ của tín hiệu lấy mẫu $x[n]$.



(a) Phổ biên độ

(b) Phổ pha

(c) Phổ công suất

Hình 3.3: Các phổ của tín hiệu $x[n] = \cos\left(\frac{8\pi}{7}n + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\frac{6\pi}{7}n\right) - 1$, tần số góc cơ sở $\Omega_0 = 2\pi/7$ (rad/mẫu).