TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Chương 4: Biến đổi Laplace và áp dụng cho phân tích hệ thống tuyến tính bất biến liên tục

Trần Thị Thúy Quỳnh

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY, HANOI
VNU UNIVERSITY OF ENGINEERING & TECHNOLOGY

FACULTY OF ELECTRONICS
& TELECOMMUNICATIONS

BIẾN ĐỔI LAPLACE

Đáp ứng của hệ LTI:

$$y(t) = H\{x(t)\} = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

Lối vào: $x(t) = e^{st}$

Hàm truyền:

Lối ra: $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau.$$

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}$$

$$y(t) = H\{e^{st}\} = H(s)e^{st}.$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

A. Định nghĩa

Với tín hiệu liên tục $x(t)$, biến đổi Laplace $X(s)$ (còn gọi là biến đổi hai phía - bilateral) được định nghĩa bởi:

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt,}$$

Với $s = \sigma + j\omega$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

Biến đổi Laplace một phía (unilateral) cho bởi:

$$X_I(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Với $0^- = \lim_{\varepsilon \to 0}(0 - \varepsilon)$

Biến đổi Laplace một phía và hai phía tương đương nhau nếu $x(t) = 0$ với $t < 0$.

BIẾN ĐỔI LAPLACE

Ký hiệu:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

$$\boxed{x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s).}$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

B. Vùng hội tụ

Khoảng giá trị của s đảm bảo cho biến đổi Laplace hội tụ được gọi là vùng hội tụ ROC (Region of Convergence).

Ví dụ:

Xác định biến đổi Laplace và vùng ROC của tín hiệu sau (với a là số thực):

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

Bài giải:

Biến đổi Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-st}\, dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

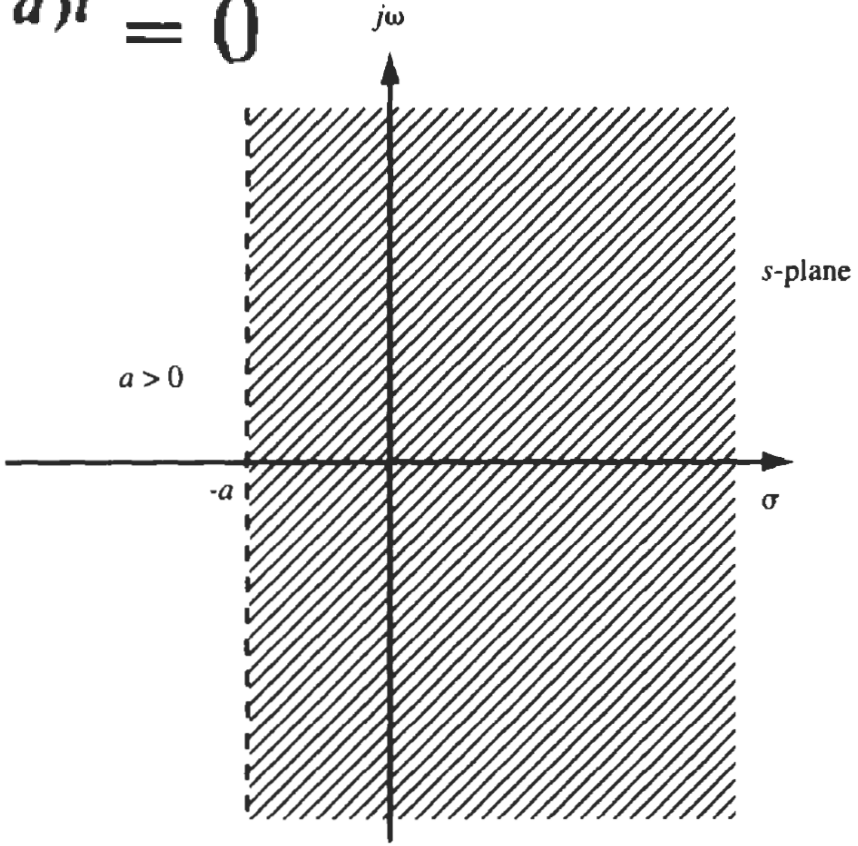
BIẾN ĐỔI LAPLACE

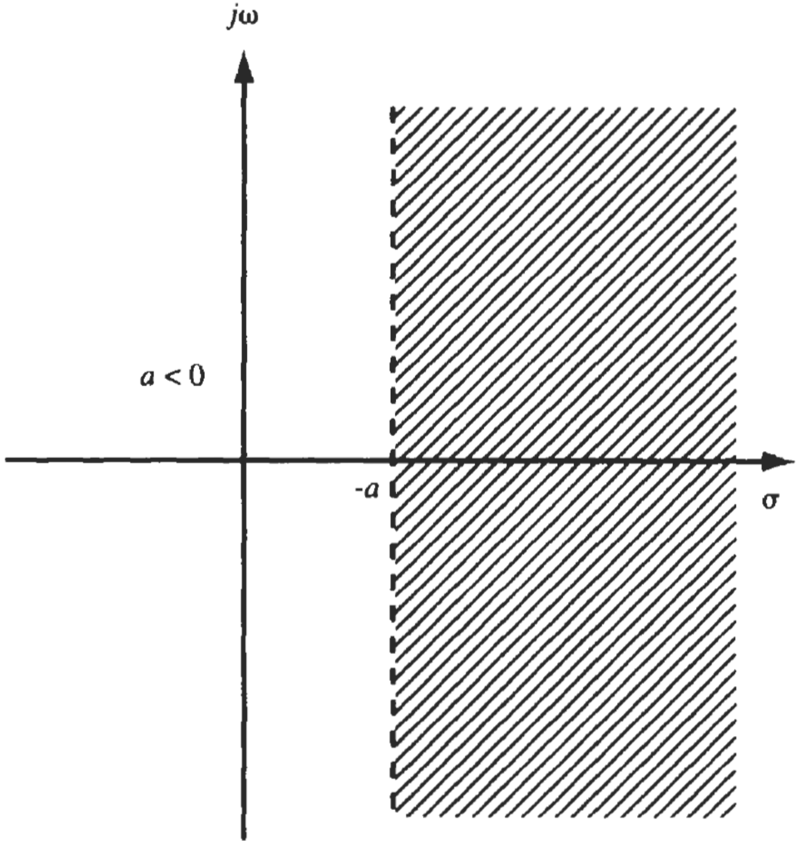
Vùng hội tụ:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-(s+a)t} = 0$$

$$\mathrm{Re}(s+a) > 0$$

$$\boxed{\mathrm{Re}(s) > -a}$$





BIẾN ĐỔI LAPLACE

C. Điểm cực và điểm không

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

Với a_k và b_k là các hằng số thực, m và n là các số nguyên dương.

Nghiệm của đa thức tử số sẽ cho các điểm không z_k, nghiệm của đa thức mẫu số cho các điểm cực p_k.

Các điểm cực luôn nằm ngoài vùng ROC do $X(s)$ không hội tụ tại các điểm cực. Các điểm không có thể nằm trong hoặc ngoài vùng ROC.

Ngoại trừ a_0/b_0, $X(s)$ luôn được xác định từ các điểm không và các điểm cực.

Ví dụ:

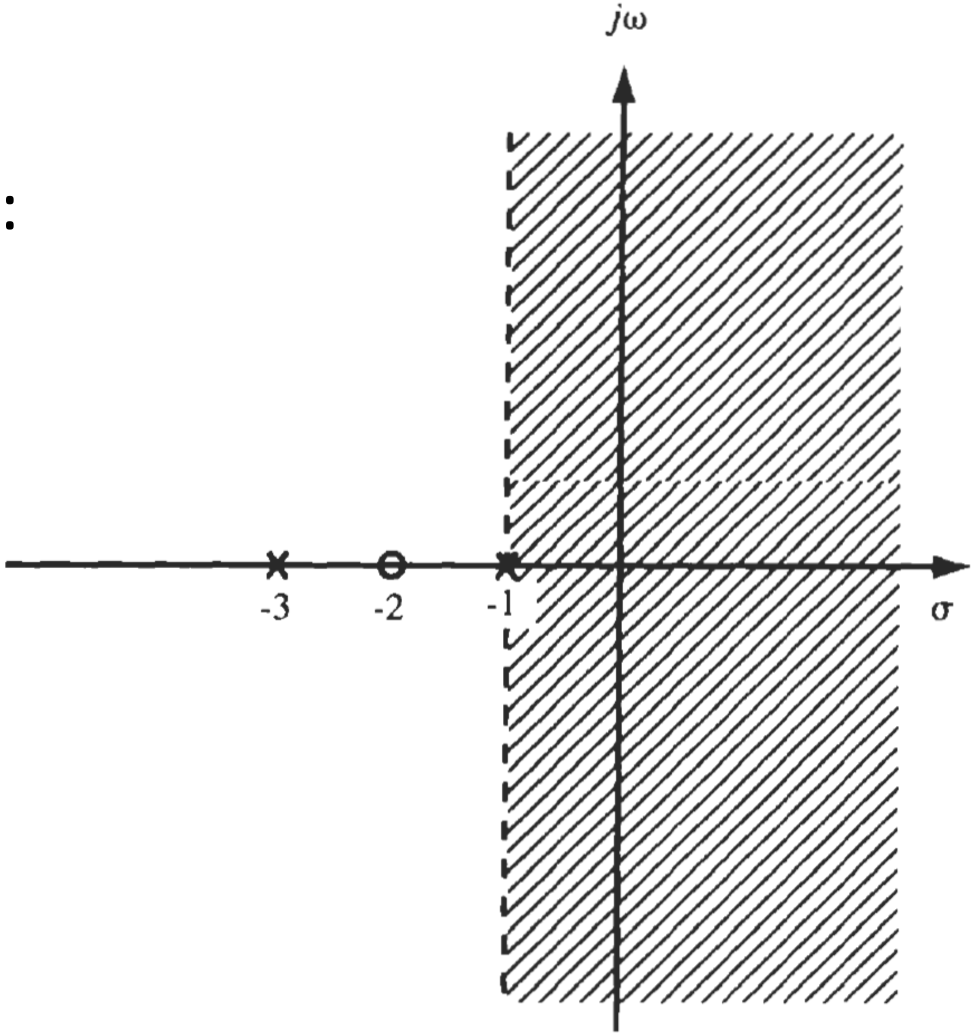
Xác định các điểm không và điểm cực của:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = 2\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$\mathrm{Re}(s) > -1$$

Điểm không: $s = -2$

Điểm cực: $s = -1$ và $s = -3$



BÀI TẬP 1:

Tìm biến đổi Laplace, vùng ROC, điểm không, điểm cực trên mặt phẳng s của tín hiệu nhân quả sau:

$$x(t) = e^{at}u(t),$$

với *a* là số thực.

BÀI GIẢI:

Biến đổi Laplace

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{at} u(t) e^{-st}\, dt \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}\, dt \\
&= \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_{0}^{\infty}.
\end{aligned}
$$

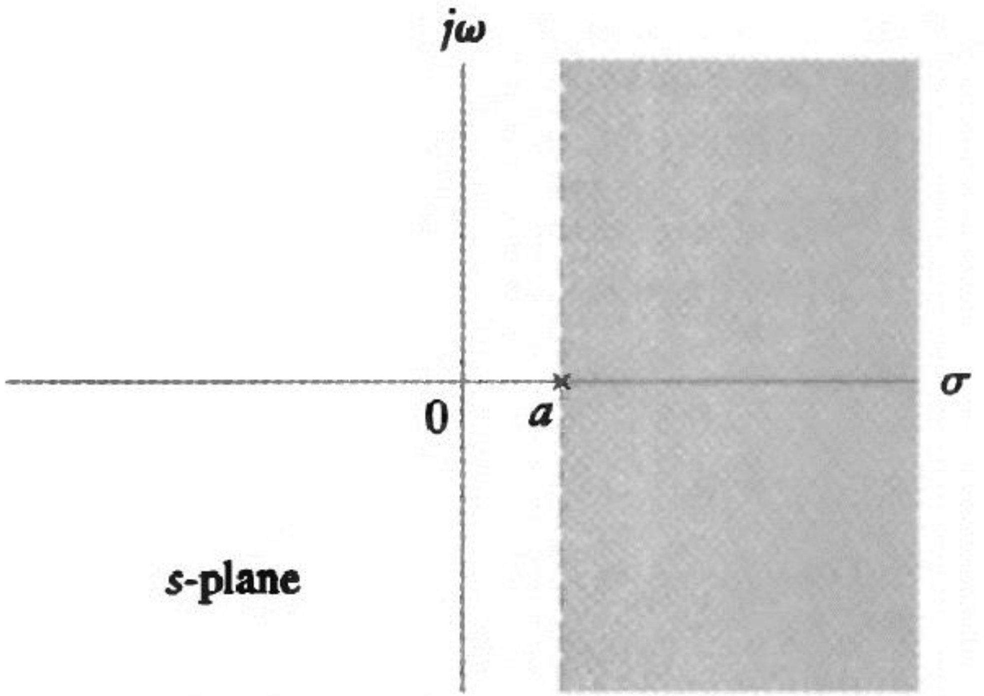
Vùng hội tụ ROC, điểm cực, điểm không

$$X(s) = \frac{-1}{\sigma + j\omega - a} e^{-(\sigma-a)t} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty}.$$

Nếu $(\sigma - a) > 0$ thì $e^{-(\sigma-a)t} \to 0$ khi $t \to \infty$.

$$X(s) = \frac{-1}{\sigma + j\omega - a}(0 - 1), \quad \sigma > a,$$

$$= \frac{1}{s-a}, \quad \mathrm{Re}(s) > a.$$



BÀI TẬP 2:

Tìm biến đổi Laplace, vùng ROC của tín hiệu phản nhân quả sau:

$$y(t) = -e^{at}u(-t).$$

với *a* là số thực.

BÀI GIẢI:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{at}u(-t)e^{-st}\,dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-a)t}\,dt \\
&= \frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{s-a}, \quad \mathrm{Re}(s) < a.
\end{aligned}
$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

D. Tính chất của vùng ROC

1. Vùng ROC không chứa các điểm cực.
2. Nếu $x(t)$ là tín hiệu thời gian hữu hạn $x(t) = 0$ ngoài khoảng $[t_1, t_2]$ thì ROC là toàn bộ mặt phẳng s trừ $s = 0$ và $s = \infty$.
3. Nếu $x(t)$ là tín hiệu phía phải $x(t) = 0$ ngoài khoảng $[t_1, \infty]$ thì ROC là $\mathrm{Re}(s) > \sigma_{max}$, σ_{max} là phần thực lớn nhất trong các điểm cực của $X(s)$.
4. Nếu $x(t)$ là tín hiệu phía trái $x(t) = 0$ ngoài khoảng $[-\infty, t_1]$ thì ROC là $\mathrm{Re}(s) < \sigma_{min}$, σ_{min} là phần thực nhỏ nhất trong các điểm cực của $X(s)$.
5. Nếu $x(t)$ là tín hiệu hai phía (thời gian vô hạn) thì ROC là $\sigma_1 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_2$, σ_1 và σ_2 là các phần thực của hai điểm cực của $X(s)$.

MỘT SỐ CẶP BIẾN ĐỔI LAPLACE THÔNG DỤNG

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	All s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) < 0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$t^k u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)$

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)$
$\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{-at}\cos \omega_0 t u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$
$e^{-at}\sin \omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE

Property	Signal	Transform	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linearity	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Time shifting	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	$R' = R$
Shifting in s	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R' = R + \mathrm{Re}(s_0)$
Time scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(s)$	$R' = aR$
Time reversal	$x(-t)$	$X(-s)$	$R' = -R$
Differentiation in t	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R' \supset R$
Differentiation in s	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	$R' = R$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$R' \supset R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$
Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$$

A. Công thức biến đổi ngược

Tính tích phân đổi với biến phức rất phức tạp.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

B. Sử dụng các cặp biến đổi Laplace thông dụng và tính chất của biến đổi Laplace

$$X(s) = X_1(s) + \cdots + X_n(s)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_1(t) + \cdots + x_n(t)$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

C. Khai triển phân số thành phần

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(s - z_1)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)\cdots(s - p_n)}$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

Khi $m < n$:

TH 1: Điểm cực đơn (phân biệt)

$$X(s) = \frac{c_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{c_n}{s-p_n} \qquad c_k = (s-p_k)X(s)\big|_{s=p_k}$$

TH 2: Điểm cực kép (hệ số lặp lại r)

$$X(s) = \frac{\lambda_1}{s-p_i} + \frac{\lambda_2}{(s-p_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_r}{(s-p_i)^r}$$

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left[(s-p_i)^r X(s)\right]\Big|_{s=p_i}$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

Khi $m \geq n$:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

$\frac{R(s)}{D(s)}$ được tính như trường hợp $m < n$.

$Q(s)$ được tính bởi:

$$\frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

BÀI TẬP 3:

Tìm biến đổi Laplace ngược của tín hiệu nhân quả có:

$$X(s) = \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)^2}$$

BÀI GIẢI: Tìm biến đổi Laplace ngược của: $X(s) = \dfrac{3s + 4}{(s+1)(s+2)^2}$

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{(s+2)^2}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{1}{s+1}$$

$$-e^{2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} -\frac{1}{s+2}$$

$$2te^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{2}{(s+2)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) + 2te^{-2t}u(t)}$$

BÀI TẬP 4:

Tìm biến đổi Laplace ngược của tín hiệu nhân quả có:

$$X(s) = \frac{2s^3 - 9s^2 + 4s + 10}{s^2 - 3s - 4}$$

BÀI GIẢI:

Tìm biến đổi Laplace ngược của:

$$X(s) = \frac{2s^3 - 9s^2 + 4s + 10}{s^2 - 3s - 4}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2s - 3 \\ \hline s^2 - 3s - 4 & 2s^3 - 9s^2 + 4s + 10 \\ & 2s^3 - 6s^2 - 8s \\ \hline & -3s^2 + 12s + 10 \\ & -3s^2 + 9s + 12 \\ \hline & 3s - 2 \end{array}$$

$$X(s) = 2s - 3 + \frac{3s - 2}{s^2 - 3s - 4}$$

$$X(s) = 2s - 3 + \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s - 4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 2\delta^{(1)}(t) - 3\delta(t) + e^{-t}u(t) + 2e^{4t}u(t)}$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

Nếu các điểm cực là cặp liên hiệp phức:

$$\frac{B_1 s + B_2}{(s - \alpha - j\omega_o)(s - \alpha + j\omega_o)} = \frac{B_1 s + B_2}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$$

$$\frac{B_1 s + B_2}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2} = \frac{C_1(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2} + \frac{C_2\omega_o}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}$$

$$\boxed{C_1 e^{\alpha t}\cos(\omega_o t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{C_1(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}.}$$

$$\boxed{C_2 e^{\alpha t}\sin(\omega_o t)u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{C_2\omega_o}{(s - \alpha)^2 + \omega_o^2}.}$$

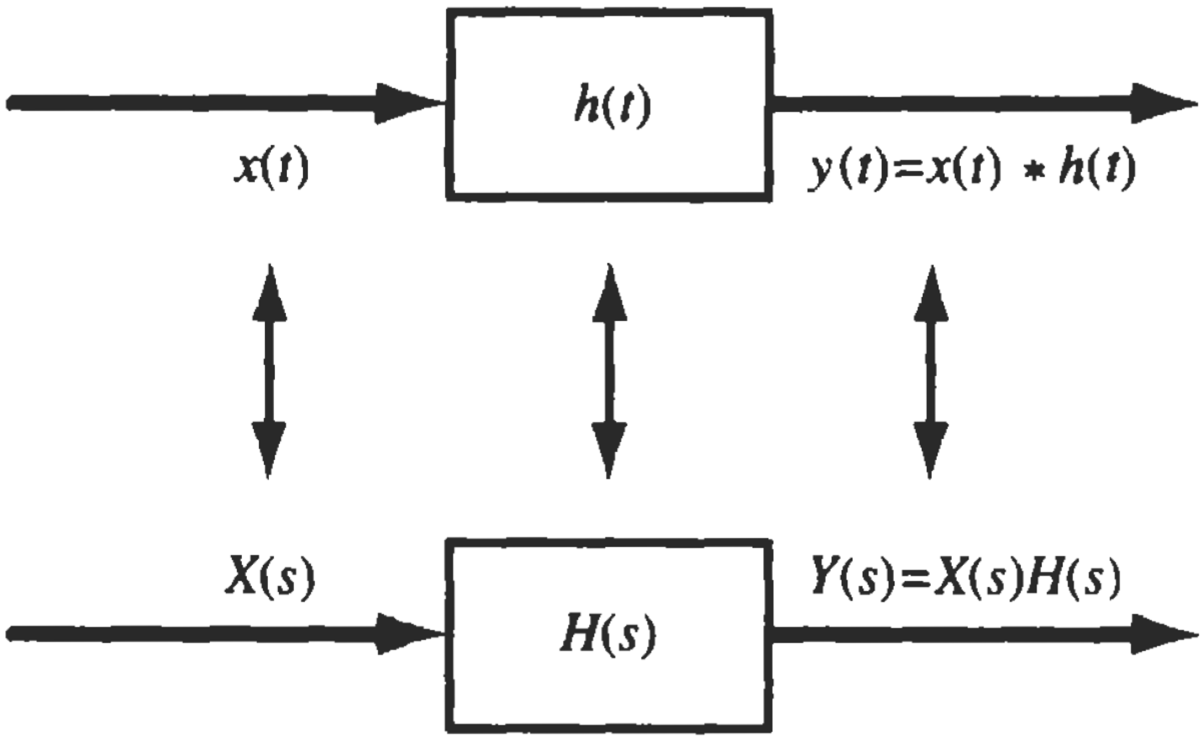
HÀM TRUYỀN CỦA HỆ THỐNG LTI

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế:

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



$H(s)$ được gọi là hàm truyền của hệ thống.

PHÂN LOẠI HỆ THỐNG

A. Tính nhân quả

Hệ thống LTI liên tục là nhân quả nếu: $h(t) = 0 \qquad t < 0$

➡ $h(t)$ là tín hiệu phía phải nên ROC của $H(s)$ có dạng:

$$\boxed{\mathrm{Re}(s) > \sigma_{\max}}$$

PHÂN LOẠI HỆ THỐNG

B. Tính ổn định

Hệ thống LTI liên tục là ổn định nếu: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt$$

Đặt $s = j\omega$

$$|H(j\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)e^{-j\omega t}|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

Hay $H(s)$ hội tụ với $s = j\omega$.

➡ $\boxed{\text{ROC của } H(s) \text{ chứa } s = j\omega.}$

HỆ THỐNG LTI BIỂU DIỄN BẰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

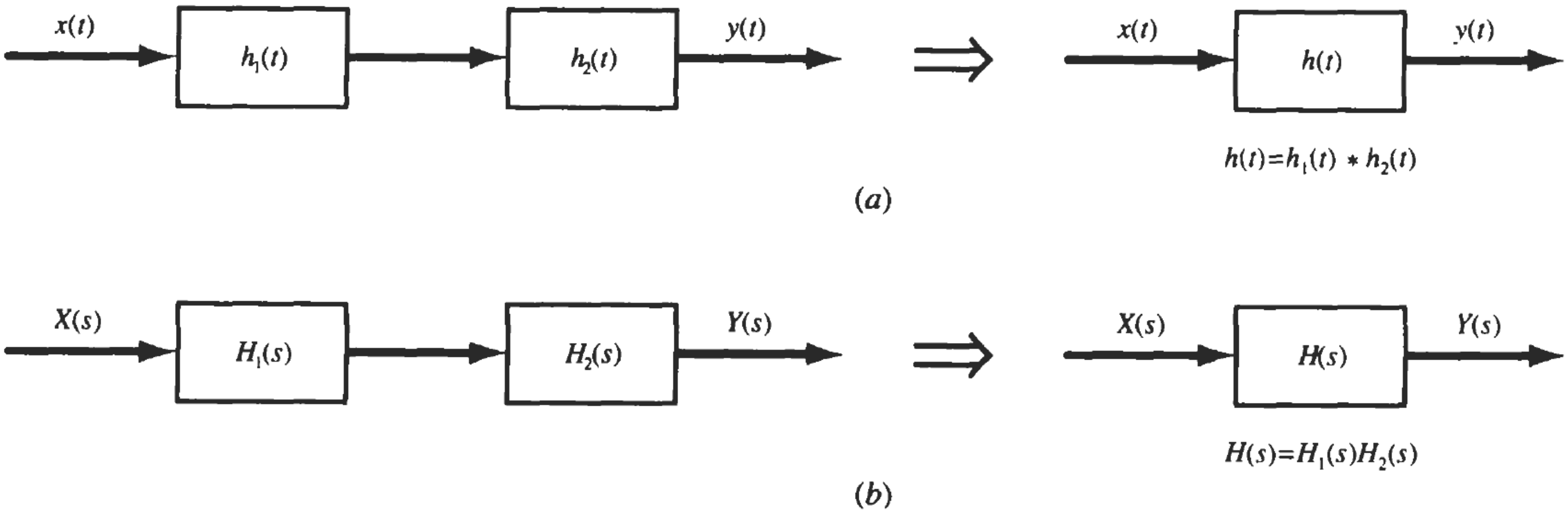
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Thực hiện biến đổi Laplace hai vế:

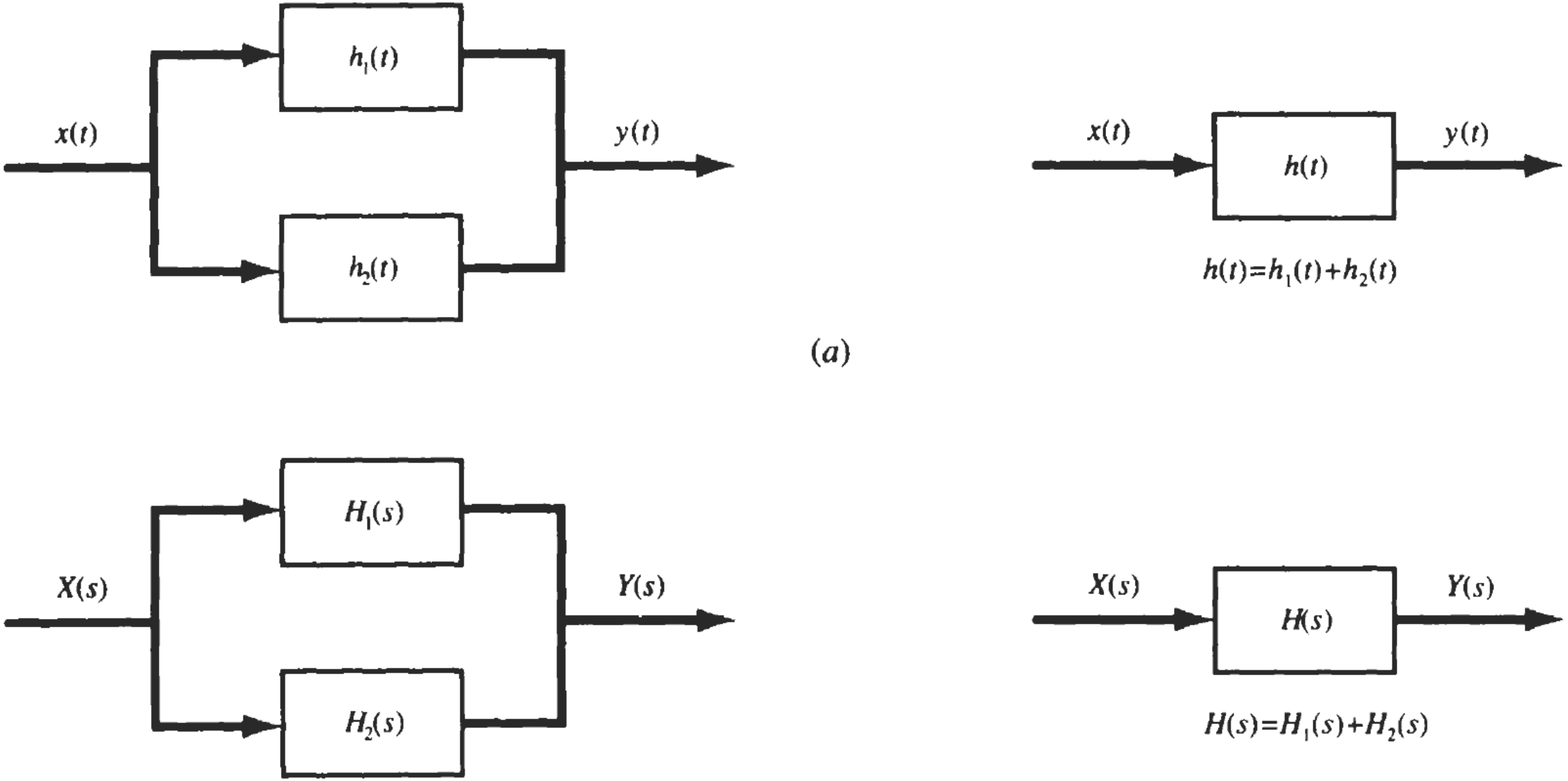
$$Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

KẾT HỢP CÁC HỆ THỐNG - MẮC NỐI TIẾP



KẾT HỢP CÁC HỆ THỐNG - MẮC SONG SONG



(b)

BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

$$X_l(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Ký hiệu 0^- cho phép tín hiệu chứa xung đơn vị và vi phân của xung đơn vị. $x(t)$ trong biến đổi Laplace sẽ tương đương tín hiệu phía phải nên có vùng ROC dạng: $\mathrm{Re}(s) > \sigma_{\max}$

Với biến đổi Laplace một phía (tín hiệu là nhân quả) không có sự nhầm lẫn như biến đổi Laplace hai phía nên có thể không cần xét đến vùng ROC.

BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

Ví dụ:

Biến đổi Laplace một phía:

$$e^{at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{1}{s-a}$$

Tương đương biến đổi Laplace hai phía:

$$e^{at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-a} \quad \text{with ROC } \mathrm{Re}\{s\} > a$$

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

Tương tự như biến đổi Laplace hai phía, ngoại trừ:

Phép vi phân trong miền thời gian:

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^nX_I(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-)$$

Với: $$x^{(r)}(0^-) = \left.\frac{d^rx(t)}{dt^r}\right|_{t=0^-}$$

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

Phép tích phân trong miền thời gian:

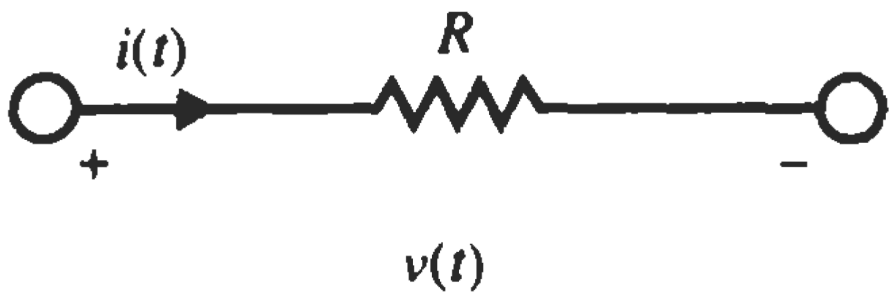
$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s)$$

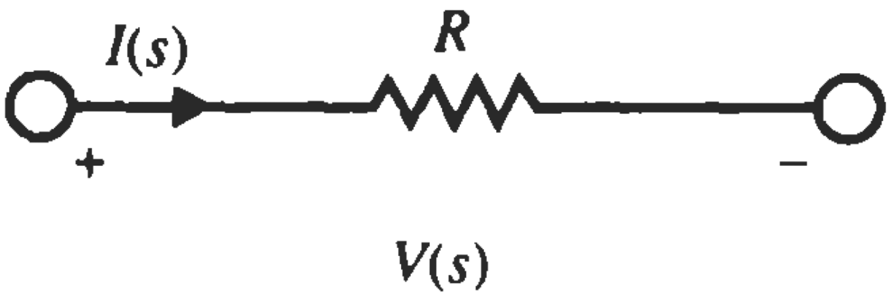
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\, d\tau$$

MẠCH ĐIỆN DƯỚI DẠNG BIỂU DIỄN LAPLACE

Điện trở:

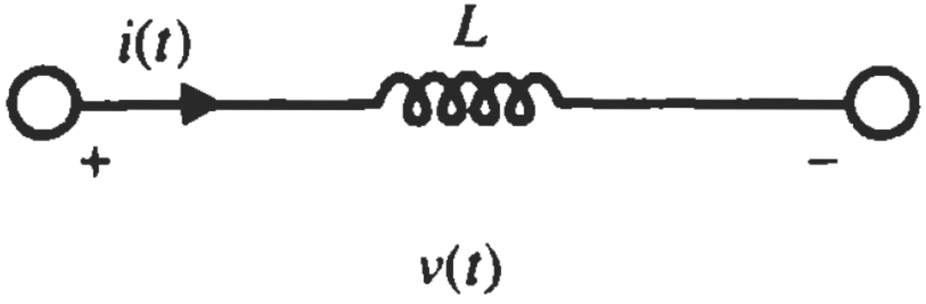
$$v(t) = Ri(t) \leftrightarrow V(s) = RI(s)$$

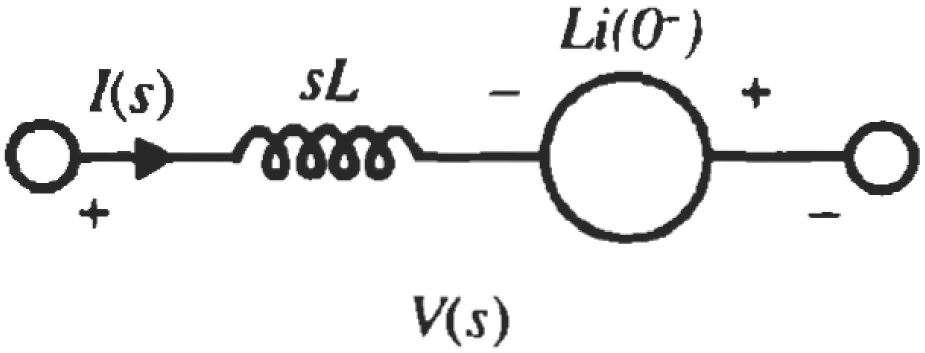




Điện cảm:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \leftrightarrow V(s) = sLI(s) - Li(0^-)$$



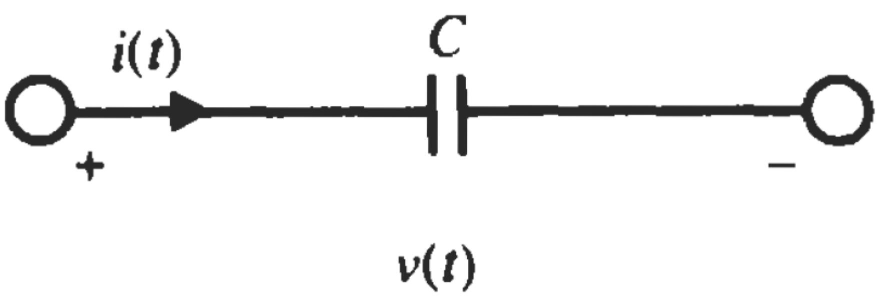


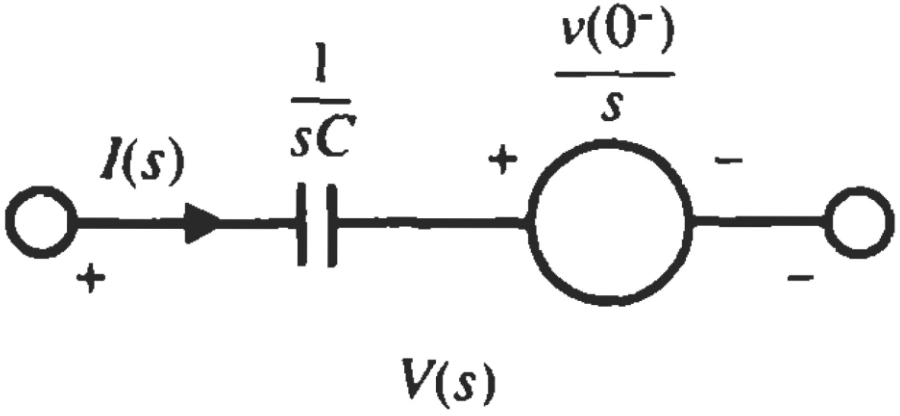
MẠCH ĐIỆN DƯỚI DẠNG BIỂU DIỄN LAPLACE

Điện dung:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) \leftrightarrow V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{1}{s}v(0^-)$$





SO SÁNH GIỮA BIẾN ĐỔI MỘT PHÍA VÀ HAI PHÍA

Signal	Unilateral Transform $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} X(s)$ $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} Y(s)$	Bilateral Transform $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$	ROC $s \in R_x$ $s \in R_y$
$ax(t) + by(t)$	$aX(s) + bY(s)$	$aX(s) + bY(s)$	At least $R_x \cap R_y$
$x(t-\tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$ if $x(t-\tau)u(t) = x(t-\tau)u(t-\tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$	R_x
$e^{s_o t}x(t)$	$X(s - s_o)$	$X(s - s_o)$	$R_x + \mathrm{Re}\{s_o\}$
$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{R_x}{\lvert a\rvert}$
$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$ if $x(t) = y(t) = 0$ for $t < 0$	$X(s)Y(s)$	At least $R_x \cap R_y$
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R_x
$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s) - x(0^-)$	$sX(s)$	At least R_x
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau + \frac{X(s)}{s}$	$\frac{X(s)}{s}$	At least $R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI LAPLACE

Biến đổi Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Biến đổi Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$\Rightarrow$ $\boxed{X(s)\big|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}}$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI LAPLACE

Đặt $s = \sigma + j\omega$ ta có:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-(\sigma + j\omega)t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)\, e^{-\sigma t}\right] e^{-j\omega t}\, dt$$

$$X(\sigma + j\omega) = \mathscr{F}\left\{x(t)\, e^{-\sigma t}\right\}$$

Như vậy biến đổi Laplace của tín hiệu $x(t)$ bằng biến đổi Fourier của tín hiệu $x(t)e^{-\sigma t}$.

Biến đổi Laplace được coi là dạng tổng quát của biến đổi Fourier với tần số phức $s = \sigma + j\omega$

Biến đổi Fourier được tính từ biến đổi Laplace khi đặt $s = j\omega$

nếu $x(t)$ có thể tích phân tuyệt đối hay: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI LAPLACE

Ví dụ: Cho chuỗi mũ nhân quả:

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a > 0$$

Biến đổi Laplace: $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) = \dfrac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a$

Biến đổi Fourier: $\mathscr{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

$$= \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega}$$

Chú ý: $x(t)$ có thể tích phân tuyệt đối.

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI LAPLACE

Ví dụ: Cho tín hiệu nhảy bậc u(t)

Biến đổi Laplace: $\mathscr{L}\{u(t)\} = \dfrac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$

Biến đổi Fourier: $\mathscr{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \dfrac{1}{j\omega}$

$$\Rightarrow X(\omega) \neq X(s)|_{s=j\omega}$$

Chú ý: u(t) không thể tích phân tuyệt đối.