TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Chương 3: Biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến trong miền tần số

Phần 2: BIỂU DIỄN HỆ THỐNG LTI RỜI RẠC

Trần Thị Thúy Quỳnh

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY, HANOI
VNU UNIVERSITY OF ENGINEERING & TECHNOLOGY

FACULTY OF ELECTRONICS
& TELECOMMUNICATIONS

NỘI DUNG

1. Biểu diễn tín hiệu rời rạc (chuỗi) tuần hoàn
2. Biểu diễn tín hiệu rời rạc (chuỗi) không tuần hoàn
3. Đáp ứng tần số

BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN (Discrete Time Fourier Series - DTFS)

A. Chuỗi tuần hoàn

Tín hiệu rời rạc, tuần hoàn với chu kì *N* được biểu diễn bởi:

$$x[n+N] = x[n] \qquad \text{all } n$$

Với chu kỳ cơ sở N_0, tần số góc cơ sở $\Omega_0 = 2\pi/N_0$.

BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN

B. Biểu diễn chuỗi tuần hoàn dưới dạng mũ phức

Biểu diễn chuỗi Fourier mũ phức của tín hiệu $x[n]$ tuần hoàn có chu kì cơ sở N_0:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Với c_k là các ***hệ số Fourier*** được tính bởi:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Ký hiệu lại là:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

Với:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN

Với $\mathrm{k} = 0$:

$$c_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n]$$

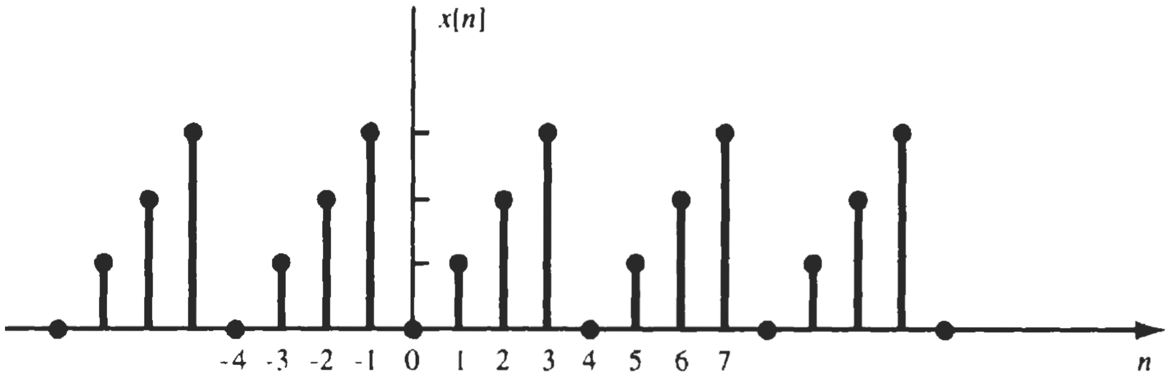
bằng giá trị trung bình của $\mathrm{x}[n]$ trong chu kì.

Các hệ số Fourier c_k cũng được gọi là hệ số phổ của chuỗi $x[n]$.

BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN

Bài tập 1:

Xác định các hệ số Fourier của chuỗi tuần hoàn $x[n]$ sau:



$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

Với:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN

Bài giải: $$x[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

Chuỗi $x[n]$ tuần hoàn với chu kì $N_0 = 4$ hay $\Omega_0 = 2\pi/N_0 = \pi/2$

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n} \qquad e^{-j\Omega_0} = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = -j$$

$$c_0 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] = \frac{1}{4}(0+1+2+3) = \frac{3}{2}$$

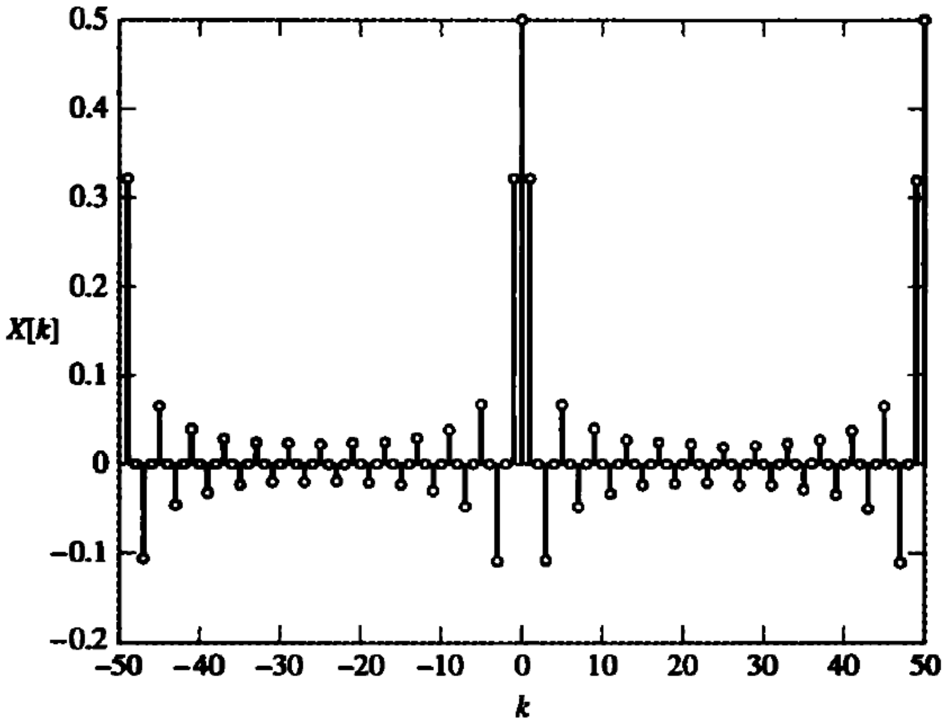
$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^n = \frac{1}{4}(0-j1-2+j3) = -\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^{2n} = \frac{1}{4}(0-1+2-3) = -\frac{1}{2}$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^{3n} = \frac{1}{4}(0+j1-2-j3) = -\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}$$

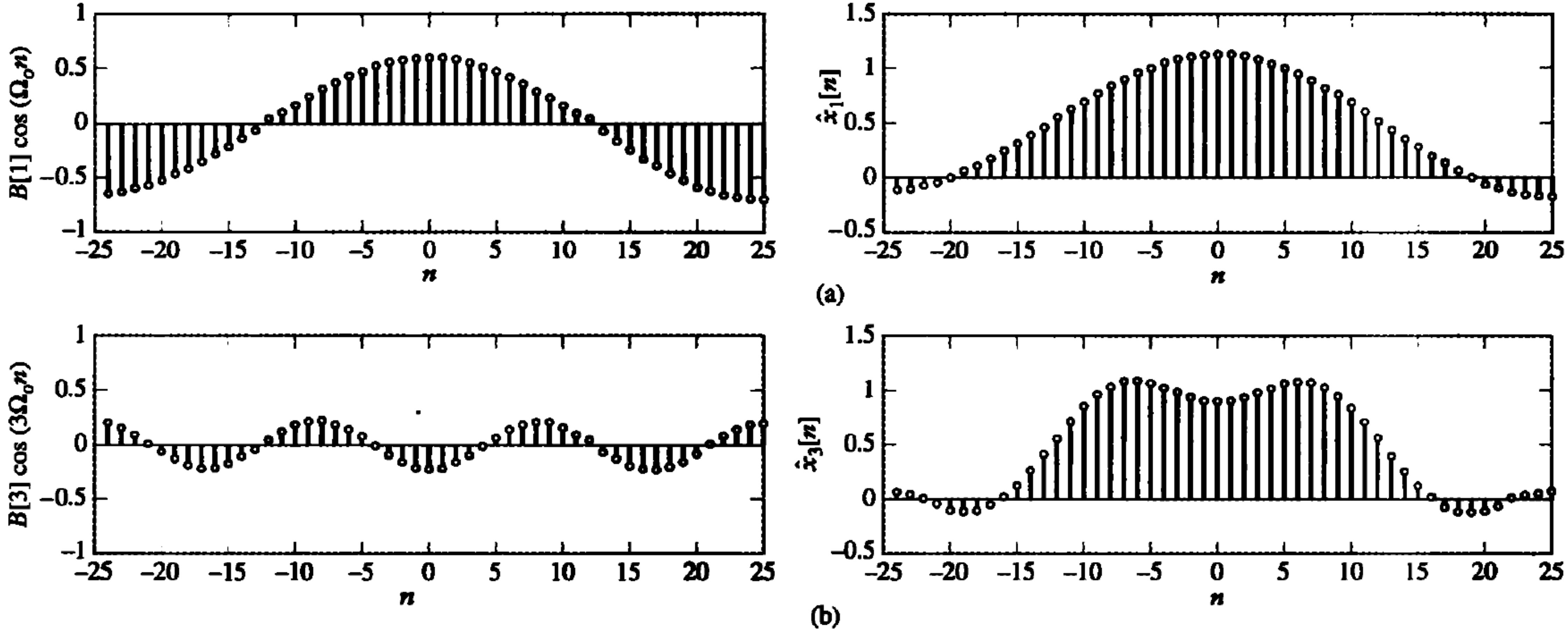
XÂY DỰNG TÍN HIỆU VUÔNG TỪ CÁC HỆ SỐ DTFS

VÍ DỤ: Biểu diễn miền tần số của tín hiệu vuông, chu kì cơ sở N=50, M=12:

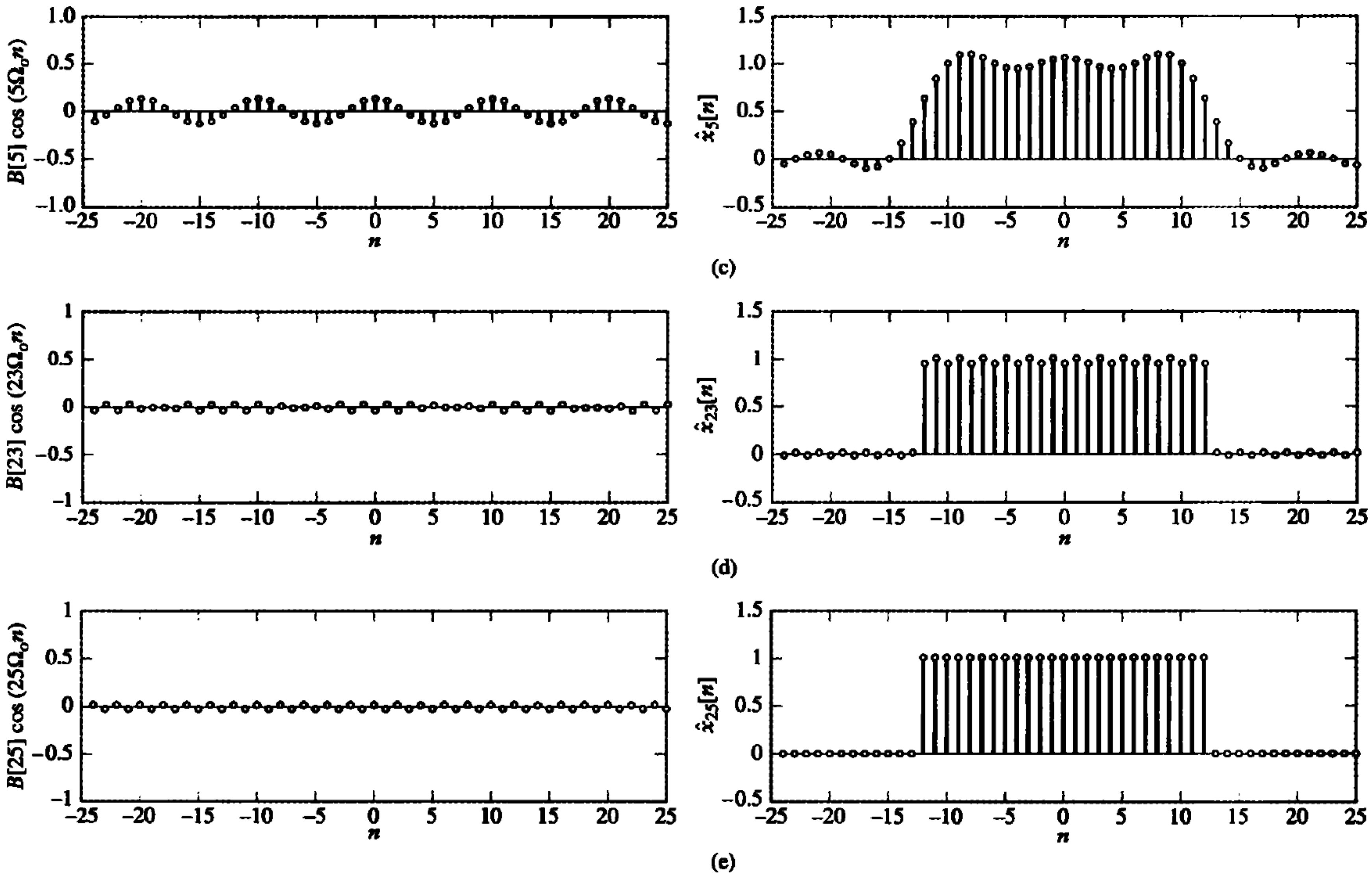


$$\hat{x}_J[n] = \sum_{k=0}^{J} B[k]\cos(k\Omega_o n)$$

XÂY DỰNG TÍN HIỆU VUÔNG TỪ CÁC HỆ SỐ DTFS



XÂY DỰNG TÍN HIỆU VUÔNG TỪ CÁC HỆ SỐ DTFS

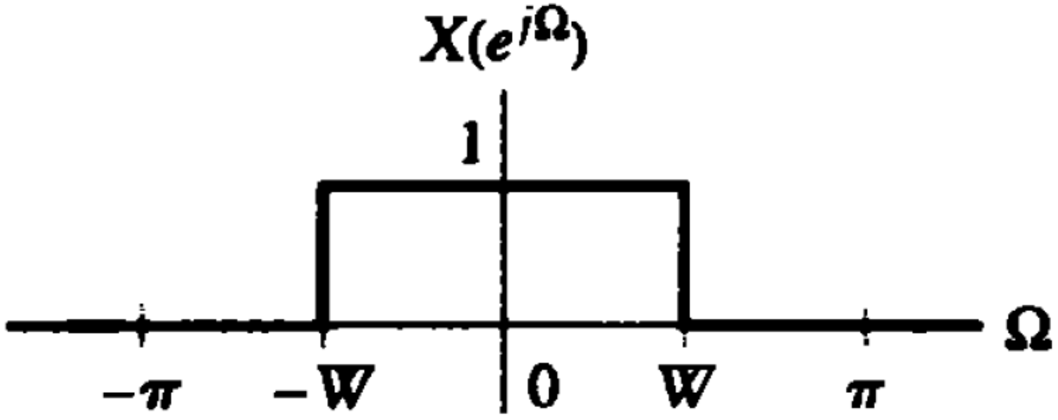


BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN

Bài tập 2:

Xác định tín hiệu $x[n]$ (biến đổi DTFT ngược) biết:

$$X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < W \\ 0, & W < |\Omega| < \pi \end{cases}$$



BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN

Bài giải:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi n j} e^{j\Omega n}\Big|_{-W}^{W}, \quad n \neq 0$$

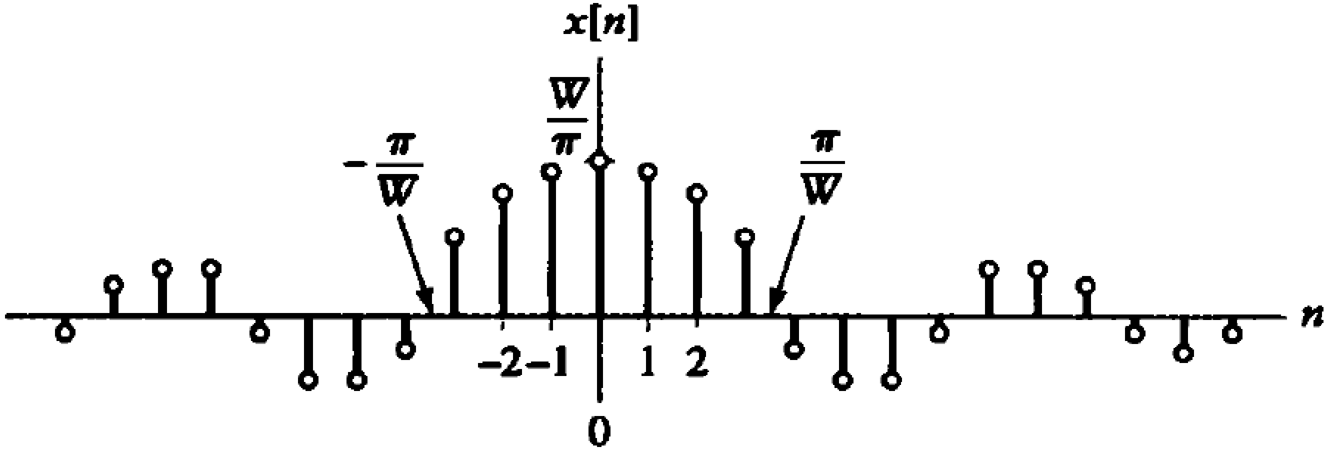
$$= \frac{1}{\pi n}\sin(Wn), \quad n \neq 0.$$

Sử dụng luật L'Hospital:

$$\lim_{n\to 0}\frac{1}{\pi n}\sin(Wn) = \frac{W}{\pi}$$

$$\rightarrow \quad x[n] = \frac{1}{\pi n}\sin(Wn)$$

$$x[n] = \frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}(Wn/\pi)$$

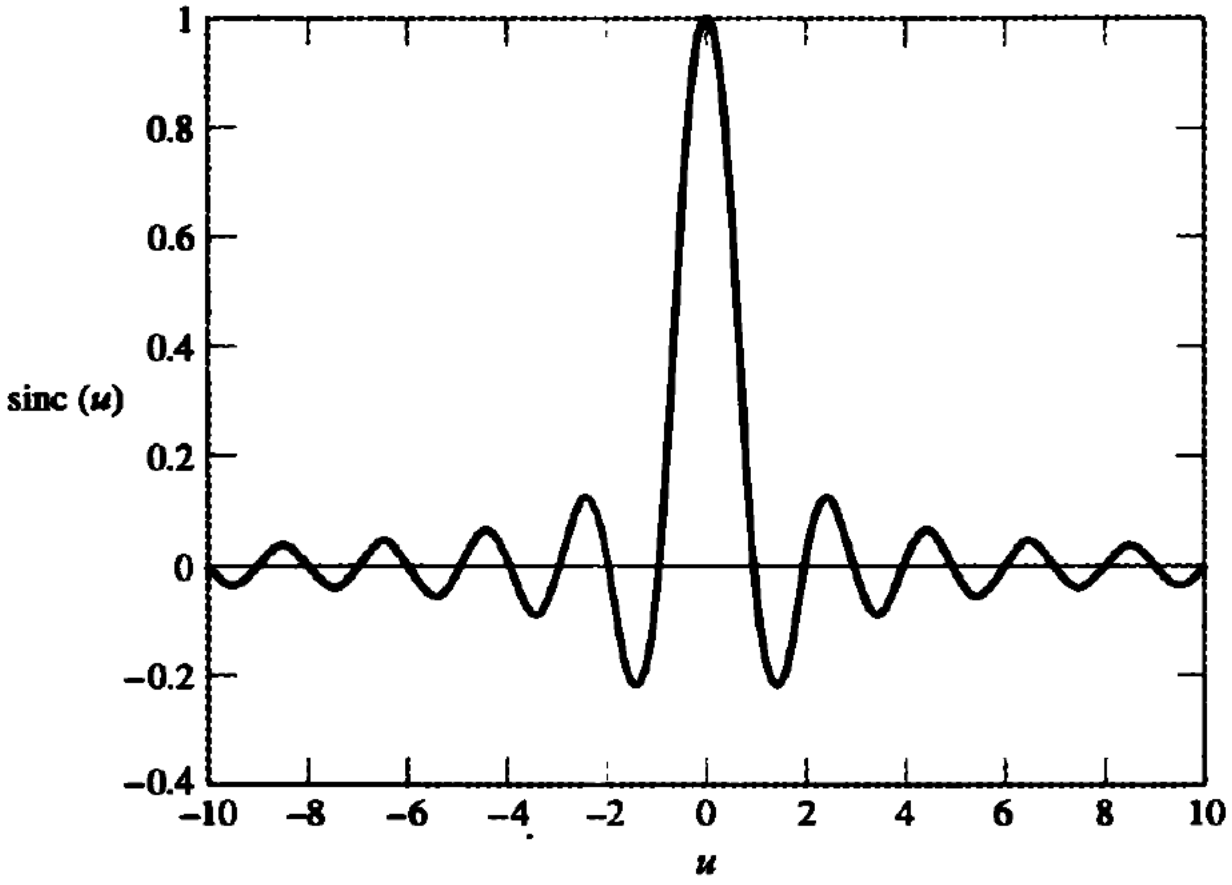


L’HÔPITAL’S RULE

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

HÀM SINC

$$\boxed{\mathrm{sinc}(u) = \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}.}$$



Hàm sinc:

Mainlobe tại u=0

Hai điểm không của mainlobe tại u=±1

BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN

C. Tính chất

1. Tính tuần hoàn của hệ số Fourier

$$\boxed{c_{k+N_0} = c_k}$$

hay c_k là chuỗi tuần hoàn với chu kì cơ sở N_0 do

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$$

và

$$\Psi_k[n] = e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

cũng tuần hoàn với chu kì cơ sở N_0.

BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN

2. Tính đổi lẫn

$$c[k] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$$

Thay $\mathrm{n} = -\mathrm{m}$

$$c[k] = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-m]\, e^{jk\Omega_0 m}$$

Đặt $\mathrm{k} = \mathrm{n}$ và $\mathrm{m} = \mathrm{k}$

$$c[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} x[-k]\, e^{jk\Omega_0 n}$$

Thấy rằng: $(1/N_0)x[-k]$ là các hệ số Fourier của chuỗi $c[k]$.

Nếu ký hiệu:

$$\boxed{x[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} c_k = c[k]}$$

Thì cũng có:

$$\boxed{c[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N_0} x[-k]}$$

BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN

3. Các tính chất khác

a. Nếu x[n] là thực thì $c_{-k} = c_{N_0-k} = c_k^*$

b. Nếu x[n] là thực, x[n] $= x_0[\text{n}] + x_e[\text{n}]$

$$x[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} c_k$$

Thì:

$$x_e[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} \text{Re}[c_k]$$

$$x_o[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} j\,\text{Im}[c_k]$$

Thấy rằng: $(1/N_0)x[-k]$ là các hệ số Fourier của chuỗi $c[k]$.

Nếu ký hiệu:

$$\boxed{x[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} c_k = c[k]}$$

a. Nếu x[n] là thực thì $c_{-k} = c_{N_0-k} = c_k^*$

BIỂU DIỄN CHUỖI TUẦN HOÀN

D. Công suất của chuỗi tuần hoàn

Công suất của $x[n]$ được tính bởi (đẳng thức Parseval):

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle}|x[n]|^2=\sum_{k=\langle N_0\rangle}|c_k|^2$$

BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN (Discrete Time Fourier Transform - DTFT)

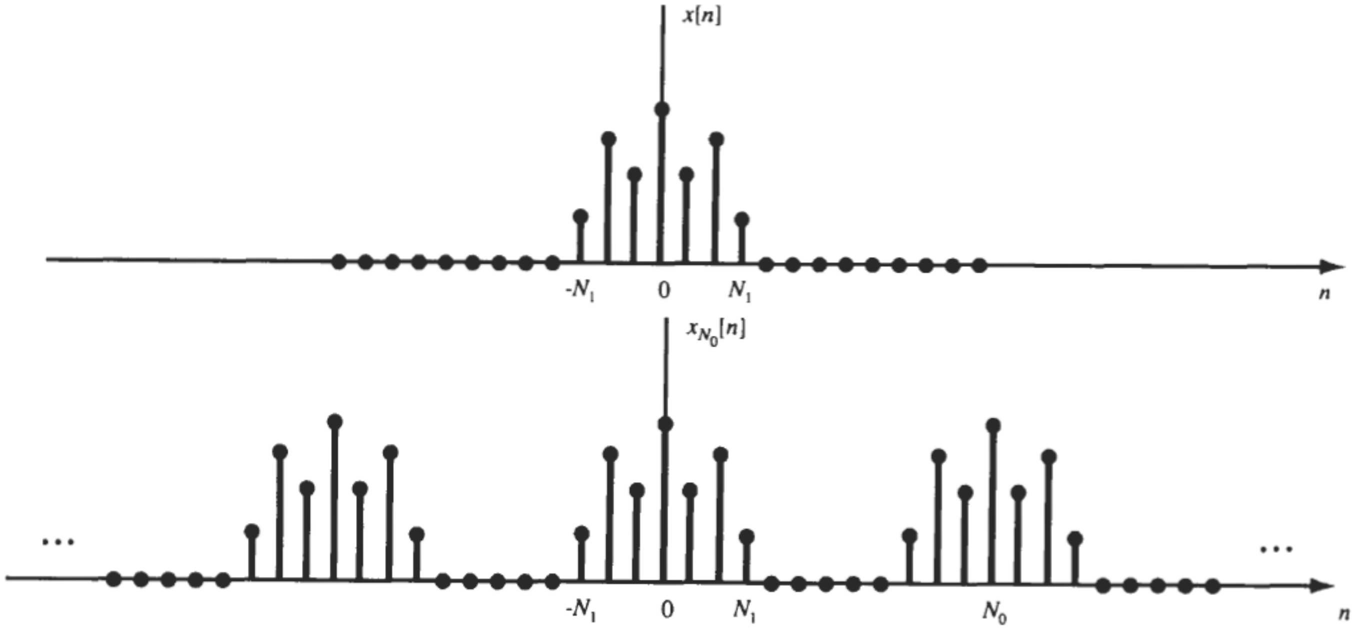
A. Chuyển đổi từ DTFS sang DTFT

$x[n]$ là tín hiệu không tuần hoàn và có khoảng thời gian hữu hạn, với N_1 là số nguyên dương

$$x[n] = 0 \qquad |n| > N_1$$

Để áp dụng được lý thuyết DFS, gọi $x_{N_0}[n]$ là chuỗi tuần hoàn được tạo ra từ việc lặp lại $x[n]$ với chu kì cơ sở N_0.

$$\lim_{N_0 \to \infty} x_{N_0}[n] = x[n]$$



BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

Biểu diễn DTFS của tín hiệu $x_{N_0}[n]$ dưới dạng mũ phức:

$$\boxed{x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n}} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Với:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_{N_0}[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

Do $x_{N_0}[n] = x[n]$ với $|n| \le N_1/2$ và $x[n] = 0$ ngoài khoảng nên:

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$$

Đặt: $$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} \quad \rightarrow \quad c_k = \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0)$$

$$\rightarrow \quad x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n}$$ Hoặc

$$\boxed{x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N_0\rangle} X(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0}$$

BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

Do $x_{N_0}[n] = x[n]$ với $|n| \leq N_1/2$ và $x[n] = 0$ ngoài khoảng nên:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Đặt: $$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \rightarrow c_k = \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0)$$

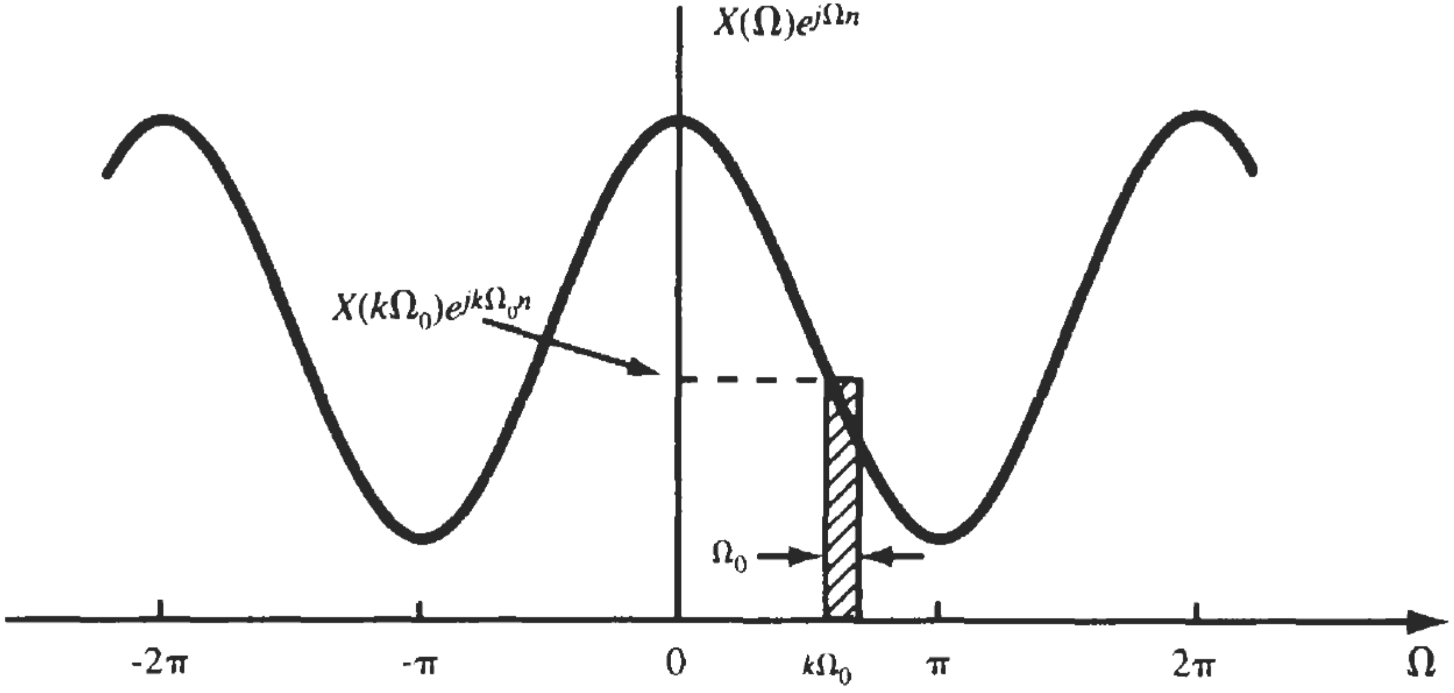
$$\rightarrow x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} \frac{1}{N_0} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$ Hoặc

$$\boxed{x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0}$$

BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

$$x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$

Do $X(\omega)$ và $e^{j\omega n}$ đều là chuỗi tuần hoàn với chu kì 2π nên $X(\omega)e^{j\omega n}$ cũng là chuỗi tuần hoàn với chu kì 2π.



BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

A. Chuyển đổi từ DTFS sang DTFT

$$\lim_{N_0 \to \infty} x_{N_0}[n] = x[n] \qquad x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N_0 \rangle} X(k\Omega_0)\, e^{jk\Omega_0 n}\, \Omega_0$$

Khi $N_0 \to \infty$ thì $\Omega_0 = 2\pi/N_0 \to 0$ nên tổng được chuyển thành tích phân.

Chỉ số lớn nhất của tổng là N_0 và $\Omega_0 = 2\pi/N_0$ nên tích phân được lấy trong khoảng 2π.

$$\Rightarrow \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega}$$

BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

B. Cặp biến đổi Fourier

$$X(\Omega) = \mathscr{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = \mathscr{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$\mathrm{X}(\Omega)$ là biến đổi Fourier của $x[n]$. Và $x[n]$ là biến đổi Fourier ngược của $\mathrm{X}(\Omega)$, được ký hiệu là:

$$x[n] \leftrightarrow X(\Omega)$$

BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

C. Phổ Fourier

Biến đổi Fourier $X(\Omega)$ thường là số phức (dạng tổng quát), được biểu diễn bởi:

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\phi(\Omega)}$$

$X(\Omega)$ được gọi là phổ Fourier, trong đó $|X(\Omega)|$ và $\phi(\Omega)$ tương ứng được gọi là phổ biên độ và phổ pha của $x[n]$.

Nếu $x[n]$ là tín hiệu thực thì phổ biên độ $|X(\Omega)|$ là tín hiệu chẵn và phổ pha $\phi(\Omega)$ là tín hiệu lẻ.

BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

D. Tính chất

Property	Sequence	Fourier transform
	$x[n]$	$X(\Omega)$
	$x_1[n]$	$X_1(\Omega)$
	$x_2[n]$	$X_2(\Omega)$
Periodicity	$x[n]$	$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$
Linearity	$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)$
Time shifting	$x[n - n_0]$	$e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$
Frequency shifting	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(\Omega - \Omega_0)$
Conjugation	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Time reversal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Time scaling	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & \text{if } n = km \\ 0 & \text{if } n \neq km \end{cases}$	$X(m\Omega)$
Frequency differentiation	$nx[n]$	$j\dfrac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
First difference	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\pi X(0)\delta(\Omega) + \dfrac{1}{1 - e^{-j\Omega}} X(\Omega)$ $\lvert\Omega\rvert \leq \pi$
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(\Omega) X_2(\Omega)$
Multiplication	$x_1[n] x_2[n]$	$\dfrac{1}{2\pi} X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega)$
Real sequence	$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$	$X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega)$ $X(-\Omega) = X^*(\Omega)$
Even component	$x_e[n]$	$\text{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega)$
Odd component	$x_o[n]$	$j\,\text{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega)$

Parseval's relations

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(\Omega) X_2(-\Omega)\, d\Omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2\, d\Omega$$

BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

Bài tập 3:

Xác định năng lượng của tín hiệu sau:

$$x[n] = \frac{\sin(Wn)}{\pi n}$$

BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

Bài giải:

Trong miền thời gian:

$$\chi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(Wn)}{\pi^2 n^2}$$

Trong miền tần số (Áp dụng đẳng thức Parseval):

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega$$

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \le W \\ 0, & W < |\Omega| \le \pi \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} 1 \, d\Omega \\ &= W/\pi.\end{aligned}}$$

BIỂU DIỄN CHUỖI KHÔNG TUẦN HOÀN

E. Các cặp biến đổi Fourier thông dụng

$x[n]$	$X(\Omega)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$x[n]=1$	$2\pi\delta(\Omega), \|\Omega\| \le \pi$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0), \|\Omega\|, \|\Omega_0\| \le \pi$
$\cos \Omega_0 n$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)], \|\Omega\|, \|\Omega_0\| \le \pi$
$\sin \Omega_0 n$	$-j\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)], \|\Omega\|, \|\Omega_0\| \le \pi$
$u[n]$	$\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}, \|\Omega\| \le \pi$
$-u[-n-1]$	$-\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}, \|\Omega\| \le \pi$
$a^n u[n], \|a\|<1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$-a^n u[-n-1], \|a\|>1$	$\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$

$x[n]$	$X(\Omega)$
$(n+1)a^n u[n], \|a\|<1$	$\dfrac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$
$a^{\|n\|}, \|a\|<1$	$\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega+a^2}$
$x[n]=\begin{cases}1 & \|n\| \le N_1 \\ 0 & \|n\| > N_1\end{cases}$	$\dfrac{\sin\left[\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\Omega/2)}$
$\dfrac{\sin Wn}{\pi n}, 0<W<\pi$	$X(\Omega)=\begin{cases}1 & 0 \le \|\Omega\| \le W \\ 0 & W<\|\Omega\| \le \pi\end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN_0]$	$\Omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0), \Omega_0=\dfrac{2\pi}{N_0}$

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ LTI THỜI GIAN RỜI RẠC

Lối ra của hệ thống LTI thời gian rời rạc được cho bởi:

$$x[n] = e^{j\Omega n}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\Omega(n-k)}.$$

$$y[n] = e^{j\Omega n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k}$$

$$= H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n},$$

$$\boxed{H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\Omega k}.}$$

Quan hệ giữa lối ra - lối vào của hệ thống được biểu diễn bởi một số phức $H(e^{j\Omega})$ chỉ phụ thuộc tần số Ω được gọi là **đáp ứng tần số** của hệ thống.

$$e^{j\Omega n} \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow H(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}$$

$H(e^{j\Omega})$ được biểu diễn dưới dạng **đáp ứng biên độ** $|H(e^{j\Omega})|$ và **đáp ứng pha** $\arg\{H(e^{j\Omega})\}$.

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ LTI THỜI GIAN RỜI RẠC

Lối ra của hệ thống LTI thời gian rời rạc được cho bởi:

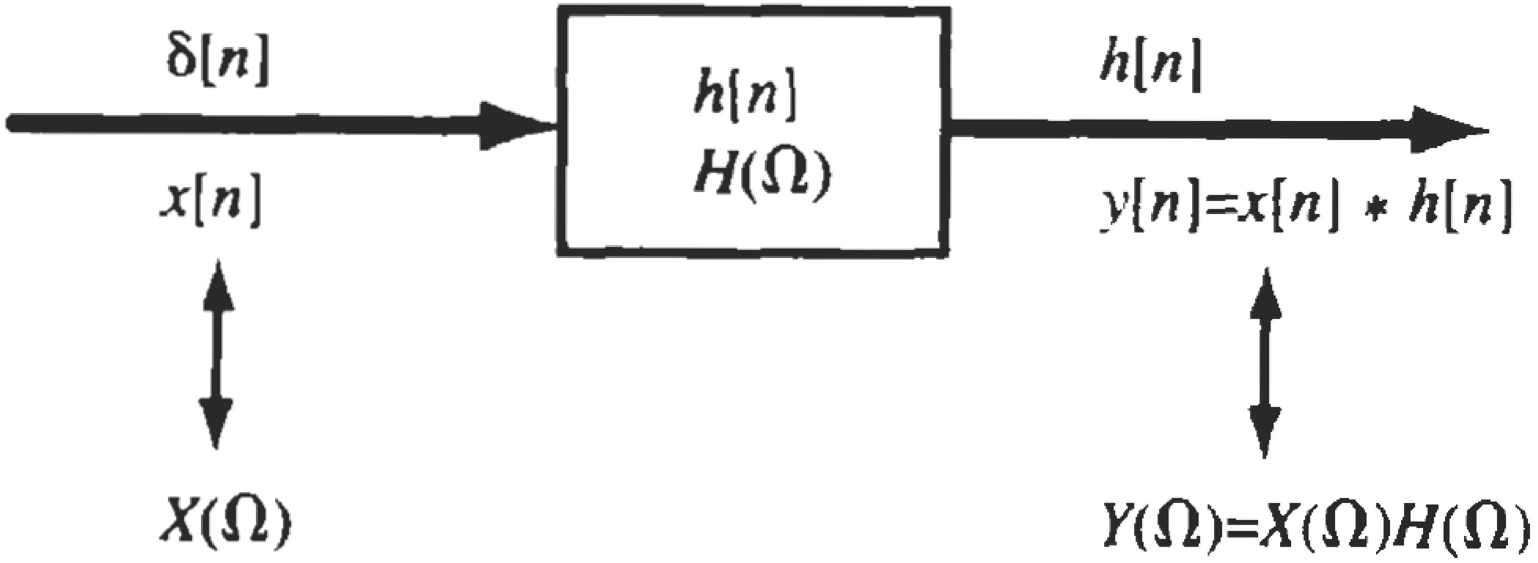
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Lối ra của hệ thống LTI thời gian liên tục miền tần số là (áp dụng tính chất nhân chập): $Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega)$

$$\Rightarrow \boxed{H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}} \qquad H(\Omega) = |H(\Omega)|e^{j\theta_H(\Omega)}$$

$H(\Omega)$ được gọi là đáp ứng tần số của hệ thống, trong đó $|H(\Omega)|$ và $\theta_H(\Omega)$ tương ứng được gọi là đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống.

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ LTI THỜI GIAN RỜI RẠC



Quan hệ giữa lối vào và lối ra của hệ thống LTI trong miền thời gian và miền tần số.

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ LTI BIỂU DIỄN BỞI PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Biến đổi Fourier hai vế của phương trình:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega)$$

$$H(\Omega) = H(\Omega + 2\pi)$$

$$\Rightarrow \quad H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}}$$

$\mathrm{H}(\Omega)$ tuần hoàn với chu kì 2π nên chỉ cần biểu diễn trong khoảng $[0, \pi]$ hoặc $[-\pi, \pi]$.