2.2 Hệ thống rời rạc

- Phương trình sai phân của hệ thống LTI rời rạc
- Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

Phương trình sai phân của hệ LTI rời rạc

- Mô hình của hệ thống LTI rời rạc có thể thu được bằng cách rời rạc hóa hệ thống liên tục
- Phiên bản rời rạc của phương trình vi phân được gọi là phương trình sai phân
  - Ví dụ: một hệ thống liên tục được miêu tả bằng phương trình sau:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

  - Sử dụng xấp xỉ $\dfrac{dy(nT)}{dt} \approx \dfrac{y(nT) - y(nT - T)}{T}$

Chúng ta thu được phương trình sai phân của hệ thống rời rạc với chu kỳ lấy mẫu T như sau:

$$(1 + aT)y[n] - y[n-1] = bTx[n]$$

Phương trình sai phân của hệ LTI rời rạc

- Hệ thống LTI rời rạc có thể được biểu diễn bằng các phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng
- Dạng chung của phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng là:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

trong đó: x[n] là tín hiệu vào, y[n] là tín hiệu ra

- Giải phương trình sai phân ở trên, tìm tín hiệu lối ra y[n] khi biết tín hiệu lối vào x[n]

Phương trình sai phân của hệ LTI rời rạc

- Nghiệm chung của phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng có dạng sau:

$$y[n] = y_0[n] + y_s[n]$$

$y_0[n]$: đáp ứng ban đầu hay đáp ứng tự nhiên, được xác định từ phương trình thuần nhất sau:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i] = 0 \qquad (1)$$

$y_s[n]$: đáp ứng ở trạng thái 0 hay đáp ứng cưỡng bức là nghiệm đặc biệt của phương trình với tín hiệu lối vào x[n]

Phương trình sai phân của hệ LTI rời rạc

- $y_0[n]$ là đáp ứng của hệ thống với các điều kiện ban đầu (n=0) và không có tín hiệu lối vào

- Phương trình thuần nhất (1) có nghiệm dưới dạng z^n trong đó z là biến phức, thay y[n] trong phương trình (1) thu được

$$\sum_{i=0}^{N} a_i z^{N-i} = 0 \qquad (2)$$

Đây còn gọi là phương trình đặc trưng của hệ thống

Phương trình sai phân của hệ LTI rời rạc

- Giả sử nghiệm của phương trình (2) là $\{z_k|k=1\ldots N\}$, dạng chung của phương trình thuần nhất (1) khi đó có dạng sau nếu các nghiệm là đơn phân biệt:

$$y_0[n] = \sum_{k=1}^{N} c_k z_k^n$$

Giá trị của hệ số c_k được xác định từ các điều kiện ban đầu.

Phương trình sai phân của hệ LTI rời rạc

- Trường hợp phương trình (2) có các nghiệm bội thì dạng chung của phương trình thuần nhất sẽ là:

$$y_0[n] = \sum_k \left(c_k z_k^n \sum_{i=0}^{p_k - 1} n^i \right)$$

Trong đó mỗi nghiệm z_k sẽ lặp lại p_k lần.

Phương trình sai phân của hệ LTI rời rạc

- $y_s[n]$ là đáp ứng của hệ thống với tín hiệu lối vào x[n] khi tất cả cac điều kiện ban đầu bằng 0.

- $y_s[n]$ còn được gọi là nghiệm đặc biệt của phương trình sai phân tuyến tính biểu diễn hệ thống

- Để xác định $y_s[n]$, thông thường giả thiết $y_s[n]$ có dạng tương tự tín hiệu vào x[n] với một vài hệ số chưa biết, sau đó thay vào phương trình để xác định các hệ số.

Phương trình vi phân của hệ thống LTI

- Chú ý khi giả thiết dạng của $y_s[n]$: $y_s[n]$ phải độc lập với tất cả các thành phần của $y_0[n]$
- Ví dụ: nếu $x[n]=\alpha^n$, ta có thể gặp một số trường hợp như sau:
    - Nếu α^n không phải là một thành phần của $y_0[n]$, ta có thể giả thiết $y_s[n]$ có dạng $c\alpha^n$
    - Nếu α là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (2) $\rightarrow$ α^n là một thành phần của $y_0[n] \rightarrow y_s[n]$ phải có dạng $cn\alpha^n$
    - Nếu α là một nghiệm bội bậc p của phương trình đặc trưng (2) $\rightarrow$ α^n, $\rightarrow$ $n\alpha^n$,…, $\rightarrow n^{p-1}\alpha^n$ là các thành phần của $y_0[n] \rightarrow y_s[n]$ phải có dạng $cn^p\alpha^n$

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Định nghĩa tích chập của hai tín hiệu rời rạc f[n] và g[n], ký hiệu là f[n]*g[n], được định nghĩa như sau:

$$f[n]*g[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k)$$

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Các tính chất của tích chập:
  - Tính giao hoán:

    $$f[n]*g[n]=g[n]*f[n]$$

  - Tính kết hợp:

    $$\{f[n]*g[n]\}*h[n]=f[n]*\{g[n]*h[n]\}$$

  - Tính phân phối:

    $$\{f[n]+g[n]\}*h[n]=f[n]*h[n]+g[n]*h[n]$$

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Tính dịch thời gian: nếu $x[n]=f[n]*g[n]$ thì

$$x[n-n_0] = f[n-n_0] * g[n] = f[n] * g[n-n_0]$$

- Tính nhân chập với tín hiệu xung đơn vị

$$f[n]*\delta[n]=f[n]$$

- Tính nhân quả: nếu $f[n]$ và $g[n]$ là các tín hiệu nhân quả thì $f[n]*g[n]$ cũng là tín hiệu nhân quả

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Đáp ứng xung của hệ LTI rời rạc:
  - Cho một hệ thống LTI được biểu diễn bằng mối quan hệ y[n]= **T**{x[n]}. Ta có thể biến đổi biểu diễn đó như sau:

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n] * \delta[n]\} = \mathbf{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\mathbf{T}\{\delta[n-k]\} = x[n] * h[n]$$

trong đó h[n] = **T**{δ[n]} được gọi là đáp ứng xung của hệ LTI rời rạc biểu diễn bởi **T**

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Phân tích đáp ứng xung của hệ LTI rời rạc:
  - Hệ thống tĩnh: đáp ứng xung chỉ có giá trị khác không tại n=0
  - Hệ thống nhân quả: đáp ứng xung là tín hiệu nhân quả
  - Hệ thống ổn đinh: khi và chỉ khi điều kiện sau đây đối với đáp ứng xung được thỏa mãn:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Biến trạng thái của hệ thống LTI rời rạc

- Gọi $\{u_1[n], u_2[n],\ldots,\}$ là các tín hiệu vào, $\{y_1[n], y_2[n],\ldots,\}$ là các biến ra và $\{q_1[n], q_2[n],\ldots,\}$ là các biến trạng thái của hệ LTI rời rạc.
- Phương trình trạng thái của hệ thống được biểu diễn bằng:

$$q_i[n+1] = \sum_j \mathrm{a}_{\mathrm{ij}} q_j[n] + \sum_k b_{\mathrm{ik}} u_k[n] \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

- Các tín hiệu ra được xác định từ biến trạng thái và các tín hiệu vào như sau:

$$y_i[n] = \sum_j c_{\mathrm{ij}} q_j[n] + \sum_k d_{\mathrm{ik}} u_k[n] \qquad (i = 1, 2\ldots)$$

Biến trạng thái của hệ thống

- Mô hình trạng thái của một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc thường được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{q}[\mathrm{n}+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{B}\mathbf{u}[n]$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{q}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n]$$

trong đó: **u**[n], **y**[n], **q**[n] là vecto cột với các phần tử lần lượt là các tín hiệu vào, tín hiệu ra và các biến trạng thái của hệ thống. **A,B,C,D** là các ma trận hệ số

Biến trạng thái của hệ thống

- Mô hình trạng thái của một hệ thống LTI rời rạc có thể suy ra được từ mô hình biến trạng thái của hệ LTI liên tục. Ví dụ với phương trình của hệ thống liên tục:

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

rời rạc phương trình trên với thời gian lấy mẫu T và xấp xỉ $\frac{d\mathbf{q}(nT)}{dt} \approx \frac{\mathbf{q}(nT+T) - \mathbf{q}(nT)}{T}$

Chúng ta thu được mô hình rời rạc:

$$\mathbf{q}[\mathrm{n}+1] = (T\mathbf{A} + I)\mathbf{q}[n] + T\mathbf{B}\mathbf{u}[n]$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{q}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n]$$

Biến trạng thái của hệ thống

- Thiết lập phương trình trạng thái từ phương trình sai phân biểu diễn hệ thống LTI rời rạc sau đây:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

- Đặt $u_j[n] = x[n-j]$ ($j=0\ldots M$) là các tín hiệu vào của hệ thống và viết lại phương trình trên dưới dạng:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j u_j[n]$$

Biến trạng thái của hệ thống

- Chọn các biến trạng thái như sau:

$$q_1[n] = y[\text{n-N}], q_2[n] = y[n-N+1], \ldots, q_N[n] = y[n-1]$$

- Các phương trình trạng thái

$$q_1[n+1] = q_2[n], q_2[n+1] = q_3[n], \ldots, q_{N-1}[n+1] = q_N[n]$$

$$q_N[n+1] = \frac{-1}{a_0}\left\{\sum_{i=0}^{N} a_i q_{N-i+1}[n] - \sum_{j=0}^{M} b_j u_j[n]\right\}$$