ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI *Ngày thi: 26/12/2017*

Trường Đại học Công nghệ

ĐỀ THI CUỐI KỲ

Môn học: Tín hiệu và hệ thống **(ELT2035)**

Thời gian làm bài: 90 phút

(*Đề thi có 4 trang*)

Câu 1. Một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục nhân quả được mô tả bởi phương trình vi phân sau đây:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)=x(t)$$

a) Xác định đáp ứng của hệ thống với các điều kiện đầu $y(0^-)=1$ và $\frac{dy(t)}{dt}|_{t=0^-}=-2$ (khi không có tín hiệu vào).

$$y_0(t)=c_1e^{-(2+j)t}+c_2e^{-(2-j)t}(t\geq 0)$$

$$y(0^-)=c_1+c_2=1$$

$$\frac{dy(t)}{dt}|_{t=0^-}=-(2+j)c_1-(2-j)c_2=-2$$

$$c_1=c_2=\frac{1}{2}$$

$$y_0(t)=\frac{1}{2}e^{-(2+j)t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-(2-j)t}u(t)=e^{-2t}\cos(t)u(t)$$

b) Xác định hàm chuyển (hàm truyền đạt) $H(s)$, đáp ứng tần số $H(\omega)$ và đáp ứng xung $h(t)$ của hệ thống.

$$H(s)=\frac{1}{s^2+4s+5}$$

Hệ thống nhân quả ổn định (ROC: $\Re(s)>-2$ chứa trục $j\omega$) nên:

$$H(\omega)=\frac{1}{-\omega^2+4j\omega+5}$$

Đáp ứng xung:

$$H(s)=\frac{1}{s^2+4s+5}=-\frac{1}{2j}\frac{1}{s+2+j}+\frac{1}{2j}\frac{1}{s+2-j}$$

$$h(t)=-\frac{1}{2j}e^{-(2+j)t}u(t)+\frac{1}{2j}e^{-(2-j)t}u(t)=e^{-2t}\sin(t)u(t)$$

c) Xác định đáp ứng của hệ thống với các tín hiệu vào sau đây (không có điều kiện đầu):

c1) $x(t)=u(t)-u(t-1)$

$$X(s)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-st}}{s}$$

$$Y(s)=H(s)X(s)=(1-e^{-st})\frac{1}{s(s+2+j)(s+2-j)}$$

$$Y(s)=(1-e^{-st})[\frac{1}{5}\frac{1}{s}+\frac{1}{4j-2}\frac{1}{s+2+j}+\frac{1}{-4j-2}\frac{1}{s+2-j}]$$

$$Y_1(s)=\frac{1}{5}\frac{1}{s}+\frac{1}{4j-2}\frac{1}{s+2+j}+\frac{1}{-4j-2}\frac{1}{s+2-j}$$

$$y_1(t)=[\frac{1}{5}+\frac{1}{4j-2}e^{-(2+j)t}+\frac{1}{-4j-2}e^{-(2-j)t}]u(t)$$

$$Y(s)=(1-e^{-st})Y_1(s)=Y_1(s)-e^{-st}Y_1(s)$$

$$y(t)=y_1(t)-y_1(t-1)$$

$$y(t)=[\frac{1}{5}+\frac{e^{-(2+j)t}}{4j-2}+\frac{e^{-(2-j)t}}{-4j-2}]u(t)-[\frac{1}{5}+\frac{e^{-(2+j)(t-1)}}{4j-2}+\frac{e^{-(2-j)(t-1)}}{-4j-2}]u(t-1)$$

c2) $x(t)=\cos(t)u(t)$

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{jt}u(t)+\frac{1}{2}e^{-jt}u(t)$$

$$X(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s-j}+\frac{1}{2}\frac{1}{s+j}=\frac{1}{(s+j)(s-j)}$$

$$Y(s)=H(s)X(s)=\frac{1}{(s+j)(s-j)(s+2+j)(s+2-j)}$$

$$Y(s)=\frac{1}{-8j-8}\frac{1}{s+j}+\frac{1}{8j-8}\frac{1}{s-j}+\frac{1}{-8j+8}\frac{1}{s+2+j}+\frac{1}{8j+8}\frac{1}{s+2-j}$$

$$y(t)=[-\frac{e^{-jt}}{8j+8}+\frac{e^{jt}}{8j-8}-\frac{e^{-(2+j)t}}{8j-8}+\frac{e^{-(2-j)t}}{8j+8}]u(t)$$

c3) $x(t)=\cos(t)$

$$x(t)=\frac{1}{2}e^{jt}+\frac{1}{2}e^{-jt}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}H(\omega=1)e^{jt}+\frac{1}{2}H(\omega=-1)e^{-jt}$$

$$y(t)=\frac{1}{2}\frac{1}{4j+6}e^{jt}+\frac{1}{2}\frac{1}{-4j+6}e^{-jt}$$

$$y(t)=\frac{6(e^{jt}+e^{-jt})}{2(16+36)}=\frac{3}{26}\cos(t)$$

Câu 2. Một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc nhân quả **T** được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y[n]+y[n-1]-\frac{3}{4}y[n-2]=x[n]$$

a) Hệ thống có ổn định hay không? Giải thích.

Hàm chuyển $H(z)=\frac{1}{1+z^{-1}-\frac{3}{4}z^{-2}}=\frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{2}z^{-1})}$

ROC: $|z|>\frac{3}{2}$ không chứa đường tròn đơn vị ==> hệ thống không ổn định.

(****nếu dùng đề chưa sửa:

$$H(z)=\frac{1}{1+z^{-1}-\frac{3}{2}z^{-2}}=\frac{1}{(1-\frac{1+\sqrt{7}}{2}z^{-1})(1-\frac{1-\sqrt{7}}{2}z^{-1})}$$

ROC: $|z|>\frac{1+\sqrt{7}}{2}$ không chứa đường tròn đơn vị ==> hệ thống không ổn định.

****)

b) Xác định đáp ứng xung $h[n]$ của hệ thống.

$$H(z)=\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{3}{4}\frac{1}{1+\frac{3}{2}z^{-1}}$$

$$h[n]=\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n}u[n]+\frac{3}{4}(-\frac{3}{2})^{n}u[n]$$

(****nếu dùng đề chưa sửa:

$$H(z)=\frac{7+\sqrt{7}}{14}\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{7}}{2}z^{-1}}+\frac{7-\sqrt{7}}{14}\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{7}}{2}z^{-1}}$$

$$h[n]=\frac{7+\sqrt{7}}{14}(\frac{1+\sqrt{7}}{2})^{n}u[n]+\frac{7-\sqrt{7}}{14}(\frac{1-\sqrt{7}}{2})^{n}u[n]$$

****)

c) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x[n]=u[n]$.

$$X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{2}z^{-1})}$$

$$Y(z)=\frac{4}{5}\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{9}{20}\frac{1}{1+\frac{3}{2}z^{-1}}$$

$$y[n]=\frac{4}{5}u[n]-\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n}u[n]+\frac{9}{20}(-\frac{3}{2})^{n}u[n]$$

(****nếu dùng đề chưa sửa:

$$Y(z)=\frac{1}{(1-z^{-1})(1-\frac{1+\sqrt{7}}{2}z^{-1})(1-\frac{1-\sqrt{7}}{2}z^{-1})}$$

$$Y(z)=2\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{4+\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{7}}{2}z^{-1}}+\frac{4-\sqrt{7}}{7+\sqrt{7}}\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{7}}{2}z^{-1}}$$

$$y[n]=2u[n]+\frac{4+\sqrt{7}}{7-\sqrt{7}}\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{4-\sqrt{7}}{7+\sqrt{7}}\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^{n}u[n]$$

****)

d) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-2k]$.

$$y[n]=h[n]*x[n]=[\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n}u[n]+\frac{3}{4}(-\frac{3}{2})^{n}u[n]]*\sum_{k=0}^{+\infty}\delta[n-2k]$$

$$y[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}[(\frac{1}{2})^{n}u[n]]*\delta[n-2k]+\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}[(-\frac{3}{2})^{n}u[n]]*\delta[n-2k]$$

$$y[n]=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{n-2k}u[n-2k]+\frac{3}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}(-\frac{3}{2})^{n-2k}u[n-2k]$$

$$y[n]=\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(\frac{1}{2})^{-2k}+\frac{3}{4}(-\frac{3}{2})^{n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-\frac{3}{2})^{-2k}=\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}4^{k}+\frac{3}{4}(-\frac{3}{2})^{n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(\frac{4}{9})^{k}$$

$$y[n]=\frac{1}{4}(\frac{1}{2})^{n}\frac{1-4^{\lfloor n/2\rfloor+1}}{1-4}+\frac{3}{4}(-\frac{3}{2})^{n}\frac{1-(\frac{4}{9})^{\lfloor n/2\rfloor+1}}{1-\frac{4}{9}}$$

e) Vẽ sơ đồ một hệ thống có hàm chuyển (hàm truyền đạt) là $\frac{z}{z-1/2}$, với thành phần của hệ thống này bao gồm hệ thống **T** nói trên, một bộ trễ **D** (có $H_{D}(z)=z^{-1}$), một bộ cộng tín hiệu, và một bộ nhân tín hiệu với hằng số *K* tùy chọn (xem hình vẽ trang sau).