

Hệ thống TTBB với thời gian liên tục (Continuous LTI system)

NGUYEN Hong Thinh

Signal and System Laboratory
FET-UET-VNU

Ngày 15 tháng 3 năm 2021

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

1 Mục đích bài học

2 Đáp ứng xung

3 Phân tích tính chất hệ thống

4 Hệ thống TTBB qua phương trình vi phân:

Mục đích:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Sau khi học xong bài học này, chúng ta có thể

- 1 Hiểu được mối quan hệ giữa đầu vào đầu ra của 1 hệ thống TTBB
- 2 Hiểu được khái niệm và ý nghĩa của đáp ứng xung
- 3 Tính được tích chập theo các cách khác nhau
- 4 Xác định tính chất của hệ thống TTBB dựa vào đáp ứng xung: có nhớ/không nhớ, nhân quả, ổn định...
- 5 Hệ thống TTBB biểu diễn dạng pt vi phân và cách xác định đáp ứng ra của hệ thống.
- 6 Sơ đồ khối của hệ thống

Objectives

Đáp ứng xung

Định nghĩa

Tích chập

Phân tích tính chất hệ thống

Hệ thống TTBB qua phương trình vi phân:

1 Mục đích bài học

2 Đáp ứng xung

- Định nghĩa
- Tích chập

3 Phân tích tính chất hệ thống

4 Hệ thống TTBB qua phương trình vi phân:

Biểu diễn tín hiệu liên tục qua xung delta

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

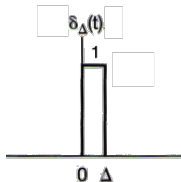
Định nghĩa

Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

- Định nghĩa xung delta: $\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{với } t = 0 \\ 0 & \text{với } t \neq 0. \end{cases}$
- Gọi $\delta_{\Delta}(t)$ là xung có dạng:



- Thì $\delta(t) = \delta_{\Delta}(t)$ khi $\Delta \rightarrow 0$

Biểu diễn tín hiệu liên tục qua xung delta

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng xung

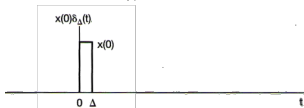
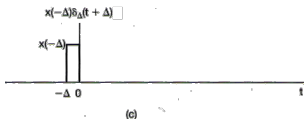
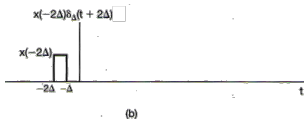
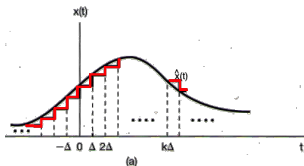
Định nghĩa

Tích chập

Phân tích tính chất hệ thống

Hệ thống TTBB qua phương trình vi phân:

Phân tích tín hiệu $x(t)$:



Biểu diễn tín hiệu liên tục qua xung delta

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng xung

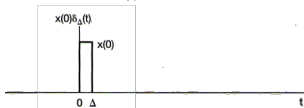
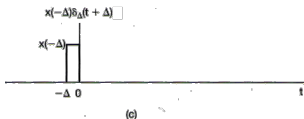
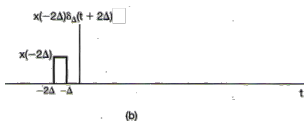
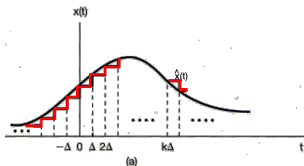
Định nghĩa

Tích chập

Phân tích tính chất hệ thống

Hệ thống TTBB qua phương trình vi phân:

Phân tích tín hiệu $x(t)$:



Xấp xỉ

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$$

Biểu diễn tín hiệu liên tục qua xung delta

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

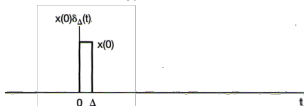
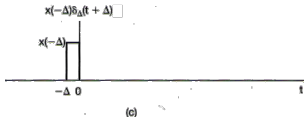
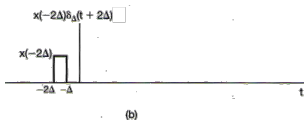
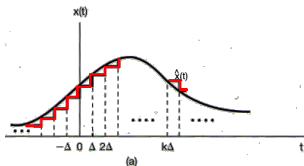
Định nghĩa

Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Phân tích tín hiệu $x(t)$:



Xấp xỉ

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$$

Xấp xỉ càng chính xác khi Δ càng nhỏ:

Biểu diễn tín hiệu liên tục qua xung delta

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

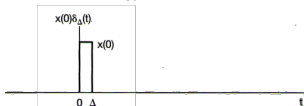
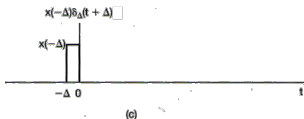
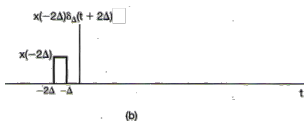
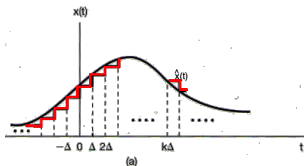
Định nghĩa

Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Phân tích tín hiệu $x(t)$:



Xấp xỉ

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t - k\Delta)$$

Xấp xỉ càng chính xác khi Δ càng nhỏ:

Cuối cùng ta có

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau$$

Đáp ứng xung

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Định nghĩa

Tích chập

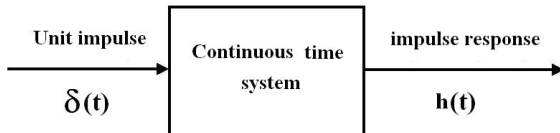
Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Định nghĩa:

Đáp ứng xung của 1 hệ thống TTBB với thời gian liên tục, kí hiệu là $h(t)$, là **đáp ứng** của hệ thống khi tín hiệu vào là **xung delta** $\delta(t)$

$$h(t) = T(\delta(t))$$



Mối quan hệ giữa input/output/đáp ứng xung

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng xung

Định nghĩa

Tích chập

Phân tích tính chất hệ thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \text{ so } y(t) = T(x(t)) = ?$$

- Áp dụng tính chất bất biến

$$\delta(t) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} h(t) \text{ nên:}$$

$$\delta(t-\tau) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} h(t-\tau)$$

- Áp dụng tính chất tuyến tính:

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} x(\tau)h(t-\tau)$$

$$\text{Và: } \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) \xrightarrow[\text{TTBB}]{\text{Hệ thống}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Hay: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$

Tính chất của tích chập

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Định nghĩa

Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

- Tích chập của mọi tín hiệu với delta đều bằng chính nó:

$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

- Giao hoán:

$$a(t) * b(t) = b(t) * a(t)$$

- Kết hợp

$$a(t) * (b_1(t) * b_2(t)) = (a(t) * b_1(t)) * b_2(t)$$

- Phân phối:

$$a(t) * (b_1(t) + b_2(t)) = a(t) * b_1(t) + a(t) * b_2(t)$$

- Dịch thời gian:

$$c(t - t_0) = a(t - t_0) * b(t) = a(t) * b(t - t_0)$$

Phân phối - Kết nối song song

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

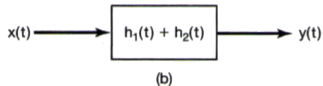
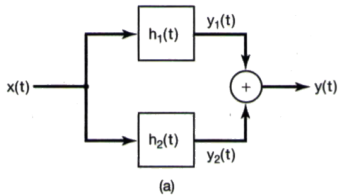
Đáp ứng
xung

Định nghĩa

Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:



Giao hoán, Kết hợp & Kết nối nối tiếp

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

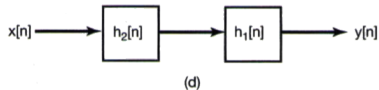
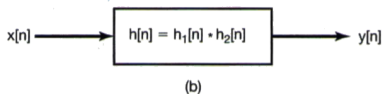
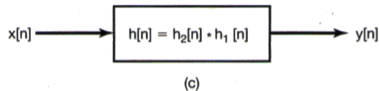
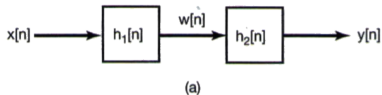
Đáp ứng
xung

Định nghĩa

Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:



Tích chập Convolution integral

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng xung

Định nghĩa

Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Vẽ $x(\tau)$ and $h(t - \tau)$
- Tính tích của 2 tín hiệu $w(\tau) = x(\tau) \cdot h(t - \tau)$
biện luận kết quả,
- Tính tích chập $\int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau)d\tau$
theo t

Phương pháp tính tích chập:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng xung

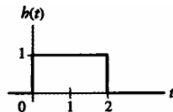
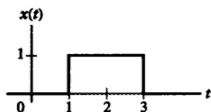
Định nghĩa

Tích chập

Phân tích tính chất hệ thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Hệ thống TTBB có đáp ứng xung $h(t) = u(t) - u(t - 2)$
Xác định tín hiệu ra khi tín hiệu vào là
 $x(t) = u(t - 1) - u(t - 3)$



Tích chập Convolution integral

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

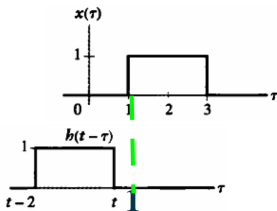
Định nghĩa

Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Nếu $t < 1$:
 $w(\tau) = x(\tau) \cdot h(t - \tau) = 0$ Do
đó $y(t) = 0$



Tích chập Convolution integral

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Định nghĩa
Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Nếu $1 \leq t \leq 3$:

$$w(\tau) = x(\tau) \cdot h(t - \tau) = 1$$

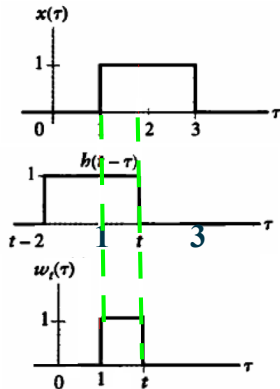
với $\tau \in [1, t]$

Do đó

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau) d\tau = \int_1^t (1 \cdot d\tau)$$

hay

$$y(t) = t - 1$$



Tích chập Convolution integral

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Định nghĩa

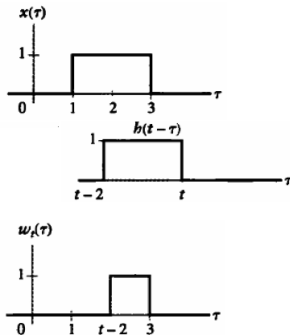
Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Nếu $t \geq 3$ and $1 < t - 2 \leq 3$:
 $w(\tau) = x(\tau) \cdot h(t - \tau) = 1$ với
 $\tau \in [t - 2, 3]$
Do đó:

$$y(t) = \int_{t-2}^3 (1 \cdot d\tau) = 5 - t$$



Tích chập Convolution integral

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Định nghĩa

Tích chập

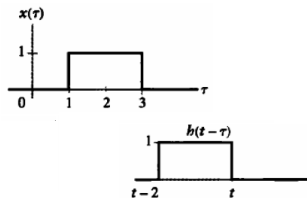
Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Nếu $t - 2 > 3$:

$$w(\tau) = x(\tau) \cdot h(t - \tau) = 0$$

Do đó $y(t) = 0$



Tích chập Convolution integral

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Định nghĩa

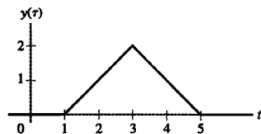
Tích chập

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

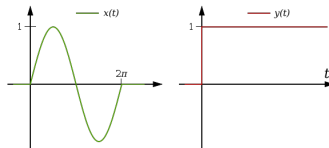
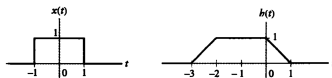
Kết luận:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t - 1, & 1 \leq t < 3 \\ 5 - t, & 3 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 5 \end{cases}$$



Bài tập

Tính tích chập của 2 tín hiệu sau:



Phân tích tính chất hệ thống dùng đáp ứng xung

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Hệ thống TTBB có đáp ứng xung $h(t)$:

- Là hệ thống **không nhớ**, khi và chỉ khi $h(t) = c \cdot \delta(t)$
- Là hệ thống **nhân quả**, khi và chỉ khi $h(t)$ là tín hiệu nhân quả, hay $h(t) = 0 \forall t < 0$
- Là hệ thống **ổn định**, khi và chỉ khi $h(t)$ là tín hiệu năng lượng, hay $E_h = \int_{t=-\infty}^{\infty} (h(t))^2 < \infty$ (hoặc:
 $\int_{n=-\infty}^{\infty} |h(t)| < \infty$)

Xác định tính chất của hệ thống sau đây:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Có nhớ-không nhớ/nhân quả-không nhân quả/ổn định-không ổn định?

- $h(t) = \sin(\pi t)$
- $h(t) = u(t + 1) - u(t - 1)$
- $h(t) = e^{2|t|}$
- $h(t) = 3\delta(t)$
- $h(t) = e^{-2t}u(t - 1)$
- $h(t) = \cos(\pi t)u(-t)$

Phân tích tính chất hệ thống dùng đáp ứng xung

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

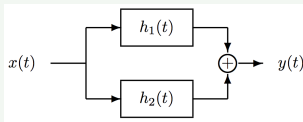
Kết nối nối tiếp

$$h_{total}(t) = h_1(t) * h_2(t)$$



Kết nối song song

$$h_{total}(t) = h_1(t) + h_2(t)$$



Biểu diễn hệ thống LTI dạng Phương trình vi phân

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Mối quan hệ giữa tín hiệu lỗi ra và lỗi vào của 1 hệ thống TTBB với thời gian liên tục có thể được mô tả dưới dạng 1 phương trình vi phân:

$$y(t) = - \sum_{k=1}^N a_k \frac{d^k y(t)}{d(t)} + \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k (x(t))}{d(t)}$$

$$\text{hoặc: } \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{d(t)} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k (x(t))}{d(t)}, a_0 = 1$$

với $\frac{d^k}{d(t)}$ là phép tính vi phân bậc k

Biểu diễn hệ thống LTI dạng Phương trình vi phân

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Ví dụ: LTI system có dạng:

$$y(t) + 3\frac{dy(t)}{d(t)} + 2\frac{d^2y(t)}{d(t)^2} = 3x(t) + \frac{dy(t)}{d(t)} \text{ biết:}$$

$\frac{d(y(t))}{d(t)}|_{t=0} = 1, \frac{d^2(y(t))}{d(t)^2}|_{t=0} = 2$. Xác định đáp ứng của hệ thống ở đầu ra khi cho tín hiệu vào $x(t) = e^{-t}u(t)$

Để xác định đáp ứng lỗi ra của hệ thống TTBB khi biết tín hiệu vào và các giá trị khởi tạo; ta có thể sử dụng cách giải phương trình vi phân ở giải tích. Ở đây cần phân biệt:

- Giải tích: Giải phương trình vi phân \Rightarrow xác định **nghiệm**
- Tín hiệu-hệ thống: Xác định **đáp ứng lỗi ra** $y(t)$

Biểu diễn hệ thống LTI dạng Phương trình vi phân

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Cách giải phương trình vi phân

- Mọi PT vi phân có nghiệm dạng tổng quát là:

$$y^{TQ}(t) = y^H(t) + y^P(t)$$

- $y^H(t)$: đáp ứng thuần nhất, tại thời điểm khởi đầu $t=0$, không phụ thuộc vào $x(t)$

$$y^H(n) \text{ là nghiệm của phương trình: } \sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0$$

- $y^P(t)$: đáp ứng riêng, là đáp ứng của hệ thống khi hệ thống đã ổn định ($t > 0$).
Dạng của $y^P(t)$ được xác định căn cứ bởi dạng của tín hiệu vào $x(t)$.

Biểu diễn bằng phương trình vi phân

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Nghiệm thuần nhất của phương trình vi phân

PT thuần nhất $\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0$ có nghiệm dạng e^{st} , $s \neq 0$.

$\sum_{i=0}^N a_i s^i = 0$ (**phương trình đặc trưng**).

- Nếu PT đặc trưng có N nghiệm đơn: s_1, s_2, \dots, s_N
 \Rightarrow Nghiệm của PT thuần nhất có dạng: $\sum_{i=1}^N c_i e^{s_i t}$
- Nếu PT đặc trưng có nghiệm bội: s_1 là nghiệm bội bậc m :
 \Rightarrow Nghiệm của PT thuần nhất có dạng:
 $(\sum_{i=0}^m c_i t^i) e^{s_1 t} + \sum_{i=m}^N c_i e^{s_i t}$

Biểu diễn bằng phương trình vi phân

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Nghiệm riêng của phương trình vi phân

- Nghiệm riêng $y^P(t)$ được chọn có dạng giống với $x(t)$:

$x(t) = 1.u(t)$	$y_s(t) = C$
$x(t) = t.u(t)$	$y_s(t) = At$
$x(t) = e^{-at}.u(t)$	$y_s(t) = C.e^{-at}$
$x(t) = t^N.e^{-at}.u(t)$	$y_s(t) = (A_N t^N)e^{-at}$
$x(t) = \cos(\omega t + \phi).u(t)$	$y_s(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$

- Chú ý: Chọn $y^P(t)$ có dạng độc lập với nghiệm thuần nhất.

VD: Nếu tín hiệu đầu vào có dạng $x(t) = e^{\alpha t}$:

- Nếu nghiệm thuần nhất không chứa $e^{\alpha t}$: chọn $y_s = c.e^{\alpha t}$
- Nếu nghiệm thuần nhất chứa $e^{\alpha t}, \dots, t^{p-1}e^{\alpha t}$: chọn $y^P = c.t^p e^{\alpha t}$

Biểu diễn hệ thống LTI dạng phương trình vi phân

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

- **Tín hiệu-Hệ thống:** $x(t)$ tín hiệu vào, $y(t)$ **đáp ứng** của hệ thống ở lối ra
- Giả sử thời điểm 0 là gốc thời gian ta bắt đầu cho $x(t)$ đi qua hệ thống
- Input: $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{với } t < 0 \rightarrow \text{chưa có tín hiệu} \\ f(t) & \text{với } t \geq 0 \rightarrow \text{có tín hiệu} \end{cases}$
- **Output:** $y(t)$ chia thành 2 phần:
- **Đáp ứng tự nhiên** (Natural response) $y^N(t)$: là đáp ứng vốn có của hệ thống, khi chưa có tín hiệu vào;
- **Đáp ứng cưỡng bức** (Forced response) $y^F(t)$: là đáp ứng khi có tín hiệu ở đầu vào của hệ thống hay $x(t) \neq 0$; gây ra sự chuyển trạng thái của hệ thống từ trạng thái nghỉ sang trạng thái hoạt động

Biểu diễn hệ thống LTI dạng phương trình vi phân

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

- **Output:** $y(t)$ chia thành 2 phần:
- **Đáp ứng tự nhiên** (Natural response) $y^N(t)$: là đáp ứng vốn có của hệ thống, khi chưa có tín hiệu vào;
- **Đáp ứng cưỡng bức** (Forced response) $y^F(t)$: là đáp ứng khi có tín hiệu ở đầu vào của hệ thống hay $x(t) \neq 0$; gây ra sự chuyển trạng thái của hệ thống từ trạng thái nghỉ sang trạng thái hoạt động
- Đáp ứng hệ thống $y(t) = \begin{cases} y^N(t) & \text{với } t < 0 \\ y^N(t) + y^F(t) & \text{với } t \geq 0 \end{cases}$

Biểu diễn bằng phương trình vi phân

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Objectives

Đáp ứng
xung

Phân tích
tính chất hệ
thống

Hệ thống
TTBB qua
phương
trình vi
phân:

Giải phương trình vi phân sau đây:

- $5 \frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 2x(t)$ với $y(0) = 3$ và $x(t) = e^{-t}$
- $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5 \frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = 2x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$
với $y(0) = 2, \frac{d}{dt}y(t)|_{t=0} = 1$ và
 - $x(t) = -2u(t)$
 - $x(t) = -2e^{-t}u(t)$
 - $x(t) = \sin(3t)u(t)$
- $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3 \frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$
với: $y(0) = 0, \frac{d}{dt}y(t)|_{t=0} = 1$ và
 - $x(t) = 5u(t)$
 - $x(t) = -e^{2t}u(t)$
 - $x(t) = (\cos(t) + \sin(t))u(t)$
 - $x(t) = e^{-t}u(t)$