TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Chương 2: Biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến trong miền thời gian

Phần 2: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN/SAI PHÂN

Trần Thị Thúy Quỳnh

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY, HANOI
VNU UNIVERSITY OF ENGINEERING & TECHNOLOGY

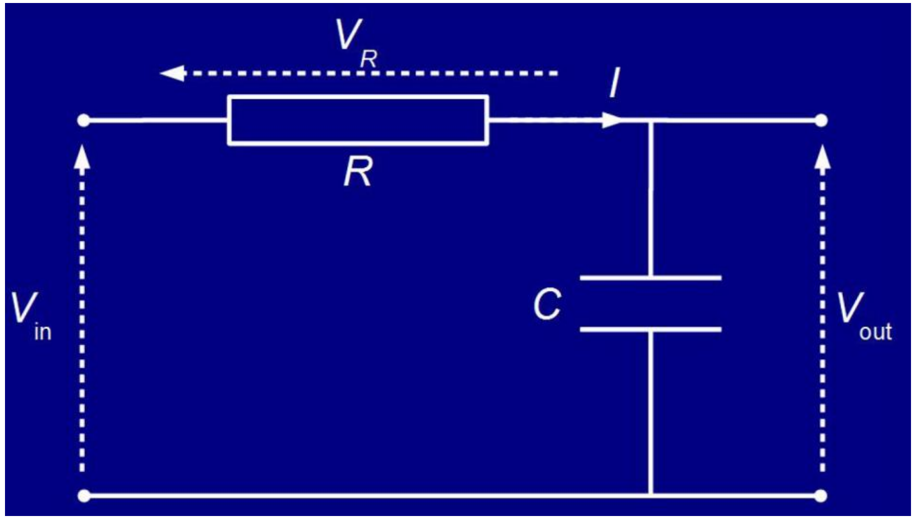
FACULTY OF ELECTRONICS
& TELECOMMUNICATIONS

PHÂN LOẠI

- Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung đơn vị
- **Biểu diễn hệ thống bằng phương trình Vi phân/Sai phân**
- Biểu diễn hệ thống bằng Sơ đồ khối

HỆ THỐNG BIỂU DIỄN BẰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

- Mô hình phương trình vi phân là loại mô hình toán học phổ biến nhất cho việc mô tả các hệ thống động trong nhiều lĩnh vực.
- Đối với các hệ thống vật lý, các mô hình phương trình vi phân của chúng dựa vào các định luật vật lý mô tả hoạt động của các thành phần của hệ thống.
- **Hệ thống tuyến tính bất biến liên tục theo thời gian** được mô tả bằng các **phương trình vi phân tuyến tính với các hệ số là hằng số**.



$$C\frac{dV_{out}}{dt} + \frac{V_{out}}{R} = \frac{V_{in}}{R}$$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN/SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

- Hệ thống LTI liên tục

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t),$$

- Hệ thống LTI rời rạc

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN/SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

1. Giải phương trình thuần nhất để tìm nghiệm $y^{(h)}(t)$, $y^{(h)}[n]$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y^{(h)}(t) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(h)}[n-k] = 0$$

$$\boxed{y^{(h)}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{r_i t},}$$

$$\boxed{y^{(h)}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i r_i^n,}$$

Với r_i là nghiệm của phương trình đặc trưng bậc N:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^{N-k} = 0$$

Nếu r_i là nghiệm lặp lại p lần thì nghiệm $y^{(h)}(t)$ là tổ hợp tuyến tính của:

$$e^{r_i t}, te^{r_i t}, \ldots, t^{p-1} e^{r_i t}$$

$$r_i^n, nr_i^n, \ldots, n^{p-1} r_i^n$$

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN/SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

2. Tìm nghiệm riêng $y^{(p)}(t)$, $y^{(p)}[n]$

Dạng nghiệm riêng giống với lối vào do mong muốn lối ra có quan hệ trực tiếp với lối vào, nhưng độc lập (khác) với các thành phần trong nghiệm thuần nhất

Continuous Time		*Discrete Time*	
Input	***Particular Solution***	***Input***	***Particular Solution***
1	c	1	c
t	$c_1 t + c_2$	n	$c_1 n + c_2$
e^{-at}	ce^{-at}	α^n	$c\alpha^n$
$\cos(\omega t + \phi)$	$c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$	$\cos(\Omega n + \phi)$	$c_1 \cos(\Omega n) + c_2 \sin(\Omega n)$

Chú ý: trong trường hợp tín hiệu lối vào chỉ áp dụng với $t \geq 0$ hoặc $n \geq 0$ (được đặt vào tại thời điểm bằng 0) thì nghiệm riêng chỉ áp dụng với $t > 0$ hoặc $n \geq 0$ tương ứng.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN/SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

2. Tìm nghiệm riêng $y^{(p)}(t)$, $y^{(p)}[n]$

Trường hợp lối vào giống với một trong số các thành phần của nghiệm thuần nhất, dạng nghiệm riêng được nhân với t hoặc n bậc thấp nhất không chứa trong nghiệm thuần nhất.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN/SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

3. Tìm lối ra y(t), y [n]

$$y = y^{(p)} + y^{(h)}$$

y cần thỏa mãn các điều kiện ban đầu (để tìm các hằng số trong nghiệm thuần nhất).

Chú ý: Khi lối vào được đặt vào tại thời điểm bằng 0 (nghiệm riêng chỉ áp dụng với t > 0 hoặc n ≥ 0), điều kiện ban đầu sẽ là các thành phần phía trái của thời điểm bằng 0 (ví dụ: $t = 0^-$, n = -1,…) cần dịch chuyển sang phải do y cũng chỉ áp dụng với t > 0 hoặc n ≥ 0 (ví dụ: $t = 0^+$, n = 0,…).

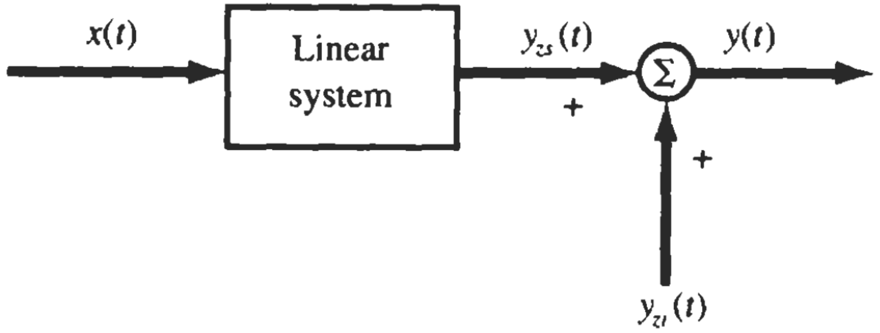
3. Tìm lối ra y(t), y [n]

Việc dịch chuyển các điều kiện ban đầu cho phương trình vi phân tổng quát rất phức tạp $\Rightarrow$ chỉ áp dụng với phương trình vi phân đặt lối vào tại thời điểm t=0 nhưng không tạo ra sự không liên tục ở các điều kiện ban đầu (điều kiện $t = 0^+$ tương đương điều kiện $t = 0^-$) nếu vế phải của PT vi phân không chứa xung đơn vị hoặc vi phân của xung đơn vị.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN/SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

Chú ý:

- Đáp ứng tự nhiên (Natural Response - y^n, y_{zi} của hệ thống là nghiệm thuần nhất với điều kiện ban đầu cho trước, ký hiệu là $y^{(n)}$.
- Đáp ứng cưỡng bức (Forced Response - y^f, y_{zs}) của hệ thống là lối ra của hệ thống (y^h+y^p) khi có tín hiệu lối vào với giả thiết các điều kiện ban đầu bằng 0. Đáp ứng cưỡng bức có dạng giống với nghiệm đầy đủ của phương trình vi phân/sai phân. Hệ thống có các điều kiện ban đầu bằng 0 được gọi là "at rest" do nó không có bộ nhớ hay năng lượng được lưu trữ trong hệ thống. Đáp ứng cưỡng bức có tính tuyến tính và bất biến.



PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

VÍ DỤ: Tìm nghiệm thuần nhất của phương trình vi phân

$$5\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 2x(t)$$

Bài giải:

$$\begin{aligned} 5r + 10 &= 0 \\ r &= -2 \\ y^{(h)}(t) &= c_1 e^{-2t} \end{aligned}$$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

VÍ DỤ: Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân

$$5\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 2x(t)$$

Với $x(t) = 2$

Bài giải:

$$\begin{aligned} y^{(p)}(t) &= k \\ 10k &= 2(2) \\ k &= \frac{2}{5} \\ y^{(p)}(t) &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

VÍ DỤ: Tìm nghiệm của phương trình vi phân có điều kiện đầu vào

$$\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = 2x(t), \quad y(0^-) = 1, x(t) = u(t)$$

Bài giải:

Nghiệm thuần nhất:

$t \geq 0$

$$\begin{aligned} r + 10 &= 0 \\ r &= -10 \\ y^{(n)}(t) &= ce^{-10t} \end{aligned}$$

Nghiệm riêng:

$y^{(p)}(t) = k = \frac{1}{5}$ với t > 0

Lối ra:

$$y(t) = \frac{1}{5} + ce^{-10t}$$

y(0⁺)= $y(0^-) = 1 = \frac{1}{5} + c$

$$c = \frac{4}{5}$$

$$y(t) = \frac{1}{5}\left[1 + 4e^{-10t}\right]$$ với t > 0

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

VÍ DỤ: Tìm nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

VÍ DỤ: Tìm nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân

$$y[n] - \tfrac{1}{4}y[n-1] - \tfrac{1}{8}y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

Bài giải:

$$\begin{aligned} r^2 - \frac{1}{4}r - \frac{1}{8} &= 0 \\ r &= \frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \\ y^{(h)}[n] &= c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2\left(-\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

VÍ DỤ: Tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân

$$y[n] - \frac{2}{5}y[n-1] = 2x[n]$$

$$x[n] = 2u[n]$$

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

VÍ DỤ: Tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân

$$y[n] - \tfrac{2}{5}y[n-1] = 2x[n]$$
$$x[n] = 2u[n]$$

Bài giải:

$$\begin{aligned} y^{(p)}[n] &= ku[n] \\ k - \frac{2}{5}k &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \frac{20}{3} \\ y^{(p)}[n] &= \frac{20}{3}u[n] \end{aligned}$$

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

VÍ DỤ: Tìm nghiệm của phương trình sai phân

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 2x[n], \quad y[-1] = 3, x[n] = (\frac{-1}{2})^n u[n]$$

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

VÍ DỤ: Tìm nghiệm của phương trình sai phân

$$y[n] - \tfrac{1}{2}y[n-1] = 2x[n], \quad y[-1] = 3, x[n] = (\tfrac{-1}{2})^n u[n]$$

Bài giải:

$$\begin{aligned}
n \geq 0 & \quad \text{natural: characteristic equation} \\
r - \frac{1}{2} &= 0 \\
y^{(n)}[n] &= c\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
& \quad \text{particular} \\
y^{(p)}[n] &= k\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\
k\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}k\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\
k &= 1 \\
y^{(p)}[n] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \quad \text{Translate initial conditions} \\
y[n] &= \frac{1}{2}y[n-1] + 2x[n] \\
y[0] &= \frac{1}{2}3 + 2 = \frac{7}{2} \\
y[n] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + c\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\
\frac{7}{2} &= 1 + c \\
c &= \frac{5}{2} \\
y[n] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]
\end{aligned}$$

PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG SỐ

VÍ DỤ: Tìm nghiệm của phương trình sai phân

$$y[n] - \tfrac{1}{2}y[n-1] = 2x[n], \quad y[-1] = 3, x[n] = (\tfrac{-1}{2})^n u[n]$$

Bài giải:

$$\begin{aligned}
n \geq 0 & \quad \text{natural: characteristic equation} \\
r - \frac{1}{2} &= 0 \\
y^{(n)}[n] &= c\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
& \quad \text{particular} \\
y^{(p)}[n] &= k\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\
k\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}k\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} &= 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\
k &= 1 \\
y^{(p)}[n] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]
\end{aligned}$$

Translate initial conditions

$$\begin{aligned}
y[n] &= \frac{1}{2}y[n-1] + 2x[n] \\
y[0] &= \frac{1}{2}3 + 2 = \frac{7}{2} \\
y[n] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + c\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \\
\frac{7}{2} &= 1 + c \\
c &= \frac{5}{2} \\
y[n] &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]
\end{aligned}$$