NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tír

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

Biểu diễn của tín hiệu và hệ thống trong miền tần số

NGUYEN Hong Thinh

Signal and System Laboratory FET-UET-VNU

Ngày 29 tháng 10 năm 2020

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples

- 1 Bổ túc toán
- 2 Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

1 Bổ túc toán

2 Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier Có các cách nào biểu diễn số phức?

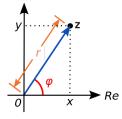
$$z = x + j.y = (x, y)$$

- x: Phần thực (Real) = Re(z)
- y: Phần ảo (Image) =**Im(z)**

$$\mathbf{x} = r.cos(\varphi), y = r.sin(\varphi)$$

• then
$$z = r.cos(\varphi) + j.r.sin(\varphi)$$

Biên độ (Amplitude)



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} = |z|$$

■ Pha (Phase)

$$\varphi = artan(y/x) = artan(Im(z)/Re(z)) = \Phi(z)$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

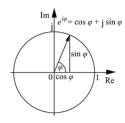
Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Công thức Euler:

$$lacksquare e^{jarphi}=\cos(arphi)+j.\sin(arphi),$$
 với $arphi\in R$



Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Công thức Euler:

- \bullet $e^{j\varphi} = cos(\varphi) + j.sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$
- $\qquad \qquad \bullet^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j.\sin(-\varphi)$

 $\begin{array}{c|c}
\operatorname{Im} & e^{i\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \\
\hline
& \sin \varphi \\
\hline
& 0 \cos \varphi \\
\end{array}$

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

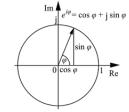
Example

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Công thức Euler:

- $e^{j\varphi} = cos(\varphi) + j.sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$
- $\bullet e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j.\sin(-\varphi)$
- hay $e^{-j\varphi} = cos(\varphi) j.sin(\varphi)$



Bổ túc toán

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Example

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

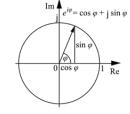
Công thức Euler:

 \bullet $e^{j\varphi} = cos(\varphi) + j.sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$

$$\bullet$$
 $e^{-j\varphi} = cos(-\varphi) + j.sin(-\varphi)$

• hay
$$e^{-j\varphi} = cos(\varphi) - j.sin(\varphi)$$

■ Do đó:



Bổ túc toán

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí

Example

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Công thức Euler:

 $lacksquare e^{jarphi}=\cos(arphi)+j.\sin(arphi),$ với $arphi\in R$

$$\bullet$$
 $e^{-j\varphi} = cos(-\varphi) + j.sin(-\varphi)$

$$lacksquare$$
 hay $e^{-jarphi}=\cos(arphi)-j.\sin(arphi)$

- Do đó:
- $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$

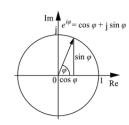
Bổ túc toán

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tír hiệu

Examples



Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Công thức Euler:

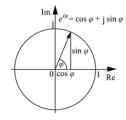
Bổ túc toán $e^{j\varphi} = cos(\varphi) + j.sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$

$$\bullet$$
 $e^{-j\varphi} = cos(-\varphi) + j.sin(-\varphi)$

$$lacksquare$$
 hay $e^{-jarphi}=\cos(arphi)-j.\sin(arphi)$

$$\cos(\varphi) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2}$$

$$lacksquare$$
 $sin(arphi)=rac{e^{jarphi}-e^{-jarphi}}{2j}$



Phổ của t

trong miền

Công thức khai triển chuỗi

Examples

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Hê quả:

Bổ túc toán

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Examples

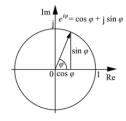
Tính chất của chuỗi Fourier

$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j.\sin(\varphi)$

- $z = r.cos(\varphi) + j.r.sin(\varphi) = r.e^{j\varphi}$
- $z = |z|.e^{j\Phi(z)}$
- $|e^{jarphi}|=1$; số phức e^{jarphi} thuộc đường tròn đơn vi

$$\bullet$$
 $e^{j0} = 1, e^{i\pi} = -1, e^{j.2\pi} = 1$

- $e^{j\pi/2} = j, e^{-j.\pi/2} = -j$
- $e^{j\varphi} = e^{j\varphi}.e^{j2\pi} = e^{j(\varphi+2\pi)}$, hay $e^{j\varphi}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π



Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toán

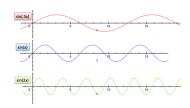
Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier



Định nghĩa

- $\exists 0 < T < \infty$: x(t) = x(t+T)
- $\exists N \in \mathbb{N}, 0 < N < \infty$: x(n) = x(n+N)
- Chu kỳ: T (or N)
- Tần số: $f = \frac{1}{T}$ (or $\frac{1}{N}$) (Hz)
- Tần số: $\omega = \frac{2\pi}{T}(or\frac{2\pi}{N}) = 2\pi f$ (Rad/s)
- \blacksquare Trong chương trình, khi nhắc đến tần số, nghĩa là ω

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn của tín hiệt tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier $\mathbf{e}^{j\omega t}=e^{j\omega(t+rac{2\pi}{\omega})}$ với orall t nên $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với chu kỳ $T=rac{2\pi}{\omega}$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn của tín hiệt tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

$$\mathbf{e}^{j\omega t}=\mathbf{e}^{j\omega(t+rac{2\pi}{\omega})}$$
 với $orall t$ nên $\mathbf{e}^{j\omega t}$ tuần hoàn với chu kỳ $T=rac{2\pi}{\omega}$

lacksquare hay $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với tần số ω

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toán

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Example

- $\mathbf{e}^{j\omega t}=\mathbf{e}^{j\omega(t+rac{2\pi}{\omega})}$ với orall t nên $\mathbf{e}^{j\omega t}$ tuần hoàn với chu kỳ $T=rac{2\pi}{\omega}$
- lacksquare hay $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với tần số ω
- lacksquare Tương tự $e^{j\omega n}$ tuần hoàn với tần số ω

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toán

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

- $\mathbf{e}^{j\omega t}=\mathbf{e}^{j\omega(t+rac{2\pi}{\omega})}$ với orall t nên $\mathbf{e}^{j\omega t}$ tuần hoàn với chu kỳ $T=rac{2\pi}{\omega}$
- lacksquare hay $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với tần số ω
- lacksquare Tương tự $e^{j\omega n}$ tuần hoàn với tần số ω
- $\blacksquare \ e^{j\omega t}, e^{j\omega n}$ là đại lượng cơ bản **đặc trưng cho tần số** ω

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toár

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Example

Tính chất của

1 Bổ túc toán

- 2 Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số
 - Công thức khai triển chuỗi Fourier
 - Phổ của tín hiệu
 - Examples
 - Tính chất của chuỗi Fourier

Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Định lý Fourier

Mọi tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin có tần số là số nguyên lần tần số cơ bản NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biểu diên của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tír hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

- Mọi tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin có tần số là số nguyên lần tần số cơ bản
- x(t) là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở T, tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ thì:

Biểu diễn của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phô của tí hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

- Mọi tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin có tần số là số nguyên lần tần số cơ bản
- x(t) là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở T, tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ thì:
- $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)],$

Biểu diễn của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tír hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

- Mọi tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin có tần số là số nguyên lần tần số cơ bản
- x(t) là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở T, tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ thì:
- $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)],$
- Tương tự với thời gian rời rạc: x(n) là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở N, tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ thì:

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

- Mọi tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin có tần số là số nguyên lần tần số cơ bản
- x(t) là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở T, tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ thì:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)],$$

- Tương tự với thời gian rời rạc: x(n) là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở N, tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ thì:
- $x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 n) + b_k \sin(k\omega_0 n)],$

Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

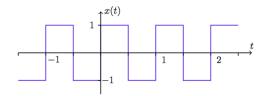
Bổ túc toán

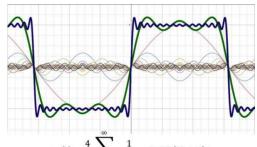
Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Example





$$x(t) = \frac{4}{\Pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin 2\Pi (2k+1)t$$

Biểu diễn tần số

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

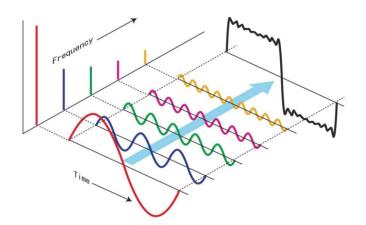
Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier Biểu diễn tín hiệu tần số = Phân tích tín hiệu thành tổ hợp tuyến tính các \sin/\cos



Biểu diễn tần số

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

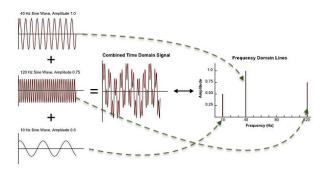
Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của ti

Example

Tính chất của chuỗi Fourier Biểu diễn tín hiệu trong miền tần số:

- Tín hiệu đã cho có các tần số nào?
- Độ lớn của mỗi thành phần tần số đó?



Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian LIÊN TỤC

■ Euler: $cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}),$ $sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$ NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tír hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian LIÊN TỤC

- Euler: $cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}),$ $sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$
- Viết lại định lý Fourier ta có:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k)e^{jk\omega_0t}$$

trong đó X(k) là trọng số.

Biểu diên của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tír

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian LIÊN TỤC

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$$

- lacksquare $e^{jk\omega_0t}$ đặc trưng cho tần số $k\omega_0$
- X(k) lớn hay nhỏ \sim thành phần tần số $k.\omega_0$ trong $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ lớn hay nhỏ

Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biểu diên của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tíi hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian LIÊN TỤC

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$$

- lacksquare $e^{jk\omega_0t}$ đặc trưng cho tần số $k\omega_0$
- X(k) lớn hay nhỏ \sim thành phần tần số $k.\omega_0$ trong $\mathbf{x}(t)$ lớn hay nhỏ
- ⇒Đây là công thức biểu diễn tần số của tín hiệu x(t) vì:
 - Chỉ ra tín hiệu x(t) chứa tần số $k.\omega_0$, k nguyên
 - Độ lớn tần số $k.\omega_0$ là X(k)

Biểu diễn của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiêu

Example

Tính chất của

Trong miền thời gian LIÊN TỤC

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$$

- lacksquare $e^{jk\omega_0t}$ đặc trưng cho tần số $k\omega_0$
- X(k) lớn hay nhỏ \sim thành phần tần số $k.\omega_0$ trong $\mathbf{x}(t)$ lớn hay nhỏ
- ⇒Đây là công thức biểu diễn tần số của tín hiệu x(t) vì:
 - Chỉ ra tín hiệu x(t) chứa tần số $k.\omega_0$, k nguyên
 - Độ lớn tần số $k.\omega_0$ là X(k)
- X(k): hệ số khai triển chuỗi Fourier x(t): (Xem sách Simon Haykin)

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệt tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tír hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian LIÊN TỤC

- x(t) tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T, ω₀ tần số cơ sở:
- Công thức khai triển chuỗi Fourier (FS):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$$

■ Công thức tính hệ số chuỗi Fourier:

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RỜI RẠC

$$x(n) = \sum_{k} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệt tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RÖI RẠC

■ Định lý Fourier:

$$x(n) = \sum_{k} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

 $\begin{array}{l} \bullet \ e^{jk\omega_0n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jn\frac{2\pi}{N}k}e^{j2n\pi} = e^{jn\frac{2\pi}{N}(k+N)} = e^{j(k+N)\omega_0n} \\ \text{(do } e^{j2k\pi} = 1 \forall n \in N) \end{array}$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tír hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RÖI RẠC

$$x(n) = \sum_{k} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

- $e^{jk\omega_0n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jn\frac{2\pi}{N}k}e^{j2n\pi} = e^{jn\frac{2\pi}{N}(k+N)} = e^{j(k+N)\omega_0n}$ (do $e^{j2k\pi} = 1 \forall n \in N$)
- Vậy $e^{j\omega_0nk}=e^{j\omega_0n(k+N)}$, hay $e^{jk\omega_0n}$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N với biến k

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biểu diễn của tín hiệt tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RÖI RẠC

$$x(n) = \sum_{k} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

- $e^{jk\omega_0n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jn\frac{2\pi}{N}k}e^{j2n\pi} = e^{jn\frac{2\pi}{N}(k+N)} = e^{j(k+N)\omega_0n}$ (do $e^{j2k\pi} = 1 \forall n \in N$)
- Vậy $e^{j\omega_0nk}=e^{j\omega_0n(k+N)}$, hay $e^{jk\omega_0n}$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N với biến k
- lacksquare ightarrow Do đó $e^{jk\omega_0n}$ chỉ có N dạng/giá trị khác nhau

Biểu diễn của tín hiệt tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RÖI RẠC

$$x(n) = \sum_{k} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

- $e^{jk\omega_0 n} = e^{jk\frac{2\pi}{N}n} = e^{jn\frac{2\pi}{N}k}e^{j2n\pi} = e^{jn\frac{2\pi}{N}(k+N)} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$ (do $e^{j2k\pi} = 1 \forall n \in N$)
- Vậy $e^{j\omega_0nk} = e^{j\omega_0n(k+N)}$, hay $e^{jk\omega_0n}$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N với biến k
- lacksquare \Rightarrow Do đó $e^{jk\omega_0n}$ chỉ có N dạng/giá trị khác nhau
 - $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega_0 n}$

Biểu diên của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RỜI RẠC

■ Công thức khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu rời rạc tuần hoàn (DTFS)

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

■ X(k): hệ số khai triển chuỗi Fourier x(n):

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiêu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Thời gian liên tục

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Thời gian rời rạc

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bố túc toái

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier Thời gian liên tục

l hời gian rời rạc

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

■ Phép khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn \sim biểu diễn tín hiệu thành **tổ hợp tuyến tính** của các đại lương có tần số là $k\omega_0$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

của tín hiện tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier Thời gian liên tục

Thời gian rời rạc

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

 $X(k) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

- Phép khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn \sim biểu diễn tín hiệu thành **tổ hợp tuyến tính** của các đại lượng có tần số là $k\omega_0$
- Các hệ số của phép khai triển đóng vai trò trọng số; thể hiện thành phần tần số $k\omega_0$ trong tín hiệu ban đầu lớn hay bé hay bằng 0.

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier **Định nghĩa:** Phổ của tín hiệu là đồ thị biểu diễn của tín hiệu trong miền tần số.

Phố của tín hiệu

- Với tín hiệu tuần hoàn thì X(k) đặc trưng cho biều diễn của tín hiệu trong miền tần số.
- X(k) là số phức \Rightarrow Vẽ X(k) cần 3 biến Re, Im, $k \Rightarrow$ Vẽ trong không gian, rất phức tạp
- Ta thường quan tâm độ lớn của các thành phần tần số ⇒ Vẽ biên độ và pha của X(k) riêng rẽ.

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiêu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

- Từ x(n), x(t) xác định X(k)
- Biên độ:

$$|X(k)| = \sqrt{\text{Re}(X(k))^2 + \text{Im}(X(k))^2}$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiêu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Phố của tín hiệu

- Từ x(n), x(t) xác định X(k)
- Biên độ:

$$|X(k)| = \sqrt{\text{Re}(X(k))^2 + \text{Im}(X(k))^2}$$

■ Pha:

$$\phi(X(k)) = \arctan[\operatorname{Im}(X(k))/\operatorname{Re}(X(k))]$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Phố của tín hiệu

- Từ x(n), x(t) xác định X(k)
- Biên độ:

$$|X(k)| = \sqrt{\text{Re}(X(k))^2 + \text{Im}(X(k))^2}$$

■ Pha:

$$\phi(X(k)) = \arctan[\operatorname{Im}(X(k))/\operatorname{Re}(X(k))]$$

■ Đồ thị của |X(k)| và $\phi(X(k))$ theo k hoặc $k\omega_0$ được gọi là **Phổ biên độ** và **Phổ pha** của tín hiệu

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

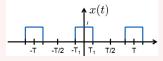
Biểu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau



Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

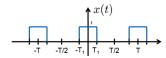
Bổ túc toá

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples



- lacksquare x(t) tuần hoàn với chu kỳ $T\Rightarrow$ Tần số cơ bản: $\omega_0=rac{2\pi}{T}$
- Công thức tính hệ số Fourier:

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

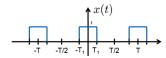
Bổ túc toái

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples



- lacksquare x(t) tuần hoàn với chu kỳ $T\Rightarrow$ Tần số cơ bản: $\omega_0=rac{2\pi}{T}$
- Công thức tính hệ số Fourier:

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} 1.e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{jTk\omega_0}$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

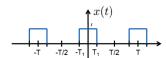
Bổ túc toái

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples



- lacksquare x(t) tuần hoàn với chu kỳ $T\Rightarrow$ Tần số cơ bản: $\omega_0=rac{2\pi}{T}$
- Công thức tính hệ số Fourier:

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{T} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} 1.e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{jTk\omega_0}$$

$$X(k) = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{Tk\omega_0} = \frac{2T1}{T}\operatorname{sinc}(2k\pi \frac{T1}{T})$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

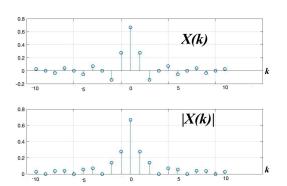
Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier Phổ của tín

hiệu

Examples

- X(k) là số thực; Re(X(k)) = X(k), Im(X(k)) = 0; ⇒ Phổ pha = 0
- Phổ biên độ phụ thuộc vào tỉ số $\frac{T1}{T}$. Giả sử $\frac{T1}{T} = 1/3$:



Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

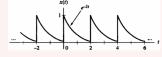
Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau



Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

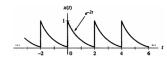
Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier



■ x(t) tuần hoàn với chu kỳ T=2⇒ Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

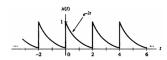
Bổ túc toái

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples



- x(t) tuần hoàn với chu kỳ T=2⇒ Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- $X(k) = \frac{1}{T} \int_{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} e^{-2t} e^{-jk\pi t} dt$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

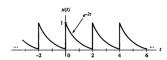
Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí

Examples



- x(t) tuần hoàn với chu kỳ T=2 \Rightarrow Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- $X(k) = \frac{1}{T} \int_{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} e^{-2t} e^{-jk\pi t} dt$
- $X(k) = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} e^{-t(2+jk\pi)} dt = \frac{-1}{2(2+jk\pi)} (e^{-2(2+jk\pi)} 1)$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

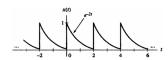
Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệt tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phố của tí hiêu

Examples



- x(t) tuần hoàn với chu kỳ T=2 \Rightarrow Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$
- $X(k) = \frac{1}{T} \int_{T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} e^{-2t} e^{-jk\pi t} dt$
- $X(k) = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} e^{-t(2+jk\pi)} dt = \frac{-1}{2(2+jk\pi)} (e^{-2(2+jk\pi)} 1)$
- $X(k) = \frac{1 e^{-4}}{2(2 + jk\pi)}$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples

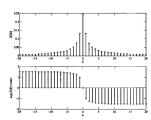
Tính chất của

■ $X(k) = \frac{1-e^{-4}}{2(2+jk\pi)}$ là số phức \Rightarrow Muốn vẽ phổ biên độ, pha cần xác định phần thực phần ảo của X(k)

$$Re(X(k)) = \frac{1-e^{-4}}{4+k\pi^2}$$

$$Im(X(k)) = \frac{k\pi(e^{-4}-1)}{8+2k\pi^2}$$

$$\blacksquare \Rightarrow |X(k)|, \Phi(X(k)) \text{ theo Re}(X(k)), Im(X(k))$$



Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t) + sin(3\pi t)$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier Phổ của tín

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau $x(t)=1+\frac{1}{2}cos(2\pi t)+sin(3\pi t)$

x(t) có sẵn dạng tổng của các tín hiệu sin và cos

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau $x(t)=1+\frac{1}{2}cos(2\pi t)+sin(3\pi t)$

- x(t) có sẵn dạng tổng của các tín hiệu sin và cos
- Thay vì dùng công thức tích phân, ta dùng trực tiếp công thức khai triển Fourier và công thức Euler

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tỉ hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau $x(t)=1+\frac{1}{2}cos(2\pi t)+sin(3\pi t)$

- x(t) có sẵn dạng tổng của các tín hiệu sin và cos
- Thay vì dùng công thức tích phân, ta dùng trực tiếp công thức khai triển Fourier và công thức Euler
- x(t) tuần hoàn chu kỳ T=2; $\omega_0=\pi$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples

- $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t) + sin(3\pi t)$
- $x(t) = e^{j0t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t}$ (Euler)

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t) + sin(3\pi t)$

• $x(t) = e^{j0t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t}$ (Euler)

■ Fourier: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t) + sin(3\pi t)$

•
$$x(t) = e^{j0t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t}$$
 (Euler)

- Fourier: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$
- hay $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\pi t}$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

trong miền

Công thức khai

Phổ của tín

Examples

Tính chất của

 $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t) + sin(3\pi t)$

 $x(t) = e^{j0t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2i}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2i}e^{-j3\pi t}$ (Euler)

■ Fourier: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$ ■ hay $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\pi t}$

■ Đồng nhất hệ số ta có: $X(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ \frac{1}{4}, k = \pm 2 \\ \frac{1}{2j}, k=3 \\ \frac{-1}{2j}, k=-3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiêu

Examples

Tính chất của

 \Rightarrow Muốn vẽ phổ biên độ, pha cần xác định phần thực phần ảo

Viết lại X(k):
$$X(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ \frac{1}{4} + 0.j, k = \pm 2 \\ 0 + \frac{-j}{2}, k=3 \\ 0 + \frac{j}{2}, k=-3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$Re(X(k)) = \begin{cases} 1, k=0 \\ \frac{1}{4}, k = \pm 2 \\ 0, k = \pm 3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases} Im(X(k)) = \begin{cases} 0, k = 0 \\ 0, k = \pm 2 \\ \frac{-1}{2}, k = 3 \\ \frac{1}{2}, k = -3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$$

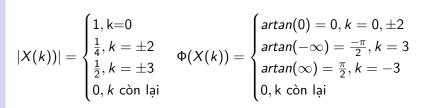
Biểu diên của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

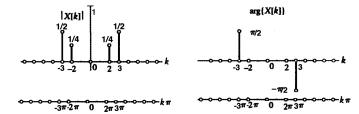
Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples

Tính chất của





Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

Examples

Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau

$$x(n) = 1 + 2\cos(\frac{1}{4}\pi n) + 4\sin(\frac{1}{2}\pi n)$$

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

$$x(n) = 1 + 2\cos(\frac{1}{4}\pi n) + 4\sin(\frac{1}{2}\pi n)$$

x(n) có dạng tổng sin/cos nên ta sử dụng trực tiếp công thức khai triển Fourier và Euler (pp đồng nhất hệ số)

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Examples

- $x(n) = 1 + 2\cos(\frac{1}{4}\pi n) + 4\sin(\frac{1}{2}\pi n)$
 - x(n) có dạng tổng sin/cos nên ta sử dụng trực tiếp công thức khai triển Fourier và Euler (pp đồng nhất hệ số)
 - x(n) tuần hoàn với chu kỳ N=8, $\omega_0=\pi/4$

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Examples

$$x(n) = 1 + 2\cos(\frac{1}{4}\pi n) + 4\sin(\frac{1}{2}\pi n)$$

- x(n) có dạng tổng sin/cos nên ta sử dụng trực tiếp công thức khai triển Fourier và Euler (pp đồng nhất hê số)
- x(n) tuần hoàn với chu kỳ N=8, $\omega_0 = \pi/4$
- Theo Euler:

$$x(n) = e^{j0n} + e^{j\frac{1}{4}\pi n} + e^{-j\frac{1}{4}\pi n} + \frac{2}{j}e^{j\frac{1}{2}\pi n} - \frac{2}{j}e^{-j\frac{1}{2}\pi n}$$

Biểu diễn của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiêu

Examples

$$x(n) = 1 + 2\cos(\frac{1}{4}\pi n) + 4\sin(\frac{1}{2}\pi n)$$

- x(n) có dạng tổng sin/cos nên ta sử dụng trực tiếp công thức khai triển Fourier và Euler (pp đồng nhất hệ số)
- x(n) tuần hoàn với chu kỳ N=8, $\omega_0 = \pi/4$
- Theo Euler:

$$x(n) = e^{j0n} + e^{j\frac{1}{4}\pi n} + e^{-j\frac{1}{4}\pi n} + \frac{2}{j}e^{j\frac{1}{2}\pi n} - \frac{2}{j}e^{-j\frac{1}{2}\pi n}$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=0}^{7} X(k) e^{jk\frac{1}{4}\pi n}$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier $\blacksquare \ e^{j\varphi}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{j\varphi}=e^{j(\varphi+2k\pi)}$ với $\forall \varphi$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín

Examples

- ullet e^{jarphi} tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{jarphi}=e^{j(arphi+2k\pi)}$ với $\forall arphi$
- Do đó: $e^{-j\frac{1}{4}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{4}\pi n + 2\pi n)} = e^{j\frac{7}{4}\pi n}$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

- ullet e^{jarphi} tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{jarphi}=e^{j(arphi+2k\pi)}$ với $\forall arphi$
- Do đó: $e^{-j\frac{1}{4}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{4}\pi n + 2\pi n)} = e^{j\frac{7}{4}\pi n}$
- $e^{-j\frac{1}{2}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{2}\pi n + 2\pi n)} = e^{j\pi n\frac{3}{2}} = e^{j\frac{6}{4}\pi n}$

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

- ullet e^{jarphi} tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{jarphi}=e^{j(arphi+2k\pi)}$ với $\forall arphi$
- Do đó: $e^{-j\frac{1}{4}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{4}\pi n + 2\pi n)} = e^{j\frac{7}{4}\pi n}$
- $\bullet e^{-j\frac{1}{2}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{2}\pi n + 2\pi n)} = e^{j\pi n\frac{3}{2}} = e^{j\frac{6}{4}\pi n}$
- Vậy: $x(n) = e^{j0} + e^{\frac{1}{4}j\pi n} + e^{j\frac{7}{4}\pi n} + \frac{2}{j}e^{\frac{2}{4}j\pi n} \frac{2}{j}e^{j\frac{6}{4}\pi n}$

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

hiệu Examples

Tính chất của chuỗi Fourier ullet e^{jarphi} tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{jarphi}=e^{j(arphi+2k\pi)}$ với orall arphi

■ Do đó:
$$e^{-j\frac{1}{4}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{4}\pi n + 2\pi n)} = e^{j\frac{7}{4}\pi n}$$

$$e^{-j\frac{1}{2}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{2}\pi n + 2\pi n)} = e^{j\pi n\frac{3}{2}} = e^{j\frac{6}{4}\pi n}$$

• Vậy:
$$x(n) = e^{j0} + e^{\frac{1}{4}j\pi n} + e^{j\frac{7}{4}\pi n} + \frac{2}{j}e^{\frac{2}{4}j\pi n} - \frac{2}{j}e^{j\frac{6}{4}\pi n}$$

■ Đồng nhất hệ số:
$$x(n) = \sum_{k=0}^{7} X(k)e^{jk\frac{1}{4}\pi n}$$

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier ullet e^{jarphi} tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{jarphi}=e^{j(arphi+2k\pi)}$ với $\forall arphi$

■ Do đó:
$$e^{-j\frac{1}{4}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{4}\pi n + 2\pi n)} = e^{j\frac{7}{4}\pi n}$$

$$e^{-j\frac{1}{2}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{2}\pi n + 2\pi n)} = e^{j\pi n\frac{3}{2}} = e^{j\frac{6}{4}\pi n}$$

■ Vậy:
$$x(n) = e^{j0} + e^{\frac{1}{4}j\pi n} + e^{j\frac{7}{4}\pi n} + \frac{2}{j}e^{\frac{2}{4}j\pi n} - \frac{2}{j}e^{j\frac{6}{4}\pi n}$$

■ Đồng nhất hệ số:
$$x(n) = \sum_{k=0}^{7} X(k)e^{jk\frac{1}{4}\pi n}$$

$$X(k) = \begin{cases} 1, k = 0, 1, 7 \\ \frac{2}{j}, k = 2 \\ \frac{-2}{j}, k = 6 \\ 0, k \text{ khác hay k} = 3,4,5 \end{cases}$$

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Xét

$$X(k+N) = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} e^{-j2\pi n}$$

hay
$$X(k+N) = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$
 do $e^{-j2\pi n} = 1$

Như vậy: X(k+N)=X(k) hay X(k) cũng tuần hoàn với chu kỳ N

Chỉ cần xác định giá trị của X(k) trong 1 chu kỳ N, ta sẽ xác định được mọi giá trị khác của X(k).

Chú ý:

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Xét

$$X(k+N) = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} e^{-j2\pi n}$$

hay
$$X(k+N) = \frac{1}{N} \sum_{N} x(n) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$
 do $e^{-j2\pi n} = 1$

Như vậy: X(k+N)=X(k) hay X(k) cũng tuần hoàn với chu kỳ N

- Chỉ cần xác định giá trị của X(k) trong 1 chu kỳ N, ta sẽ xác định được mọi giá trị khác của X(k).
- Phổ của tín hiệu rời rạc tuần hoàn cũng có dạng rời rạc tuần hoàn, với chu kỳ N

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phố của tí hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Tính chất

■ Tuyến tính:

 x_1, x_2 là các tín hiệu tuần hoàn với tần số ω_0 $x_1 \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X_1(k)$,

$$x_2 \xrightarrow{\mathsf{Fourier Series}} X_2(k)$$

■ Thì:
$$(a_1x_1 + a_2x_2) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} (a_1X_1(k) + a_2X_2(k))$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier

- Dịch thời gian:
- $\blacksquare x(t) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$

thì
$$x(t-t_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k).e^{-jk\omega_0t_0}$$
,

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phố của tír hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

- Dịch thời gian:

thì
$$x(t-t_0) \stackrel{\text{Fourier Series}}{\longrightarrow} X(k).e^{-jk\omega_0t_0}$$
,

$$\blacksquare \ \ x(n) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$$

$$x(n-n_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k).e^{-jk\omega_0n_0}$$

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tíi hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

- Dịch thời gian:
- $x(t) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$ thì $x(t-t_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k).e^{-jk\omega_0t_0}$,
- $x(n) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$ $x(n-n_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k).e^{-jk\omega_0 n_0}$
- Phép dịch thời gian không làm thay đổi phổ biên độ của tín hiệu mới mà chỉ làm dịch pha

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toái

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

- Dịch thời gian:
- $x(t) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$ thì $x(t-t_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k).e^{-jk\omega_0t_0}$,
- $x(n) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$ $x(n-n_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k).e^{-jk\omega_0 n_0}$
- Phép dịch thời gian không làm thay đổi phổ biên độ của tín hiệu mới mà chỉ làm dịch pha
- Dịch trong miền thời gian tương đương với dịch pha trong miền tần số.

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tír

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Tính chất

Công suất (Định lý Parseval): Công suất trung bình của tín hiệu tuần hoàn được xác định bằng tổng bình phương các hệ số khai triển chuỗi Fourier.

Biêu diên của tín hiệi tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiêu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

- Công suất (Định lý Parseval): Công suất trung bình của tín hiệu tuần hoàn được xác định bằng tổng bình phương các hệ số khai triển chuỗi Fourier.
- $P(x(t)) = \frac{1}{T} \int_{T} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2$,

của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

Tính chất

Công suất (Định lý Parseval): Công suất trung bình của tín hiệu tuần hoàn được xác định bằng tổng bình phương các hệ số khai triển chuỗi Fourier.

■
$$P(x(t)) = \frac{1}{T} \int_{T} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2$$
,

$$P(x(n)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tí hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier

- Công suất (Định lý Parseval): Công suất trung bình của tín hiệu tuần hoàn được xác định bằng tổng bình phương các hệ số khai triển chuỗi Fourier.
- $P(x(t)) = \frac{1}{T} \int_{T} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2$,
- $P(x(n)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2$
- Đồ thị của $X(k)^2$ được gọi là **phổ công suất** của tín hiệu.

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bố túc toá

Biêu diên của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier Với tín hiệu:

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t) + sin(3\pi t)$$

Ta có thể tách thành 3 tín hiệu thành phần: x1(t) = 1

$$x2(t) = \frac{1}{2}cos(2\pi t)$$

$$x3(t) = \sin(3\pi t)$$

Sử dụng khai triến Fourier và công thức Euler (phương pháp đồng nhất hệ số), ta có phổ biên độ của các tín hiệu trên lần lượt là:

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

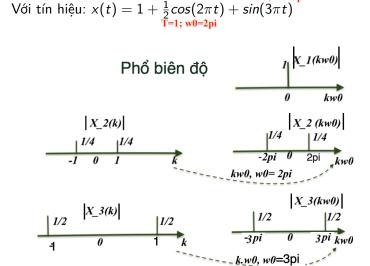
Biểu diễn của tín hiệt tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiêu

Example

Tính chất của chuỗi Fourier



T=2/3; w0=3pi

Signals & Systems

NGUYEN Hong Thinh

Bổ túc toá

Biểu diễn của tín hiệt tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai triển chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

Examples

Tính chất của chuỗi Fourier Với tín hiệu: $x(t) = 1 + \frac{1}{2}cos(2\pi t) + sin(3\pi t)$

