CHƯƠNG 3:
BIỂU DIỄN FOURIER CỦA TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG LTI

GV: ThS. Đinh Thị Thái Mai

3.1 Hệ thống liên tục

- Tín hiệu dạng sin và hệ thống LTI
- Biểu diễn chuỗi Fourier của tín hiệu liên tục tuần hoàn
- Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

Tín hiệu dạng sin và hệ LTI

- **Đáp ứng của hệ thống LTI với tín hiệu dạng sin**
- Xem xét một hệ thống LTI có đáp ứng xung h(t) và tín hiệu vào $x(t)=e^{j\omega t}$. Đáp ứng của hệ thống được tính như sau:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}d\tau = e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = H(\omega)e^{j\omega t}$$

trong đó H(ω) là đáp ứng tần số:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

đặc trưng cho đáp ứng của hệ thống với tần số ω của tín hiệu vào dạng sin.

Tín hiệu dạng sin và hệ LTI

- Tín hiệu ra có cùng tần số với tần số của tín hiệu vào dạng sin.
- Sự thay đổi về biên độ và pha của tín hiệu ra so với tín hiệu vào được đặc trưng bởi đáp ứng tần số H(ω) với hai thành phần sau đây:

$$|H(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}[H(\omega)]^2 + \mathrm{Im}[H(\omega)]^2}$$

được gọi là đáp ứng biên độ và

$$\varphi(\omega) = \mathrm{a}\tan\frac{\mathrm{Im}[H(\omega)]}{\mathrm{Re}[H(\omega)]}$$

được gọi là đáp ứng pha của hệ thống

Tín hiệu dạng sin và hệ LTI

- Khi đó ta có thể biểu diễn tín hiệu ra dưới dạng sau đây:

$$y(t) = \left|H(\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} = \left|H(\omega)\right| e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}$$

nghĩa là so với tín hiệu vào thì tín hiệu ra có biên độ lớn gấp $|H(\omega)|$ lần và lệch pha đi một góc là $\varphi(\omega)$

Biểu diễn chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn

- Một tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ T có thể biểu diễn được một cách chính xác bởi chuỗi Fourier dưới đây:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_o t}$$

trong đó $\omega_0 = 2\pi/T$ là tần số cơ bản của tín hiệu x(t)

- Nói cách khác, mọi tín hiệu tuần hoàn đều có thể biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin phức có tần số là một số nguyên lần tần số cơ bản

Điều kiện hội tụ

- Điều kiện để sai số bình phương trung bình giữa x(t) và biểu diễn chuỗi Fourier của x(t) bằng không là x(t) phải là tín hiệu công suất, nghĩa là:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Điều kiện hội tụ tại mọi điểm (điều kiện Dirichlet):
  - x(t) bị chặn
  - Số điểm cực trị trong một chu kỳ của x(t) là hữu hạn
  - Số điểm không liên tục trong một chu kỳ của x(t) là hữu hạn

Biểu diễn đáp ứng của hệ LTI

- Đáp ứng của một hệ LTI có đáp ứng tần số là $H(\omega)$ với mỗi thành phần $e^{jk\omega_0 t}$ là $H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow$ đáp ứng của hệ thống đó với tín hiệu vào x(t) sẽ biểu diễn được như sau:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

Biểu diễn chuỗi Fourier của tín hiệu liên tục tuần hoàn

- **Tính trực giao của các thành phần $e^{jk\omega_0 t}$**
- Hai tín hiệu f(t) và g(t) tuần hoàn cùng với chu kỳ T được gọi là trực giao nếu điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\int_0^T f(t)g^*(t)dt = 0$$

- Hai tín hiệu $e^{jk\omega_0 t}$ và $e^{jl\omega_0 t}$ với tần số cơ bản $\omega_0 = 2\pi/T$ trực giao nếu $k \neq l$:

$$\forall k \neq l : \int_0^T e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t} dt = 0$$

- **Tính các hệ số của chuỗi Fourier**
- Các hệ số của chuỗi Fourier của tín hiệu tuần hoàn x(t) được tính bằng cách sử dụng tính chất trực giao của các tín hiệu thành phần $\{e^{jk\omega_0 t}\}$ như sau:

$$\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \int_0^T \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{jl\omega_0 t}e^{-jk\omega_0 t}dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \int_0^T e^{jl\omega_0 t}e^{-jk\omega_0 t}dt = c_k T$$

$$\rightarrow c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Biểu diễn chuỗi Fourier của tín hiệu liên tục tuần hoàn

- **Các tính chất của biểu diễn chuỗi Fourier**
- Tính tuyến tính:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t},\ z(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\rightarrow \alpha x(t)+\beta z(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\alpha c_k+\beta d_k)e^{jk\omega_0 t}$$

- Tính dịch thời gian:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\rightarrow x(t-t_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(c_k e^{-jk\omega_0 t_0})e^{jk\omega_0 t}$$

Biểu diễn chuỗi Fourier của tín hiệu liên tục tuần hoàn

- Tính đạo hàm:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (jk\omega_0 c_k) e^{jk\omega_0 t}$$

- Tính tích phân:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{jk\omega_0} e^{jk\omega_0 t}$$

Biểu diễn chuỗi Fourier của tín hiệu liên tục tuần hoàn

- Công thức Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Giá trị $|c_k|^2$ có thể coi như đại diện cho công suất của tín hiệu thành phần $e^{jk\omega_0 t}$ trong tín hiệu x(t) → hàm biểu diễn giá trị $|c_k|^2$ theo tần số $\omega_k = k\omega_k$ ($k \in Z$) cho ta biết phân bố công suất của tín hiệu x(t) và được gọi là phổ mật độ công suất của x(t).

Chú ý: phổ mật độ công suất của tín hiệu tuần hoàn là một hàm theo tần số rời rạc

Biểu diễn chuỗi Fourier của tín hiệu liên tục tuần hoàn

- Tính đối xứng: với tín hiệu tuần hoàn x(t) có biểu diễn chuỗi Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

thì phổ mật độ công suất của x(t) là một hàm chẵn, nghĩa là: $\forall k: |c_k|^2 = |c_{-k}|^2$. Ngoài ra:

  - Nếu x(t) là tín hiệu thực: $\forall k: c_k = c_{-k}^*$
  - Nếu x(t) là tín hiệu thực và chẵn: $\forall k: c_k = c_{-k}$
  - Nếu x(t) là tín hiệu thực và lẻ: $\forall k: c_k = -c_{-k}$

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- **Mở rộng biểu diễn chuỗi Fourier**
- Vì $\omega_0 \rightarrow 0$ nên $\omega = k\omega_0$ là một biến liên tục, ta có thể viết lại các biểu thức ở phần trước như sau:

$$x(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\omega_0 \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c(\omega)}{\omega_0} e^{j\omega t} d\omega =$$

trong đó, c(ω) là một hàm theo tần số liên tục và được xác định như sau:

$$c(\omega) = \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- **Biến đổi Fourier**
- Đặt $X(\omega) = 2\pi c(\omega)/\omega_0$, chúng ta có được công thức của biến đổi Fourier của tín hiệu x(t):

$$X(\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

- Công thức của biến đổi Fourier nghịch:

$$x(t) = F^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- Cách biểu diễn khác của biến đổi Fourier của tín hiệu x(t), với biến số f thay cho tần số góc ω:

$$X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

- Công thức của biến đổi Fourier nghịch tương đương

$$x(t) = F^{-1}[\mathrm{X}(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- Hàm X(ω) được gọi là phổ (Fourier) của tín hiệu x(t) theo tần số
- Hàm biểu diễn

$$|X(\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}[X(\omega)]^2 + \mathrm{Im}[X(\omega)]^2}$$

được gọi là phổ biên độ của tín hiệu x(t) theo tần số

- Hàm

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[X(\omega)]}{\mathrm{Re}[X(\omega)]}\right)$$

được gọi là phổ pha của tín hiệu x(t) theo tần số

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- **Điều kiện hội tụ**
- Điều kiện để các biến đổi Fourier thuận và nghịch của tín hiệu x(t) tồn tại là x(t) phải là tín hiệu năng lượng, nghĩa là:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Điều kiện để tín hiệu khôi phục từ biến đổi Fourier của tín hiệu x(t) hội tụ về x(t) tại mọi thời điểm, ngoại trừ tại các điểm không liên tục (Điều kiện Dirichlet):
  - $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$
  - Số điểm cực trị của x(t) là hữu hạn
  - Số điểm không liên tục của x(t) là hữu hạn

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- **Các tính chất của biến đổi Fourier**
- Tính tuyến tính:

$$F[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha X_1(\omega) + \beta X_2(\omega)$$

- Dịch thời gian

$$F[x(t - t_0)] = X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- Dịch tần số

$$F[x(t)e^{j\gamma t}] = X(\omega - \gamma)$$

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- Co giãn trục thời gian:

$$F[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

- Đạo hàm

$$F\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = j\omega X(\omega)$$

- Tích phân

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] = \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- Biến đổi Fourier của tích chập:

$$F[f(t) * g(t)] = F(\omega)G(\omega)$$

- Biến đổi Fourier của tích thường (điều chế)

$$F[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * G(\omega)$$

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- Công thức Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Giá trị $|X(\omega)|^2$ có thể coi như đại diện cho năng lượng của tín hiệu thành phần $e^{j\omega t}$ trong tín hiệu x(t) → hàm biểu diễn $|X(\omega)|^2$ theo tần số ω cho ta biết phân bố năng lượng của tín hiệu x(t) và được gọi là phổ mật độ năng lượng của x(t).

Chú ý: phổ mật độ năng lượng của tín hiệu không tuần hoàn là một hàm theo tần số liên tục

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- Tính đối xứng:
  - Phổ mật độ năng lượng của x(t) là một hàm chẵn, nghĩa là:

$$\forall \omega : \left| X(\omega) \right|^2 = \left| X(-\omega) \right|^2$$

  - Nếu x(t) là tín hiệu thực:

$$\forall \omega : X(\omega) = X^*(-\omega)$$

  - Nếu x(t) là tín hiệu thực và chẵn: X(ω) cũng là hàm chẵn, nghĩa là:

$$\forall \omega : X(\omega) = X(-\omega)$$

  - Nếu x(t) là tín hiệu thực và lẻ: X(ω) cũng là hàm lẻ, nghĩa là:

$$\forall (\omega) : X(\omega) = -X(-\omega)$$

- Tính đối ngẫu: nếu X(ω) là biến đổi Fourier của tín hiệu x(t) thì:

$$F[X(t)] = 2\pi x(-\omega)$$

Biến đổi Fourier của tín hiệu không tuần hoàn

- Chu kỳ hiệu dụng của tín hiệu x(t) được định nghĩa như sau:

$$T_d = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 \, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt} \right]^{1/2}$$

- Băng thông hiệu dụng của tín hiệu x(t) được định nghĩa là:

$$B_\omega = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |X(\omega)|^2 \, d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega} \right]^{1/2}$$

- Tích của băng thông với thời gian của bất kỳ tín hiệu nào là bị chặn dưới: $T_d B_\omega \geq 1/2$

- **Tần số cộng hưởng và băng thông hệ thống**
- Tần số cộng hưởng ω_r của một hệ thống có đáp ứng tần số $H(\omega)$ là tần số tại đó $|H(\omega)|$ là cực đại.
  - Để xác định ω_r, giải phương trình $d|H(\omega)|/d\omega=0$
  - Giá trị $|H(\omega_r)|$ được gọi là *đỉnh cộng hưởng* của hệ thống

- Băng thông tần số của hệ thống là dải tần số trong đó độ suy giảm của hệ thống là không lớn hơn $1/\sqrt{2}$ (băng thông 3-dB)