LUYỆN TẬP MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Bài 1: Cho hệ LTI có hàm truyền

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

a. Biểu diễn điểm cực và điểm không của H(z) trên mặt phẳng z.
b. Biết rằng nếu tín hiệu lối vào có dạng x(n)=z^n thì y(n)=H(z)z^n.

   Xác định tín hiệu lối ra của hệ thống, biết tín hiệu lối vào là

$$x[n] = \left(\tfrac{3}{4}\right)^n + 3(2)^n$$

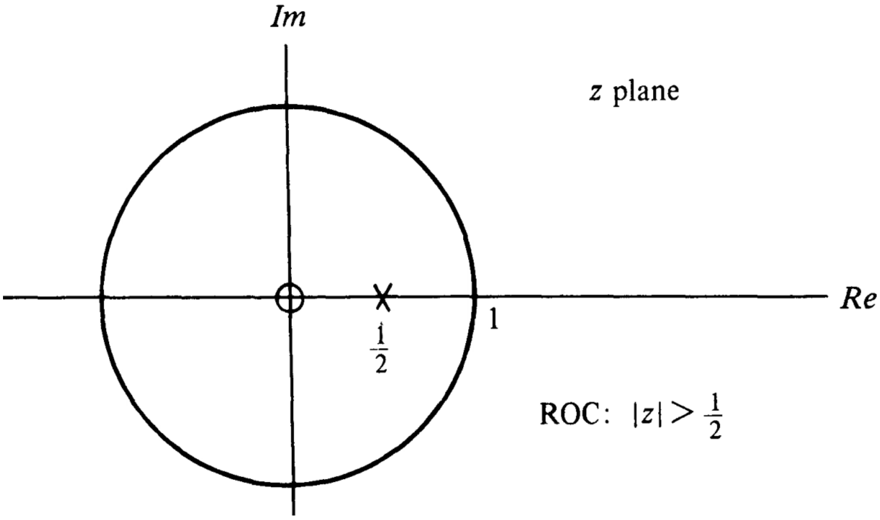
   Gợi ý: x(n) là biểu diễn tuyến tính của hàm dưới dạng z^n.

Đáp án: 0,5 điểm/ý x 2 ý = 1 điểm

a)

$$H(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

Setting the numerator equal to zero to obtain the zeros, we find a zero at $z = 0$. Setting the denominator equal to zero to get the poles, we find a pole at $z = \frac{1}{2}$.



b)

$$y[n] = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)}\left(\frac{3}{4}\right)^n + 3\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)}\right](2)^n$$
$$= 3\left(\tfrac{3}{4}\right)^n + 4(2)^n$$

Bài 2: Cho chuỗi

$$x[n] = 2^n u[n]$$

a) x(n) có thể tính tổng tuyệt đối không?
b) Biến đổi Fourier của x(n) có hội tụ không?
c) Trong khoảng r nào thì biến đổi Fourier của r^{-n}x(n) hội tụ?
d) Xác định biến đổi Z của x(n).
e) Xác định x_1(n) biết

$$2^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z),$$
$$x_1[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(3e^{j\Omega}) = X_1(e^{j\Omega})$$

Đáp án: **0,5 điểm/ý x 5 ý = 2,5 điểm**

(a) To see if $x[n]$ is absolutely summable, we form the sum

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]| = \sum_{n=0}^{N-1} 2^n = \frac{1-2^N}{1-2}$$

Since $\lim_{N\to\infty} S_N$ diverges, $x[n]$ is *not* absolutely summable.

(b) Since $x[n]$ is not absolutely summable, the Fourier transform of $x[n]$ does not converge.

(c) $$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{2}{r}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{2}{r}\right)^N}{1-\left(\frac{2}{r}\right)}$$

$\lim_{N\to\infty} S_N$ is finite for $|r| > 2$. Therefore, the Fourier transform of $r^{-n}x[n]$ converges for $|r| > 2$.

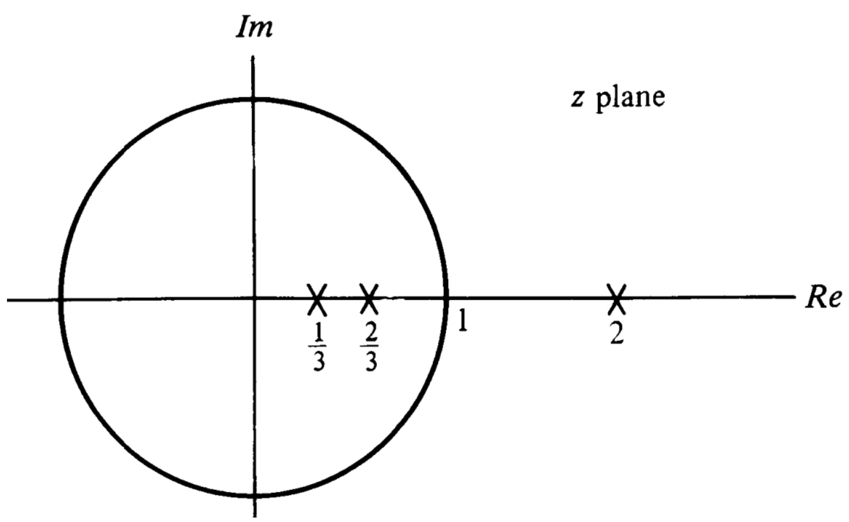
(d) $$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^{-1})^n$$
$$= \frac{1}{1-2z^{-1}} \qquad \text{for } |2z^{-1}| < 1$$

Therefore, the ROC is $|z| > 2$.

(e) $$X_1(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-\frac{2}{3}e^{-j\Omega}}$$

Therefore, $x_1[n] = (\frac{2}{3})^n u[n]$.

Bài 3: Cho hệ thống thời gian rời rạc có các điểm cực và điểm không được biểu diễn như trên hình:



Xác định vùng ROC có thể trong các trường hợp sau:

a) x(n) là tín hiệu phía phải.
b) Biến đổi Fourier của x(n) hội tụ
c) Biến đổi Fourier của x(n) không hội tụ
d) x(n) là tín hiệu phía trái

<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 4 ý = 2 điểm

(a) Since $x[n]$ is right-sided, the ROC is given by $|z| > \alpha$. Since the ROC cannot include poles, for this case the ROC is given by $|z| > 2$.

(b) The statement implies that the ROC includes the unit circle $|z| = 1$. Since the ROC is a connected region and bounded by poles, the ROC must be

$$\tfrac{2}{3} < |z| < 2$$

(c) For this situation there are three possibilities:

(i) $|z| < \frac{1}{3}$

(ii) $\frac{1}{3} < |z| < \frac{2}{3}$

(iii) $|z| > 2$

(d) This statement implies that the ROC is given by $|z| < \frac{1}{3}$.

<u>Bài 4</u>:

a) Xác định biến đổi Z của hai tín hiệu sau:

(i) $x_1[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

(ii) $x_2[n] = -(\frac{1}{2})^n u[-n-1]$

b) Biểu diễn điểm không, điểm cực, và vùng ROC trên mặt phẳng Z
c) Lặp lại phần (a) và (b) với hai tín hiệu

(i) $x_3[n] = 2u[n]$

(ii) $x_4[n] = -(2)^n u[-n-1]$

d) Trong 4 tín hiệu ở phần (a) và (c), tín hiệu nào có biến đổi Fourier hội tụ?

<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 4 ý = 2 điểm

(a) (i) $$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\tfrac{1}{2}z^{-1})^n$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}},$$

with an ROC of $\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$, or $|z| > \frac{1}{2}$.

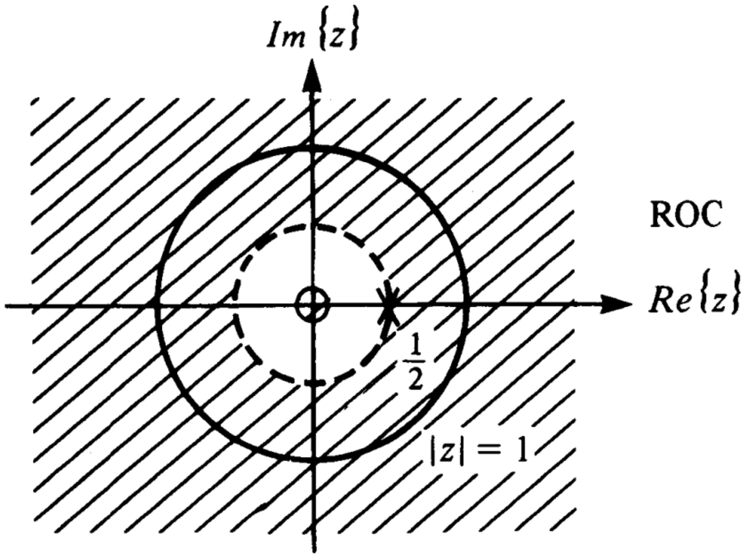
(ii) $$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (\tfrac{1}{2})^n z^{-n}$$

Letting $n = -m$, we have

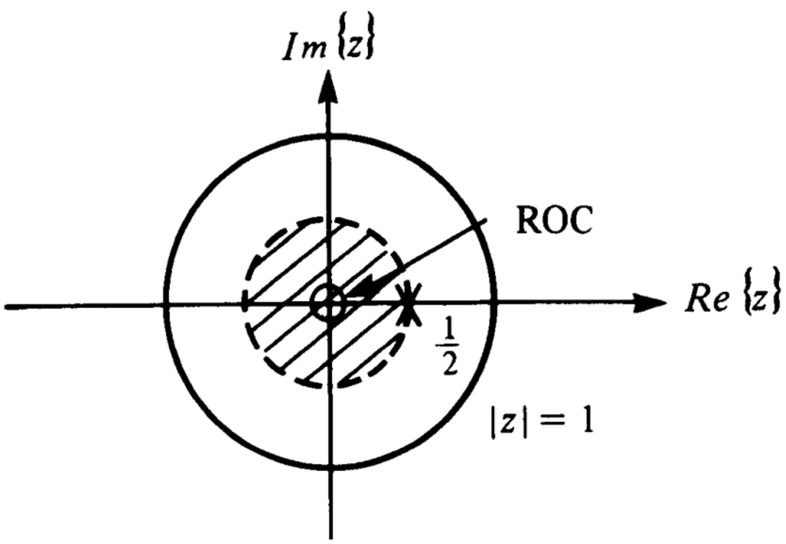
$$X_2(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} (\tfrac{1}{2})^{-m} z^m$$
$$= -\sum_{m=1}^{\infty} (2z)^m = -\frac{2z}{1-2z}$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}},$$

with an ROC of $|2z| < 1$, or $|z| < \frac{1}{2}$.

(b) i)

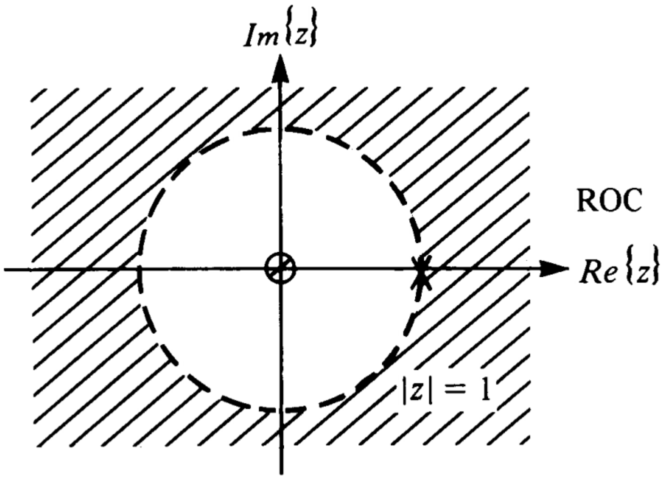


ii)



c)

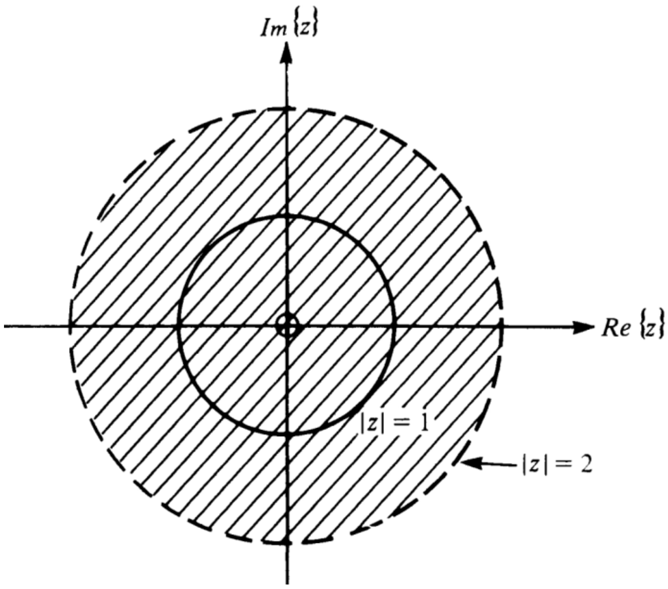
(i) $X_3(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = 2\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = \frac{2z}{z-1}$. The ROC is $|z| > 1$,



(ii) $$X_4(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n$$

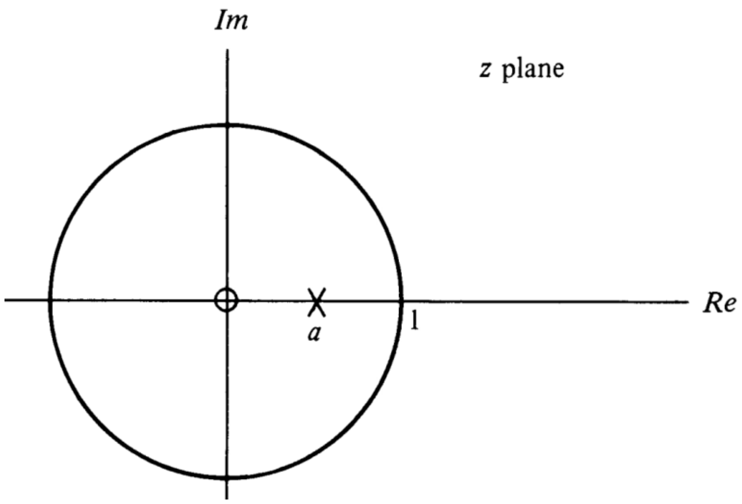
$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\frac{z/2}{1-(z/2)} = \frac{z}{z-2},$$

with an ROC of $|z/2| < 1$, or $|z| < 2$



(d) For the Fourier transform to converge, the ROC of the z-transform must include the unit circle. Therefore, for $x_1[n]$ and $x_4[n]$, the corresponding Fourier transforms converge.

<u>Bài 5</u>: Điểm không và điểm cực của hàm truyền hệ thống được biểu diễn trên hình:



a) Vẽ đáp ứng biên độ khi điểm không z=0 tăng từ 1 đến 3.
b) Số các điểm không có ảnh hưởng đến đáp ứng pha không?

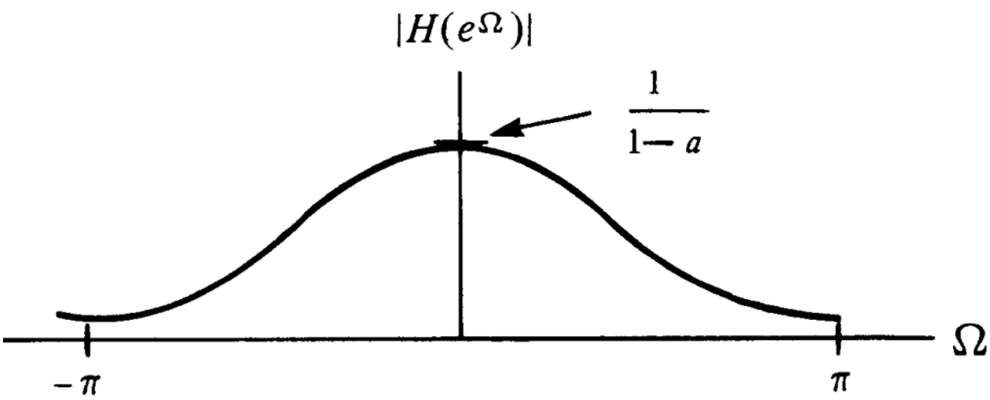
<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 2 ý = 1 điểm

(a) When $H(z) = z/(z - a)$, i.e., the number of zeros is 1, we have

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\cos\Omega + j\sin\Omega}{(\cos\Omega - a) + j\sin\Omega}$$

Therefore,

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{1 + a^2 - 2a\cos\Omega},$$



When $H(z) = z^2/(z - a)$, i.e., the number of zeros is 2, we have

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{\cos 2\Omega + j\sin 2\Omega}{(\cos\Omega - a) + j\sin\Omega}$$

Therefore,

$$|H(e^{j\Omega})| = \frac{1}{1 + a^2 - 2a\cos\Omega}$$

Hence, we see that the magnitude of $H(e^{j\Omega})$ does not change as the number of zeros increases.

(b) For one zero at $z = 0$, we have

$$H(z) = \frac{z}{z - a},$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a}$$

We can calculate the phase of $H(e^{j\Omega})$ by $[\Omega - \measuredangle\,(\text{denominator})]$. For two zeros at 0, the phase of $H(e^{j\Omega})$ is $[2\Omega - \measuredangle\,(\text{denominator})]$. Hence, the phase changes by a linear factor with the number of zeros.

<u>**Bài 6**</u>: Tính biến đổi Z và biểu diễn điểm không, điểm cực, vùng ROC của các chuỗi sau:

(a) $(\frac{1}{3})^n u[n]$

(b) $\delta[n+1]$

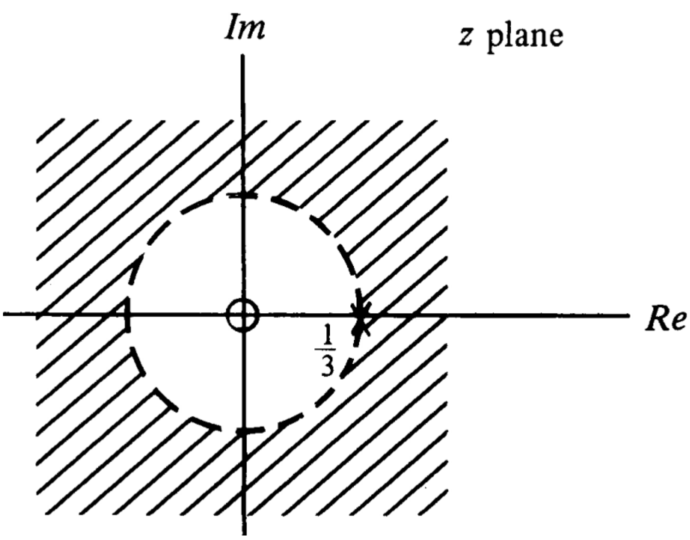
<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 2 ý = 1 điểm

(a) $(\frac{1}{3})^n u[n] \xleftrightarrow{Z} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^n z^{-n}$

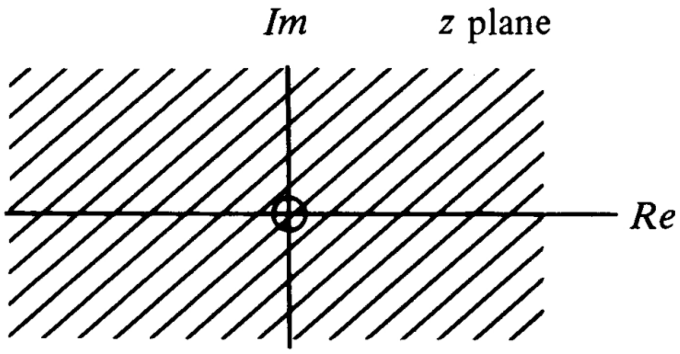
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

Therefore, there is a zero at $z = 0$ and a pole at $z = \frac{1}{3}$, and the ROC is

$$\left|\frac{1}{3z}\right| < 1 \quad \text{or} \quad |z| > \frac{1}{3},$$



(b) $\delta[n+1] \xleftrightarrow{Z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1] z^{-n} = z,$



Im
z plane
Re