

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thượng

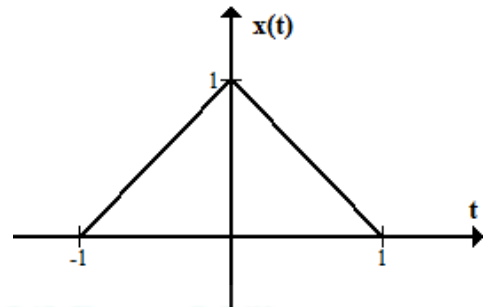
Bài 1.1. Hãy tính tích phân, năng lượng, độ rộng trung bình của các tín hiệu sau đây:

- | | |
|-----------------------------|---|
| a) $x(t) = \Lambda(t)$ | d) $x(t) = te^{- t }$ |
| b) $x(t) = e^{-\pi^2}$ | e) $x(t) = e^{2t}1(-t) + e^{-t}1(t)$ |
| c) $x(t) = \frac{1}{1+t^2}$ | f) $x(t) = \cos t \Pi\left(\frac{t}{3\pi}\right)$ |

Giải

a) Tích phân của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}[x] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_{-1}^0 (t+1) dt + \int_0^1 (1-t) dt \\ &= 2 \int_0^1 (1-t) dt = \left(t - \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1\end{aligned}$$



Năng lượng của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt = 2 \int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= \frac{-2}{3} (1-t)^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

b) $x(t) = e^{-\pi^2}$

*Tích phân của tín hiệu là:

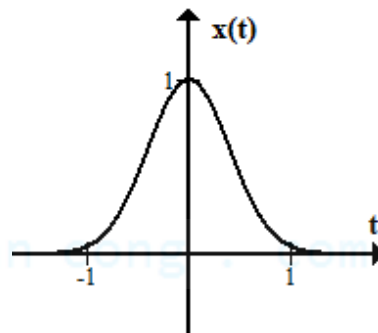
$$[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\pi^2)} dt$$

$$\text{Đặt } I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\pi^2)} dt$$

$$\Rightarrow I^2 = \int e^{-\pi x} dx \int e^{-\pi y} dy$$

$$= \iint e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy$$

$$\text{đặt } x = r \cos \varphi \quad \text{và} \quad y = r \sin \varphi$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\Rightarrow I^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-\pi^2} r dr = 2\pi \times \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\pi^2} dr^2 = -e^{-\pi^2} \Big|_0^\infty = 1$$

$$\Rightarrow I = 1$$

* Năng lượng của tín hiệu là:

$$E_x = \int_{-\infty}^\infty [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^\infty e^{(-2\pi^2)} dt$$

$$\text{Đặt } M = \int_{-\infty}^\infty e^{(-2\pi^2)} dt$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow M^2 &= \int e^{-2\pi x^2} dx \int e^{-2\pi y^2} dy \\ &= \iint e^{-\pi 2(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

$$\text{đặt } x = r \cos \varphi \quad \text{và} \quad y = r \sin \varphi$$

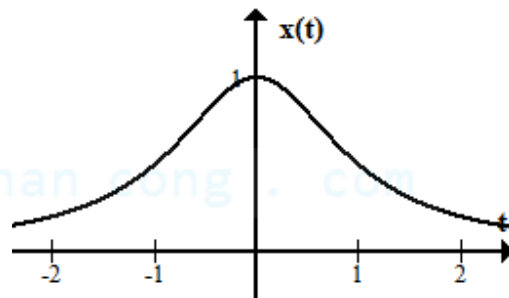
$$\Rightarrow M^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-2\pi^2} r dr = 2\pi \times \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-2\pi^2} dr^2 = \frac{-1}{2} e^{-2\pi^2} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^\infty [x(t)]^2 dt = M = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \quad x(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

* Tích phân của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} [x(t)] &= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \text{arctgt} \Big|_{-\infty}^\infty \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$



* Năng lượng của tín hiệu là:

$$E_x = \int_{-\infty}^\infty [x(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

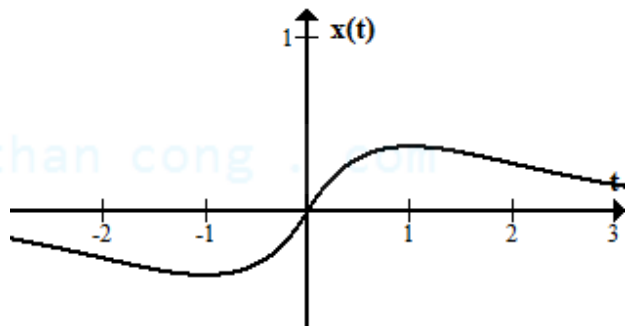
Đặt $t = tgu$

$$\begin{aligned}\Rightarrow E_x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 + tg^2 u)^2} \frac{1}{\cos^2 u} du \\&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 u \frac{1}{\cos^2 u} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du \\&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\cos 2u + 1) du = \frac{1}{4} (\sin 2u + 2u) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\&= \frac{1}{4} (\pi + \pi) = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

d) $x(t) = te^{-|t|}$

* Tích phân của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}[x] &= \int_{-\infty}^0 te^t dt + \int_0^{\infty} te^{-t} dt \\&= (te^t - e^t) \Big|_{-\infty}^0 + (te^{-t} + e^{-t}) \Big|_0^{\infty} \\&= -1 + 1 = 0\end{aligned}$$



* Năng lượng của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt \\&= \int_{-\infty}^0 t^2 e^{2t} dt + \int_0^{\infty} t^2 e^{-2t} dt \\&= \left(\frac{1}{2} t^2 e^{2t} - \frac{1}{2} te^{2t} + \frac{1}{4} e^{2t} \right) \Big|_{-\infty}^0 - \left(\frac{1}{2} t^2 e^{-2t} + \frac{1}{2} te^{-2t} + \frac{1}{4} e^{-2t} \right) \Big|_0^{\infty} \\&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

e) $x(t) = e^{2t} 1(-t) + e^{-t} 1(t)$

* Tích phân của tín hiệu là:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\begin{aligned}[x] &= \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2} e^{2t} \Big|_{-\infty}^0 - e^{-t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

* Năng lượng của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{4t} dt + \int_0^{\infty} e^{-2t} dt \\ &= \frac{1}{4} e^{4t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

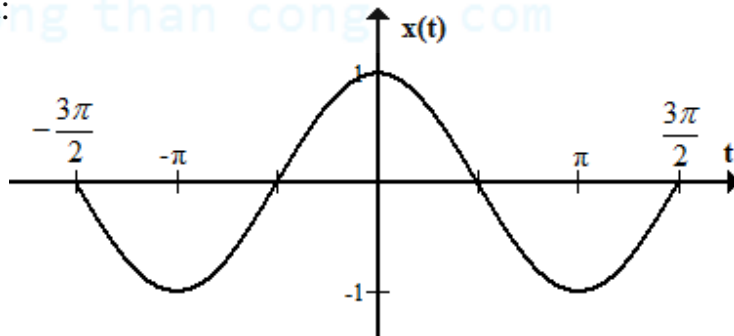
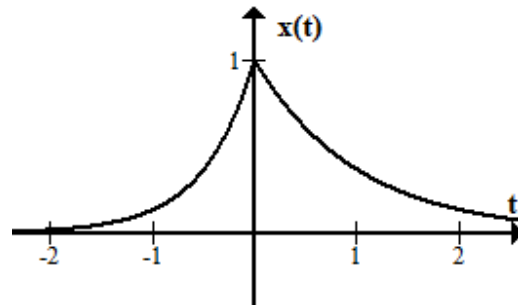
f) $x(t) = \cos t \Pi\left(\frac{t}{3\pi}\right)$

* Tích phân của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}[x] &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos t dt \\ &= \sin t \Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 1 = -2\end{aligned}$$

* Năng lượng của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)]^2 dt \\ &= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{1}{4} (2t + \sin 2t) \Big|_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} (3\pi + 3\pi) = \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

Bài 1.2 Dòng điện $i(t) = Ie^{-\beta t} 1(t)$ chạy qua điện trở R . Hãy tìm :

- a) Năng lượng tiêu hao trên điện trở R trong khoảng $t(0; \infty)$
- b) Năng lượng tiêu hao trên điện trở R trong khoảng $t(0; 1/\beta)$

Giải

a) Năng lượng tiêu hao trên điện trở R trong khoảng $t(0; \infty)$ là:

$$\begin{aligned} E &= R \int_0^{\infty} |i(t)|^2 dt \\ &= R \int_0^{\infty} |Ie^{-\beta t}|^2 dt \\ &= RI^2 \int_0^{\infty} |e^{-\beta t}|^2 dt \\ &= \frac{RI^2}{-2\beta} \left| e^{-2\beta t} \right|_0^{\infty} \\ &= \frac{RI^2}{-2\beta} (0 - 1) \\ &= \frac{RI^2}{2\beta} \end{aligned}$$

b) Năng lượng tiêu hao trên điện trở R trong khoảng $t(0; 1/\beta)$ là :

$$\begin{aligned} E &= R \int_0^{1/\beta} |i(t)|^2 dt \\ &= R \int_0^{1/\beta} |Ie^{-\beta t}|^2 dt \\ &= RI^2 \int_0^{1/\beta} |e^{-\beta t}|^2 dt \\ &= \frac{RI^2}{-2\beta} \left| e^{-2\beta t} \right|_0^{1/\beta} \\ &= \frac{RI^2}{-2\beta} (e^{-2} - 1) \\ &= 0.865 \frac{RI^2}{2\beta} \end{aligned}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Bài 1.3

Hãy tìm thành phần chẵn, lẻ của các tín hiệu sau đây và chứng minh rằng các thành phần này trực giao, năng lượng của tín hiệu bằng tổng các năng lượng thành phần:

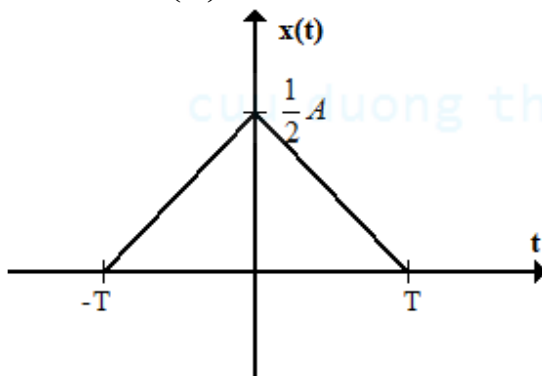
Giải

a) Ta có:

$$x(t) = A \left(1 - \frac{t}{T} \right) [1(t) - 1(t-T)]$$

* Thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} x_{ch} &= \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)] \\ &= \frac{1}{2} \left(A \left(1 - \frac{t}{T} \right) [1(t) - 1(t-T)] + A \left(1 + \frac{t}{T} \right) [1(-t) - 1(-t-T)] \right) \\ &= \frac{1}{2} A \Lambda \left(\frac{t}{T} \right) \end{aligned}$$



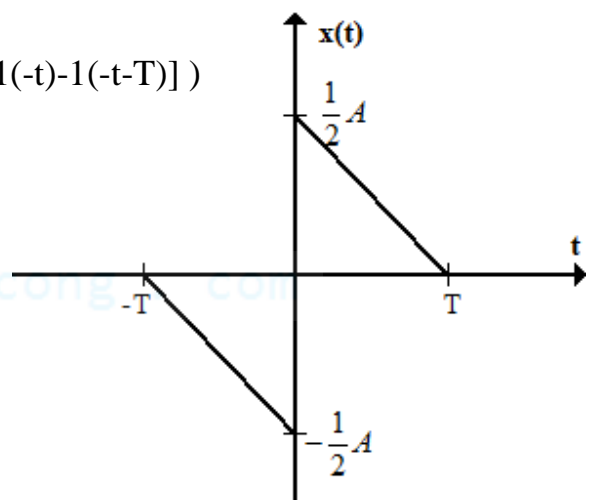
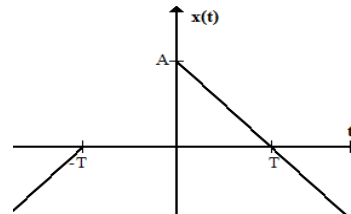
* Thành phần lẻ của tín hiệu là

$$\begin{aligned} x_{le} &= \frac{1}{2} \left(A \left(1 - \frac{t}{T} \right) [1(t) - 1(t-T)] - A \left(1 + \frac{t}{T} \right) [1(-t) - 1(-t-T)] \right) \\ &= \frac{1}{2} A \Lambda \left(\frac{t}{T} \right) \text{sgn}(t) \end{aligned}$$

Xét tích vô hướng sau

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T x_{ch}(t) x_{le}(t) dt \\ = \frac{1}{4} A^2 \int_{-T}^T \left[\left(1 - \frac{t}{T} \right)^2 - \left(1 + \frac{t}{T} \right)^2 \right] dt = 0 \end{aligned}$$

→ thành phần này trực giao
Năng lượng của tín hiệu là:



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng

$$E_x = A^2 \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt = A^2 \left(t - \frac{t^2}{T} + \frac{t^3}{3T}\right) \Big|_0^T = A^2 \frac{T}{3}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần chẵn:

$$E_{ch} = \frac{1}{4} A^2 \left(\int_{-T}^0 \left(1 + \frac{t}{T}\right)^2 dt + \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt \right) = \frac{1}{4} A^2 \frac{2T}{3} = A^2 \frac{T}{6}$$

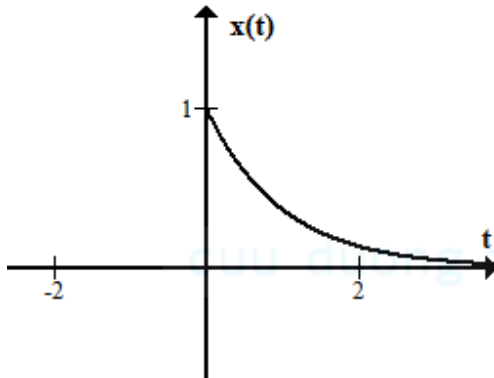
Năng lượng của tín hiệu thành phần lẻ là:

$$E_{le} = \frac{1}{4} A^2 \left(\int_{-T}^0 \left(1 + \frac{t}{T}\right)^2 dt + \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt \right) = A^2 \frac{T}{6}$$

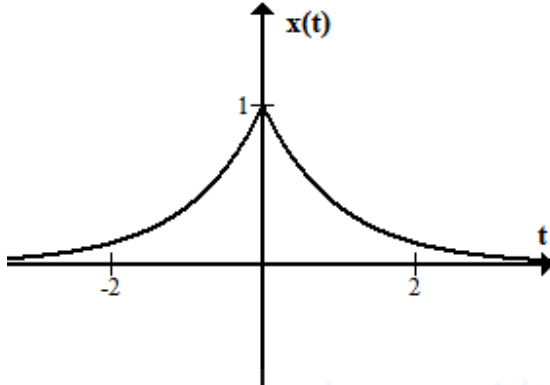
$$\rightarrow E_x = E_{ch} + E_{le} = A^2 \frac{T}{3}$$

b) Ta có

$$x(t) = e^{-\alpha t} 1(t)$$



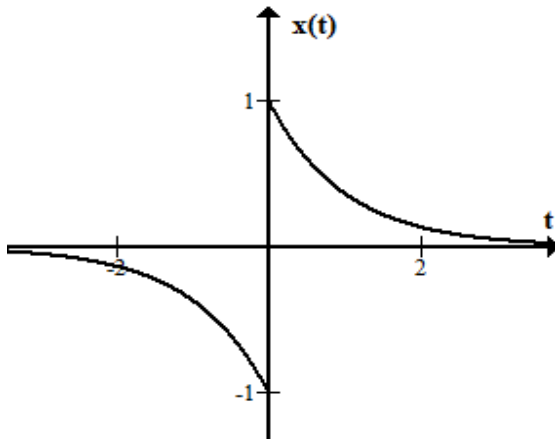
* Thành phần chẵn của tín hiệu là:



$$x_{ch}(t) = \frac{1}{2} [e^{-\alpha t} 1(t) + e^{\alpha t} 1(-t)] = \frac{1}{2} e^{-\alpha |t|}$$

* Thành phần lẻ của tín hiệu là:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng



$$x_{le}(t) = \frac{1}{2} [e^{-\alpha} 1(t) - e^{\alpha} 1(-t)] = \frac{1}{2} e^{-\alpha|t|} \text{sgn}(t)$$

Xét tích vô hướng sau

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x_{ch}(t) x_{le}^*(t) dt &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-2\alpha} 1(t) - e^{2\alpha} 1(-t)] dt \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha} dt + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha} dt \\ &= \frac{1}{8\alpha} (-e^{2\alpha} \Big|_{-\infty}^0 + e^{-2\alpha} \Big|_0^{\infty}) = 0 \end{aligned}$$

→ thành phần này trực giao

Năng lượng của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} E_x &= \int_0^{\infty} e^{-2\alpha} dt \\ &= -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha} \end{aligned}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần chẵn:

$$E_{ch} = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^0 e^{2\alpha} dt + \int_0^{\infty} e^{-2\alpha} dt \right) = \frac{1}{4\alpha}$$

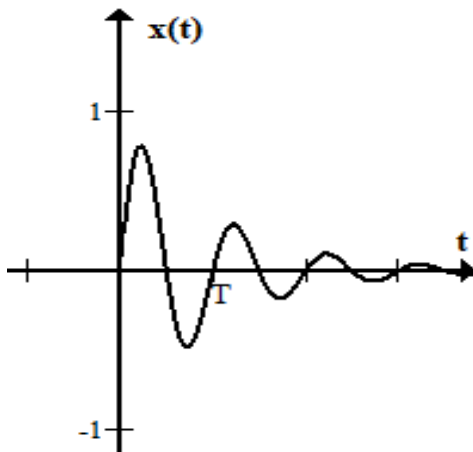
Năng lượng của tín hiệu thành phần lẻ là:

$$E_{le} = \frac{1}{4} \left(\int_{-\infty}^0 e^{2\alpha} dt + \int_0^{\infty} e^{-2\alpha} dt \right) = \frac{1}{4\alpha}$$

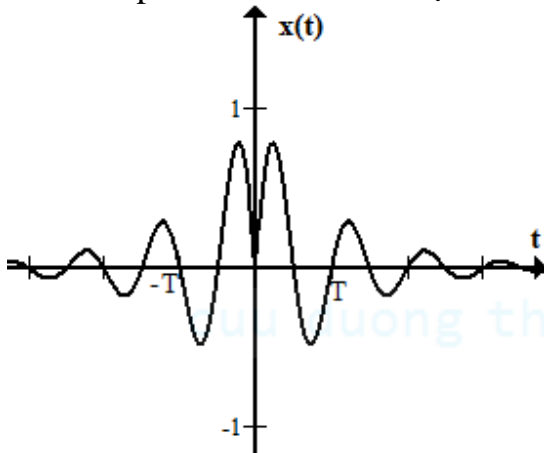
$$\text{Ta có } E_x = E_{ch} + E_{le} = \frac{1}{2\alpha}$$

c) $x(t) = e^{-\alpha} \sin(\omega t) 1(t)$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng

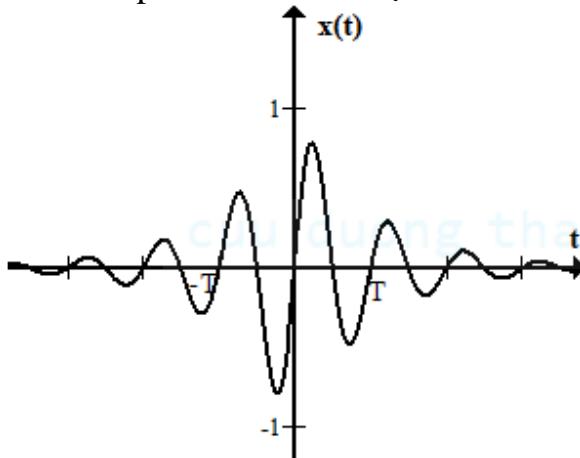


* Thành phần chẵn của tín hiệu là:



$$\begin{aligned} x_{ch} &= \frac{1}{2} [e^{-\alpha t} \sin(\omega t) 1(t) - e^{\alpha t} \sin(\omega t) 1(-t)] \\ &= \frac{1}{2} e^{-\alpha |t|} \sin(\omega t) \operatorname{sgn}(t) \end{aligned}$$

* Thành phần lẻ của tín hiệu là:



$$x_{le} = \frac{1}{2} [e^{-\alpha t} \sin(\omega t) 1(t) + e^{\alpha t} \sin(\omega t) 1(-t)]$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tam bởi Trần Văn Thượng

$$= \frac{1}{2} e^{-\alpha|t|} \sin(\omega t)$$

Xét tích vô hướng sau:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} x_{ch}(t) x_{le}^*(t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} \sin^2(\omega t) dt - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha t} \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} (1 - \cos 2\omega t) dt - \frac{1}{8} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha t} (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= -\frac{1}{16\alpha} \left(e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} + e^{2\alpha t} \Big|_{-\infty}^0 \right) + \frac{1}{8} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha t} \cos 2\omega t dt - \frac{1}{8} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} \cos 2\omega t dt \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{\alpha}{2(\alpha^2 + \omega^2)} - \frac{\alpha}{2(\alpha^2 + \omega^2)} \right] = 0 \end{aligned}$$

→ thành phần này trực giao

Năng lượng của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần chẵn:

$$\begin{aligned} E_{ch} &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} \sin^2(\omega t) dt + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha t} \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{4(\alpha^2 + \omega^2)} + \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{4(\alpha^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2(\alpha^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

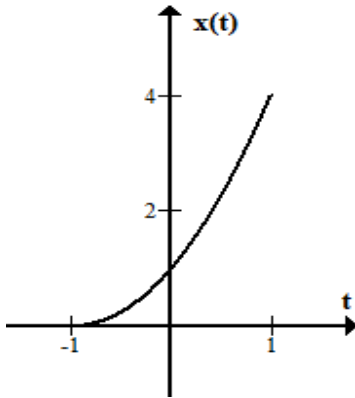
Năng lượng của tín hiệu thành phần lẻ:

$$\begin{aligned} E_{le} &= \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} \sin^2(\omega t) dt + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^0 e^{2\alpha t} \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{4(\alpha^2 + \omega^2)} + \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{4(\alpha^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2(\alpha^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

Ta có $E_x = E_{ch} + E_{le}$

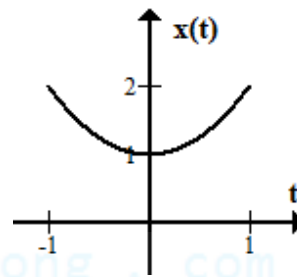
Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

d) $x(t) = (t+1)^2 \Pi_{\frac{t}{2}}$



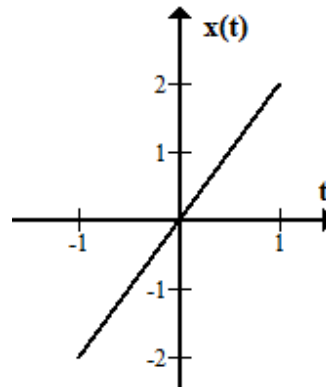
* Thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} x_{ch} &= \frac{1}{2} [(t+1)^2 \Pi_{\frac{t}{2}} + (1-t)^2 \Pi_{\frac{-t}{2}}] \\ &= (t^2 + 1) \Pi_{\frac{t}{2}} \end{aligned}$$



* Thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} x_{le} &= \frac{1}{2} [(t+1)^2 \Pi_{\frac{t}{2}} - (1-t)^2 \Pi_{\frac{-t}{2}}] \\ &= 2t \Pi_{\frac{t}{2}} \end{aligned}$$



Xét tích vô hướng sau:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} x_{ch}(t) x_{le}^*(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 2t(t^2 + 1) dt \\ &= \left(\frac{1}{2} t^4 + t^2 \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} - 1 = 0 \end{aligned}$$

→ thành phần này trực giao

Năng lượng của tín hiệu là:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 (t+1)^4 dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^2 + 2t + 1)^2 dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 4t + 1) dt \\ &= \left(\frac{1}{5}t^5 + t^4 + \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 + t \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần chẵn:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 (t^2 + 1)^2 dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^4 + 2t^2 + 1) dt \\ &= \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + t \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{56}{15} \end{aligned}$$

Năng lượng của tín hiệu thành phần lẻ:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 4t^2 dt \\ &= \frac{4}{3}t^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Ta có $E_x \neq E_{ch} + E_{le}$

Bài 1.4. Hãy tìm thành phần chẵn, lẻ của các tín hiệu sau. Trong mỗi trường hợp hãy chứng minh rằng các thành phần đó trực giao và công suất trung bình của mỗi tín hiệu bằng tổng công suất trung bình thành phần.

- a) $x(t) = e^{j\omega t}$
- b) $x(t) = 1(t)$
- c) $x(t) = (1 - e^{-\alpha t})1(t)$
- d) $x(t) = \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

e) $x(t) = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$

Giải

a) $x(t) = e^{j\omega t}$

Thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$x_{ch}(t) = \frac{1}{2}[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] = \cos \omega t$$

Thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$x_l(t) = \frac{1}{2}[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] = j \sin \omega t$$

Xét tích vô hướng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_{ch} x_l^* dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \omega t (-j \sin \omega t) dt$$

$$= \frac{1}{\omega} \int_0^T (-j \sin \omega t) d(\sin \omega t)$$

$$= -\frac{j}{\omega} \frac{1}{2} \sin^2 \omega t \Big|_0^T = 0$$

Vậy hàm trực giao.

Năng lượng của tín hiệu là:

$$p_x = \frac{1}{T} \int_0^T e^{2j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2j\omega} e^{2j\omega t} \right]_0^T$$

$$= \frac{1}{4j\pi} (e^{4j\pi} - 1)$$

$$= \frac{1}{4j\pi} [\cos(4\pi) - 1] = 0$$

Năng lượng thành phần chẵn của tín hiệu là:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng

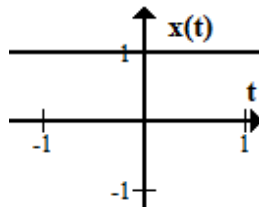
$$\begin{aligned} p_{x_{ch}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T (1 + \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \frac{1}{2\omega} (2\omega t + \sin 2\omega t) \Big|_0^T \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Năng lượng thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} P_{x_l} &= -\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt \\ &= -\frac{1}{2T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= -\frac{1}{2T} \frac{1}{2\omega} (2\omega t - \sin 2\omega t) \Big|_0^T \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

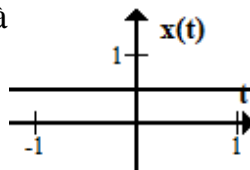
$$p_x = p_{x_{ch}} + p_{x_l}$$

b) $x(t) = 1(t)$



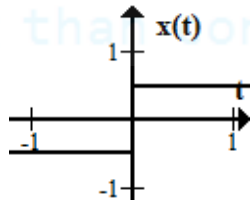
Thành phần chẵn của tín hiệu là

$$x_{ch}(t) = \frac{1}{2}$$



Thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$x_l(t) = \frac{1}{2} [1(t) - 1(-t)]$$



Xét tích vô hướng

$$\int_{t_1}^{t_2} x_{ch} x_l * (t) dt = \frac{1}{4} [1^2(t) - 1^2(-t)] = 0$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

Vậy hàm trực giao.

Năng lượng của tín hiệu là:

$$p_x = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \int_0^T 1 dt = \frac{1}{2}$$

Năng lượng thành phần chẵn của tín hiệu là:

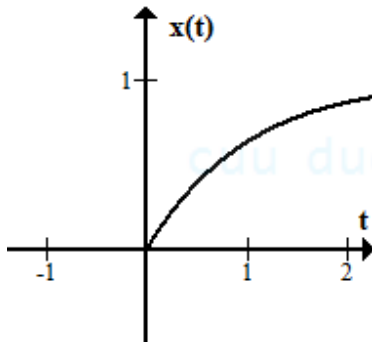
$$p_{x_{ch}} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4}$$

Năng lượng thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$p_{x_l} = \lim_{T \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^0 \frac{1}{4} dt + \frac{1}{2T} \int_0^T \frac{1}{4} dt \right] = \frac{1}{4}$$

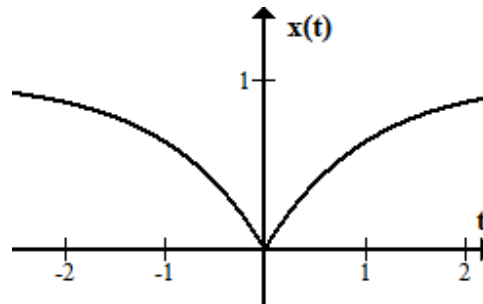
$$p_x = p_{x_{ch}} + p_{x_l}$$

c) $x(t) = (1 - e^{-\alpha t})1(t)$



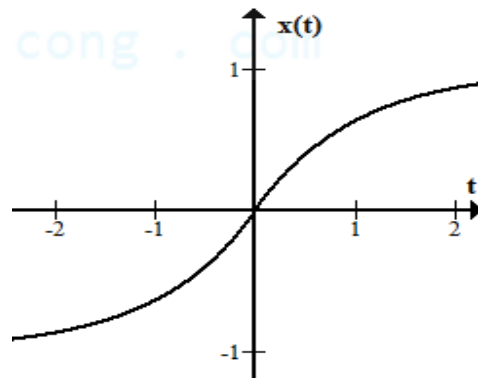
Thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$x_{ch}(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\alpha|t|})$$



Thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$x_{l(t)} = \frac{1}{2}[(1 - e^{-\alpha t})1(t) - (1 - e^{\alpha t})1(-t)]$$



Năng lượng của tín hiệu là:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

$$\begin{aligned} p_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T (1 - e^{-\alpha t})^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T (1 - 2e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t}) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[t + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[T + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Năng lượng thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} p_{x_{ch}} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_0^T \frac{1}{4} (1 - e^{-\alpha t})^2 dt + \int_{-T}^0 \frac{1}{4} (1 - e^{\alpha t})^2 dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{8T} \left[\int_0^T (1 - 2e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t}) dt + \int_{-T}^0 (1 - 2e^{\alpha t} + e^{2\alpha t}) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{8T} \left[\left(t + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \right) \Big|_0^T + \left(t - \frac{2}{\alpha} e^{\alpha t} + \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha t} \right) \Big|_{-T}^0 \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{8T} \left[\left(T + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} \right) + \left(-\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} + T + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} \right) \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{8T} \left[2T + \frac{4}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha T} - \frac{4}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Năng lượng thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} p_{x_l} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_0^T \frac{1}{4} (1 - e^{-\alpha t})^2 dt + \int_{-T}^0 \frac{1}{4} (1 - e^{\alpha t})^2 dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{8T} \left[\int_0^T (1 - 2e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t}) dt + \int_{-T}^0 (1 - 2e^{\alpha t} + e^{2\alpha t}) dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{8T} \left[\left(t + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \right) \Big|_0^T + \left(t - \frac{2}{\alpha} e^{\alpha t} + \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha t} \right) \Big|_{-T}^0 \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{8T} \left[\left(T + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} \right) + \left(-\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} + T + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha T} \right) \right] \end{aligned}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{8T} \left[2T + \frac{4}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha T} - \frac{4}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right]$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$p_x = p_{x_{ch}} + p_{x_l}$$

Xét tích vô hướng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_{ch} \cdot x_l dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[- \int_{-T}^0 (1 - e^{\alpha t})^2 dt + \int_0^T (1 - e^{-\alpha t})^2 dt \right]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_0^T (1 - 2e^{-\alpha t} + e^{-2\alpha t}) dt - \int_{-T}^0 (1 - 2e^{\alpha t} + e^{2\alpha t}) dt \right]$$

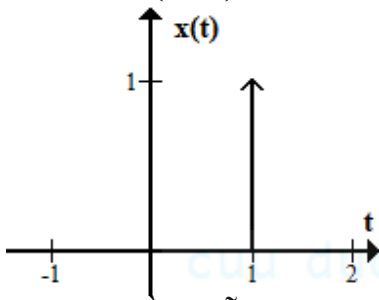
$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\left(t + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha t} - \frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t} \right) \Big|_0^T - \left(t - \frac{2}{\alpha} e^{\alpha t} + \frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha t} \right) \Big|_{-T}^0 \right]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\left(T + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} \right) - \left(-\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} + T + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha T} \right) \right]$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\frac{4}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha T} - \frac{4}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \right] = 0$$

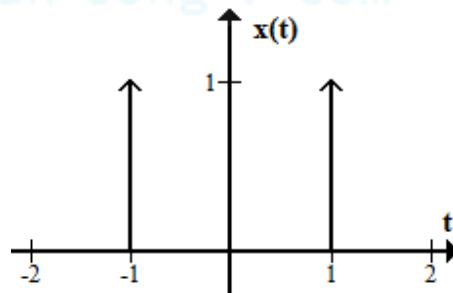
Vậy hàm trực giao.

d) $x(t) = \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$



Thành phần chẵn của tín hiệu là:

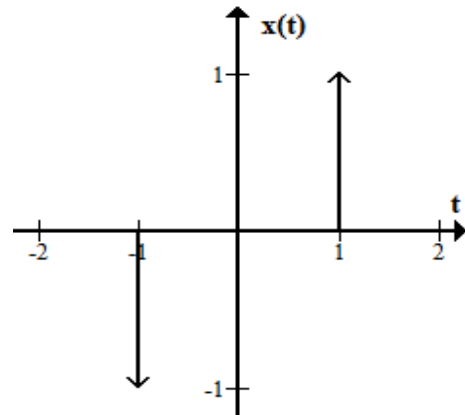
$$x_{ch}(t) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) + \delta\left(-t - \frac{1}{2}\right) \right]$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$x_l(t) = \frac{1}{2} \left[\delta\left(t - \frac{1}{2}\right) - \delta\left(-t - \frac{1}{2}\right) \right]$$



Xét tích vô hướng

$$\int_{t_1}^{t_2} x_{ch}(t) x_l(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{4} \left[\delta^2\left(t - \frac{1}{2}\right) - \delta^2\left(-t - \frac{1}{2}\right) \right] dt = 0$$

Vậy hàm trực giao.

Năng lượng của tín hiệu là:

$$p_x = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t_1 - t_0} |x(t)|^2 dt = 1$$

Năng lượng thành phần chẵn của tín hiệu là:

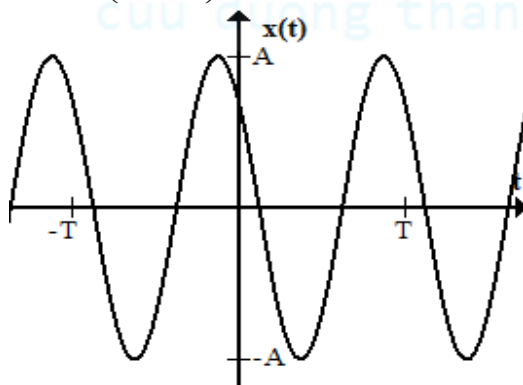
$$\begin{aligned} p_{x_{ch}} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t_1 - t_0} |x_{ch}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Năng lượng thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} p_{x_l} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{t_1 - t_0} |x_l(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$p_x = p_{x_{ch}} + p_{x_l}$$

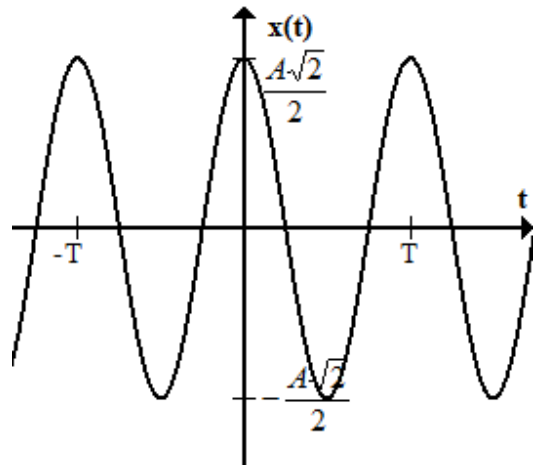
e) $x(t) = A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tam bởi Trần Văn Thương

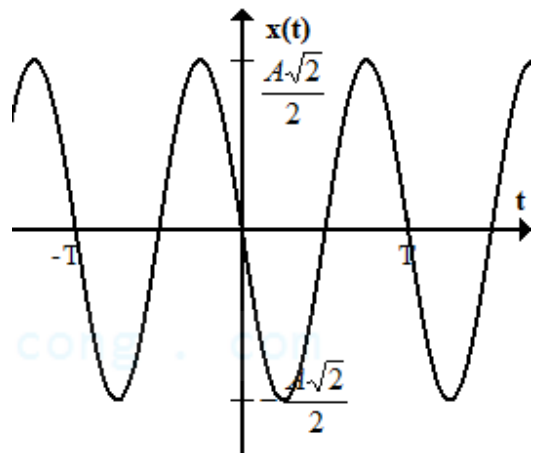
Thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}x_{ch}(t) &= \frac{1}{2} A \left[\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\&= A \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(\omega t) \right] \\&= \frac{A\sqrt{2}}{2} \cos(\omega t)\end{aligned}$$



Thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}x_l(t) &= \frac{1}{2} A \left(\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(-\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \right) \\&= -\frac{1}{2} A \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(\omega t) \\&= -\frac{A\sqrt{2}}{2} \sin(\omega t)\end{aligned}$$



Xét tích vô hướng

$$\begin{aligned}&\int_0^T \frac{A^2}{2} \cos(\omega t) \cdot \sin(\omega t) dt \\&= \int_0^T \frac{A^2}{2\omega} \cdot \sin(\omega t) \cdot d(\sin \omega t) \\&= \frac{-A^2}{2\omega} \left(\frac{1}{2} \sin^2(\omega t) \right) \Big|_0^T \\&= \frac{-A^2}{4\pi} \frac{1}{2} \sin^2(2\pi) = 0\end{aligned}$$

Vậy hàm trực giao.

Năng lượng của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}p_x &= \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) dt \\&= \frac{1}{T} A^2 \int_0^T \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right] dt \\&= \frac{A^2}{2T} \frac{1}{2\omega} \left[2\omega t + \sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right] \Big|_0^T \\&= \frac{A^2}{4\omega T} [2\omega T + 1 - 1] = \frac{A^2}{2}\end{aligned}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tam bởi Trần Văn Thượng

Năng lượng thành phần chẵn của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} p_{x_{ch}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{A\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cos^2(\omega t) dt \\ &= \frac{A^2}{2T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{A^2}{4T} \left[\frac{1}{2\omega} (2\omega t + \sin 2\omega t) \right]_0^T \\ &= \frac{A^2}{8\omega T} (2\omega T) = \frac{A^2}{4} \end{aligned}$$

Năng lượng thành phần lẻ của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} p_{x_l} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left(-\frac{A\sqrt{2}}{2} \right)^2 \sin^2(\omega t) dt \\ &= \frac{A^2}{4T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{A^2}{8\omega T} (2\omega T - \sin 2\omega T) \Big|_0^T = \frac{A^2}{8\omega T} (2\omega T) = \frac{A^2}{4} \end{aligned}$$

$$p_x = p_{x_{ch}} + p_{x_l}$$

Bài 1.5. Cho tín hiệu $x(t) = [1 + \cos \omega t] \cos(\omega t + \varphi)$

- a) Hãy tìm thành phần một chiều, thành phần xoay chiều và chứng minh rằng chúng trực giao.
b) Hãy tìm thành phần chẵn, lẻ và chứng minh chúng trực giao.

Giải

a) có

$$\begin{aligned} x(t) &= [1 + \cos \omega t] \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \cos(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} (\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)) \\ &= \frac{1}{2} \cos(\varphi) + \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

* Vậy thành phần một chiều là:

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \cos \varphi$$

* Thành phần xoay chiều là:

$$\tilde{x} = \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi)$$

* Xét tích vô hướng sau

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{1}{2} \cos \varphi \left[\cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[\cos \varphi \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos \varphi \cos(2\omega t + \varphi) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left[\frac{1}{2} \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \cos(\omega t + 2\varphi) + \frac{1}{4} \cos(2\omega t) + \frac{1}{4} \cos(2\omega t + 2\varphi) \right] dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + 2\varphi) + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\varphi) \right] \Bigg|_0^T \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\omega} \sin(2\pi + 2\varphi) + \frac{1}{2\omega} \sin(4\pi + 2\varphi) - \frac{1}{\omega} \sin(2\varphi) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\varphi) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy 2 thành phần trực giao.

b) Thành phần chẵn là:

$$\begin{aligned} x_{ch} &= \frac{1}{2} [1 + \cos \omega t] \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} [1 + \cos \omega t] \cos(-\omega t + \varphi) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \cos \omega t] [\cos(\omega t + \varphi) + \cos(-\omega t + \varphi)] \\ &= [1 + \cos \omega t] \cos \varphi \cos(\omega t) \end{aligned}$$

* Thành phần lẻ là:

$$x_l = \frac{1}{2} [1 + \cos \omega t] \cos(\omega t + \varphi) - \frac{1}{2} [1 + \cos \omega t] \cos(-\omega t + \varphi)$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [1 + \cos \omega t] [\cos(\omega t + \varphi) - \cos(-\omega t + \varphi)] \\ &= -[1 + \cos \omega t] \sin \varphi \sin \omega t \end{aligned}$$

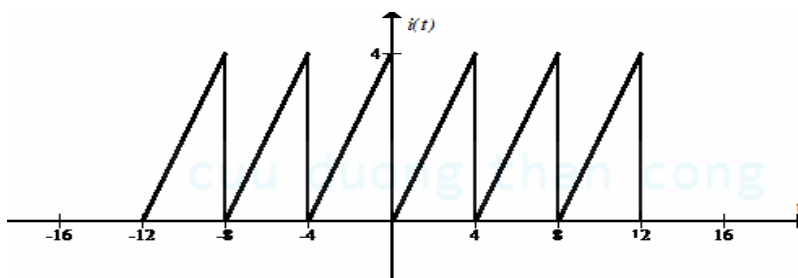
* Xét tích vô hướng

$$\begin{aligned} &\int_0^T x_{ch}(t) x_l(t) dt \\ &= -\int_0^T [1 + \cos \omega t]^2 \cos \varphi \cos(\omega t) \sin \varphi \sin(\omega t) dt \\ &= -\frac{1}{\omega} \int_0^T [1 + \cos \omega t]^2 \cos \varphi \cos(\omega t) \sin \varphi d(\cos \omega t) \\ &= -\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\omega} \int_0^T [1 + 2 \cos \omega t + \cos^2 \omega t] \cos \omega t d(\cos \omega t) \\ &= -\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\omega} \left[\frac{1}{2} \cos^2 \omega t + \frac{2}{3} \cos^3 \omega t + \frac{1}{4} \cos^4 \omega t \right]_0^T \\ &= -\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\omega} \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right] = 0 \end{aligned}$$

Vậy 2 thành phần trực giao,

Bài 1.6. Tín hiệu điện áp răng cưa được cho trên hình B1.6 được đưa qua điện trở R. Hãy tính công suất trung bình của $i(t)$ và công suất trung bình của thành phần một chiều và xoay chiều trên R.

Biết $I = 10mA$; $R = 1k\Omega$



Giải

* Công suất trung bình của $i(t)$ trên R là:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\begin{aligned}P &= R \frac{1}{4} \int_0^4 \left(I - \frac{I}{4} t \right)^2 dt \\&= -R \frac{4I^2}{4} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} t \right)^3 \bigg|_0^4 = \frac{1}{3} R I^2 \\&= \frac{1}{3} 10^3 \times 10^{-4} = \frac{1}{30} (w)\end{aligned}$$

Thành phần một chiều là:

$$\begin{aligned}\bar{i} = \langle i \rangle &= \frac{1}{4} \int_0^4 \left(I - \frac{I}{4} t \right) dt \\&= -4 \times \frac{I}{4} \int_0^4 \left(1 - \frac{1}{4} t \right) d \left(1 - \frac{1}{4} t \right) \\&= -I \times \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} t \right)^2 \bigg|_0^4 = \frac{I}{2}\end{aligned}$$

* Công suất một chiều là:

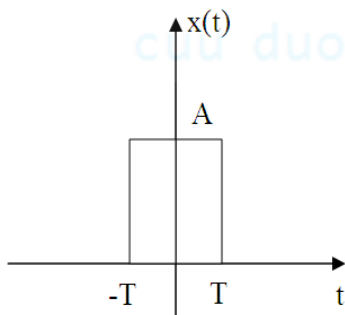
$$P_i = \frac{I^2}{4} R = \frac{10^{-4} \times 10^3}{4} = \frac{1}{40} (w)$$

* Công suất xoay chiều là:

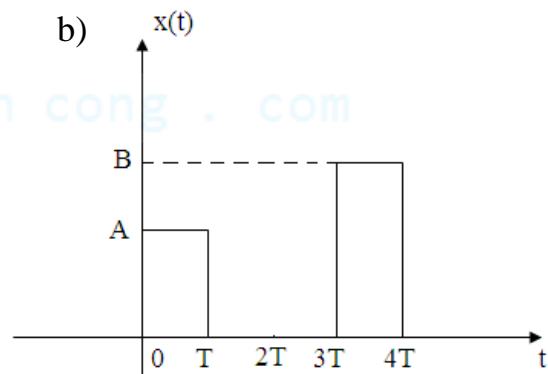
$$P_{\bar{i}} = P - P_i = \frac{I^2}{3} R - \frac{I^2}{4} R = \frac{I^2}{12} R = \frac{1}{120} (w)$$

Bài 2.1. Hãy xác định hàm tự tương quan

a)

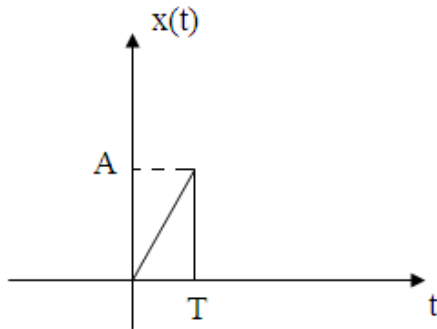


b)

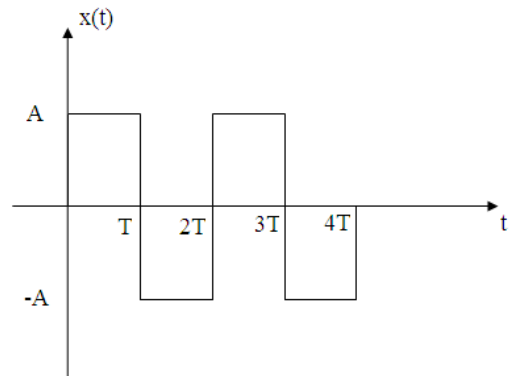


Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

c)



d)



Giải

a)

$$x(t) = A \prod\left(\frac{t}{2T}\right)$$

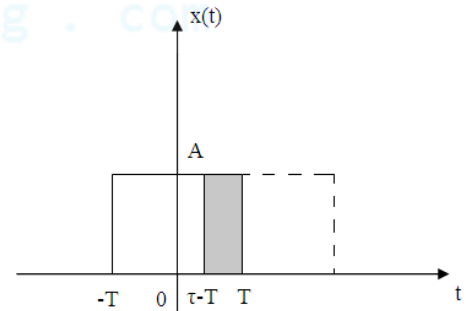
Hàm tự tương quan của tín hiệu :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

$x(t)$ là hàm thực $\Rightarrow \varphi_{xx}(\tau)$ là hàm chẵn

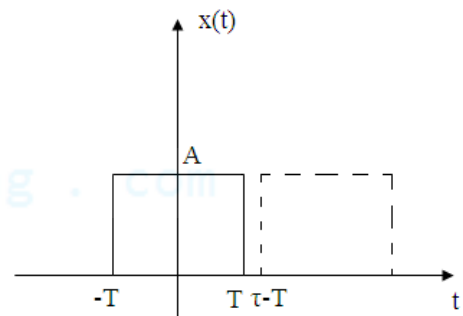
* $0 \leq \tau < 2T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau-T}^T A^2 dt = A^2 (2T - \tau)$$



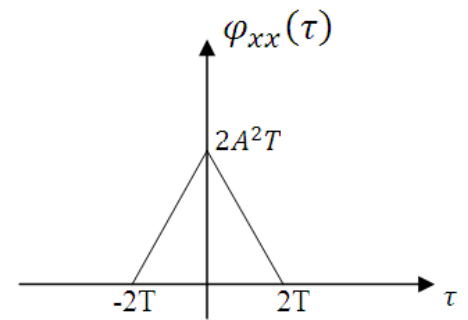
* $\tau \geq 2T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = 0$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

Vậy $\varphi_{xx}(\tau) = \begin{cases} A^2(2T - |\tau|) ; & |\tau| \leq 2T \\ 0 & ; |\tau| \geq 2T \end{cases}$



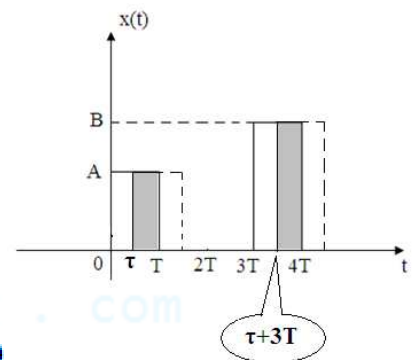
b)
$$x(t) = A \prod \frac{t - \frac{T}{2}}{T} + B \prod \frac{t - \frac{7T}{2}}{T}$$

Hàm tự tương quan của tín hiệu :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

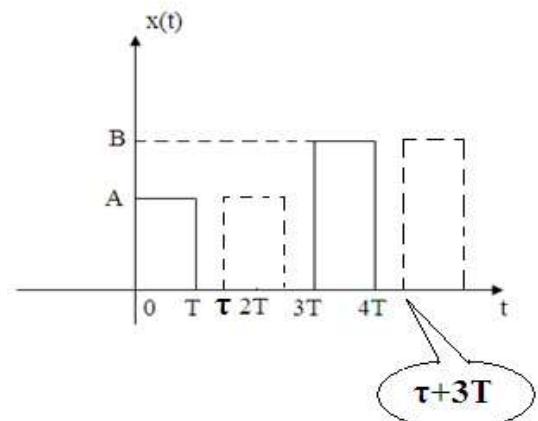
* $0 \leq \tau < T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^T A^2 dt + \int_{\tau+3T}^{4T} B^2 dt = (A^2 + B^2)(T - \tau)$$



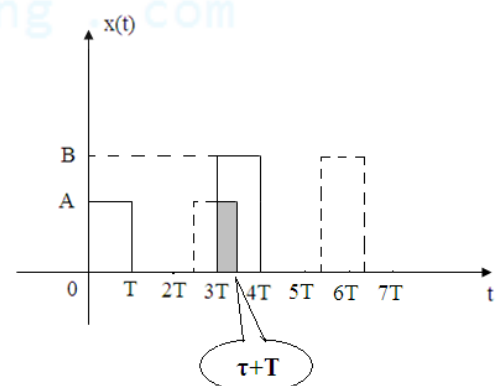
* $T \leq \tau < 2T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = 0$$



* $2T \leq \tau < 3T$

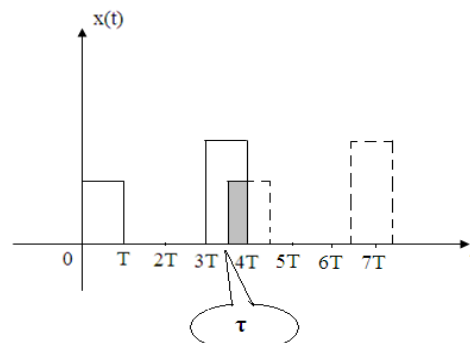
$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{3T}^{\tau+T} AB dt = AB(\tau - 2T)$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

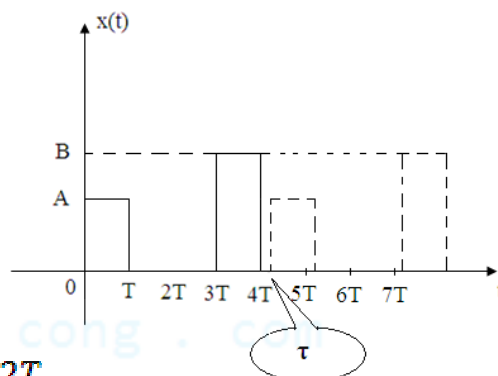
* $3T \leq \tau < 4T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{4T} AB \, dt = AB(4T - \tau)$$

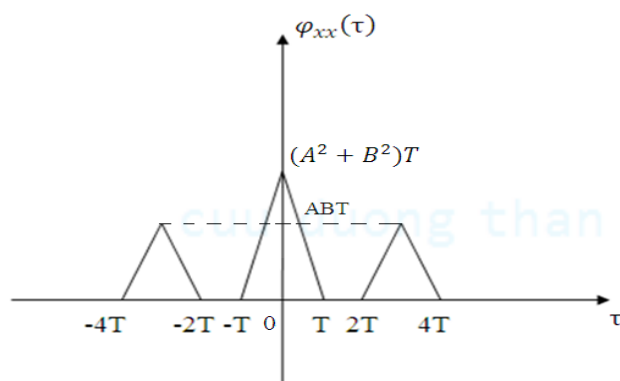


* $\tau \geq 4T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = 0$$



Vậy
$$\varphi_{xx}(\tau) = \begin{cases} 0; & T \leq |\tau| < 2T \\ 0; & |\tau| \geq 4T \\ (A^2 + B^2)(T - |\tau|); & |\tau| < T \\ AB(\tau - 2T); & 2T \leq |\tau| < 3T \\ AB(4T - \tau); & 3T \leq |\tau| < 4T \end{cases}$$



c)

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

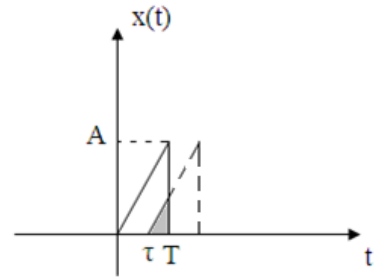
$$x(t) = \frac{A}{T} t [1(t) - 1(t - T)]$$

Hàm tự tương quan của tín hiệu :

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

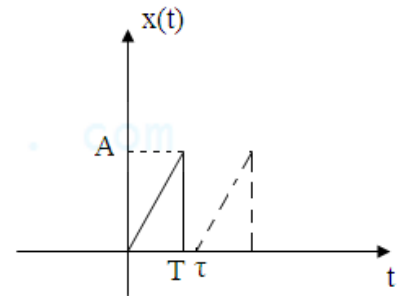
❖ $0 \leq \tau < T$

$$\begin{aligned}\varphi_{xx}(\tau) &= \int_{\tau}^T \left(\frac{A}{T} t\right) \left(\frac{A}{T} (t-\tau)\right) dt \\ &= \frac{A^2}{T^2} \left(\frac{T^3}{3} - \frac{\tau T^2}{2} - \frac{\tau^3}{6}\right)\end{aligned}$$

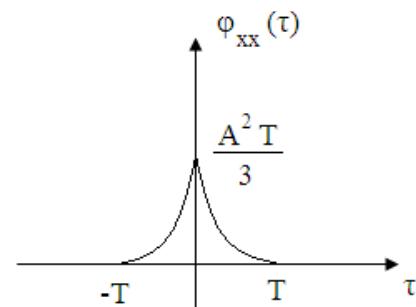


❖ $\tau \geq T$

$$\varphi_{xx}(\tau) = 0$$



$$\Rightarrow \varphi_{xx}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{T^2} \left(\frac{T^3}{3} - \frac{|\tau| T^2}{2} - \frac{|\tau|^3}{6}\right); & |\tau| < T \\ 0 & ; \quad |\tau| \geq T \end{cases}$$



d)

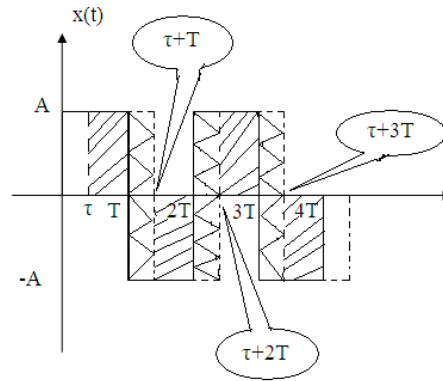
$$x(t) = A \prod\limits_{-T}^{t+\frac{T}{2}} - A \prod\limits_{-T}^{t+\frac{3T}{2}} + A \prod\limits_{-T}^{t+\frac{5T}{2}} - A \prod\limits_{-T}^{t+\frac{7T}{2}}$$

Hàm tự tương quan của tín hiệu :

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

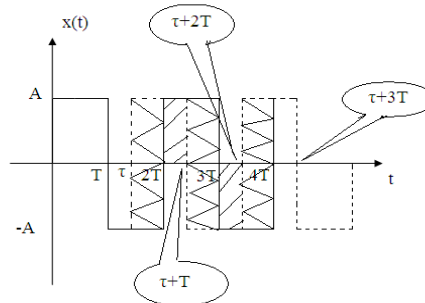
$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt$$

❖ $0 \leq \tau < T$



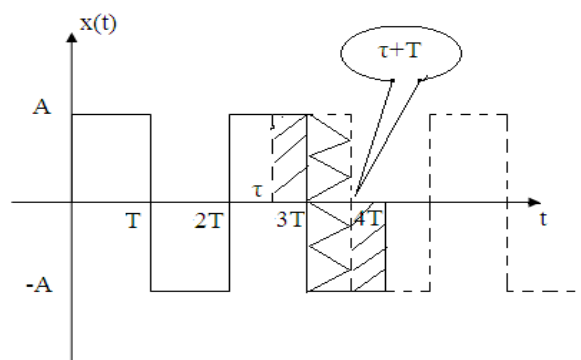
$$\begin{aligned} \varphi_{xx}(\tau) &= \int_{\tau}^{T} A^2 dt - \int_{T}^{\tau+T} A^2 dt + \int_{\tau+T}^{2T} A^2 dt - \int_{2T}^{\tau+2T} A^2 dt + \int_{\tau+2T}^{3T} A^2 dt - \int_{3T}^{\tau+3T} A^2 dt \\ &\quad + \int_{\tau+3T}^{4T} A^2 dt = 4A^2(T-\tau) - 3A^2\tau = A^2(4T-7\tau) \end{aligned}$$

❖ $T \leq \tau < 2T$



$$\varphi_{xx}(\tau) = - \int_{\tau}^{2T} A^2 dt + \int_{2T}^{\tau+T} A^2 dt - \int_{\tau+T}^{3T} A^2 dt + \int_{3T}^{\tau+2T} A^2 dt - \int_{\tau+2T}^{4T} A^2 dt = A^2(-8T+5\tau)$$

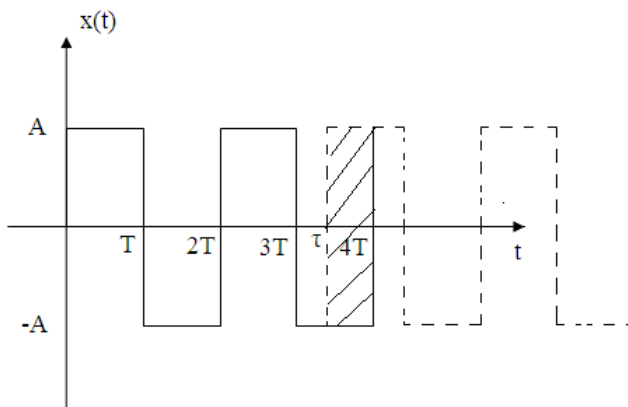
❖ $2T \leq \tau < 3T$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu suu tầm bởi Trần Văn Thượng

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{3T} A^2 dt - \int_{3T}^{\tau+T} A^2 dt + \int_{\tau+T}^{4T} A^2 dt = A^2(8T - 3\tau)$$

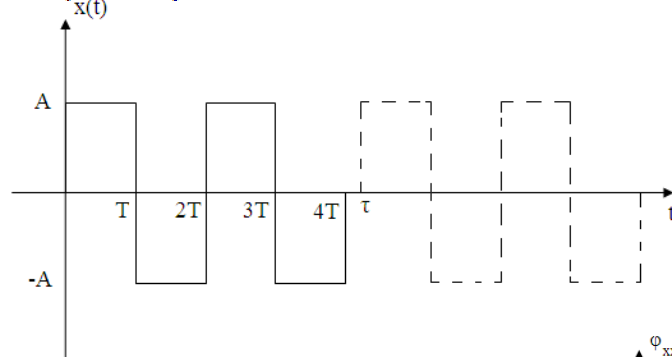
❖ $3T \leq \tau < 4T$



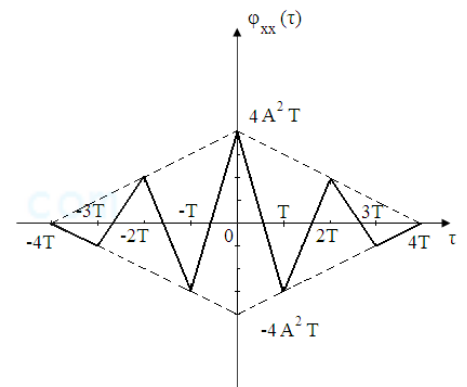
$$\varphi_{xx}(\tau) = - \int_{\tau}^{x(t)} A^2 dt = A^2(\tau - 4T)$$

❖ $\tau \geq 4T$

$\varphi_{xx}(\tau) = 0$



$$\varphi_{xx}(\tau) = \begin{cases} A^2(4T - 7|\tau|) & ; |\tau| < T \\ A^2(-8T + 5|\tau|) & ; T \leq |\tau| < 2T \\ A^2(8T - 3|\tau|) & ; 2T \leq |\tau| < 3T \\ A^2(|\tau| - 4T) & ; 3T \leq |\tau| < 4T \\ 0 & ; |\tau| \geq 4T \end{cases}$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Bài 2.2. Hãy xác định và vẽ hàm tự tương quan của tín hiệu tuần hoàn trên hình 2.2. Hãy cho biết hàm tự tương quan của hàm này trong trường hợp tín hiệu bị dịch chuyển một đoạn $t_0 > 0$

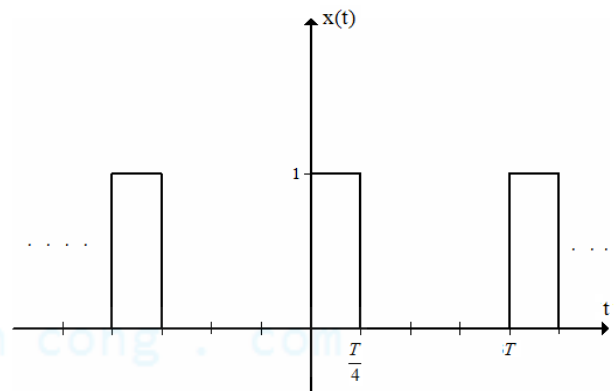
Giải

Ta có
$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{8}}{\frac{T}{4}}\right)$$

Vậy hàm tự tương quan của $x(t)$ là

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau + \frac{T}{4}} 1^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{T}{4} - \tau \right) = \frac{1}{4} - \frac{\tau}{T}$$

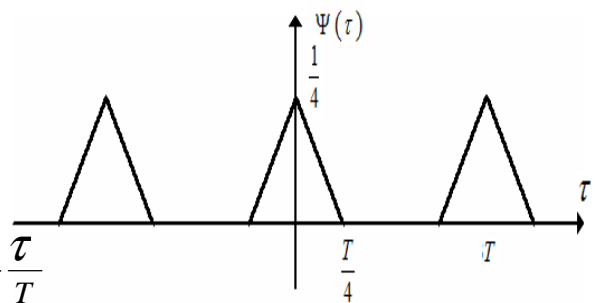


* Khi tín hiệu bị dịch chuyển một đoạn $t_0 > 0$

$$\Rightarrow x(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{8} - t_0}{\frac{T}{4}}\right)$$

$$\Psi(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{\tau + t_0}^{\tau + t_0 + \frac{T}{4}} 1^2 dt = \frac{1}{T} \left(\frac{T}{4} + t_0 - (\tau + t_0) \right) = \frac{1}{4} - \frac{\tau}{T}$$



Bài 2.3. Tìm hàm tự tương quan của các tín hiệu sau:

a) $x(t) = A$; A là hằng số.

b) $x(t) = A(1 - e^{-\alpha t})$

c) $x(t) = \delta(t)$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Giải

a) Hàm tự tương quan của tín hiệu là:

$$\Psi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int A^2 dt$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} A^2 T = \frac{A^2}{2}$$

b) Hàm tự tương quan của tín hiệu là:

$$\Psi_{xx} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T A^2 (1 - e^{-\alpha t}) (1 - e^{-\alpha(t-\tau)}) dt$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} A^2 \int_0^T (1 - e^{-\alpha(t-\tau)} - e^{-\alpha t} + e^{-\alpha(2t-\tau)}) dt$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} A^2 \left[T + e^{\alpha \tau} \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha} - 1) + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha} - 1) + \frac{e^{\alpha \tau}}{2\alpha} (e^{-2\alpha T} - 1) \right]$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{A}{2T} \left(T + \frac{e^{\alpha \tau}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{e^{\alpha \tau}}{2\alpha} \right)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\frac{A^2}{2} + \frac{1}{T} \left(\frac{e^{\alpha \tau}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{e^{\alpha \tau}}{2\alpha} \right) \right)$$

$$= \frac{A^2}{2}$$

c) Hàm tự tương quan của tín hiệu là:

$$\Psi_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \delta(t - \tau) dt$$

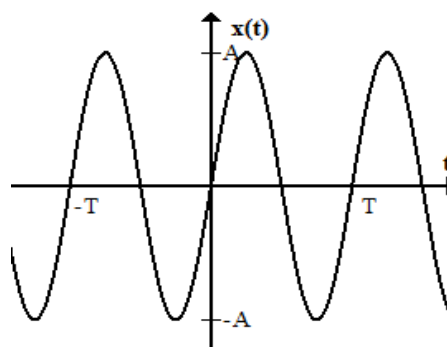
$$= \delta(\tau) * \delta(\tau) = \delta(\tau)$$

Bài 2.4 Tìm hàm tự tương quan của tín hiệu điều hòa:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Giải

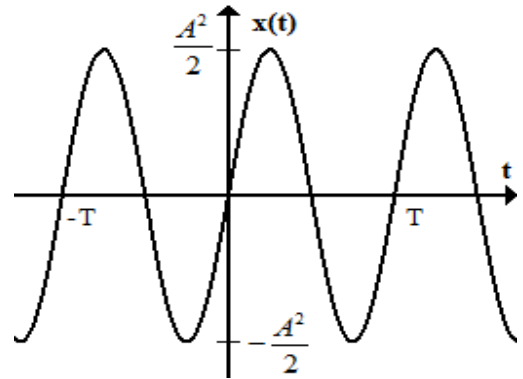
Ta có: $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

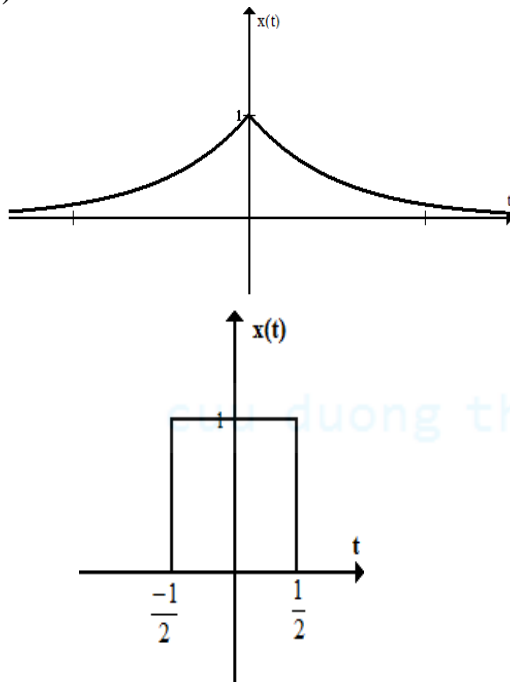
Hàm tự tương quan của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{xx} &= \frac{1}{T} \int_0^T [A^2 \sin(\omega t + \varphi) \sin[\omega(t - \tau) + \varphi]] dt \\
 &= \frac{A^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [\cos \omega \tau - \cos(2\omega - \omega \tau + 2\varphi)] dt \\
 &= \frac{A^2}{2T} \left[t \cos \omega \tau - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + 2\varphi - \omega \tau) \right]_0^T \\
 &= \frac{A^2}{2T} \left[T \cos \omega \tau - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T + 2\varphi - \omega \tau) + \frac{1}{2\omega} \sin(2\varphi - \omega \tau) \right] \\
 &= \frac{A^2}{2T} \left\{ T \cos \omega \tau - \frac{1}{2\omega} [\sin 2\omega T \cos(2\varphi - \omega \tau) - \cos 2\omega T \sin(2\varphi - \omega \tau) + \sin(2\varphi - \omega \tau)] \right\} \\
 &= \frac{A^2}{2T} T \cos \omega \tau = \frac{A^2 \cos \omega \tau}{2}
 \end{aligned}$$

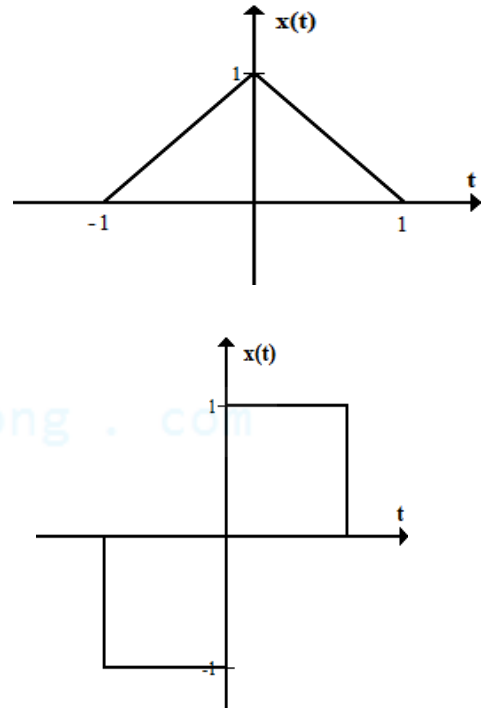


Bài 2.5. hãy xác định và vẽ hàm tương quan của các hàm sau:

a)



b)



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

Giải

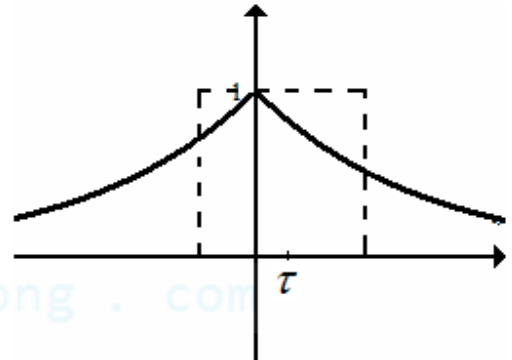
a) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\varphi_{ii} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt$$

Ta có x_1 và x_2 là hàm chẵn

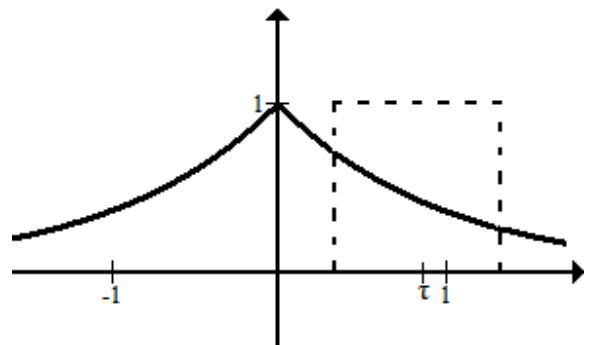
* Xét $0 < \tau \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_{\tau-\frac{1}{2}}^0 e^t dt + \int_0^{\tau+\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\ &= e^t \Big|_{\tau-\frac{1}{2}}^0 - e^{-t} \Big|_0^{\tau+\frac{1}{2}} \\ &= 1 - e^{\tau-\frac{1}{2}} - e^{-\tau-\frac{1}{2}} + 1 \\ &= 2 - \frac{1}{\sqrt{e}}(e^{\tau} + e^{-\tau})\end{aligned}$$

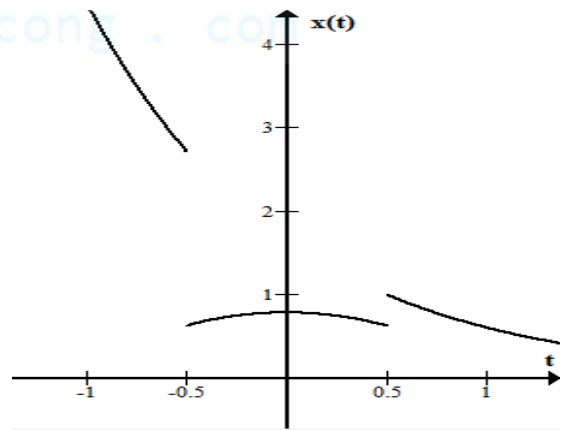


* Xét $\tau > \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_{\tau-\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-t} dt \\ &= -e^{-t} \Big|_{\tau-\frac{1}{2}}^{\infty} = e^{-\tau+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$



$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} 2 - \frac{1}{\sqrt{e}}(e^{\tau} + e^{-\tau}) & |\tau| < \frac{1}{2} \\ e^{-\tau+\frac{1}{2}} & |\tau| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



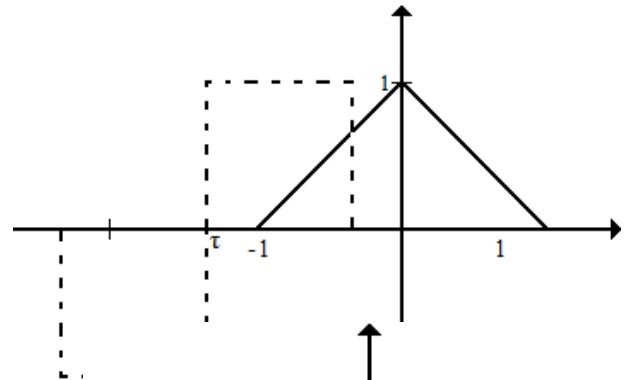
Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

b) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\varphi_{ii} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2^*(t-\tau)dt$$

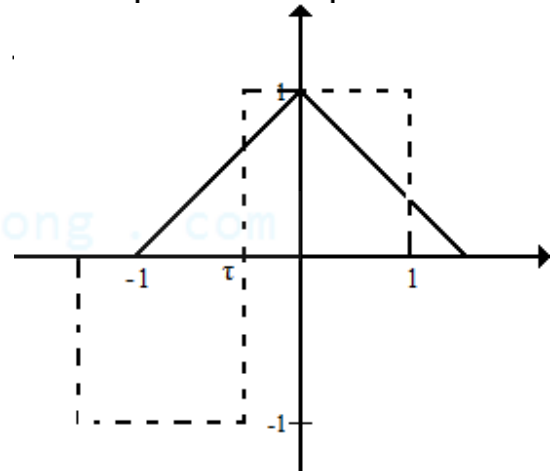
* Xét $-2 < \tau < -1$

$$\begin{aligned}\varphi_{12} &= \int_{-1}^{\tau+1} (t+1)dt \\ &= \left(\frac{1}{2}t^2 + t \right) \Big|_{-1}^{\tau+1} = \frac{1}{2}(\tau+1)^2 + \tau + 1 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}\tau^2 + 2\tau + 2\end{aligned}$$



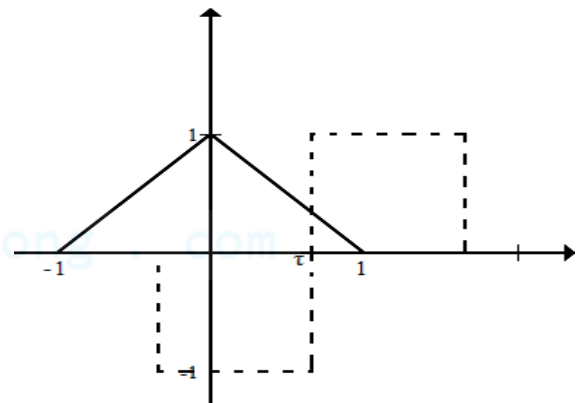
* Xét $-1 < \tau < 0$

$$\begin{aligned}\varphi_{12} &= -\int_{-1}^{\tau} (t+1)dt + \int_{\tau}^0 (t+1)dt + \int_0^{\tau+1} (1-t)dt \\ &= -\frac{1}{2}\tau^2 - \tau + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}\tau^2 - \tau + \tau + 1 - \frac{1}{2}(\tau+1)^2 \\ &= -\frac{3}{2}\tau^2 - 2\tau\end{aligned}$$



* Xét $0 < \tau < 1$

$$\begin{aligned}\varphi_{12} &= -\int_{\tau-1}^0 (t+1)dt - \int_0^{\tau} (1-t)dt + \int_{\tau}^1 (1-t)dt \\ &= \frac{1}{2}(\tau-1)^2 + \tau - 1 + \frac{1}{2}\tau^2 - \tau + 1 - \frac{1}{2} - \tau + \frac{1}{2}\tau^2 \\ &= \frac{3}{2}\tau^2 - 2\tau\end{aligned}$$



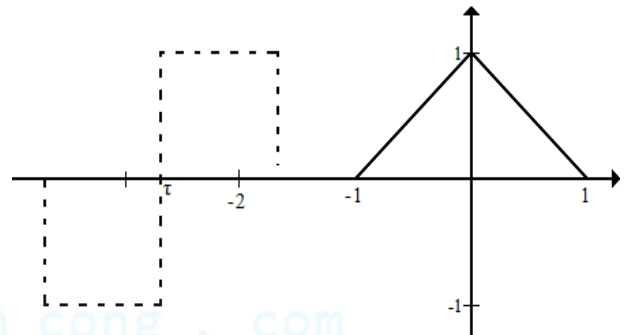
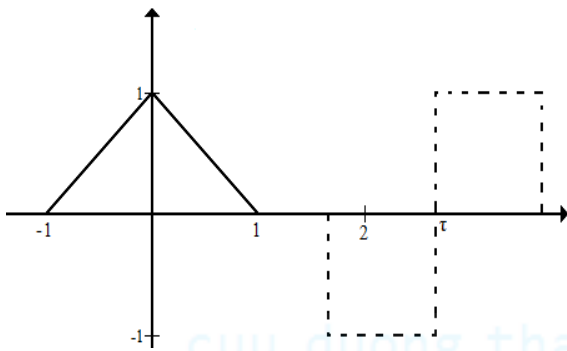
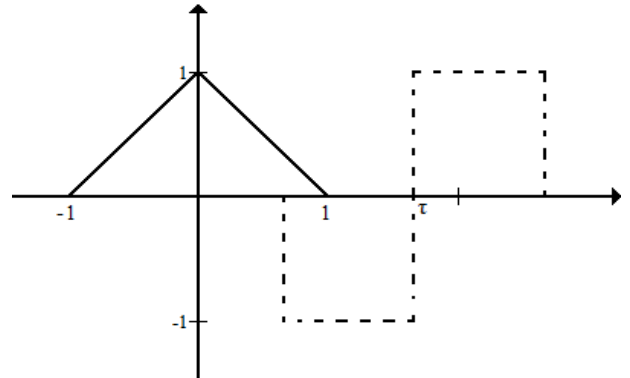
* Xét $1 < \tau < 2$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

$$\begin{aligned}\varphi_{12} &= -\int_{\tau-1}^1 (1-t)dt \\ &= -1 + \frac{1}{2} + \tau - 1 - \frac{1}{2}(\tau-1)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\tau^2 + 2\tau - 2\end{aligned}$$

* Xét $|\tau| > 2$

$$\varphi = 0$$



Vậy hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\Rightarrow \varphi = \begin{cases} \frac{1}{2}\tau^2 + 2\tau + 2 & -2 < \tau < -1 \\ -\frac{3}{2}\tau^2 - 2\tau & -1 < \tau < 0 \\ \frac{3}{2}\tau^2 - 2\tau & 0 < \tau < 1 \\ -\frac{1}{2}\tau^2 + 2\tau - 2 & 1 < \tau < 2 \\ 0 & |\tau| > 2 \end{cases}$$

Bài 2.6. Tìm hàm tương quan giữa điện áp $u(t)$ và dòng điện $i(t)$ sau:

a) $u(t) = U$ U là hằng số

$$i(t) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_1)$$

d) $u(t) = U\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$

$$i(t) = I\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

b) $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$
 $i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$

c) $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$
 $i(t) = I_m \cos(2\omega_0 t + \varphi_1)$

e) $u(t) = U \sin \omega_0 t$
 $i(t) = 2I\delta(t) + I\delta(t-T) + I\delta(t+T)$

f) $u(t) = U\Pi\left(\frac{t-T}{2T}\right)$
 $i(t) = I\delta(t)$

Giải

a) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}\Psi_{ii}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i^*(t-\tau) dt \\&= \frac{1}{T} \int_0^T U I_m \sin(\omega_0 t - \omega_0 \tau + \varphi_1) dt \\&= -\frac{U I_m}{T \omega_0} \cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau + \varphi_1) \Big|_0^T \\&= -\frac{U I_m}{T \omega_0} [\cos(\omega_0 T - \omega_0 \tau + \varphi_1) - \cos(-\omega_0 \tau + \varphi_1)] \\&= 0\end{aligned}$$

b) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\begin{aligned}\Psi_{ii}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i^*(t-\tau) dt \\&= \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_u) I_m \cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau + \varphi_i) dt \\&= \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T [\cos(\omega_0 \tau + \varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega_0 t - \omega_0 \tau + \varphi_u + \varphi_i)] dt \\&= \frac{U_m I_m}{2T} \left[t \cos(\omega_0 \tau + \varphi_u - \varphi_i) + \frac{1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 t - \omega_0 \tau + \varphi_u + \varphi_i) \right] \Big|_0^T \\&= \frac{U_m I_m}{2T} \left[T \cos(\omega_0 \tau + \varphi_u - \varphi_i) + \frac{1}{2\omega_0} \sin(2\omega_0 T - \omega_0 \tau + \varphi_u + \varphi_i) - \frac{1}{2\omega_0} \sin(-\omega_0 \tau + \varphi_u + \varphi_i) \right] \\&= \frac{U_m I_m}{2} \cos(\omega_0 \tau + \varphi_u - \varphi_i)\end{aligned}$$

c) Hàm tương quan của tín hiệu là:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\begin{aligned}\Psi_{ui}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_u) I_m \cos(2\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + \varphi_i) dt \\&= \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T [\cos(-\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(3\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + \varphi_u - \varphi_i)] dt \\&= \frac{U_m I_m}{2T} \left[-\frac{1}{\omega_0} \sin(-\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + \varphi_u + \varphi_i) + \frac{1}{3\omega_0} \sin(3\omega_0 t - 2\omega_0 \tau + \varphi_u - \varphi_i) \right]_0^T \\&= \frac{U_m I_m}{2T} \left[-\frac{1}{\omega_0} \sin(-\omega_0 T - 2\omega_0 \tau + \varphi_u + \varphi_i) + \frac{1}{\omega_0} \sin(-2\omega_0 \tau + \varphi_u + \varphi_i) \right. \\&\quad \left. + \frac{1}{3\omega_0} \sin(3\omega_0 T - 2\omega_0 \tau + \varphi_u - \varphi_i) - \frac{1}{3\omega_0} \sin(-2\omega_0 \tau + \varphi_u - \varphi_i) \right] = 0\end{aligned}$$

d) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\varphi_{ui} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) i^*(t - \tau) dt$$

Có $u(t)$ và $i(t)$ là hàm chẵn

Xét $0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varphi_{ui} &= \int_{\tau - \frac{T}{2}}^{\tau + \frac{T}{2}} U I dt \\&= UI \left(\tau + \frac{T}{2} - \tau + \frac{T}{2} \right) = UIT\end{aligned}$$

Xét $\frac{T}{2} < \tau \leq \frac{3T}{2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \varphi_{ui} &= \int_{\tau - \frac{T}{2}}^T U I dt \\&= UI \left(T - \tau + \frac{T}{2} \right) = UI \left(\frac{3T}{2} - \tau \right)\end{aligned}$$

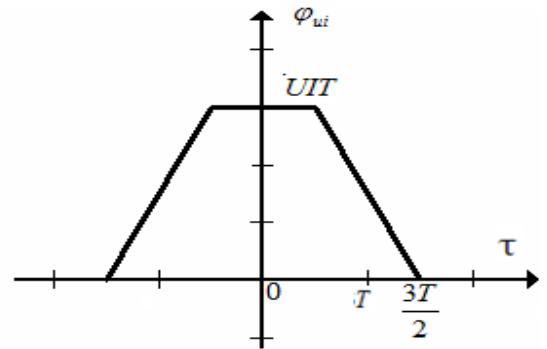
Xét $\tau > \frac{3T}{2}$

$$\Rightarrow \varphi_{ui} = 0$$

Vậy ta có hàm tương quan của tín hiệu là:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\varphi_{ui} = \begin{cases} UIT & \text{với } 0 \leq \tau < \frac{T}{2} \\ UI\left(\frac{3T}{2} - |\tau|\right) & \text{với } \frac{T}{2} \leq \tau \leq \frac{3T}{2} \\ 0 & \text{với } \tau > \frac{3T}{2} \end{cases}$$



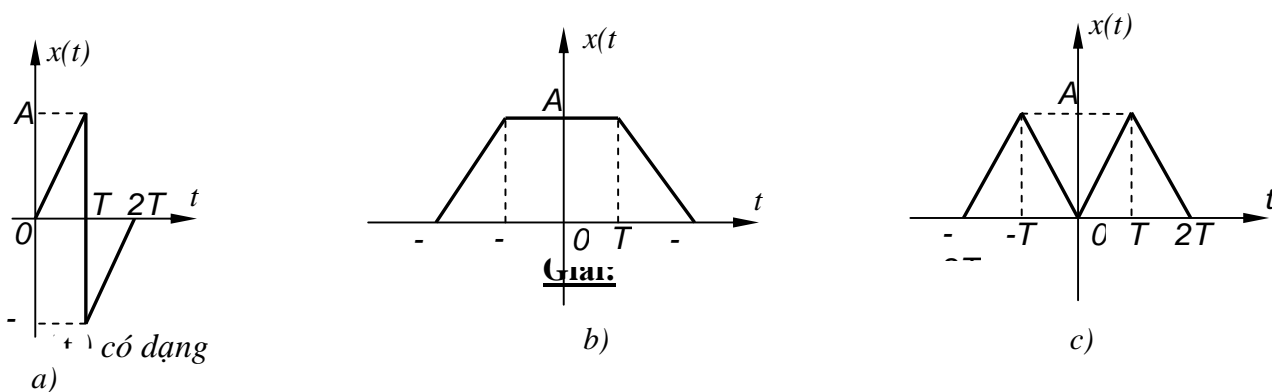
e) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} \Psi_{ui}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)i(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} USa(\omega_0 t)[2I\delta(t) + I\delta(t-T) + I\delta(t+T)]dt \\ &= UI \int_{-\infty}^{\infty} Sa(\omega_0 t)[2\delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t+T)]dt \\ &= UISa(\omega_0 \tau) * [2\delta(\tau) + \delta(\tau-T) + \delta(\tau+T)] \\ &= UI[Sa(\omega_0 \tau) * 2\delta(\tau) + Sa(\omega_0 \tau) * \delta(\tau-T) + Sa(\omega_0 \tau) * \delta(\tau+T)] \\ &= UI[2Sa(\omega_0 \tau) + Sa\omega_0(\tau-T) + Sa\omega_0(\tau+T)] \end{aligned}$$

f) Hàm tương quan của tín hiệu là:

$$\begin{aligned} \Psi_{ui}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)i(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U\Pi\left(\frac{t-T}{2T}\right)I\delta(t)dt \\ &= U\Pi\left(\frac{\tau-T}{2T}\right) * \delta(\tau) \\ &= U\Pi\left(\frac{\tau-T}{2T}\right) \end{aligned}$$

Bài 3.1: Hãy xác định phổ của các tín hiệu trên hình B. 3.1.



Hình B.3.1

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}t & : 0 < t < T \\ \frac{A}{T}t - 2A & : T < t < 2T \\ 0 & : t < 0; t > 2T \end{cases}$$

Theo định nghĩa:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

vậy phổ của tín hiệu $x(t)$ là

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{A}{T} \int_0^T t e^{-j\omega t} dt + \frac{A}{T} \int_T^{2T} t e^{-j\omega t} dt - 2A \int_T^{2T} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{A}{T} \left[-\frac{te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2} \right]_0^T + \frac{A}{T} \left[-\frac{te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2} \right]_T^{2T} - 2A \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_T^{2T} \\ &= \frac{A}{T} \left[-\frac{Te^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{(j\omega)^2} + \frac{1}{(j\omega)^2} \right] + \frac{A}{T} \left[-\frac{2Te^{-j\omega 2T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega 2T}}{(j\omega)^2} + \frac{Te^{-j\omega T}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega T}}{(j\omega)^2} \right] \\ &\quad - 2A \frac{j}{\omega} [e^{-j\omega 2T} - e^{-j\omega T}] \\ &= \frac{A}{T} \frac{1}{(j\omega)^2} - \frac{2ATe^{-j\omega 2T}}{T j\omega} - \frac{Ae^{-j\omega 2T}}{T (j\omega)^2} - \frac{2Aje^{-j\omega 2T}}{\omega} + \frac{2Aje^{-j\omega T}}{\omega} \\ &= Ae^{-j\omega T} \left[\frac{e^{j\omega T}}{T(j\omega)^2} - \frac{2e^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{T(j\omega)^2} - \frac{2je^{-j\omega T}}{\omega} + \frac{2j}{\omega} \right] \\ &= Ae^{-j\omega T} \left[-\frac{e^{j\omega T}}{T\omega^2} + \frac{2je^{-j\omega T}}{\omega} + \frac{e^{-j\omega T}}{T\omega^2} - \frac{2je^{-j\omega T}}{\omega} + \frac{2j}{\omega} \right] \end{aligned}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$= Ae^{-j\omega T} \left[\frac{e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}}{\omega^2 T} + \frac{2j}{\omega} \right] = Ae^{-j\omega T} \left[\frac{-2j \sin \omega T}{\omega^2 T} + \frac{2j}{\omega} \right]$$

$$= \frac{j2Ae^{-j\omega T}}{\omega} \left[-\frac{\sin \omega T}{\omega T} + 1 \right] = \frac{j2Ae^{-j\omega T}}{\omega} [1 - Sa\omega t]$$

b)

Tín hiệu $x(t)$ có dạng

$$x(t) = 2A \bigwedge \left(\frac{t}{2T} \right) - A \bigwedge \left(\frac{t}{T} \right)$$

$$\bigwedge \left(\frac{t}{2T} \right) \leftrightarrow 2T Sa^2 \omega T \Rightarrow 2A \bigwedge \left(\frac{t}{2T} \right) \leftrightarrow 4AT Sa^2 \omega T$$

$$\bigwedge \left(\frac{t}{T} \right) \leftrightarrow T Sa^2 \frac{\omega T}{2} \Rightarrow A \bigwedge \left(\frac{t}{T} \right) \leftrightarrow AT Sa^2 \frac{\omega T}{2}$$

Vậy phổ của tín hiệu $x(t)$ là:

$$X(\omega) = 4AT Sa^2 \omega T - AT Sa^2 \frac{\omega T}{2} = AT \left[4Sa^2 \omega T + Sa^2 \frac{\omega T}{2} \right]$$

$$= AT \left[4 \left(\frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j\omega T} \right)^2 - 4 \left(\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{j\omega T} \right)^2 \right]$$

$$= AT \left[4 \left(\frac{e^{2j\omega T} - 2 + e^{-2j\omega T}}{(2j\omega T)^2} \right) - \left(\frac{e^{j\omega T} - 2 + e^{-j\omega T}}{(j\omega T)^2} \right) \right]$$

$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2} [e^{2j\omega T} + e^{-2j\omega T} - e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}]$$

$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2} [(e^{2j\omega T} - e^{j\omega T}) + (e^{-2j\omega T} - e^{-j\omega T})]$$

$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2} \left[e^{\frac{j3\omega T}{2}} \left(e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}} \right) \cdot e^{-\frac{j3\omega T}{2}} \left(e^{\frac{-j\omega T}{2}} - e^{\frac{j\omega T}{2}} \right) \right]$$

$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2} \left[\left(e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}} \right) \cdot \left(e^{\frac{j3\omega T}{2}} - e^{-\frac{j3\omega T}{2}} \right) \right]$$

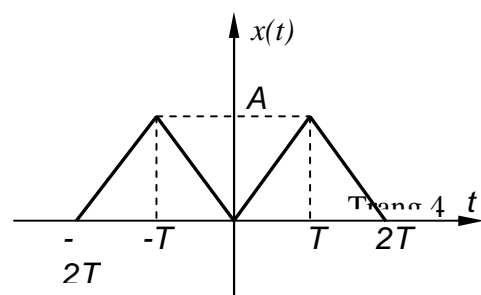
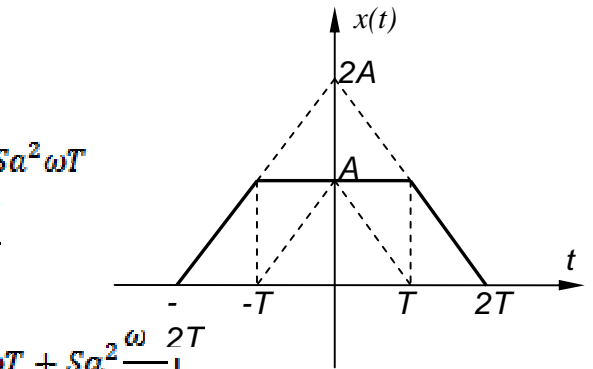
$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2} \left[2j \sin \frac{\omega T}{2} \cdot 2j \sin \frac{3\omega T}{2} \right]$$

$$= \frac{AT}{(j\omega T)^2} \cdot (2j)^2 \cdot \frac{\omega T}{2} \cdot \frac{3\omega T}{2} \left[\left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right) \cdot \left(\frac{\sin \frac{3\omega T}{2}}{\frac{3\omega T}{2}} \right) \right]$$

$$= 3AT Sa \frac{\omega T}{2} \cdot Sa \frac{3\omega T}{2}$$

c)

Tín hiệu $x(t)$ có dạng



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

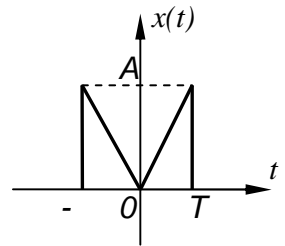
$$x(t) = A \bigwedge \left(\frac{t+T}{T} \right) + A \bigwedge \left(\frac{t-T}{T} \right)$$

Vậy phở của tín hiệu $x(t)$ là:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= ATS\alpha^2 \frac{\omega T}{2} e^{j\omega T} + ATS\alpha^2 \frac{\omega T}{2} e^{-j\omega T} \\ &= ATS\alpha^2 \frac{\omega T}{2} [e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}] = 2ATS\alpha^2 \frac{\omega T}{2} \cos \omega T \end{aligned}$$

Bài 3.2: Hãy xác định phở của tín hiệu $x(t)$ trên hình B.3.2 bằng các cách sau:

- Trực tiếp từ định nghĩa
- Từ phở xung vuông và xung tam giác.
- Áp dụng định lý vi phân trong miền tần số.



Hình B.3.2

Giải:

a)

Tín hiệu $x(t)$ có dạng

$$\begin{cases} \frac{A}{T}t & : 0 < t < T \\ -\frac{A}{T}t & : -T < t < 0 \\ 0 & : t < -T; t > T \end{cases}$$

Theo định nghĩa ta có:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{T} \int_{-T}^0 t e^{-j\omega t} dt + \frac{A}{T} \int_0^T t e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{A}{T} \left[\frac{-te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2} \right]_{-T}^0 + \frac{A}{T} \left[\frac{-te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2} \right]_0^T \\ &= \frac{A}{T} \left[\frac{1}{(j\omega)^2} + \frac{T e^{j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{j\omega T}}{(j\omega)^2} \right] + \frac{A}{T} \left[-\frac{T e^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega T}}{(j\omega)^2} + \frac{1}{(j\omega)^2} \right] \\ &= \frac{A}{T} \left[\frac{2}{(j\omega)^2} + \frac{T}{j\omega} (e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) - \frac{1}{(j\omega)^2} (e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) \right] \\ &= \frac{A}{T} \left[\frac{T}{j\omega} 2j \sin \omega T - \frac{1}{(j\omega)^2} (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T} - 2) \right] \\ &= \frac{A}{T} \left[2T^2 \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right) - \frac{2}{(j\omega)^2} (\cos \omega T - 1) \right] \end{aligned}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

$$= \frac{A}{T} \left[2T^2 Sa\omega t + \frac{4}{(j\omega)^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2} \right] = \frac{A}{T} \left[2T^2 Sa\omega t - \frac{4}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\omega t}{2}}{\left(\frac{\omega t}{2}\right)^2} \cdot \frac{\omega t^2}{4} \right]$$

$$= \frac{A}{T} \left[2T^2 Sa\omega t + T^2 Sa^2 \frac{\omega t}{2} \right] = AT \left[2Sa\omega t - Sa^2 \frac{\omega t}{2} \right]$$

b) $x(t)$ có dạng:

$$x(t) = A \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) - A \bigwedge\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$A \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \rightarrow 2TASa\omega t$$

$$A \bigwedge\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow TAsa^2 \frac{\omega t}{2}$$

Vậy phổ của tín hiệu $x(t)$ là: $X(\omega) = AT \left[2Sa\omega t - Sa^2 \frac{\omega t}{2} \right]$

c)

tín hiệu $x(t)$ có dạng:

$$x(t) = \frac{At}{T} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) - \frac{At}{T} \Pi\left(\frac{t+T/2}{T}\right)$$

$$= \frac{A}{T} \left[t \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) - t \Pi\left(\frac{t+T/2}{T}\right) \right]$$

$$\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \rightarrow T Sa\left(\frac{\omega T}{2}\right) e^{-j\frac{\omega T}{2}} = T \left[\frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{2j \frac{\omega T}{2}} \right] e^{-j\frac{\omega T}{2}} = \frac{T}{j\omega T} [1 - e^{-j\omega T}]$$

Vậy

$$t \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \rightarrow T \left[\frac{j\omega T^2 e^{-j\omega T} - T(1 - e^{-j\omega T})}{\omega^2 T^2} \right] = T \left[\frac{j e^{-j\omega T}}{\omega} - \frac{1 - e^{-j\omega T}}{\omega^2 T} \right]$$

$$= \frac{Tj e^{-j\omega T}}{\omega} - \frac{1 - e^{-j\omega T}}{\omega^2}$$

$$t \Pi\left(\frac{t+T/2}{T}\right) \rightarrow \frac{jT e^{j\omega T}}{\omega} - \frac{e^{j\omega T} - 1}{\omega^2}$$

Vậy phổ tín hiệu $x(t)$ là

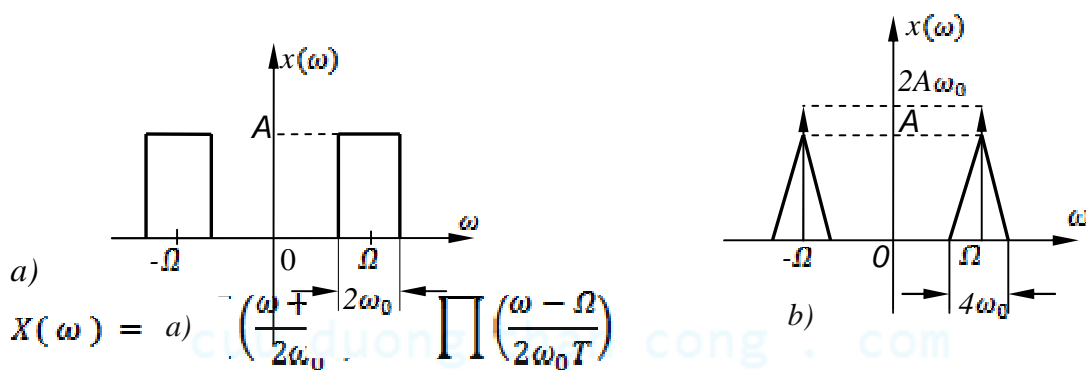
$$X(\omega) = \frac{A}{T} \left[\frac{Tj e^{-j\omega T}}{\omega} - \frac{1 - e^{-j\omega T}}{\omega^2} - \frac{jT e^{j\omega T}}{\omega} + \frac{e^{j\omega T} - 1}{\omega^2} \right]$$

$$= \frac{A}{T} \left[\frac{jT}{\omega} (e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}) + \frac{1}{\omega^2} (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T} - 2) \right]$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A}{T} \left[\frac{jT}{\omega} (-2j \sin \omega T) + \frac{1}{\omega^2} (2 \cos \omega T - 2) \right] \\
 &= \frac{2A}{T} \left[\frac{\omega T \cdot T}{\omega} \cdot \frac{\sin \omega T}{\omega T} - \frac{\sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\left(\frac{\omega T}{2}\right)^2} \cdot \left(\frac{\omega T}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} \right] = \frac{2A}{T} \left[T^2 Sa \omega T - \frac{1}{2} T^2 Sa^2 \frac{\omega T}{2} \right] \\
 &= AT \left[2Sa \omega T - Sa^2 \frac{\omega T}{2} \right]
 \end{aligned}$$

Bài 3.3: Áp dụng định lý điều chế để tìm quá trình thời gian của các tín hiệu có phổ trên hình B.3.3a,b.



$$X(\omega) = A \prod \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right) \rightarrow Sa \omega_0 t$$

Vậy

$$\prod \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right) \rightarrow \frac{\omega_0}{\pi} Sa \omega_0 t$$

$$A \prod \left(\frac{\omega + \Omega}{2\omega_0} \right) \rightarrow \frac{A\omega_0}{\pi} Sa \omega_0 t \cdot e^{-j\Omega t}$$

$$A \prod \left(\frac{\omega - \Omega}{2\omega_0} \right) \rightarrow \frac{A\omega_0}{\pi} Sa \omega_0 t \cdot e^{j\Omega t}$$

tín hiệu $x(t)$ của phổ $X(\omega)$ là:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{A\omega_0}{\pi} Sa \omega_0 t \cdot e^{-j\Omega t} + \frac{A\omega_0}{\pi} Sa \omega_0 t \cdot e^{j\Omega t} = \frac{A\omega_0}{\pi} Sa \omega_0 t [e^{-j\Omega t} + e^{j\Omega t}] \\
 &= \frac{2A\omega_0}{\pi} Sa \omega_0 t \cdot \cos \Omega t
 \end{aligned}$$

b)

$$X(\omega) = A \bigwedge \left(\frac{\omega + \Omega}{2\omega_0} \right) + 2\omega_0 A \delta(\omega + \Omega) + A \bigwedge \left(\frac{\omega - \Omega}{2\omega_0} \right) + 2\omega_0 A \delta(\omega - \Omega)$$

$$A \bigwedge \left(\frac{\omega + \Omega}{2\omega_0} \right) \rightarrow \frac{A\omega_0}{\pi} Sa^2 \omega_0 t \cdot e^{-j\Omega t}$$

**Hình
B.3.3**

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$A \bigwedge \left(\frac{\omega - \Omega}{2\omega_0} \right) \rightarrow \frac{A\omega_0}{\pi} S a^2 \omega_0 t. e^{j\Omega t}$$

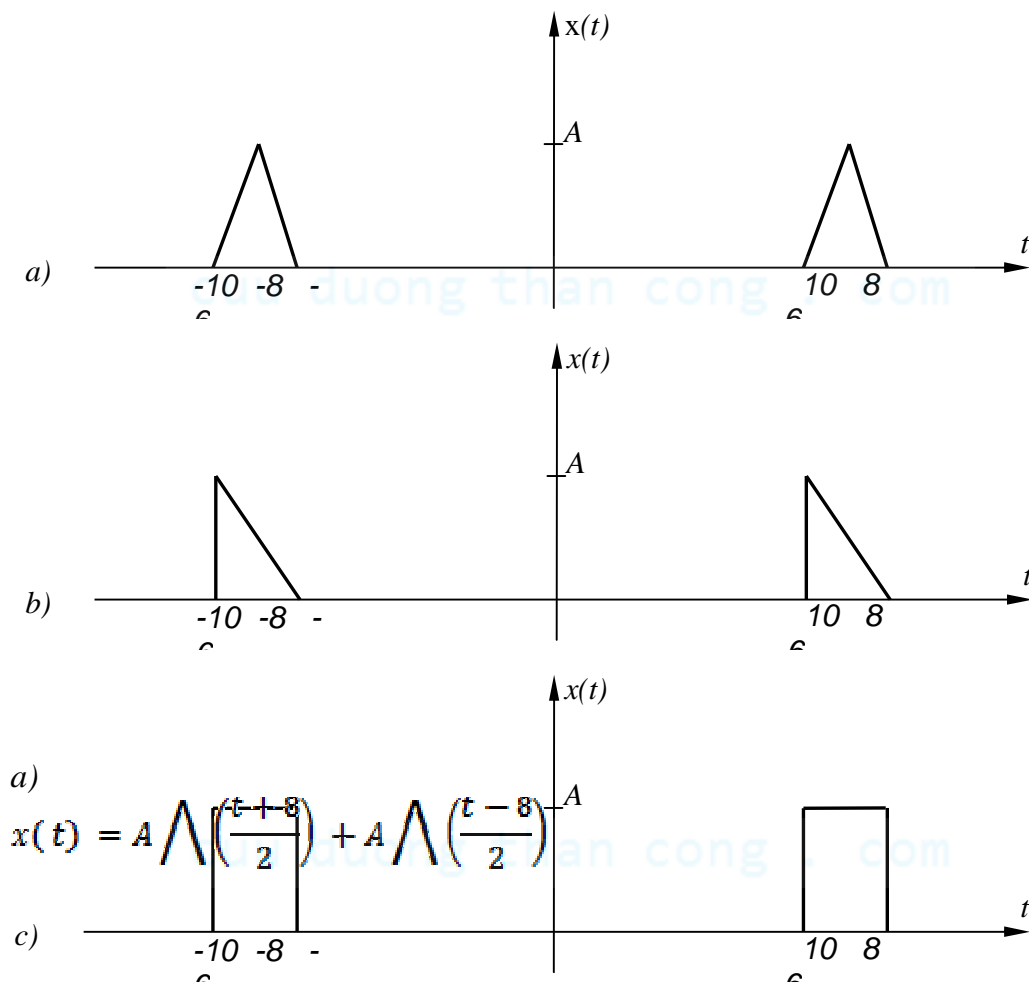
$$2\omega_0 A \delta(\omega + \Omega) \rightarrow 2\omega_0 A e^{-j\Omega t} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{A\omega_0}{\pi} e^{-j\Omega t}$$

$$2\omega_0 A \delta(\omega - \Omega) \rightarrow 2\omega_0 A e^{j\Omega t} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{A\omega_0}{\pi} e^{j\Omega t}$$

$$x(t) = \frac{A\omega_0}{\pi} S a^2 \omega_0 t (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) + \frac{A\omega_0}{\pi} (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})$$

$$= \frac{A\omega_0}{\pi} (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) (1 + S a^2 \omega_0 t) = \frac{2A\omega_0}{\pi} \cos \Omega t. (1 + S a^2 \omega_0 t)$$

Bài 3.4: Áp dụng định lý dịch chuyển trong miền thời gian để tìm phổ của các tín hiệu trên hình B.3.4a,b,c.



Vậy $X(\omega)$ của tín hiệu dịch trên là

Hình B.3.4

chuyển trong miền thời gian

$$X(\omega) = 2A S a^2 \omega (e^{j8\omega} + e^{-j8\omega}) = 2A S a^2 \omega. 2 \cos 8\omega = 4A S a^2 \omega. \cos 8\omega$$

$$A \bigwedge \left(\frac{t + 8}{2} \right) \rightarrow 2S a^2 \omega$$

b)

$$x(t) = \begin{cases} A\left(-\frac{3}{2} - \frac{t}{4}\right) & : -10 < t < -6 \\ 0 & : t < -10; t > 10; -6 < t < 6 \\ A\left(\frac{5}{2} - \frac{t}{4}\right) & : 6 < t < 10 \end{cases}$$

Theo định nghĩa

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= A \left[\int_{-6}^{10} \left(\frac{5}{2} - \frac{t}{4}\right) e^{-j\omega t} dt - \int_{-10}^{-6} \left(\frac{3}{2} + \frac{t}{4}\right) e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= A \left[\int_{-6}^{10} \frac{5}{2} e^{-j\omega t} dt - \int_{-6}^{10} \frac{t}{4} e^{-j\omega t} dt - \int_{-10}^{-6} \frac{3}{2} e^{-j\omega t} dt - \int_{-10}^{-6} \frac{t}{4} e^{-j\omega t} dt \right] \\ &= A \left[\frac{5}{2} \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_{-6}^{10} - \frac{1}{4} \left[-\frac{te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2} \right]_{-6}^{10} - \frac{3}{2} \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_{-10}^{-6} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \left[-\frac{te^{-j\omega t}}{j\omega} - \frac{e^{-j\omega t}}{(j\omega)^2} \right]_{-10}^{-6} \right] \\ &= A \left[\frac{5}{2} \left[\frac{-e^{j\omega 10} + e^{j\omega 6}}{j\omega} \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{-10e^{j\omega 10} + 6e^{j\omega 6}}{j\omega} + \frac{-e^{j\omega 10} + e^{j\omega 6}}{(j\omega)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \left[\frac{-e^{j\omega 6} + e^{j\omega 10}}{j\omega} \right] - \frac{1}{4} \left[\frac{6e^{j\omega 6} - 10e^{j\omega 10}}{j\omega} + \frac{-e^{j\omega 6} + e^{j\omega 10}}{(j\omega)^2} \right] \right] \\ &= A \left[\frac{1}{2j\omega} (2e^{j\omega 6} + 2e^{j\omega 10}) - \frac{1}{4(j\omega)^2} (e^{j\omega 6} + e^{j\omega 10} - (e^{j\omega 6} + e^{j\omega 10})) \right] \\ &= A \left[\frac{e^{j\omega 2}}{j\omega} \cdot 2 \cos 8\omega - \frac{1}{4(j\omega)^2} (e^{j\omega 2} (e^{-j\omega 8} + e^{j\omega 8}) - e^{-j\omega 2} (e^{j\omega 8} + e^{-j\omega 8})) \right] \\ &= A \left[\frac{e^{j\omega 2}}{j\omega} (e^{-j\omega 8} + e^{j\omega 8}) - \frac{1}{4(j\omega)^2} \cdot (e^{-j\omega 8} + e^{j\omega 8}) \cdot (e^{j\omega 2} - e^{-j\omega 2}) \right] \\ &= \frac{A}{j\omega} 2 \cos 8\omega \left[e^{j\omega 2} - \frac{1}{4j\omega} 2j \sin 2\omega \right] = \frac{A}{j\omega} 2 \cos 8\omega \left[\cos 2\omega + j \sin 2\omega - \frac{\sin 2\omega}{2\omega} \right] \\ &= \frac{A 2 \cos 8\omega}{j} \left[\frac{\cos 2\omega}{\omega} + \frac{j \sin 2\omega}{\omega} - \frac{\sin 2\omega}{2\omega^2} \right] \\ &= 2jA \cos 8\omega \left[\frac{\sin 2\omega}{2\omega^2} - \frac{2j\omega \sin 2\omega}{2\omega^2} - \frac{\cos 2\omega}{\omega} \right] \end{aligned}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$= 2jA \cos 8\omega \left[\frac{\sin 2\omega}{2\omega^2} (1 - 2j\omega) - \frac{\cos 2\omega}{\omega} \right]$$

c)

$$x(t) = A \prod \left(\frac{t+8}{4} \right) + A \prod \left(\frac{t-8}{4} \right)$$

$$X(\omega) = 4ASa2\omega \cdot e^{j8\omega} + 4ASa2\omega \cdot e^{-j8\omega}$$

$$= 4ASa2\omega \cdot 2 \cos 8\omega = 8ASa2\omega \cdot \cos 8\omega$$

Bài 3.5: Dòng điện $i(t) = Ie^{-\beta t} - 1(t)$ chảy qua điện trở R . Hãy áp dụng định lý Parseval để tính:

a) Toàn bộ năng lượng tiêu hao trên R .

b) Một phần năng lượng trong dải tần $(0 \div \beta)$ [rd/s].

Giải:

a)

$$i(t) = Ie^{-\beta t} - 1(t)$$

$$e^{-\beta t} \rightarrow \frac{1}{\beta + j\omega}$$

$$\text{Vậy } I(\omega) = \frac{I}{\beta + j\omega} \text{ (Phổ tín hiệu } i(t) \text{).}$$

$$|I(\omega)|^2 = I^2 \cdot \frac{1}{\beta^2 + \omega^2}$$

Tìm hàm tương quan của $i(t)$

$$\varphi(\tau) \rightarrow |I(\omega)|^2; e^{-\beta|\tau|} \rightarrow \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$$

$$\text{Vậy } \varphi(\tau) = \frac{I^2}{2\beta} \cdot e^{-\beta|\tau|}$$

$$\text{Mà } E_x = \varphi(0) = \frac{I^2}{2\beta}$$

Vậy năng lượng tiêu hao trên R :

$$E = RE_x = \frac{I^2 R}{2\beta}$$

$$b) E = RE_x \rightarrow E_{(0,\beta)} = RE_{x(0,\beta)}$$

$$E_{x(0,\beta)} = \frac{I^2}{2\pi} \int_0^\beta \frac{1}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \frac{I^2}{2\pi\beta^2} \int_0^\beta \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2} d\omega$$

$$\omega = \beta \tan t \Rightarrow d\omega = \beta \frac{1}{\cos^2 t} dt$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng

$$\begin{cases} \omega = 0 \rightarrow t = 0 \\ \omega = \beta \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$
$$E_{\alpha(0,\beta)} = \frac{I^2}{2\pi\beta^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1/\cos^2 t} \cdot \beta \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{I^2}{2\pi\beta} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{I^2}{8\beta}$$

Vậy

$$E_{(0,\beta)} = RE_{\alpha(0,\beta)} = \frac{I^2 R}{8\beta} = \frac{1}{4} E$$

Bài 3.6: Cho tín hiệu $x(t) = e^{-\alpha|t|}; \alpha > 0$.

- a) Hãy xác định phổ, hàm tự tương quan, mật độ phổ năng lượng của $x(t)$.
Tính năng lượng của tín hiệu trong dải tần $(0, \alpha)$.
- b) Tìm hàm tự tương quan và mật độ phổ công suất của tín hiệu $x_1(t) = a + x(t)$. (a là hằng số).

Giải:

a) $x(t) = e^{-\alpha|t|}; \alpha > 0$

$$e^{-\alpha|t|} \rightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Phổ $x(t)$ là:

$$X(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \Rightarrow |X(\omega)|^2 = \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

$$\text{Mật độ phổ năng lượng của } x(t) \text{ là: } \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

Hàm tự tương quan $x(t)$

$$\varphi(\tau) \rightarrow \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

$$e^{-\alpha|t|} \rightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$(e^{-\alpha|t|})' \rightarrow 2\alpha \frac{j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$-\alpha e^{-\alpha|t|} \text{Sign}t \rightarrow 2\alpha \frac{j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$-\alpha e^{-\alpha|t|}|t| \rightarrow 2\alpha j \frac{\alpha^2 - \omega^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

$$\Rightarrow |t|e^{-\alpha|t|} \rightarrow 2 \left[\frac{2\alpha^2 - (\alpha^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} \right] = \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} - \frac{2}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Vậy $\varphi(\tau) = |\tau| e^{-\alpha|\tau|} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$

Do đó năng lượng tín hiệu:

$$E_x = \varphi(0) = \frac{1}{\alpha}$$

$$E_{(-\alpha, \alpha)} = 2E_{(0, \alpha)} = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} d\omega$$

$$E_{(-\alpha, \alpha)} = \frac{4\alpha^2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{\cos^4 t} \frac{\alpha}{\cos^2 t} dt = \frac{4}{\pi\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \frac{2}{\alpha} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \right] = 0,818 \cdot \frac{1}{\alpha}$$

b) $x_1(t) = a + x(t)$

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= a2\pi\delta(\omega) + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} j|X_1(\omega)|^2 = a^2 4\pi^2 [\delta(\omega)]^2 + \frac{4a\pi\alpha\delta(\omega)}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} \\ &= a^2 4\pi^2 \delta(\omega) + \frac{4a\pi}{\alpha} \delta(\omega) + \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} = 2a\pi\delta(\omega) \left[2a\pi + \frac{2}{\alpha} \right] + \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} \end{aligned}$$

$$a \rightarrow 2\pi a\delta(\omega)$$

Vậy

$$\varphi(\tau) = a \left[2a\pi + \frac{2}{\alpha} \right] + |\tau| e^{-\alpha|\tau|} + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}$$

Bài 3.7: Hãy chứng minh rằng, nếu $X(\omega)$ là phổ của tín hiệu phức $x(t) = \text{Re}x(t) + j\text{Im}x(t)$, thì:

$$\mathcal{F}[\text{Re}x(t)] = \frac{1}{2} [X(\omega) + X^*(-\omega)]$$

$$\mathcal{F}[\text{Im}x(t)] = \frac{1}{2j} [X(\omega) - X^*(-\omega)]$$

Giải:

$$x(t) = \text{Re}x(t) + j\text{Im}x(t)$$

Theo tính chất của tín hiệu trong miền tần số

Quan hệ: $x(-t) \rightarrow X(-\omega)$

$$x^*(t) \rightarrow X^*(-\omega)$$

$$x^*(-t) \rightarrow X^*(\omega)$$

Mặt khác ta có:

$$\text{Re}x(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x^*(t)] \quad (1)$$

$$\text{Im}x(t) = \frac{1}{2j} [x(t) - x^*(t)] \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow \mathcal{F}[\text{Re}x(t)] = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2} x(t) \right] + \mathcal{F} \left[\frac{1}{2} x^*(t) \right]$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

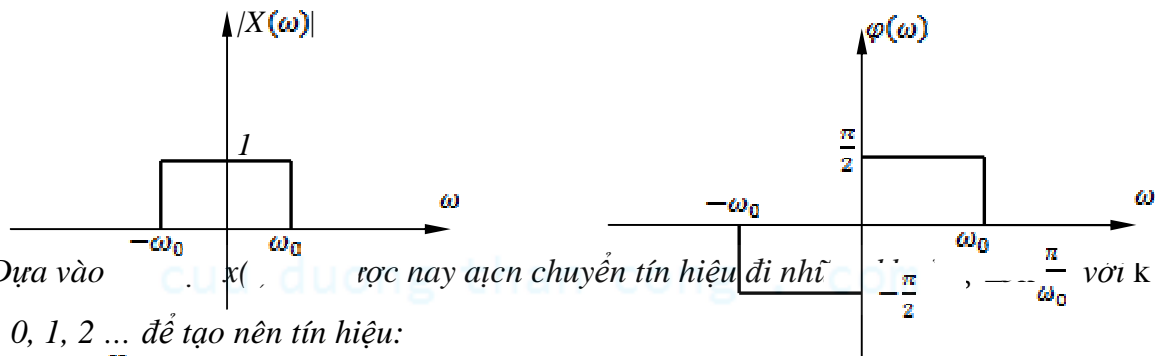
$$(2) \Leftrightarrow \mathcal{F}[Imx(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}x(t)\right] - \mathcal{F}\left[\frac{1}{2j}x^*(t)\right]$$

$$\begin{cases} x(t) \rightarrow X(\omega) \\ x^*(t) \rightarrow X^*(-\omega) \end{cases}$$

Vậy

$$\begin{cases} \mathcal{F}[Re x(t)] = \frac{1}{2}[X(\omega) + X^*(-\omega)] \\ \mathcal{F}[Im x(t)] = \frac{1}{2j}[X(\omega) - X^*(-\omega)] \end{cases}$$

Bài 3.8: Hãy tìm tín hiệu $x(t)$ nếu phổ biên độ và phổ pha của nó được cho trên hình B.3.8



Hình B.3.8

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(t - 3k \frac{\pi}{\omega_0}\right)$$

Hãy tìm biểu thức thời gian của $z(t)$.

Giải:

theo định nghĩa

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\omega_0}^0 e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} d\omega + \int_0^{\omega_0} e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\omega t} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\omega_0}^0 e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} d\omega + \int_0^{\omega_0} e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\left[\frac{e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}}{jt} \right]_{-\omega_0}^0 + \left[\frac{e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}}{jt} \right]_0^{\omega_0} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{jt} - \frac{e^{-j(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})}}{jt} + \frac{e^{j(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})}}{jt} - \frac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{jt} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi jt} \left[e^{-j\frac{\pi}{2}} - e^{-j(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} + e^{j(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})} - e^{j\frac{\pi}{2}} \right] = \frac{1}{2\pi jt} \left[-2j + 2j \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$= \frac{-1}{\pi t} \left[1 - \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{-1}{\pi t} [1 - \cos \omega_0 t] = \frac{-1}{\pi t} \cdot 2 \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}$$

$$= \frac{-2}{\pi t} \cdot 2 \sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}$$

$$b) \quad z(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x \left(t - 3k \frac{\pi}{\omega_0} \right)$$

$Z(t)$ là tín hiệu được lặp lại của $z(t)$ với chu kỳ $\frac{3\pi}{\omega_0}$

Phổ của tín hiệu

$$Z(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{x(n\omega_1)}{T} \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$$

Với

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{3\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega = \frac{2\omega_0}{3};$$

Vậy

$$Z(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{X(n \frac{2\omega_0}{3})}{\frac{3\pi}{\omega_0}} \cdot \delta \left(\omega - n \frac{2\omega_0}{3} \right) = \frac{2\pi\omega_0}{3\pi} X(\omega) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(\omega - n \frac{2\omega_0}{3} \right)$$

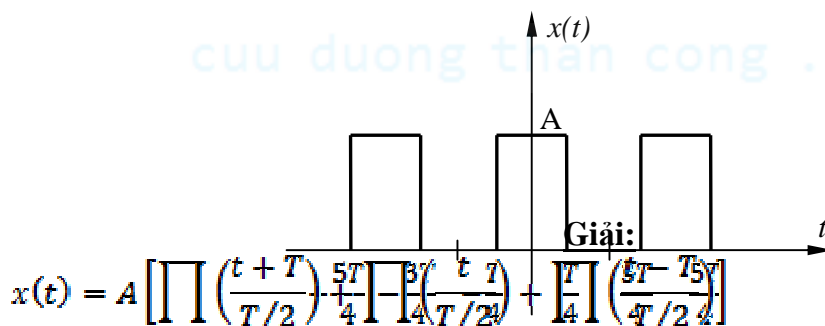
$$= \frac{2\omega_0}{3} X(\omega) \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta \left(\omega - n \frac{2\omega_0}{3} \right)$$

$$= \frac{2\omega_0}{3} \left[1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \delta \left(\omega - \frac{2\omega_0}{3} \right) + 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \delta \left(\omega + \frac{2\omega_0}{3} \right) + \delta(\omega) \right]$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{2\omega_0}{3} \left[\frac{1}{2\pi} \left(e^{-j(\frac{\pi}{2} + \frac{2\omega_0 t}{3})} + e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{2\omega_0 t}{3})} + 1 \right) \right] = \frac{\omega_0}{3\pi} \left[2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\omega_0 t}{3} \right) + 1 \right]$$

$$= \frac{\omega_0}{3\pi} \left[-2 \sin \frac{2\omega_0 t}{3} + 1 \right]$$

Bài 3.9: Hãy xác định và vẽ hàm tự tương quan của tín hiệu trên hình B.3.9. Tìm năng lượng của tín hiệu từ hàm tự tương quan của nó.



Hình B.3.9

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$X(\omega) = A \left[\frac{T}{2} \left(Sa \frac{\omega T}{4} e^{j\omega T} + Sa \frac{\omega T}{4} + Sa \frac{\omega T}{4} e^{-j\omega T} \right) \right] = \frac{AT}{2} Sa \frac{\omega T}{4} [e^{j\omega T} + 1 + e^{-j\omega T}]$$

$$= \frac{AT}{2} Sa \frac{\omega T}{4} [1 + 2 \cos \omega T]$$

Mật độ phổ tín hiệu $x(t)$ là:

$$|X(\omega)|^2 = \left(\frac{AT}{2} \right)^2 Sa^2 \frac{\omega T}{4} [1 + 4 \cos \omega T + 4 \cos^2 \omega T]$$

$$= \left(\frac{AT}{2} \right)^2 Sa^2 \frac{\omega T}{4} [1 + 4 \cos \omega T + 2 + 2 \cos 2\omega T]$$

$$= \frac{A^2 T^2}{4} Sa^2 \frac{\omega T}{4} [3 + 4 \cos \omega T + 2 \cos 2\omega T]$$

$$= \frac{3A^2 T^2}{4} Sa^2 \frac{\omega T}{4} + A^2 T^2 Sa^2 \omega T \cdot \cos \omega T + \frac{A^2 T^2}{2} Sa^2 \frac{\omega T}{4} \cdot \cos 2\omega T$$

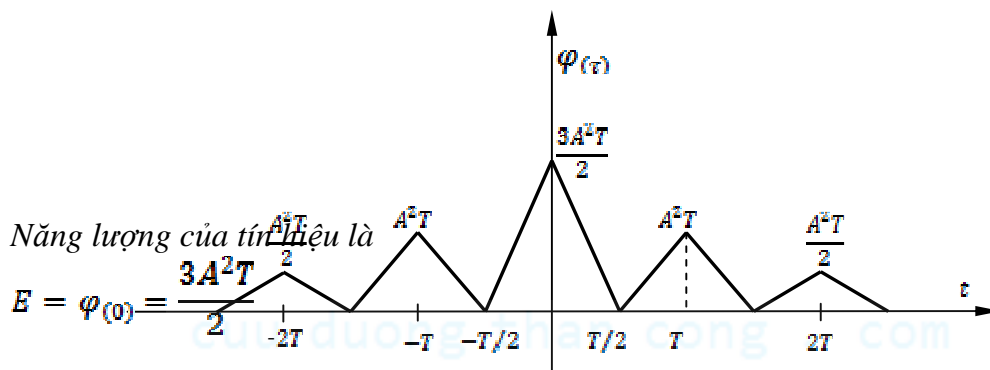
Biết $\varphi(\tau) \rightarrow |X(\omega)|^2$

$$\Rightarrow \varphi(\tau) = \frac{3A^2 T^2}{4} \frac{2}{T} \bigwedge \left(\frac{\tau}{T/2} \right) + \frac{A^2 T^2}{T} \left[\bigwedge \left(\frac{\tau + T}{T/2} \right) + \bigwedge \left(\frac{\tau - T}{T/2} \right) \right]$$

$$+ \frac{A^2 T^2}{2T} \left[\bigwedge \left(\frac{\tau + 2T}{T/2} \right) + \bigwedge \left(\frac{\tau - 2T}{T/2} \right) \right]$$

$$= \frac{3A^2 T}{2} \bigwedge \left(\frac{\tau}{T/2} \right) + A^2 T \left[\bigwedge \left(\frac{\tau + T}{T/2} \right) + \bigwedge \left(\frac{\tau - T}{T/2} \right) \right]$$

$$+ \frac{A^2 T}{2} \left[\bigwedge \left(\frac{\tau + 2T}{T/2} \right) + \bigwedge \left(\frac{\tau - 2T}{T/2} \right) \right]$$



Bài 3.10: Cho tín hiệu $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ T ; xét tín hiệu

$x_{nT}(t) = x(t) \prod \left(\frac{t}{nT} \right)$, trong đó $n = 2m + 1$; $m = 0, 1, \dots$, là phần tín hiệu được cắt ra từ tín hiệu $x(t)$, sao cho $x_{nT}(t) = 0$ với $|t| > n \frac{T}{2}$, còn tín hiệu $x_{nT}(t)$ bao gồm $n = 2m + 1$ phần giữa của tín hiệu tuần hoàn $x(t)$.

a) Hãy tìm phổ $x_{nT}(f)$ và chứng minh rằng:

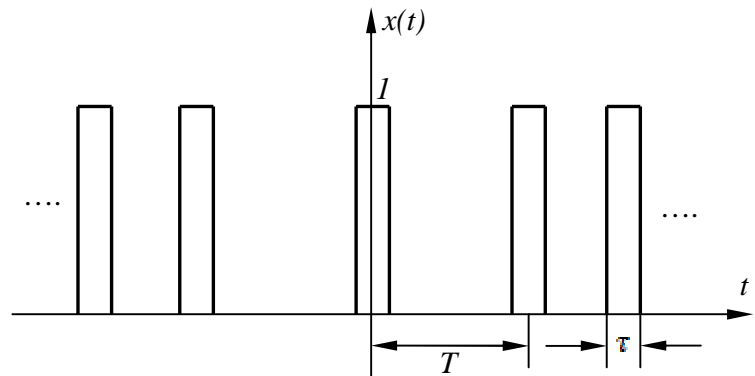
Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tam bởi Trần Văn Thương

$$X_{nT}(\omega) = \mathcal{F}[x_{nT}(t)] = X_T(\omega) \frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

Trong đó $X_{nT}(\omega)$ là phổ của tín hiệu $x_{nT}(t)$

với $n=1,2,\dots$ (là phổ của phần trung tâm của tín hiệu tuần hoàn).

b) Áp dụng kết quả này cho dãy xung vuông



góc đơn cực (H.B.3.7) với $n=3$; n

$= 5$ và suy

ra kết quả khi $n \rightarrow \infty$.

c) Hãy vẽ phổ trong hai trường hợp trên.

Giải:

$$x_{nT}(t) = x(t) \prod \left(\frac{t}{nT} \right) \quad (n = 2m + 1; m = 0, 1, \dots)$$

Tín hiệu $x_T(t)$ với $n = 1$

$$x_T(t) = x_t \prod \left(\frac{t}{T} \right)$$

$$\prod \left(\frac{t}{nT} \right) \rightarrow nTSa \frac{n\omega T}{2} = \frac{2\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\omega}$$

$$\prod \left(\frac{t}{T} \right) \rightarrow TSA \frac{\omega T}{2} = \frac{2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\omega}$$

$x(t) \rightarrow X(\omega)$

Vậy phổ $x_{nT}(t)$ là

$$X_{nT}(\omega) = \frac{X(\omega) * 2\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{2\pi}$$

Phổ $x_T(t)$ là

$$X_T(\omega) = \frac{X(\omega) * 2\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{2\pi}$$

$$\frac{X_{nT}(\omega)}{X_T(\omega)} = \frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \Rightarrow X_{nT}(\omega) = X_T(\omega) \cdot \frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

b)

$$n = 3 \Leftrightarrow X_{3T}(\omega) = X_T(\omega) \cdot \frac{\sin\left(\frac{3\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

Tín hiệu trung tâm của $x(t)$ là

$$x_T(t) = 1 \cdot \prod\left(\frac{t}{\tau}\right) \rightarrow \tau Sa \frac{\omega \tau}{2}$$

Vậy

$$X_{3T}(\omega) = \tau Sa \frac{\omega \tau}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{3\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

$$X_{5T}(\omega) = \tau Sa \frac{\omega \tau}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{5\omega T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

Baøi 3.11:

$$X_0 = a \quad X_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$$

$$a_n = X_n + X_{-n} \quad ; \quad b_n = j(X_n - X_{-n})$$

Tröông hôïp chaün: $b_n = 0$

Tröông hôïp leù: $a_n = 0$

$$x(t) = \sum X_n e^{j\omega_n t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Tín hieäu tuaøn hoạc $X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T})$

Tín hieäu khôâng tuaøn hoạc $(-L; L) \longrightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

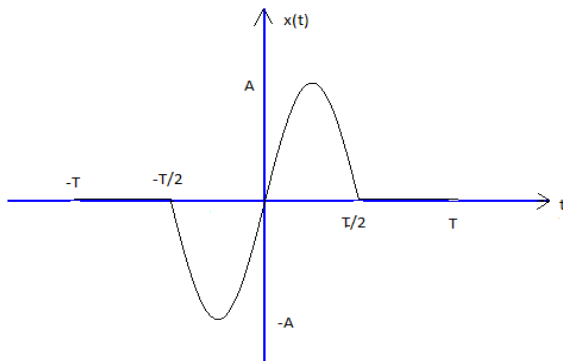
$$X(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$X_n = \frac{X_T(n\omega_0)}{T}$$

$$X(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

a)

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương



$$X(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n \cdot e^{jnw_0 t}$$

$$X(t) = A \sin \frac{2\pi}{T} t + \prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T}$$

$$\prod\left(\frac{t}{T}\right) \longleftrightarrow T \cdot \text{Sa}\left(\frac{wT}{2}\right)$$

$$A \prod\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t \longleftrightarrow \frac{AT}{2j} \left[\text{Sa}\left(w - \frac{2\pi}{T}\right) \frac{T}{2} - \text{Sa}\left(w + \frac{2\pi}{T}\right) \frac{T}{2} \right]$$

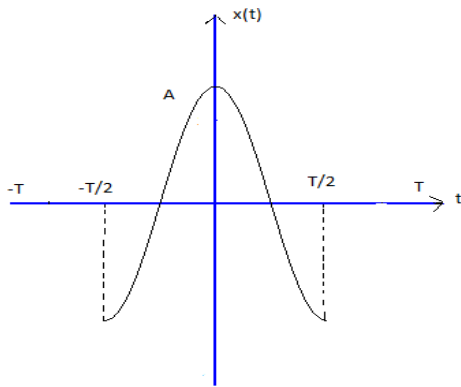
$$X_n = \frac{X_T(w)}{2T} = \frac{A}{4j} \left[\text{Sa}\left(\frac{n\pi}{T} - \frac{2\pi}{T}\right) \cdot \frac{T}{2} - \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{T} + \frac{2\pi}{T}\right) \cdot \frac{T}{2} \right]$$

$$X_n = \frac{A}{4j} \left[\text{Sa}\left(n - 2\right) \cdot \frac{\pi}{2} \right] - \text{Sa}\left(n + 2\right) \cdot \frac{\pi}{2} \right]$$

$$X_n = \begin{cases} 0 : n = 2k; n \neq \pm 2 \\ \frac{(-1)^k \cdot 2A}{j\pi(4 - n^2)} : n = 2k + 1 \\ \frac{-Aj}{4} : n = 2 \\ \frac{Aj}{4} : n = -2 \end{cases}$$

b)

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tam bởi Trần Văn Thương



$$x(t) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{T}$$

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right) \leftrightarrow T \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

$$A \Pi\left(\frac{t}{T}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \leftrightarrow \frac{AT}{2} \left[\text{Sa}\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right) \frac{T}{2} + \text{Sa}\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right) \frac{T}{2} \right] = X_T(\omega)$$

$$X_n = \frac{X_T(\omega)}{2T}$$

$$X_n = \frac{A}{4} \left[\text{Sa}\left(\omega - \frac{2\pi}{T}\right) \frac{T}{2} + \text{Sa}\left(\omega + \frac{2\pi}{T}\right) \frac{T}{2} \right]$$

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} X_n \cdot e^{j\omega_n t}$$

$$X_n = \frac{A}{4} \left[\text{Sa}\left(n - 2\right) \frac{\pi}{2} + \text{Sa}\left(n + 2\right) \frac{\pi}{2} \right]$$

$$X_n = \begin{cases} \frac{A}{4} : n = \pm 2 \\ 0 : n = 2k \\ \frac{(-1)^k \cdot A \cdot n}{\pi(4 - n^2)} : n = 2k + 1 \end{cases}$$

Bai 3.12:

a)

Chu kì $T' = 2T$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T'} = \frac{\pi}{T}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{-A}{T}t + A, & 0 < t < T \end{cases}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{A}{T}t + A, \quad -T < t < 0 \\
 X_n &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^0 \left(\frac{A}{T}t + A \right) e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_0^T \left(-\frac{A}{T}t + A \right) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \\
 &= \frac{A}{2T} \left[\frac{1}{T} \int_{-T}^0 (t + T) e^{-jn\omega_0 t} dt + \int_0^T (-t + T) e^{-jn\omega_0 t} dt \right] \\
 &= \frac{A}{2T} \left[-\frac{\cos n\pi}{jn\omega_0} + \frac{1}{Tn^2\omega_0^2} - \frac{\cos n\pi}{Tn^2\omega_0^2} + \frac{1}{-jn\omega_0} - \frac{\cos n\pi}{-jn\omega_0} + \frac{\cos n\pi}{jn\omega_0} + \frac{\cos n\pi}{Tn^2\omega_0^2} + \frac{1}{Tn^2\omega_0^2} \right] \\
 &= \frac{A}{2T} \frac{2(1 - \cos n\pi)}{Tn^2\omega_0^2} = \frac{A(1 - \cos n\pi)}{Tn^2\omega_0^2}
 \end{aligned}$$

- Voi $n=2k$; $k=\pm 1, \pm 2, \dots$
- Suy ra $X_n = 0$
- Voi $n=2k+1$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Suy ra $X_n = \frac{2A}{n^2 - \pi^2}$

- Voi $n=0$

$$\text{Suy ra } X_n = \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^0 \left(\frac{A}{T} t + A \right) dt + \int_0^T \left(-\frac{A}{T} t + A \right) dt \right] = \frac{A}{2}$$

$$\text{Vậy } X_n = \begin{cases} 0 & , n=2k, k=\pm 1, \pm 2, \dots \\ \frac{2A}{n^2 - \pi^2} & , n=2k+1, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\frac{A}{2}, n=0$$

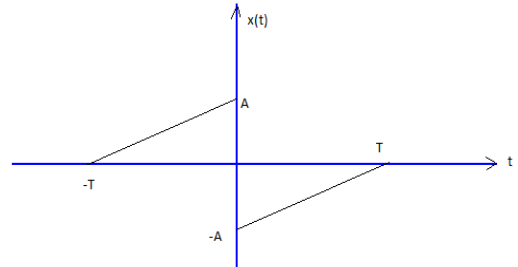
Bài 3.12: b)

Chu kì: $T' = 2T$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T'} =$$

$$\frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}t + A & (-T < t < 0) \\ \frac{A}{T}t - A & (0 < t < T) \end{cases}$$



$$\begin{aligned} X(n) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt \\ &= \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^0 \left(\frac{A}{T}t + A \right) e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt + \int_0^T \left(\frac{A}{T}t - A \right) e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt \right] \\ &= \frac{A}{2T} \left[\frac{1}{T} \int_{-T}^0 t \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt + \int_{-T}^0 e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt + \frac{1}{T} \int_0^T t \cdot e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt - \int_0^T e^{-jn\omega_0 t} \cdot dt \right] \\ &= \frac{A}{2T} \cdot j \cdot \frac{2}{n\omega_0} = j \cdot \frac{A}{n\pi} \end{aligned}$$

*Với: $n \neq 0$

$$X(n) = j \cdot \frac{A}{n\pi}$$

*Với: $n=0$

$$\begin{aligned} X(n) &= \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^0 \left(\frac{A}{T}t + A \right) \cdot dt + \int_0^T \left(\frac{A}{T}t - A \right) \cdot dt \right] \\ &= \frac{A}{2T} \left\{ \left(\frac{t^2}{2T} + t \right) \Big|_{-T}^0 + \left(\frac{t^2}{2T} - t \right) \Big|_0^T \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$**\text{Vậy: } X(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ j \cdot \frac{A}{n\pi}, & n \neq 0 \end{cases}$$

Bài 3.13:

a) Chu kì $T' = 2T$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T}$$

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ -A, & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{-jn\omega_0 t}$$

$$X_n = \frac{1}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{2T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^0 A e^{-jn\omega_0 t} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} A e^{jn\omega_0 t} dt \right]$$

$$= \frac{A}{2T} \left[\frac{\cos n\pi}{2} + j \sin \frac{n\pi}{2} - \left(\frac{\cos n\pi}{2} - j \sin \frac{n\pi}{2} \right) + j \frac{1}{n\omega_0} \right]$$

- Với $n=4k$; $k=\pm 1, \pm 2, \dots$

$$\text{Suy ra } X_n = \frac{A}{2T} \left[j \frac{1}{n\omega_0} - j \frac{1}{n\omega_0} - j \frac{1}{n\omega_0} + j \frac{1}{n\omega_0} \right] = 0$$

- Với $n=4k+2$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } X_n &= \frac{A}{2T} \left[j \frac{1}{n\omega_0} + j \frac{1}{n\omega_0} + j \frac{1}{n\omega_0} + j \frac{1}{n\omega_0} \right] \\ &= \frac{A}{2T} j \frac{4}{n\omega_0} = j \frac{2A}{n\pi} \end{aligned}$$

- Với $n=2k+1$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\text{Suy ra } X_n = \frac{A}{2T} \left[j \frac{1}{n\omega_0} + j \frac{1}{n\omega_0} \right] = \frac{A}{2T} j \frac{2}{n\omega_0} = j \frac{A}{n\pi}$$

$$\text{Vậy } X_n = \begin{cases} 0 & , n=4k, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ j \frac{2A}{n\pi} & , n=4k+2, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ j \frac{A}{n\pi} & , n=2k+1, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

$$j \frac{A}{n\pi}, \quad n=2k+1, k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

$$b) \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{-jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = A \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) + A \delta\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

$$X_T(\omega) = A e^{-j\omega \frac{T}{2}} + A e^{j\omega \frac{T}{2}}$$

$$X_T(\omega) = 2A \cos(\omega T/2)$$

$$X_n = X_T(n\omega_0)/(2T) = \frac{\frac{A}{T} \cos n\pi}{2}$$

$$X_n = \begin{cases} 0 & n=2k+1 \\ \frac{A}{T} (-1)^k & n=2k \end{cases}$$

Bài 3.14 Khai triển chuỗi Fourier

$$X(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

$$X(t) = A \Pi\left(\frac{t - T/4}{T/2 - 2\tau}\right) - A \Pi\left(\frac{t + T/4}{T/2 - 2\tau}\right)$$

$$\text{Chọn } b = T/2 - 2\tau$$

$$X_T(\omega) = Ab \text{Sa} \frac{\omega b}{2} [e^{-j\omega T/4} - e^{j\omega T/4}]$$

$$= Ab \text{Sa} \frac{\omega b}{2} (-2j) \sin \frac{\omega T}{4}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$X_n = \frac{X_T(n\omega_0)}{T} = \frac{-2jAb}{T} \text{Sa} \frac{n\pi b}{T} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$X_n = 0 \quad n=0$$

$$X_n = -2j \frac{Ab}{T} (-1)^k \text{Sa} \left(\frac{n\pi b}{T}\right) \quad n=2k+1$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$b_n = 2jX_n$$

keát quau theo ñình nghóa $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega t dt$

$$b_n = \frac{2A}{n\pi} [\cos n\omega_0 T (1 - (-1)^n)]$$

$$b_n = 0 \quad n=2k$$

$$b_n = \frac{4A}{n\pi} \cos \omega_0 T \quad n=2k+1$$

cuu duong than cong . com

Chương 4 : Truyền tín hiệu qua mạch tuyến tính

Bài 4.2:

$$u_1(t) = t \cdot e^{-\alpha|t|}, \alpha = \frac{R}{L}$$

tìm $U_1(\omega)$.

Ta có

$$e^{-\alpha|t|} \leftrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\Rightarrow t.e^{-\alpha|t|} = -j \cdot \frac{2\alpha \cdot 2\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)}$$

$$\Rightarrow U_1(\omega) = -j \cdot \frac{4\alpha\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$$

Tìm $K(\omega)$

$$\begin{aligned} U_2 &= \left(-\frac{-2R}{R+j\omega L} + 1\right) \cdot U_1 \\ &= -\frac{R-j\omega L}{R+j\omega L} \cdot U_1 \end{aligned}$$

$$K(\omega) = \frac{U_2(\omega)}{U_1(\omega)} = -\frac{R-j\omega L}{R+j\omega L}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\left(\frac{R}{L}\right) - j\omega}{\left(\frac{R}{L}\right) + j\omega} = \frac{-\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}{\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)^2} = \frac{\alpha^2 + \omega^2}{(\alpha + j\omega)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_2 = K(\omega) \cdot U_1(\omega) = j \frac{4\alpha\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(\alpha + j\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Tìm } U_2(t)$$

$$\Rightarrow \text{Ta có } U_2(\omega) \Leftrightarrow u_2(t)$$

\Rightarrow

$$\Rightarrow U_2(\omega) = j \frac{4\alpha\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(\alpha + j\omega)^2}$$

$$= j \frac{4\alpha\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(\alpha^2 - \omega^2 + j2\alpha\omega)}$$

Ta có

$$\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{(\alpha - j\omega)^2} = \frac{2\alpha^2 + j2\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(\alpha + j\omega)^2}$$

$$= \frac{2\alpha(\alpha + j\omega)}{(\alpha^2 + \omega^2)(\alpha + j\omega)^2}$$

Mặt khác ta lại có

$$j \frac{4\alpha\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)(\alpha + j\omega)^2} = \frac{2\alpha(\alpha + j\omega) - 2\alpha(\alpha - j\omega)}{(\alpha^2 + \omega^2)(\alpha + j\omega)^2}$$

$$= \frac{2\alpha(\alpha + j\omega)}{(\alpha^2 + \omega^2)(\alpha + j\omega)^2} - \frac{2\alpha}{(\alpha + j\omega)^3}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thượng

$$= \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{(\alpha - j\omega)^2} - \frac{2\alpha}{(\alpha + j\omega)^3}$$

$$\Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} + t e^{-\alpha t} \cdot 1(t) - \alpha t^2 \cdot e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$$

$$= \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} + (t + \alpha t^2) e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$$

Bài 4.3:

$$e(t) = \omega_0 \text{Sa} \omega_0 t \cos \pi t$$

$$u(t) = u_1(t) * k(t)$$

$$k(t) = \mathcal{F}^{-1}[K(\omega)]$$

$$k(\omega) = \pi \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right)$$

Tìm $k(t)$, $k(t) \leftrightarrow k(\omega)$

Ta có

$$\text{Sa } \omega_0 t \leftrightarrow \Pi \left(\frac{\omega}{2\omega_0} \right)$$

$$k(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \text{Sa} \omega_0 t$$

a, Ta lại có:

$$u(t) = u_1(t) * k(t)$$

$$\Rightarrow u(\omega) = I_1(\omega) \frac{U(\omega)}{K(\omega)}$$

Mà $i_1(t)$

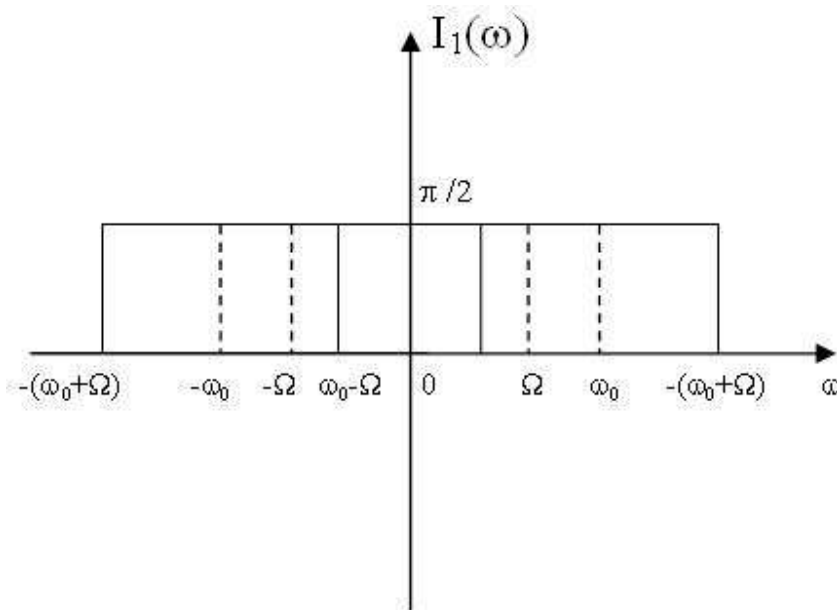
$$i_1 = \frac{e(t)}{R_1} = e(t) \cos \text{Sa} \omega_0 t \cos \pi t$$

$$\Rightarrow I_1(\omega) = \frac{\pi}{2} \left[\pi \left(\frac{\omega - \pi}{2\omega_0} \right) + \pi \left(\frac{\omega + \pi}{2\omega_0} \right) \right]$$

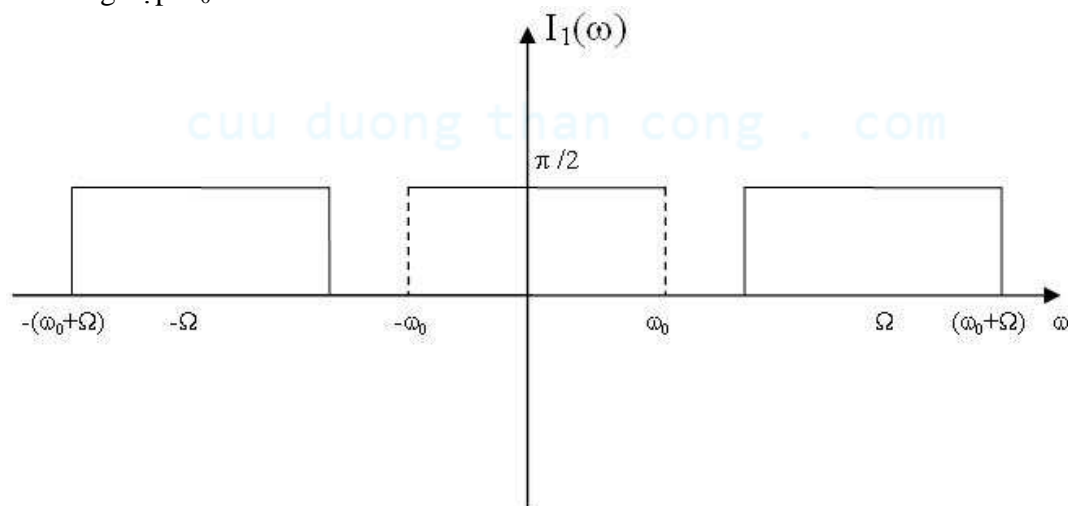
Vẽ $I_1(\omega)$

Trường hợp $0 < \Omega < \omega_0$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thượng



Trường hợp $\omega_0 < \Omega$



b, Tìm $i_2(t)$?

$$u(t) = i_1(t) * k(t)$$

$$i_2(t) = \frac{u(t)}{R_2} = u(t)$$

$$k(t) = F^{-1}[K(\omega)]$$

$$K(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Theo câu a ta được : $I_1(\omega) = \frac{\pi}{2} \left[\pi \left(\frac{\omega - \pi}{2\omega_0} \right) + \pi \left(\frac{\omega + \pi}{2\omega_0} \right) \right]$

Phổ của $i_2(t)$ là :

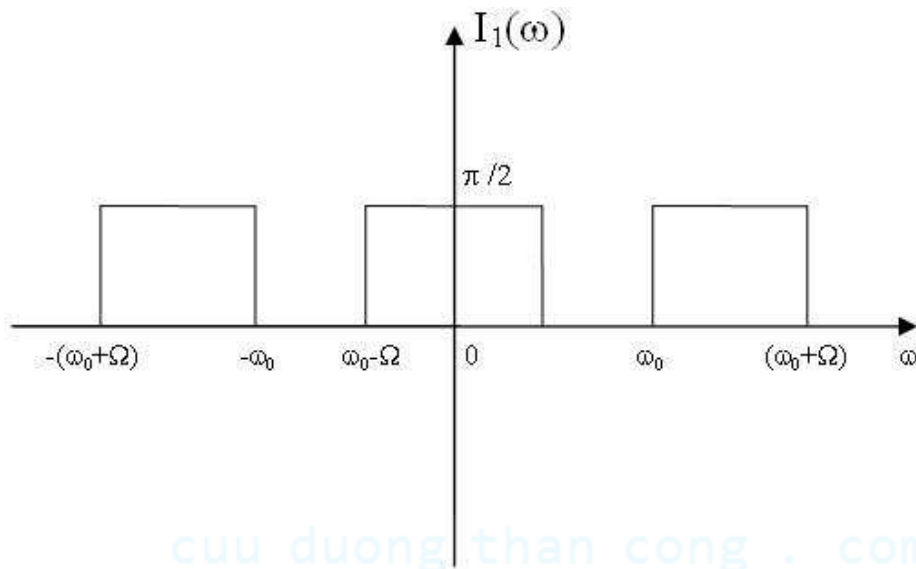
$$I_2(\omega) = U(\omega) = K(\omega) \cdot I_1(\omega)$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

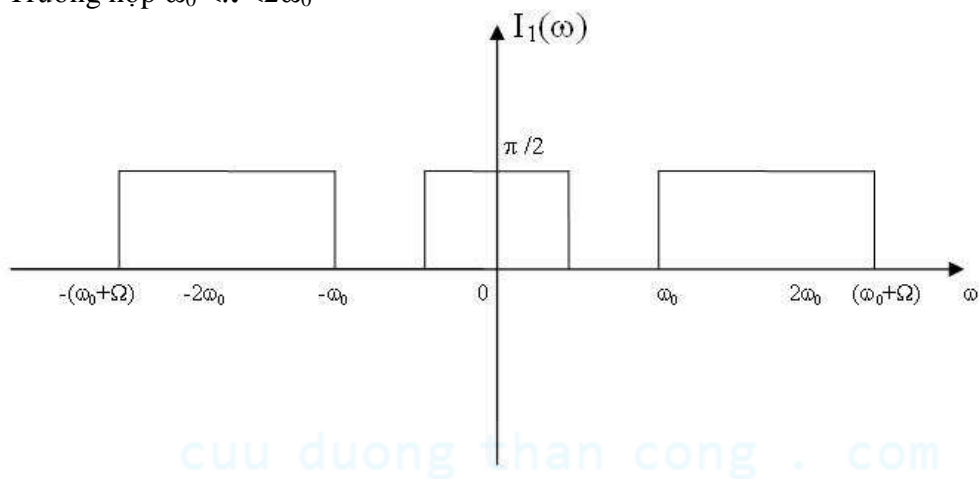
$$= \frac{\pi}{2} \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) \left[\Pi\left(\frac{\omega-\pi}{2\omega_0}\right) + \Pi\left(\frac{\omega+\pi}{2\omega_0}\right) \right]$$

Vẽ $I_2(\omega)$

Trường hợp $0 < \pi < \omega$



Trường hợp $\omega_0 < \pi < 2\omega_0$



d, Tìm $i_2(t)$?

$$\Omega = \frac{3}{2}\omega$$

Dựa vào hình vẽ (câu b, trường hợp $\omega \leq \Omega \leq \omega_0$) suy ra phổ của $i_2(t)$ là:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

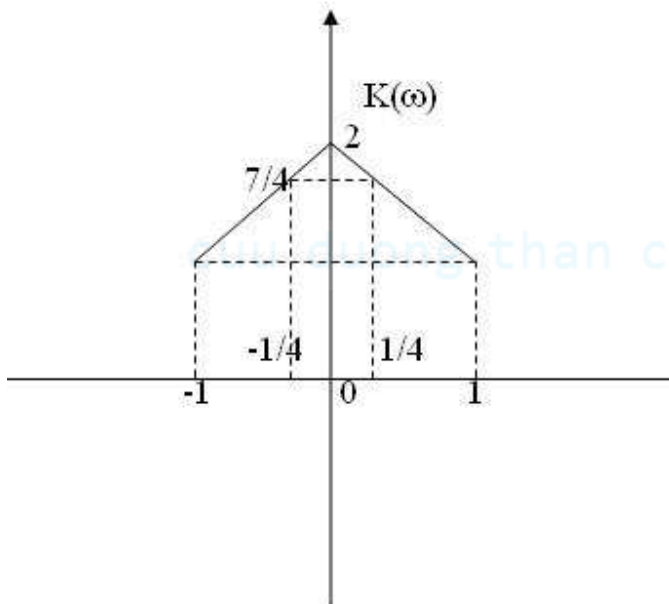
$$I_2(\omega) = \frac{\pi}{2} \left(\Pi \left(\frac{\omega - \frac{3}{4}\omega_0}{\frac{1}{2}\omega_0} \right) + \Pi \left(\frac{\omega + \frac{3}{4}\omega_0}{\frac{1}{2}\omega_0} \right) \right)$$

Mà $\pi \Pi \left(\frac{\omega}{\frac{1}{2}\omega_0} \right) \leftrightarrow \frac{1}{4}\omega_0 \text{Sa} \frac{1}{2}\omega_0 t$

$$\Rightarrow i_2(t) = \frac{1}{4}\omega_0 \text{Sa} \frac{1}{4}\omega_0 t \cdot \cos \frac{3}{4}\omega_0 t$$

Bài 4.4:

Tín hiệu $x(t) = \frac{1}{4} \text{Sa} \left(\frac{t-2}{4} \right)$ có phổ $X(\omega)$



Ta có: $\frac{1}{4} \text{Sa} \frac{t}{4} \Leftrightarrow \pi \cdot \Pi(2\omega)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \text{Sa} \left(\frac{t-2}{4} \right) \Leftrightarrow \pi \cdot \Pi(2\omega) \cdot e^{-j2\omega}$$

$$Y(\omega) = K(\omega) \cdot X(\omega) \\ = \frac{7}{4} \cdot \pi \cdot \Pi(2\omega) \cdot e^{-j2\omega} + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \Lambda(4\omega) \cdot e^{-j2\omega}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{7}{16} \text{Sa} \left(\frac{t-2}{4} \right) + \frac{1}{32} \text{Sa}^2 \left(\frac{t-2}{4} \right)$$

Năng lượng E_y :

$$\phi_y(\omega) = |Y(\omega)|^2 \\ = \left[\frac{7}{4} \cdot \pi \cdot \Pi(2\omega) + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \Lambda(4\omega) \right]^2$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tam bởi Trần Văn Thương

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{16} \cdot \pi^2 \cdot [7 \cdot \Pi(2\omega) + \Lambda(4\omega)]^2 \\
 &= \frac{1}{16} \cdot \pi^2 \{ 49 \cdot \Pi(2\omega) + [\Lambda(4\omega)]^2 + 14\Lambda(4\omega) \} \\
 &= \frac{1}{16} \cdot \pi^2 [49 \cdot \Pi(2\omega) + 14\Lambda(4\omega) + (16\omega^2 - 8|\omega| + 1)\Pi(2\omega)] \\
 \Rightarrow E_y &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{16} \cdot \pi^2 [49 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{1}{4} + 2 \int_0^{1/4} (16\omega^2 - 8\omega + 1) d\omega] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{16} \cdot \pi^2 [49 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}] \\
 &= \frac{\pi}{32} \cdot [\frac{147}{6} + \frac{21}{6} + \frac{1}{6}] \\
 &= \frac{169}{192} \pi
 \end{aligned}$$

Bài 4.5:

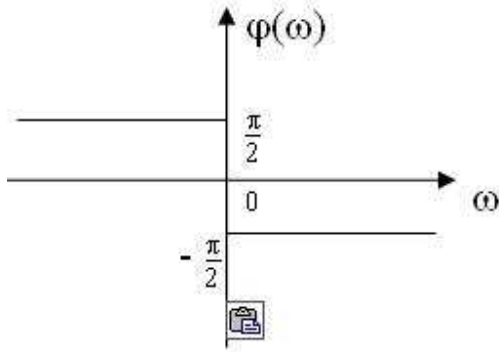
$$\begin{aligned}
 \varphi_x(\tau) &= e^{-|\tau|} \\
 K(\omega) &= \Pi\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
 \text{Ta có } E_x &= \varphi_x(0) = 1 \\
 \varphi_x(\tau) &\Leftrightarrow \Phi_x(\omega) \\
 \Rightarrow \Phi_x(\omega) &= \frac{2}{1+\omega^2} \\
 \Phi_y(\omega) &= |K(\omega)|^2 \cdot \Phi_x(\omega) \\
 &= \Pi\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{1+\omega^2}\right) \\
 E_y &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_y(\omega) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{1+\omega^2}\right) d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} 4 \int_0^1 \frac{d\omega}{1+\omega^2}
 \end{aligned}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thượng

$$E_y = \frac{2}{\pi} [\arctg \omega] \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

Bài 4.6:

$$K(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$



a,

$$x(t) = 2$$

$$\Rightarrow X(\omega) = 4\pi\delta(\omega)$$

$$Y(\omega) = K(\omega) \cdot X(\omega) = K(\omega) \cdot 4\pi\delta(\omega) = K(0) \cdot 4\pi\delta(\omega) = 0$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)]^2 \cdot dt = 4$$

$$P_y = 0$$

b,

$$x(t) = 2 \cdot 1(t)$$

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega}$$

$$Y(\omega) = K(\omega) \cdot X(\omega)$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} e^{j(\pi/2)} \frac{2}{j\omega} & , \omega > 2 \\ e^{-j(\pi/2)} \frac{2}{j\omega} & , \omega < -2 \\ \frac{\omega}{2} e^{j(\pi/2)} \frac{2}{j\omega} & , 0 < \omega < 2 \\ \frac{\omega}{2} e^{-j(\pi/2)} \frac{2}{j\omega} & , -2 < \omega < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & , |\omega| < 2 \end{cases}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thượng

$$Y(\omega) = \frac{2}{|\omega|}, \quad |\omega| > 2$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)]^2 dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T 4 dt = 2$$

$$\phi_y(\omega) = |Y(\omega)|^2 = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2 \\ \frac{4}{\omega^2}, & |\omega| > 2 \end{cases}$$

$$P_y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \phi_y(\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^2 d\omega + \int_2^{\infty} \frac{4}{\omega^2} d\omega \right] = \frac{4}{\pi}$$

c,

$$x(t) = 2\cos t$$

$$X(\omega) = 2\pi [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

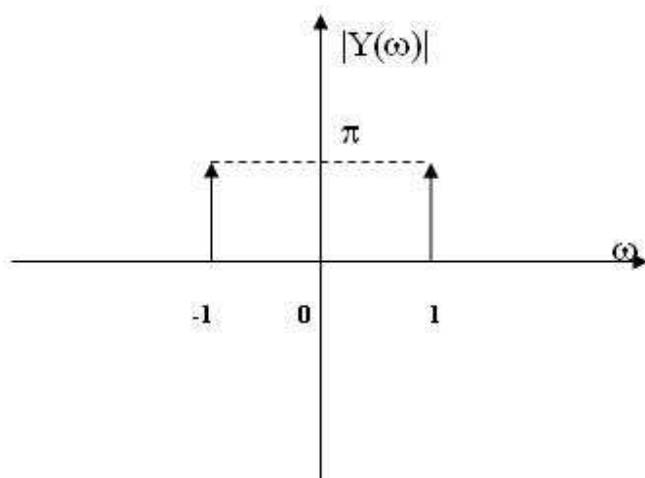
$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot K(\omega)$$

$$= 2\pi \frac{1}{2} [e^{j(\pi/2)} \delta(\omega - 1) + e^{-j(\pi/2)} \delta(\omega + 1)]$$

$$= \pi [e^{j(\pi/2)} \delta(\omega - 1) + e^{-j(\pi/2)} \delta(\omega + 1)]$$

cuu duong than cong . com

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương



$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)]^2 \cdot dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 4\cos^2 t \cdot dt = 2$$

$$\phi_y(\omega) = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{4} \delta(\omega - 1) + \frac{1}{4} \delta(\omega + 1) \right]$$

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \phi_y(\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

d,

$$x(t) = 2\sin t$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{2} 2\pi j \cdot [\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)]$$

$$Y(\omega) = \frac{-1}{2} 2\pi j \cdot [e^{j(\pi/2)} \delta(\omega - 1) - e^{-j(\pi/2)} \delta(\omega + 1)]$$

$$= \pi \cdot [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)]$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 4\sin^2 t \cdot dt = 2$$

$$\phi_y(\omega) = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{4} \delta(\omega - 1) + \frac{1}{4} \delta(\omega + 1) \right]$$

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \phi_y(\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] \cdot 2\pi = \frac{1}{2}$$

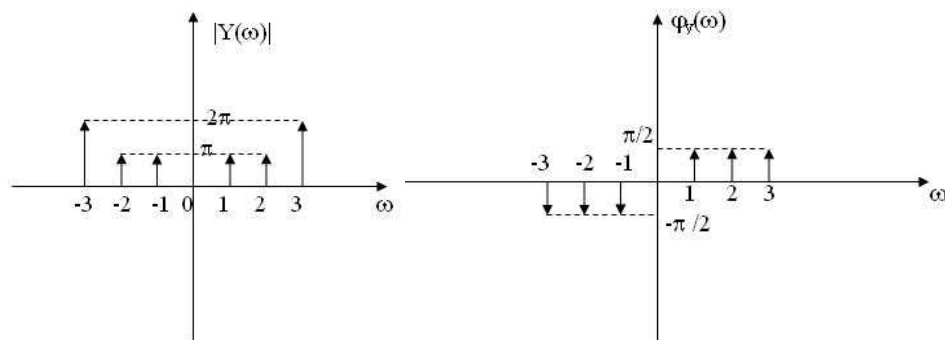
Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng

e,

$$\begin{aligned}x(t) &= 2\cos^2 t + 4\cos t \cos 2t \\&= 1 + 2\cos t + \cos 2t + 2\cos 3t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X(\omega) &= 2\pi \delta(\omega) + 2\pi [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)] + \pi [\delta(\omega - 2) + \delta(\omega + 2)] \\&\quad + 2\pi [\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y(\omega) &= K(\omega).X(\omega) \\&= \pi e^{j(\pi/2)} [\delta(\omega - 1) + \delta(\omega - 2) + \delta(\omega - 3)] \\&\quad + \pi e^{-j(\pi/2)} [\delta(\omega + 1) + \delta(\omega + 2) + \delta(\omega + 3)]\end{aligned}$$



$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (1 + 2\cos t + \cos 2t + 2\cos 3t)^2 dt$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T [(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) + 4(\cos^2 t + 2\cos t \cos 3t + \cos^2 3t) \\&\quad + 4(\cos t + \cos 3t + \cos t \cos 2t + \cos 2t \cos 3t)]. dt\end{aligned}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T (4 + 1 + \frac{1}{2}) dt = 5,5$$

$$\begin{aligned}\phi_y(\omega) &= 2\pi [\frac{1}{4} \delta(\omega - 1) + \frac{1}{4} \delta(\omega - 2) + \delta(\omega - 3)] \\&\quad + 2\pi [\frac{1}{4} \delta(\omega + 1) + \frac{1}{4} \delta(\omega + 2) + \delta(\omega + 3)]\end{aligned}$$

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(\omega).d\omega = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 3$$

Bài 4.7:

$$x(t) = A \cdot \frac{t}{T} \cdot \Pi(\frac{t}{2T})$$

a, Ta có $\Pi(\frac{t}{2T}) \Leftrightarrow 2TSa\omega T$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

$$\frac{A}{T} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \Leftrightarrow 2ASa\omega T$$

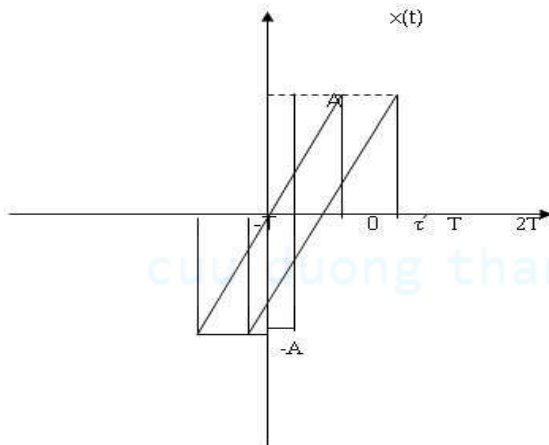
$$t \cdot \frac{A}{T} \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) \Leftrightarrow j \cdot 2A \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)$$

$$\Rightarrow X(\omega) = j \cdot 2A \cdot (\omega T^2 \cos \omega T - T \sin \omega T) \cdot \frac{1}{(\omega T)^2}$$

$$= j \cdot \frac{2A}{\omega} (\cos \omega T - Sa\omega T)$$

$$E_x = \int_{-T}^T \left(A \cdot \frac{t}{T} \right)^2 \cdot dt = \frac{2A^2}{T^2} \int_0^T t^2 dt = \frac{2A^2}{T} \cdot \frac{T^3}{3} \bigg|_0^T = \frac{2}{3} AT^2$$

Xét $0 \leq \tau < T$



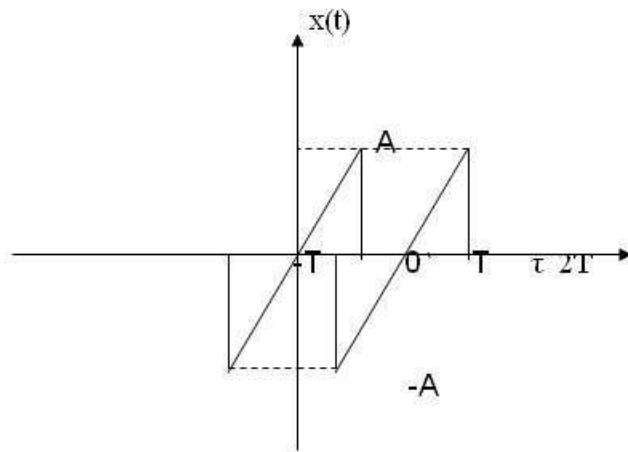
$$\phi_x(\tau) = \int_{\tau-T}^T \frac{A}{T} t \cdot \frac{A}{t} (t - \tau) dt$$

$$= \frac{A^2}{T^2} \int_{\tau-T}^T (t^2 - t\tau) dt$$

$$= \frac{A^2}{T^2} \left[\frac{T^3}{6} - T^2\tau + \frac{2}{3}T^3 \right]$$

Xét $T < \tau < 2T$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương



$$\begin{aligned}\varphi_x(\tau) &= \int_{\tau-T}^T \frac{A}{T} t \cdot \frac{A}{t} (t - \tau) dt \\ &= \frac{A^2}{T^2} \left[\frac{T^3}{6} - T^2\tau + \frac{2}{3}T^3 \right]\end{aligned}$$

Xét $2T < \tau$: $\varphi_x(\tau) = 0$

Vậy $\varphi_x(\tau) = \frac{A^2}{T^2} \left(\frac{1}{6}|T|^3 - T^2|\tau| + \frac{2}{3}T^3 \right) \Pi\left(\frac{\tau}{4T}\right)$

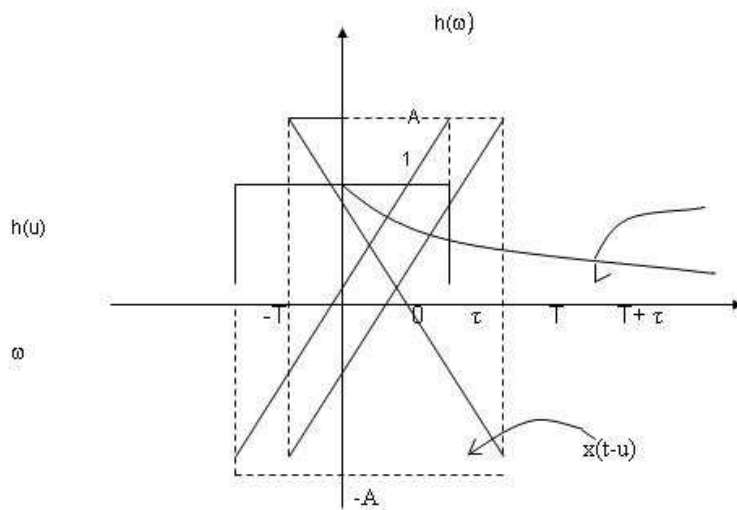
b, $y(t) = h(t) * x(t)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot x(t-u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u} \cdot 1(t) (t-u) \Pi\left(\frac{t-u}{2T}\right) du$$

cuu duong than cong . com

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương



Xét $-T < t < T$

$$y(t) = \int_0^{T+t} e^{-\alpha u} \frac{A}{T} (t - u) du$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{T} t \int_0^{T+t} e^{-\alpha u} du - \frac{A}{T} \int_0^{T+t} u \cdot e^{-\alpha u} du \\ &= \frac{A}{T} t \cdot \frac{e^{-\alpha u}}{-\alpha} \Big|_0^{T+t} + \frac{A}{T} u \cdot \frac{e^{-\alpha u}}{-\alpha} \Big|_0^{T+t} + \frac{A}{T} \frac{e^{-\alpha u}}{\alpha^2} \Big|_0^{T+t} \\ &= A \left(t - T + \frac{2T}{e} e^{\frac{-t}{T}} \right) \end{aligned}$$

Xét $t > T$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t-T}^{t+T} e^{-\alpha u} \frac{A}{T} (t - u) du \\ &= \frac{2A}{e} t \cdot e^{\frac{-t}{T}} \end{aligned}$$

Xét $t < -T$

$$y(t) = 0$$

Vậy

$$y(t) = \begin{cases} A \left(t - T + \frac{2T}{e} e^{\frac{-t}{T}} \right) & , |t| < T \\ \frac{2A}{e} t \cdot e^{\frac{-t}{T}} & , t > T \end{cases}$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$0, t < -T$$

Ta có $h(t) = e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$, $\alpha = \frac{1}{T}$

$$H(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{T}{1 + j\omega T}$$

$$|H(\omega)| = \frac{T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H(\omega) \cdot X(\omega) \\ &= \frac{T}{1 + j\omega T} \cdot j \frac{2A}{\omega} (\cos \omega T - \text{Sa} \omega T) \\ \phi_y(\omega) &= |Y(\omega)|^2 \\ &= \frac{4A^2 T^2}{1 + (\omega T)^2} (\cos \omega T - \text{Sa} \omega T^2) \cdot \frac{1}{\omega^2} \end{aligned}$$

Bài 4.8:

a,

$$x(t) = A \prod \left(\frac{t}{T} \right)$$

$$x(t) \rightarrow X_T(\omega)$$

$$\Rightarrow X_T(\omega) = \frac{AT}{2} \text{Sa} \left(\frac{\omega T}{4} \right)$$

$$X_n = \frac{X_T(\omega)}{T} = \frac{A}{2} \text{Sa} \left(\frac{\omega T}{4} \right) = \frac{A}{2} \text{Sa} \left(n \frac{\pi}{2} \right)$$

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{A}{2} \text{Sa} \left(n \frac{\pi}{2} \right) \delta \left(\omega - n \frac{2\pi}{T} \right)$$

$$= \pi A \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \text{Sa} \left(n \frac{\pi}{2} \right) \delta \left(\omega - n \frac{2\pi}{T} \right)$$

b,

$$Y(\omega) = K(\omega) \cdot X(\omega)$$

$$\text{Với } n=0 \Rightarrow X(\omega)=0 \Rightarrow Y(\omega)=0$$

$$\text{Với } n=\pm 2; \pm 4 \Rightarrow X(\omega)=0 \Rightarrow Y(\omega)=0$$

$$\text{Với } n=\pm 1; \pm 3$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

$$X(\omega) = \pi A \left[\frac{1}{\pi} \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{T} \right) + \frac{1}{\pi} \delta \left(\omega + \frac{2\pi}{T} \right) - \frac{1}{3\pi} \delta \left(\omega - \frac{6\pi}{T} \right) - \frac{1}{3\pi} \delta \left(\omega + \frac{6\pi}{T} \right) \right]$$

$$Y(\omega) = \pi A \left[\frac{1}{\pi} \frac{2}{\pi} \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{T} \right) + \frac{12}{\pi\pi} \delta \left(\omega + \frac{2\pi}{T} \right) - \frac{1}{3\pi} \frac{3\pi}{2} \delta \left(\omega - \frac{6\pi}{T} \right) - \frac{1}{3\pi} \frac{3\pi}{2} \delta \left(\omega + \frac{6\pi}{T} \right) \right]$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = \pi A \left[\delta \left(\omega - \frac{2\pi}{T} \right) + \delta \left(\omega + \frac{2\pi}{T} \right) - \delta \left(\omega - \frac{6\pi}{T} \right) - \delta \left(\omega + \frac{6\pi}{T} \right) \right]$$

c,

$$\text{Ta có: } Y(\omega) = 2\pi \left[\frac{A}{2} \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{T} \right) + \frac{A}{2} \delta \left(\omega + \frac{2\pi}{T} \right) - \frac{A}{2} \delta \left(\omega - \frac{6\pi}{T} \right) - \frac{A}{2} \delta \left(\omega + \frac{6\pi}{T} \right) \right]$$

$$\Psi_y(\omega) = 2\pi \left[\frac{A^2}{4} \delta \left(\omega - \frac{2\pi}{T} \right) + \frac{A^2}{4} \delta \left(\omega + \frac{2\pi}{T} \right) - \frac{A^2}{4} \delta \left(\omega - \frac{6\pi}{T} \right) - \frac{A^2}{4} \delta \left(\omega + \frac{6\pi}{T} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi A^2}{2} \left[\delta \left(\omega - \frac{2\pi}{T} \right) + \delta \left(\omega + \frac{2\pi}{T} \right) - \delta \left(\omega - \frac{6\pi}{T} \right) - \delta \left(\omega + \frac{6\pi}{T} \right) \right]$$

$$P_y = \frac{\pi A^2}{2\pi \cdot 2} (1 + 1 + 1 + 1) = A^2$$

cuu duong than cong . com

Bài 4.9:

a,

$$x(t) = z(t) * \text{Sa}(4\omega_0 t)$$

$$\text{mà } z(t) = \pi \prod \left(\frac{2t}{T} \right) * \frac{1}{T} \text{III} \left(\frac{t}{T} \right), T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Ta thấy $z(t)$ là tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ T

$$z(t) = x_1(t) * \frac{1}{T} \text{III} \left(\frac{t}{T} \right)$$

$$Z(\omega) = X_1(\omega) \cdot \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Xét tín hiệu $x_1(t)$

$$x_1(t) = \pi \prod \left(\frac{t}{T} \right)$$

$$\Rightarrow X_1(\omega) = \frac{\pi T}{2} \text{Sa} \left(\frac{\omega T}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi T}{2} \text{Sa} \left(n \frac{\pi}{2} \right)$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\Rightarrow Z(\omega) = \pi \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \text{Sa} \left(n \frac{\pi}{2} \right) \cdot \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= Z(\omega) \cdot \frac{\pi}{4\omega_0} \prod \left(\frac{\omega}{8\omega_0} \right) \\ &= \frac{\pi^3}{4\omega_0} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{2}} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{\frac{-3\pi}{2}} \delta(\omega - 3\omega_0) + \frac{1}{\frac{-3\pi}{2}} \delta(\omega + 3\omega_0) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{2\omega} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) - \frac{1}{3} \delta(\omega - 3\omega_0) - \frac{1}{3} \delta(\omega + 3\omega_0)] \\ &= \frac{\pi T}{4} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) - \frac{1}{3} \delta(\omega - 3\omega_0) - \frac{1}{3} \delta(\omega + 3\omega_0)] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = 2\pi \left[\frac{T}{8} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{T}{8} \delta(\omega + \omega_0) - \frac{T}{24} \delta(\omega - 3\omega_0) - \frac{T}{24} \delta(\omega + 3\omega_0) \right]$$

$$\Psi_x(\omega) = 2\pi \frac{T^2}{64} \left[\frac{\pi^2}{4} \delta(\omega) + \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) + \frac{1}{9} \delta(\omega - 3\omega_0) + \frac{1}{9} \delta(\omega + 3\omega_0) \right]$$

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{T^2}{64} \left[1 + 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{\pi^2}{4} \right] = 0,0347T^2$$

b,

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= K(\omega) \cdot X(\omega) \\ Y(\omega) &= \frac{\pi T}{4} \left[\frac{1}{3} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{3} \delta(\omega + \omega_0) - \frac{1}{3} \delta(\omega - 3\omega_0) - \frac{1}{3} \delta(\omega + 3\omega_0) \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{T}{24} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{T}{24} \delta(\omega + \omega_0) - \frac{T}{24} \delta(\omega - 3\omega_0) - \frac{T}{24} \delta(\omega + 3\omega_0) \right] \end{aligned}$$

$$\Psi_y(\omega) = 2\pi \frac{T^2}{576} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - 3\omega_0) + \delta(\omega + 3\omega_0)]$$

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{T^2}{576} [1 + 1 + 1 + 1] = 0,0069T^2 = 0,1938P_x$$

c,

Ta có:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{\pi T}{12} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - 3\omega_0) - \delta(\omega + 3\omega_0)] \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{T}{12} (\cos\omega_0 t - \cos 3\omega_0 t) \\ \Psi_y(\omega) &= \frac{T^2}{288} [\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) + \pi\delta(\omega - 3\omega_0) + \pi\delta(\omega + 3\omega_0)] \\ \Rightarrow \phi_y(t) &= \frac{T^2}{288} (\cos\omega_0 t + \cos 3\omega_0 t) \end{aligned}$$

Bài 4.10:

$$x(t) = \pi |\sin\omega_0 t|$$

ta thấy

$x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn của $x_1(t)$ với chu kỳ $\frac{\pi}{2}$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thượng

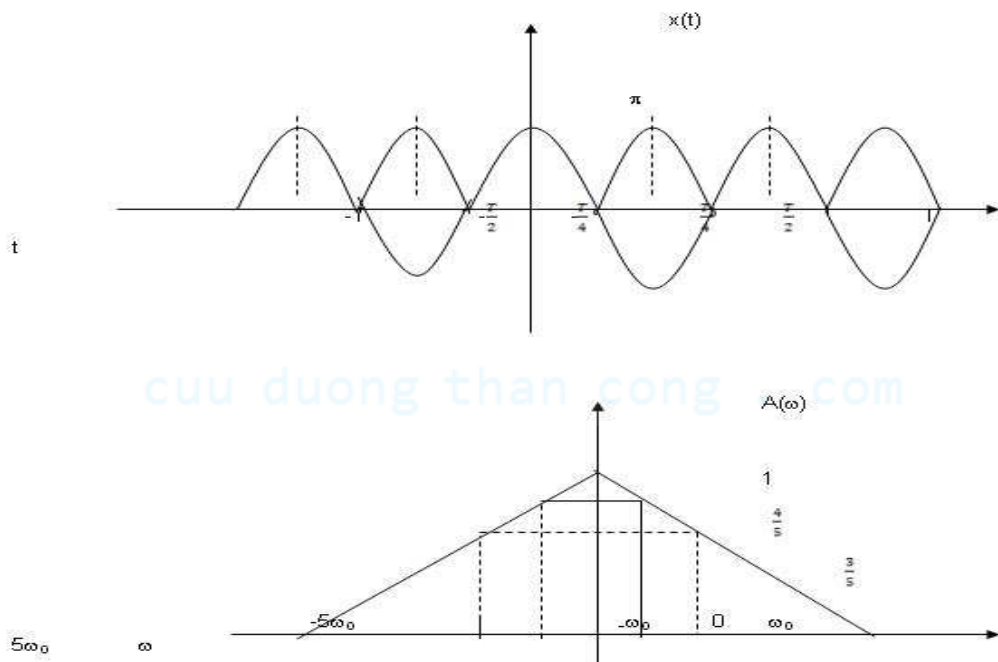
$$x_1(t) = \pi \sin \omega_0 t \cdot \pi \left(\frac{t}{T} \right)$$

$$X_1(\omega) = \frac{\pi T}{j4} \left[\text{Sa} \frac{(\omega - \omega_0)T}{4} - \text{Sa} \frac{(\omega + \omega_0)T}{4} \right]$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{\pi^2}{j4} \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} \left(\text{Sa} \frac{(n-1)\pi}{2} - \text{Sa} \frac{(n+1)\pi}{2} \right)$$

$$Y(\omega) = K(\omega) \cdot X(\omega)$$

Vẽ hình



$$Y(\omega) = \frac{\pi^2}{j4} \left[\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{3\pi} \right) \right] \frac{4}{5} j \cdot \delta(\omega - \omega_0) + \left(\frac{1}{3\pi} - \frac{1}{\pi} \right) \cdot \frac{4}{5} (-j) \cdot \delta(\omega - \omega_0)$$

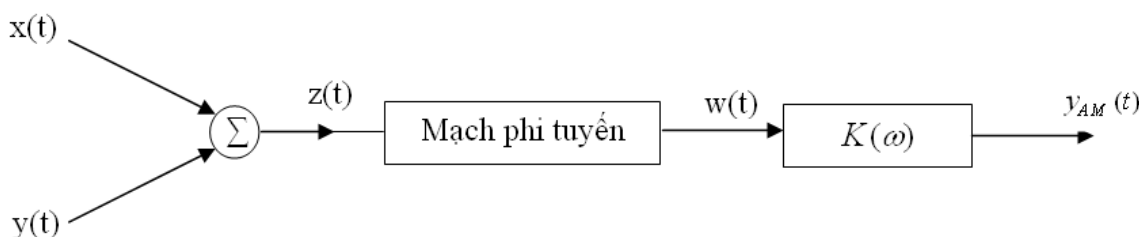
CHƯƠNG 5 – TÍN HIỆU ĐIỀU CHẾ

Bài 5.1 Một máy phát làm việc trong hệ điều chế AM, có tần số của sóng mang $f_0=104\text{kHz}$. Bề rộng phổ của tín hiệu tin tức là $300\text{ Hz} - 3.4\text{kHz}$. Hỏi máy thu tín hiệu trên cần bề rộng dải thông là bao nhiêu và làm việc ở dải tần nào?

Bài 5.2 Ở đầu vào của mạch lọc thông thấp có đặc tuyến tần số $K(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ được đưa đến tín hiệu $y_{AM}(t) = [A + x(t)] \cdot \cos 2\pi 10^5 t$; cho biết hệ số độ sâu điều chế $m = 0.5$ và $\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_0$. Hãy tìm tín hiệu ở đầu ra mạch lọc $z(t)$, phổ $Z(\omega)$ và công suất của tín hiệu.

Bài 5.3 Tín hiệu AM có dạng $y_{AM}(t) = [A + x(t)] \cdot \cos 2\pi 10^5 t$, trong đó tín hiệu tin tức $x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn được biểu diễn trên hình B5.1. Hãy tìm biên độ nhỏ nhất của sóng mang A_{\min} , để tín hiệu $y_{AM}(t)$ được tách sóng không bị méo trong mạch tách sóng hình bao. Hãy vẽ tín hiệu AM tương ứng với biên độ tìm được và tín hiệu AM-SC, $y_{AM-SC}(t) = x(t) \cdot \cos 2\pi 10^5 t$

Bài 5.4 Tín hiệu AM được tạo trong mạch điều chế như trên hình B.5.4. ở đầu vào hệ thống được đưa tới tín hiệu tin tức $x(t) = 15 \cdot \cos 10^3 t$ và $y(t) = 5 \cdot \cos 10^6 t$. Hãy tính hệ số độ sâu điều chế của tín hiệu $y_{AM}(t)$ ở đầu ra của mạch điều chế. Cho biết đặc tuyến của mạch phi tuyến là $w = 10 + 2z + 0.02z^2$; còn đặc tuyến tần số của mạch lọc là: $K(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - 10^6}{3 \cdot 10^3}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + 10^6}{3 \cdot 10^3}\right)$



Bài 5.5 Cho tín hiệu điều biên $u_{AM}(t) = U(1 + m \cos \omega t) \cdot \cos \Omega t$. Hãy đưa ra công thức tính hệ số độ sâu điều chế m , với $m \leq 1$, theo các thông số của tín hiệu:

a) Giá trị cực đại U_{\max} và giá trị cực tiểu U_{\min} của hình bao $u_{AM}(t)$.

b) Hệ số sóng hài $h = \sqrt{\frac{P_m}{P_{AM}}}$, trong đó P_{AM} là công suất trung bình của tín hiệu và P_m là công suất trung bình khi lọc bỏ sóng mang.

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng

Bài 5.6 Áp dụng kết quả bài 5.5, để tìm các hệ số sâu điều chế của tín hiệu AM sau đây:

$$u_{AM}(t) = U(1 + 0.3\cos \omega t + 0.4\cos 2\omega t) \cdot \cos \Omega t$$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Bài 5.7 Ở đầu vào của một mạch lọc có đặc tuyến tần số $K(\omega)$, được đưa đến tín hiệu điều biên có dạng:

$$x_v(t) = A[1 + x(t)]\cos\Omega t$$

Tín hiệu ở đầu ra của mạch cũng là tín hiệu điều biên:

$$x_r(t) = B[1 + y(t)]\cos\Omega t$$

a) Hãy vẽ phổ của tín hiệu đầu ra mạch lọc.

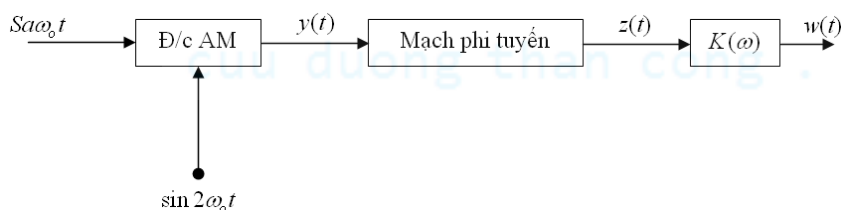
b) Tìm quá trình $y(t)$ và năng lượng của nó. Cho biết: $A = 2$; $\Omega = 10\text{rd/s}$;

$$x(t) = Sa2t; K(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega - 10}{4}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega + 10}{4}\right)$$

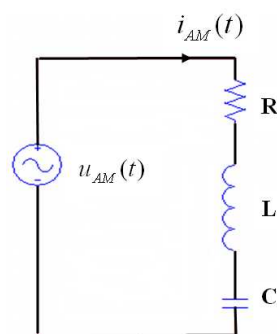
Bài 5.8 Sóng mang $\sin 2\omega_o t$ bị điều chế bởi tín hiệu $Sa\omega_o t$ trong hệ AM, ở đầu ra của mạch điều chế nhận được $y_{AM}(t) = (1 + Sa\omega_o t)\sin 2\omega_o t$. Tín hiệu $y_{AM}(t)$ được đưa đến mạch phi tuyến có đặc tuyến $z = |y|$ (hình 5.8), và sau đó cho qua mạch lọc thông dải có đặc tuyến tần số:

$$K(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - 4\omega_o}{2\omega_o}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + 4\omega_o}{2\omega_o}\right)$$

Hãy tìm tín hiệu $w(t)$ và công suất trung bình của nó.



Bài 5.9 Một đài phát làm việc với sóng mang có bước sóng $\lambda = 300\text{m}$, sóng mang bị điều chế bởi tín hiệu $x(t) = a \cos 2\pi 10^3 t$ trong hệ AM. Điện áp của tín hiệu điều biên AM được đưa đến mạch cộng hưởng với tần số sóng mang (hình 5.9). Hãy tìm hệ số phẩm chất nhỏ nhất cần có của mạch cộng hưởng, để tỉ số giữa biên độ dải bên với biên độ sóng mang của dòng $i_{AM}(t)$ suy giảm không lớn hơn 3dB so với tỉ số giữa biên độ sóng bên với biên độ sóng mang của tín hiệu $u_{AM}(t)$.



Bài 5.10 Ở đầu vào mạch cộng hưởng nối tiếp trên hình 5.9, được đưa đến tín hiệu điều biên:

$$u_{AM}(t) = (100 + 50 \cos 10^4 t) \cos 10^6 t (\text{V})$$

Mạch được điều chỉnh cộng hưởng ở tần số sóng mang.

- a) Hãy tính hệ số phẩm chất, nếu biết rằng, đường bao của tín hiệu dòng điện $i_{AM}(t)$ bị dịch chuyển so với đường bao của tín hiệu điện áp $u_{AM}(t)$ một góc $\frac{\pi}{3}$.

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tần bởi Trần Văn Thượng

- b) Tìm các thông số L , R của mạch, cũng như hệ số độ sâu điều chế dòng điện m_i , nếu $C = 2nF$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

BÀI GIẢI

Bài 5.1

Tần số sóng mang: $f_o = 104 \text{ kHz}$

Bề rộng phổ của tín hiệu tin tức: $300 \text{ Hz} - 400 \text{ kHz}$ ($f_{\min} - f_{\max}$)

Bề rộng dải thông:

$$B_{AM} = 2\omega_{\max} = 2.2\pi f_{\max} = 2\pi.2.3,4 = 2\pi.6,8 \text{ (rad/s)}$$

Dải tần làm việc của máy thu tín hiệu:

$$f'_{\min} = f_o - f_{\max} = 104 - 3,4 = 100,6 \text{ kHz}$$

$$f'_{\max} = f_o + f_{\max} = 104 + 3,4 = 107,4 \text{ kHz}$$

Bài 5.2

$$y_{AM}(t) = (1 + m \cos \omega_o t) \cos \left(\omega_o t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$y_{AM}(t) = (1 + 0.5 \cos \frac{\omega_o}{2} t) \cos \left(\omega_o t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \cos \left(\omega_o t + \frac{\pi}{4} \right) + 0.5 \cos \frac{\omega_o}{2} t \cdot \cos \left(\omega_o t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \cos \left(\omega_o t + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(\cos \left(\frac{\omega_o}{2} t + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\frac{3}{2} \omega_o t + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Phổ của tín hiệu $y_{AM}(t)$ là:

$$Y_{AM}(\omega) = \pi \left(\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o) \right) e^{j\omega \frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} \pi \left(\delta \left(\omega - \frac{1}{2} \omega_o \right) + \delta \left(\omega + \frac{1}{2} \omega_o \right) + \delta \left(\omega - \frac{3}{2} \omega_o \right) + \delta \left(\omega + \frac{3}{2} \omega_o \right) \right) e^{j\omega \frac{\pi}{4}}$$

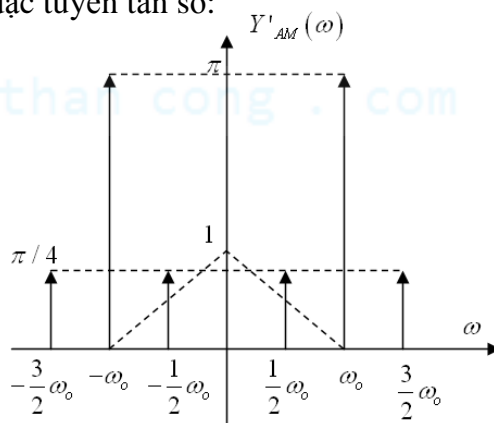
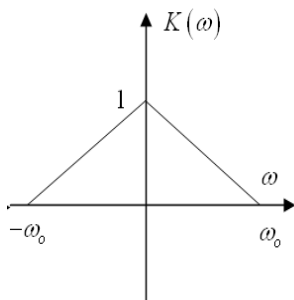
Đặt:

$$Y'_{AM}(\omega) = \pi \left(\delta(\omega - \omega_o) + \delta(\omega + \omega_o) \right)$$

$$+ \frac{1}{4} \pi \left(\delta \left(\omega - \frac{1}{2} \omega_o \right) + \delta \left(\omega + \frac{1}{2} \omega_o \right) + \delta \left(\omega - \frac{3}{2} \omega_o \right) + \delta \left(\omega + \frac{3}{2} \omega_o \right) \right)$$

Ở đầu vào mạch lọc thông thấp có đặc tuyến tần số:

$$K(\omega) = \Lambda \left(\frac{\omega}{\omega_o} \right)$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Phổ của tín hiệu ở đầu ra mạch lọc:

$$Z(\omega) = Y_{AM}(\omega) \cdot K(\omega) = Y'_{AM}(\omega) \cdot K(\omega) \cdot e^{j\omega \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8} \pi \left[\delta\left(\omega - \frac{1}{2}\omega_o\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{2}\omega_o\right) \right] e^{j\omega \frac{\pi}{4}}$$

Tín hiệu ở đầu ra mạch lọc: $z(t) = \frac{1}{8} \cos\left(\frac{1}{2}\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right)$

Công suất của tín hiệu $z(t)$:

$$P_z = \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{2} = \frac{1}{128}$$

Kết luận:

*Tín hiệu ở đầu ra mạch lọc:

$$z(t) = \frac{1}{8} \cos\left(\frac{1}{2}\omega_o t + \frac{\pi}{4}\right)$$

*Phổ của tín hiệu:

$$Z(\omega) = \frac{1}{8} \pi \left[\delta\left(\omega - \frac{1}{2}\omega_o\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{2}\omega_o\right) \right] e^{j\omega \frac{\pi}{4}}$$

*Công suất của tín hiệu:

$$P_z = \frac{1}{128}$$

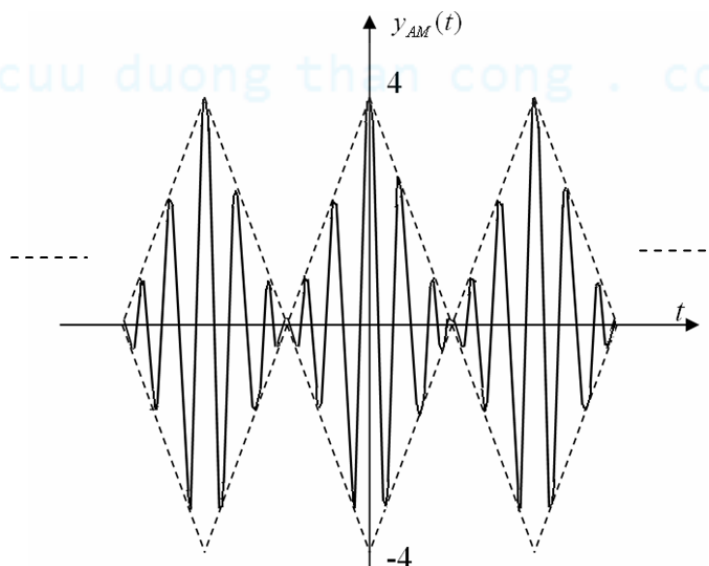
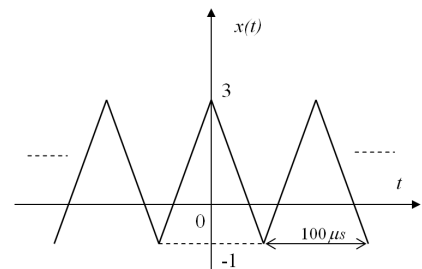
Bài 5.3

$$y_{AM}(t) = [A + x(t)] \cdot \cos 2\pi 10^5 t$$

Biên độ nhỏ nhất của sóng mang A_{\min} để tín hiệu $y_{AM}(t)$ được tách sóng không bị méo trong mạch tách sóng hình bao

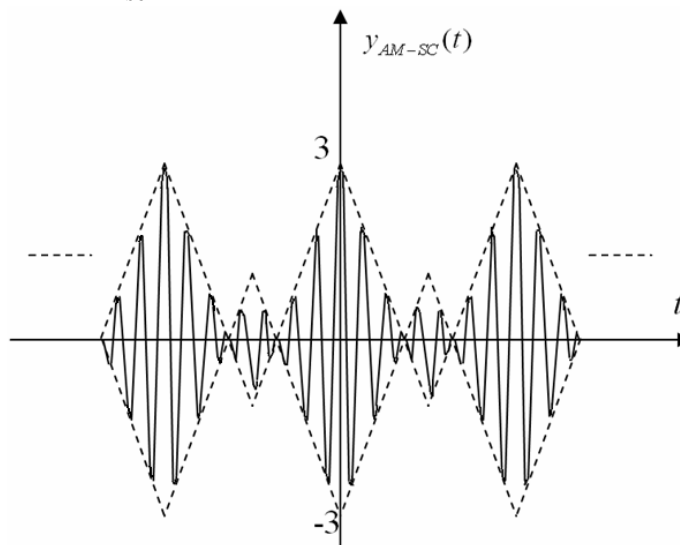
$$A \geq \max\{|x(t)| : x(t) < 0\} \Rightarrow A_{\min} = 1$$

Tín hiệu AM tương ứng với biên độ $A=1$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng

Tín hiệu AM-SC: $y_{AM-SC}(t) = x(t) \cos 2\pi 10^5 t$



Bài 5.4

Ta có:

$$z(t) = x(t) + y(t) = 15 \cos 10^3 t + 5 \cos 10^6 t$$

Mà $w = 10 + 2z + 0.02z^2$

$$\Rightarrow w(t) = 10 + 30 \cos 10^3 t + 10 \cos 10^6 t + \frac{9}{2} \cos^2 10^3 t + \frac{1}{2} \cos^2 10^6 t + 3 \cos 10^3 t \cdot \cos 10^6 t$$

$$= 10 + 30 \cos 10^3 t + 10 \cos 10^6 t + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \cos 2 \cdot 10^3 t + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 2 \cdot 10^6 t + 3 \cos 10^3 t \cdot \cos 10^6 t$$

$$= \frac{25}{2} + 30 \cos 10^3 t + 10 \cos 10^6 t + \frac{9}{4} \cos 2 \cdot 10^3 t + \frac{1}{4} \cos 2 \cdot 10^6 t + \frac{3}{2} (\cos(10^3 - 10^6)t + \cos(10^6 + 10^3)t)$$

Phổ của tín hiệu $w(t)$:

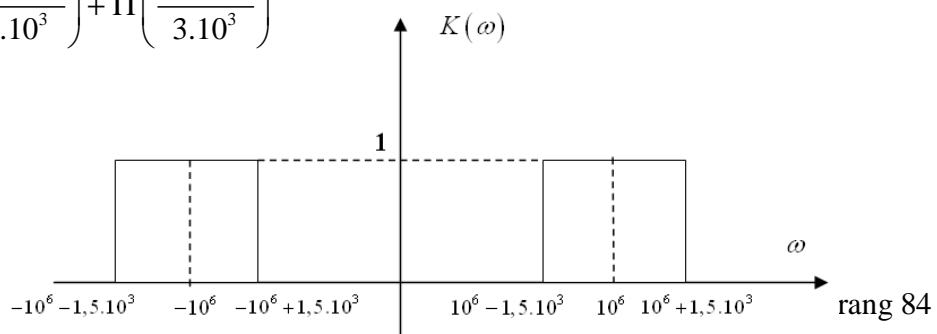
$$W(\omega) = 25\pi\delta(\omega) + 30\pi[\delta(\omega - 10^3) + \delta(\omega + 10^3)] + 10\pi[\delta(\omega - 10^6) + \delta(\omega + 10^6)]$$

$$+ \frac{9}{4}\pi[\delta(\omega - 2 \cdot 10^3) + \delta(\omega + 2 \cdot 10^3)] + \frac{1}{4}\pi[\delta(\omega - 2 \cdot 10^6) + \delta(\omega + 2 \cdot 10^6)]$$

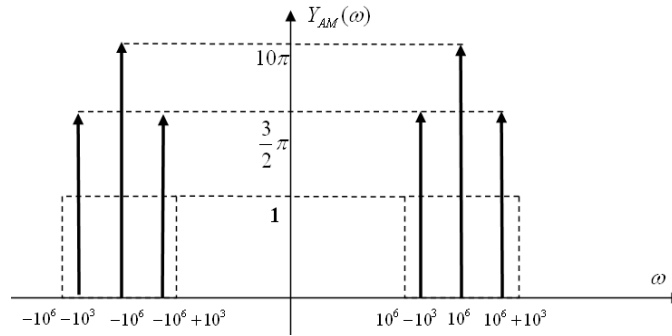
$$+ \frac{3}{2}\pi[\delta(\omega - (10^3 - 10^6)) + \delta(\omega + (10^3 - 10^6)) + \delta(\omega - (10^3 + 10^6)) + \delta(\omega + (10^3 + 10^6))]$$

Đặc tuyến của mạch lọc:

$$K(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - 10^6}{3 \cdot 10^3}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + 10^6}{3 \cdot 10^3}\right)$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương



Phổ của tín hiệu ra sau khi qua mạch lọc:

$$Y_{AM}(\omega) = W(\omega) \cdot K(\omega)$$

$$= 10\pi [\delta(\omega - 10^6) + \delta(\omega + 10^6)] + \frac{3}{2}\pi [\delta(\omega - (10^3 - 10^6)) + \delta(\omega + (10^3 - 10^6))] + \frac{3}{2}\pi [\delta(\omega - (10^3 + 10^6)) + \delta(\omega + (10^3 + 10^6))]$$

Tín hiệu đầu ra mạch lọc:

$$y_{AM}(t) = 10 \cos 10^6 t + \frac{3}{2} \cos(10^3 - 10^6)t + \frac{3}{2} \cos(10^3 + 10^6)t$$

$$= 10 \cos 10^6 t + 3 \cos 10^3 t \cos 10^6 t$$

Vậy hệ số độ sâu điều chế của tín hiệu $y_{AM}(t)$: $m = \frac{3}{10} = 0.3$

Bài 5.5

a) $u_{AM}(t) = U(1 + m \cos \omega t) \cdot \cos \Omega t$

Đặt $x = \cos \omega t$ ($x \in [-1; 1]$)

$$f(x) = U(1 + mx) \Rightarrow U - mU \leq f(x) \leq U + mU$$

$$U_{\max} = f_{\max}(x) = U + mU$$

$$U_{\min} = f_{\min}(x) = U - mU$$

$$\Rightarrow U_{\max} - U_{\min} = 2mU, U_{\max} + U_{\min} = 2U$$

$$\Rightarrow m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}$$

b)

$$h = \sqrt{\frac{P_m}{P_{AM}}}$$

$$u_{AM}(t) = U(1 + m \cos \omega t) \cdot \cos \Omega t = U \cos \Omega t + mU \cos \omega t \cos \Omega t$$

$$= U \cos \Omega t + \frac{1}{2} mU [\cos(\omega + \Omega)t + \cos(\omega - \Omega)t]$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$P_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (mU)^2, P_{AM} = \frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (mU)^2$$

$$h^2 = \frac{P_m}{P_{AM}} = \frac{\frac{1}{2} (mU)^2}{U^2 + \frac{1}{2} (mU)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{2+m^2}{m^2} = \frac{2}{m^2} + 1 \Leftrightarrow m^2 = \frac{2h^2}{1-h^2} \Leftrightarrow m = h \sqrt{\frac{2}{1-h^2}}$$

Bài 5.6

a)

$$u_{AM}(t) = U(1 + 0.3 \cos \omega t + 0.4 \cos 2\omega t) \cdot \cos \Omega t$$

$$= U(0.6 + 0.3 \cos \omega t + 0.8 \cos^2 \omega t) \cdot \cos \Omega t$$

Đặt $\cos \omega t = x$ với $x \in [-1; 1]$

$$f(x) = 0.6 + 0.3x + 0.8x^2$$

$$f'(x) = 0.3 + 1.6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{16}$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$-\frac{3}{16}$	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1,1		1,7
		0,57	

$$\Rightarrow f_{\max}(x) = 1,7, f_{\min}(x) = 0,57$$

$$U_{\max} = U \cdot f_{\max} = 1.7U$$

$$U_{\min} = U \cdot f_{\min} = 0.57U$$

$$m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}} = \frac{1.7U - 0.57U}{1.7U + 0.57U} = \frac{1.13}{2.27} \approx 0.498$$

b) $u_{AM}(t) = U(1 + 0.3 \cos \omega t + 0.4 \cos 2\omega t) \cdot \cos \Omega t$

$$= U \cos \Omega t + 0.3U \cos \omega t \cdot \cos \Omega t + 0.4U \cos 2\omega t \cdot \cos \Omega t$$

$$= U \cos \Omega t + \frac{0.3}{2} [U \cos(\omega + \Omega)t + U \cos(\omega - \Omega)t] + \frac{0.4}{2} [U \cos(2\omega + \Omega)t + U \cos(2\omega - \Omega)t]$$

$$P_m = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (0.3U)^2 + \frac{1}{2} (0.4U)^2 \right] = \frac{1}{16} U^2$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

$$P_{AM} = \frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(0.3U)^2 + \frac{1}{2}(0.4U)^2\right] = \frac{9}{16}U^2$$

$$h = \sqrt{\frac{P_m}{P_{AM}}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m = h\sqrt{\frac{2}{1-h^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{1-\frac{1}{9}}} = 0.5$$

Kết luận:

a) $m = 0.498$

b) $m = 0.5$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Bài 5.7

a)

b)

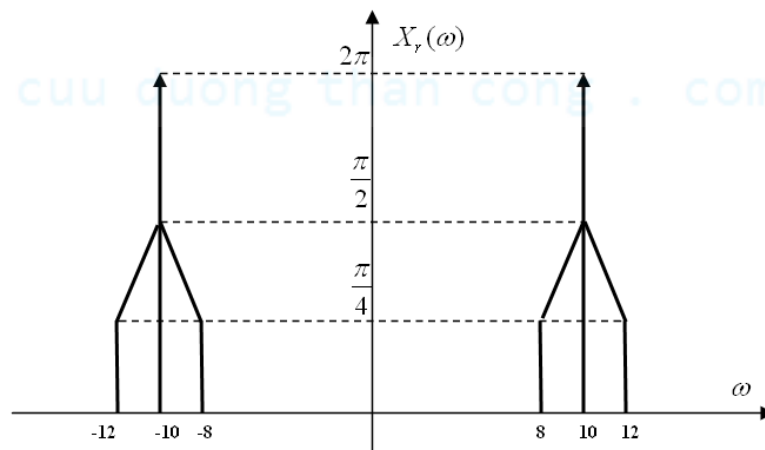
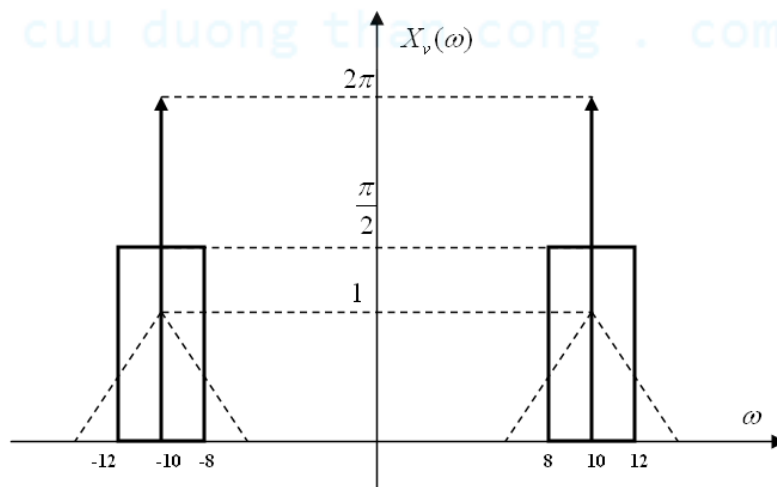
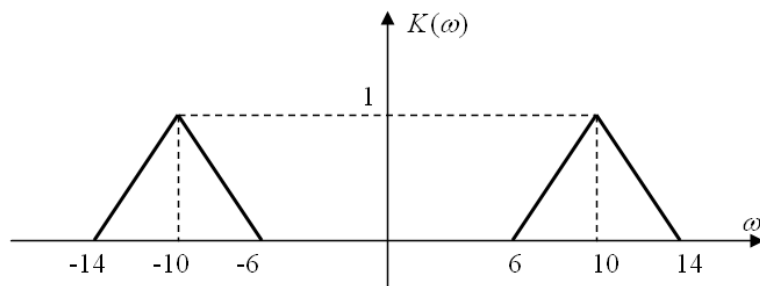
$$x_v(t) = A[1 + x(t)] \cos \Omega t$$

$$x_v(t) = 2[1 + Sa2t] \cos 10t = 2 \cos 10t + 2Sa2t \cdot \cos 10t$$

Phổ của tín hiệu $x_v(t)$:

$$X_v(\omega) = 2\pi [\delta(\omega - 10) + \delta(\omega + 10)] + \frac{\pi}{2} \Pi\left(\frac{\omega - 10}{4}\right) + \frac{\pi}{2} \Pi\left(\frac{\omega + 10}{4}\right)$$

Mạch lọc có đặc tuyến tần số: $K(\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega - 10}{4}\right) + \Lambda\left(\frac{\omega + 10}{4}\right)$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Phổ của tín hiệu $x_r(t)$:

$$X_r(\omega) = X_v(\omega) \cdot K(\omega)$$

$$= 2\pi [\delta(\omega-10) + \delta(\omega+10)] + \frac{\pi}{4} \Pi\left(\frac{\omega-10}{4}\right) + \frac{\pi}{4} \Lambda\left(\frac{\omega-10}{2}\right) + \frac{\pi}{4} \Pi\left(\frac{\omega+10}{4}\right) + \frac{\pi}{4} \Lambda\left(\frac{\omega+10}{2}\right)$$

$$x_r(t) = 2 \cos 10t + \frac{1}{2} Sa 2t \cdot e^{j10t} + \frac{1}{4} Sa^2 t \cdot e^{j10t} + \frac{1}{2} Sa 2t \cdot e^{-j10t} + \frac{1}{4} Sa^2 t \cdot e^{-j10t}$$

$$= 2 \cos 10t + \frac{1}{2} Sa 2t \cdot (e^{j10t} + e^{-j10t}) + \frac{1}{4} Sa^2 t \cdot (e^{j10t} + e^{-j10t})$$

$$= 2 \cos 10t + \frac{1}{2} Sa 2t \cdot 2 \cos 10t + \frac{1}{4} Sa^2 t \cdot 2 \cos 10t$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{2} Sa 2t + \frac{1}{4} Sa^2 t \right) \cos 10t$$

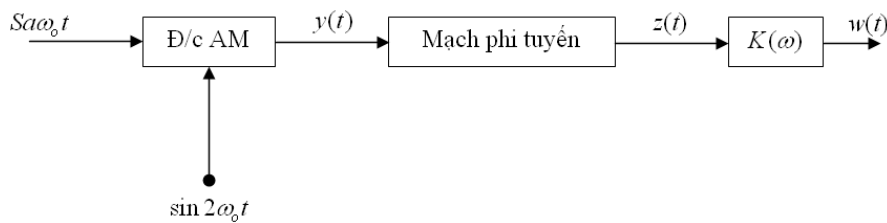
Mà $x_r(t) = B[1 + y(t)] \cos \Omega t$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} Sa 2t + \frac{1}{4} Sa^2 t$$

Năng lượng của tín hiệu $y(t)$:

$$\rightarrow E_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{1} = \frac{5\pi}{12}$$

Bài 5.8



Tín hiệu $y_{AM}(t) = (1 + Sa\omega_o t) \sin 2\omega_o t$ sau khi qua mạch phi tuyến có dạng:

$$z(t) = |y_{AM}(t)| = |(1 + Sa\omega_o t) \sin 2\omega_o t| = (1 + Sa\omega_o t) \cdot |\sin 2\omega_o t|$$

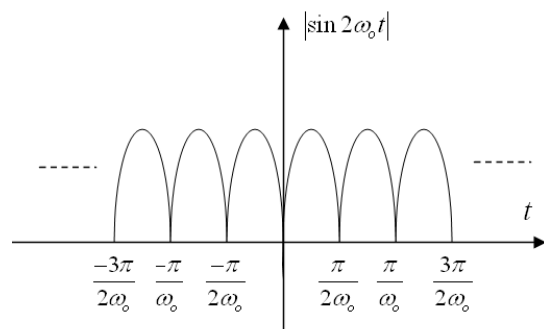
Vì $1 + Sa\omega_o t \geq 0$

Phổ của $x(t) = |\sin(2\omega_o t)|$ có dạng:

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \cdot \delta(\omega - n\omega')$$

$x(t) = |\sin(2\omega_o t)|$ là tín hiệu tuần hoàn với:

$$\text{Chu kỳ: } T = \frac{\pi}{2\omega_o},$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thượng

- Tần số góc $\omega' = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2\omega_o}} = 4\omega_o$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Tín hiệu $|\sin(2\omega_o t)|$ trong 1 chu kỳ T , $t \in [0, T]$ có dạng:

$$x_T(t) = \sin(2\omega_o t) \cdot \Pi\left(\frac{t - \frac{\pi}{4\omega_o}}{\frac{\pi}{2\omega_o}}\right)$$

$$\Rightarrow X_T(\omega) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{\pi}{2\omega_o} \left(Sa\left(\frac{(\omega - 2\omega_o)\pi}{4\omega_o}\right) \cdot e^{-j\frac{(\omega - 2\omega_o)\pi}{4\omega_o}} - Sa\left(\frac{(\omega + 2\omega_o)\pi}{4\omega_o}\right) \cdot e^{-j\frac{(\omega + 2\omega_o)\pi}{4\omega_o}} \right)$$

$$X_N = \frac{X(n\omega_o)}{T} = \frac{X(4n\omega_o)}{T}$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \frac{\pi}{2\omega_o} \cdot \frac{2\omega_o}{\pi} \left(Sa\left(\frac{(4n\omega_o - 2\omega_o)\pi}{4\omega_o}\right) \cdot e^{-j\frac{(4n\omega_o - 2\omega_o)\pi}{4\omega_o}} - Sa\left(\frac{(4n\omega_o + 2\omega_o)\pi}{4\omega_o}\right) \cdot e^{-j\frac{(4n\omega_o + 2\omega_o)\pi}{4\omega_o}} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \left(Sa\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{(2n-1)\pi}{2}} - Sa\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \left(\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)}{\frac{(2n-1)\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{(2n-1)\pi}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \cdot e^{-j\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)}{2n-1} \cdot e^{-j\frac{(2n-1)\pi}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}{2n+1} \cdot e^{-j\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{j\pi} \cdot \left[\frac{1}{2n-1} \cdot \left(\frac{\sin((2n-1)\pi)}{2} - j \sin^2\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) \right) - \frac{1}{2n+1} \cdot \left(\frac{\sin((2n+1)\pi)}{2} - j \sin^2\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right) \right) \right]$$

$$= \frac{1}{j\pi} \cdot \left[\frac{1}{2n-1} \cdot (0 - j \cos^2(n\pi)) - \frac{1}{2n+1} \cdot (0 - j \cos^2(n\pi)) \right]$$

$$= \frac{1}{j\pi} \cdot \left[\frac{-j \cos^2(n\pi)}{2n-1} + \frac{j \cos^2(n\pi)}{2n+1} \right]$$

$$= \frac{\cos^2(n\pi)}{\pi} \cdot \left[\frac{-1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{2}{1-4n^2} \right] \text{ vì } \cos^2(n\pi) = 1$$

Do đó:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} \cdot \delta(\omega - 4n\omega_0)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1-4n^2} \cdot \delta(\omega - 4n\omega_0)$$

Vậy ta có: $1 + \sin 2\omega_0 t \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) + \frac{\pi}{\omega_0} \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$

$$|\sin 2\omega_0 t| \leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1-4n^2} \cdot \delta(\omega - 4n\omega_0)$$

Áp dụng định lý phổ của tích tín hiệu ta có:

$$(1 + \sin 2\omega_0 t) \cdot |\sin 2\omega_0 t| \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \left[\left(2\pi\delta(\omega) + \frac{\pi}{\omega_0} \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) \right) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1-4n^2} \cdot \delta(\omega - 4n\omega_0) \right]$$

Phổ của tín hiệu $z(t)$ là:

$$Z(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1-4n^2} \cdot [\delta(\omega) * \delta(\omega - 4n\omega_0)] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\omega_0(1-4n^2)} \cdot \left[\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) * \delta(\omega - 4n\omega_0) \right]$$

Áp dụng tính chất tích chập của phân bố $\delta(\omega)$ với hàm bất kỳ, ta có:

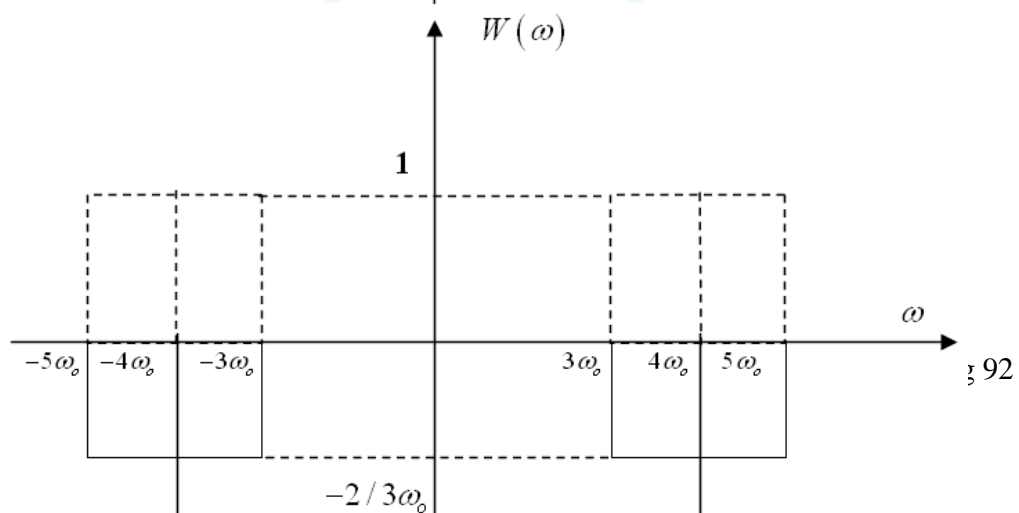
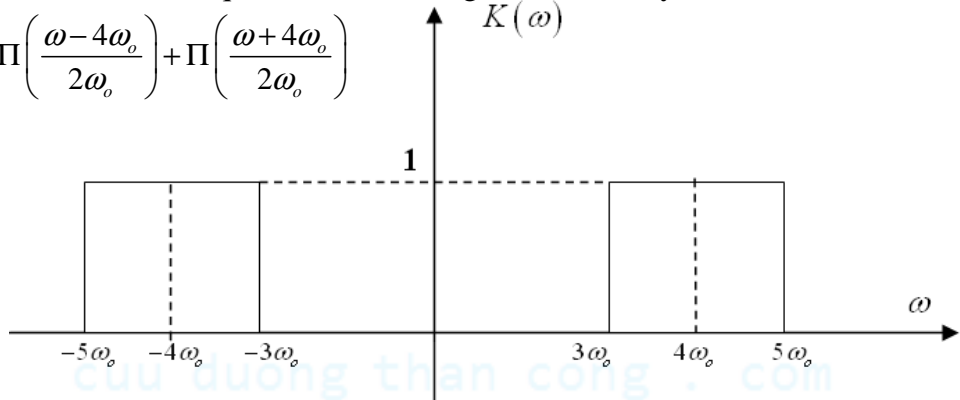
$$\delta(\omega) * \delta(\omega - 4n\omega_0) = \delta(\omega - 4n\omega_0)$$

$$\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right) * \delta(\omega - 4n\omega_0) = \Pi\left(\frac{\omega - 4n\omega_0}{2\omega_0}\right)$$

Vậy: $Z(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{4}{1-4n^2} \cdot \delta(\omega - 4n\omega_0) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\omega_0(1-4n^2)} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4n\omega_0}{2\omega_0}\right)$

Tín hiệu $z(t)$ được đưa qua mạch lọc thông dải có đặc tuyến tần số:

$$K(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega - 4\omega_0}{2\omega_0}\right) + \Pi\left(\frac{\omega + 4\omega_0}{2\omega_0}\right)$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng

Phổ của $w(t)$ là:

$$W(\omega) = Z(\omega).K(\omega)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{-3} \cdot \delta(\omega - 4\omega_o) + \frac{2}{-3\omega_o} \cdot \Pi\left(\frac{\omega - 4\omega_o}{2\omega_o}\right) + \frac{4}{-3} \cdot \delta(\omega + 4\omega_o) + \frac{2}{-3\omega_o} \cdot \Pi\left(\frac{\omega + 4\omega_o}{2\omega_o}\right) \\ &= \frac{4}{-3} \cdot [\delta(\omega - 4\omega_o) + \delta(\omega + 4\omega_o)] + \frac{2}{-3\omega_o} \cdot \left[\Pi\left(\frac{\omega + 4\omega_o}{2\omega_o}\right) + \Pi\left(\frac{\omega - 4\omega_o}{2\omega_o}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w(t) &= \frac{8}{-3} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \cos 4\omega_o t + \frac{4}{-3\omega_o} \cdot \frac{\omega_o}{\pi} \cdot Sa\omega_o t \cdot \cos 4\omega_o t \\ &= \frac{4}{3\pi} \cos(4\omega_o t - \pi) + \frac{4}{3\pi} Sa\omega_o t \cdot \cos(4\omega_o t - \pi) \\ &= \frac{4}{3\pi} (1 + Sa\omega_o t) \cdot \cos(4\omega_o t - \pi) \end{aligned}$$

$$\text{Xét tín hiệu } w'(t) = \frac{4}{3\pi} Sa\omega_o t \cdot \cos(4\omega_o t - \pi):$$

* $w'(t)$ tồn tại vô hạn

$$* \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4}{3\pi} Sa\omega_o t \cdot \cos(4\omega_o t - \pi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4}{3\pi} \frac{\sin \omega_o t}{\omega_o t} \cos(4\omega_o t - \pi) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3\pi} Sa\omega_o t \cdot \cos(4\omega_o t - \pi) \text{ là tín hiệu năng lượng nên } P_{w'(t)} = 0$$

Vậy công suất trung bình của $w(t)$ là:

$$P_w = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 = 0.09$$

Kết luận:

$$\text{Tín hiệu } w(t) = \frac{4}{3\pi} (1 + Sa\omega_o t) \cdot \cos(4\omega_o t - \pi)$$

$$\text{Công suất trung bình: } P_w = 0.09$$

Bài 5.9

Sóng mang có bước sóng: $\lambda = 300m$

Tần số sóng mang: $f_o = \frac{C}{\lambda n} = \frac{3.10^8}{300.1} = 10^6 Hz \Rightarrow \omega_o = 2\pi 10^6 (rad / s)$

Điện áp:

$$u_{AM}(t) = (A + a \cos 2\pi 10^3 t) \cos 2\pi 10^6 t \text{ [V]}$$

$$= A \cos 2\pi 10^6 t + a \cos 2\pi 10^3 t \cdot \cos 2\pi 10^6 t$$

$$= A \cos 2\pi 10^6 t + \frac{a}{2} (\cos(2\pi 10^6 - 2\pi 10^3)t + \cos(2\pi 10^6 + 2\pi 10^3)t)$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{U}_{AM} = A \angle 0 + \frac{a}{2} \angle 0 + \frac{a}{2} \angle 0$$

Đặt:

$$\omega_1 = 2\pi(10^6 - 10^3) \text{ rad/s} \quad \omega_2 = 2\pi(10^6 + 10^3) \text{ rad/s}$$

Dòng điện chạy qua mạch:

$$\overset{\circ}{I}_{AM} = \frac{A \angle 0}{|Z_{\omega_0}| \angle \varphi_0} + \frac{\frac{a}{2} \angle 0}{|Z_{\omega_1}| \angle \varphi_1} + \frac{\frac{a}{2} \angle 0}{|Z_{\omega_2}| \angle \varphi_2}$$

Mạch cộng hưởng với tần số sóng mang nên $\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C}$

$$\Rightarrow |Z_{\omega_o}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C} \right)^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\varphi_o = \arctg \frac{\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C}}{R} = \arctg 0 = 0$$

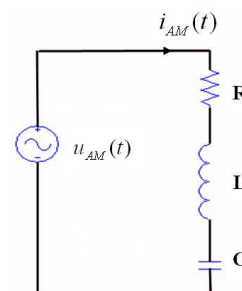
$$|Z_{\omega_1}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right)^2} \quad \varphi_1 = \arctg \frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R}$$

$$|Z_{\omega_2}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right)^2} \quad \varphi_2 = \arctg \frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R}$$

Ta thấy:

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \omega_1 L - \frac{\omega_o^2}{\omega_1} L = \left(\omega_1 - \frac{\omega_o^2}{\omega_1} \right) L = \left(2\pi(10^6 - 10^3) - \frac{4\pi^2 10^{12}}{2\pi(10^6 - 10^3)} \right) L = -12572.L$$

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = \omega_2 L - \frac{\omega_o^2}{\omega_2} L = \left(\omega_2 - \frac{\omega_o^2}{\omega_2} \right) L = \left(2\pi(10^6 + 10^3) - \frac{4\pi^2 10^{12}}{2\pi(10^6 + 10^3)} \right) L = 12560.L$$



Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thượng

$$\Rightarrow |Z_{\omega_1}| \approx |Z_{\omega_2}| = Z$$

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = -\varphi$$

cuu duong than cong . com

cuu duong than cong . com

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tam bởi Trần Văn Thương

Vậy:

$$\overset{\circ}{I}_{AM} = \frac{A}{R} \angle 0 + \frac{a}{2Z} \angle \varphi + \frac{a}{2Z} \angle -\varphi$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i_{AM}(t) &= \frac{A}{R} \cos 2\pi 10^6 t + \frac{a}{2Z} \cos((2\pi 10^6 - 2\pi 10^3)t + \varphi) + \frac{a}{2Z} \cos((2\pi 10^6 + 2\pi 10^3)t - \varphi) \\ &= \frac{A}{R} \cos 2\pi 10^6 t + \frac{a}{2Z} \cos(2\pi 10^6 t - (2\pi 10^3 t - \varphi)) + \frac{a}{2Z} \cos(2\pi 10^6 t + (2\pi 10^3 t - \varphi)) \end{aligned}$$

Tỉ số giữa biên độ sóng bên với biên độ sóng mang của tín hiệu $u_{AM}(t)$ là:

$$\beta_u = \frac{\frac{a}{2}}{A} = \frac{a}{2A}$$

Tỉ số giữa biên độ giải bên với biên độ sóng mang của dòng $i_{AM}(t)$ là:

$$\beta_i = \frac{\frac{a}{2|Z_{\omega_2}|}}{\frac{A}{R}} = \frac{\frac{a}{2A}}{\frac{|Z_{\omega_2}|}{R}} = \frac{\beta_u}{\frac{|Z_{\omega_2}|}{R}} = \beta_u \frac{R}{|Z_{\omega_2}|}$$

Theo đề: β_i suy giảm không quá 3dB so với β_u nên $\frac{R}{|Z_{\omega_2}|} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|Z_{\omega_2}|}{R} \geq \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}}{R} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R}\right)^2} \geq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R}\right)^2 \geq 2 \Rightarrow \left(\frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R}\right)^2 \geq 1$$

Vì $R, L, C > 0$ nên $\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = 12560 \cdot L > 0$

$$\text{Do đó: } \frac{12560 \cdot L}{R} \geq 1 \Rightarrow \frac{L}{R} \geq \frac{1}{12560}$$

Hệ số phẩm chất:

$$Q = \frac{\omega_o L}{R} \geq \omega_o \cdot \frac{1}{12560} = \frac{2\pi 10^6}{12456} \approx 500 \text{ Vậy } Q_{\min} = 500$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

Bài 5.10

$$u_{AM}(t) = (100 + 50 \cos 10^4 t) \cos 10^6 t \text{ [V]}$$

a)

$$u_{AM}(t) = (100 + 50 \cos 10^4 t) \cos 10^6 t = 100 \cos 10^6 t + 25(\cos(10^6 - 10^4)t + \cos(10^6 + 10^4)t)$$

$$\overset{\circ}{U} = 100 \angle 0 + 25 \angle 0 + 25 \angle 0$$

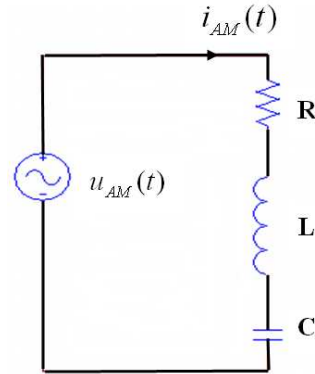
$$\Rightarrow \overset{\circ}{I} = \frac{100 \angle 0}{|Z_{\omega_0}| \angle \varphi_0} + \frac{25 \angle 0}{|Z_{\omega_1}| \angle \varphi_1} + \frac{25 \angle 0}{|Z_{\omega_2}| \angle \varphi_2}$$

Với:

$$\omega_o = 10^6 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = (10^6 - 10^4) \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = (10^6 + 10^4) \text{ rad/s}$$



Mạch cộng hưởng với tần số sóng mang nên $\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C}$

$$\Rightarrow |Z_{\omega_0}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C} \right)^2} = \sqrt{R^2} = R$$

$$\varphi_o = \arctg \frac{\omega_o L - \frac{1}{\omega_o C}}{R} = \arctg 0 = 0$$

$$|Z_{\omega_1}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} \right)^2}$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R}$$

$$|Z_{\omega_2}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right)^2}$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}}{R}$$

Nhận thấy:

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \omega_1 L - \frac{\omega_o^2}{\omega_1} L = \left(\omega_1 - \frac{\omega_o^2}{\omega_1} \right) L = \left((10^6 - 10^4) - \frac{10^{12}}{(10^6 - 10^4)} \right) L = -20000.L$$

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = \omega_2 L - \frac{\omega_o^2}{\omega_2} L = \left(\omega_2 - \frac{\omega_o^2}{\omega_2} \right) L = \left((10^6 + 10^4) - \frac{10^{12}}{(10^6 + 10^4)} \right) L = 19900.L$$

$$\Rightarrow |Z_{\omega_1}| \approx |Z_{\omega_2}| = Z$$

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = -\varphi$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{I} = \frac{100}{R} \angle 0 + \frac{25}{Z} \angle \varphi + \frac{25}{Z} \angle -\varphi$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sru tầm bởi Trần Văn Thương

Vậy:

$$\begin{aligned}i_{AM}(t) &= \frac{100}{R} \cos 10^6 t + \frac{25}{Z} \cos((10^6 - 10^4)t + \varphi) + \frac{25}{Z} \cos((10^6 + 10^4)t - \varphi) \\&= \frac{100}{R} \cos 10^6 t + \frac{25}{Z} \cos(10^6 t - (10^4 t - \varphi)) + \frac{25}{Z} \cos(10^6 t + (10^4 t - \varphi)) \\&= \frac{100}{R} \cos 10^6 t + \frac{50}{Z} \cos(10^4 t - \varphi) \cdot \cos 10^6 t \\&= \left(\frac{100}{R} + \frac{50}{Z} \cos(10^4 t - \varphi) \right) \cdot \cos 10^6 t\end{aligned}$$

Đường bao của tín hiệu dòng điện $i_{AM}(t)$ là: $\frac{100}{R} + \frac{50}{Z} \cos(10^4 t - \varphi)$

Đường bao của tín hiệu điện áp $u_{AM}(t)$ là: $100 + 50 \cos 10^4 t$

Theo đề: đường bao của tín hiệu dòng điện $i_{AM}(t)$ bị dịch chuyển so với đường bao của tín hiệu điện áp $u_{AM}(t)$ một góc $\frac{\pi}{3}$ nên ta có: $\varphi = \frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow \left| \arctg \frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R} \right| = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{20000 \cdot L}{R} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{L}{R} = \frac{\sqrt{3}}{20000}$$

Hệ số phẩm chất:

$$Q = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{10^6 \sqrt{3}}{20000} = 50\sqrt{3}$$

b)

$$C = 2nF = 2 \cdot 10^{-9} F$$

Ta có:

$$\omega_o L = \frac{1}{\omega_o C} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = \frac{1}{10^{12} \cdot 2 \cdot 10^{-9}} = 0,5 \cdot 10^{-3} H = 0,5 mH$$

$$R = \frac{20000}{\sqrt{3}} L = \frac{20000}{\sqrt{3}} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = \frac{10}{\sqrt{3}} \Omega$$

$$i_{AM}(t) = \left(\frac{100}{R} + \frac{50}{Z} \cos(10^4 t - \varphi) \right) \cdot \cos 10^6 t \text{ [A]}$$

Hệ số độ sâu điều chế dòng điện $i_{AM}(t)$ là:

$$m_i = \frac{\frac{50}{Z}}{\frac{100}{R}} = \frac{50R}{100Z} = 0,5 \cdot \frac{\frac{10}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + (20000 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3})^2}} = 0,25$$

Kết luận: a) $Q = 50\sqrt{3}$ b) $L = 0,5 mH$, $R = \frac{10}{\sqrt{3}} \Omega$, $m_i = 0,25$

TÓM TẮT LÝ THUYẾT TÍN HIỆU

1. Chương 1: Các khái niệm cơ bản

Câu 1.1: Tín hiệu là gì? Trình bày các cơ sở phân loại tín hiệu? Phân loại tín hiệu?

Trả lời:

- Khái niệm: Tín hiệu là biểu hiện vật lý của tin tức mà nó mang từ nguồn tin đến nơi nhận tin.
- Tín hiệu xác định và ngẫu nhiên:

Tín hiệu xác định là tín hiệu mà quá trình thời gian của nó được biểu diễn bằng các hàm thực hay phức theo thời gian. Ví dụ: Tín hiệu điện áp $u(t) = 10 \sin(300t + 45^\circ)$.

Tín hiệu ngẫu nhiên là tín hiệu mà quá trình thời gian của nó không thể biểu diễn bằng các hàm thời gian như tiếng nói, âm nhạc, hình ảnh,.....

- Tín hiệu liên tục và rời rạc:

Có thể tiến hành rời rạc thang giá trị hoặc thang thời gian và tương ứng ta sẽ có các tín hiệu sau:

- Tín hiệu có giá trị liên tục theo thời gian liên tục được gọi là tín hiệu tương tự.
- Tín hiệu có giá trị rời rạc theo thời gian liên tục được gọi là tín hiệu lượng tử.
- Tín hiệu có giá trị liên tục theo thời gian rời rạc, được gọi là tín hiệu rời rạc.
- Tín hiệu có giá trị và thời gian đều rời rạc được gọi là tín hiệu số.

- Các tín hiệu khác:

Dựa vào các thông số đặc trưng cho tín hiệu, người ta còn phân loại như sau:

- Tín hiệu năng lượng và công suất
- Tín hiệu tần thấp, tần cao, dải rộng, dải hẹp.
- Tín hiệu có thời gian hữu hạn và vô hạn.
- Tín hiệu có giá trị hữu hạn.
- Tín hiệu nhân quả.

Câu 1.2: Định nghĩa và chức năng của lý thuyết truyền tin (LTTT)?

Trả lời:

- Định nghĩa: LTTT là lý thuyết ngẫu nhiên của tin tức, có nghĩa là nó xét đến tính chất bất ngờ của tin tức đối với người nhận tin.

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thượng

- Chức năng: LTTT nghiên cứu các phương pháp mã hoá tín tức nghĩa là tìm ra các quy tắc để biểu diễn tín tức nhằm sử dụng hữu hiệu kênh truyền, tăng tính chống nhiễu và bảo đảm tính bí mật tín tức

Câu 1.3: Định nghĩa và Tính chất của tín hiệu vật lý?

Trả lời: Một tín hiệu là biểu diễn của một quá trình vật lý, do đó nó phải là một tín hiệu vật lý thực hiện được và phải toả mãn các yêu cầu sau:

- ✓ Có năng lượng hữu hạn
- ✓ Có biên độ hữu hạn
- ✓ Biên độ là hàm liên tục
- ✓ Có phổ hữu hạn và tiến tới 0 khi tần số $\rightarrow \infty$

Câu 1.4: Định nghĩa tín hiệu xác định và tín hiệu ngẫu nhiên?

Trả lời:

- Tín hiệu xác định là tín hiệu mà quá trình biến thiên của nó được biểu diễn bằng một hàm toán học xác định. Ví dụ: Tín hiệu điện áp $u(t) = 10 \sin(300t + 45^\circ)$.
- Tín hiệu ngẫu nhiên là tín hiệu mà quá trình biến thiên không biết trước được \rightarrow không thể biểu diễn bằng các hàm toán học xác định mà chỉ sử dụng các công cụ thống kê như thời gian như tiếng nói, âm nhạc, hình ảnh,.....

Câu 1.5: Định nghĩa và dấu hiệu nhận biết tín hiệu năng lượng?

Trả lời:

- Định nghĩa: Tín hiệu năng lượng là tín hiệu có năng lượng hữu hạn
- Nhận biết:
 - ✓ $x(t)$ tồn tại hữu hạn trong khoảng thời gian t
 - ✓ $x(t)$ tồn tại vô hạn nhưng $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Câu 1.6: Định nghĩa và dấu hiệu nhận biết tín hiệu công suất?

Trả lời:

- Định nghĩa: Tín hiệu công suất là tín hiệu có công suất trung bình hữu hạn.
- Nhận biết:
 - ✓ $x(t)$ tồn tại hữu hạn trong khoảng thời gian t
 - ✓ $x(t)$ tồn tại vô hạn nhưng $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \neq 0$

Câu 1.7: Phân loại tín hiệu năng lượng và tín hiệu rời rạc?

Trả lời: Có 4 loại:

- Tín hiệu có biên độ và thời gian liên tục được gọi là tín hiệu tương tự (Analog).
- Tín hiệu có biên độ rời rạc và thời gian liên tục được gọi là tín hiệu lượng tử.
- Tín hiệu có biên độ liên tục và thời gian rời rạc được gọi là tín hiệu rời rạc.
- Tín hiệu có biên độ và thời gian rời rạc được gọi là tín hiệu số (Digital).

2. Chương 2: Phân tích miền thời gian

Câu 2.1: Trình bày các thông số đặc trưng của tín hiệu?

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Trả lời:

a. Tích phân tín hiệu.

- Với tín hiệu tồn tại trong khoảng thời gian hữu hạn (t_1 - t_2)

$$[x] = \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

- Với tín hiệu tồn tại vô hạn ($-\infty, +\infty$):

$$[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt$$

b. Tri trung bình của tín hiệu

- Với tín hiệu thời hạn hữu hạn:

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt}{t_2 - t_1} = \frac{[x]}{T}$$

- Với các tín hiệu có thời gian vô hạn:

$$\langle x \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)dt$$

- Tín hiệu tuần, chu kỳ T:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt$$

c. Năng lượng của tín hiệu.

Năng lượng tín hiệu được định nghĩa bởi tích phân của bình phương tín hiệu:

$$E_x = [x^2]$$

- Với tín hiệu có thời hạn hữu hạn

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt$$

- Và tín hiệu có thời hạn vô hạn

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thượng

d. Công suất trung bình của tín hiệu.

- Với tín hiệu có thời hạn hữu hạn:

$$P_x = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt}{t_2 - t_1} = \frac{[x]}{T}$$

- Với các tín hiệu có thời hạn vô hạn:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt$$

- Với tín hiệu tuần hoàn, chu kỳ T:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

Câu 2.2: Tín hiệu phân bố được dùng trong những trường hợp nào?

Trả lời:

- Phân bố được dùng như một mô hình toán học cho một loại tín hiệu nào đó.
- Phân bố được dùng để mô tả các phép toán tác động lên tín hiệu ví dụ như phép rời rạc tín hiệu hay lặp tuần hoàn tín hiệu
- Phân bố được dùng để mô tả phổ của tín hiệu trong trường hợp tín hiệu không có phổ Fourier thông thường. Ví dụ như bước nhảy đơn vị, tín hiệu tuần hoàn và nhiều tín hiệu có năng lượng không xác định

Câu 2.3: Định nghĩa và tính chất của phân bố Delta Diract?

Trả lời:

- Định nghĩa:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , t \neq 0 \\ \infty & , t = 0 \end{cases}$$

và $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

- Tính chất:

1) Tính chất chẵn:

$$\delta(t) = \delta(-t)$$

2) Tính chất rời rạc.

$$x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t)$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thượng

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0)$$

3) Tính chất lặp :

$$\begin{aligned} x(t) * \delta(t) &= x(t) \\ x(t) * \delta(t - t_0) &= x(t - t_0) \end{aligned}$$

Câu 2.4: Định nghĩa và tính chất của phân bố lược?

Trả lời:

- Định nghĩa:
$$x(t) = \frac{1}{T} III\left(\frac{t}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- Tính chất:

1) Tính chất chẵn:

$$III(t) = III(-t)$$

2) Tính chất rời rạc:

$$x(t) \cdot \frac{1}{T} III\left(\frac{t}{T}\right) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

3) Tính chất lặp tuần hoàn:

$$x(t) * \frac{1}{T} III\left(\frac{t}{T}\right) = x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT)$$

Câu 2.5: Khái niệm, tính chất hàm tương quan và tự tương quan của tín hiệu? Ý nghĩa của hàm tự tương quan?

Trả lời:

1) Hàm tương quan của tín hiệu năng lượng:

- Cho hai tín hiệu năng lượng $x(t)$, $y(t)$

Hàm tương quan chéo:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) y^*(t) dt$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) x^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} y(t + \tau) x^*(t) dt$$

Hàm tự tương quan:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) x^*(t) dt$$

- Tính chất:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{xy}^*(-\tau)$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}^*(-\tau)$$

Nếu $x(t)$ là hàm thực $\rightarrow \varphi_{xx}$: hàm chẵn

$$\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

\rightarrow Năng lượng tín hiệu chính bằng giá trị hàm tự tương quan tại $\tau = 0$

2) Hàm tương quan của tín hiệu công suất:

a) Tín hiệu tuần hoàn

- Cho hai tín hiệu tuần hoàn $x(t)$, $y(t)$

Hàm tương quan chéo:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) y^*(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t + \tau) y^*(t) dt$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) x^*(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t + \tau) x^*(t) dt$$

Hàm tự tương quan:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) x^*(t - \tau) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t + \tau) x^*(t) dt$$

- Tính chất:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}^*(-\tau)$$

$$\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}^*(-\tau)$$

Nếu $x(t)$ là hàm thực $\rightarrow \varphi_{xx}$: hàm chẵn

$$|\varphi_{xx}(\tau)| \leq \varphi_{xx}(0)$$

$$P_x = \varphi_{xx}(0)$$

\rightarrow Công suất của tín hiệu tuần hoàn chính bằng giá trị hàm tự tương quan tại $\tau = 0$

b) Tín hiệu có công suất trung bình hữu hạn:

- Cho hai tín hiệu $x(t)$, $y(t)$

Hàm tương quan chéo:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tam bởi Trần Văn Thương

$$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y^*(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y^*(t) dt$$

$$\varphi_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) x^*(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t + \tau) x^*(t) dt$$

- Hàm tự tương quan:

$$\varphi_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x^*(t - \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) x^*(t) dt$$

- ❖ Ý nghĩa: -Hàm tự tương quan: thể hiện sự tương quan (phụ thuộc) giữa các giá trị ở các thời điểm khác nhau của một quá trình ngẫu nhiên ($R(x_1, x_2, t_1, t_2)$).
-Hàm tương quan (hay tương quan chéo): thể hiện sự tương quan giữa các giá trị của hai quá trình ngẫu nhiên ở các thời điểm khác nhau ($R(x_1, x_2, t_1, t_2)$).

Khi $R=0$ thì điều đó có nghĩa là các giá trị ở các thời điểm tương ứng là không tương quan (độc lập thống kê)

Câu 2.6: Có bao nhiêu cách tính P_x , E_x , trình bày cụ thể ?

Trả lời:

- Có 3 cách tính E_x :

$$E_x = [x^2]$$

$$E_x = \varphi_{xx}(0)$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d(\omega).$$

- 3 cách tính P_x :

$$P_x = \langle x^2 \rangle$$

$$P_x = \Psi_{xx}(0)$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu suu tầm bởi Trần Văn Thượng

$$P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) d(\omega)$$

Câu 2.7: Tín hiệu trực giao được hiểu như thế nào?

Trả lời: Hai tín hiệu $X(t)$ và $Y(t)$ được gọi là trực giao với nhau trên $[t_1, t_2]$ khi tích vô hướng của chúng bằng không.

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Câu 2.8: Ưu điểm của phân tích tín hiệu so với phân tích thời gian, phân tích tương quan, phân tích thống kê?

Trả lời:

- Sử dụng để phân tích nhiều loại tín hiệu: tín hiệu xác định, tín hiệu ngẫu nhiên...
- Cơ sở lý thuyết được phân tích đầy đủ
- Có mối liên hệ với các phương pháp khác như phân tích thời gian, phân tích tương quan.....
- Có biểu diễn vật lý rõ ràng

3. Chương 3: Phân tích miền tần số

Câu 3.1: Định nghĩa bề rộng phổ? Phân loại tín hiệu dựa vào bề rộng phổ?

Trả lời:

- Bề rộng phổ của tín hiệu là dải tần số (dương hoặc âm) tập trung công suất của tín hiệu.
- Ký hiệu: B , xác định theo công thức:

$$B = f_2 - f_1$$

Trong đó: $0 \leq f_1 < f_2$, f_2 : tần số giới hạn trên của tín hiệu.

- Dựa vào bề rộng phổ có thể phân loại tín hiệu:
 - ✓ Tín hiệu tần số thấp.
 - ✓ Tín hiệu tần số cao.
 - ✓ Tín hiệu dải hẹp.
 - ✓ Tín hiệu dải rộng

Câu 3.2: Định nghĩa và tính chất của phổ?

Trả lời:

- Định nghĩa:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (\text{Biến đổi thuận})$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tam bởi Trần Văn Thương

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{Biến đổi ngược})$$

$X(\omega)$ được gọi là phổ của tín hiệu $x(t)$. Ký hiệu: $x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$

$X(\omega)$ là phổ của một hàm phức \rightarrow phân tích ra thành các thành phần

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad X(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$X(\omega)$: phổ biên độ

$P(\omega)$: phổ thực

$\varphi(\omega)$: phổ pha

$Q(\omega)$: phổ ảo

• Tính chất:

1) Tính chất chẵn lẻ:

Nếu $x(t)$ là tín hiệu thực, thì:

Phổ thực là hàm chẵn: $P(\omega) = P(-\omega)$

phổ ảo là hàm lẻ: $Q(\omega) = -Q(-\omega)$

Và,

phổ biên độ là hàm chẵn: $|X(\omega)| = |X(-\omega)|$

phổ pha là hàm lẻ: $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$

2) Tính chất tuyến tính:

Nếu: $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$, $y(t) \leftrightarrow Y(\omega)$

Thì $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(\omega) + bY(\omega)$

3) Tính chất đối ngẫu:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

4) Tính chất thay đổi thang đo:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow x\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow |a| X(a\omega); a \neq 0;$$

5) Tính chất dịch chuyển trong miền thời gian:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

6) Tính chất dịch chuyển trong miền tần số:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow \begin{cases} x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \\ x(t) e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega + \omega_0) \end{cases}$$

\rightarrow Tính chất điều chế:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

$$x(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

$$x(t) \sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2j} [X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)]$$

Câu 3.3: Phổ của tín hiệu tuần hoàn có dạng gì? Cách xác định X_n trong phổ của tín hiệu tuần hoàn?

Trả lời:

- Phổ của tín hiệu tuần hoàn có dạng

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

- Xác định X_n trong phổ của tín hiệu tuần hoàn

✓ Cách 1: Sử dụng công thức

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

✓ Cách 2:

Xét tín hiệu $X_T(t)$ trong một chu kỳ $T, t[t_0, t_0+T]$

Xác định $X_T(\square)$ dùng biến đổi Fourier cho $X_t(t)$

$$X_n = X_T\left(\frac{n\omega_0}{T}\right)$$

4. Chương 4: Truyền tín hiệu qua mạch tuyến tính

Câu 4.1: Định nghĩa và tính chất và ý nghĩa của tích chập?

Trả lời:

- Định nghĩa: Tích chập giữa hai tín hiệu $x(t)$ và $y(t)$, ký hiệu: $x(t)*y(t)$, được xác định như sau:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

- Tính chất:

1. Tính chất giao hoán:

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

2. Tính chất kết hợp:

$$x(t) * [y(t) * z(t)] = [x(t) * y(t)] * z(t)$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

3. Tính chất phân phối:

$$x(t) * [y(t) + z(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

4. Nhân với hằng số:

$$a[x(t) * y(t)] = [ax(t)] * y(t) = x(t) * [ay(t)]$$

5. Liên hệ với hàm tương quan:

$$\varphi_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

- Ý nghĩa: Tích chập giúp xác định tác động của hệ thống lên tín hiệu ngõ vào. Nghĩa là nó giúp xác định tín hiệu ngõ ra của hệ thống LTI khi biết tín hiệu ngõ vào và đáp ứng xung của hệ thống.

Câu 4.2: Định nghĩa hệ thống bất biến LTI?

Trả lời:

Hệ thống bất biến LTI là hệ thống thỏa mãn đồng thời tính chất tuyến tính và bất biến.

- Tính chất tuyến tính:

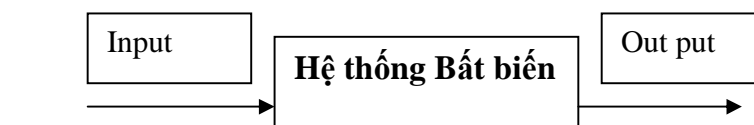


Nếu: $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$
 $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

Thì:

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \rightarrow a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t), (\forall a_1, a_2)$$

- Tính chất bất biến:



Nếu: $x(t) \rightarrow y(t)$

Thì: $x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$

Câu 4.3: Biểu thức quan hệ các đặc trưng ngõ vào – ngõ ra của mạch tuyến tính?

Trả lời:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

$$\begin{array}{ccc} \text{Input} & \xrightarrow[\begin{smallmatrix} X(\omega) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} x(t) \end{smallmatrix}} & \boxed{\frac{h(t)}{H(\omega)}} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} Y(\omega) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} y(t) \end{smallmatrix}} \text{Output} \end{array}$$

Trong miền thời gian:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Trong miền tần số:

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega)$$

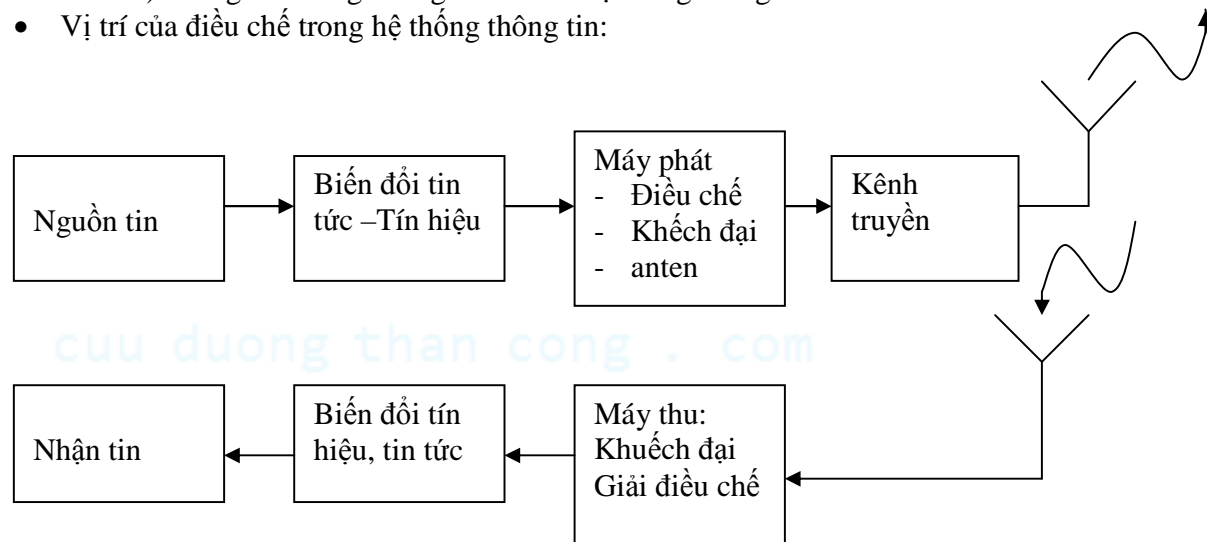
5. Chương 5: Tín hiệu điều chế

Trả lời:

Câu 5.1: Điều chế là gì? Mục đích điều chế? Tầm quan trọng của điều chế tín hiệu trong hệ thống thông tin?

Trả lời:

- Điều chế là quá trình ánh xạ tín tức vào sóng mang bằng cách thay đổi thông số của sóng mang (biên độ, tần số hay pha) theo tín tức. Điều chế đóng vai trò rất quan trọng không thể thiếu trong hệ thống thông tin.
- Mục đích:
 - 1) Tạo ra tín hiệu phù hợp với kênh truyền. Để có thể bức xạ tín hiệu vào không gian dưới dạng sóng điện từ.
 - 2) Cho phép tạo nhiều kênh truyền. và sử dụng hữu hiệu kênh truyền.
 - 3) Tăng khả năng chống nhiễu cho hệ thống thông tin
- Vị trí của điều chế trong hệ thống thông tin:



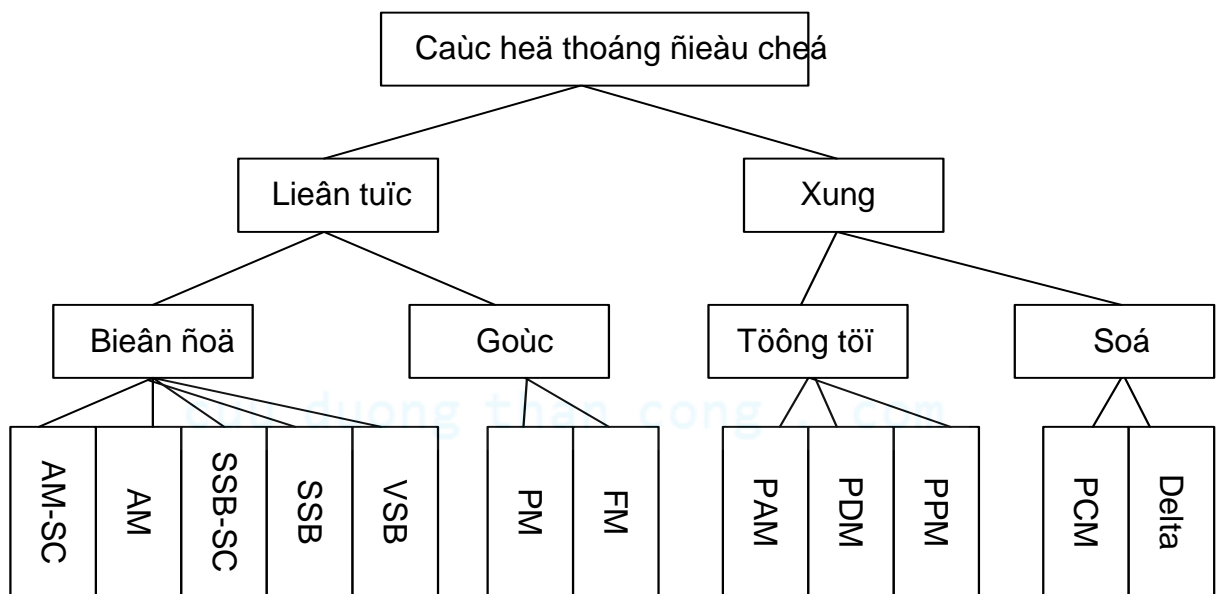
Câu 5.2: Phân loại các phương pháp điều chế tín hiệu?

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

Trả lời:

Có 2 phương pháp điều chế tín hiệu là điều chế xung và điều chế liên tục

- Trong các hệ thống điều chế liên tục, tín tức sẽ tác động làm thay đổi các thông số của sóng mang điều hoà như: biên độ, tần số và góc pha. Sóng mang có các thông số thay đổi ngẫu nhiên theo tín tức được gọi là tín hiệu bị điều chế – tín hiệu điều chế.
- Trong các hệ thống điều chế xung, tín tức tác động làm thay đổi các thông số của dãy xung như: biên độ, chu kỳ (vị trí) và độ rộng. Dãy xung vuông góc tuần hoàn có các thông số thay đổi ngẫu nhiên theo tín tức được gọi là tín hiệu bị điều chế – tín hiệu điều chế.



Câu 5.3: Sóng mang là gì? Trong thực tế người ta thường dùng mấy loại sóng mang?

Trả lời:

- Trong hệ thống điều chế xung: sóng mang là các dãy xung vuông góc tuần hoàn, tín tức sẽ làm thay đổi các thông số của nó là biên độ, độ rộng và vị trí xung.
- Trong thực tế thì người ta thường dùng hai loại sóng mang là dao động điều hòa cao tần hoặc các dãy xung.

Câu 5.4: Tại sao lại phải điều chế tín hiệu trước khi truyền đi xa?

Trả lời: Tín tức thường có tần số thấp, không thể truyền đi xa được. Để truyền đi xa, người ta phải tìm cách ghép nó với tín hiệu có tần số cao, gọi là sóng mang. Quá trình này gọi là điều chế tín hiệu cao tần.

Câu 5.5: Sự khác nhau khi điều chế tín hiệu AM, FM, PM?

Trả lời:

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Điều chế tín hiệu AM, FM, PM đều là loại điều chế tương tự nhằm mục đích là điều chế tín hiệu thông tin vào sóng cao tần để có thể chuyển tín hiệu thông tin đi xa. Ba loại điều chế này có các đặc điểm:

- Giống nhau: đều chuyển phổ của tín hiệu thông tin vào sóng mang cao tần để truyền đi.
- Khác nhau: Khi điều chế tín hiệu:
 - ✓ AM thì tín hiệu thông tin sẽ được điều chế vào biên độ của sóng mang hay nói đúng hơn là nó làm thay đổi biên độ của sóng mang.
 - ✓ FM thì tín hiệu thông tin sẽ được điều chế vào tần số của sóng mang.
 - ✓ PM thì tín hiệu thông tin sẽ được điều chế vào pha của sóng mang.

Câu 5.6: Ưu và nhược điểm của sóng FM?

Trả lời:

- Sóng FM có nhiều ưu điểm về mặt tần số, dải tần âm thanh sau khi tách sóng điều tần có chất lượng rất tốt, cho âm thanh trung thực và có thể truyền âm thanh Stereo, sóng FM ít bị can nhiễu hơn so với sóng AM.
- Nhược điểm của sóng FM là cự ly truyền sóng ngắn, chỉ truyền được cự ly từ vài chục đến vài trăm Km, do đó sóng FM thường được sử dụng làm sóng phát thanh trên các địa phương.

Câu 5.7: Tại sao PM dải hẹp điều hòa tương đương với AM? FM và PM có thể hoán đổi cho nhau được không? Tại sao?

Trả lời:

Dạng tín hiệu AM:

$$y_{AM}(t) = [A + x(t)] \cos \Omega t$$

Quan hệ trong miền tần số

$$Y_{AM}(\omega) = A\pi [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] + \frac{1}{2} [X(\omega - \Omega) + X(\omega + \Omega)]$$

$$\Psi_{AM}(\omega) = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] + \frac{1}{4} [\Psi_X(\omega - \Omega) + \Psi_X(\omega + \Omega)]$$

Dạng tín hiệu số PM dải hẹp:

$$Y_{PM}(t) = Y [\cos \Omega t - k_p X \sin \omega t \cdot \sin \Omega t]$$

$$= Y [\cos \Omega t - \frac{1}{2} k_p X \cos(\Omega - \omega)t + \frac{1}{2} k_p X \cos(\Omega + \omega)t]$$

Quan hệ miền tần số:

$$Y_{NBPM}(\omega) = Y\pi [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] - \frac{Y}{2j} k_p [X(\omega - \Omega) + X(\omega + \Omega)]$$

$$\Psi_{NBPM}(\omega) = \frac{Y^2 \pi}{2} [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] + \frac{(Y k_p)^2}{4} [\Psi_X(\omega - \Omega) + \Psi_X(\omega + \Omega)]$$

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sơ tầm bởi Trần Văn Thương

Ta thấy tín hiệu PM dải hẹp tương đương với tín hiệu AM có độ sâu điều chế $m = k_p X$, nó chính bằng độ lệch pha của tín hiệu PM. Sự khác nhau chỉ ở chỗ, pha của dải dưới của tín hiệu PM dải hẹp khác pha của dải dưới tín hiệu AM một góc π .

Câu 5.8: Sự khác nhau giữa tín hiệu PM và FM?

Trả lời:

Tín hiệu	Tín hiệu FM	Tín hiệu PM
1.	Pha tức thời tỷ lệ với tích phân của tín hiệu	Pha tức thời tỷ lệ trực tiếp vào $x(t)$
2.	Tần số tỷ lệ trực tiếp vào $x(t)$	Tần số tỷ lệ với đạo hàm của $x(t)$
3.	Tín hiệu tin tức làm biến đổi tần số tức thời \rightarrow biến đổi pha tức thời	Tín hiệu tin tức biến đổi \rightarrow pha tức thời biến đổi \rightarrow tần số tức thời biến đổi
4.	Được điều chế bởi tín hiệu $x(t)$	Được điều chế bởi $\int x(t)dt$

Câu 5.9: Tại sao gọi biểu thức $2x(t)\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)$ là biểu thức điều chế?

Trả lời: Bởi vì trong điều chế biên độ thì người ta giữ nguyên $\theta(t)$ nên sóng mang sau điều chế có dạng $y(t) = Y(t)\cos(\omega_0 t + \phi)$

Câu 5.10: Trong điều chế tương tự thế nào là điều biên, điều pha?

Trả lời: Trong điều chế tương tự:

- Gọi là điều biên khi ta cho pha tức thời của sóng mang điều chế giữ nguyên.
- Gọi là điều pha khi ta cho biên độ tức thời trong sóng mang điều chế giữ

Bài tập Lý Thuyết Tín Hiệu sưu tầm bởi Trần Văn Thương

nguyên

- ✓ Sóng mang ban đầu $y(t)=Y\cos(\Omega t+\varphi)$
- ✓ Sóng mang sau điều chế $y(t)=Y(t)\cos(\theta(t))$

Câu 5.11: Sự khác nhau căn bản giữa điều chế liên tục và điều chế xung?

Trả lời:

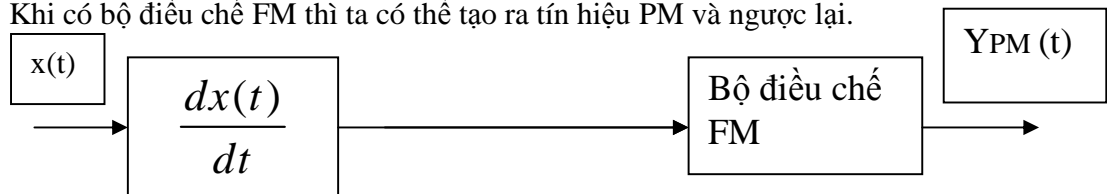
Sự khác nhau căn bản giữa điều chế liên tục và điều chế xung là ở chỗ:

- Hệ thống điều chế liên tục tín hiệu được truyền đi liên tục theo thời gian.
- Hệ thống điều chế xung, tín hiệu tin tức chỉ được truyền trong khoảng thời gian có xung.

Câu 5.12: Mối quan hệ giữa hệ thống FM và PM? Ưu điểm của hai hệ thống so với AM

Trả lời:

- Mối quan hệ:
Khi có bộ điều chế FM thì ta có thể tạo ra tín hiệu PM và ngược lại.



- Ưu điểm:
 - ✓ Khả năng chống nhiễu cao hơn AM
 - ✓ Băng thông tín hiệu PM và FM rộng hơn nhiều so với AM