CHƯƠNG 5:
BIẾN ĐỔI Z VÀ CÁC ỨNG DỤNG TRONG PHÂN TÍCH HỆ THỐNG THỜI GIAN RỜI RẠC.

ThS. Đinh Thị Thái Mai - UET - VNU

- Biến đổi Z của tín hiệu thời gian rời rạc.
- Biến đổi Z ngược.
- Hàm truyền của hệ thống LTI thời gian rời rạc.
- Phân tích hệ thống.

5.1 Biến đổi Z của tín hiệu thời gian rời rạc.

- Biến đổi Z hai phía của một tín hiệu rời rạc $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(z) = \mathrm{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

trong đó, z là một biến phức → Biến đổi Z chuyển một tín hiệu thời gian rời rạc sang không gian phức (mặt phẳng z).

- Biến đổi Z của $x(n)$ tồn tại nếu chuỗi biến đổi trên hội tụ.

5.1 Biến đổi Z của tín hiệu thời gian rời rạc.

- Biến đổi Z một phía của một tín hiệu rời rạc $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(z) = \mathrm{Z}^1[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

- Biến đổi Z hai phía và một phía của tín hiệu nhân quả là giống nhau.

5.1 Biến đổi Z của tín hiệu thời gian rời rạc

Vùng hội tụ của biến đổi Z

- Vùng hội tụ (ROC) của biến đổi Z là tập các giá trị của z sao cho chuỗi biến đổi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ hội tụ.

- Tiêu chuẩn hội tụ của biến đổi Z dựa trên định lý Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n} < 1 \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x(n) < \infty$$

Lưu ý: Định lý Cauchy chỉ áp dụng cho chuỗi có dạng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 \ldots$$

5.1 Biến đổi Z của tín hiệu thời gian rời rạc

Vùng hội tụ của biến đổi Z

- Tiêu chuẩn hội tụ của biến đổi Z đạt được bằng cách áp dụng định lý Cauchy:

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

trong đó:

$$R_{x-} = \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n}$$

$$R_{x+} = 1/\lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{1/n}$$

- ROC của biến đổi Z là miền được bao bởi hai đường tròn có bán kính R_{x-} và R_{x+} tương ứng trong mặt phẳng Z.

5.1 Biến đổi Z của tín hiệu thời gian rời rạc.

Vùng hội tụ của biến đổi Z

- ROC của biến đổi Z của một số tín hiệu đặc biệt:
  - ✓ Các tín hiệu có chiều dài hữu hạn: ROC là toàn bộ mặt phẳng Z trừ gốc tọa độ ($R_{x-} = 0, R_{x+} = \infty$).
  - ✓ Các tín hiệu nhân quả có chiều dài vô hạn: ROC là toàn bộ mặt phẳng phía ngoài đường tròn có bán kính R_{x-}($R_{x+} = \infty$).
  - ✓ Tín hiệu phản nhân quả có chiều dài vô hạn: ROC là toàn bộ miền bên trong đường tròn có bán kính R_{x+} ngoại trừ gốc tọa độ ($R_{x-} = 0$).
- ROC của biến đổi Z một phía là ROC của biến đổi Z hai phía của tín hiệu nhân quả.

5.1 Biến đổi Z của tín hiệu thời gian rời rạc.

Các tính chất của biến đổi Z

- Tính tuyến tính:

$$\mathrm{Z}[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha\,\mathrm{Z}[x_1(n)] + \beta\mathrm{Z}[x_2(n)]$$

- Tính dịch thời:

$$\mathrm{Z}[x(n-n_0)] = z^{-n_0}X(z)$$

- Co dãn trong mặt phẳng Z:

$$Z[a^n x(n)] = X(a^{-1}z)$$

với ROC là: $|a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$

5.1 Biến đổi Z của tín hiệu thời gian rời rạc.

Các tính chất của biến đổi Z

- Tính phản xạ:

$$\mathrm{Z}[x(-n)] = X(z^{-1})$$

với ROC là: $\frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$

- Vi phân mặt phẳng z:

$$\mathrm{Z}[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

- Tích chập:

$$Z[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(z)X_2(z)$$

- Tính tương quan:

$$Z\left[r_{x_1x_2}(n)\right] = X_1(z)X_2(z^{-1})$$

5.1 Biến đổi Z của tín hiệu thời gian rời rạc.

Các tính chất của biến đổi Z một phía.

- Tính trễ thời gian:

$$\mathrm{Z}^1[x(n-k)] = z^{-k}X^1(z) + \sum_{m=1}^{k} x(-m)z^{m-k}\ (k>0)$$

- Tăng thời gian:

$$\mathrm{Z}^1[x(n+k)] = z^{k}X^1(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x(m)z^{-m+k}\ (k>0)$$

- Định lý giá trị cuối:

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X^1(z)$$

nếu ROC của $(z-1)X^1(z)$ chứa đường tròn đơn vị trong mặt phẳng Z.

5.2 Biến đổi Z ngược

- Định lý tích phân Cauchy:

$$\frac{1}{j2\pi}\oint_C z^{n-1}dz = \begin{cases} 1(n=0) \\ 0(n\neq 0) \end{cases}$$

trong đó, *C* là một đường khép kín theo chiều dương bao xung quanh tọa độ góc trong mặt phẳng Z.

- Biến đổi Z ngược được tính bằng cách áp dụng định lý tích phân Cauchy:

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

5.2 Biến đổi Z ngược

Tính toán Biến đổi Z ngược

Cách 1: Sử dụng lý thuyết thặng dư Cauchy (1)

- Cho $\{z_{p_k}\}$ là các điểm cực của $X(z)z^{n-1}$ nằm bên trong đường cong khép kín ***C***, khi đó:

$$x(n) = \sum_k Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{p_k}}\right]$$

- Nếu điểm cực z_{p_k} là điểm cực đơn, thì thặng dư được tính như sau:

$$Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{p_k}}\right] = \left(z - z_{p_k}\right)X(z)z^{n-1}|_{z=z_{p_k}}$$

5.2 Biến đổi Z ngược

Tính toán Biến đổi Z ngược
Cách 1: Sử dụng lý thuyết thặng dư Cauchy (2)

- Nếu điểm cực z_{p_k} là điểm cực đơn, thì thặng dư được tính như sau:

$$Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{p_k}}\right] = \left(z - z_{p_k}\right)X(z)z^{n-1}|_{z=z_{p_k}}$$

- Nếu z_{p_k} là điểm cực bội, với số lần lặp là s_k, khi đó thặng dư là:

$$Res\left[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{p_k}}\right] = \frac{1}{(s_k-1)!}\frac{d^{s_k-1}}{dz^{s_k-1}}\left[\left(z - z_{p_k}\right)^{s_k}X(z)z^{n-1}\right]|_{z=z_{p_k}}$$

5.2 Biến đổi Z ngược

Tính toán Biến đổi Z ngược

Cách 2: Phương pháp khai triển chuỗi lũy thừa.

- Nếu $X(z)$ có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa của z^{-1} như sau:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^{-n}$$

khi đó ta có $x(n) = \alpha_n$.

- Phương pháp: sử dụng phép chia đa thức
- Lưu ý: ROC của $X(z)$ quyết định dạng của chuỗi lũy thừa.

5.2 Biến đổi Z ngược

Tính toán Biến đổi Z ngược
Cách 3: Phương pháp khai triển đa thức hữu tỷ (1).

- Không mất tính tổng quát, giả thiết $X(z)$ được biểu diễn ở dạng một đa thức hữu tỷ $\frac{N(z)}{D(z)}$ ($N(z)$ và $D(z)$ là các đa thức và $N(z)$ có bậc thấp hơn bậc của $D(z)$).
- $\{z_{p_k}\}$ là các điểm cực của X(z): $\{z_{p_k}\}$ là các nghiệm của phương trình $D(z) = 0$.

5.2 Biến đổi Z ngược

Tính toán Biến đổi Z ngược

Cách 3: Phương pháp khai triển đa thức hữu tỷ (2).

- Nếu $\{z_{p_k}\}$ khác nhau, khai triển đa thức của $X(z)$ như sau:

$$X(z) = \sum_k \frac{A_k}{z - z_{p_k}}$$

trong đó, các hệ số $\{A_k\}$ được tính như sau:

$$A_k = (z - z_{p_k})X(z)|_{z=z_{p_k}}$$

5.2 Biến đổi Z ngược

Tính toán Biến đổi Z ngược

Cách 3: Phương pháp khai triển đa thức hữu tỷ (3).

- Trong trường hợp $X(z)$ có các điểm cực bội, gọi s_k là số lần lặp của điểm cực bội z_{p_k}, khi đó khai triển đa thức của $X(z)$ như sau:

$$X(z) = \sum_k \sum_{s=1}^{s_k} \frac{A_k}{\left(z - z_{p_k}\right)^s}$$

trong đó, các hệ số $\{A_{k_s}\}$ được tính như sau:

$$A_{k_s} = \frac{1}{(s_k - s)!} \frac{d^{s_k - s}\left(z - z_{p_k}\right)^{s_k} X(z)}{dz^{s_k - s}} \Big|_{z = z_{p_k}}$$

5.2 Biến đổi Z ngược

Một số biến đổi Z ngược của đa thức hữu tỷ (1).

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{z-\alpha}\right] = \begin{cases} \alpha^n u(n) & (|z| > |\alpha|) \\ -\alpha^n u(-n-1) & (|z| < |\alpha|) \end{cases}$$

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right] = \begin{cases} \alpha^{n-1} u(n-1) & (|z| > |\alpha|) \\ -\alpha^{n-1} u(-n) & (|z| < |\alpha|) \end{cases}$$

5.2 Biến đổi Z ngược

Một số biến đổi Z ngược của đa thức hữu tỷ (2).

$$Z^{-1}\left[\frac{z}{(z-\alpha)^{m+1}}\right] = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}\alpha^{n-m}u(n) & (|z|>|\alpha|) \\ -\dfrac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}\alpha^{n-m}u(-n-1) & (|z|<|\alpha|) \end{cases}$$

Lưu ý: Sẽ dễ tính biến đổi Z ngược nếu ta khai triển $X(z)/z$ thay cho X(z)

5.2 Biến đổi Z ngược

Mối quan hệ với biến đổi Fourier.

- Biến đổi Fourier của một tín hiệu thời gian rời rạc $x(n)$ là biến đổi Z trên vòng tròn đơn vị của mặt phẳng Z → biến đổi Fourier của $x(n)$ tồn tại nếu ROC của biến đổi Z chứa vòng tròn đơn vị.
- Ứng dụng: Tính biến đổi Fourier và biến đổi Fourier ngược của tín hiệu thời gian rời rạc thông qua biến đổi Z và biến đổi Z ngược tương ứng.

5.3 Hàm truyền của hệ thống LTI thời gian rời rạc

Định nghĩa hàm truyền.

- Xét một hệ thống LTI thời gian rời rạc có đáp ứng xung $h(n)$, tức là:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

- Thực hiện biến đổi Z cả hai phía của phương trình trên và áp dụng tính chất tích chập của biến đổi Z để đạt được:

$$Y(z) = H(z)X(z) \rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- $H(z)$ được gọi là hàm truyền của hệ thống.

5.3 Hàm truyền của hệ thống LTI thời gian rời rạc

Định nghĩa hàm truyền.

- Một hệ thống LTI thời gian rời rạc thường được biểu diễn bởi một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng có dạng như sau:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r\, x(n-r)$$

- Thực hiện biến đổi Z cả hai phía của phương trình trên, ta có:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\, Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\, X(z)$$

5.3 Hàm truyền của hệ thống LTI thời gian rời rạc

Định nghĩa hàm truyền.

- Hàm truyền của hệ thống khi đó được xác định như sau:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Hàm truyền xác định một hệ thống, và dựa trên việc giải phương trình sai phân sử dụng biến đổi Z và biến đổi Z ngược:

$$y(n) = Z^{-1}[H(z)X(z)]$$

5.3 Hàm truyền của hệ thống LTI thời gian rời rạc

Hàm truyền của hệ thống kết hợp.

- Hệ thống kết nối nối tiếp

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

- Hệ thống kết nối song song:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

- Hệ thống có phản hồi âm:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

- Hệ thống có phản hồi dương:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}$$

5.3 Hàm truyền của hệ thống LTI thời gian rời rạc

Giải phương trình sai phân tuyến tính .

- Cho một hệ thống LTI thời gian rời rạc được biểu diễn bởi phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng như sau:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$

- Thực hiện biến đổi Z một phía cho cả hai vế của phương trình trên, ta có:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} Y^1(z) + I(z) = \sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j} X^1(z)$$

Trong đó, $I(z)$ bao gồm các điều kiện đầu tại $n = -1, -2, \dots, -N$.

5.3 Hàm truyền của hệ thống LTI thời gian rời rạc

Giải phương trình sai phân tuyến tính .

- Nhắc lại: đáp ứng $y(n)$ của một hệ thống LTI thời gian rời rạc là nghiệm tổng quát của một phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng, gồm có đáp ứng khởi đầu và đáp ứng trạng thái 0:

$$y(n) = y_0(n) + y_s(n)$$

hoặc:

$$Y^1(z) = Y^1{}_0(\mathrm{z}) + Y^1{}_s(\mathrm{z})$$

5.3 Hàm truyền của hệ thống LTI thời gian rời rạc

Giải phương trình sai phân tuyến tính .

- Đáp ứng trạng thái 0 với một tín hiệu nhân quả (tức là, $X^1(z) = X(z)$):

$$y_s(n) = Z^{-1}\left[\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} X(z)\right] = Z^{-1}[H(z)X(z)]$$

- Đáp ứng khởi đầu:

$$y_0(n) = -Z^{-1}\left[\frac{I(z)}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}\right]$$

5.4 Phân tích hệ thống

Phân tích tính ổn định.

- Một hệ thống LTI thời gian rời rạc ổn định nếu và chỉ nếu hàm truyền của nó hội tụ khi $|z| = 1 \rightarrow$ ROC của $H(z)$ phải chứa đường tròn đơn vị, tức là, $R_{h-} < 1 < R_{h+}$.

- Với hệ thống nhân quả: $R_{h+} = \infty \rightarrow$ điều kiện để hệ thống ổn định là $R_{h-} < 1 \rightarrow$ tất cả các điểm cực của $H(z)$ phải nằm bên trong đường tròn đơn vị.

5.4 Phân tích hệ thống

Phân tích tính ổn định.

- Một phương pháp khác để phân tích tính ổn định của một hệ thống nhân quả thời gian rời rạc được biểu diễn bởi hàm truyền: **Tiêu chuẩn Jury**

  - ✓ Không cần phải giải phương trình đặc trưng để tìm các điểm cực.
  - ✓ Bảng Jury được tạo ra từ các hệ số của đa thức đặc trưng. Bảng này được sử dụng để xác định tính ổn định của hệ thống.