CHƯƠNG I
Giới Thiệu về Tín Hiệu và Hệ Thống
Bài 1: Tín hiệu

Lê Vũ Hà

Trường Đại học Công nghệ - ĐHQGHN

2017

- Đại lượng vật lý *mang thông tin* về một hiện tượng vật lý.
- Hàm của một hay nhiều biến
  - Tín hiệu âm thanh: hàm của thời gian (tín hiệu một chiều).
  - Ảnh động (hình chiếu của một khung cảnh động lên một mặt phẳng ảnh): hàm của ba biến *x, y, t*.

Tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc

- Tín hiệu theo thời gian liên tục:
  - Được biểu diễn dưới dạng hàm của biến thời gian liên tục.
- Tín hiệu theo thời gian rời rạc:
  - Giá trị chỉ xác định tại những thời điểm rời rạc.
  - Có thể được tạo ra bằng cách *lấy mẫu* tín hiệu liên tục tại những thời điểm rời rạc, thường là với một tốc độ đều đặn.

Tín hiệu liên tục và tín hiệu rời rạc theo giá trị

- Tín hiệu liên tục theo giá trị: có thể nhận bất cứ giá trị nào trong một khoảng liên tục (hữu hạn hay vô hạn).
- Tín hiệu rời rạc theo giá trị: chỉ nhận được các giá trị từ một tập giá trị rời rạc (hữu hạn hay vô hạn).

Tín hiệu tương tự và tín hiệu số

- Tín hiệu tương tự: liên tục cả theo thời gian và theo giá trị.
- Tín hiệu số: rời rạc theo thời gian và chỉ nhận các giá trị từ một tập giá trị hữu hạn $\rightarrow$ giá trị của tín hiệu số đã được *lượng tử hóa*.

- Tín hiệu tuần hoàn: tự lặp lại sau một khoảng thời gian nhất định, nghĩa là, $\exists T > 0 : f(t + T) = f(t)$.
  - *Chu kỳ cơ sở* của một tín hiệu tuần hoàn: giá trị nhỏ nhất của T thỏa mãn điều kiện trên.
- Tín hiệu không tuần hoàn: không tồn tại giá trị nào của T thỏa mãn điều kiện trên.

- Tín hiệu nhân quả: $\forall t < 0 : f(t) = 0$.
- Tín hiệu phản nhân quả: $\forall t > 0 : f(t) = 0$.
- Tín hiệu phi nhân quả: có các giá trị khác không trong cả miền âm và miền dương của trục thời gian.

- Tín hiệu chẵn: $f(t) = f(-t)$.
- Tín hiệu lẻ: $f(t) = -f(-t)$.
- Một tín hiệu bất kỳ có thể biểu diễn bằng tổng của một tín hiệu chẵn và một tín hiệu lẻ:

$$f(t) = f_{even}(t) + f_{odd}(t)$$

ở đó:

$$\begin{aligned} f_{even}(t) &= \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \\ f_{odd}(t) &= \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)] \end{aligned}$$

- Tín hiệu xác định: giá trị tại bất cứ thời điểm nào đều xác định được chính xác bởi một công thức toán học hay một bảng tra cứu.
- Tín hiệu ngẫu nhiên: chứa những yếu tố không thể xác định trước thời điểm giá trị của tín hiệu thực sự xuất hiện $\rightarrow$ không thể xác định chính xác giá trị của tín hiệu tại các thời điểm trong tương lai.

- Tín hiệu đa kênh: được biểu diễn dưới dạng vector với các thành phần là các tín hiệu đơn kênh

$$\mathbf{F}(t) = [f_1(t)\ f_2(t)\ \ldots\ f_N(t)]$$

- Tín hiệu đa chiều: hàm của nhiều biến độc lập

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

- Tín hiệu thuận chiều:

$$\forall t < t_0 < \infty : f(t) = 0$$

- Tín hiệu ngược chiều:

$$\forall t > t_0 > -\infty : f(t) = 0$$

- Tín hiệu có độ dài hữu hạn: miền xác định hữu hạn, nghĩa là, $\exists -\infty < t_1 < t_2 < \infty : f(t) = 0$ nếu $t \notin [t_1, t_2]$.
- Tín hiệu có độ dài vô hạn: miền xác định vô hạn.

- Năng lượng của một tín hiệu liên tục theo thời gian $f(t)$ được định nghĩa như sau:

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

- Năng lượng của một tín hiệu rời rạc theo thời gian $f(t)$ được định nghĩa như sau:

$$E_f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f[n]|^2$$

- Tín hiệu có năng lượng hữu hạn được gọi là tín hiệu năng lượng.
- Tín hiệu tuần hoàn không phải tín hiệu năng lượng: năng lượng của tín hiệu tuần hoàn luôn vô hạn.
- Tín hiệu xác định có độ dài hữu hạn là tín hiệu năng lượng.

- Công suất của tín hiệu được định nghĩa là năng lượng trung binh của tín hiệu theo thời gian.
- Với tín hiệu liên tục theo thời gian $f(t)$, công suất được xác định như sau:

$$P_f = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

- Với tín hiệu rời rạc theo thời gian $f(n)$, công suất được xác định như sau:

$$P_f = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{i=-N}^{N} |f[n]|^2$$

- Công suất của tín hiệu tuần hoàn liên tục theo thời gian $f(t)$ với chu kỳ T bằng năng lượng trung bình trong một chu kỳ:

$$P_f = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$$

- Công suất của tín hiệu tuần hoàn rời rạc theo thời gian $f(n)$ với chu kỳ N bằng năng lượng trung bình trong một chu kỳ:

$$P_f = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} |f[n]|^2$$

- Tín hiệu có công suất khác không và hữu hạn được gọi là tín hiệu công suất.
- Tín hiệu năng lượng không thể là tín hiệu công suất: công suất của tín hiệu năng lượng luôn bằng không.
- Tín hiệu công suất không thể là tín hiệu năng lượng: năng lượng của tín hiệu công suất luôn vô hạn (ví dụ: tín hiệu tuần hoàn).

- Trễ: dịch tín hiệu theo hướng thuận với trục thời gian, nghĩa là, $f(t) \rightarrow f(t - T)$ $(T > 0)$.
- Tiến: dịch tín hiệu theo hướng ngược với trục thời gian, nghĩa là, $f(t) \rightarrow f(t + T)$ $(T > 0)$.

- Nhân biến thời gian với một giá trị sẽ làm thay đổi *bề rộng* của tín hiệu.
- Co tín hiệu: $f(t) \to f(at)$ $(a > 1)$.
- Giãn tín hiệu: $f(t) \to f(at)$ $(0 < a < 1)$.

- Phép lật tín hiệu thu được bằng cách thay biến thời gian t bằng $-t$, nghĩa là, $f(t) \to f(-t)$.
- Ảnh lật của một tín hiệu chẵn vẫn là chính tín hiệu đó.
- Ảnh lật của một tín hiệu lẻ là âm bản chính tín hiệu đó.

- Tín hiệu xung đơn vị liên tục theo thời gian, ký hiệu $\delta(t)$, được định nghĩa bở hàm Dirac:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t \neq 0) \\ \neq 0 & (t = 0) \end{cases} \text{ và } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

- Tín hiệu xung đơn vị rời rạc theo thời gian, ký hiệu $\delta[n]$, được định nghĩa như sau:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

- Tín hiệu nhảy mức đơn vị liên tục theo thời gian, ký hiệu $u(t)$, được định nghĩa như sau:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

- Tín hiệu nhảy mức đơn vị rời rạc theo thời gian, ký hiệu $u[n]$, được định nghĩa như sau:

$$u[n] = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ 1 & (n \geq 0) \end{cases}$$

- Tín hiệu dốc liên tục theo thời gian được định nghĩa như sau:

$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t \geq 0) \end{cases}$$

hay $r(t) = tu(t)$.

- Tín hiệu dốc rời rạc theo thời gian được định nghĩa như sau:

$$r[n] = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ n & (n \geq 0) \end{cases}$$

hay $r[n] = nu[n]$.

- Tín hiệu dạng sin thực liên tục theo thời gian có thể biểu diễn được dưới dạng sau:

$$s(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

  trong đó, A là biên độ, ω là tần số góc (rad/s), và ϕ là pha (rad) của tín hiệu. Chu kỳ của tín hiệu tuần hoàn này là $T = 2\pi/\omega$.
- Tín hiệu nói trên còn có thể biểu diễn được dưới dạng hàm của biến tần số $f = 1/T$ (Hz):

$$s(t) = A\cos(2\pi f t + \phi)$$

- Tín hiệu dạng sin thực rời rạc theo thời gian có thể biểu diễn được dưới dạng sau:

$$s[n] = A\cos(\Omega n + \phi)$$

trong đó, Ω là tần số góc (rad/chu kỳ lấy mẫu).

- Tín hiệu rời rạc theo thời gian này có thể tuần hoàn hay không tuần hoàn. Để tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ N, điều kiện sau cần được thỏa mãn: $\Omega N = 2\pi m$ với m là một giá trị nguyên nào đó.

- Tín hiệu hàm mũ thực liên tục theo thời gian có thể biểu diễn được dưới dạng sau:

$$f(t) = Ae^{\alpha t}$$

trong đó, A và α là các giá trị thực.
Nếu $\alpha > 0$, $f(t)$ là một hàm mũ tăng; nếu $\alpha < 0$, $f(t)$ là một hàm mũ suy biến.

- Tín hiệu hàm mũ phức liên tục theo thời gian có thể biểu diễn được dưới dạng sau:

$$f(t) = Ae^{(\sigma + j\omega)t}$$

- Quan hệ giữa tín hiệu dạng sin và tín hiệu hàm mũ phức: sử dụng công thức Euler cho $e^{j\omega t}$, ta thu được dạng biểu diễn sau đây cho tín hiệu hàm mũ phức:

$$f(t) = Ae^{\sigma t}[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]$$

- $f(t)$ là một hàm phức với phần thực và phần ảo được tính như sau (nếu A thực):

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[f(t)] &= Ae^{\sigma t}\cos(\omega t) \\ \mathrm{Im}[f(t)] &= Ae^{\sigma t}\sin(\omega t)] \end{aligned}$$

- $f(t)$ còn được gọi là tín hiệu *dạng sin phức* với *biên độ phức $Ae^{\sigma t}$* và tần số góc ω.
- Biên độ thực của $f(t)$ là $|A|e^{\sigma t}$ và góc pha là ϕ, trong đó:

$$|A| = \sqrt{\mathrm{Re}(A)^2 + \mathrm{Im}(A)^2} \text{ and } \phi = \arctan\frac{\mathrm{Im}(A)}{\mathrm{Re}(A)}$$