

Biểu diễn của tín hiệu và hệ thống trong miền tần số

NGUYEN Hong Thinh

Signal and System Laboratory
FET-UET-VNU

Ngày 29 tháng 10 năm 2020

Bổ túc toán

Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

1 Bổ túc toán

2 Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Tính chất của chuỗi Fourier

Số phức

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Có các cách nào biểu diễn số phức?

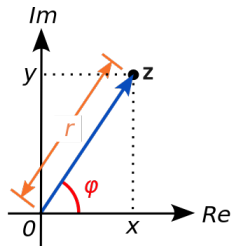
- $z = x + j.y = (x, y)$
 - x : Phần thực (Real) = $\text{Re}(z)$
 - y : Phần ảo (Image) = $\text{Im}(z)$

- $x = r.\cos(\varphi), y = r.\sin(\varphi)$
- then $z = r.\cos(\varphi) + j.r.\sin(\varphi)$
- **Biên độ (Amplitude)**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} = |z|$$

- **Pha (Phase)**

$$\varphi = \text{atan}(y/x) = \text{atan}(\text{Im}(z)/\text{Re}(z)) = \Phi(z)$$



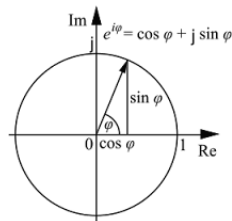
Công thức Euler:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Công thức Euler:

■ $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j.\sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$



Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

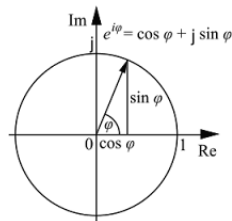
Công thức Euler:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Công thức Euler:

- $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j.\sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$
- $e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j.\sin(-\varphi)$



Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

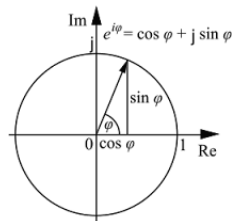
Công thức Euler:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Công thức Euler:

- $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j.\sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$
- $e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j.\sin(-\varphi)$
- hay $e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j.\sin(\varphi)$



Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

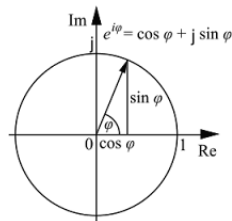
Công thức Euler:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Công thức Euler:

- $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j.\sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$
- $e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j.\sin(-\varphi)$
- hay $e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j.\sin(\varphi)$
- Do đó:



Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

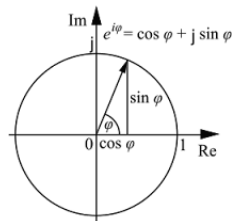
Công thức Euler:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Công thức Euler:

- $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j.\sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$
- $e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j.\sin(-\varphi)$
- hay $e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j.\sin(\varphi)$
- Do đó:
- $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$



Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

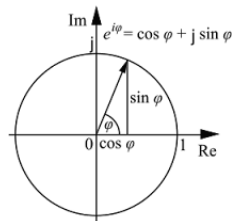
Công thức Euler:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Công thức Euler:

- $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j.\sin(\varphi)$, với $\varphi \in R$
- $e^{-j\varphi} = \cos(-\varphi) + j.\sin(-\varphi)$
- hay $e^{-j\varphi} = \cos(\varphi) - j.\sin(\varphi)$
- Do đó:
- $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$
- $\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$



Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Công thức Euler:

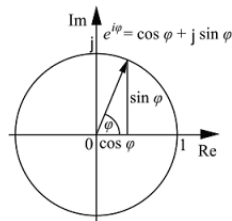
Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j.\sin(\varphi)$$

Hệ quả:

- $z = r.\cos(\varphi) + j.r.\sin(\varphi) = r.e^{j\varphi}$
- $z = |z|.e^{j\Phi(z)}$
- $|e^{j\varphi}| = 1$; số phức $e^{j\varphi}$ thuộc đường tròn đơn vị
- $e^{j0} = 1, e^{j\pi} = -1, e^{j.2\pi} = 1$
- $e^{j\pi/2} = j, e^{-j.\pi/2} = -j$
- $e^{j\varphi} = e^{j\varphi}.e^{j2\pi} = e^{j(\varphi+2\pi)}$, hay $e^{j\varphi}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π



Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

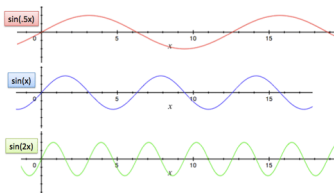
Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier



Định nghĩa

- $\exists 0 < T < \infty: x(t) = x(t+T)$
- $\exists N \in \mathbb{N}, 0 < N < \infty: x(n) = x(n+N)$
- Chu kỳ: T (or N)
- Tần số: $f = \frac{1}{T}$ (or $\frac{1}{N}$) (Hz)
- Tần số: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (or $\frac{2\pi}{N}$) $= 2\pi f$ (Rad/s)
- Trong chương trình, khi nhắc đến tần số, nghĩa là ω

Tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

■ $e^{j\omega t} = e^{j\omega(t + \frac{2\pi}{\omega})}$ với $\forall t$ nên $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $e^{j\omega t} = e^{j\omega(t + \frac{2\pi}{\omega})}$ với $\forall t$ nên $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- hay $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với tần số ω

Tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $e^{j\omega t} = e^{j\omega(t + \frac{2\pi}{\omega})}$ với $\forall t$ nên $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- hay $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với tần số ω
- Tương tự $e^{j\omega n}$ tuần hoàn với tần số ω

Tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $e^{j\omega t} = e^{j\omega(t + \frac{2\pi}{\omega})}$ với $\forall t$ nên $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- hay $e^{j\omega t}$ tuần hoàn với tần số ω
- Tương tự $e^{j\omega n}$ tuần hoàn với tần số ω
- $e^{j\omega t}, e^{j\omega n}$ là đại lượng cơ bản **đặc trưng cho tần số ω**

2 Biểu diễn của tín hiệu tuần hoàn trong miền tần số

- Công thức khai triển chuỗi Fourier
- Phổ của tín hiệu
- Examples
- Tính chất của chuỗi Fourier

Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Định lý Fourier

- **Mọi** tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin có tần số là **số nguyên lần tần số cơ bản**
- $x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở T , tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ thì:

Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Định lý Fourier

- Mọi tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin có tần số là **số nguyên lần tần số cơ bản**
- $x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở T , tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ thì:
- $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)],$$

Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Định lý Fourier

- Mọi tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin có tần số là **số nguyên lần tần số cơ bản**
- $x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở T , tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ thì:
- $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)],$$
- Tương tự với thời gian rời rạc: $x(n)$ là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở N , tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ thì:

Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Định lý Fourier

- Mọi tín hiệu tuần hoàn có thể phân tích thành tổ hợp tuyến tính của các tín hiệu dạng sin có tần số là **số nguyên lần tần số cơ bản**
- $x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở T , tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ thì:
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)],$$
- Tương tự với thời gian rời rạc: $x(n)$ là tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở N , tần số cơ bản là $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ thì:
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 n) + b_k \sin(k\omega_0 n)],$$

Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

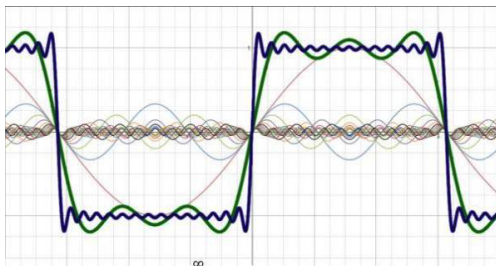
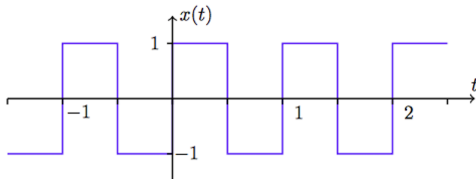
Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier



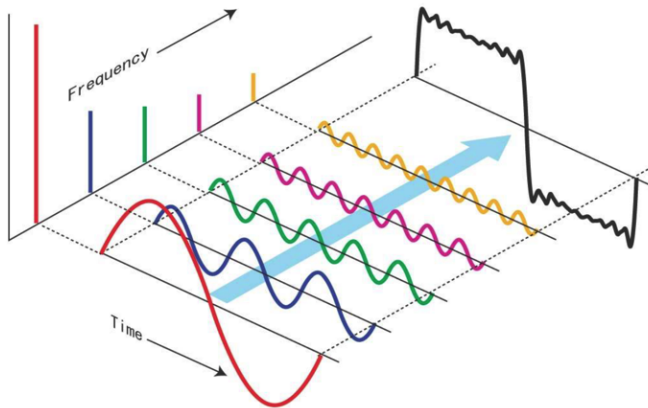
$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin 2\pi(2k+1)t$$

Biểu diễn tần số

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Biểu diễn tín hiệu tần số = Phân tích tín hiệu thành tổ hợp
tuyến tính các \sin/\cos



Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Biểu diễn tần số

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

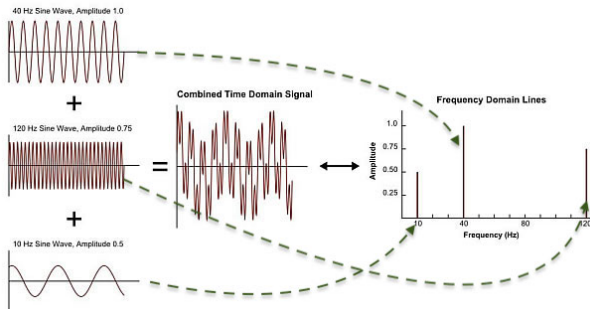
Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Biểu diễn tín hiệu trong miền tần số:

- Tín hiệu đã cho có các tần số nào?
- Độ lớn của mỗi thành phần tần số đó?



Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Trong miền thời gian LIÊN TỤC

- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$
- $e^{jk\omega_0 t}$ đặc trưng cho tần số $k\omega_0$
- $X(k)$ lớn hay nhỏ \sim thành phần tần số $k.\omega_0$ trong $x(t)$ lớn hay nhỏ

Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Trong miền thời gian LIÊN TỤC

- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) e^{jk\omega_0 t}$
- $e^{jk\omega_0 t}$ đặc trưng cho tần số $k\omega_0$
- $X(k)$ lớn hay nhỏ \sim thành phần tần số $k.\omega_0$ trong $x(t)$ lớn hay nhỏ
- \Rightarrow Đây là công thức biểu diễn tần số của tín hiệu $x(t)$ vì:
 - Chỉ ra tín hiệu $x(t)$ chứa tần số $k.\omega_0$, k nguyên
 - Độ lớn tần số $k.\omega_0$ là $X(k)$

Khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Trong miền thời gian LIÊN TỤC

- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$
- $e^{jk\omega_0 t}$ đặc trưng cho tần số $k\omega_0$
- $X(k)$ lớn hay nhỏ \sim thành phần tần số $k.\omega_0$ trong $x(t)$ lớn hay nhỏ
- \Rightarrow Đây là công thức biểu diễn tần số của tín hiệu $x(t)$ vì:
 - Chỉ ra tín hiệu $x(t)$ chứa tần số $k.\omega_0$, k nguyên
 - Độ lớn tần số $k.\omega_0$ là $X(k)$
- $X(k)$: hệ số khai triển chuỗi Fourier $x(t)$:
(Xem sách Simon Haykin)

$$X(k) = \frac{1}{T} \int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RỜI RẠC

■ Định lý Fourier:

$$x(n) = \sum_k X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RỜI RẠC

- Định lý Fourier:

$$x(n) = \sum_k X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

- $e^{jk\omega_0 n} = e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = e^{jn \frac{2\pi}{N} k} e^{j2n\pi} = e^{jn \frac{2\pi}{N} (k+N)} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$
(do $e^{j2k\pi} = 1 \forall n \in N$)

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RỜI RẠC

- Định lý Fourier:

$$x(n) = \sum_k X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

- $e^{jk\omega_0 n} = e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = e^{jn \frac{2\pi}{N} k} e^{j2n\pi} = e^{jn \frac{2\pi}{N} (k+N)} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$
(do $e^{j2k\pi} = 1 \forall n \in N$)
- Vậy $e^{j\omega_0 nk} = e^{j\omega_0 n(k+N)}$, hay $e^{jk\omega_0 n}$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N với biến k

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RỜI RẠC

- Định lý Fourier:

$$x(n) = \sum_k X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

- $e^{jk\omega_0 n} = e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = e^{jn \frac{2\pi}{N} k} e^{j2n\pi} = e^{jn \frac{2\pi}{N} (k+N)} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$
(do $e^{j2k\pi} = 1 \forall n \in N$)
- Vậy $e^{j\omega_0 nk} = e^{j\omega_0 n(k+N)}$, hay $e^{jk\omega_0 n}$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N với biến k
- \Rightarrow Do đó $e^{jk\omega_0 n}$ chỉ có N dạng/giá trị khác nhau

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RỜI RẠC

- Định lý Fourier:

$$x(n) = \sum_k X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

- $e^{jk\omega_0 n} = e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = e^{jn \frac{2\pi}{N} k} e^{j2n\pi} = e^{jn \frac{2\pi}{N} (k+N)} = e^{j(k+N)\omega_0 n}$
(do $e^{j2k\pi} = 1 \forall n \in N$)

- Vậy $e^{j\omega_0 nk} = e^{j\omega_0 n(k+N)}$, hay $e^{jk\omega_0 n}$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N với biến k

- \Rightarrow Do đó $e^{jk\omega_0 n}$ chỉ có N dạng/giá trị khác nhau

■

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Trong miền thời gian RỜI RẠC

- Công thức khai triển chuỗi Fourier cho tín hiệu rời rạc tuần hoàn (DTFS)

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jk\omega_0 n}$$

- $X(k)$: hệ số khai triển chuỗi Fourier $x(n)$:

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

Phổ của tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

**Phổ của tín
hiệu**

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

- Từ $x(n)$, $x(t)$ xác định $X(k)$
- Biên độ:

$$|X(k)| = \sqrt{\text{Re}(X(k))^2 + \text{Im}(X(k))^2}$$

Phổ của tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

- Từ $x(n)$, $x(t)$ xác định $X(k)$
- Biên độ:

$$|X(k)| = \sqrt{\text{Re}(X(k))^2 + \text{Im}(X(k))^2}$$

- Pha:

$$\phi(X(k)) = \arctan[\text{Im}(X(k))/\text{Re}(X(k))]$$

Phổ của tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Phổ của tín hiệu

- Từ $x(n)$, $x(t)$ xác định $X(k)$
- Biên độ:

$$|X(k)| = \sqrt{\text{Re}(X(k))^2 + \text{Im}(X(k))^2}$$

- Pha:

$$\phi(X(k)) = \arctan[\text{Im}(X(k))/\text{Re}(X(k))]$$

- Đồ thị của $|X(k)|$ và $\phi(X(k))$ theo k hoặc $k\omega_0$ được gọi là **Phổ biên độ** và **Phổ pha** của tín hiệu

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

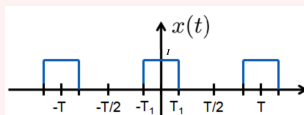
Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau



Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

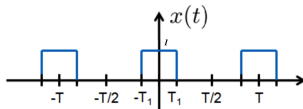
Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier



- $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $T \Rightarrow$ Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- Công thức tính hệ số Fourier:
- $$X(k) = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

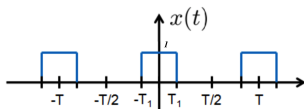
Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier



■ $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $T \Rightarrow$ Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

■ Công thức tính hệ số Fourier:

■
$$X(k) = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

■
$$X(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{e^{jk\omega_0 T/2} - e^{-jk\omega_0 T/2}}{jT\omega_0}$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

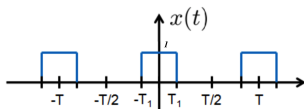
Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier



- $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $T \Rightarrow$ Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- Công thức tính hệ số Fourier:
- $$X(k) = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$
- $$X(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{e^{jk\omega_0 T/2} - e^{-jk\omega_0 T/2}}{jT\omega_0}$$
- $$X(k) = \frac{2\sin(k\omega_0 T/2)}{T\omega_0} = \frac{2T/2}{T} \text{sinc}(2k\pi \frac{T/2}{T})$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

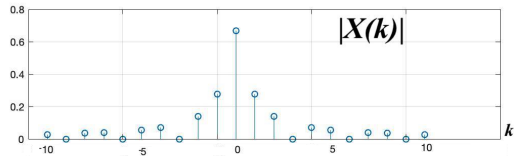
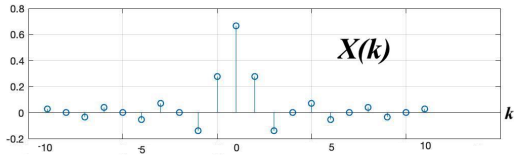
Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $X(k)$ là số thực; $\text{Re}(X(k)) = X(k)$, $\text{Im}(X(k)) = 0$;
 \Rightarrow Phổ pha = 0
- Phổ biên độ phụ thuộc vào tỉ số $\frac{T_1}{T}$. Giả sử $\frac{T_1}{T} = 1/3$:



Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

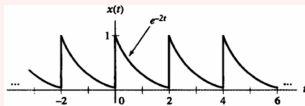
Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau



Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

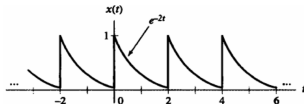
Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier



- $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2$
 \Rightarrow Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

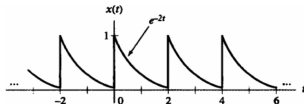
Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier



■ $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2$

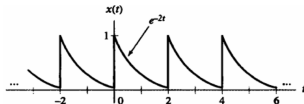
\Rightarrow Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

■
$$X(k) = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-2t} e^{-jk\pi t} dt$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh



Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2$
 \Rightarrow Tần số cơ bản: $\omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

- $$X(k) = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-2t} e^{-jk\pi t} dt$$

- $$X(k) = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-t(2+jk\pi)} dt = \frac{-1}{2(2+jk\pi)} (e^{-2(2+jk\pi)} - 1)$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

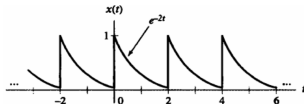
Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier



- $x(t)$ tuần hoàn với chu kỳ $T=2$

$$\Rightarrow \text{Tần số cơ bản: } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$$

- $X(k) = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-2t} e^{-jk\pi t} dt$

- $X(k) = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-t(2+jk\pi)} dt = \frac{-1}{2(2+jk\pi)} (e^{-2(2+jk\pi)} - 1)$

- $X(k) = \frac{1-e^{-4}}{2(2+jk\pi)}$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

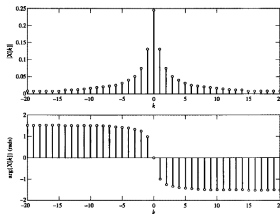
Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $X(k) = \frac{1-e^{-4}}{2(2+jk\pi)}$ là số phức \Rightarrow Muốn vẽ phổ biên độ, pha cần xác định phần thực phần ảo của $X(k)$
- $\text{Re}(X(k)) = \frac{1-e^{-4}}{4+k\pi^2}$
- $\text{Im}(X(k)) = \frac{k\pi(e^{-4}-1)}{8+2k\pi^2}$
- $\Rightarrow |X(k)|, \Phi(X(k))$ theo $\text{Re}(X(k)), \text{Im}(X(k))$



Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$

- $x(t)$ có sẵn dạng tổng của các tín hiệu sin và cos

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$

- $x(t)$ có sẵn dạng tổng của các tín hiệu sin và cos
- Thay vì dùng công thức tích phân, ta dùng trực tiếp công thức khai triển Fourier và công thức Euler

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$

- $x(t)$ có sẵn dạng tổng của các tín hiệu sin và cos
- Thay vì dùng công thức tích phân, ta dùng trực tiếp công thức khai triển Fourier và công thức Euler
- $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ $T=2$; $\omega_0 = \pi$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

$$\blacksquare x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$$

$$\blacksquare x(t) = e^{j0t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t}$$

(Euler)

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$

- $x(t) = e^{j0t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t}$
(Euler)

- Fourier: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

$$\blacksquare x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$$

$$\blacksquare x(t) = e^{j0t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t}$$

(Euler)

$$\blacksquare \text{Fourier: } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$$

$$\blacksquare \text{hay } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\pi t}$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

$$\blacksquare x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$$

$$\blacksquare x(t) = e^{j0t} + \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j3\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j3\pi t}$$

(Euler)

$$\blacksquare \text{Fourier: } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\omega_0 t}$$

$$\blacksquare \text{hay } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\pi t}$$

$$\blacksquare \text{Đồng nhất hệ số ta có: } X(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ \frac{1}{4}, k = \pm 2 \\ \frac{1}{2j}, k=3 \\ \frac{-1}{2j}, k=-3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

⇒ Muốn vẽ phổ biên độ, pha cần xác định phần thực phần ảo

Viết lại $X(k)$:
$$X(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ \frac{1}{4} + 0.j, k = \pm 2 \\ 0 + \frac{-j}{2}, k=3 \\ 0 + \frac{j}{2}, k=-3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$Re(X(k)) = \begin{cases} 1, k=0 \\ \frac{1}{4}, k = \pm 2 \\ 0, k = \pm 3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases} \quad Im(X(k)) = \begin{cases} 0, k = 0 \\ 0, k = \pm 2 \\ \frac{-1}{2}, k = 3 \\ \frac{1}{2}, k = -3 \\ 0, k \text{ còn lại} \end{cases}$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

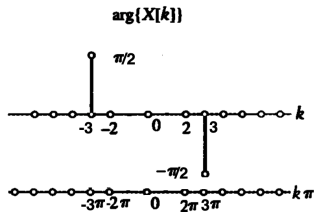
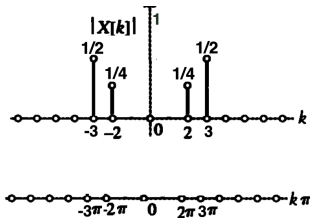
Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

$$|X(k)| = \begin{cases} 1, & k=0 \\ \frac{1}{4}, & k = \pm 2 \\ \frac{1}{2}, & k = \pm 3 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\Phi(X(k)) = \begin{cases} \arctan(0) = 0, & k = 0, \pm 2 \\ \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}, & k = 3 \\ \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}, & k = -3 \\ 0, & k \text{ còn lại} \end{cases}$$



Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Examples

Xác định các hệ số khai triển chuỗi Fourier và vẽ phổ của tín hiệu sau

$$\blacksquare x(n) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi n\right) + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

$$x(n) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi n\right) + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$$

- $x(n)$ có dạng tổng sin/cos nên ta sử dụng trực tiếp công thức khai triển Fourier và Euler (pp đồng nhất hệ số)

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

$$x(n) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi n\right) + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$$

- $x(n)$ có dạng tổng sin/cos nên ta sử dụng trực tiếp công thức khai triển Fourier và Euler (pp đồng nhất hệ số)
- $x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N=8$, $\omega_0 = \pi/4$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

$$x(n) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi n\right) + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$$

- $x(n)$ có dạng tổng sin/cos nên ta sử dụng trực tiếp công thức khai triển Fourier và Euler (pp đồng nhất hệ số)
- $x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N=8$, $\omega_0 = \pi/4$
- Theo Euler:

$$x(n) = e^{j0n} + e^{j\frac{1}{4}\pi n} + e^{-j\frac{1}{4}\pi n} + \frac{2}{j}e^{j\frac{1}{2}\pi n} - \frac{2}{j}e^{-j\frac{1}{2}\pi n}$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

$$x(n) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{4}\pi n\right) + 4\sin\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$$

- $x(n)$ có dạng tổng sin/cos nên ta sử dụng trực tiếp công thức khai triển Fourier và Euler (pp đồng nhất hệ số)
- $x(n)$ tuần hoàn với chu kỳ $N=8$, $\omega_0 = \pi/4$

- Theo Euler:

$$x(n) = e^{j0n} + e^{j\frac{1}{4}\pi n} + e^{-j\frac{1}{4}\pi n} + \frac{2}{j}e^{j\frac{1}{2}\pi n} - \frac{2}{j}e^{-j\frac{1}{2}\pi n}$$

- $$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=0}^7 X(k)e^{jk\frac{1}{4}\pi n}$$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

■ $e^{j\varphi}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{j\varphi} = e^{j(\varphi+2k\pi)}$ với $\forall \varphi$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $e^{j\varphi}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{j\varphi} = e^{j(\varphi+2k\pi)}$ với $\forall \varphi$
- Do đó: $e^{-j\frac{1}{4}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{4}\pi n+2\pi n)} = e^{j\frac{7}{4}\pi n}$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $e^{j\varphi}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{j\varphi} = e^{j(\varphi+2k\pi)}$ với $\forall \varphi$
- Do đó: $e^{-j\frac{1}{4}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{4}\pi n+2\pi n)} = e^{j\frac{7}{4}\pi n}$
- $e^{-j\frac{1}{2}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{2}\pi n+2\pi n)} = e^{j\pi n\frac{3}{2}} = e^{j\frac{6}{4}\pi n}$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $e^{j\varphi}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{j\varphi} = e^{j(\varphi+2k\pi)}$ với $\forall \varphi$
- Do đó: $e^{-j\frac{1}{4}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{4}\pi n+2\pi n)} = e^{j\frac{7}{4}\pi n}$
- $e^{-j\frac{1}{2}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{2}\pi n+2\pi n)} = e^{j\pi n\frac{3}{2}} = e^{j\frac{6}{4}\pi n}$
- Vậy: $x(n) = e^{j0} + e^{\frac{1}{4}j\pi n} + e^{j\frac{7}{4}\pi n} + \frac{2}{j}e^{\frac{2}{4}j\pi n} - \frac{2}{j}e^{j\frac{6}{4}\pi n}$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

- $e^{j\varphi}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{j\varphi} = e^{j(\varphi+2k\pi)}$ với $\forall \varphi$
- Do đó: $e^{-j\frac{1}{4}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{4}\pi n+2\pi n)} = e^{j\frac{7}{4}\pi n}$
- $e^{-j\frac{1}{2}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{2}\pi n+2\pi n)} = e^{j\pi n\frac{3}{2}} = e^{j\frac{6}{4}\pi n}$
- Vậy: $x(n) = e^{j0} + e^{\frac{1}{4}j\pi n} + e^{j\frac{7}{4}\pi n} + \frac{2}{j}e^{\frac{2}{4}j\pi n} - \frac{2}{j}e^{j\frac{6}{4}\pi n}$
- Đồng nhất hệ số: $x(n) = \sum_{k=0}^7 X(k)e^{jk\frac{1}{4}\pi n}$

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

■ $e^{j\varphi}$ tuần hoàn với chu kỳ 2π hay $e^{j\varphi} = e^{j(\varphi+2k\pi)}$ với $\forall \varphi$

■ Do đó: $e^{-j\frac{1}{4}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{4}\pi n+2\pi n)} = e^{j\frac{7}{4}\pi n}$

■ $e^{-j\frac{1}{2}\pi n} = e^{j(-\frac{1}{2}\pi n+2\pi n)} = e^{j\pi n\frac{3}{2}} = e^{j\frac{6}{4}\pi n}$

■ Vậy: $x(n) = e^{j0} + e^{\frac{1}{4}j\pi n} + e^{j\frac{7}{4}\pi n} + \frac{2}{j}e^{\frac{2}{4}j\pi n} - \frac{2}{j}e^{j\frac{6}{4}\pi n}$

■ Đồng nhất hệ số: $x(n) = \sum_{k=0}^7 X(k)e^{jk\frac{1}{4}\pi n}$

$$X(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 7 \\ \frac{2}{j}, & k = 2 \\ \frac{-2}{j}, & k = 6 \\ 0, & k \text{ khác hay } k=3,4,5 \end{cases}$$

Chú ý:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Xét

$$X(k + N) = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-j(k+N) \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \cdot e^{-j2\pi n}$$

$$\text{hay } X(k + N) = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \text{ do } e^{-j2\pi n} = 1$$

Như vậy: $X(k + N) = X(k)$ hay $X(k)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N

- Chỉ cần xác định giá trị của $X(k)$ trong 1 chu kỳ N , ta sẽ xác định được mọi giá trị khác của $X(k)$.

Chú ý:

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Xét

$$X(k + N) = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-j(k+N) \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \cdot e^{-j2\pi n}$$

$$\text{hay } X(k + N) = \frac{1}{N} \sum_N x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} \text{ do } e^{-j2\pi n} = 1$$

Như vậy: $X(k + N) = X(k)$ hay $X(k)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N

- Chỉ cần xác định giá trị của $X(k)$ trong 1 chu kỳ N , ta sẽ xác định được mọi giá trị khác của $X(k)$.
- Phổ của tín hiệu rời rạc tuần hoàn cũng có dạng rời rạc tuần hoàn, với chu kỳ N

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Tính chất

■ Tuyến tính :

x_1, x_2 là các tín hiệu tuần hoàn với tần số ω_0

$$x_1 \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X_1(k),$$

$$x_2 \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X_2(k)$$

$$\blacksquare \text{ Thì: } (a_1 x_1 + a_2 x_2) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} (a_1 X_1(k) + a_2 X_2(k))$$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Tính chất

■ Dịch thời gian:

■ $x(t) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$

thì $x(t - t_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k) \cdot e^{-jk\omega_0 t_0},$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Tính chất

■ Dịch thời gian:

$$\blacksquare x(t) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$$

$$\text{thì } x(t - t_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k) \cdot e^{-jk\omega_0 t_0},$$

$$\blacksquare x(n) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$$

$$x(n - n_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k) \cdot e^{-jk\omega_0 n_0}$$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Tính chất

■ Dịch thời gian:

$$■ x(t) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$$

$$\text{thì } x(t - t_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k) \cdot e^{-jk\omega_0 t_0},$$

$$■ x(n) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k)$$

$$x(n - n_0) \xrightarrow{\text{Fourier Series}} X(k) \cdot e^{-jk\omega_0 n_0}$$

- Phép dịch thời gian không làm thay đổi phổ biên độ của tín hiệu mới mà **chỉ làm dịch pha**

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Tính chất

- **Công suất (Định lý Parseval):** Công suất trung bình của tín hiệu tuần hoàn được xác định bằng tổng bình phương các hệ số khai triển chuỗi Fourier.

- $$P(x(t)) = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2,$$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Tính chất

- **Công suất (Định lý Parseval):** Công suất trung bình của tín hiệu tuần hoàn được xác định bằng tổng bình phương các hệ số khai triển chuỗi Fourier.

- $$P(x(t)) = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2,$$

- $$P(x(n)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Chuỗi Fourier cho tín hiệu tuần hoàn

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Tính chất

- **Công suất (Định lý Parseval):** Công suất trung bình của tín hiệu tuần hoàn được xác định bằng tổng bình phương các hệ số khai triển chuỗi Fourier.
- $$P(x(t)) = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |X(k)|^2,$$
- $$P(x(n)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2$$
- Đồ thị của $|X(k)|^2$ được gọi là **phổ công suất** của tín hiệu.

Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

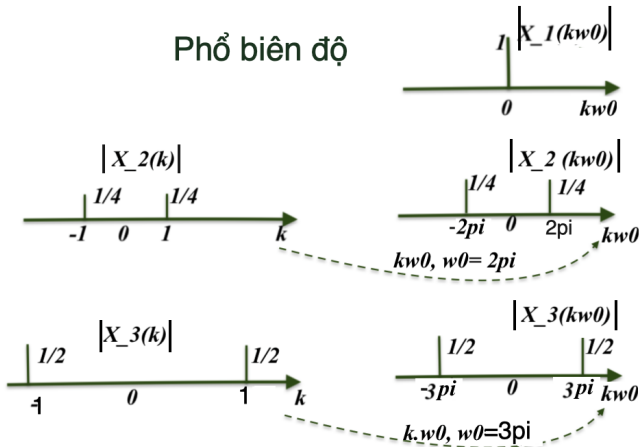
Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Với tín hiệu: $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$
 $T=1; w_0=2\pi$ $T=2/3; w_0=3\pi$

Phổ biên độ



Examples

Signals &
Systems

NGUYEN
Hong Thinh

Bổ túc toán

Biểu diễn
của tín hiệu
tuần hoàn
trong miền
tần số

Công thức khai
triển chuỗi
Fourier

Phổ của tín
hiệu

Examples

Tính chất của
chuỗi Fourier

Với tín hiệu: $x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\pi t) + \sin(3\pi t)$

