Ngày: 02/10/2021

LUYỆN TẬP MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ PHÂN LOẠI HỆ THỐNG DỰA TRÊN QUAN HỆ VÀO/RA, TÍNH ĐÁP ỨNG XUNG, ĐÁP ỨNG CỦA HỆ THỐNG

Phân loại hệ thống dựa trên quan hệ vào/ra

Bài 1: Bảng sau chứa quan hệ vào/ra của một số hệ thống tương tự và rời rạc, hãy trả lời có/không vào các đặc tính tương ứng, không xét các ô gạch chéo.

	Properties					
$y(t), y[n]$	Memoryless	Linear	Time-Invariant	Causal	Invertible	Stable
(a) $(2 + \sin t)x(t)$						
(b) $x(2t)$						
(c) $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$						
(d) $\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$						
(e) $\frac{dx(t)}{dt}$						
(f) $\max\{x[n], x[n-1], \ldots, x[-\infty]\}$						

Đáp án: 0,25 điểm/ý x 6 ý = 1,5 điểm

Memoryless:

(a) $y(t) = (2 + \sin t)x(t)$ is memoryless because $y(t)$ depends only on $x(t)$ and not on prior values of $x(t)$.

(d) $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{n} x[n]$ is not memoryless because $y[n]$ does depend on values of $x[\cdot]$ before the time instant n.

(f) $y[n] = \max\{x[n], x[n-1], \ldots, x[-\infty]\}$ is clearly not memoryless.

Linear:

(a)

$$\begin{aligned} y(t) &= (2 + \sin t)x(t) = T[x(t)], \\ T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= (2 + \sin t)[ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= a(2 + \sin t)x_1(t) + b(2 + \sin t)x_2(t) \\ &= aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] \end{aligned}$$

Therefore, $y(t) = (2 + \sin t)x(t)$ is linear.

(b)

$$\begin{aligned} y(t) &= x(2t) = T[x(t)], \\ T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= ax_1(2t) + bx_2(t) \\ &= aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] \end{aligned}$$

Therefore, $y(t) = x(2t)$ is linear.

(c)

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = T[x[n]], \\ T[ax_1[n] + bx_2[n]] &= a\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] + b\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2[k] \\ &= aT[x_1[n]] + bT[x_2[n]] \end{aligned}$$

Therefore, $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ is linear.

(d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ is linear (see part c).

(e)

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = T[x(t)], \\ T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= \frac{d}{dt}[ax_1(t) + bx_2(t)] \\ &= a\frac{dx_1(t)}{dt} + b\frac{dx_2(t)}{dt} = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] \end{aligned}$$

Therefore, $y(t) = dx(t)/dt$ is linear.

(f)

$$\begin{aligned} y[n] &= \max\{x[n], \ldots, x[-\infty]\} = T[x[n]], \\ T[ax_1[n] + bx_2[n]] &= \max\{ax_1[n] + bx_2[n], \ldots, ax_1[-\infty] + bx_2[-\infty]\} \\ &\neq a\max\{x_1[n], \ldots, x_1[-\infty]\} + b\max\{x_2[n], \ldots, x_2[-\infty]\} \end{aligned}$$

Therefore, $y[n] = \max\{x[n], \ldots, x[-\infty]\}$ is not linear.

Time-invariant:

(a)
$$y(t) = (2 + \sin t)x(t) = T[x(t)],$$
$$T[x(t - T_0)] = (2 + \sin t)x(t - T_0)$$
$$\neq y(t - T_0) = (2 + \sin (t - T_0))x(t - T_0)$$

Therefore, $y(t) = (2 + \sin t)x(t)$ is not time-invariant.

(b)
$$y(t) = x(2t) = T[x(t)],$$
$$T[x(t - T_0)] = x(2t - 2T_0) \neq x(2t - T_0) = y(t - T_0)$$

Therefore, $y(t) = x(2t)$ is not time-invariant.

(c)
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = T[x[n]],$$
$$T[x[n - N_0]] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k - N_0] = y[n - N_0]$$

Therefore, $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ is time-invariant.

(d)
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = T[x[n]],$$
$$T[x[n - N_0]] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k - N_0] = \sum_{l=-\infty}^{n-N_0} x[l] = y[n - N_0]$$

Therefore, $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{n} x[k]$ is time-invariant.

(e)
$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = T[x(t)],$$
$$T[x(t - T_0)] = \frac{d}{dt}x(t - T_0) = y(t - T_0)$$

Therefore, $y(t) = dx(t)/dt$ is time-invariant.

Causal:

(b) $y(t) = x(2t)$,
$y(1) = x(2)$

The value of $y(\cdot)$ at time $= 1$ depends on $x(\cdot)$ at a future time $= 2$. Therefore, $y(t) = x(2t)$ is not causal.

(d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

Yes, $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{n} x[k]$ is causal because the value of $y[\cdot]$ at any instant n depends only on the previous (past) values of $x[\cdot]$.

Invertible:

(b) $y(t) = x(2t)$ is invertible; $x(t) = y(t/2)$.

(c) $y[n] = \Sigma_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$ is not invertible. Summation is not generally an invertible operation.

(e) $y(t) = dx(t)/dt$ is invertible to within a constant.

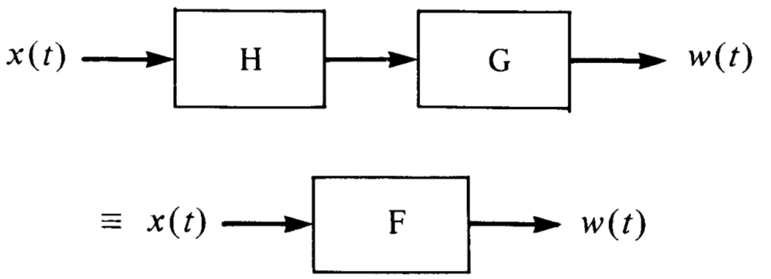
Stable:

(a) If $|x(t)| < M$, $|y(t)| < (2 + \sin t)M$. Therefore, $y(t) = (2 + \sin t)x(t)$ is stable.

(b) If $|x(t)| < M$, $|x(2t)| < M$ and $|y(t)| < M$. Therefore, $y(t) = x(2t)$ is stable.

(d) If $|x[k]| \leq M$, $|y[n]| \leq M \cdot \Sigma_{-\infty}^{n} 1$, which is unbounded. Therefore, $y[n] = \Sigma_{-\infty}^{n} x[k]$ is not stable.

<u>Bài 2</u>: Cho hệ thống:



Với

$$\text{H:} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \qquad \text{(an integrator)},$$

$$\text{G:} \quad y(t) = x(2t),$$

a) Xác định H^{-1}, G^{-1}
b) Xác định F^{-1} theo H^{-1} và G^{-1}

<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 2 ý = 1 điểm

(a)

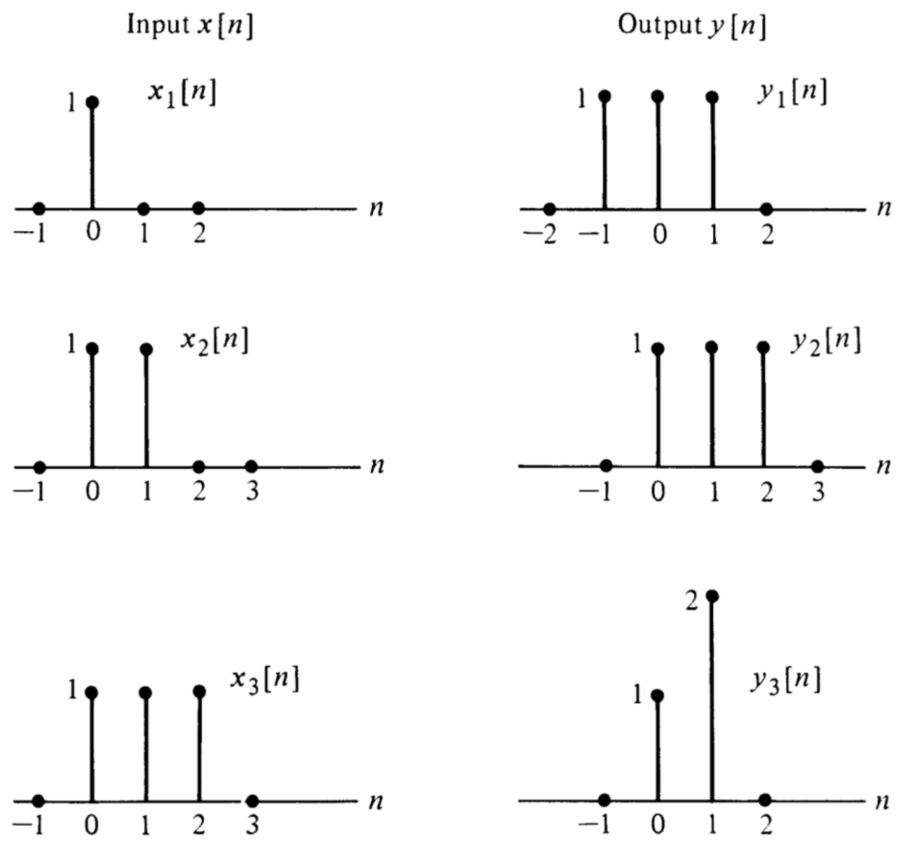
$$\text{H}^{-1}: \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\text{G:} \quad y(t) = x(2t)$$

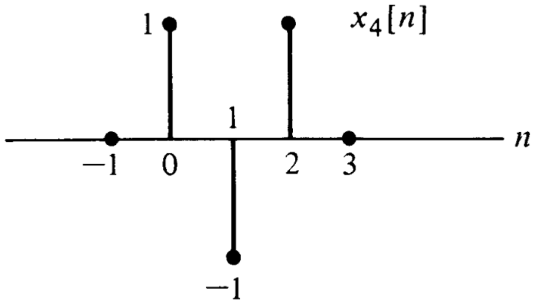
$$\text{G}^{-1}: \quad y(t) = x(t/2)$$

b) $w(t) = H\{G\{x(t)\}\} = F\{x(t)\} \;\; \rightarrow \;\; x(t) = H^{-1}\{G^{-1}\{w(t)\}\} = F^{-1}\{w(t)\}$

<u>Bài 3</u>: Cho hệ thống tuyến tính với lối vào và lối ra tương ứng như sau:



Cho tín hiệu lối vào hệ thống:



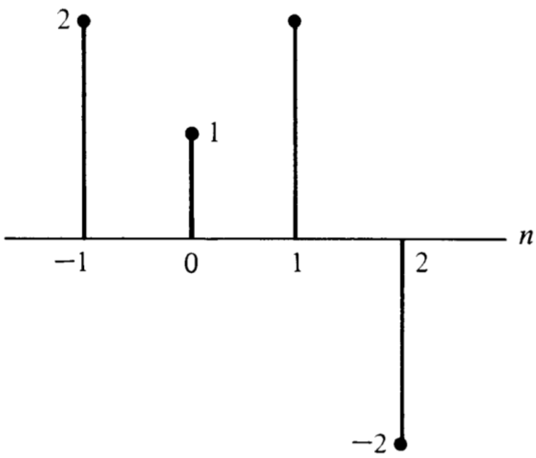
a) Biểu diễn $x_4(n)$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của $x_1(n), x_2(n)$ và $x_3(n)$
b) Sử dụng tính chất tuyến tính của hệ thống, xác định tín hiệu lối ra $y_4(n)$ tương ứng với tín hiệu vào $x_4(n)$.
c) Từ các cặp lối vào – lối ra, xác định hệ thống là bất biến hay không?

<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 3 ý = 1,5 điểm

a) $x_4[n] = 2x_1[n] - 2x_2[n] + x_3[n]$
b) Vì hệ thống tuyến tính,

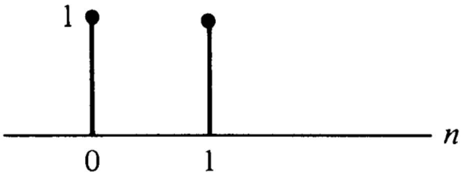
$$y_4[n] = 2y_1[n] - 2y_2[n] + y_3[n]$$

Tín hiệu lối ra sẽ là:



c)

$$x_1[n] + x_1[n-1] = x_2[n]$$

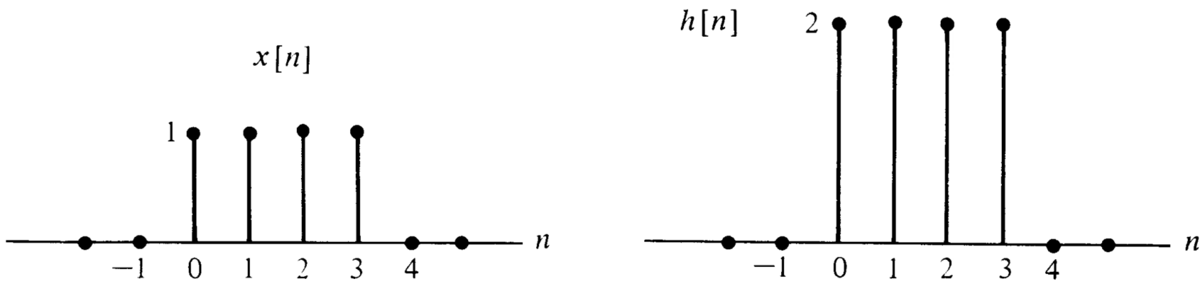


Nhưng

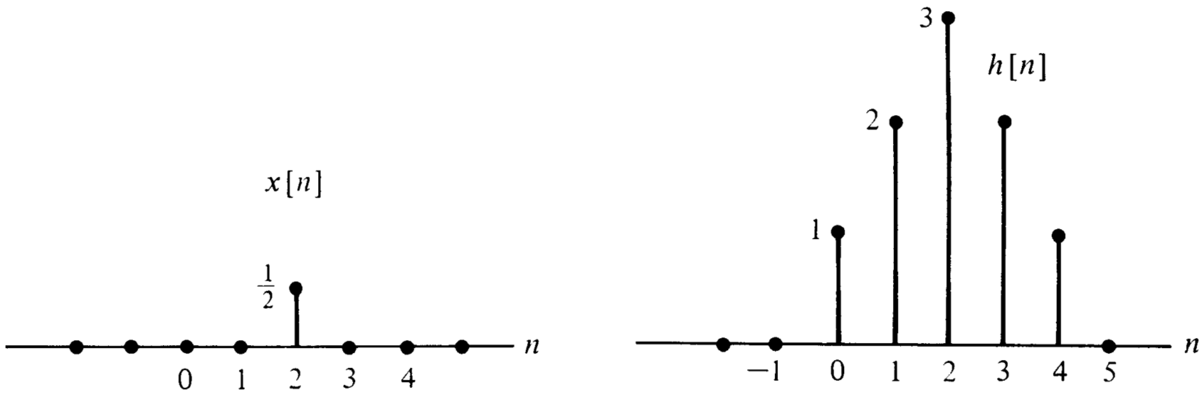
$$y_2[n] \neq y_1[n] + y_1[n-1]$$

→ Hệ thống không bất biến

<u>Bài 4</u>: Xác định lối ra $y(n)$ hệ thống có tín hiệu lối vào $x(n)$ và đáp ứng xung $h(n)$ trong hai trường hợp sau:



a)

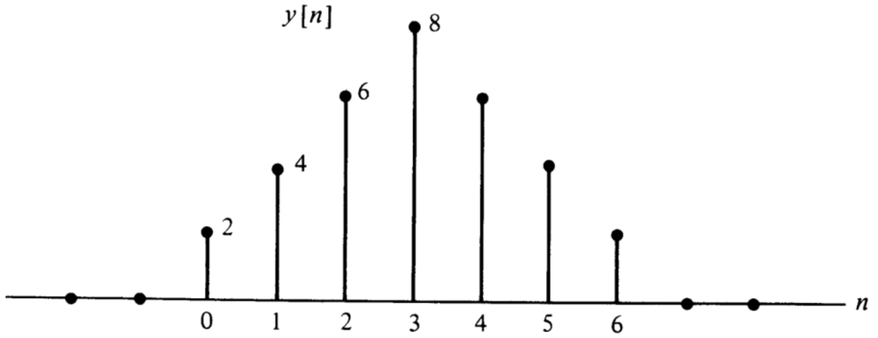


b)

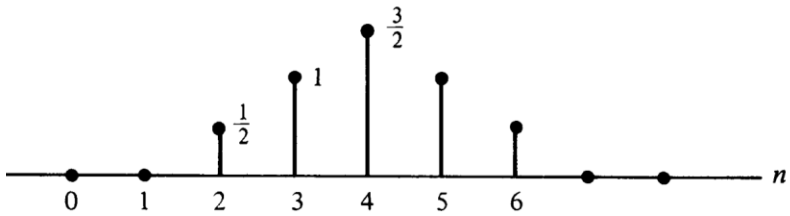
<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 2 ý = 1 điểm

$y(n) = x(n) * h(n)$

a)



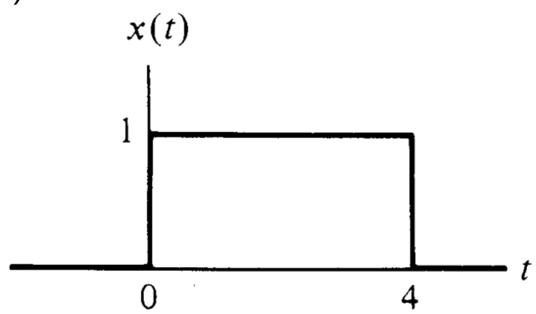
b)

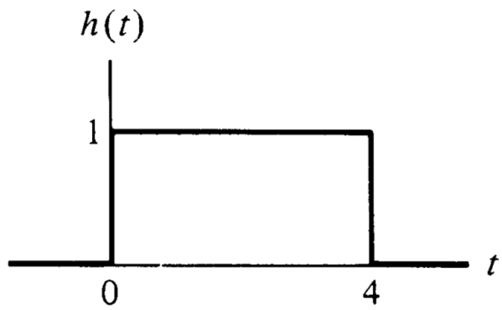


$y(n)$ là phiên bản của $x(n)$ dịch sang phải 2 đơn vị và điều chỉnh giá trị ½.

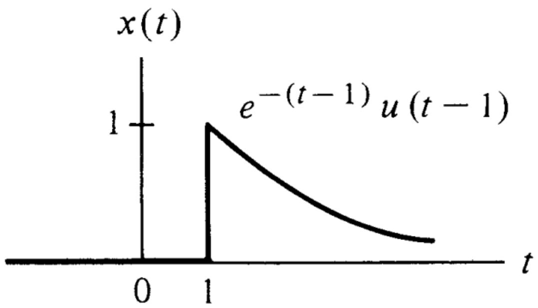
<u>Bài 5</u>: Xác định lối ra $y(t)$ hệ thống có tín hiệu lối vào $x(t)$ và đáp ứng xung $h(t)$ trong ba trường hợp sau:

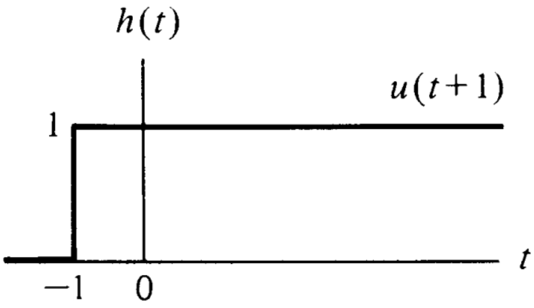
a)



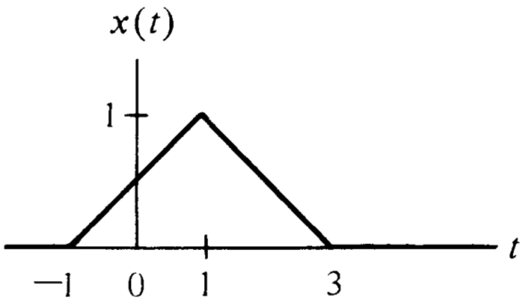


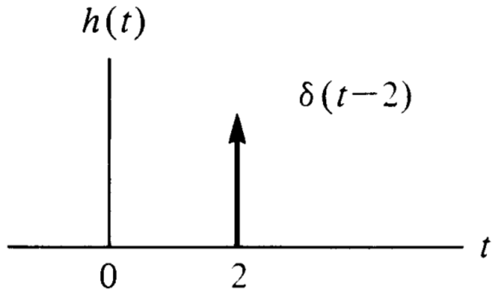
b)





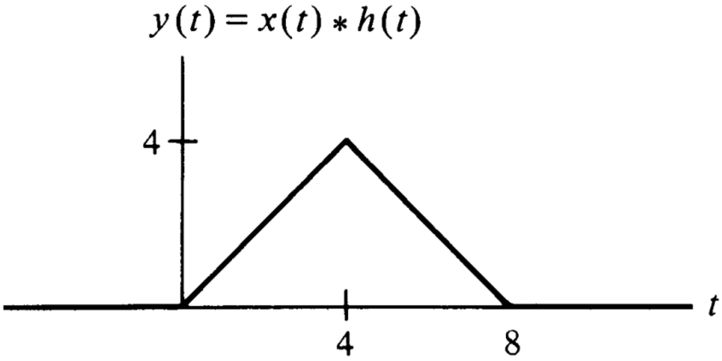
c)





Đáp án: **0,5 điểm/ý x 3 ý = 1,5 điểm**

a)



b)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau-1)}u(\tau-1)u(t-\tau+1)d\tau$$

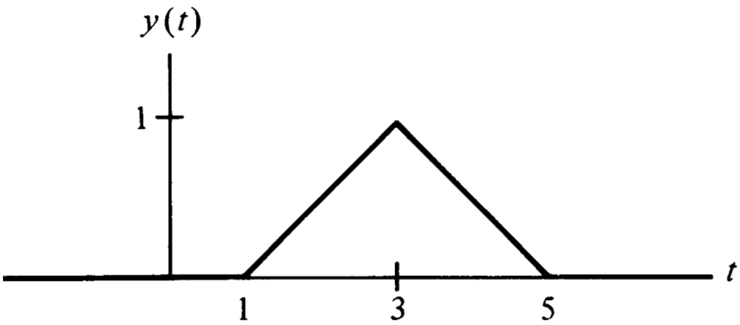
$$= \begin{cases} \int_{1}^{t+1} e^{-(\tau-1)}d\tau, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

Let $\tau' = \tau - 1$. Then

$$y(t) = \begin{cases} \int_{0}^{t} e^{-\tau'}d\tau' \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 - e^{-t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

c)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau-2)\,d\tau = x(t-2)$$



Bài 6: Cho hệ thống tuyến tính bất biến, lối vào $x(n)$, đáp ứng xung $h(n)$.

a) Tính và phác họa đáp ứng của hệ thống (lối ra) khi $x(n) = \delta(n - n_0)$ với $n_0 > 0$ và $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

b) Tính và phác họa đáp ứng của hệ thống (lối ra) khi $x(n) = u(n)$ và $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

c) Tính và phác họa đáp ứng của hệ thống (lối ra) khi $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ và $h(n) = u(n)$ (ngược với trường hợp b)

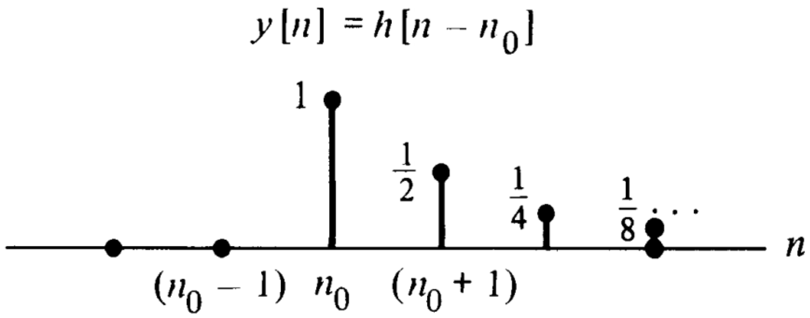
Đáp án: 0,5 điểm/ý x 3 ý = 1,5 điểm

a)

Since $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$,

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m - n_0]h[n-m] = h[n-n_0]$$

We note that this is merely a shifted version of $h[n]$.



b)

$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2})^m u[m]u[n-m]$

For $n > 0$: $\quad y[n] = \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right),$

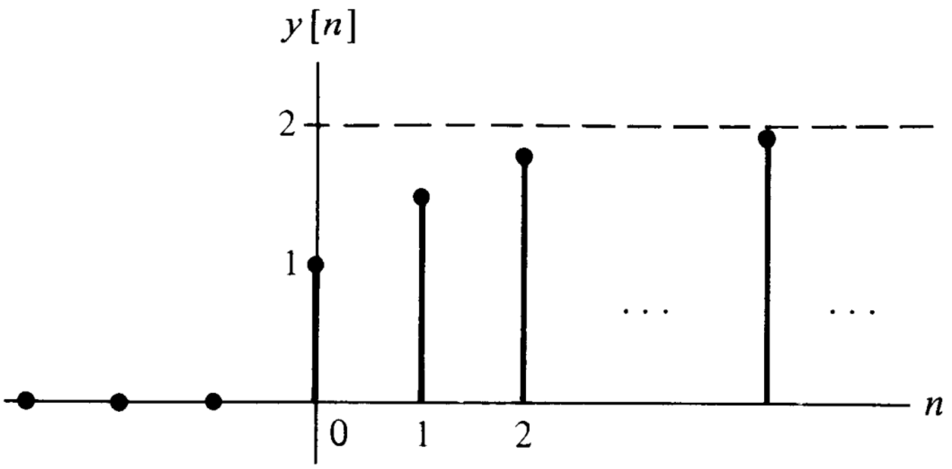
$y[n] = 2 - (\frac{1}{2})^n$

For $n < 0$: $\quad y[n] = 0$

Here the identity

$$\sum_{m=0}^{N-1} a^m = \frac{1 - a^N}{1 - a}$$

has been used.



c)

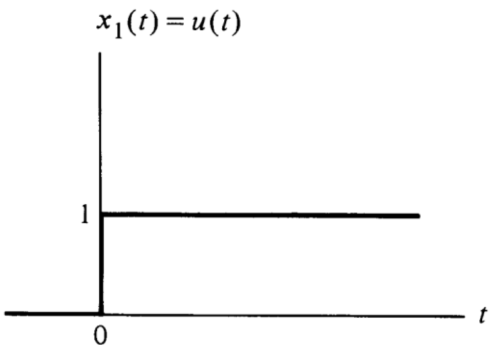
Reversing the role of the system and the input has no effect on the output because

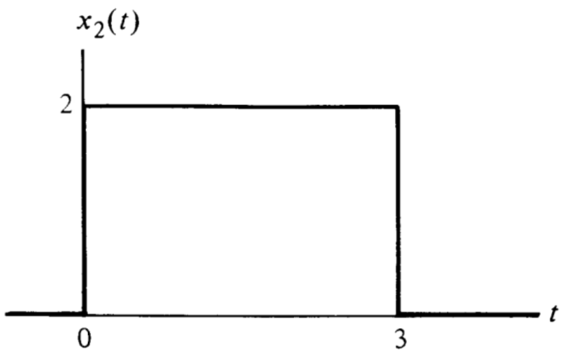
$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

The output and sketch are identical to those in part (b).

<u>Bài 7</u>: Cho hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung $h(t) = e^{-\frac{t}{2}}u(t)$.

a) Xác định lối ra tương ứng với các lối vào sau:





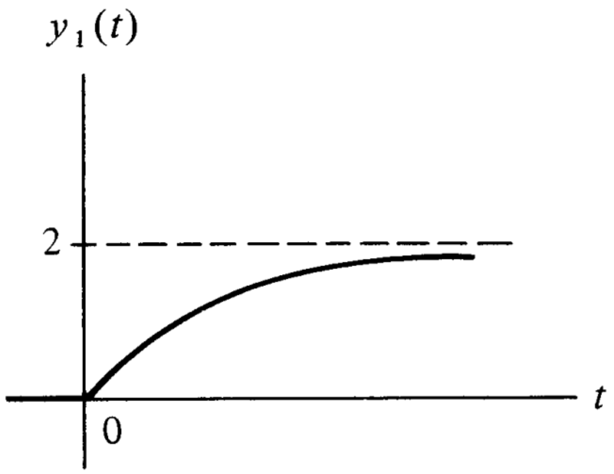
b) Tìm biểu diễn của $x_2(t)$ dưới dạng $x_1(t)$. Sử dụng tính chất tuyến tính, bất biến của hệ thống, xác định biểu diễn của $y_2(t)$ dưới dạng $y_1(t)$. Sử dụng $y_1(t)$, nghiệm lại $y_2(t)$ được tính ở phần (b) so với $y_2(t)$ được tính ở phần (a).

<u>Đáp án:</u> 1 điểm/ý x 2 ý = 2 điểm

(i) Using the formula for convolution, we have

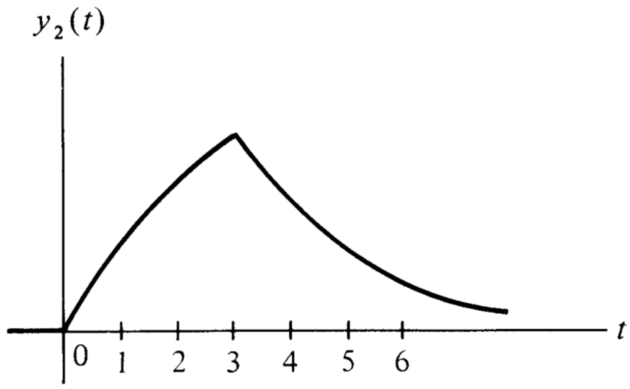
$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)e^{-(t-\tau)/2}\,u(t-\tau)\,d\tau \\ &= \int_0^t e^{-(t-\tau)/2}\,d\tau, \qquad t>0, \\ &= 2e^{-(t-\tau)/2}\Big|_0^t = 2(1-e^{-t/2}), \qquad t>0, \end{aligned}$$

$$y(t) = 0, \qquad t<0$$



(ii) Using the formula for convolution, we have

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \int_0^t 2e^{-(t-\tau)/2}\,d\tau, \qquad 3 \ge t \ge 0,\\
&= 4(1 - e^{-t/2}), \qquad 3 \ge t \ge 0,\\
y_2(t) &= \int_0^3 2e^{-(t-\tau)/2}\,d\tau, \qquad t \ge 3,\\
&= 4e^{-(t-\tau)/2}\Big|_0^3 = 4(e^{-(t-3)/2} - e^{-t/2})\\
&= 4e^{-t/2}(e^{3/2} - 1), \qquad t \ge 3,\\
y_2(t) &= 0, \qquad t \le 0
\end{aligned}$$



(b) Since $x_2(t) = 2[x_1(t) - x_1(t-3)]$ and the system is linear and time-invariant, $y_2(t) = 2[y_1(t) - y_1(t-3)]$.

$$\begin{aligned}
\text{For } 0 \le t \le 3: \quad y_2(t) &= 2y_1(t) = 4(1 - e^{-t/2})\\
\text{For } 3 \le t: \quad y_2(t) &= 2y_1(t) - 2y_1(t-3)\\
&= 4(1 - e^{-t/2}) - 4(1 - e^{-(t-3)/2})\\
&= 4e^{-t/2}[e^{3/2} - 1]\\
\text{For } t < 0: \quad y_2(t) &= 0
\end{aligned}$$

We see that this result is identical to the result obtained in part (a)(ii).