BÀI TẬP CHƯƠNG 1 – PHẦN HỆ THỐNG

I. Phân loại hệ thống

Bài 1:

$x[n] \le M_x \rightarrow y[n] \le r^n.M_x$

$mà\, r > 1 \rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n.M_x = \infty$

⇨ $y[n] \rightarrow \infty$ khi n→ ∞

⇨ Hệ thống không ổn định

Bài 2:

a. $y(t) = cos(x(t))$

i. $y(t)$ không phụ thuộc vào $x(t-a)$

⇨ Hệ thống không nhớ

ii. Giả sử: $x(t) \le M_x$

$\rightarrow y(t) \le Cos\ (M_x) \le 1$

⇨ Hệ thống ổn định

iii. $y(t)$ phụ thuộc vào $x(t)$

⇨ Hệ thống nhân quả

iv. Đối với các tín hiệu vào $x_1(t)$ và $x_2(t)$ thì tín hiệu ra tương ứng là:

$y_1(t) = \cos\big(x_1(t)\big)$

$y_2(t) = \cos\big(x_2(t)\big)$

Sự kết hợp tuyến tính của hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$$y_3(t) = H[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = \cos\big(a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\big) \ne a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

⇨ Hệ thống không tuyến tính

v. Với tín hiệu vào $x(t)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_1(t) = H(x(t))$

Với tín hiệu vào $x(t-t_0)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_2(t-t_0) = cos\big(x(t-t_0)\big) = H(x(t-t_0))$

⇨ Hệ thống bất biến

b. $y[n] = 2x[n]u[n]$

i. $y[n]$ không phụ thuộc vào $x[n-a]$

⇨ Hệ thống không nhớ

ii. Giả sử $x[n] \le M_x$

$\rightarrow y[n] \le 2M_xu[n] = 2M_x$ khi $n \rightarrow \infty$

⇨ Hệ thống ổn định

iii. $y[n]$ chỉ phụ thuộc vào $x[n]$

⇨ Hệ thống nhân quả

iv. Đối với các tín hiệu vào $x_1[n]$ và $x_2[n]$ thì tín hiệu ra tương ứng là:

$y_1[n] = 2x_1[n]u[n]$

$y_2[n] = 2x_2[n]u[n]$

Sự kết hợp tuyến tính của hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$y_3[n] = H(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) = 2\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\}u[n]$

$= 2a_1x_1[n]u[n] + 2a_2x_2[n]u[n] = a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$

⇨ Hệ thống tuyến tính

v. Với tín hiệu vào $x(t)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_1[n] = H(x[n])$

Với tín hiệu vào $x[n-n_0]$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_2[n-n_0] = 2x[n-n_0]u[n-n_0] = H(x[n-n_0])$

⇨ Hệ thống bất biến

c. $y[n] = \log(|x[n]|)$

i. $y[n]$ không phụ thuộc $x[n-a]$

⇨ Hệ thống không nhớ

ii. Giả sử $x[n] \leq M_x$

$\rightarrow y[n] \leq \log(|M_x|)$ khi $n \rightarrow \infty$

⇨ Hệ thống ổn định

iii. $y[n]$ chỉ phụ thuộc và $x[n]$

⇨ Hệ thống nhân quả

iv. Đối với các tín hiệu vào $x_1[n]$ và $x_2[n]$ thì tín hiệu ra tương ứng là:

$y_1[n] = \log(|x_1[n]|)$

$y_2[n] = \log(|x_2[n]|)$

Sự kết hợp tuyến tính của hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$y_3[n] = H(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) = 2\log(|a_1x_1[n] + a_2x_2[n]|) \neq a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$

⇨ Hệ thống không tuyến tính

v. Với tín hiệu vào $x[n]$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_1[n] = H(x[n])$

Với tín hiệu vào $x[n-n_0]$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_2[n-n_0] = \log(|x[n-n_0]|) = H(x[n-n_0])$

⇨ Hệ thống bất biến

d. $y(t) = \int_{-\infty}^{t/2} x(\tau)d\tau$

i. Do đầu ra tại thời điểm đo t phụ thuộc vào thời điểm quá khứ $t/2$

⇨ Hệ thống có nhớ

ii. Giả sử: $x(t) \leq M_x$

$$\rightarrow x(\tau) \leq M_x \rightarrow \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x(\tau)d\tau < \int_{-\infty}^{t/2} M_x d\tau = \infty$$

⇨ Hệ thống không ổn định

iii. Do đầu ra tại thời điểm t chỉ phụ thuộc vào thời điểm quá khứ $t/2$

⇨ Hệ thống nhân quả

iv. Đối với các tín hiệu vào $x_1(t)$ và $x_2(t)$ thì tín hiệu ra tương ứng là:

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x(\tau)d\tau \text{ và } y_2(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x(\tau)d\tau$$

Sự kết hợp tuyến tính của hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$$y_3(t) = H[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}} x(\tau)d\tau \neq a_1y_1(t) + a_2y_2(t)\ khi\ (a_1 + a_2) \neq 1$$

⇨ Hệ thống không tuyến tính

v. Với tín hiệu vào $x(t)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_1(t) = H(x(t))$

Với tín hiệu vào $x(t - t_0)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$$y_2(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\frac{t-t_0}{2}} x(\tau)d\tau = H(x(t - t_0))$$

⇨ Hệ thống bất biến

e. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k + 2]$

i. $y[n]$ phụ thuộc vào quá khứ nếu $k < n - 2$

⇨ Hệ thống có nhớ nếu $k < n - 2$

⇨ Hệ thống không nhớ nếu $k \geq n - 2$

ii. Giả sử $x[n] \leq M_x$

$$\rightarrow y[n] \leq \sum_{k=-\infty}^{n} M_x = \infty$$

⇨ Hệ thống không ổn định

iii. $y[n]$ phụ thuộc vào tương lai nếu $k > n - 2$

⇨ Hệ thống phi nhân quả

iv. Đối với các tín hiệu vào $x_1[n]$ và $x_2[n]$ thì tín hiệu ra tương ứng là:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k + 2]$$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k + 2]$$

Sự kết hợp tuyến tính của hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$$y_3[n] = H(a_1x_1[n] + a_2x_2[n]) = \sum_{k=-\infty}^{n}(x_1[k + 2] + x_2[k + 2]) = a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$$

⇨ Hệ thống tuyến tính

v. Với tín hiệu vào $x[n]$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_1[n] = H(x[n])$

Với tín hiệu vào $x[n - n_0]$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$$y_2[n - n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k + 2] = H(x[n - n_0])$$

⇨ Hệ thống bất biến

f. $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$

i. $y(t)$ chỉ phụ thuộc vào $x(t)$

⇨ Hệ thống không nhớ

ii. Giả sử $x(t) \le M$

$$\rightarrow y(t) = \frac{d}{dt}x(t) \le \frac{d}{dt}M = 0$$

⇨ Hệ thống ổn định

iii. $y(t)$ chỉ phụ thuộc vào tín hiệu đầu vào tại thời điểm đo

⇨ Hệ thống nhân quả

iv. Đối với các tín hiệu vào $x_1(t)$ và $x_2(t)$ thì tín hiệu ra tương ứng là:

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}x_1(t)$$

$$y_2(t) = \frac{d}{dt}x_2(t)$$

Sự kết hợp tuyến tính của hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$$y_3(t) = H[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = \frac{d}{dt}a_1x_1(t) + \frac{d}{dt}a_2x_2(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

⇨ Hệ thống tuyến tính

v. Với tín hiệu vào $x(t)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$$y_1(t) = H(x(t))$$

Với tín hiệu vào $x(t - t_0)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$$y_2(t - t_0) = \frac{d}{dt}\big(x(t - t_0)\big) = H(x(t - t_0))$$

⇨ Hệ thống bất biến

g. $y[n] = \cos(2\pi x[n+1]) + x[n]$

i. $y[n]$ không phụ thuộc vào quá khứ

⇨ Hệ thống không nhớ

ii. Giả sử $x[n] \le M$

$$\rightarrow y[n] = \cos(2\pi x[n+1]) + x[n] \le \cos(2\pi M) + M = M + 1$$

⇨ Hệ thống ổn định

iii. $y[n]$ có phụ thuộc tương lai ($x[n+1]$)

⇨ Hệ thống phi nhân quả

iv. Đối với các tín hiệu vào $x_1[n]$ và $x_2[n]$ thì tín hiệu ra tương ứng là:

$$y_1[n] = \cos(2\pi x_1[n+1]) + x_1[n]$$

$$y_2[n] = \cos(2\pi x_2[n+1]) + x_2[n]$$

Sự kết hợp tuyến tính của hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$$y_3[n] = H\big[a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\big] = \cos(2\pi(x_1[n+1] + x_2[n+1])) + x_1[n] + x_2[n]$$
$$\neq a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

⇨ Hệ thống không tuyến tính

v. Với tín hiệu vào $x[n]$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$$y_1(t) = H(x[n])$$

Với tín hiệu vào $x[n - n_0]$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$$y_2[n - n_0], = \cos(2\pi x[n - n_0 + 1]) + x[n - n_0] = H(x(t - t_0))$$

⇨ Hệ thống bất biến

h. $y(t) = \frac{d}{dt}\{e^{-t}x(t)\}$

i. $y(t)$ không phụ thuộc vào quá khứ

⇨ Hệ thống không nhớ

ii. Giả sử: $x(t) \leq M$

$\rightarrow y(t) = \frac{d}{dt}\{e^{-t}x(t)\} \leq -Me^{-t} < \infty$

⇨ Hệ thống ổn định

iii. $y(t)$ chỉ phụ thuộc vào thời điểm đo

⇨ Hệ thống nhân quả

iv. Đối với các tín hiệu vào $x_1(t)$ và $x_2(t)$ thì tín hiệu ra tương ứng là:

$y_1(t) = \frac{d}{dt}\{e^{-t}x_1(t)\}$

$y_2(t) = \frac{d}{dt}\{e^{-t}x_2(t)\}$

Sự kết hợp tuyến tính của hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$$y_3(t) = H[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = \frac{d}{dt}\{e^{-t}[x_1(t) + x_2(t)]\} = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

⇨ Hệ thống tuyến tính

v. Với tín hiệu vào $x(t)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_1(t) = H(x(t))$

Với tín hiệu vào $x(t - t_0)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_2(t - t_0) = \frac{d}{dt}\{e^{-(t-t_0)}x(t - t_0)\} = H(x(t - t_0))$

⇨ Hệ thống bất biến

i. $y(t) = x(2 - t)$

i. $y(t)$ phụ thuộc vào quá khứ nếu $t > 1$

⇨ Hệ thống có nhớ khi $t > 1$

⇨ Hệ thống không nhớ khi $t \leq 1$

ii. Giả sử: $x(t) \leq M$

$\rightarrow y(t) = x(2 - t) \leq M$

⇨ Hệ thống ổn định

iii. $y(t)$ phụ thuộc vào tương lai nếu $t < 1$

⇨ Hệ thống nhân quả khi $t < 1$

⇨ Hệ thống phi nhân quả khi $t \geq 1$

(<u>Tương tự những phần trên</u>)

Bài 3: $y(t) = x(t)\cos(w_c t)$

i. Đầu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu đầu vào tại thời điểm đo

⇨ Hệ thống không nhớ

ii. Giả sử: $x(t) \leq M$

$\rightarrow y(t) = x(t)\cos(w_c t) \leq M$

⇨ Hệ thống ổn định

iii. Đầu ra chỉ phụ thuộc tín hiệu đầu vào tại thời điểm đo

⇨ Hệ thống nhân quả

iv. Đối với các tín hiệu vào $x_1(t)$ và $x_2(t)$ thì tín hiệu ra tương ứng là:

$y_1(t) = x_1(t)\cos(w_c t)$
$y_2(t) = x_2(t)\cos(w_c t)$
Sự kết hợp tuyến tính của hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$y_3(t) = H[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = (x_1(t) + x_2(t))\cos(w_c t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$

⇨ Hệ thống tuyến tính

v. Với tín hiệu vào $x(t)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_1(t) = H(x(t))$

Với tín hiệu vào $x(t - t_0)$, tín hiệu đầu ra tương ứng là:

$y_2(t - t_0) = x(t - t_0)\cos(w_c(t - t_0)) = H(x(t - t_0))$

⇨ Hệ thống bất biến

Bài 4:

Từ hình ta thấy

$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n - 2]$

$y_3[n] \neq y_1[n] + y_2[n - 2]$

⇨ Hệ thống không tuyến tính

Bài 5:

a. Từ hình ta thấy

$x_3(t) = x_1(t) - x_2(t)$

$y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$

i. Không nhớ
ii. Nhân quả
iii. Không tuyến tính
iv. Bất biến

b. Từ hình ta thấy

$$x_4(t) = x_1(t) + x_2(t-1) + x_3(t) - \frac{1}{2}x_2(t)$$

$$y_4(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) - \frac{1}{2}y_2(t)$$

i. Có nhớ

ii. Nhân quả

iii. Không tuyến tính

iv. Bất biến

II. Cấu trúc hệ thống

Bài 1: Từ sơ đồ ta thấy

$$y[n] = S(v[n]) = v[n-1]$$

$$v[n] = x[n] - y[n]$$

$\rightarrow y[n] = x[n-1] - y[n-1]$

$\rightarrow y[n] = S.x[n] - S.y[n]$

$\rightarrow y[n] = \dfrac{S}{1+S}.x[n]$

⇨ $H = \frac{S}{1+S}$

Bài 2:

Từ sơ đồ ta thấy: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) - y_4(y_3(t))$

$\rightarrow y(t) = S.x_1^2(t) + |x_2(t)| - Cos(1 + 2x_3(t))$

Bài 3:

$H = a_0 + a_1S + a_2S^2 + a_3S^3$

Bài 4:

a. $H = 1 + S + S^2$
b. $H^{inv} = \frac{1}{H} = \frac{1}{1+S+S^2}$

Bài 5:

a. Do hệ thống tuyến tính, bất biến nên đầu ra sẽ là: $y[n-1]$
b. $x[n] = 2\delta[n] - \delta[n-2]$
Do hệ thống tuyến tính, bất biến nên đầu ra sẽ là: $2y_1[n] - y_2[n-2]$
c. $x[n] = 2\delta[n-2] - \delta[n] + \delta[n+1]$
Do hệ thống tuyến tính, bất biến nên đầu ra sẽ là: $2y_1[n-2] - y_1[n] + y_3[n+1]$