TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Chương 5: Biến đổi Z và áp dụng cho phân tích hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc

Trần Thị Thúy Quỳnh

BIẾN ĐỔI Z

Đáp ứng của hệ LTI:

$$y[n] = H\{x[n]\} = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Lối vào: $x[n] = z^n$ ➡ Hàm truyền:

$$\boxed{H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}}$$

Lối ra: $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}\right)$$

$$y[n] = \mathbf{T}\{z^n\} = H(z)z^n$$

BIẾN ĐỔI Z

A. Định nghĩa

Với tín hiệu liên tục $x[n]$, biến đổi Z của $X(z)$ (biến đổi hai phía) được định nghĩa bởi:

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}}$$

Với $z = re^{j\Omega}$

BIẾN ĐỔI Z

Biến đổi Z một phía (unilateral) cho bởi:

$$X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Biến đổi Z một phía và hai phía tương đương nhau nếu $x[n] = 0$ với $n < 0$.

BIẾN ĐỔI Z

Ký hiệu:

$$X(z) = \mathfrak{Z}\{x[n]\}$$

$$\mathrm{X}(\mathrm{z}) = \mathrm{Z}\{x[\mathrm{n}]\}$$

$$x[n] \longleftrightarrow X(z)$$ gọi là cặp biến đổi Z.

BIẾN ĐỔI Z

B. Vùng hội tụ

Khoảng giá trị của z đảm bảo cho biến đổi Z hội tụ được gọi là vùng hội tụ ROC (Region of Convergence).

Ví dụ:

Xác định biến đổi Z và vùng ROC của tín hiệu sau (với a là số thực):

$$x[n] = a^n u[n]$$

BIẾN ĐỔI Z

Bài giải:

Biến đổi Z: $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

Để X(z) hội tụ cần: $$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$$

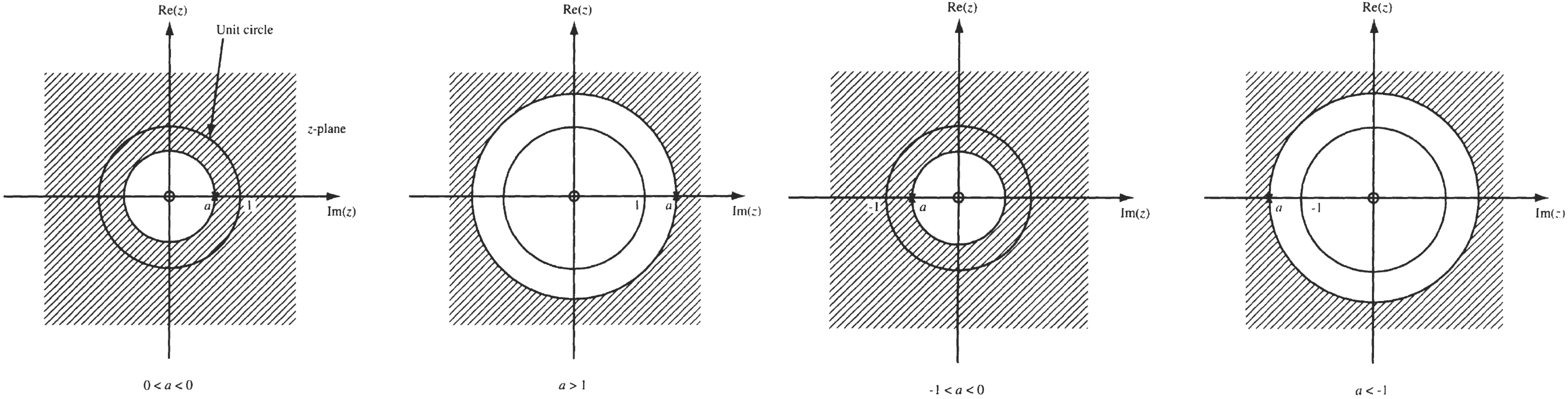
Vậy vùng ROC sẽ là: $|az^{-1}| < 1$ hay $|z| > |a|$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$= \frac{z}{z - a}$$

BIẾN ĐỔI Z

Vùng hội tụ: $|z| > |a|$



VÍ DỤ 1:

Tìm biến đổi Z, vùng ROC, điểm không, điểm cực trên mặt phẳng Z của tín hiệu nhân quả sau:

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

với α là số thực.

VÍ DỤ 1:

Biến đổi Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n.$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \qquad |z| > |\alpha|$$

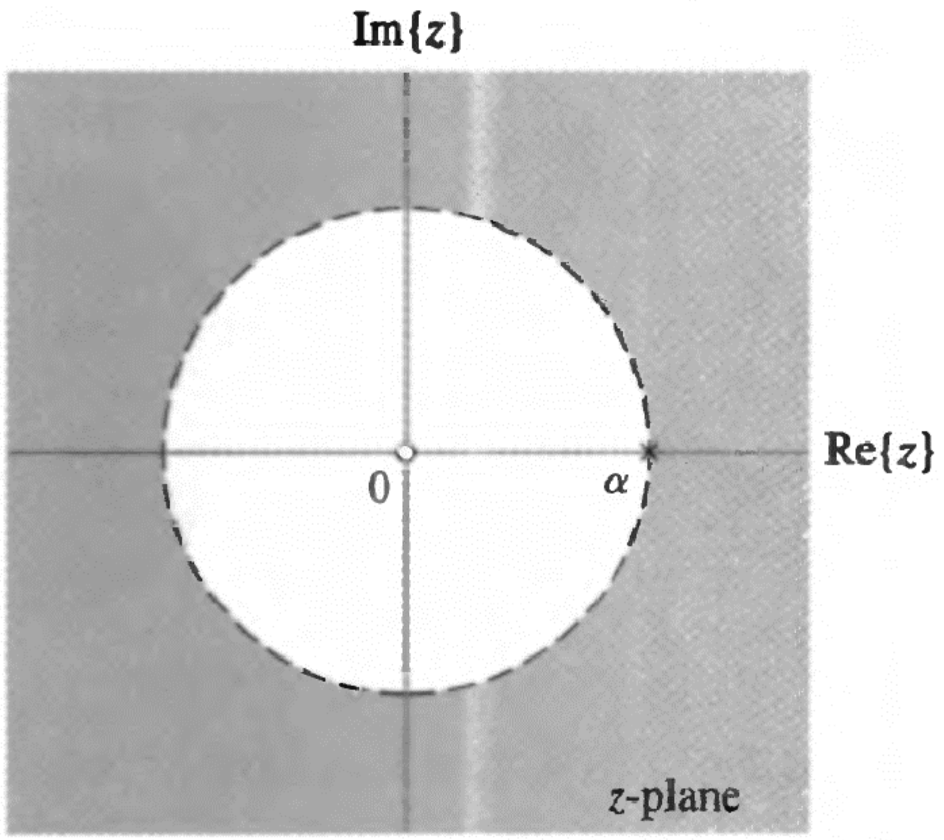
$$= \frac{z}{z - \alpha}, \qquad |z| > |\alpha|.$$

VÍ DỤ 1:

Điểm cực z = α

Điểm không z = 0

Vùng ROC: $|z| > |\alpha|$



VÍ DỤ 2:

Tìm biến đổi Z, vùng ROC của tín hiệu phản nhân quả sau:

$$y[n] = -\alpha^n u[-n-1]$$

với α là số thực.

VÍ DỤ 2:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\alpha^n u[-n-1] z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^k$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha}\right)^k.$$

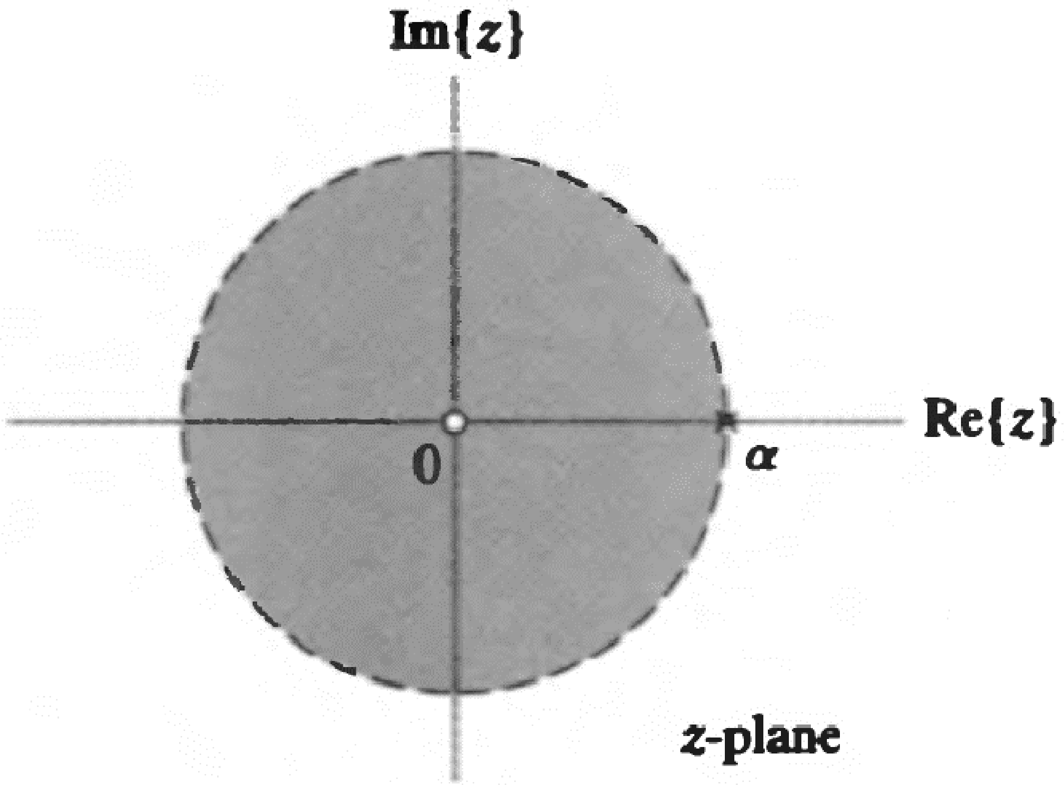
$$\boxed{\begin{aligned} Y(z) &= 1 - \frac{1}{1 - z\alpha^{-1}}, \qquad |z| < |\alpha|, \\ &= \frac{z}{z-\alpha}, \qquad |z| < |\alpha|. \end{aligned}}$$

VÍ DỤ 2:

Điểm cực z = α

Điểm không z = 0

Vùng ROC: $|z| < |\alpha|$



VÍ DỤ 3:

Tìm biến đổi Z, vùng ROC, điểm không, điểm cực trên mặt phẳng Z của tín hiệu sau:

$$x[n] = -u[-n-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

VÍ DỤ 3:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]z^{-n} - u[-n-1]z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n + 1 - \sum_{k=0}^{\infty} z^k.$$

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + 1 - \frac{1}{1-z}, \qquad 1/2 < |z| < 1$$

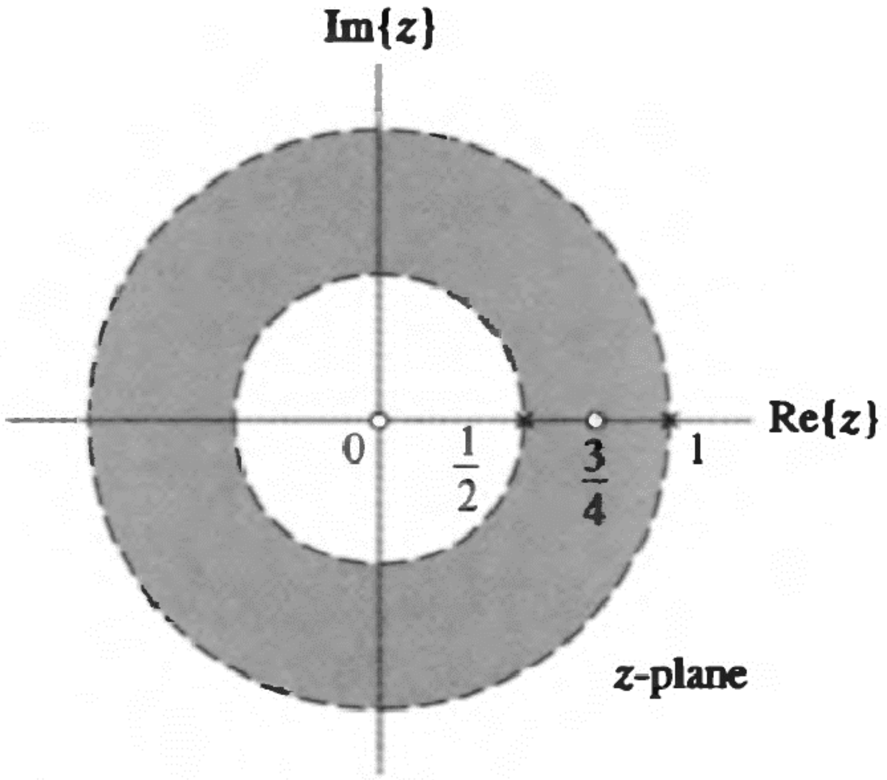
$$= \frac{z\left(2z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}, \qquad 1/2 < |z| < 1.$$

VÍ DỤ 3:

Điểm cực z = 1/2, x=1

Điểm không z = 0, z=3/4

Vùng ROC: $1/2 < |z| < 1$



BIẾN ĐỔI Z

C. Tính chất của vùng ROC

1. Vùng ROC không chứa các điểm cực.
2. Nếu $x[n]$ là chuỗi hữu hạn $x[n] = 0$ ngoài khoảng $[N_1, N_2]$ thì ROC là toàn bộ mặt phẳng z trừ $z = 0$ và $z = \infty$.
3. Nếu $x[n]$ là tín hiệu phía phải $x[n] = 0$ ngoài khoảng $[N_1, \infty]$ thì ROC là $|z| > r_{max}$, r_{max} là biên độ lớn nhất trong các điểm cực của $X(z)$.
4. Nếu $x[n]$ là tín hiệu phía trái $x[n] = 0$ ngoài khoảng $[-\infty, N_1]$ thì ROC là $|z| < r_{min}$, r_{min} là biên độ nhỏ nhất trong các điểm cực của $X(z)$.
5. Nếu $x[n]$ là tín hiệu hai phía (thời gian vô hạn) thì ROC là $r_1 < |z| < r_2$, r_1 và r_2 là các biên độ của hai điểm cực của $X(z)$.

MỘT SỐ CẶP BIẾN ĐỔI Z THÔNG DỤNG

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$\|z\| > 1$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}, \frac{z}{z-1}$	$\|z\| < 1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 if $(m > 0)$ or ∞ if $(m < 0)$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}, \frac{z}{z-a}$	$\|z < \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}, \frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| < \|a\|$

MỘT SỐ CẶP BIẾN ĐỔI Z THÔNG DỤNG

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$(n+1)a^n u[n]$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}, \left[\dfrac{z}{z-a}\right]^2$	$\|z\| > \|a\|$
$(\cos \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^2-(\cos\Omega_0)z}{z^2-(2\cos\Omega_0)z+1}$	$\|z\| > 1$
$(\sin \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(\sin\Omega_0)z}{z^2-(2\cos\Omega_0)z+1}$	$\|z\| > 1$
$(r^n \cos \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^2-(r\cos\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\|z\| > r$
$(r^n \sin \Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(r\sin\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\|z\| > r$
$\begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > 0$

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

Property	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linearity	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Time shifting	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R' \supset R \cap \{0 < \|z\| < \infty\}$
Multiplication by z_0^n	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$R' = \|z_0\|R$
Multiplication by $e^{j\Omega_0 n}$	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0}z)$	$R' = R$
Time reversal	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$R' = \frac{1}{R}$
Multiplication by n	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$R' = R$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	$R' \supset R \cap \{\|z\| > 1\}$
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

$$x[n] = \mathfrak{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

$$x[\mathrm{n}] = \mathrm{Z}^{-1}\{\mathrm{X(z)}\}$$

A. Công thức biến đổi ngược

Tính tích phân đổi với biến phức rất phức tạp.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1}\, dz$$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

B. Sử dụng các cặp biến đổi Z thông dụng và tính chất của biến đổi Z

$$X(z) = X_1(z) + \cdots + X_n(z)$$

$$\Rightarrow \quad x[n] = x_1[n] + \cdots + x_n[n]$$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

C. Khai triển chuỗi mũ

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$= \cdots + x[-2] z^{2} + x[-1] z + x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \cdots$$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

D. Khai triển phân số thành phần

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = k\frac{(z-z_1)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)\cdots(z-p_n)}$$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

TH1: Điểm cực đơn (phân biệt)

Khi $n \geq m$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n} = \frac{c_0}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z-p_k}$$

Với $\quad c_0 = X(z)\big|_{z=0} \qquad c_k = (z-p_k)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=p_k}$

$$X(z) = c_0 + c_1\frac{z}{z-p_1} + \cdots + c_n\frac{z}{z-p_n} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k\frac{z}{z-p_k}$$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

Khi $m > n$:

$$X(z) = \sum_{q=0}^{m-n} b_q z^q + \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{z}{z - p_k}$$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

TH 2: Điểm cực kép (hệ số lặp lại r)

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\lambda_1}{z - p_i} + \frac{\lambda_2}{(z - p_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_r}{(z - p_i)^r}$$

Với

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left[(z - p_i)^r \frac{X(z)}{z} \right] \Bigg|_{z = p_i}$$

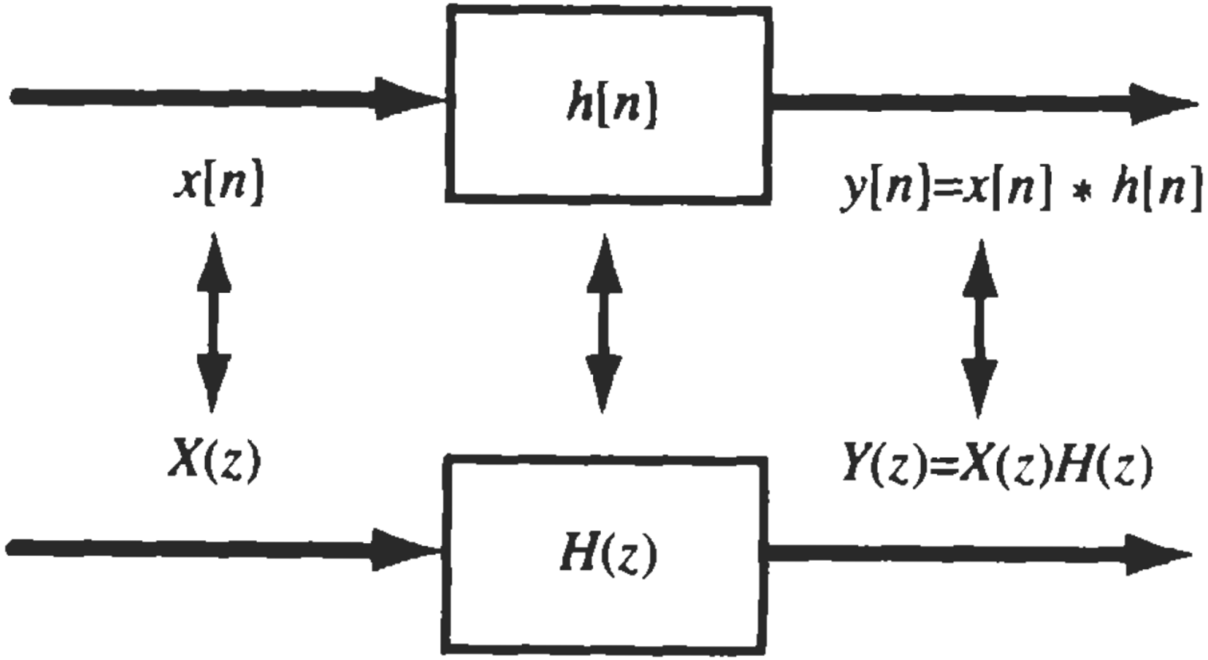
HÀM TRUYỀN CỦA HỆ THỐNG LTI

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Lấy biến đổi Z hai vế:

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



$H(z)$ được gọi là hàm truyền của hệ thống.

PHÂN LOẠI HỆ THỐNG

A. Tính nhân quả

Hệ thống LTI liên tục là nhân quả nếu: $h[n] = 0 \qquad n < 0$

➡ $h[n]$ là tín hiệu phía phải nên ROC của $H(z)$ có dạng:

$$\boxed{|z| > r_{\max}}$$

PHÂN LOẠI HỆ THỐNG

B. Tính ổn định

Hệ thống LTI liên tục là ổn định nếu: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

Đặt $z = e^{j\Omega}$

$$|H(e^{j\Omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Hay $H(z)$ hội tụ với $z = e^{j\Omega}$

➡ $\boxed{\text{ROC của } H(z) \text{ chứa } z = e^{j\Omega}}$

HỆ THỐNG LTI BIỂU DIỄN BẰNG PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Thực hiện biến đổi Z hai vế:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$\Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

KẾT HỢP CÁC HỆ THỐNG

Các hệ thống mắc nối tiếp:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \qquad R \supset R_1 \cap R_2$$

Các hệ thống mắc song song:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \qquad R \supset R_1 \cap R_2$$

BIẾN ĐỔI Z MỘT PHÍA

$$X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Biến đổi Z một phía của chuỗi $x[n]$ có thể coi như biến đổi Z hai phía của chuỗi $x[n]u[n]$, là chuỗi phía phải nên ROC luôn là vùng nằm ngoài vòng tròn trong mặt phẳng z.

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z MỘT PHÍA

Tương tự như biến đổi Z hai phía, ngoại trừ:

Phép dịch theo thời gian:

Nếu: $x[n] \longleftrightarrow X_I(z)$ thì với $m \geq 0$

$$x[n-m] \longleftrightarrow z^{-m}X_I(z) + z^{-m+1}x[-1] + z^{-m+2}x[-2] + \cdots + x[-m]$$

$$x[n+m] \longleftrightarrow z^{m}X_I(z) - z^{m}x[0] - z^{m-1}x[1] - \cdots - zx[m-1]$$

SO SÁNH GIỮA BIẾN ĐỔI MỘT PHÍA VÀ HAI PHÍA

Signal	Unilateral Transform $x[n] \xleftrightarrow{z_u} X(z)$ $y[n] \xleftrightarrow{z_u} Y(z)$	Bilateral Transform $x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$ $y[n] \xleftrightarrow{z} Y(z)$	ROC $z \in R_x$ $z \in R_y$
$ax[n] + by[n]$	$aX(z) + bY(z)$	$aX(z) + bY(z)$	At least $R_x \cap R_y$
$x[n-k]$	See below	$z^{-k}X(z)$	R_x, except possibly $\lvert z \rvert = 0, \infty$
$\alpha^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$\lvert\alpha\rvert R_x$
$x[-n]$	—	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{R_x}$
$x[n] * y[n]$	$X(z)Y(z)$ if $x[n] = y[n] = 0$ for $n < 0$	$X(z)Y(z)$	At least $R_x \cap R_y$
$nx[n]$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	R_x, except possibly addition or deletion of $z = 0$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Biến đổi Fourier:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n}$$

Biến đổi Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X(\Omega) = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}}$$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Đặt $\mathrm{z} = e^{j\Omega}$ thì biến đổi Z của tín hiệu $x[n]$ cũng bằng biến đổi Fourier của tín hiệu $x[n]$ hay nếu vùng ROC chứa vòng tròn đơn vị $|z| = 1$ thì biến đổi Fourier của $x[n]$ bằng biến đổi Z được tính trên vòng tròn đơn vị.

Biến đổi Fourier được tính từ biến đổi Z khi đặt $\mathbf{z} = e^{j\Omega}$ nếu $x[n]$ có thể tính tổng tuyệt đối hay:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ: Cho tín hiệu mũ với hằng số a thực:

Biến đổi Z: $X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ $\quad |z| > |a|$

Với $|a| < 1$ vùng ROC của $X(z)$ chứa vòng tròn đơn vị nên tồn tại biến đổi Fourier:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \qquad |a| < 1$$

Biến đổi Fourier theo định nghĩa:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\Omega}\right)^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \qquad |ae^{-j\Omega}| = |a| < 1$$

$$\Rightarrow X(\Omega) = X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

Chú ý: $x[n]$ có thể tính tổng tuyệt đối.

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ: Cho chuỗi nhảy bậc u$[n]$

Biến đổi Z:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

Biến đổi Fourier:

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \qquad |\Omega| \leq \pi$$

Biến đổi Fourier của $x[n]$ **không thể tính từ biến đổi Z** do ROC của biến đổi Z không chứa vòng tròn đơn vị và chuỗi $x[n]$ không thể tính tổng tuyệt đối.