Chương 2

Biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến trong miền thời gian

Các mô hình toán học mô tả hành vi của hệ thống dưới dạng quan hệ giữa tín hiệu vào và tín hiệu ra. Các tín hiệu vào và ra của mô hình thường là các hàm của biến thời gian, thể hiện tính "động" của môi trường hoạt động của hệ thống. Xây dựng các mô hình hệ thống cũng trong miền thời gian vì vậy được coi là điều khá đương nhiên. Các mô hình biểu diễn trong miền thời gian khá thuận tiện cho việc mô phỏng hoạt động của hệ thống, nhưng có nhiều hạn chế khi sử dụng cho việc phân tích và thiết kế một số đặc trưng của hệ thống. Nhiều loại mô hình trong các miền biểu diễn khác với miền thời gian đã được phát triển, chúng ta sẽ đề cập tới một số lý thuyết cơ bản nhất về chúng trong các chương sau. Các mô hình trong miền thời gian mặc dù vậy vẫn được coi là các mô hình gốc, là cơ sở để xây dựng các loại mô hình khác.

Trong chương này chúng ta sẽ xem xét các loại mô hình trong miền thời gian được sử dụng để mô tả mối quan hệ vào-ra của các hệ thống tuyến tính bất biến, cả liên tục và rời rạc, bao gồm: mô hình phương trình vi phân/sai phân cho hệ thống liên tục/rời rạc, mô hình biểu diễn hệ thống dựa trên đáp ứng xung, và mô hình biến trạng thái.

2.1 Phương trình vi phân của hệ thống tuyến tính bất biến liên tục

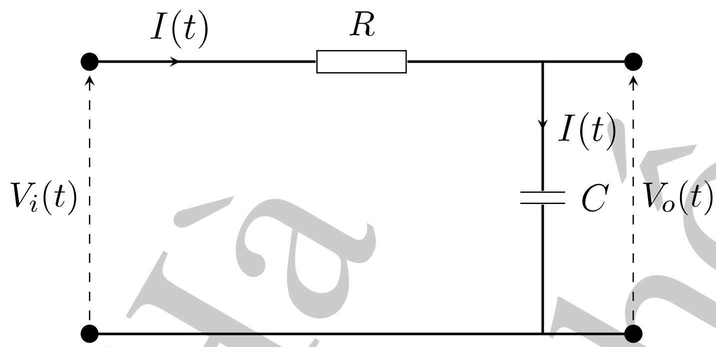
Phương trình vi phân là công cụ toán học cơ bản cho việc mô hình hóa các hệ thống động. Phần lớn các định luật vật lý, mô tả các quy luật chi phối sự vận động của thế giới vật lý của chúng ta, có biểu diễn toán học dưới dạng của phương trình vi phân. Mô hình toán học của các hệ thống vật lý, tự nhiên hay nhân tạo, đều chịu sự chi phối của các quy luật vật lý và vì vậy thường được thiết lập từ các phương trình vi phân của các định luật vật lý mô tả chúng. Nhưng mô hình phương trình vi phân có phạm vi áp dụng không chỉ giới hạn cho các hệ thống vật lý mà còn dùng được cho mọi loại hệ thống động, như các hệ thống chính trị và kinh tế.

Ví dụ 2.1. Hình 2.1 thể hiện sơ đồ nguyên lý của một mạch điện RC đơn giản, bao gồm một điện trở R và một tụ điện có điện dung C. Hiệu điện thế $V_i(t)$ đặt giữa hai đầu vào được coi là tín hiệu vào của mạch điện, tạo ra một dòng điện $I(t)$ chạy trong mạch điện. Hiệu điện thế giữa hai cực của tụ điện, ký hiệu là $V_o(t)$, được coi là tín hiệu ra của mạch điện. Dựa vào các định luật của Ohm và Kirchoff về dòng điện, chúng ta thiết lập được phương trình vi phân sau đây biểu diễn mối quan hệ giữa tín hiệu ra với tín hiệu vào của mạch điện RC này:

$$C\frac{dV_{\mathrm{o}}(t)}{dt} + \frac{V_{\mathrm{o}}(t)}{R} = \frac{V_{\mathrm{i}}(t)}{R} \tag{2.1}$$

Ví dụ 2.2. Sự thay đổi số dư của một tài khoản tiền gửi theo thời gian có thể biểu diễn được bằng phương trình vi phân sau đây:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t) + d(t) - w(t) \tag{2.2}$$



Hình 2.1: Mạch điện RC.

ở đó, $y(t)$ là số dư của tài khoản, r là một hằng số tương ứng với một tỷ lệ lãi suất cố định, còn $d(t)$ và $w(t)$ lần lượt là lượng tiền được gửi vào và rút ra tại thời điểm t.

Phương trình vi phân tuyến tính với các hệ số là hằng số, hay *phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng*, là loại phương trình vi phân được sử dụng để mô hình hóa các hệ thống tuyến tính bất biến liên tục. Dạng tổng quát của phương trình này đối với hệ thống có một biến vào và một biến ra được trình bày như sau:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l \frac{d^l y(t)}{dt^l} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \tag{2.3}$$

trong đó, $x(t)$ và $y(t)$ lần lượt là tín hiệu vào và tín hiệu ra của hệ thống, hằng số a_l là hệ số của đạo hàm bậc l của tín hiệu ra $y(t)$, và b_m là hệ số của đạo hàm bậc m của tín hiệu vào $x(t)$.

Nếu hệ thống nhân quả và có một số *điều kiện đầu* (giá trị của $y(t)$ và các đạo hàm của $y(t)$ tại ngay trước thời điểm khởi đầu quy ước $t = 0$) khác "0", tín hiệu ra $y(t)$, hay đáp ứng của hệ thống, sẽ bao gồm hai thành phần:

$$y(t) = y_0(t) + y_s(t) \tag{2.4}$$

trong đó:

– $y_0(t)$ được gọi là *đáp ứng với điều kiện đầu* hay *đáp ứng tự nhiên* của hệ thống khi không có tín hiệu vào, nghĩa là, $y_0(t)$ phải là một nghiệm của *phương trình vi phân thuần nhất* sau đây:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l \frac{d^l y(t)}{dt^l} = 0 \tag{2.5}$$

và đồng thời, $y_0(t)$ phải thỏa mãn các điều kiện đầu của hệ thống

– $y_s(t)$ được gọi là *đáp ứng với tín hiệu vào* hay *đáp ứng bắt buộc* của hệ thống khi không xét tới điều kiện đầu, bao gồm một thành phần *nghiệm thuần nhất* và một thành phần là *nghiệm riêng* của phương trình vi phân với tín hiệu vào $x(t)$.

2.1.1 Xác định đáp ứng với điều kiện đầu

Thành phần $y_0(t)$ là đáp ứng của hệ thống với các điều kiện tại ngay trước thời điểm khởi đầu (ký hiệu $t = 0^-$ được dùng để chỉ thời điểm ngay trước thời điểm khởi đầu), khi chưa có tín hiệu vào (quy ước $x(t) = 0$ khi $t \in (-\infty, 0)$). Phương trình thuần nhất (2.5) có một nghiệm dưới dạng hàm mũ e^{st} trong đó s là một biến phức, thay vào $y(t)$ trong phương trình chúng ta thu được:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l s^l e^{st} = 0 \tag{2.6}$$

từ đó dẫn tới s là nghiệm của phương trình đại số bậc N sau đây:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l s^l = 0 \tag{2.7}$$

Phương trình (2.7) được gọi là *phương trình đặc trưng* của hệ thống. Ký hiệu các nghiệm của phương trình (2.7) là $\{s_k | k = 1..N\}$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2.5) sẽ có dạng sau đây nếu tất cả các $\{s_k\}$ đều là nghiệm đơn:

$$\sum_{k=1}^{N} c_k e^{s_k t} \tag{2.8}$$

Trong trường hợp phương trình (2.7) có nghiệm bội, dạng tổng quát của nghiệm thuần nhất sẽ là:

$$\sum_k \left(e^{s_k t} \sum_{i=0}^{p_k - 1} c_{ki} t^i \right) \tag{2.9}$$

trong đó, mỗi s_k là nghiệm bội bậc p_k của phương trình đặc trưng.

Các hệ số của nghiệm thuần nhất tương ứng với $y_0(t)$ được xác định từ các điều kiện đầu của hệ thống.

Ví dụ 2.3. Một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục được biểu diễn bởi phương trình vi phân sau đây:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \tag{2.10}$$

với các điều kiện đầu: $y(0^-) = 1$ và $dy(t)/dt|_{t=0^-} = 1$. Để tìm dạng nghiệm thuần nhất của phương trình vi phân, chúng ta cần giải phương trình đặc trưng dưới đây của hệ thống:

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \tag{2.11}$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt, $s_1 = -1$ và $s_2 = -2$. Do vậy, nghiệm thuần nhất của phương trình vi phân có dạng tổng quát là $c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$. Đó cũng là dạng của đáp ứng với điều kiện đầu, $y_0(t)$. Để xác định các hệ số c_1 và c_2 cho $y_0(t)$, chúng ta dùng các điều kiện đầu được cho ở trên:

$$y_0(0^-) = c_1 + c_2 = 1 \tag{2.12}$$

và

$$\left.\frac{dy_0(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -c_1 - 2c_2 = 1 \tag{2.13}$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính với hai ẩn c_1 và c_2, chúng ta thu được $c_1 = 3$ và $c_2 = -2 \to y_0(t) = (3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$ (hàm nhảy mức $u(t)$ xuất hiện trong công thức này để chỉ ra rằng $y_0(t)$ chỉ được xác định từ thời điểm $t = 0$).

2.1.2 Xác định đáp ứng với tín hiệu vào

Đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào khi tất cả các điều kiện đầu đều bằng “0”, $y_s(t)$, có hai thành phần: một thành phần là nghiệm thuần nhất và thành phần kia là nghiệm riêng của phương trình vi phân với tín hiệu vào $x(t)$. Thành phần nghiệm thuần nhất của $y_s(t)$ có dạng của nghiệm thuần nhất tổng quát đã xác định trước đó, với các hệ số chưa biết và sẽ được xác định sau. Thành phần nghiệm riêng của $y_s(t)$ thường có dạng tương tự dạng của tín hiệu vào $x(t)$ với các hệ số chưa biết và sẽ được xác định sau.

Cần lưu ý rằng, thành phần nghiệm riêng của $y_s(t)$ phải độc lập với tất cả các số hạng của nghiệm thuần nhất. Ví dụ, nếu $x(t) = e^{\alpha t}$, chúng ta cần xem xét các trường hợp sau:

– Nếu $e^{\alpha t}$ không phải là một phần của nghiệm thuần nhất, nghiệm riêng sẽ có dạng $ke^{\alpha t}$ với k là một hệ số sẽ được xác định sau
– Nếu α là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (2.7), điều đó có nghĩa $e^{\alpha t}$ là một thành phần của nghiệm thuần nhất, nghiệm riêng khi đó sẽ có dạng $kte^{\alpha t}$
– Nếu α là một nghiệm bội bậc p của phương trình đặc trưng (2.7) thì $e^{\alpha t}$, $te^{\alpha t}$,... cho tới $t^{p-1}e^{\alpha t}$ đều là các thành phần của nghiệm thuần nhất, khi đó nghiệm riêng sẽ có dạng $kt^pe^{\alpha t}$ để đảm bảo sự độc lập với tất cả các số hạng của nghiệm thuần nhất.

Để xác định các hệ số của các thành phần trong đáp ứng $y_s(t)$, chúng ta sẽ dùng tới các điều kiện đầu bằng “0” và phương pháp đồng nhất hệ số khi thay nghiệm riêng vào phương trình.

Ví dụ 2.4. Chúng ta sẽ tìm đáp ứng hệ thống đã cho trong Ví dụ 2.3 với một tín hiệu vào $x(t) = e^{-2t}u(t)$. Vì e^{-2t} là một thành phần của nghiệm thuần nhất, $y_s(t)$ sẽ có dạng như sau:

$$y_s(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{-2t} + k_3te^{-2t} \tag{2.14}$$

trong đó $k_1e^{-t} + k_2e^{-2t}$ là thành phần nghiệm thuần nhất và k_3te^{-2t} là nghiệm riêng của phương trình vi phân với tín hiệu vào $x(t)$ đã cho.

Để xác định các hệ số k_1, k_2 và k_3, trước hết chúng ta sẽ dùng các điều kiện đầu bằng “0” như sau:

$$y_s(0^-) = k_1 + k_2 = 0 \tag{2.15}$$

và

$$\left.\frac{dy_s(t)}{dt}\right|_{t=0^-} = -k_1 - 2k_2 + k_3 = 0 \tag{2.16}$$

Bước tiếp theo, thay $y(t)$ bằng biểu thức của $y_s(t)$ và $x(t)$ bằng tín hiệu vào đã cho ở trên vào phương trình (2.10). Vì thành phần nghiệm thuần nhất sẽ triệt tiêu khi thay vào phương trình vi phân nên trong thực tế chúng ta chỉ cần thay $y(t)$ bằng nghiệm riêng k_3te^{-2t}, và thu được phương trình sau đây:

$$k_3(-4e^{-2t} + 4te^{-2t}) + 3k_3(e^{-2t} - 2te^{-2t}) + 2k_3te^{-2t} = e^{-2t} \tag{2.17}$$

hay

$$-k_3e^{-2t} = e^{-2t} \tag{2.18}$$

từ đó chúng ta có được $k_3 = -1$.

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính được thiết lập ở trên với ẩn số là các hệ số k_1, k_2 và k_3, chúng ta có được $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ và $k_3 = -1$, từ đó dẫn tới kết quả sau đây cho $y_s(t)$:

$$y_s(t) = (e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t})u(t) \tag{2.19}$$

Ví dụ 2.5. Xét hệ thống tuyến tính bất biến liên tục có phương trình với các điều kiện đầu như trong Ví dụ 2.3 và tín hiệu vào được cho như trong Ví dụ 2.4. Đáp ứng đầy đủ của hệ thống này sẽ là tổng hợp các kết quả của hai ví dụ nói trên, nghĩa là:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0(t) + y_s(t) \\ &= (3e^{-t} - 2e^{-2t})u(t) + (e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t})u(t) \\ &= (4e^{-t} - 3e^{-2t} - te^{-2t})u(t) \end{aligned} \tag{2.20}$$

2.2 Phương trình sai phân của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc

Mô hình toán học biểu diễn một hệ thống theo thời gian rời rạc có thể thiết lập được bằng cách rời rạc hóa một biểu diễn của hệ thống liên tục tương ứng. Trong toán học, người ta có các phương pháp xấp xỉ một phương trình vi phân của các biến liên tục bằng *phương trình sai phân* của các biến rời rạc, theo đó các biến rời rạc của phương trình sai phân chính là các chuỗi giá trị lấy mẫu của các biến liên tục tương ứng từ phương trình vi phân được xấp xỉ. Đó là cơ sở cho các phương pháp số dùng để giải phương trình vi phân, cũng là cơ sở của việc xây dựng mô hình phương trình sai phân cho các hệ thống rời rạc.

Ví dụ 2.6. Một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục được mô tả bằng phương trình vi phân sau đây:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t) \tag{2.21}$$

Sử dụng công thức xấp xỉ đạo hàm:

$$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT_s-T_s} \approx \frac{y(nT_s) - y(nT_s - T_s)}{T_s} \tag{2.22}$$

chúng ta thu được phương trình sai phân sau đây, có thể coi là mô hình biểu diễn một hệ thống tuyến tính rời rạc được "lấy mẫu" từ hệ thống liên tục nói trên với chu kỳ lấy mẫu T_s:

$$\frac{y[n] - y[n-1]}{T_s} + ay[n-1] = bx[n-1] \tag{2.23}$$

hay

$$y[n] + (aT_s - 1)y[n-1] = bT_s x[n-1] \tag{2.24}$$

Phương trình sai phân tuyến tính với các hệ số là hằng số, hay *phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng*, là loại phương trình sai phân được sử dụng để mô hình hóa các hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc. Dạng tổng quát của phương trình này đối với hệ thống có một biến vào và một biến ra được trình bày như sau:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l y[n-l] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \tag{2.25}$$

trong đó, $x[n]$ và $y[n]$ lần lượt là tín hiệu vào và tín hiệu ra của hệ thống, các hằng số $\{a_l\}$ và $\{b_m\}$ là hệ số của phương trình.

Tương tự như đối với hệ thống liên tục, nếu hệ thống rời rạc nhân quả và có một số *điều kiện đầu* (giá trị của các $\{y[n-l]|l = 1..N\}$ tại thời điểm khởi đầu quy ước $n = 0$) khác "0", tín hiệu ra $y[n]$, hay đáp ứng của hệ thống, sẽ bao gồm hai thành phần:

$$y[n] = y_0[n] + y_s[n] \tag{2.26}$$

trong đó:

– $y_0[n]$ được gọi là *đáp ứng với điều kiện đầu* hay *đáp ứng tự nhiên* của hệ thống khi không có tín hiệu vào, nghĩa là, $y_0[n]$ phải là một nghiệm của *phương trình sai phân thuần nhất* sau đây:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l y[n-l] = 0 \tag{2.27}$$

và đồng thời, $y_0[n]$ phải thỏa mãn các điều kiện đầu của hệ thống

– $y_s[n]$ được gọi là *đáp ứng với tín hiệu vào* hay *đáp ứng bắt buộc* của hệ thống khi không xét tới điều kiện đầu, bao gồm một thành phần *nghiệm thuần nhất* và một thành phần là *nghiệm riêng* của phương trình sai phân với tín hiệu vào $x[n]$.

2.2.1 Xác định đáp ứng với điều kiện đầu

Thành phần $y_0[n]$ là đáp ứng của hệ thống với các điều kiện tại ngay trước thời điểm khởi đầu, khi chưa có tín hiệu vào (quy ước $x[n] = 0$ khi $n \in (-\infty, -1]$). Phương trình thuần nhất (2.27) có một nghiệm dưới dạng hàm mũ z^n trong đó z là một biến phức, thay vào $y[n]$ trong phương trình chúng ta thu được:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l z^{n-l} = 0 \tag{2.28}$$

hay

$$z^{n-N} \sum_{l=0}^{N} a_l z^{N-l} = 0 \tag{2.29}$$

từ đó dẫn tới z là nghiệm của phương trình đại số bậc N sau đây:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l z^{N-l} = 0 \tag{2.30}$$

Phương trình (2.30) được gọi là *phương trình đặc trưng* của hệ thống. Ký hiệu các nghiệm của phương trình (2.30) là $\{z_k | k = 1..N\}$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (2.27) sẽ có dạng sau đây nếu tất cả các $\{z_k\}$ đều là nghiệm đơn:

$$\sum_{k=1}^{N} c_k {z_k}^n \tag{2.31}$$

Trong trường hợp phương trình (2.30) có nghiệm bội, dạng tổng quát của nghiệm thuần nhất sẽ là:

$$\sum_{k} \left(z_k^n \sum_{i=0}^{p_k-1} c_{ki} n^i \right) \tag{2.32}$$

trong đó, mỗi z_k là nghiệm bội bậc p_k của phương trình đặc trưng.

Các hệ số của nghiệm thuần nhất tương ứng với $y_0[n]$ được xác định từ các điều kiện đầu của hệ thống.

Ví dụ 2.7. Một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc được biểu diễn bởi phương trình sai phân sau đây:

$$y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] \tag{2.33}$$

với các điều kiện đầu: $y[-1] = 1$ và $y[-2] = 1$. Để tìm dạng nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân, chúng ta cần giải phương trình đặc trưng dưới đây của hệ thống:

$$z^2 + 3z + 2 = 0 \tag{2.34}$$

Phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt, $z_1 = -1$ và $z_2 = -2$. Do vậy, nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân có dạng tổng quát là $c_1(-1)^n + c_2(-2)^n$. Đó cũng là dạng của đáp ứng với điều kiện đầu, $y_0[n]$. Để xác định các hệ số c_1 và c_2 cho $y_0(t)$, chúng ta dùng các điều kiện đầu được cho ở trên:

$$y_0[-1] = -c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 1 \tag{2.35}$$

và

$$y_0[-2] = c_1 + \frac{1}{4}c_2 = 1 \tag{2.36}$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính với hai ẩn c_1 và c_2, chúng ta thu được $c_1 = 3$ và $c_2 = -8 \rightarrow y_0[n] = [3(-1)^n - 8(-2)^n]u[n]$ (hàm nhảy mức $u[n]$ xuất hiện trong công thức này để chỉ ra rằng $y_0[n]$ chỉ được xác định từ thời điểm $n = 0$).

2.2.2 Xác định đáp ứng với tín hiệu vào

Đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào khi tất cả các điều kiện đầu đều bằng “0”, $y_s[n]$, có hai thành phần: một thành phần là nghiệm thuần nhất và thành phần kia là nghiệm riêng của phương trình sai phân với tín hiệu vào $x[n]$. Thành phần nghiệm thuần nhất của $y_s[n]$ có dạng của nghiệm thuần nhất tổng quát đã xác định trước đó, với các hệ số chưa biết và sẽ được xác định sau. Thành phần nghiệm riêng của $y_s[n]$ thường có dạng tương tự dạng của tín hiệu vào $x[n]$ với các hệ số chưa biết và sẽ được xác định sau.

Cần lưu ý rằng, thành phần nghiệm riêng của $y_s[n]$ phải độc lập với tất cả các số hạng của nghiệm thuần nhất. Ví dụ, nếu $x[n] = \alpha^n$, chúng ta cần xem xét các trường hợp sau:

– Nếu α^n không phải là một phần của nghiệm thuần nhất, nghiệm riêng sẽ có dạng $k\alpha^n$ với k là một hệ số sẽ được xác định sau
– Nếu α là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (2.30), điều đó có nghĩa α^n là một thành phần của nghiệm thuần nhất, nghiệm riêng khi đó sẽ có dạng $kn\alpha^n$
– Nếu α là một nghiệm bội bậc p của phương trình đặc trưng (2.30) thì α^n, $n\alpha^n$,... cho tới $n^{p-1}\alpha^n$ đều là các thành phần của nghiệm thuần nhất, khi đó nghiệm riêng sẽ có dạng $kn^p\alpha^n$ để đảm bảo sự độc lập với tất cả các số hạng của nghiệm thuần nhất.

Để xác định các hệ số của các thành phần trong đáp ứng $y_s[n]$, chúng ta sẽ dùng tới các điều kiện đầu bằng “0” và thiết lập các phương trình cho các hệ số ứng với các giá trị của $y_s[n]$ khi $n = 0, 1, \ldots$.

Ví dụ 2.8. Chúng ta sẽ tìm đáp ứng hệ thống đã cho trong Ví dụ 2.7 với một tín hiệu vào $x[n] = [2^n + (-2)^n]u[n]$. Vì 2^n không phải là một thành phần của nghiệm thuần nhất, còn $(-2)^n$ lại là một thành phần của nghiệm thuần nhất, $y_s[n]$ sẽ có dạng như sau:

$$y_s[n] = k_1(-1)^n + k_2(-2)^n + k_3 2^n + k_4 n(-2)^n \tag{2.37}$$

trong đó $k_1(-1)^n + k_2(-2)^n$ là thành phần nghiệm thuần nhất và $k_3 2^n + k_4 n(-2)^n$ là nghiệm riêng của phương trình sai phân với tín hiệu vào $x[n]$ đã cho.

Lưu ý rằng các điều kiện đầu ứng với $y_s[n]$ đều bằng “0”, nghĩa là $y_s[-1] = 0$ và $y_s[-2] = 0$. Để xác định các hệ số k_1, k_2, k_3 và k_4 cần tới bốn phương trình, vì vậy trước hết bốn giá trị của $y_s[n]$ với $n = 0, 1, 2, 3$ sẽ được tính một cách đệ quy như sau:

$$y_s[0] = -3y_s[-1] - 2y_s[-2] + x[0] = 2 \tag{2.38}$$
$$y_s[1] = -3y_s[0] - 2y_s[-1] + x[1] = -6 \tag{2.39}$$
$$y_s[2] = -3y_s[1] - 2y_s[0] + x[2] = 22 \tag{2.40}$$
$$y_s[3] = -3y_s[2] - 2y_s[1] + x[3] = -54 \tag{2.41}$$

Các phương trình sau đây được thiết lập với ẩn số là các hệ số k_1, k_2, k_3, và k_4 của $y_s[n]$ từ bốn giá trị của $y_s[n]$ ở trên:

$$k_1 + k_2 + k_3 = 2 \tag{2.42}$$
$$-k_1 - 2k_2 + 2k_3 - 2k_4 = -6 \tag{2.43}$$
$$k_1 + 4k_2 + 4k_3 + 8k_4 = 22 \tag{2.44}$$
$$-k_1 - 8k_2 + 8k_3 - 24k_4 = -54 \tag{2.45}$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính này cho kết quả $k_1 = 2/3$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1/3$, và $k_4 = 2$, từ đó dẫn tới $y_s[n]$ được xác định như sau:

$$y_s[n] = \left[\frac{2}{3}(-1)^n + (-2)^n + \frac{1}{3}2^n + 2n(-2)^n\right]u[n] \tag{2.46}$$

Ví dụ 2.9. Xét hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc có phương trình với các điều kiện đầu như trong Ví dụ 2.7 và tín hiệu vào được cho như trong Ví dụ 2.8. Đáp ứng đầy đủ của hệ thống này sẽ là tổng hợp các kết quả của hai ví dụ nói trên, nghĩa là:

$$\begin{aligned}
y[n] &= y_0[n] + y_s[n] \\
&= [3(-1)^n - 8(-2)^n]u[n] \\
&\quad + \left[\frac{2}{3}(-1)^n + (-2)^n + \frac{1}{3}2^n + 2n(-2)^n\right]u[n] \\
&= \left[\frac{11}{3}(-1)^n - 7(-2)^n + \frac{1}{3}2^n + 2n(-2)^n\right]u[n]
\end{aligned} \tag{2.47}$$

2.3 Biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến liên tục dựa trên đáp ứng xung

2.3.1 Tích chập của hai tín hiệu liên tục

Tích chập, hay kết quả của một *phép nhân chập*, của hai tín hiệu liên tục $f(t)$ và $g(t)$ được xác định bằng công thức sau đây:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad (2.48)$$

trong đó $*$ là ký hiệu của toán tử nhân chập.

Một đặc trưng quan trọng của phép nhân chập là tính tuyến tính bất biến của nó. Mọi phép toán có tính tuyến tính bất biến đều có thể biểu diễn bằng phép nhân chập. Ví dụ, hàm tương quan giữa hai tín hiệu, do bản chất tuyến tính bất biến của phép tính tương quan, có thể biểu diễn bằng một phép nhân chập như sau:

$$R_{fg}(t) = f(t) * g^*(-t) \qquad (2.49)$$

Do vậy, phép nhân chập chính là cơ sở của loại mô hình biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến trong miền thời gian tiếp theo sẽ được giới thiệu trong phần này.

Một số tính chất của phép nhân chập liên tục

Phép nhân chập có *tính giao hoán*:

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t) \qquad (2.50)$$

Phép nhân chập có *tính kết hợp*:

$$[f(t) * g(t)] * h(t) = f(t) * [g(t) * h(t)] \qquad (2.51)$$

Phép nhân chập có *tính phân phối*:

$$[f(t) + g(t)] * h(t) = f(t) * h(t) + g(t) * h(t) \qquad (2.52)$$

Các tính chất kể trên của phép nhân chập rất giống với các tính chất của phép nhân thường, vì vậy với các biểu thức chỉ bao gồm các phép tính nhân chập, cộng và/hoặc trừ, thứ tự thực hiện các phép toán và cách khai triển biểu thức sẽ giống như cách chúng ta vẫn làm với các biểu thức của các phép toán nhân, cộng và trừ, chỉ thay phép nhân thường bằng phép nhân chập. Nếu biểu thức bao gồm cả nhân chập, nhân và/hoặc chia, các phép nhân và chia sẽ có thứ tự ưu tiên cao hơn phép nhân chập.

Nếu một trong hai tín hiệu của tích chập $x(t) = f(t) * g(t)$ bị dịch đi một khoảng theo trục thời gian, tích chập $x(t)$ cũng sẽ bị dịch đi một khoảng đúng bằng vậy, nghĩa là:

$$x(t - T) = f(t - T) * g(t) = f(t) * g(t - T) \qquad (2.53)$$

Tín hiệu xung đơn vị $\delta(t)$ đóng vai trò *hàm đơn vị* đối với phép nhân chập, nghĩa là:

$$\forall f(t) : f(t) * \delta(t) = f(t) \qquad (2.54)$$

Phép nhân chập là một phép toán có *tính nhân quả*: nếu $f(t)$ và $g(t)$ là các tín hiệu nhân quả thì tích chập $f(t) * g(t)$ cũng nhân quả.

Ví dụ sau đây sẽ minh họa cách tính tích chập của hai tín hiệu liên tục, đồng thời sẽ giúp chỉ ra bản chất tuyến tính bất biến của phép nhân chập.

Ví dụ 2.10. Trong ví dụ này, đồ thị sẽ được sử dụng để minh họa việc tính tích chập của hai tín hiệu liên tục $f(t) = e^{-t}u(t)$ và $g(t) = u(t) - u(t-1)$.

Theo công thức tính tích chập (2.48), trước hết chúng ta cần có đồ thị của $f(\tau)$ và $g(t-\tau)$. Đồ thị của $f(\tau)$ chính là đồ thị của $f(t)$, chỉ cần đổi biến t thành τ (Hình 2.2a).

Hàm $g(t-\tau)$ có được từ $g(\tau)$ sau hai thao tác: phản chiếu $g(\tau)$ để thu được $g(-\tau)$, sau đó dịch tín hiệu phản chiếu đi một khoảng bằng t (xuôi chiều trục τ nếu $t > 0$ và ngược chiều trục τ nếu $t < 0$) (Hình 2.2b).

Các trường hợp sau đây có thể xảy ra khi xác định tích $f(\tau)g(t-\tau)$, với các kết quả của tích chập (2.48) tương ứng như sau:

– Nếu $t < 0$:

$$\forall\tau : f(\tau)g(t-\tau) = 0 \tag{2.55}$$

và

$$f(t) * g(t) = 0 \tag{2.56}$$

– Nếu $t - 1 < 0 \leq t$, hay $0 \leq t < 1$:

$$f(\tau)g(t-\tau) = \begin{cases} e^{-\tau} & \tau \in [0,t] \\ 0 & \tau \notin [0,t] \end{cases} \tag{2.57}$$

và

$$f(t) * g(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t} \tag{2.58}$$

– Nếu $0 \leq t - 1$, hay $t \geq 1$ (Hình 2.2c minh họa cho trường hợp này):

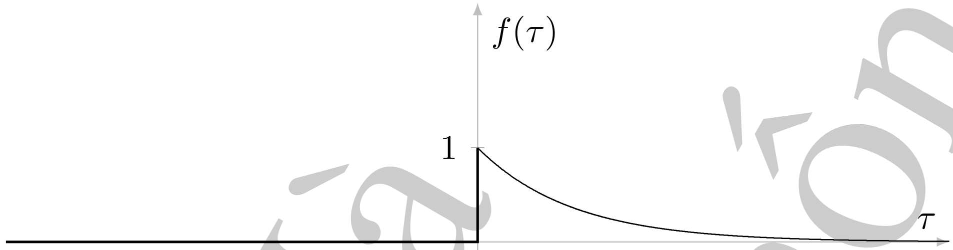
$$f(\tau)g(t-\tau) = \begin{cases} e^{-\tau} & \tau \in [t-1,t] \\ 0 & \tau \notin [t-1,t] \end{cases} \tag{2.59}$$

và

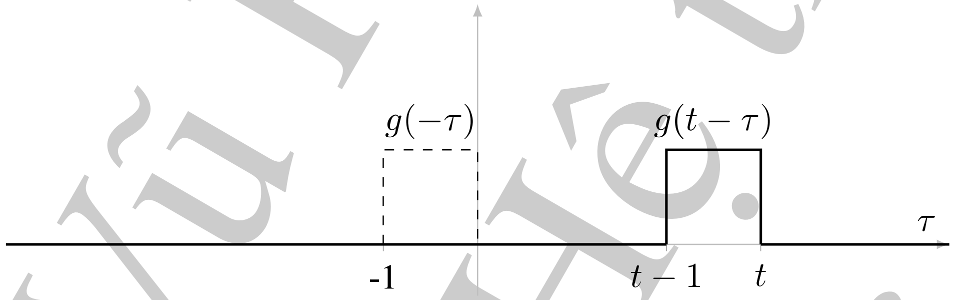
$$f(t) * g(t) = \int_{t-1}^t e^{-\tau} d\tau = e^{-t}(e-1) \tag{2.60}$$

Kết quả của phép nhân chập được thể hiện bởi đồ thị trong Hình 2.2d.

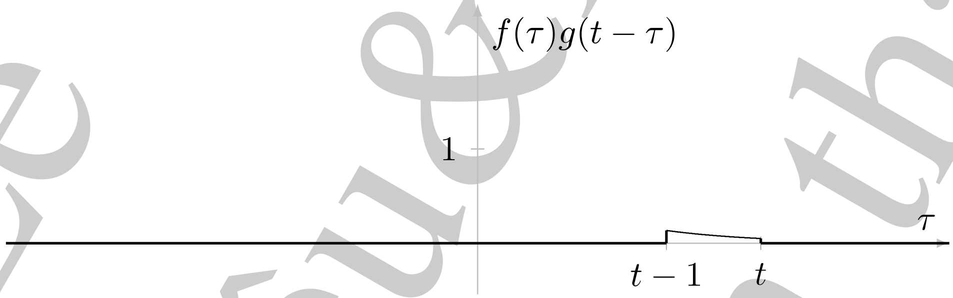
Nếu chúng ta biểu diễn phép nhân chập với một tín hiệu $g(t)$ như một phép biến đổi áp dụng cho tín hiệu $f(t)$: $\mathbf{T}(f(t)) = f(t) * g(t)$, $\mathbf{T}$ là một biến đổi tuyến tính bất biến. Như được minh họa bởi các đồ thị trong Ví dụ 2.2, phép tích phân để tính tích chập (2.48) tại một thời điểm t có thể được coi như một "tổ hợp tuyến tính" của các thành phần $f(\tau)$ với $g(t-\tau)$ đóng vai trò "hệ số" của $f(\tau)$ trong tổ hợp tuyến tính này (τ ở đây đóng vai trò biến thời gian của tín hiệu vào và t trở thành biến thời gian của kết quả). "Hệ số" này là cố định nếu xét theo quan hệ với thời điểm t của kết quả và không phụ thuộc vào vị trí điểm gốc của trục thời gian t, vì vậy phép tích phân nói trên không chỉ tuyến tính mà còn bất biến theo thời gian.



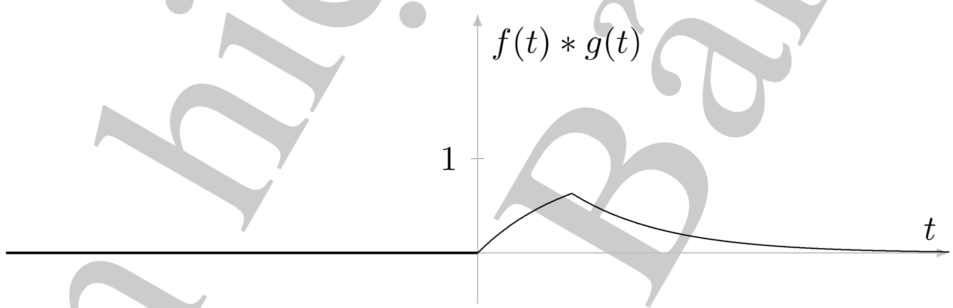
(a) Đồ thị $f(\tau) = e^{-\tau}u(\tau)$.



(b) Đồ thị $g(-\tau)$ và $g(t-\tau)$ với $g(\tau) = u(\tau) - u(\tau - 1)$.



(c) Đồ thị $f(\tau)g(t-\tau)$.



(d) Đồ thị $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$.

Hình 2.2: Minh họa cách tính tích chập của hai tín hiệu liên tục.

2.3.2 Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến liên tục

Xem xét một hệ thống tuyến tính bất biến được biểu diễn bằng quan hệ $y(t) = \mathbf{T}(x(t))$, chúng ta có thể biến đổi biểu diễn này bằng cách sử dụng các tính chất tuyến tính và bất biến của biến đổi $\mathbf{T}$ và định nghĩa cùng với tính chất của phép nhân chập như sau:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathbf{T}(x(t) * \delta(t)) \\
&= \mathbf{T}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\mathbf{T}(\delta(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= x(t) * h(t) \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

trong đó, $h(t) = \mathbf{T}(\delta(t))$ được gọi là *đáp ứng xung* của hệ thống được biểu diễn bởi biến đổi $\mathbf{T}$.

Công thức (2.61) chỉ ra rằng, quan hệ giữa tín hiệu ra với tín hiệu vào của hệ thống tuyến tính bất biến có thể biểu diễn được thông qua phép nhân chập với đáp ứng xung $h(t)$ của hệ thống. Điều đó có nghĩa là, hệ thống xác định nếu đáp ứng xung của nó xác định. Về lý thuyết, chúng ta có thể xác định được đáp ứng xung của một hệ thống mà không cần biết tới thiết kế bên trong của nó bằng cách đặt tín hiệu xung đơn vị $\delta(t)$ lên lối vào của hệ thống, tín hiệu thu được trên lối ra khi đó sẽ chính là đáp ứng xung. Trong thực tế, đáp ứng xung được xác định bằng phương pháp đo đạc như vậy không thể chính xác do tín hiệu dạng xung lý tưởng như $\delta(t)$ không thể tồn tại một cách vật lý. Mặc dù vậy, đáp ứng xung được đo đạc một cách trực tiếp hoặc gián tiếp vẫn được coi là một trong những đặc trưng quan trọng nhất của hệ thống tuyến tính bất biến.

2.3.3 Phân tích đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến liên tục

Chúng ta sẽ khảo sát một số đặc trưng của hệ thống tuyến tính bất biến liên tục có mối quan hệ vào-ra được biểu diễn dưới dạng một tích chập $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$.

Đáp ứng xung của hệ thống không có bộ nhớ (hệ thống tĩnh)

Để hệ thống không cần có bộ nhớ, nghĩa là giá trị của tín hiệu ra chỉ phụ thuộc giá trị của tín hiệu vào tại cùng thời điểm, giá trị của $h(t-\tau)$ bên trong tích phân phải bằng "0" cả khi $\tau < t$ (ứng với $x(\tau)$ là một giá trị vào quá khứ so với thời điểm t của tín hiệu ra) và khi $\tau > t$ (ứng với $x(\tau)$ là một giá trị vào tương lai so với thời điểm t của tín hiệu ra), và chỉ có thể khác "0" khi $\tau = t$. Vì vậy, đáp ứng xung $h(t)$ của một hệ thống tuyến tính bất biến không có bộ nhớ (hệ thống tĩnh) chỉ có thể khác "0" khi $t = 0$. Nói một cách khác, đáp ứng xung của một hệ thống tuyến tính bất biến không có bộ nhớ có dạng $h(t) = c\delta(t)$ với c là một hằng số nào đó.

Đáp ứng xung và tính nhân quả của hệ thống

Hệ thống nói trên nhân quả khi đáp ứng của hệ thống không được phụ thuộc vào các giá trị tương lai của tín hiệu vào, nghĩa là giá trị của $h(t-\tau)$ bên trong tích phân luôn phải bằng "0" khi $\tau > t$ (ứng với $x(\tau)$ là một giá trị vào tương lai so với thời điểm t của tín hiệu ra). Vì vậy, đáp ứng xung $h(t)$ của một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả phải luôn bằng "0" khi $t < 0$, hay nói một cách khác, $h(t)$ phải là tín hiệu nhân quả. Một cách tổng quát, tính nhân quả của hệ thống tuyến tính bất biến hoàn toàn đồng nhất với tính nhân quả của đáp ứng xung.

Đáp ứng xung và tính ổn định của hệ thống

Điều kiện ổn định của hệ thống được phát biểu trong định lý sau đây.

Định lý 2.1. *Hệ thống tuyến tính bất biến liên tục có đáp ứng xung $h(t)$ là một hệ thống ổn định theo điều kiện BIBO <u>khi và chỉ khi</u> điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty \tag{2.62}$$

Chứng minh. Giả thiết hệ thống ổn định theo điều kiện BIBO, chúng ta chọn tín hiệu $x(t) = \mathrm{sgn}[h(-t)]$ làm tín hiệu vào cho hệ thống. Tín hiệu vào được chọn như trên rõ ràng là một tín hiệu bị chặn do $\forall t : |x(t)| = 1$, vì vậy theo Định nghĩa 1.3 tín hiệu ra $y(t)$ cũng phải bị chặn, nghĩa là $|y(t)| < \infty$. Thay $y(t)$ bằng tích chập của $x(t)$ và đáp ứng xung $h(t)$, và cho $t = 0$, chúng ta thu được:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(-\tau)d\tau \right| < \infty \tag{2.63}$$

hay

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(-\tau)|d\tau < \infty \tag{2.64}$$

do $|x(\tau)| = 1$ và $x(\tau)h(-\tau) \geq 0$. Đổi biến $\tau \to -t$, bất đẳng thức trên trở thành:

$$\int_{+\infty}^{-\infty} -|h(t)|dt < \infty \tag{2.65}$$

hay

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty \tag{2.66}$$

chính là điều kiện chúng ta cần chứng minh.

Ở chiều ngược lại, giả thiết đáp ứng xung của hệ thống thỏa mãn điều kiện (2.62). Chọn một tín hiệu vào bị chặn bất kỳ, nghĩa là $|x(t)| \leq \alpha < \infty$ với một giá trị thực dương α nào đó. Để chứng minh hệ thống ổn định theo điều kiện BIBO, chúng ta cần chứng minh tín hiệu ra $y(t)$ cũng phải bị chặn, nghĩa là $|y(t)| < \infty$. Thay $y(t)$ bằng tích chập của $x(t)$ và đáp ứng xung $h(t)$, và thực hiện các bước biến đổi như sau:

$$\begin{aligned}
|y(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha|h(t-\tau)|d\tau \\
&= \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} |h(-\tau)|d\tau
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Đổi biến $\tau \to -t$ ở dòng cuối của chuỗi biến đổi trên, chúng ta thu được bất đẳng thức sau đây:

$$|y(t)| \leq \alpha\int_{+\infty}^{-\infty} -|h(t)|dt = \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty \tag{2.68}$$

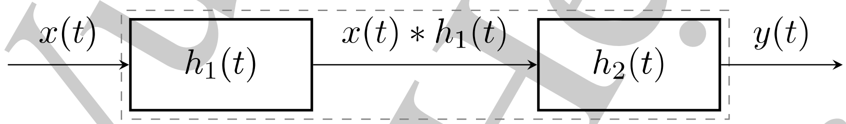
vì $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt$ hữu hạn theo điều kiện (2.62). Chúng ta đã chứng minh xong vế thứ hai, đồng thời hoàn tất việc chứng minh Định lý 2.1.

2.3.4 Đáp ứng xung của các hệ thống phức hợp

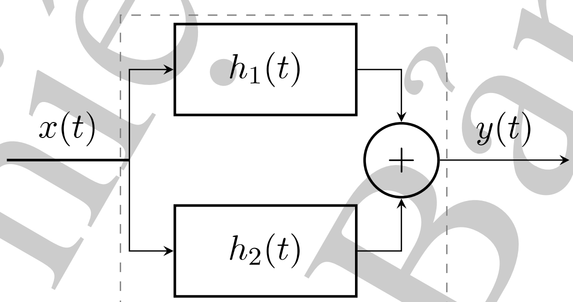
Một hệ thống được tạo ra từ hai hệ thống con tuyến tính bất biến cũng là hệ thống tuyến tính bất biến nếu hai hệ thống con của nó kết nối với nhau theo một trong các sơ đồ cơ bản sau đây: nối tiếp, song song, và phản hồi. Một hệ thống tuyến tính bất biến phức tạp vì vậy có thể xây dựng được từ các hệ thống con đơn giản chỉ với ba sơ đồ kết nối cơ bản nói trên, mô hình toán học của hệ thống phức hợp sẽ được xây dựng từ biểu diễn của các hệ thống con, được kết hợp với nhau theo các công thức tương ứng với các sơ đồ kết nối cơ bản.

Các hình 2.3 và 2.4 thể hiện *biểu diễn sơ đồ khối* của các hệ thống phức hợp được tạo ra từ hai hệ thống con tuyến tính bất biến có đáp ứng xung $h_1(t)$ và $h_2(t)$ theo lần lượt sơ đồ kết nối nối tiếp và sơ đồ kết nối song song. Đáp ứng xung $h(t)$ của hệ thống phức hợp trong cả hai trường hợp này đều xác định được dễ dàng từ các đáp ứng xung của các hệ thống con, với $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$ cho sơ đồ nối tiếp và $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ cho sơ đồ song song.

Riêng đối với sơ đồ phản hồi, việc xác định đáp ứng xung của hệ thống phức hợp sẽ rất khó thực hiện nếu chỉ dựa trên đáp ứng xung của các hệ thống con và các tích chập biểu diễn quan hệ vào-ra của các hệ thống con đó. Vì vậy, sơ đồ phản hồi sẽ chỉ được đề cập ở các chương sau, khi các phương pháp biểu diễn hệ thống thuận lợi cho việc tính toán với sơ đồ này được trình bày.



Hình 2.3: Sơ đồ khối của một hệ thống bao gồm hai hệ thống con nối tiếp nhau, có đáp ứng xung $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$.



Hình 2.4: Sơ đồ khối của một hệ thống bao gồm hai hệ thống con nối song song, có đáp ứng xung $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$.

2.4 Biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc dựa trên đáp ứng xung

2.4.1 Tích chập của hai tín hiệu rời rạc

Tích chập, hay kết quả của một *phép nhân chập*, của hai tín hiệu rời rạc $f[n]$ và $g[n]$ được xác định bằng công thức sau đây:

$$f[n] * g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]g[n-k] \tag{2.69}$$

Tích chập của hai tín hiệu rời rạc cũng có ý nghĩa tương tự như tích chập của hai tín hiệu liên tục, vì vậy phép nhân chập cũng là cơ sở của một mô hình biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc trong miền thời gian tương tự như mô hình biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến liên tục vừa được trình bày ở trên.

Một số tính chất của phép nhân chập rời rạc

Phép nhân chập rời rạc cũng có các tính chất như phép nhân chập liên tục, cụ thể là các tinh chất được trình bày sau đây.

Phép nhân chập có *tính giao hoán*:

$$f[n] * g[n] = g[n] * f[n] \tag{2.70}$$

Phép nhân chập có *tính kết hợp*:

$$(f[n] * g[n]) * h[n] = f[n] * (g[n] * h[n]) \tag{2.71}$$

Phép nhân chập có *tính phân phối*:

$$(f[n] + g[n]) * h[n] = f[n] * h[n] + g[n] * h[n] \tag{2.72}$$

Nếu một trong hai tín hiệu của tích chập $x[n] = f[n] * g[n]$ bị dịch đi một khoảng theo trục thời gian, tích chập $x[n]$ cũng sẽ bị dịch đi một khoảng đúng bằng vậy, nghĩa là:

$$x[n-k] = f[n-k] * g[n] = f[n] * g[n-k] \tag{2.73}$$

Tín hiệu xung đơn vị $\delta[n]$ đóng vai trò *hàm đơn vị* đối với phép nhân chập, nghĩa là:

$$\forall f[n] : f[n] * \delta[n] = f[n] \tag{2.74}$$

Phép nhân chập có *tính nhân quả*: nếu $f[n]$ và $g[n]$ là các tín hiệu nhân quả thì tích chập $f[n] * g[n]$ cũng nhân quả.

2.4.2 Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc

Xem xét một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc được biểu diễn bằng quan hệ $y[n] = \mathbf{T}(x[n])$, chúng ta có thể biến đổi biểu diễn này bằng cách sử dụng các tính chất tuyến tính và bất biến của biến đổi $\mathbf{T}$ và định nghĩa cùng với tính chất của phép nhân chập như sau:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T}(x[n] * \delta[n]) \\ &= \mathbf{T}\left(\sum_{k-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\mathbf{T}(\delta[n-k]) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \\ &= x[n] * h[n] \end{aligned} \tag{2.75}$$

trong đó, $h[n] = \mathbf{T}(\delta[n])$ được gọi là *đáp ứng xung* của hệ thống được biểu diễn bởi biến đổi $\mathbf{T}$.

2.4.3 Phân tích đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc

Với hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc có mối quan hệ vào-ra được biểu diễn dưới dạng một tích chập $y[n] = x[n]*h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$, các đặc trưng của đáp ứng xung của hệ thống cũng tương tự như các đặc trưng của đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến liên tục đã được trình bày ở trên.

Đáp ứng xung của hệ thống không có bộ nhớ (hệ thống tĩnh)

Đáp ứng xung $h[n]$ của một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc không có bộ nhớ (hệ thống tĩnh) chỉ có thể khác "0" khi $n = 0$. Nói một cách khác, đáp ứng xung của một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc không có bộ nhớ có dạng $h[n] = c\delta[n]$ với c là một hằng số nào đó.

Đáp ứng xung và tính nhân quả của hệ thống

Tính nhân quả của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc hoàn toàn đồng nhất với tính nhân quả của đáp ứng xung.

Đáp ứng xung và tính ổn định của hệ thống

Điều kiện ổn định của hệ thống được phát biểu trong định lý sau đây.

Định lý 2.2. *Hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc có đáp ứng xung $h[n]$ là một hệ thống ổn định theo điều kiện BIBO <u>khi và chỉ khi</u> điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \tag{2.76}$$

Phần chứng minh của định lý này hoàn toàn tương tự chứng minh của Định lý 2.1.

2.5 Mô hình biến trạng thái của hệ thống tuyến tính bất biến liên tục

Mô hình biến trạng thái sử dụng một tập hợp các *biến trạng thái* để mô tả trạng thái của hệ thống. Khi tín hiệu vào, hay tác động từ bên ngoài tới hệ thống, thay đổi, trạng thái của hệ thống cũng thay đổi, dẫn đến sự thay đổi của tín hiệu ra, hay đáp ứng của hệ thống đối với kích thích từ môi trường bên ngoài. Về mặt toán học, các mô hình biến trạng thái không biểu diễn mối quan hệ vào-ra của hệ thống một cách trực tiếp dưới dạng phương trình của các biến vào và biến ra, mà chia quá trình tác động từ biến vào tới biến ra thành nhiều bước thông qua các biến trạng thái đóng vai trò biến trung gian. Mô hình biến trạng thái vì vậy là một công cụ biểu diễn hệ thống rất mạnh, thích hợp với các hệ thống rất phức tạp, đặc biệt là các hệ thống đa biến và phi tuyến. Việc sử dụng loại mô hình này cho các hệ thống tuyến tính bất biến không thực sự cần thiết, vì vậy phần này chỉ nhằm giới thiệu một số khái niệm cơ bản về mô hình.

Mô hình biến trạng thái của một hệ thống liên tục bao gồm hai loại phương trình. Loại thứ nhất là các *phương trình trạng thái*, thể hiện sự thay đổi của các biến trạng thái theo tín hiệu vào và trạng thái của hệ thống. Loại thứ hai là các *phương trình của biến ra*, dùng để xác định tín hiệu ra từ tín hiệu vào và trạng thái của hệ thống. Với mô hình của các hệ thống tuyến tính bất biến, phương trình trạng thái là các phương trình vi phân bậc nhất của các biến trạng thái, trong khi phương trình biến ra là các phương trình đại số bậc nhất.

Mô hình biến trạng thái giúp đưa ra định nghĩa rõ ràng hơn về các *hệ thống tĩnh* và *hệ thống động*. *Hệ thống tĩnh* là hệ thống có trạng thái không thay đổi, trong khi *hệ thống động* có trạng thái thay đổi do tác động của tín hiệu vào. Mô hình biểu diễn của hệ thống tĩnh không có các phương trình trạng thái mà chỉ bao gồm các phương trình đại số biểu diễn quan hệ giữa các tín hiệu vào và tín hiệu ra.

Xét một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục có M tín hiệu vào, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$, $x_M(t)$, và N tín hiệu ra, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\ldots$, $y_N(t)$. Một mô hình biến trạng thái của hệ thống với K biến trạng thái, $q_1(t)$, $q_2(t)$, $\ldots$, $q_K(t)$, là một hệ các phương trình như sau:

1. Các phương trình trạng thái:

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{K} a_{ij} q_j(t) + \sum_{k=1}^{M} b_{ik} x_k(t) \ (i = 1..K) \tag{2.77}$$

   trong đó, các hệ số $\{a_{ij}\}$ và $\{b_{ik}\}$ là các hằng số

2. Các phương trình của biến ra:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{K} c_{ij} q_j(t) + \sum_{k=1}^{M} d_{ik} x_k(t) \ (i = 1..N) \tag{2.78}$$

   trong đó, các hệ số $\{c_{ij}\}$ và $\{d_{ik}\}$ là các hằng số.

Để thuận tiện, người ta thường biểu diễn mô hình trạng thái dưới *dạng ma trận*. Gọi $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, và $\mathbf{q}(t)$ lần lượt là vector tín hiệu vào, vector tín hiệu ra, và vector trạng thái, được thiết lập như sau:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_M(t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{bmatrix}, \ \mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_K(t) \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

Mô hình biến trạng thái dạng ma trận của hệ thống gồm hai phương trình sau đây:

1. Phương trình trạng thái:

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \tag{2.80}$$

2. Phương trình của biến ra:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t) \tag{2.81}$$

Các ma trận $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, và $\mathbf{D}$ là các ma trận hệ số của mô hình, được thiết lập như sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{K1} & a_{K2} & \dots & a_{KK} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{K1} & b_{K2} & \dots & b_{KM} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1K} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NK} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1M} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & \dots & d_{NM} \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

2.5.1 Thiết lập mô hình biến trạng thái từ phương trình vi phân của hệ thống tuyến tính bất biến

Một hệ thống tuyến tính bất biến được mô tả bằng phương trình vi phân có dạng như đã được trình bày ở phần đầu chương:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l \frac{d^l y(t)}{dt^l} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} \quad (2.86)$$

Chúng ta có thể chuyển đổi mô hình phương trình vi phân nói trên thành mô hình biến trạng thái, các bước thực hiện như sau:

1. Ngoài tín hiệu vào $x(t)$, ký hiệu là biến vào $x_0(t)$, định nghĩa thêm M biến vào của mô hình biến trạng thái, chính là các đạo hàm của tín hiệu vào $x(t)$:

$$x_m(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} \; (m = 1..M) \tag{2.87}$$

2. Gọi tín hiệu ra $y(t)$ là một biến trạng thái, ký hiệu $q_1(t)$, và định nghĩa thêm $N-1$ biến trạng thái của mô hình từ các đạo hàm của tín hiệu ra $y(t)$:

$$q_{l+1}(t) = \frac{d^l y(t)}{dt^l} \; (l = 1..N-1) \tag{2.88}$$

3. Các phương trình trạng thái của mô hình được thiết lập như sau:

$$\frac{dq_l(t)}{dt} = q_{l+1}(t) \; (l = 1..N-1) \tag{2.89}$$

$$\frac{dq_N(t)}{dt} = -\sum_{l=0}^{N-1} \frac{a_l}{a_N} q_{l+1}(t) + \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_N} x_m(t) \tag{2.90}$$

4. Cuối cùng là phương trình của biến ra, có dạng rất đơn giản:

$$y(t) = q_1(t) \tag{2.91}$$

2.6 Mô hình biến trạng thái của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc

Trong mô hình biến trạng thái của các hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc, phương trình trạng thái là các phương trình sai phân của các biến trạng thái, trong khi phương trình biến ra cũng là các phương trình đại số bậc nhất của các biến rời rạc.

Xét một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục có M tín hiệu vào, $x_1[n]$, $x_2[n]$, $\ldots$, $x_M[n]$, và N tín hiệu ra, $y_1[n]$, $y_2[n]$, $\ldots$, $y_N[n]$. Một mô hình biến trạng thái của hệ thống với K biến trạng thái, $q_1[n]$, $q_2[n]$, $\ldots$, $q_K[n]$, là một hệ các phương trình như sau:

1. Các phương trình trạng thái, dùng để xác định trạng thái tiếp theo của hệ thống từ giá trị hiện tại của các biến trạng thái và tín hiệu vào:

$$q_i[n+1] = \sum_{j=1}^{K} a_{ij} q_j[n] + \sum_{k=1}^{M} b_{ik} x_k[n] \; (i = 1..K) \tag{2.92}$$

   trong đó, các hệ số $\{a_{ij}\}$ và $\{b_{ik}\}$ là các hằng số
2. Các phương trình của biến ra, dùng để xác định giá trị của các tín hiệu ra từ giá trị hiện tại của các biến trạng thái và tín hiệu vào:

$$y_i[n] = \sum_{j=1}^{K} c_{ij} q_j[n] + \sum_{k=1}^{M} d_{ik} x_k[n] \; (i = 1..N) \tag{2.93}$$

   trong đó, các hệ số $\{c_{ij}\}$ và $\{d_{ik}\}$ là các hằng số.

Mô hình biến trạng thái dạng ma trận của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc có dạng như sau:

1. Phương trình trạng thái:

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{B}\mathbf{x}[n] \tag{2.94}$$

2. Phương trình của biến ra:

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{q}[n] + \mathbf{D}\mathbf{x}[n] \tag{2.95}$$

Trong mô hình ở trên, $\mathbf{x}[n]$, $\mathbf{y}[n]$, và $\mathbf{q}[n]$ lần lượt là vector tín hiệu vào, vector tín hiệu ra, và vector trạng thái, còn $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, và $\mathbf{D}$ là các ma trận hệ số của mô hình, được thiết lập tương tự như với mô hình của hệ thống liên tục đã trình bày trong phần trước.

2.6.1 Thiết lập mô hình biến trạng thái của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc từ mô hình của hệ thống liên tục

Mô hình biến trạng thái của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc có thể sinh ra được từ mô hình của hệ thống liên tục tương đương. Xem xét một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục được mô tả bởi mô hình biến trạng thái sau đây:

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \tag{2.96}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t) \tag{2.97}$$

Bằng cách rời rạc hóa các phương trình của mô hình trên với một chu kỳ lấy mẫu T_s và sử dụng công thức xấp xỉ đạo hàm:

$$\left.\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt}\right|_{t=nT_s} \approx \frac{\mathbf{q}(nT_s + T_s) - \mathbf{q}(nT_s)}{T_s} \tag{2.98}$$

chúng ta thu được mô hình sau đây cho một hệ thống rời rạc tương đương:

$$\mathbf{q}[n+1] = (T_s\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{q}[n] + T_s\mathbf{B}\mathbf{x}[n] \tag{2.99}$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{q}[n] + \mathbf{D}\mathbf{x}[n] \tag{2.100}$$

2.6.2 Thiết lập mô hình biến trạng thái từ phương trình sai phân của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc

Mô hình biến trạng thái cũng có thể thiết lập được từ phương trình sai phân của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc:

$$\sum_{l=0}^{N} a_l y[n-l] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] \tag{2.101}$$

Các bước thực hiện như sau:

1. Ngoài tín hiệu vào $x[n]$, ký hiệu là biến vào $x_0[n]$, định nghĩa thêm M biến vào của mô hình biến trạng thái:

$$x_m[n] = x[n-m]\ (m = 1..M) \tag{2.102}$$

2. Định nghĩa N biến trạng thái của mô hình như sau:

$$q_1[n] = y[n-N] \tag{2.103}$$
$$q_2[n] = y[n-N+1] \tag{2.104}$$
$$\dots \tag{2.105}$$
$$q_N[n] = y[n-1] \tag{2.106}$$

3. Các phương trình trạng thái của mô hình được thiết lập như sau:

$$q_l[n+1] = q_{l+1}[n] \ (l = 1..N-1) \tag{2.107}$$
$$q_N[n+1] = -\sum_{l=1}^{N} \frac{a_l}{a_0} q_{N-l+1}[n] + \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_0} x_m[n] \tag{2.108}$$

4. Vì $q_N[n+1] = y[n]$, phương trình của biến ra chính là phương trình dùng để tính $q_N[n+1]$ ở trên:

$$y[n] = -\sum_{l=1}^{N} \frac{a_l}{a_0} q_{N-l+1}[n] + \sum_{m=0}^{M} \frac{b_m}{a_0} x_m[n] \tag{2.109}$$