TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Chương 3: Biểu diễn hệ thống tuyến tính bất biến trong miền tần số

Phần 1: BIỂU DIỄN HỆ THỐNG LTI LIÊN TỤC

Trần Thị Thúy Quỳnh

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY, HANOI
VNU UNIVERSITY OF ENGINEERING & TECHNOLOGY

FACULTY OF ELECTRONICS
& TELECOMMUNICATIONS

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG DƯỚI DẠNG SIN PHỨC

Tín hiệu và hệ thống được biểu diễn dưới dạng sin phức được gọi là **phân tích Fourier**.

Joseph Fourier (1768 - 1830) là nhà khoa học đã phát triển lý thuyết này.

PHÂN LOẠI

Time Property	*Periodic*	*Nonperiodic*
Continuous (t)	Fourier Series (FS)	Fourier Transform (FT)
Discrete [n]	Discrete-Time Fourier Series (DTFS)	Discrete-Time Fourier Transform (DTFT)

NỘI DUNG

1. Biểu diễn tín hiệu liên tục tuần hoàn
2. Biểu diễn tín hiệu liên tục không tuần hoàn
3. Đáp ứng tần số

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN (Fourier Series - FS)

A. Tín hiệu tuần hoàn

Tín hiệu liên tục, tuần hoàn với chu kì T được biểu diễn bởi:

$$x(t+T) = x(t) \qquad \text{all } t$$

Với chu kỳ cơ sở T_0, tần số cơ sở $f_0 = 1/T_0$, và tần số góc cơ sở $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Hai tín hiệu tuần hoàn cơ bản có tần số góc cơ sở $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ dạng **sin thực** và **mũ phức** lần lượt là:

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$$

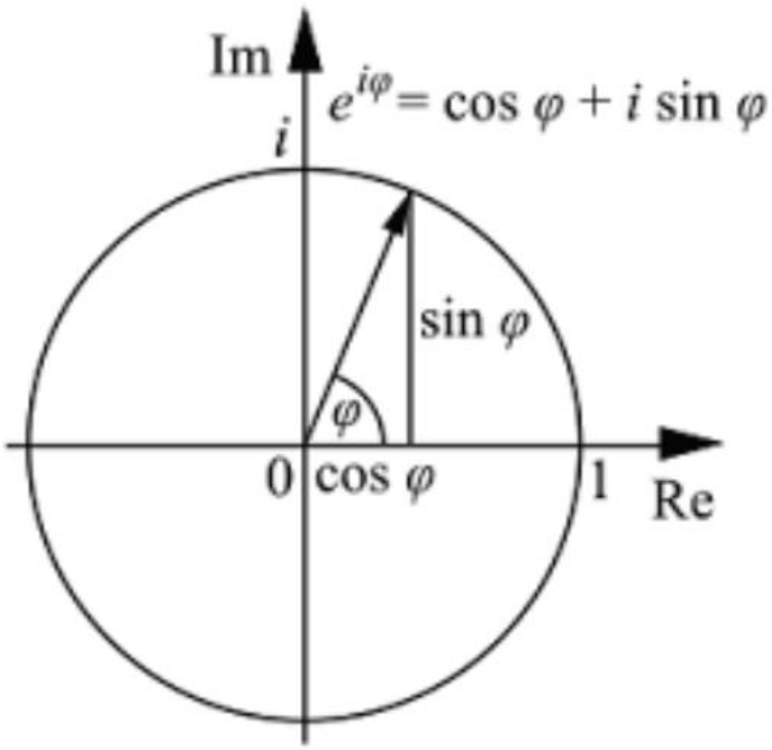
$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU DƯỚI DẠNG SIN PHỨC

$$\boxed{x(t) = e^{j\omega t}}$$

- **Công thức Euleur:**
  $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i.sin(\varphi)$

- $|e^{i\varphi}| = 1$
- $e^{i0} = 1, e^{i\pi} = -1, e^{i.2\pi} = 1$
- $e^{i\pi/2} = i, e^{i.3\pi/2} = -i$
- $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2\pi)}$



$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

B. Biểu diễn tín hiệu tuần hoàn dưới dạng mũ phức

Biểu diễn chuỗi Fourier mũ phức của tín hiệu $x(t)$ tuần hoàn có chu kì cơ sở T_0:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Với c_k là các ***hệ số Fourier phức*** được tính bởi:

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Tích phân được lấy trong khoảng từ 0 đến T_0 hoặc từ $-T_0/2$ đến $T_0/2$.

$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, dt$ là công thức tính trung bình $\mathrm{x(t)}$ trong khoảng thời gian T_0.

$c_{-k} = c_k^*$ khi $\mathrm{x(t)}$ là tín hiệu thực.

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

C. Biểu diễn tín hiệu tuần hoàn dưới dạng lượng giác

Biểu diễn chuỗi Fourier mũ phức của tín hiệu $x(t)$ thực tuần hoàn có chu kì cơ sở T_0:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Với a_k, b_k là các ***hệ số Fourier*** được tính bởi:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos k\omega_0 t \, dt \qquad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin k\omega_0 t \, dt$$

Quan hệ với hệ số Fourier phức c_k như sau:

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \qquad a_k = c_k + c_{-k} \qquad b_k = j(c_k - c_{-k})$$

$$c_k = \tfrac{1}{2}(a_k - jb_k) \qquad c_{-k} = \tfrac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

D. Biểu diễn tín hiệu tuần hoàn dưới dạng hài (harmonic)

Với $x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn thực với chu kì cơ sở T_0 thì:

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \qquad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \theta_k = \tan^{-1}\frac{b_k}{a_k}$$

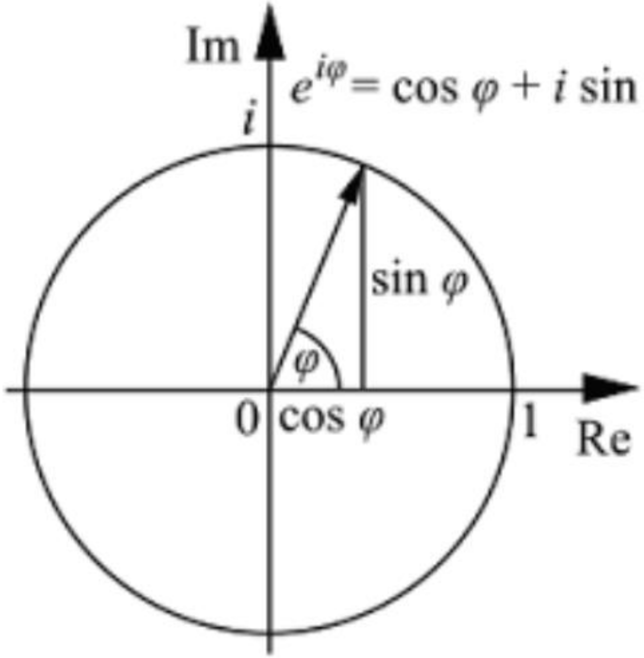
C_0 được gọi là thành phần một chiều DC và C_k được gọi là thành phần hài (xoay chiều) thứ k.

C_k và θ_k được gọi tương ứng là biên độ và góc pha.

CÔNG THỨC EULEUR - LIÊN HỆ GIỮA MŨ PHỨC VÀ LƯỢNG GIÁC

$$\boxed{x(t) = e^{j\omega t}}$$

- **Công thức Euleur:**
  $e^{i\varphi} = cos(\varphi) + i.sin(\varphi)$



- $|e^{i\varphi}| = 1$
- $e^{i0} = 1, e^{i\pi} = -1, e^{i.2\pi} = 1$
- $e^{i\pi/2} = i, e^{i.3\pi/2} = -i$
- $e^{i\varphi} = e^{i(\varphi+2\pi)}$

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

Nhận xét:

Với $x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn thực, có thể được biểu diễn dưới dạng mũ phức, lượng giác và hài. Tuy nhiên, **dạng mũ phức** được sử dụng tổng quát và thuận tiện hơn.

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

Bài tập 1:

Xác định các hệ số FS dạng mũ phức của tín hiệu sau:

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

Bài giải:

Xác định biểu diễn FS dạng mũ phức của tín hiệu sau: $x(t) = \cos \omega_0 t$

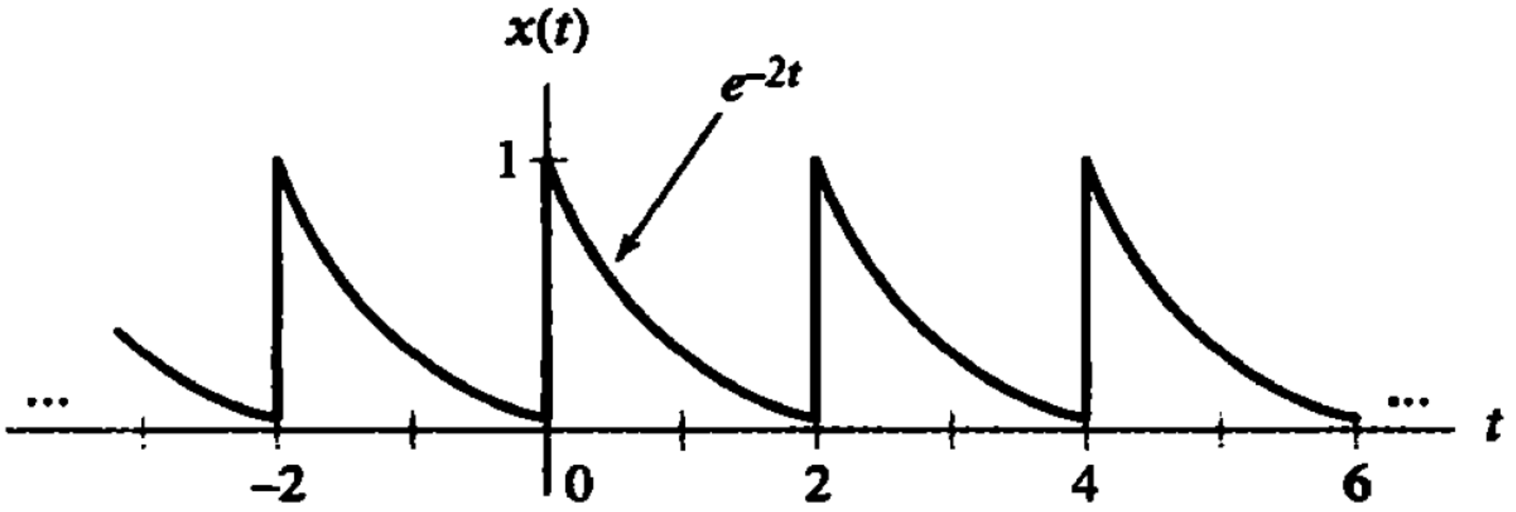
$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) = \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \qquad c_{-1} = \frac{1}{2} \qquad c_k = 0, \ |k| \neq 1$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

Bài tập 2:

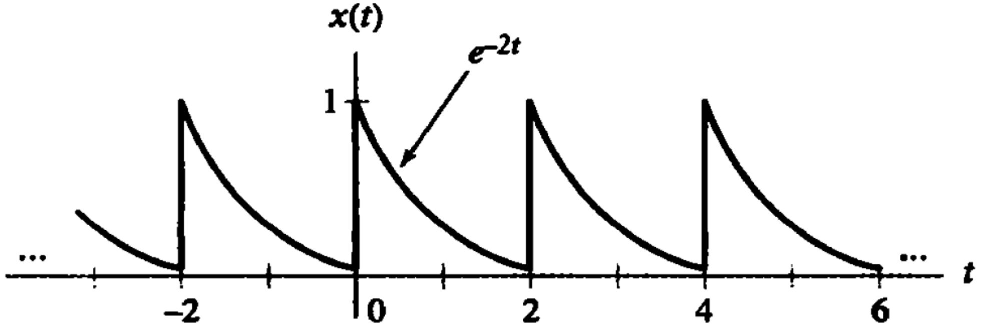
Xác định các hệ số FS dạng mũ phức của tín hiệu sau:



BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN (Fourier Series - FS)

Bài giải:

Chu kì cơ sở $T_0 = 2$ nên $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$



$$c_k = X[k] = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2t}e^{-jk\pi t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-(2+jk\pi)t}\,dt.$$

$$= \frac{-1}{2(2+jk\pi)}e^{-(2+jk\pi)t}\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{4+jk2\pi}(1 - e^{-4}e^{-jk2\pi})$$

$$= \frac{1-e^{-4}}{4+jk2\pi},$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

E. Phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu tuần hoàn

Hệ số Fourier phức c_k được biểu diễn bởi:

$$c_k = |c_k| e^{j\phi_k}$$

Biểu diễn $|c_k|$ theo tần số góc $\omega_k = k\omega_0$ được gọi là phổ biên độ và ϕ_k theo tần số góc ω_k được gọi là phổ pha của tín hiệu $x(t)$. Do phổ biên độ và phổ pha không phải là các đường cong liên tục nên các phổ này được gọi là phổ tần số rời rạc hay **phổ vạch**.

Với tín hiệu $x(t)$ tuần hoàn thực ta có $c_{-k} = c_k^*$

$$|c_{-k}| = |c_k| \qquad \phi_{-k} = -\phi_k$$

Hay phổ biên độ là hàm chẵn và phổ pha là hàm lẻ đối với ω.

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

Bài tập 3:
Xác định phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu sau:

$$x(t) = 3\cos(\pi t/2 + \pi/4)$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

Bài giải: Xác định phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu sau:

$$x(t) = 3\cos(\pi t/2 + \pi/4)$$

Chu kì cơ sở $T_0 = 4$ nên tần số cơ sở $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/2$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\pi t/2}$$

$$x(t) = 3\frac{e^{j(\pi t/2+\pi/4)} + e^{-j(\pi t/2+\pi/4)}}{2}$$

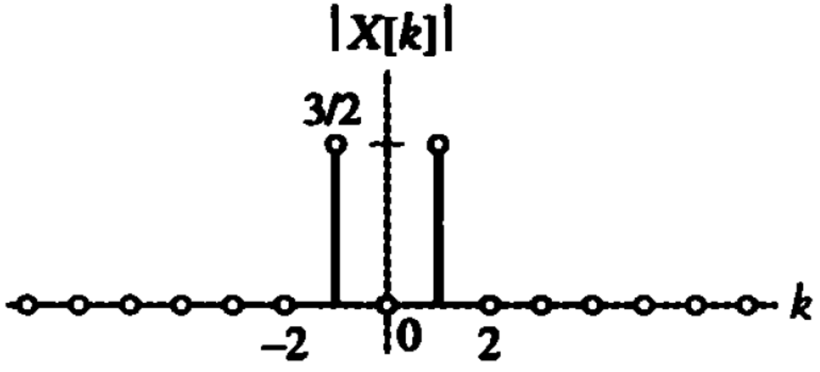
$$= \frac{3}{2}e^{j\pi/4}e^{j\pi t/2} + \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}e^{-j\pi t/2}$$

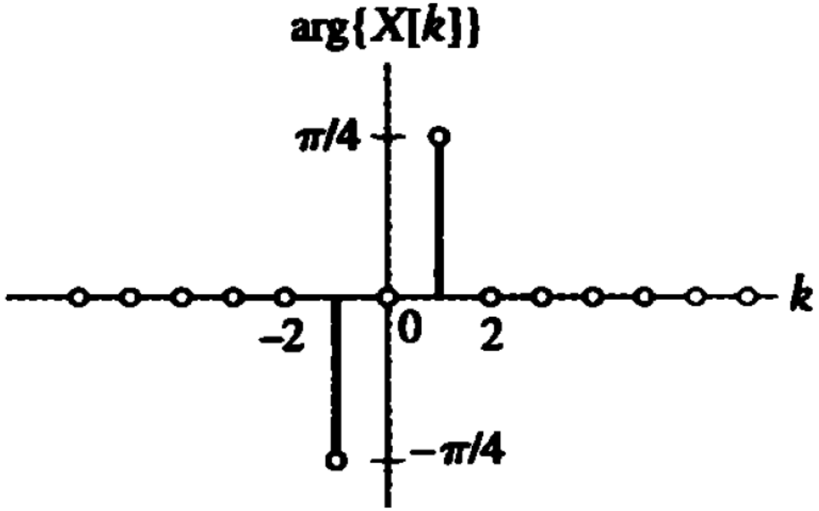
$$\rightarrow \quad X[k] = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}, & k = -1 \\ \frac{3}{2}e^{j\pi/4}, & k = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

$$X[k] = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}, & k = -1 \\ \frac{3}{2}e^{j\pi/4}, & k = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Phổ biên độ và phổ pha của tín hiệu là:





BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

Bài tập 4:

Xác định tín hiệu $x(t)$ có chu kì cơ sở $T_0 = 2$, hệ số FS của tín hiệu cho bởi:

$$X[k] = (1/2)^{|k|} e^{jk\pi/20}$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN

Bài giải:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1$$

Tần số góc cơ sở được tính bởi $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k e^{jk\pi/20} e^{jk\pi t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} (1/2)^{-k} e^{jk\pi/20} e^{jk\pi t}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (1/2)^k e^{jk\pi/20} e^{jk\pi t} + \sum_{l=1}^{\infty} (1/2)^l e^{-jl\pi/20} e^{-jl\pi t}.$$

$$= \frac{1}{1-(1/2)e^{j(\pi t+\pi/20)}} + \frac{1}{1-(1/2)e^{-j(\pi t+\pi/20)}} - 1$$

$$x(t) = \frac{3}{5 - 4\cos(\pi t + \pi/20)}$$

MỘT SỐ CHUỖI CƠ BẢN

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ N & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \qquad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \qquad |\alpha| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2\alpha^n = \frac{\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^3} \qquad |\alpha| < 1$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN (Fourier Series - FS)

F. Công suất của tín hiệu tuần hoàn

Công suất của $x(t)$ được tính bởi:

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt$$

Theo đẳng thức Parseval: nếu tín hiệu $x(t)$ được biểu diễn dưới dạng chuỗi Fourier mũ phức thì:

$$\boxed{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC KHÔNG TUẦN HOÀN (Fourier Transform - FT)

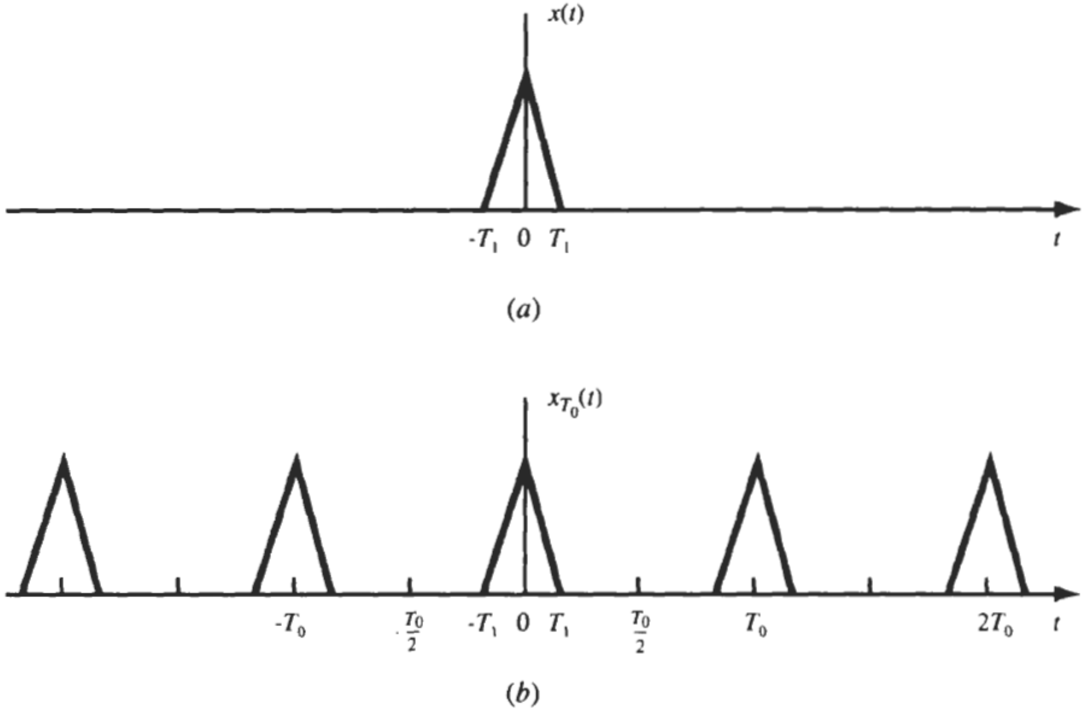
A. Chuyển đổi từ FS sang FT

$x(t)$ là tín hiệu không tuần hoàn và có khoảng thời gian hữu hạn:

$$x(t) = 0 \qquad\qquad |t| > T_1$$

Để áp dụng được lý thuyết FS, gọi $x_{T_0}(t)$ là tín hiệu tuần hoàn được tạo ra từ việc lặp lại $x(t)$ với chu kì cơ sở T_0.

$$\lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = x(t)$$



BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC KHÔNG TUẦN HOÀN

A. Chuyển đổi từ FS sang FT

Biểu diễn FS của tín hiệu $x_{T_0}(t)$ dưới dạng mũ phức:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Với:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC KHÔNG TUẦN HOÀN

A. Chuyển đổi từ FS sang FT

Do $x_{T_0}(t) = x(t)$ với $|t| < T_0/2$ và $x(t) = 0$ ngoài khoảng nên:

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

Đặt: $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$ $\Rightarrow$ $c_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$

$\Rightarrow$ $x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}$ Hoặc

$$\boxed{x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t}\omega_0}$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC KHÔNG TUẦN HOÀN

Khi $T_0 \to \infty$ thì $\omega_0 = 2\pi/T_0 \to 0$ nên có thể đặt $\omega_0 = \Delta\omega$. Khi đó:

$$x_{T_0}(t)\big|_{T_0 \to \infty} \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\,\Delta\omega)\, e^{jk\,\Delta\omega t}\, \Delta\omega$$

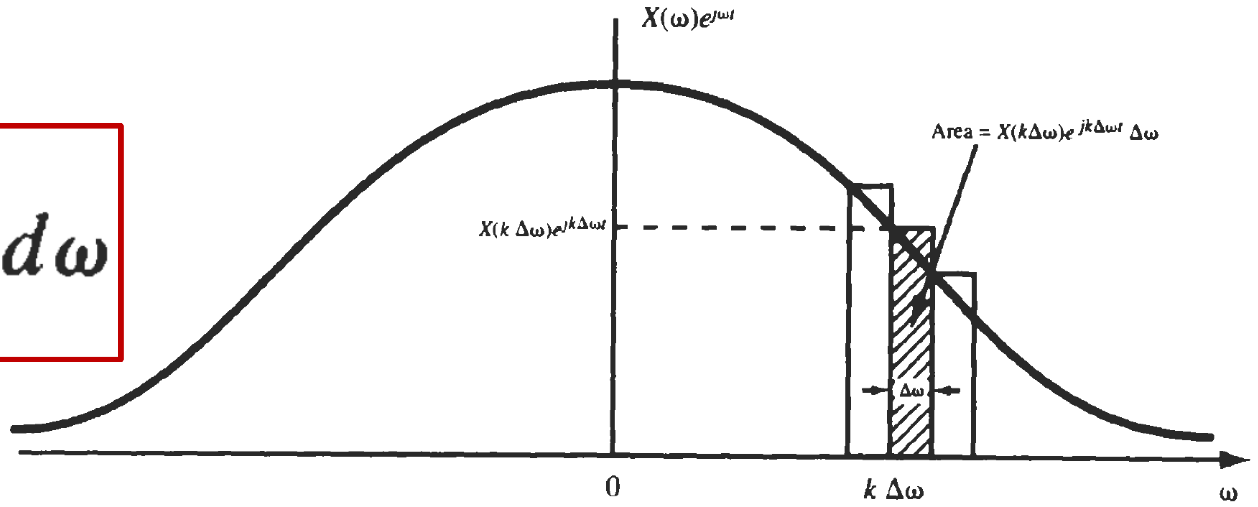
$$\boxed{x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\,\Delta\omega)\, e^{jk\,\Delta\omega t}\, \Delta\omega}$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC KHÔNG TUẦN HOÀN

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t) = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega$$

Vế phải là vùng diện tích chắn bởi hàm $\mathrm{X}(\omega)e^{j\omega t}$.

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$



Là biểu diễn Fourier của tín hiệu không tuần hoàn $\mathrm{x}(t)$.

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC KHÔNG TUẦN HOÀN

B. Cặp biến đổi Fourier

$$\boxed{\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\ x(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \end{aligned}}$$

$\mathrm{X}(\omega)$ là biến đổi Fourier của $x(t)$. Và $x(t)$ là biến đổi Fourier ngược của $\mathrm{X}(\omega)$, được ký hiệu là:

$$\boxed{x(t) \longleftrightarrow X(\omega)}$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC KHÔNG TUẦN HOÀN

C. Phổ Fourier

Biến đổi Fourier $X(\omega)$ thường là số phức (dạng tổng quát), được biểu diễn bởi:

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

$X(\omega)$ được gọi là phổ Fourier, trong đó $|X(\omega)|$ và $\phi(\omega)$ tương ứng được gọi là phổ biên độ và phổ pha của $x(t)$.

Nếu $x(t)$ là tín hiệu thực thì: $$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)| \qquad \phi(-\omega) = -\phi(\omega)$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC KHÔNG TUẦN HOÀN

D. Tính chất

Property	Signal	Fourier transform
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Linearity	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Time shifting	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Time scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Time reversal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Duality	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Time differentiation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Frequency differentiation	$(-jt)x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$
Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplication	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Real signal	$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$	$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$
		$X(-\omega) = X^*(\omega)$
Even component	$x_e(t)$	$\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega)$
Odd component	$x_o(t)$	$j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega)$

Parseval's relations

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)X_2(\lambda)\,d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)x_2(\lambda)\,d\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega)\,d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega$$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC KHÔNG TUẦN HOÀN

E. Các cặp biến đổi Fourier thông dụng

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{j\omega}$
$u(-t)$	$\pi\delta(\omega)-\dfrac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), a>0$	$\dfrac{1}{j\omega+a}$
$te^{-at}u(t), a>0$	$\dfrac{1}{(j\omega+a)^2}$

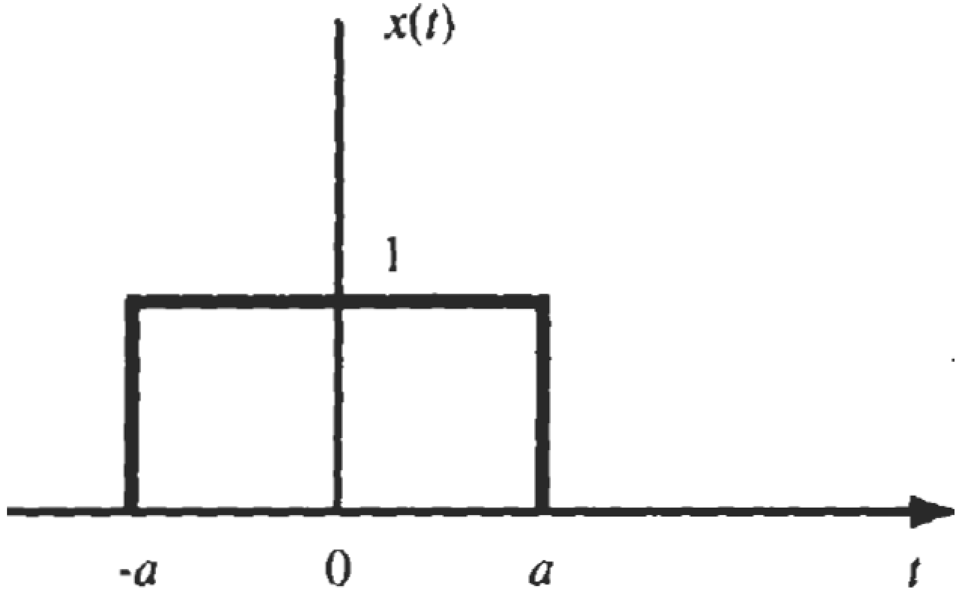
$x(t)$	$X(\omega)$
$e^{-a\|t\|}, a>0$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$	$e^{-a\|\omega\|}$
$e^{-at^2}, a>0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-\omega^2/4a}$
$p_a(t)=\begin{cases}1 & \|t\|<a \\ 0 & \|t\|>a\end{cases}$	$2a\dfrac{\sin \omega a}{\omega a}$
$\dfrac{\sin at}{\pi t}$	$p_a(\omega)=\begin{cases}1 & \|\omega\|<a \\ 0 & \|\omega\|>a\end{cases}$
$\operatorname{sgn} t$	$\dfrac{2}{j\omega}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0), \omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN (Fourier Series - FS)

Bài tập 5:

Xác định biến đổi Fourier (FT) của tín hiệu sau:

$$x(t) = p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

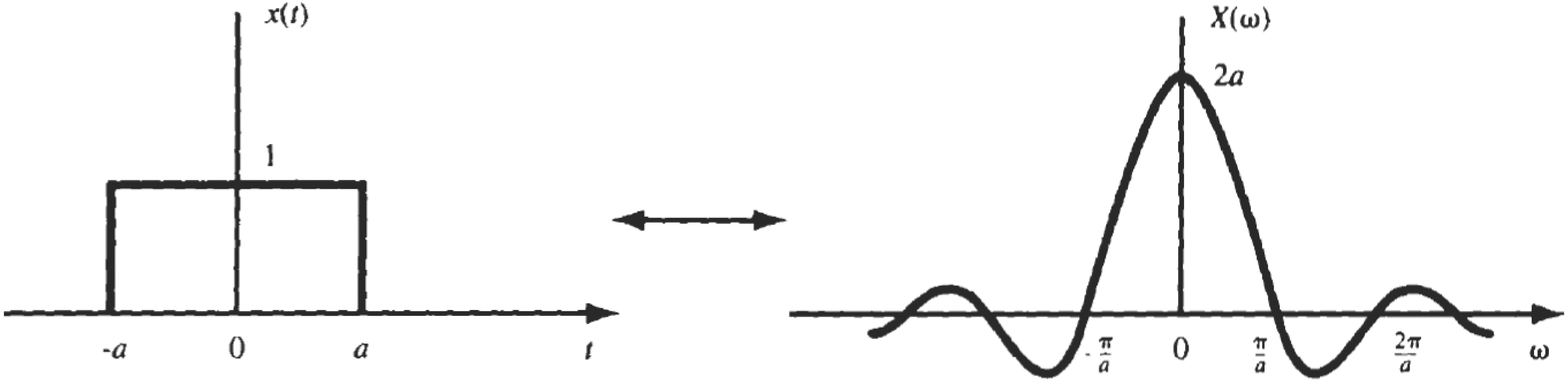


BIỂU DIỄN TÍN HIỆU LIÊN TỤC TUẦN HOÀN (Fourier Series - FS)

Bài giải:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-a}^{a} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{j\omega}\left(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}\right) = 2\frac{\sin \omega a}{\omega} = 2a\frac{\sin \omega a}{\omega a}$$



ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ LTI LIÊN TỤC

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)}\, d\tau$$
$$= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$
$$= H(j\omega) e^{j\omega t},$$

$$\boxed{H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau.}$$

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\arg\{H(j\omega)\}}$$

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

Quan hệ giữa lối ra - lối vào của hệ thống được biểu diễn bởi một số phức $H(e^{j\omega})$ chỉ phụ thuộc tần số ω được gọi là **đáp ứng tần số** của hệ thống.

$H(e^{j\omega})$ được biểu diễn dưới dạng **đáp ứng biên độ** $|H(e^{j\omega})|$ và **đáp ứng pha** $\arg\{H(e^{j\omega})\}$.

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ LTI LIÊN TỤC

Lối ra của hệ thống LTI thời gian liên tục được cho bởi:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

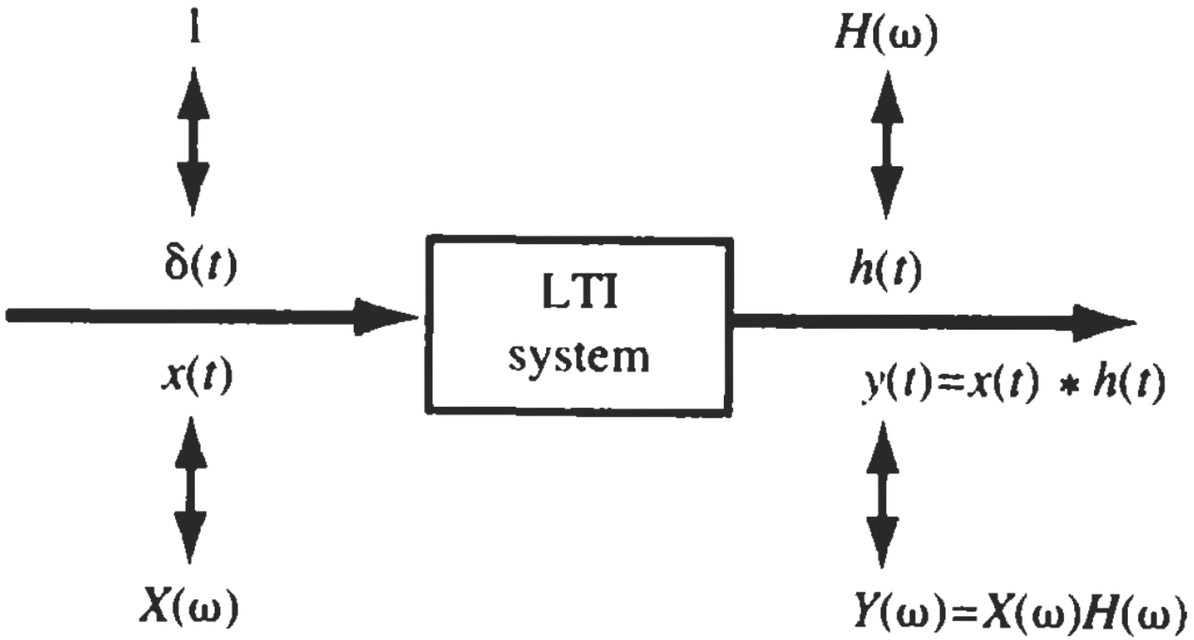
Lối ra của hệ thống LTI thời gian liên tục miền tần số là (áp dụng tính chất nhân chập):

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

$$\rightarrow \boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}} \qquad H(\omega) = |H(\omega)|\, e^{j\theta_H(\omega)}$$

$\mathrm{H}(\omega)$ được gọi là đáp ứng tần số của hệ thống, trong đó $|\mathrm{H}(\omega)|$ và $\theta_H(\omega)$ tương ứng được gọi là đáp ứng biên độ và đáp ứng pha của hệ thống.

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ LTI LIÊN TỤC



Quan hệ giữa lối vào và lối ra của hệ thống LTI trong miền thời gian và miền tần số.

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ LTI BIỂU DIỄN BẰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Thực hiện biến đổi Fourier hai vế của phương trình:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

$$Y(\omega) \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k = X(\omega) \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k$$

$$\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}}$$

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ LTI BIỂU DIỄN BẰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Bài tập 6:

Xác định đáp ứng tần số và đáp ứng xung của hệ thống cho bởi phương trình vi phân sau:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

ĐÁP ỨNG TẦN SỐ CỦA HỆ LTI BIỂU DIỄN BẰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Bài giải:

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

Biến đổi Fourier hai vế của phương trình được:

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega) + j\omega X(\omega)$$

$$(j\omega + 2)Y(\omega) = (1 + j\omega)X(\omega)$$

Đáp ứng tần số của hệ thống là:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1 + j\omega}{2 + j\omega} = \frac{2 + j\omega - 1}{2 + j\omega} = 1 - \frac{1}{2 + j\omega}$$

Đáp ứng xung của hệ thống được tính bằng cách biến đổi Fourier ngược $H(\omega)$

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$