CHƯƠNG V
Biến Đổi Z và Áp dụng cho Biểu Diễn và Phân Tích Hệ Thống Rời Rạc

Lê Vũ Hà

Trường Đại học Công nghệ - ĐHQGHN

2014

- Biến đổi Z hai phía của một tín hiệu rời rạc $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

  trong đó, z là một biến phức $\rightarrow$ biến đổi Z biến một tín hiệu từ miền thời gian rời rạc sang miền phức (mặt phẳng Z).
- Biến đổi Z của $x(n)$ tồn tại nếu chuỗi của biến đổi hội tụ.

- Biến đổi Z một phía của một tín hiệu rời rạc $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$X^1(z) = \mathcal{Z}^1[x(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

- Biến đổi một phía và hai phía của tín hiệu nhân quả là đồng nhất.

- Miền hội tụ (ROC) của biến đổi Z là tập hợp tất cả các giá trị của z làm cho chuỗi biến đổi $\sum x(n)z^{-n}$ hội tụ.
- Điều kiện hội tụ của biến đổi Z được xác định từ điều kiện Cauchy sau đây:

$$\lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n} < 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) < \infty$$

- Các điều kiện hội tụ sau cho biến đổi Z có được từ việc sử dụng điều kiện Cauchy:

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

trong đó:

$$R_{x-} = \lim_{n\to\infty} |x(n)|^{1/n}$$

$$R_{x+} = 1/\lim_{n\to\infty} |x(-n)|^{1/n}$$

- ROC của biến đổi Z là miền nằm trong giới hạn bởi hai đường trong đồng tâm tại gốc và có bán kính lần lượt là R_{x-} và R_{x+} trong mặt phẳng Z.

- ROC của biến đổi Z cho một số dạng tín hiệu:
    - Tín hiệu nhân quả có độ dài hữu hạn: ROC là toàn bộ mặt phẳng Z trừ điểm gốc ($R_{x-} = 0, \ R_{x+} = \infty$).
    - Tín hiệu nhân quả có độ dài vô hạn: ROC là toàn bộ phần mặt phẳng Z nằm bên ngoài đường tròn bán kính R_{x-} ($R_{x+} = \infty$).
    - Tín hiệu phản nhân quả có độ dài hữu hạn: ROC là toàn bộ mặt phẳng Z ($R_{x+} = \infty$, R_{x-} không tồn tại).
    - Tín hiệu phản nhân quả có độ dài vô hạn: ROC là toàn bộ phần mặt phẳng Z nằm bên trong đường tròn bán kính R_{x+} (R_{x-} không tồn tại).
- ROC của biến đổi Z một phía giống như ROC của biến đổi Z hai phía cho tín hiệu nhân quả.

- Tuyến tính:

$$\mathcal{Z}[\alpha x_1(n) + \beta x_2(n)] = \alpha \mathcal{Z}[x_1(n)] + \beta \mathcal{Z}[x_2(n)]$$

- Dịch thời gian:

$$\mathcal{Z}[x(n - n_0)] = z^{-n_0} X(z)$$

- Co giãn trong mặt phẳng Z:

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X(a^{-1} z)$$

với ROC là $|a|R_{x-} < |z| < |a|R_{x+}$.

- Lật:

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = X(z^{-1})$$

với ROC là $1/R_{x+} < |z| < 1/R_{x-}$.

- Đạo hàm trong miền Z:

$$\mathcal{Z}[nx(n)] = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

- Tích chập:

$$\mathcal{Z}[x_1(n) * x_2(n)] = X_1(z)X_2(z)$$

- Tương quan:

$$\mathcal{Z}[r_{x_1x_2}(n)] = X_1(z)X_2(z^{-1})$$

- Trễ:

$$\mathcal{Z}^1[x(n-k)] = z^{-k}X^1(z) + \sum_{m=1}^{k} x(-m)z^{m-k} \; (k > 0)$$

- Tiến:

$$\mathcal{Z}^1[x(n+k)] = z^{k}X^1(z) - \sum_{m=0}^{k-1} x(m)z^{-m} \; (k > 0)$$

- Định lý giá trị cuối:

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}(z-1)X^1(z)$$

nếu ROC của $(z-1)X^1(z)$ chứa đường tròn đơn vị trong mặt phẳng Z.

- Định lý tích phân Cauchy:

$$\frac{1}{j2\pi}\oint_C z^{n-1}dz = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

  trong đó, C là một chu tuyến (đường bao kín) có chiều dương (ngược chiều quay của kim đồng hồ) bao quanh gốc của mặt phẳng Z.
- Công thức sau đây cho biến đổi Z nghịch có được dựa trên định lý tích phân Cauchy:

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

- Gọi $\{z_{p_k}\}$ là các trị cực của $X(z)z^{n-1}$ nằm bên trong một chu tuyến C, khi đó:

$$x(n) = \sum_k Res[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{p_k}}]$$

- Nếu trị cực z_{p_k} là trị cực đơn, phần dư được tính như sau:

$$Res[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{p_k}}] = (z - z_{p_k})X(z)z^{n-1}|_{z=z_{p_k}}$$

- Nếu trị cực z_{p_k} là trị cực bội s_k, phần dư được tính như sau:

$$Res[X(z)z^{n-1}|_{z=z_{p_k}}] =$$
$$\frac{1}{(s_k-1)!}\frac{d^{s_k-1}}{dz^{s_k-1}}[(z-z_{p_k})^{s_k}X(z)z^{n-1}]|_{z=z_{p_k}}$$

- Nếu $X(z)$ có thể khai triển thành một chuỗi lũy thừa của z^{-1} sao cho:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^{-n}$$

thì chúng ta có $x(n) = \alpha_n$.

- Phương pháp: dùng phép chia đa thức.
- *Chú ý*: ROC của $X(z)$ quyết định dạng của chuỗi lũy thừa.

- Không giảm tổng quát, giả thiết $X(z)$ được biểu diễn dưới dạng phân thức hữu tỉ $N(z)/D(z)$ ($N(z)$ và $D(z)$ là các đa thức và bậc của $N(z)$ nhỏ hơn bậc của $D(z)$).
- Gọi $\{z_{p_k}\}$ là các trị cực của $X(z)$: $\{z_{p_k}\}$ là nghiệm của phương trình $D(z) = 0$.

- Nếu tất cả các trị cực $\{z_{p_k}\}$ đều là trị cực đơn, $X(z)$ được khai triển như sau:

$$X(z) = \sum_k \frac{A_k}{z - z_{p_k}}$$

trong đó, các hệ số $\{A_k\}$ được tính bởi công thức:

$$A_k = (z - z_{p_k})X(z)|_{z=z_{p_k}}$$

- Trong trường hợp $X(z)$ có trị cực bội, gọi s_k là giá trị bội của trị cực z_{p_k}, khi đó công thức khai triển $X(z)$ như sau:

$$X(z) = \sum_{k} \sum_{s=1}^{s_k} \frac{A_{k_s}}{(z - z_{p_k})^s}$$

trong đó, các hệ số $\{A_{k_s}\}$ được tính bằng công thức:

$$A_{k_s} = \frac{1}{(s_k - s)!} \left. \frac{d^{s_k - s}(z - z_{p_k})^{s_k} X(z)}{dz^{s_k - s}} \right|_{z = z_{p_k}}$$

Biến đổi Z nghịch của các phân thức tối giản (1)

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-\alpha}\right] = \begin{cases} \alpha^n u(n) & (|z| > |\alpha|) \\ -\alpha^n u(-n-1) & (|z| < |\alpha|) \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{z-\alpha}\right] = \begin{cases} \alpha^{n-1} u(n-1) & (|z| > |\alpha|) \\ -\alpha^{n-1} u(-n) & (|z| < |\alpha|) \end{cases}$$

Biến đổi Z nghịch của các phân thức tối giản (2)

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z-\alpha)^{m+1}}\right] =$$

$$\begin{cases} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\alpha^{n-m}u(n) & (|z| > |\alpha|) \\ -\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\alpha^{n-m}u(-n-1) & (|z| < |\alpha|) \end{cases}$$

Chú ý: việc sử dụng phương pháp này thường sẽ dễ dàng hơn nếu khai triển $X(z)/z$ thay vì khai triển $X(z)$.

- Biến đổi Fourier của tín hiệu rời rạc $x(n)$ là biến đổi Z trên đường tròn đơn vị trong mặt phẳng Z $\rightarrow$ biến đổi Fourier $x(n)$ tồn tại nếu ROC của biến đổi Z chứa đường tròn đơn vị.
- Ứng dụng: tính biến đổi Fourier thuận và nghịch của tín hiệu rời rạc qua biến đổi Z thuận và nghịch.

- Xem xét một hệ thống TTBB rời rạc có đáp ứng xung $h(n)$, nghĩa là:

$$y(n) = h(n) * x(n)$$

- Thực hiện biến đổi Z cho cả hai vế của phương trình trên và áp dụng tính chất của biến đổi Z của tích chập:

$$Y(z) = H(z)X(z) \;\rightarrow\; H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

- $H(z)$ được gọi là *hàm chuyển* của hệ thống.

- Hệ thống TTBB rời rạc thường được biểu diễn bằng phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng dưới dạng sau đây:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

- Thực hiện biến đổi Z cho cả hai vế của phương trình:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

- Hàm chuyển của hệ thống khi đó được xác định như sau:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = z^{N-M} \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{M-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{N-k}}$$

- Hàm chuyển xác định hệ thống, bằng việc giải phương trình sai phân biểu diễn hệ thống sử dụng biến đổi Z thuận và nghịch:

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)X(z)]$$

- Sơ đồ nối tiếp:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

- Sơ đồ song song:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

- Hệ thống với phản hồi âm:

$$H(z) = H_1(z)/[1 + H_1(z)H_2(z)]$$

- Hệ thống với phản hồi dương:

$$H(z) = H_1(z)/[1 - H_1(z)H_2(z)]$$

- Cho một hệ thống TTBB rời rạc được biểu diễn bằng phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$$

- Thực hiện biến đổi Z một phía với cả hai vế của phương trình trên:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i} Y^1(z) + I(z) = \sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j} X^1(z)$$

trong đó, $I(z)$ chứa tất cả các thành phần của điều kiện đầu tại $n = -1, -2, ..., -N$.

- Nhớ lại rằng đáp ứng $y(n)$ của hệ thống TTBB bao gồm hai thành phần: đáp ứng với điều kiện đầu và đáp ứng với tín hiệu vào, được biểu diễn như sau:

$$y(n) = y_0(n) + y_s(n)$$

hay:

$$Y^1(z) = Y_0^1(z) + Y_s^1(z)$$

- Đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào nhân quả (nghĩa là, $X^1(z) = X(z)$):

$$y_s(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} X(z)\right] = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)X(z)]$$

- Đáp ứng với điều kiện đầu:

$$y_0(n) = -\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{I(z)}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}\right]$$

- Hệ thống TTBB rời rạc ổn định khi và chỉ khi hàm chuyển của hệ thống hội tụ trên $|z| = 1 \rightarrow$ ROC của $H(z)$ phải chứa đường tròn đơn vị, nghĩa là, $R_{h-} < 1 < R_{h+}$.
- Với hệ thống nhân quả: $R_{h+} = \infty \rightarrow$ điều kiện để hệ thống ổn định là $R_{h-} < 1 \rightarrow$ tất cả các trị cực của $H(z)$ phải nằm bên trong đường tròn đơn vị.

- Một phương pháp khác để phân tích tính ổn định của hệ thống nhân quả biểu diễn bởi hàm chuyển: sử dụng điều kiện Jury, được mô tả tóm tắt như sau:
  - Không cần phải giải phương trình đặc trưng để tìm các trị cực của hệ thống.
  - Một bảng Jury được thiết lập từ các hệ số của các đa thức đặc trưng. Bảng này sẽ được sử dụng để khảo sát tính ổn định của hệ thống (xem chi tiết trong tài liệu tham khảo).