

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Chương 5: Biến đổi Z và áp dụng cho phân tích hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc

Trần Thị Thúy Quỳnh



BIẾN ĐỔI Z

Đáp ứng của hệ LTI:

$$\begin{aligned}y[n] &= H\{x[n]\} \\&= h[n] * x[n] \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n - k]\end{aligned}$$

Lỗi vào: $x[n] = z^n$



Hàm truyền:

Lỗi ra: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k}$

$$= z^n \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \right)$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

$$y[n] = \mathbf{T}\{z^n\} = H(z)z^n$$

BIẾN ĐỔI Z

A. Định nghĩa

Với tín hiệu liên tục $x[n]$, biến đổi Z của $X(z)$ (biến đổi hai phía) được định nghĩa bởi:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Với $z = re^{j\Omega}$

BIẾN ĐỔI Z

Biến đổi Z một phía (unilateral) cho bởi:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Biến đổi Z một phía và hai phía tương đương nhau nếu $x[n] = 0$ với $n < 0$.



BIẾN ĐỔI Z

Ký hiệu:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

$$x[n] \leftrightarrow X(z) \quad \text{gọi là cặp biến đổi Z.}$$



BIẾN ĐỔI Z

B. Vùng hội tụ

Khoảng giá trị của z đảm bảo cho biến đổi Z hội tụ được gọi là vùng hội tụ ROC (Region of Convergence).

Ví dụ:

Xác định biến đổi Z và vùng ROC của tín hiệu sau (với a là số thực):

$$x[n] = a^n u[n]$$

BIẾN ĐỔI Z

Bài giải:

Biến đổi Z:
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

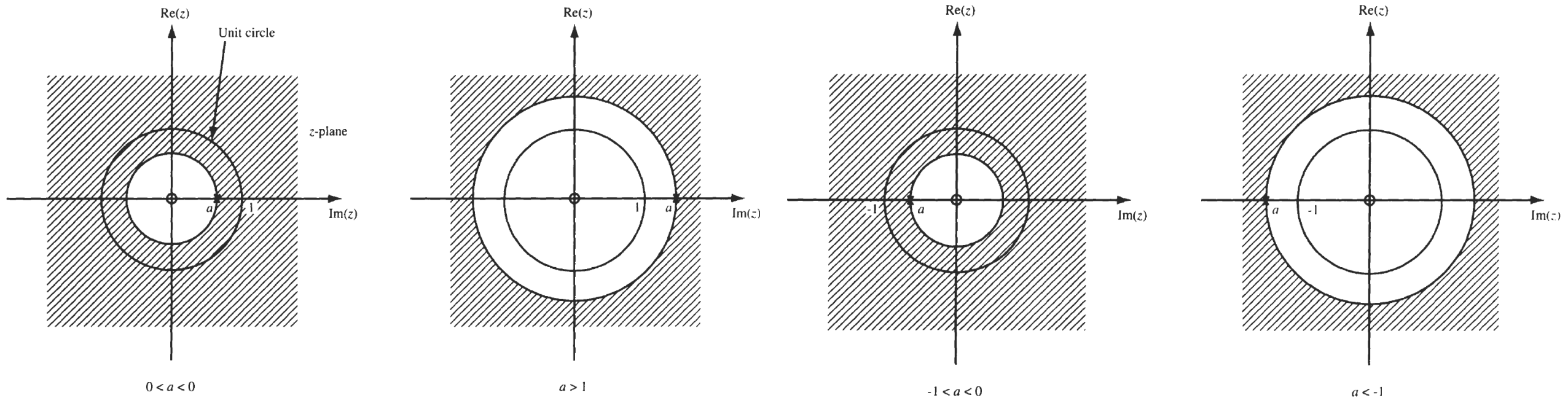
Để $X(z)$ hội tụ cần:
$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$$

Vậy vùng ROC sẽ là: $|az^{-1}| < 1$ hay $|z| > |a|$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a| \\ &= \frac{z}{z - a} \end{aligned}$$

BIẾN ĐỔI Z

Vùng hội tụ: $|z| > |a|$



VÍ DỤ 1:

Tìm biến đổi Z, vùng ROC, điểm không, điểm cực trên mặt phẳng Z của tín hiệu nhân quả sau:

$$x[n] = \alpha^n u[n]$$

với α là số thực.



VÍ DỤ 1:

Biến đổi Z

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^n u[n] z^{-n} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^n.\end{aligned}$$

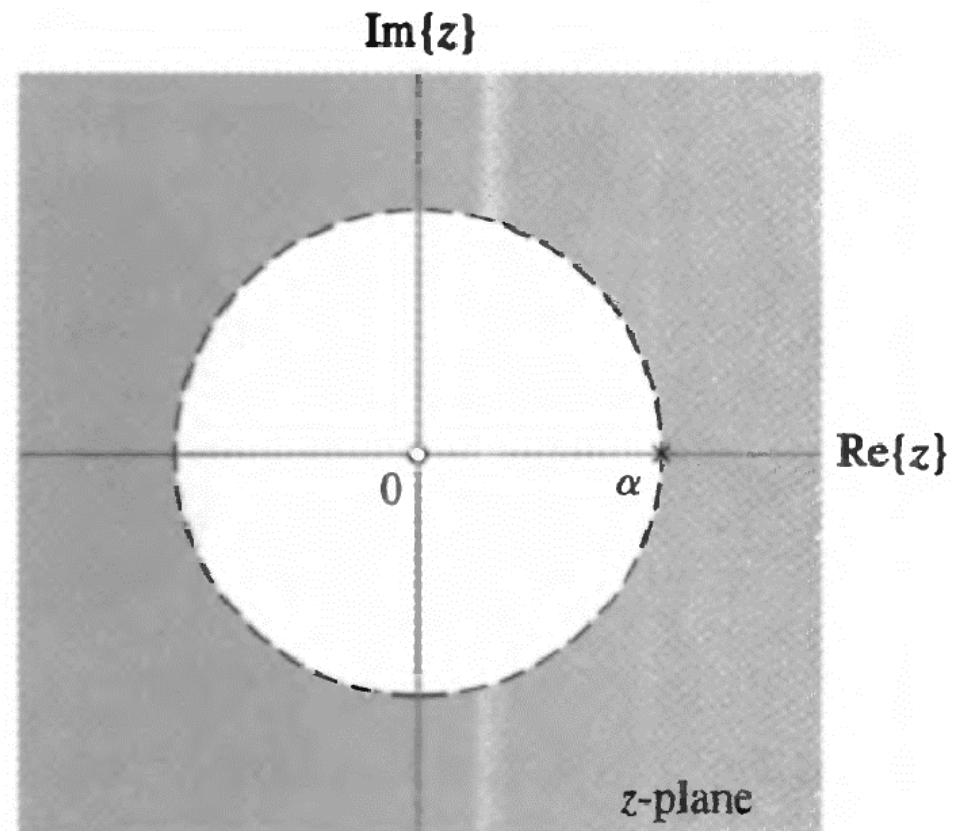
$$\begin{aligned}X(z) &= \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}, \quad |z| > |\alpha| \\&= \frac{z}{z - \alpha}, \quad |z| > |\alpha|.\end{aligned}$$

VÍ DỤ 1:

Điểm cực $z = \alpha$

Điểm không $z = 0$

Vùng ROC: $|z| > |\alpha|$



VÍ DỤ 2:

Tìm biến đổi Z, vùng ROC của tín hiệu phản nhân quả sau:

$$y[n] = -\alpha^n u[-n - 1]$$

với α là số thực.

VÍ DỤ 2:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\alpha^n u[-n-1] z^{-n} \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{\alpha}{z} \right)^n \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha} \right)^k \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\alpha} \right)^k. \end{aligned}$$

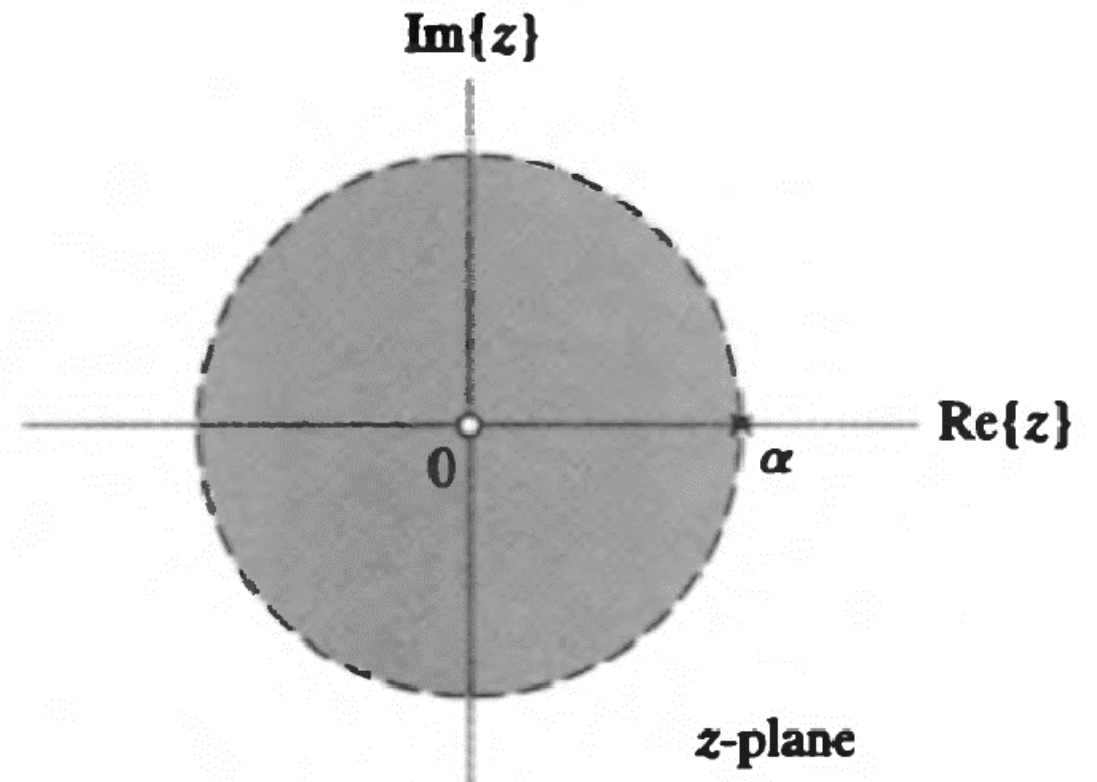
$$\begin{aligned} Y(z) &= 1 - \frac{1}{1 - z\alpha^{-1}}, \quad |z| < |\alpha|, \\ &= \frac{z}{z - \alpha}, \quad |z| < |\alpha|. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 2:

Điểm cực $z = \alpha$

Điểm không $z = 0$

Vùng ROC: $|z| < |\alpha|$



VÍ DỤ 3:

Tìm biến đổi Z, vùng ROC, điểm không, điểm cực trên mặt phẳng Z của tín hiệu sau:

$$x[n] = -u[-n - 1] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

VÍ DỤ 3:

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} - u[-n-1] z^{-n} \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n + 1 - \sum_{k=0}^{\infty} z^k.\end{aligned}$$

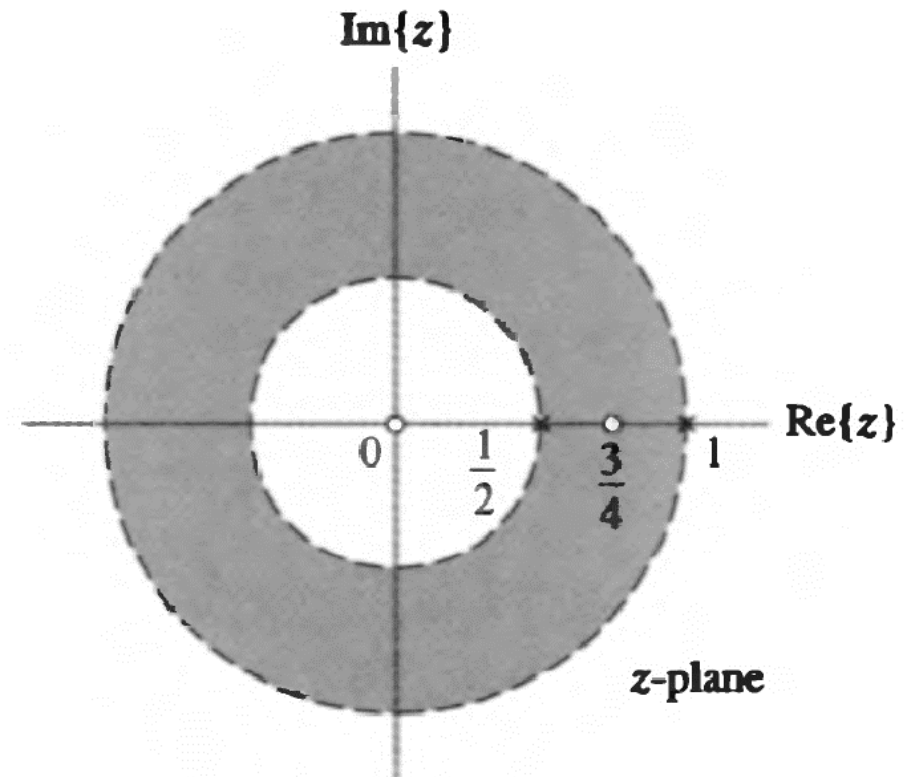
$$\begin{aligned}X(z) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + 1 - \frac{1}{1 - z}, \quad 1/2 < |z| < 1 \\&= \frac{z(2z - \frac{3}{2})}{(z - \frac{1}{2})(z - 1)}, \quad 1/2 < |z| < 1.\end{aligned}$$

VÍ DỤ 3:

Điểm cực $z = 1/2$, $x=1$

Điểm không $z = 0$, $z=3/4$

Vùng ROC: $1/2 < |z| < 1$



BIẾN ĐỔI Z

C. Tính chất của vùng ROC

1. Vùng ROC không chứa các điểm cực.
2. Nếu $x[n]$ là chuỗi hữu hạn $x[n] = 0$ ngoài khoảng $[N_1, N_2]$ thì ROC là toàn bộ mặt phẳng z trừ $z = 0$ và $z = \infty$.
3. Nếu $x[n]$ là tín hiệu phía phải $x[n] = 0$ ngoài khoảng $[N_1, \infty]$ thì ROC là $|z| > r_{max}$, r_{max} là biên độ lớn nhất trong các điểm cực của $X(z)$.
4. Nếu $x[n]$ là tín hiệu phía trái $x[n] = 0$ ngoài khoảng $[-\infty, N_1]$ thì ROC là $|z| < r_{min}$, r_{min} là biên độ nhỏ nhất trong các điểm cực của $X(z)$.
5. Nếu $x[n]$ là tín hiệu hai phía (thời gian vô hạn) thì ROC là $r_1 < |z| < r_2$, r_1 và r_2 là các biên độ của hai điểm cực của $X(z)$.



MỘT SỐ CẶP BIẾN ĐỔI Z THÔNG DỤNG

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$\delta[n]$	1	All z
$u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}, \frac{z}{z - 1}$	$ z > 1$
$-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}, \frac{z}{z - 1}$	$ z < 1$
$\delta[n - m]$	z^{-m}	All z except 0 if ($m > 0$) or ∞ if ($m < 0$)
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}, \frac{z}{z - a}$	$ z > a $
$-a^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}, \frac{z}{z - a}$	$ z < a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \frac{az}{(z - a)^2}$	$ z > a $
$-na^n u[-n - 1]$	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \frac{az}{(z - a)^2}$	$ z < a $

MỘT SỐ CẶP BIẾN ĐỔI Z THÔNG DỤNG

$x[n]$	$X(z)$	ROC
$(n + 1)a^n u[n]$	$\frac{1}{(1 - az^{-1})^2}, \left[\frac{z}{z - a} \right]^2$	$ z > a $
$(\cos \Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - (\cos \Omega_0) z}{z^2 - (2 \cos \Omega_0) z + 1}$	$ z > 1$
$(\sin \Omega_0 n) u[n]$	$\frac{(\sin \Omega_0) z}{z^2 - (2 \cos \Omega_0) z + 1}$	$ z > 1$
$(r^n \cos \Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - (r \cos \Omega_0) z}{z^2 - (2r \cos \Omega_0) z + r^2}$	$ z > r$
$(r^n \sin \Omega_0 n) u[n]$	$\frac{(r \sin \Omega_0) z}{z^2 - (2r \cos \Omega_0) z + r^2}$	$ z > r$
$\begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z

Property	Sequence	Transform	ROC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linearity	$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$	$a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Time shifting	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	$R' \supset R \cap \{0 < z < \infty\}$
Multiplication by z_0^n	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$R' = z_0 R$
Multiplication by $e^{j\Omega_0 n}$	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0} z)$	$R' = R$
Time reversal	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$R' = \frac{1}{R}$
Multiplication by n	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$R' = R$
Accumulation	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$	$R' \supset R \cap \{ z > 1\}$
Convolution	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) X_2(z)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}$$

A. Công thức biến đổi ngược

Tính tích phân đối với biến phức rất phức tạp.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$



BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

B. Sử dụng các cặp biến đổi Z thông dụng và tính chất của biến đổi Z

$$X(z) = X_1(z) + \cdots + X_n(z)$$

$$\rightarrow x[n] = x_1[n] + \cdots + x_n[n]$$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

C. Khai triển chuỗi mũ

$$\begin{aligned} X[z] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \\ &= \cdots + x[-2] z^2 + x[-1] z + x[0] + x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \cdots \end{aligned}$$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

D. Khai triển phân số thành phần

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = k \frac{(z - z_1) \cdots (z - z_m)}{(z - p_1) \cdots (z - p_n)}$$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

TH1: Điểm cực đơn (phân biệt)

Khi $n \geq m$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n}{z - p_n} = \frac{c_0}{z} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{z - p_k}$$

Với $c_0 = X(z)|_{z=0}$ $c_k = (z - p_k) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=p_k}$

$$X(z) = c_0 + c_1 \frac{z}{z - p_1} + \dots + c_n \frac{z}{z - p_n} = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k \frac{z}{z - p_k}$$

BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

Khi $m > n$:

$$X(z) = \sum_{q=0}^{m-n} b_q z^q + \sum_{k=1}^n c_k \frac{z}{z - p_k}$$



BIẾN ĐỔI Z NGƯỢC

TH 2: Điểm cực kép (hệ số lặp lại r)

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\lambda_1}{z - p_i} + \frac{\lambda_2}{(z - p_i)^2} + \dots + \frac{\lambda_r}{(z - p_i)^r}$$

Với

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left[(z - p_i)^r \frac{X(z)}{z} \right] \Big|_{z=p_i}$$

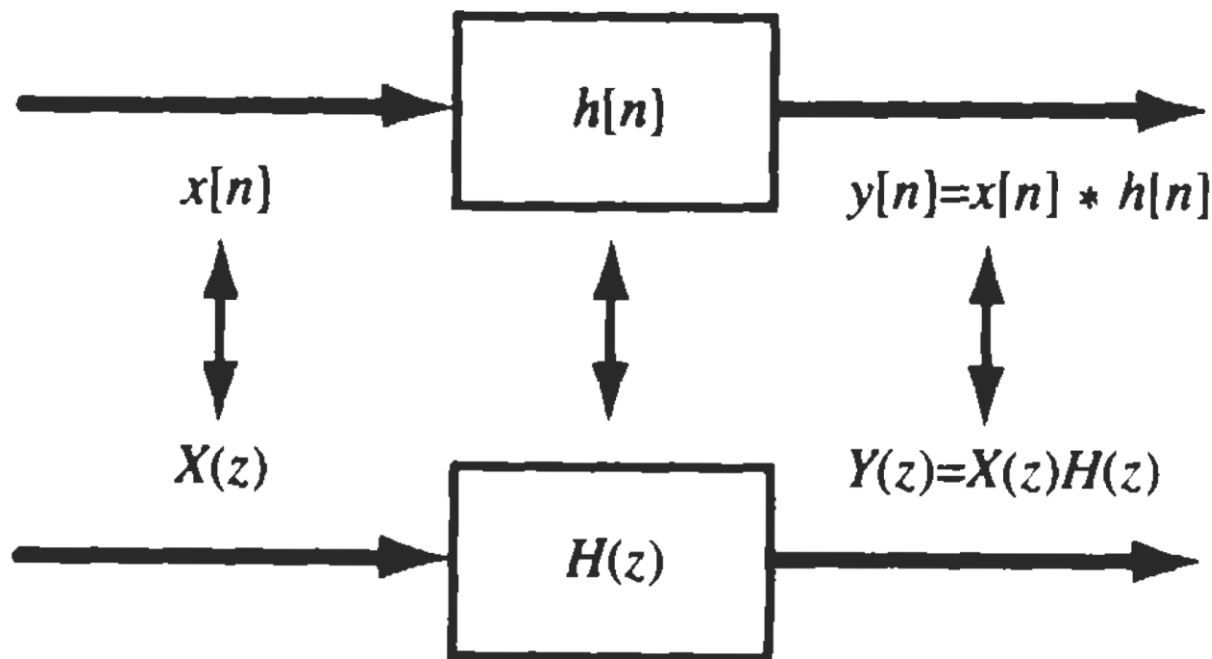
HÀM TRUYỀN CỦA HỆ THỐNG LTI

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Lấy biến đổi Z hai vế:

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$



$H(z)$ được gọi là hàm truyền của hệ thống.

PHÂN LOẠI HỆ THỐNG

A. Tính nhân quả

Hệ thống LTI liên tục là nhân quả nếu: $h[n] = 0$ $n < 0$

➔ $h[n]$ là tín hiệu phía phải nên ROC của $H(z)$ có dạng:

$$|z| > r_{\max}$$

PHÂN LOẠI HỆ THỐNG

B. Tính ổn định

Hệ thống LTI liên tục là ổn định nếu:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

Đặt $z = e^{j\Omega}$

$$|H(e^{j\Omega})| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Hay $H(z)$ hội tụ với $z = e^{j\Omega}$



ROC của $H(z)$ chứa $z = e^{j\Omega}$

HỆ THỐNG LTI BIỂU DIỄN BẰNG PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Thực hiện biến đổi Z hai vế:

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$$\rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

KẾT HỢP CÁC HỆ THỐNG

Các hệ thống mắc nối tiếp:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

$$R \supset R_1 \cap R_2$$

Các hệ thống mắc song song:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

$$R \supset R_1 \cap R_2$$



BIẾN ĐỔI Z MỘT PHÍA

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Biến đổi Z một phía của chuỗi $x[n]$ có thể coi như biến đổi Z hai phía của chuỗi $x[n]u[n]$, là chuỗi phía phải nên ROC luôn là vùng nằm ngoài vòng tròn trong mặt phẳng z .



TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI Z MỘT PHÍA

Tương tự như biến đổi Z hai phía, ngoại trừ:

Phép dịch theo thời gian:

Nếu: $x[n] \leftrightarrow X_1(z)$ thì với $m \geq 0$

$$x[n - m] \leftrightarrow z^{-m}X_1(z) + z^{-m+1}x[-1] + z^{-m+2}x[-2] + \cdots + x[-m]$$

$$x[n + m] \leftrightarrow z^mX_1(z) - z^mx[0] - z^{m-1}x[1] - \cdots - zx[m - 1]$$



SO SÁNH GIỮA BIẾN ĐỔI MỘT PHÍA VÀ HAI PHÍA

	<i>Unilateral Transform</i>	<i>Bilateral Transform</i>	ROC
<i>Signal</i>	$x[n] \xleftrightarrow{z_u} X(z)$ $y[n] \xleftrightarrow{z_u} Y(z)$	$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$ $y[n] \xleftrightarrow{z} Y(z)$	$z \in R_x$ $z \in R_y$
$ax[n] + by[n]$	$aX(z) + bY(z)$	$aX(z) + bY(z)$	At least $R_x \cap R_y$
$x[n - k]$	See below	$z^{-k}X(z)$	R_x , except possibly $ z = 0, \infty$
$\alpha^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$	$ \alpha R_x$
$x[-n]$	—	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{R_x}$
$x[n] * y[n]$	$\frac{X(z)Y(z)}{\text{if } x[n] = y[n] = 0 \text{ for } n < 0}$	$X(z)Y(z)$	At least $R_x \cap R_y$
$nx[n]$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$	R_x , except possibly addition or deletion of $z = 0$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Biến đổi Fourier:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Biến đổi Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$



$$X(\Omega) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Đặt $z = e^{j\Omega}$ thì biến đổi Z của tín hiệu $x[n]$ cũng bằng biến đổi Fourier của tín hiệu $x[n]$ hay nếu vùng ROC chứa vòng tròn đơn vị $|z| = 1$ thì biến đổi Fourier của $x[n]$ bằng biến đổi Z được tính trên vòng tròn đơn vị.

Biến đổi Fourier được tính từ biến đổi Z khi đặt $z = e^{j\Omega}$ nếu $x[n]$ có thể tính tổng tuyệt đối hay:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$



LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ: Cho tín hiệu mũ với hằng số a thực:

Biến đổi Z:
$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

Với $|a| < 1$ vùng ROC của $X(z)$ chứa vòng tròn đơn vị nên tồn tại biến đổi Fourier:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad |a| < 1$$

Biến đổi Fourier theo định nghĩa:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} \quad |ae^{-j\Omega}| = |a| < 1$$

$$\Rightarrow X(\Omega) = X(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

Chú ý: $x[n]$ có thể tính tổng tuyệt đối.

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ: Cho chuỗi nhảy bậc $u[n]$

Biến đổi Z:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

Biến đổi Fourier:

$$\mathcal{F}\{u[n]\} = \pi \delta(\Omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} \quad |\Omega| \leq \pi$$

Biến đổi Fourier của $x[n]$ **không thể tính từ biến đổi Z** do ROC của biến đổi Z không chứa vòng tròn đơn vị và chuỗi $x[n]$ không thể tính tổng tuyệt đối.