TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Chương 4: Biến đổi Laplace và áp dụng cho phân tích hệ thống tuyến tính bất biến liên tục

Trần Thị Thúy Quỳnh

VIETNAM NATIONAL UNIVERSITY, HANOI
VNU UNIVERSITY OF ENGINEERING & TECHNOLOGY

FACULTY OF ELECTRONICS
& TELECOMMUNICATIONS

BIẾN ĐỔI LAPLACE

Đáp ứng của hệ LTI:

$$\begin{aligned} y(t) &= H\{x(t)\} \\ &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Lối vào: $x(t) = e^{st}$

Lối ra:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau. \end{aligned}$$

→ Hàm truyền:

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}$$

$$y(t) = H\{e^{st}\} = H(s)e^{st}.$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

A. Định nghĩa

Với tín hiệu liên tục $x(t)$, biến đổi Laplace $X(s)$ (còn gọi là biến đổi hai phía - bilateral) được định nghĩa bởi:

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt,}$$

Với $s = \sigma + j\omega$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

Biến đổi Laplace một phía (unilateral) cho bởi:

$$X_l(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

Với $0^- = \lim_{\varepsilon \to 0}(0 - \varepsilon)$

Biến đổi Laplace một phía và hai phía tương đương nhau nếu $x(t) = 0$ với $t < 0$.

BIẾN ĐỔI LAPLACE

Ký hiệu:

$$X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$$

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

$$\boxed{x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s).}$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

B. Vùng hội tụ

Khoảng giá trị của s đảm bảo cho biến đổi Laplace hội tụ được gọi là vùng hội tụ ROC (Region of Convergence).

Ví dụ:

Xác định biến đổi Laplace và vùng ROC của tín hiệu sau (với a là số thực):

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

Bài giải:

Biến đổi Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-st}\, dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s+a)t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

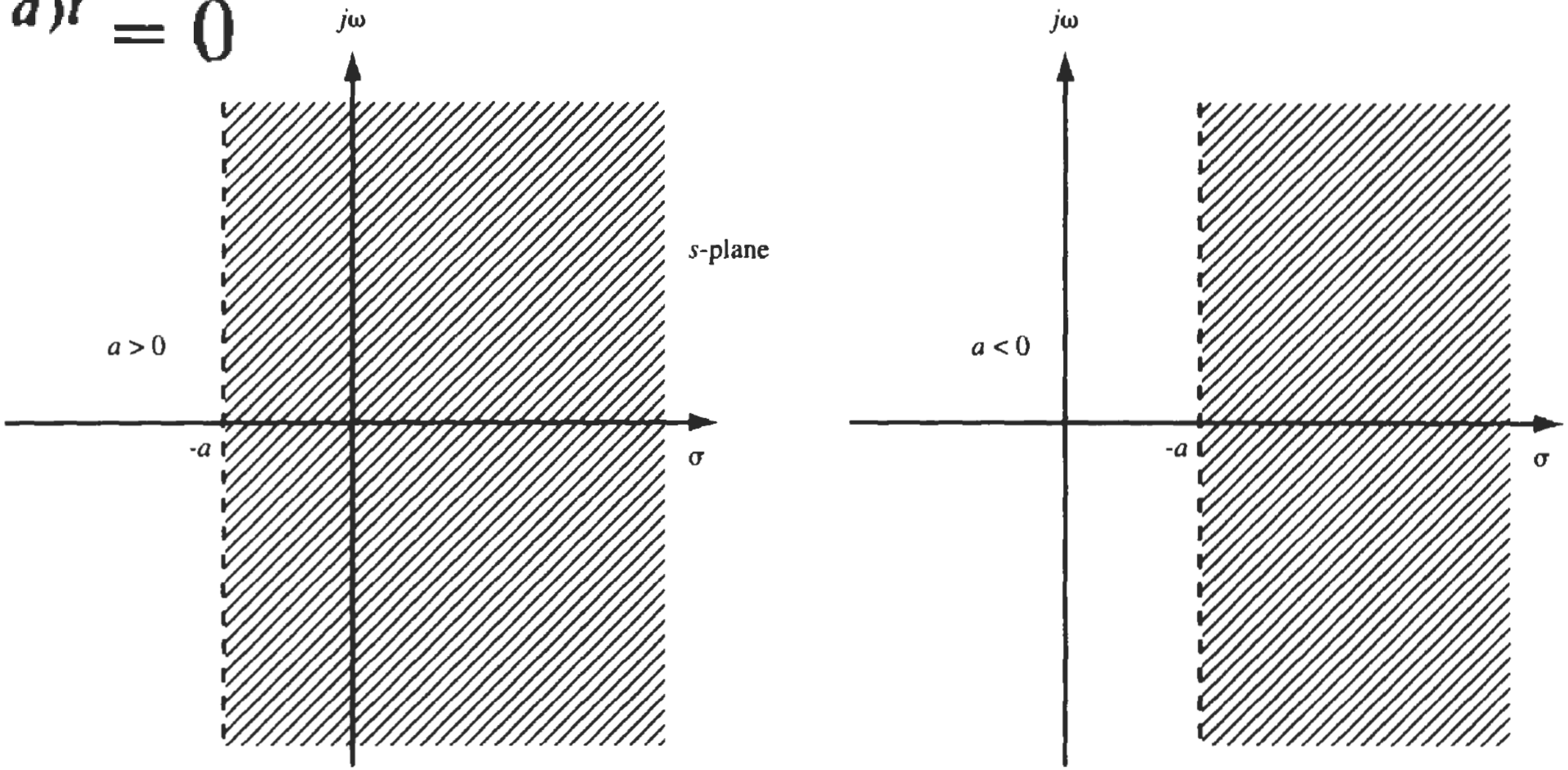
BIẾN ĐỔI LAPLACE

Vùng hội tụ:

$$\lim_{t \to \infty} e^{-(s+a)t} = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(s+a) > 0$

$$\boxed{\mathrm{Re}(s) > -a}$$



C. Điểm cực và điểm không

$$X(s)=\frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} = \frac{a_0}{b_0}\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$$

Với a_k và b_k là các hằng số thực, m và n là các số nguyên dương.

Nghiệm của đa thức tử số sẽ cho các điểm không z_k, nghiệm của đa thức mẫu số cho các điểm cực p_k.

Các điểm cực luôn nằm ngoài vùng ROC do $X(s)$ không hội tụ tại các điểm cực. Các điểm không có thể nằm trong hoặc ngoài vùng ROC.

Ngoại trừ a_0/b_0, $X(s)$ luôn được xác định từ các điểm không và các điểm cực.

Ví dụ:

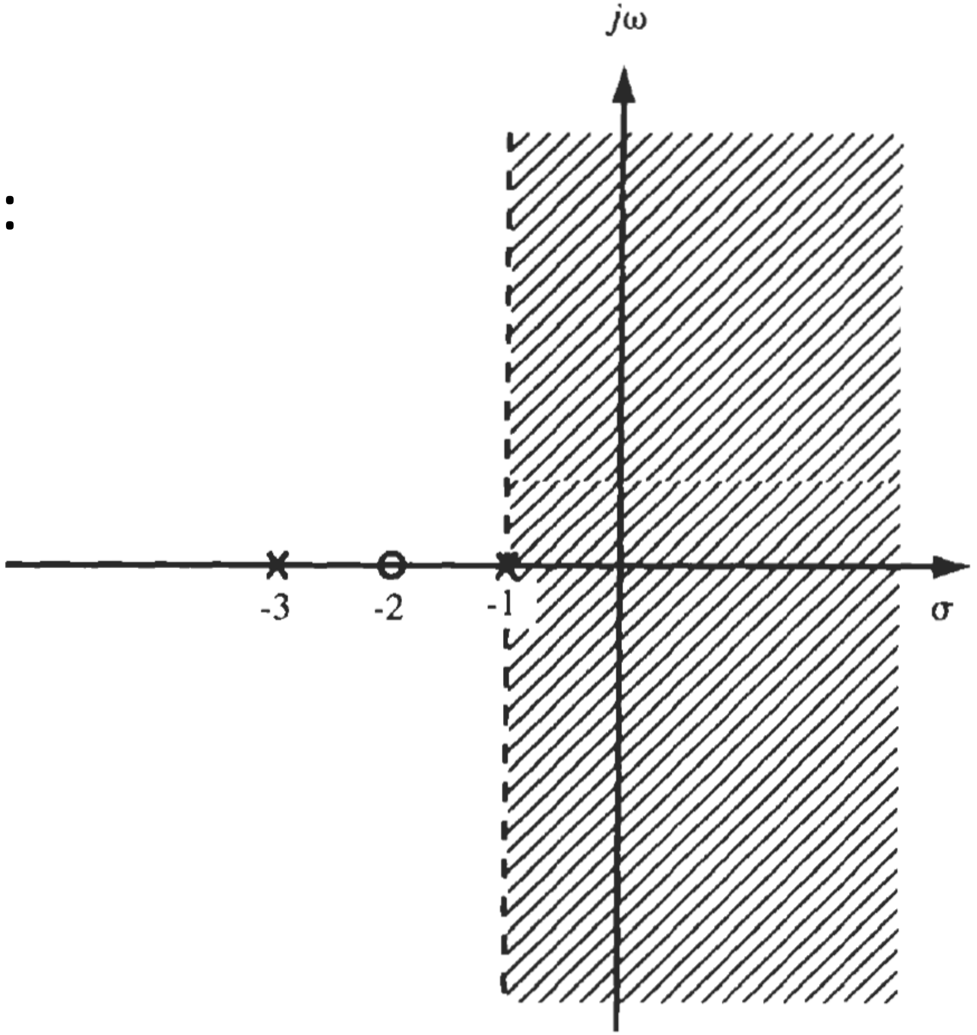
Xác định các điểm không và điểm cực của:

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = 2\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

$$\mathrm{Re}(s) > -1$$

Điểm không: $s = -2$

Điểm cực: $s = -1$ và $s = -3$



BÀI TẬP 1:

Tìm biến đổi Laplace, vùng ROC, điểm không, điểm cực trên mặt phẳng s của tín hiệu nhân quả sau:

$$x(t) = e^{at}u(t),$$

với *a* là số thực.

BÀI GIẢI:

Biến đổi Laplace

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(t)e^{-st}\,dt$$
$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(s-a)t}\,dt$$
$$= \frac{-1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{0}^{\infty}.$$

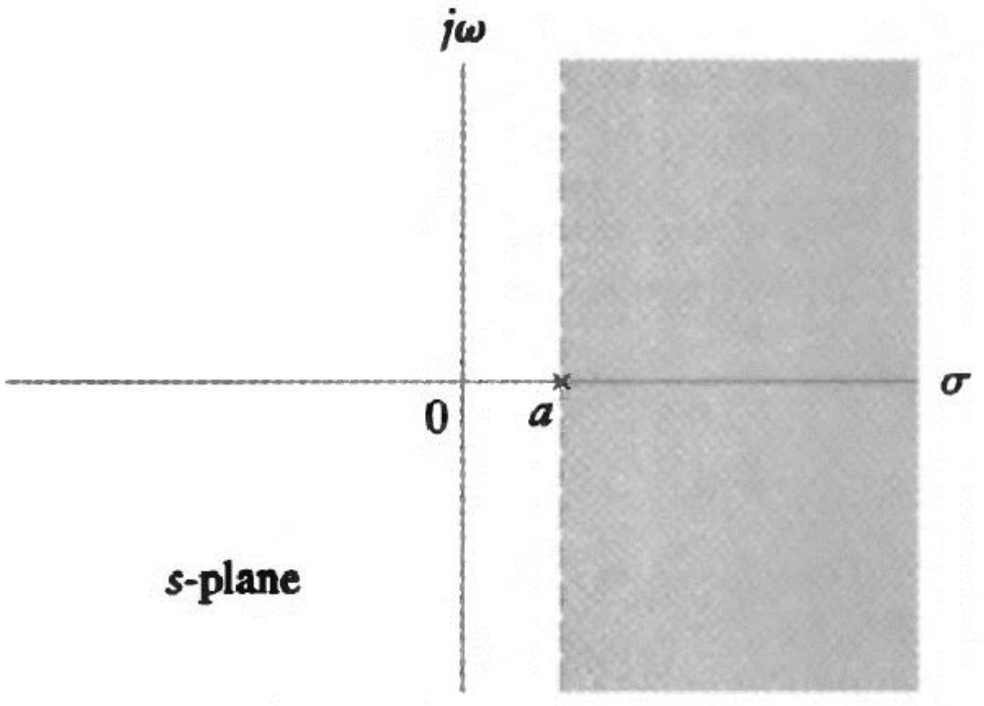
Vùng hội tụ ROC, điểm cực, điểm không

$$X(s) = \frac{-1}{\sigma + j\omega - a} e^{-(\sigma - a)t} e^{-j\omega t} \Big|_0^\infty .$$

Nếu $(\sigma - a) > 0$ thì $e^{-(\sigma-a)t} \to 0$ khi $t \to \infty$.

$$X(s) = \frac{-1}{\sigma + j\omega - a}(0 - 1), \quad \sigma > a,$$

$$= \frac{1}{s - a}, \quad \mathrm{Re}(s) > a.$$



BÀI TẬP 2:

Tìm biến đổi Laplace, vùng ROC của tín hiệu phản nhân quả sau:

$$y(t) = -e^{at}u(-t).$$

với *a* là số thực.

BÀI GIẢI:

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{at}u(-t)e^{-st}\,dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s-a)t}\,dt \\
&= \frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{s-a}, \quad \mathrm{Re}(s) < a.
\end{aligned}
$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE

D. Tính chất của vùng ROC

1. Vùng ROC không chứa các điểm cực.
2. Nếu $x(t)$ là tín hiệu thời gian hữu hạn $x(t) = 0$ ngoài khoảng $[t_1, t_2]$ thì ROC là toàn bộ mặt phẳng s trừ $s = 0$ và $s = \infty$.
3. Nếu $x(t)$ là tín hiệu phía phải $x(t) = 0$ ngoài khoảng $[t_1, \infty]$ thì ROC là $\mathrm{Re}(s) > \sigma_{max}$, σ_{max} là phần thực lớn nhất trong các điểm cực của $X(s)$.
4. Nếu $x(t)$ là tín hiệu phía trái $x(t) = 0$ ngoài khoảng $[-\infty, t_1]$ thì ROC là $\mathrm{Re}(s) < \sigma_{min}$, σ_{min} là phần thực nhỏ nhất trong các điểm cực của $X(s)$.
5. Nếu $x(t)$ là tín hiệu hai phía (thời gian vô hạn) thì ROC là $\sigma_1 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_2$, σ_1 và σ_2 là các phần thực của hai điểm cực của $X(s)$.

MỘT SỐ CẶP BIẾN ĐỔI LAPLACE THÔNG DỤNG

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$\delta(t)$	1	All s
$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$-u(-t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s) < 0$
$tu(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$t^k u(t)$	$\dfrac{k!}{s^{k+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$
$-e^{-at}u(-t)$	$\dfrac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)$

$x(t)$	$X(s)$	ROC
$te^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$
$-te^{-at}u(-t)$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}(s) < -\mathrm{Re}(a)$
$\cos \omega_0 t u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\sin \omega_0 t u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{-at}\cos \omega_0 t u(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$
$e^{-at}\sin \omega_0 t u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -\mathrm{Re}(a)$

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE

Property	Signal	Transform	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
Linearity	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
Time shifting	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	$R' = R$
Shifting in s	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R' = R + \mathrm{Re}(s_0)$
Time scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X(s)$	$R' = aR$
Time reversal	$x(-t)$	$X(-s)$	$R' = -R$
Differentiation in t	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R' \supset R$
Differentiation in s	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	$R' = R$
Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$R' \supset R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$
Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

A. Công thức biến đổi ngược

Tính tích phân đổi với biến phức rất phức tạp.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

B. Sử dụng các cặp biến đổi Laplace thông dụng và tính chất của biến đổi Laplace

$$X(s) = X_1(s) + \cdots + X_n(s)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_1(t) + \cdots + x_n(t)$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

C. Khai triển phân số thành phần

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

Khi $m < n$:

TH 1: Điểm cực đơn (phân biệt)

$$X(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n} \qquad c_k = (s - p_k)X(s)\big|_{s = p_k}$$

TH 2: Điểm cực kép (hệ số lặp lại r)

$$X(s) = \frac{\lambda_1}{s - p_i} + \frac{\lambda_2}{(s - p_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_r}{(s - p_i)^r}$$

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left[(s - p_i)^r X(s)\right]\Big|_{s = p_i}$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

Khi $m \geq n$:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)}$$

$\frac{R(s)}{D(s)}$ được tính như trường hợp $m < n$.

$Q(s)$ được tính bởi:

$$\frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

BÀI TẬP 3:

Tìm biến đổi Laplace ngược của:

$$X(s) = \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)^2}$$

BÀI GIẢI: Tìm biến đổi Laplace ngược của: $$X(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2} + \frac{A_3}{(s+2)^2}$$

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{1}{s+1}$$

$$-e^{2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} -\frac{1}{s+2}$$

$$2te^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{2}{(s+2)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) + 2te^{-2t}u(t)}$$

BÀI TẬP 4:

Tìm biến đổi Laplace ngược của:

$$X(s) = \frac{2s^3 - 9s^2 + 4s + 10}{s^2 - 3s - 4}$$

BÀI GIẢI:

Tìm biến đổi Laplace ngược của:

$$X(s) = \frac{2s^3 - 9s^2 + 4s + 10}{s^2 - 3s - 4}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2s - 3 \\ \hline s^2 - 3s - 4 & 2s^3 - 9s^2 + 4s + 10 \\ & \underline{2s^3 - 6s^2 - 8s} \\ & -3s^2 + 12s + 10 \\ & \underline{-3s^2 + 9s + 12} \\ & 3s - 2 \end{array}$$

$$X(s) = 2s - 3 + \frac{3s - 2}{s^2 - 3s - 4}$$

$$X(s) = 2s - 3 + \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s - 4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 2\delta^{(1)}(t) - 3\delta(t) + e^{-t}u(t) + 2e^{4t}u(t)}$$

BIẾN ĐỔI LAPLACE NGƯỢC

Nếu các điểm cực là cặp liên hiệp phức:

$$\frac{B_1 s + B_2}{(s-\alpha-j\omega_o)(s-\alpha+j\omega_o)} = \frac{B_1 s + B_2}{(s-\alpha)^2+\omega_o^2}$$

$$\frac{B_1 s + B_2}{(s-\alpha)^2+\omega_o^2} = \frac{C_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\omega_o^2} + \frac{C_2\omega_o}{(s-\alpha)^2+\omega_o^2}$$

$$\boxed{C_1 e^{\alpha t}\cos(\omega_o t)u(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} \frac{C_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\omega_o^2}.}$$

$$\boxed{C_2 e^{\alpha t}\sin(\omega_o t)u(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} \frac{C_2\omega_o}{(s-\alpha)^2+\omega_o^2}.}$$

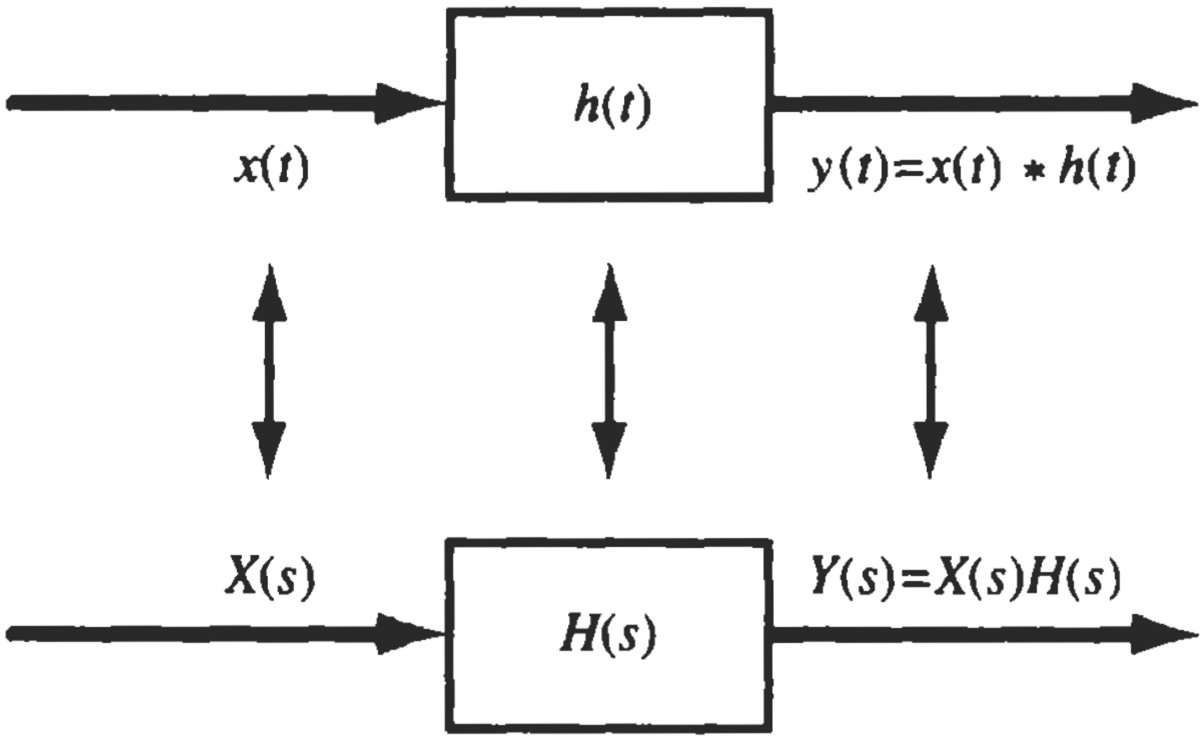
HÀM TRUYỀN CỦA HỆ THỐNG LTI

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

Lấy biến đổi Laplace hai vế:

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



$H(s)$ được gọi là hàm truyền của hệ thống.

PHÂN LOẠI HỆ THỐNG

A. Tính nhân quả

Hệ thống LTI liên tục là nhân quả nếu: $h(t) = 0 \qquad t < 0$

➡ $h(t)$ là tín hiệu phía phải nên ROC của $H(s)$ có dạng:

$$\boxed{\operatorname{Re}(s) > \sigma_{\max}}$$

PHÂN LOẠI HỆ THỐNG

B. Tính ổn định

Hệ thống LTI liên tục là ổn định nếu: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt$$

Đặt $s = j\omega$

$$|H(j\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|h(t)e^{-j\omega t}\right| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

Hay $H(s)$ hội tụ với $s = j\omega$.

→ ROC của $H(s)$ chứa $s = j\omega$.

HỆ THỐNG LTI BIỂU DIỄN BẰNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

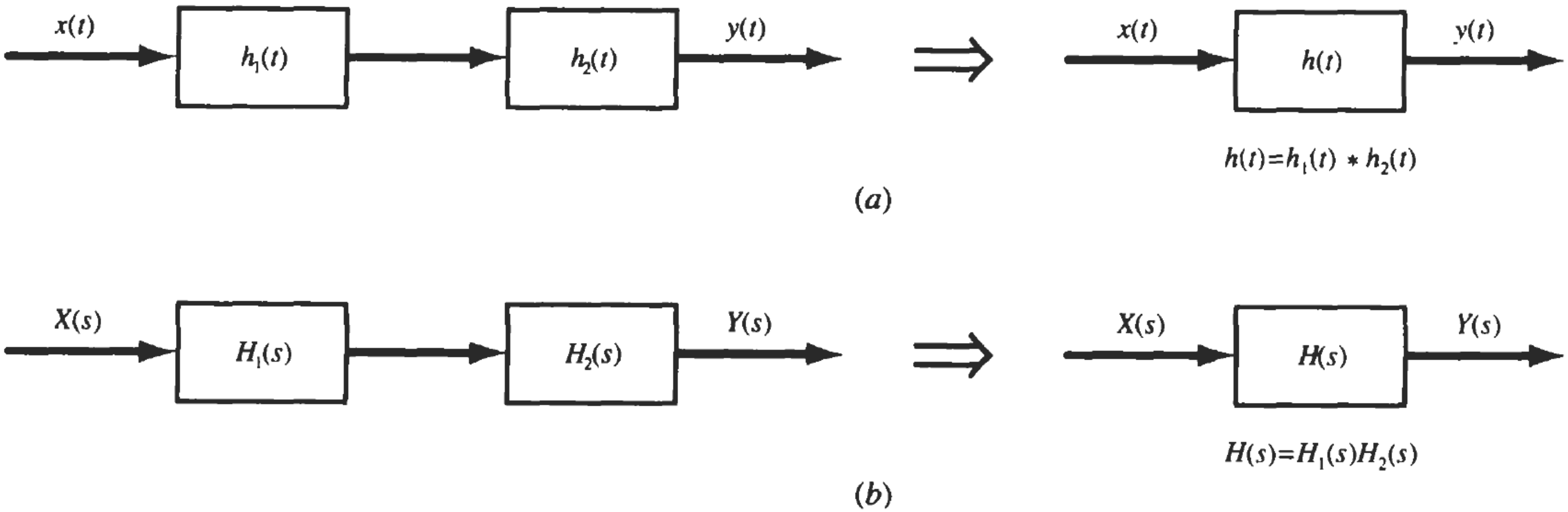
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Thực hiện biến đổi Laplace hai vế:

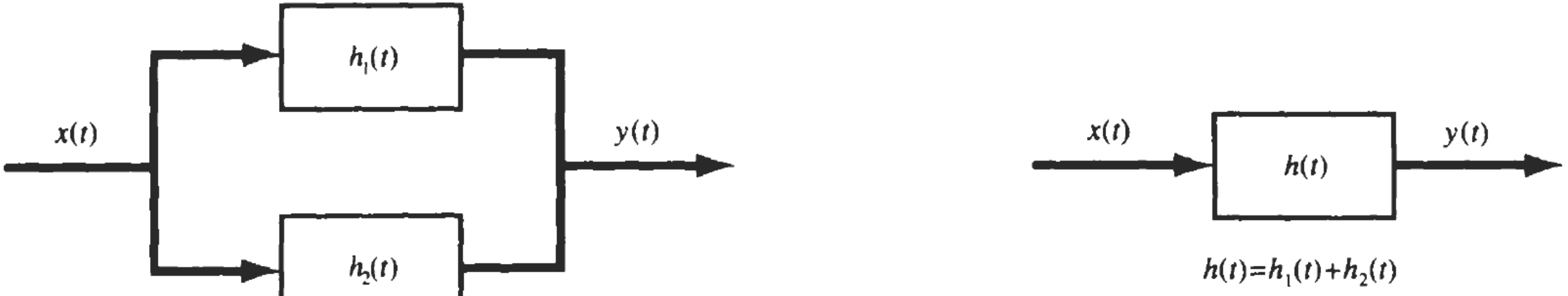
$$Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

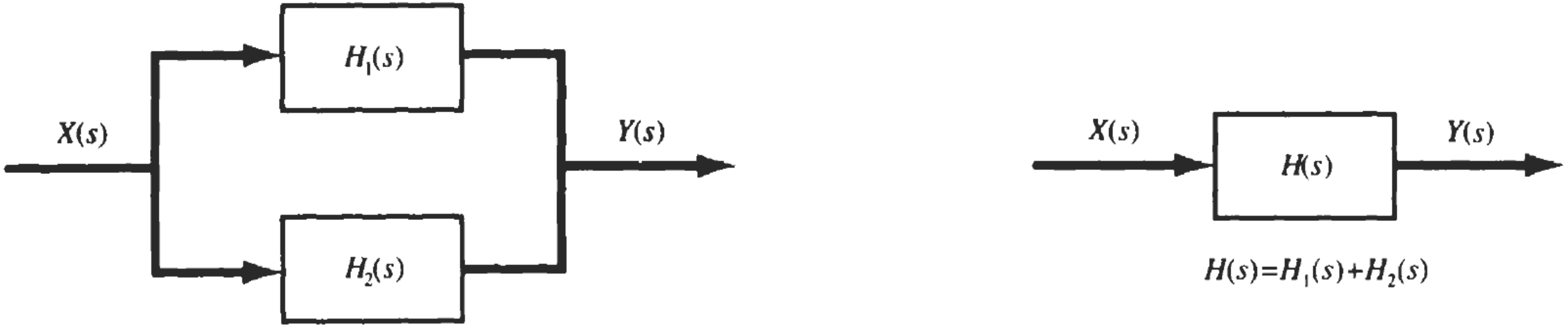
KẾT HỢP CÁC HỆ THỐNG - MẮC NỐI TIẾP



KẾT HỢP CÁC HỆ THỐNG - MẮC SONG SONG



(a)



(b)

BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

$$X_I(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

Ký hiệu 0^- cho phép tín hiệu chứa xung đơn vị và vi phân của xung đơn vị. $x(t)$ trong biến đổi Laplace sẽ tương đương tín hiệu phía phải nên có vùng ROC dạng:

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_{\max}$$

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

Tương tự như biến đổi Laplace hai phía, ngoại trừ:

Phép vi phân trong miền thời gian:

$$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^nX_I(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-)$$

Với: $$x^{(r)}(0^-) = \left.\frac{d^rx(t)}{dt^r}\right|_{t=0^-}$$

TÍNH CHẤT CỦA BIẾN ĐỔI LAPLACE MỘT PHÍA

Phép tích phân trong miền thời gian:

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s} X_I(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau$$

SO SÁNH GIỮA BIẾN ĐỔI MỘT PHÍA VÀ HAI PHÍA

Signal	*Unilateral Transform* $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} X(s)$ $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} Y(s)$	*Bilateral Transform* $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$	ROC $s \in R_x$ $s \in R_y$
$ax(t) + by(t)$	$aX(s) + bY(s)$	$aX(s) + bY(s)$	At least $R_x \cap R_y$
$x(t-\tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$ if $x(t-\tau)u(t) = x(t-\tau)u(t-\tau)$	$e^{-s\tau}X(s)$	R_x
$e^{s_o t}x(t)$	$X(s - s_o)$	$X(s - s_o)$	$R_x + \mathrm{Re}\{s_o\}$
$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$	$\frac{1}{\lvert a \rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{R_x}{\lvert a \rvert}$
$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$ if $x(t) = y(t) = 0$ for $t < 0$	$X(s)Y(s)$	At least $R_x \cap R_y$
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R_x
$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s) - x(0^-)$	$sX(s)$	At least R_x
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)\,d\tau + \frac{X(s)}{s}$	$\frac{X(s)}{s}$	At least $R_x \cap \{\mathrm{Re}\{s\} > 0\}$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI LAPLACE

Biến đổi Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Biến đổi Laplace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X(s)\big|_{s=j\omega} = \mathscr{F}\{x(t)\}}$$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI LAPLACE

Đặt $s = \sigma + j\omega$ ta có:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-(\sigma + j\omega)t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t)\, e^{-\sigma t} \right] e^{-j\omega t}\, dt$$

$$X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\left\{ x(t)\, e^{-\sigma t} \right\}$$

Như vậy biến đổi Laplace của tín hiệu $x(t)$ bằng biến đổi Fourier của tín hiệu $x(t)e^{-\sigma t}$.

Biến đổi Laplace được coi là dạng tổng quát của biến đổi Fourier với tần số phức $s = \sigma + j\omega$

Biến đổi Fourier được tính từ biến đổi Laplace khi đặt $s = j\omega$

nếu $x(t)$ có thể tích phân tuyệt đối hay: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty$

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

Ví dụ: Cho chuỗi mũ nhân quả:

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a > 0$$

Biến đổi Laplace: $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) = \dfrac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a$

Biến đổi Fourier: $\mathscr{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$

$$= \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega}$$

Chú ý: $x(t)$ có thể tích phân tuyệt đối.

LIÊN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI LAPLACE

Ví dụ: Cho tín hiệu nhảy bậc u(t)

Biến đổi Laplace: $$\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \qquad \operatorname{Re}(s) > 0$$

Biến đổi Fourier: $$\mathscr{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\rightarrow X(\omega) \neq X(s)\big|_{s=j\omega}$$

Chú ý: u(t) không thể có thể tích phân tuyệt đối.