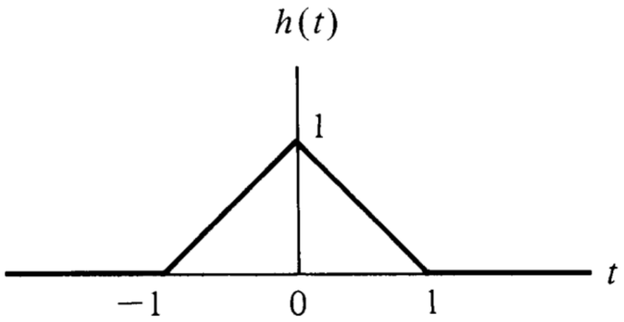
Ngày: 03/11/2021

LUYỆN TẬP MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ XÁC ĐỊNH ĐÁP ỨNG XUNG, PHÂN LOẠI HỆ THỐNG DỰA TRÊN ĐÁP ỨNG XUNG, XÁC ĐỊNH TÍN HIỆU LỐI RA TỪ TÍN HIỆU LỐI VÀO VÀ ĐÁP ỨNG XUNG

Bài 1: Hệ LTI có đáp ứng xung dạng:

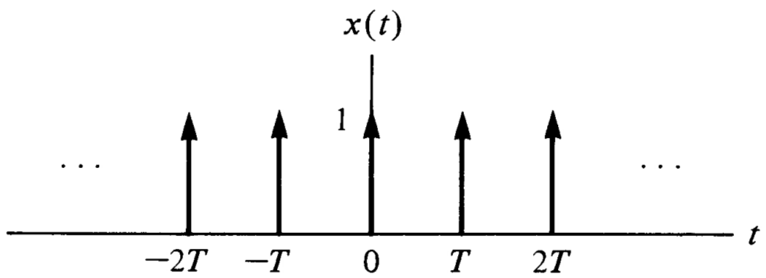


Biết tín hiệu lối vào hệ thống:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$

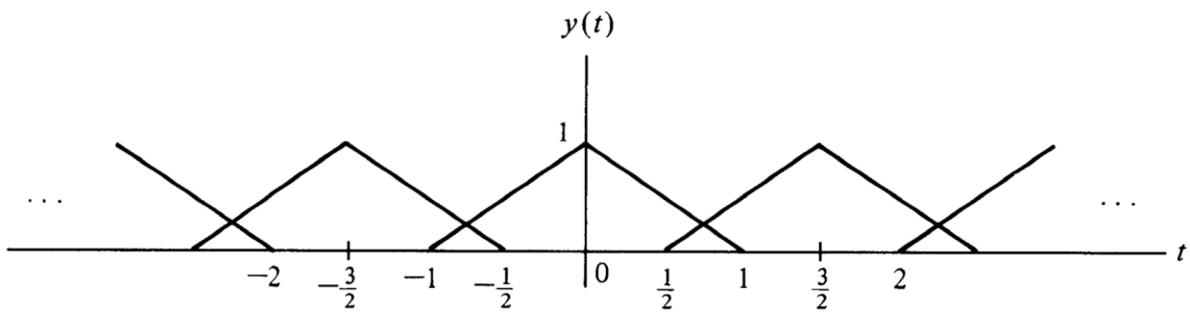
a) Vẽ tín hiệu x(t)
b) Vẽ tín hiệu lối ra biết T=3/2

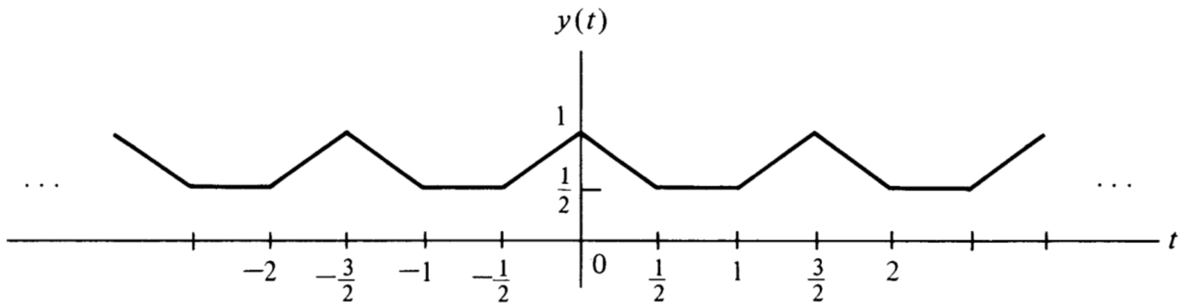
Đáp án: 0,5 điểm/ý x 2 ý = 1 điểm
(a)



(b)

Using the result $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t_0)$, we have





<u>Bài 2</u>: Nhận định nào sau đây đúng? Vì sao?

(a) $x[n] * \{h[n]g[n]\} = \{x[n] * h[n]\}g[n]$

(b) If $y(t) = x(t) * h(t)$, then $y(2t) = 2x(2t) * h(2t)$.

(c) If $x(t)$ and $h(t)$ are odd signals, then $y(t) = x(t) * h(t)$ is an even signal.

(d) If $y(t) = x(t) * h(t)$, then $Ev\{y(t)\} = x(t) * Ev\{h(t)\} + Ev\{x(t)\} * h(t)$.

<u>Đáp án:</u> 0,25 điểm/ý x 4ý = 1 điểm

(a) False. Counterexample: Let $g[n] = \delta[n]$. Then

$$x[n] * \{h[n]g[n]\} = x[n] \cdot h[0],$$

$$\{x[n] * h[n]\}g[n] = \delta[n] \cdot [x[n] * h[n]]\Big|_{n=0}$$

and $x[n]$ may in general differ from $\delta[n]$.

(b) True.

$$y(2t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(2t - \tau)h(\tau)d\tau$$

Let $\tau' = \tau/2$. Then

$$\begin{aligned} y(2t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(2t - 2\tau')h(2\tau')2\,d\tau' \\ &= 2x(2t) * h(2t) \end{aligned}$$

(c) True.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ y(-t) &= x(-t) * h(-t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(-t + \tau)h(-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [-x(t - \tau)][-h(\tau)]\,d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)\,d\tau \qquad \text{since } x(\cdot) \text{ and } h(\cdot) \text{ are odd functions} \\ &= y(t) \end{aligned}$$

Hence $y(t) = y(-t)$, and $y(t)$ is even.

(d) False. Let

$$\begin{aligned} x(t) &= \delta(t - 1), \\ h(t) &= \delta(t + 1), \\ y(t) &= \delta(t), \qquad Ev\{y(t)\} = \delta(t) \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} x(t) * Ev\{h(t)\} &= \delta(t - 1) * \tfrac{1}{2}[\delta(t + 1) + \delta(t - 1)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\delta(t) + \delta(t - 2)], \\ Ev\{x(t)\} * h(t) &= \tfrac{1}{2}[\delta(t - 1) + \delta(t + 1)] * \delta(t + 1) \\ &= \tfrac{1}{2}[\delta(t) + \delta(t + 2)] \end{aligned}$$

But since $\frac{1}{2}[\delta(t - 2) + \delta(t + 2)] \neq 0$,

$$Ev\{y(t)\} \neq x(t) * Ev\{h(t)\} + Ev\{x(t)\} * h(t)$$

<u>Bài 3</u>: Cho hệ thống biểu diễn bởi phương trình sai phân

$$y[n] - ay[n-1] = x[n],\ 0 < a < 1,$$

(Các điều kiện ban đầu bằng 0)

(a) Nghiệm lại đáp ứng xung của hệ thống là

$$h[n] = a^n u[n]$$

(b) Phân loại tính không nhớ, nhân quả, ổn định của hệ thống? Giải thích lý do.

(c) Hệ thống ổn định nếu |a|>1 có đúng không?

<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 3ý = 1,5 điểm

(a) We want to show that

$$h[n] - ah[n-1] = \delta[n]$$

Substituting $h[n] = a^n u[n]$, we have

$$a^n u[n] - aa^{n-1}u[n-1] = a^n(u[n] - u[n-1])$$

But

$$u[n] - u[n-1] = \delta[n] \quad \text{and} \quad a^n\delta[n] = a^0\delta[n] = \delta[n]$$

(b) (i) The system is not memoryless since $h[n] \neq k\delta[n]$.

(ii) The system is causal since $h[n] = 0$ for $n < 0$.

(iii) The system is stable for $|a| < 1$ since

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|}$$

is bounded.

(c) The system is not stable for $|a| > 1$ since $\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n$ is not finite.

<u>Bài 4</u>: Cho hệ thống biểu diễn bởi phương trình sai phân

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

(Các điều kiện ban đầu bằng 0)

(a) Nghiệm lại đáp ứng xung của hệ thống là

$$h(t) = e^{-2t}u(t)$$

(b) Phân loại tính không nhớ, nhân quả, ổn định của hệ thống? Giải thích lý do.

<u>Đáp án:</u> 0,5 điểm/ý x 2ý = 1 điểm

(a) Consider $x(t) = \delta(t) \rightarrow y(t) = h(t)$. We want to verify that $h(t) = e^{-2t}u(t)$, so

$$\frac{dy(t)}{dt} = -2e^{-2t}u(t) + e^{-2t}\,\delta(t), \quad \text{or}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = e^{-2t}\,\delta(t),$$

but $e^{-2t}\delta(t) = \delta(t)$ because both functions have the same effect on a test function within an integral. Therefore, the impulse response is verified to be correct.

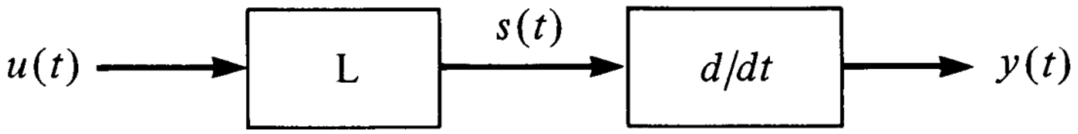
(b) (i) The system is not memoryless since $h(t) \neq k\delta(t)$.

(ii) The system is causal since $h(t) = 0$ for $t < 0$.

(iii) The system is stable since $h(t)$ is absolutely integrable.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t}\, dt = -\tfrac{1}{2}e^{-2t}\Big|_{0}^{\infty}$$
$$= \frac{1}{2}$$

<u>Bài 5</u>: Cho hệ thống gồm 2 hệ thống con mắc nối tiếp như sau:

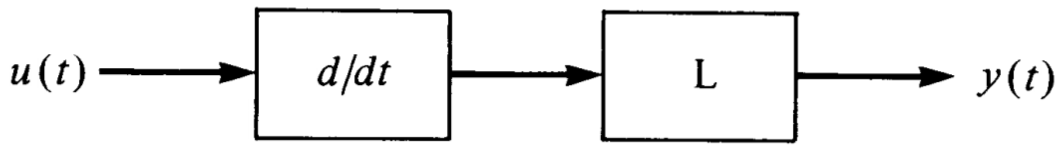


Biết u(t) là tín hiệu nhảy bậc và s(t) là đáp ứng xung nhảy bậc của hệ thống L. Chứng minh rằng đáp ứng xung của hệ thống L là:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

<u>Đáp án:</u> 1 điểm/ý x 1ý = 1 điểm

Do hai hệ thống con mắc nối tiếp với nhau nên có thể đổi vị trí hai hệ thống con:



Now we note that the input to system L is

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t),$$

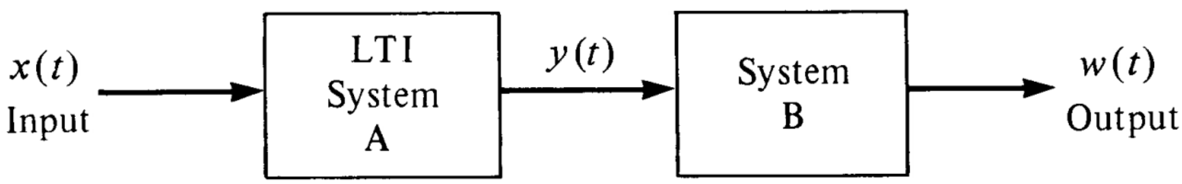
so $y(t)$ is the impulse response of system L. From the original diagram,

$$\frac{ds(t)}{dt} = y(t)$$

Therefore,

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

<u>Bài 6</u>: Cho hệ thống sau:



Biết B là hệ thống nghịch đảo của hệ thống A:

(a) Xác định lối ra w(t) biết lối vào x(t)=δ(t)

(b) Xác định lối ra w(t) biết lối vào x(t) tổng quát

Đáp án: 1 điểm/ý x 1ý = 1 điểm

(a) By definition, an inverse system cascaded with the original system is the identity system, which has an impulse response $h(t) = \delta(t)$. Therefore, if the cascaded system has an input of $\delta(t)$, the output $w(t) = h(t) = \delta(t)$.

(b) Because the system is an identity system, an input of $x(t)$ produces an output $w(t) = x(t)$.

Bài 7: Các phát biểu sau đúng hay sai, chứng minh:

(a) Nếu đáp ứng xung của hệ thống LTI tuần hoàn và không bằng không thì hệ thống không ổn định.

(b) Nghịch đảo của hệ thống LTI nhân quả luôn nhân quả.

(c) Nếu hệ LTI có |h(n)|≤K với mọi n (K hữu hạn) thì hệ thống ổn định.

(d) Nếu hệ LTI rời rạc có đáp ứng xung hữu hạn (biên độ và thời gian) thì hệ thống ổn định.

(e) Hệ LTI nhân quả thì ổn định.

(f) Mắc nối tiếp một hệ LTI không nhân quả với hệ nhân quả chắc chắn sẽ được hệ không nhân quả

(g) Hệ LTI liên tục là ổn định khi và chỉ khi đáp ứng nhảy bậc s (t) có thể tích phân

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\, dt < \infty$$

Gợi ý: áp dụng với hệ thống có

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

(h) Hệ LTI rời rạc là nhân quả khi và chỉ khi đáp ứng nhảy bậc s(n)=0 với n<0

Gợi ý: sử dụng tính chất

$$u[n] = \Sigma_{k=0}^{\infty} \delta[n - k]$$

Đáp án: 0,2 điểm/ý x 7ý = 1,4 điểm

(a) True.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^T |h(t)|\, dt = \infty$$

(b) False. If $h(t) = \delta(t - t_0)$ for $t_0 > 0$, then the inverse system impulse response is $\delta(t + t_0)$, which is noncausal.

(c) False. Suppose $h[n] = u[n]$. Then

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] = \infty$$

(d) True, assuming $h[n]$ is finite-amplitude.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=-K}^{L} |h[n]| = M \quad \text{(a number)}$$

(e) False. $h(t) = u(t)$ implies causality, but $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, dt = \infty$ implies that the system is not stable.

(f) False.

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \delta(t - t_1), \quad t_1 > 0 \quad \text{Causal} \\ h_2(t) &= \delta(t + t_2), \quad t_2 > 0 \quad \text{Noncausal} \\ h(t) &= h_1(t) * h_2(t) = \delta(t + t_2 - t_1), \quad t_2 \le t_1 \quad \text{Causal} \end{aligned}$$

(g) False. Suppose $h(t) = e^{-t}u(t)$. Then

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)\, dt = -e^{-t}\Big|_0^{\infty} = 1 \qquad \text{Stable}$$

The step response is

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau)e^{-\tau}u(\tau)\, d\tau &= \int_0^t e^{-\tau}\, d\tau \\ &= (1 - e^{-t})u(t), \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} (1 - e^{-t})\, dt = t + e^{-t}\Big|_0^{\infty} = \infty$$

(h) True. We know that $u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k]$ and, from superposition, $s[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[n - k]$. If $s[n] \neq 0$ for some $n < 0$, there exists some value of $h[k] \neq 0$ for some $k < 0$. If $s[n] = 0$ for all $n < 0$, $h[k] = 0$ for all $k < 0$.

Bài 8: Cho hệ thống T gồm hai hệ thống LTI H và G mắc nối tiếp

(a) Chứng minh rằng hệ thống T ổn định khi và chỉ khi cả hai hệ thống H và G ổn định.

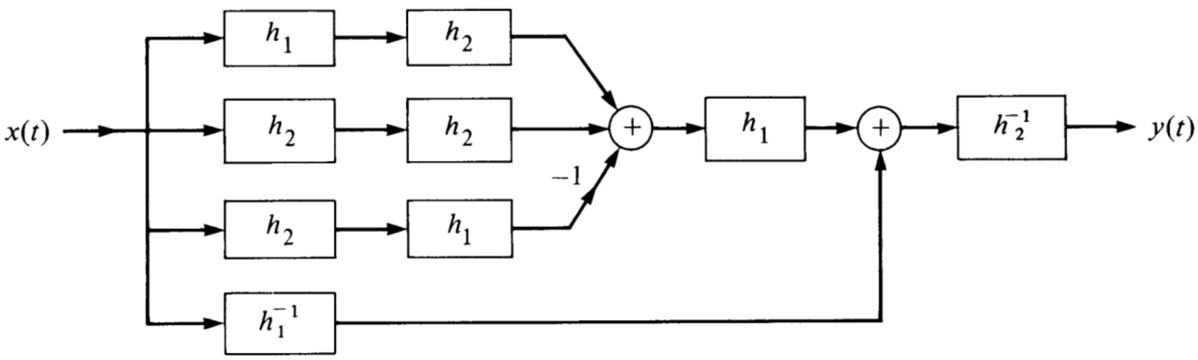
(b) Chứng minh rằng hệ thống T nhân quả khi và chỉ khi cả hai hệ thống H và G nhân quả.

Đáp án: 0,5 điểm/ý x 2ý = 1 điểm

(a) $h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$ since $h(t) = 0$ for $t < 0$ and $g(t) = 0$ for $t < 0$. But if $t < 0$, this integral is obviously zero. Therefore, the cascaded system is causal.

(b) By the definition of stability we know that for any bounded input to H, the output of H is also bounded. This output is also the input to system G. Since the input to G is bounded and G is stable, the output of G is bounded. Therefore, a bounded input to the cascaded system produces a bounded output. Hence, this system is stable.

Bài 9: Xác định đáp ứng xung của hệ thống sau:



Đáp án: 1 điểm/ý x 1ý = 1 điểm

$$h = \{[(h_1 * h_2) + (h_2 * h_2) - (h_2 * h_1)] * h_1 + h_1^{-1}\} * h_2^{-1}$$
$$h = (h_2 * h_1) + (h_1^{-1} * h_2^{-1})$$

Bài 10: Xác định tính chất (i) không nhớ, (ii) nhân quả, và (iii) ổn định của các hệ thống mô tả bởi đáp ứng xung sau:

(a) $h(t) = \cos(\pi t)$

(b) $h(t) = e^{-2t}u(t-1)$

(c) $h(t) = u(t+1)$

(d) $h(t) = 3\delta(t)$

(e) $h(t) = \cos(\pi t)u(t)$

(f) $h[n] = (-1)^n u[-n]$

(g) $h[n] = (1/2)^{|n|}$

(h) $h[n] = \cos(\frac{\pi}{8}n)\{u[n] - u[n-10]\}$

(i) $h[n] = 2u[n] - 2u[n-5]$

(j) $h[n] = \sin(\frac{\pi}{2}n)$

(k) $h[n] = \sum_{p=-1}^{\infty} \delta[n-2p]$

Đáp án: tối đa 2 điểm, sai mỗi ý trừ 0,2 điểm

a) $h(t) = \cos(\pi t)$ có nhớ, k° nhân quả, k° ổn định

b) $h(t) = e^{-2t} u(t-1)$ có nhớ, nhân quả, ổn định

$$\int_1^\infty |e^{-2t}| dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_1^\infty = -\frac{1}{2}\left(0 - e^{-2}\right) = \frac{1}{2} e^{-2} \text{ hữu hạn}$$

c) $h(t) = u(t+1)$ có nhớ, k° nhân quả, k° ổn định

d) $h(t) = 3\delta(t)$: không nhớ, nhân quả, ổn định

e) $h(t) = \cos(\pi t)\, u(t)$: có nhớ, nhân quả, k° ổn định

f) $h(n) = (-1)^n u[-n]$: có nhớ, k° nhân quả, k° ổn định
(phản nhân quả)

Do $\sum_{n=-\infty}^{0} |(-1)^n u[-n]| = \infty \longrightarrow$ vô hạn

g) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \begin{cases} \frac{1}{2}^n & \text{nếu } n > 0 \\ \frac{1}{2}^{-n} & \text{nếu } n < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2}^n & \text{nếu } n > 0 \\ 2^n & \text{nếu } n < 0 \end{cases}$

→ có nhớ, không nhân quả, ổn định

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{-\infty}^{0} |h[n]| + \sum_{1}^{+\infty} |h[n]|$$

$$= \sum_{+0}^{+\infty} |h[-n]| + \sum_{0}^{+\infty} |h[n]| - |h[0]|$$

$$= \sum_{0}^{+\infty} h[-n] + \sum_{0}^{+\infty} h[n] - 1$$

$$= \sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 3 \rightarrow \text{hữu hạn}$$

h) $h[n] = \cos\frac{\pi}{8}n \{u[n] - u[n-10]\}$

có nhớ, nhân quả, ổn định.

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{9} |\cos\frac{\pi}{8}n| \quad \text{hữu hạn}$$

$$= 1 + |\cos\frac{\pi}{8}| + |\underset{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\frac{\pi}{4}}| + |\cos\frac{3\pi}{8}| + |\underset{0}{\cos\frac{\pi}{2}}| + |\cos\frac{5\pi}{8}| + |\underset{-\frac{1}{2}}{\cos\frac{2\pi}{3}}| + |\cos\frac{7\pi}{8}| + |\overset{-1}{\cos\pi}| + |\cos\frac{9\pi}{8}|$$

$$= 1 + 0,9239 + 0,7071 + 0,3827 + 0 + 0,3827 + 0,5 + 0,9239 + 1 + 0,9239$$

$$= 2 + 0,9239 \times 3 + 0,7071 + 0,3827 \times 2 + 0,5 = 2 + 2,7717 + 0,7071 + 0,7654 + 0, \ldots = 6,7442.$$

i) $h[n] = 2u[n] - 2u[n-5] = 2\{u[n] - u[n-5]\}$

có nhớ, nhân quả, ổn định

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = 2\sum_{n=0}^{4} 1 = 10 \quad \text{hữu hạn}$$

j) $h[n] = \sin\frac{\pi}{2}n$

có nhớ, không nhân quả, k° ổn định

k) $h[n] = \sum_{p=1}^{\infty} \delta[n-2p]$.

có nhớ, k° nhân quả, k° ổn định.