CHƯƠNG 4:
BIẾN ĐỔI LAPLACE VÀ CÁC ỨNG DỤNG TRONG PHÂN TÍCH HỆ THỐNG THỜI GIAN LIÊN TỤC

GV: TS. Đinh Thị Thái Mai

- Biến đổi Laplace của tín hiệu.
- Hàm truyền của hệ thống LTI thời gian liên tục
- Biến đổi Laplace một phía
- Phân tích hệ thống

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Biến đổi Laplace

- Biến đổi Laplace của một tín hiệu liên tục $x(t)$ được định nghĩa như sau:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

trong đó, s là một biến phức: $s = \sigma + j\omega$.

- Biến đổi Laplace ngược:

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Vùng hội tụ của biến đổi Laplace

- Vùng hội tụ của biến đổi Laplace là vùng trong không gian *s* sao cho với bất cứ giá trị *s* nào trong vùng này, biến đổi Laplace luôn luôn hội tụ:

Ví dụ:

✓ ROC của biến đổi Laplace tín hiệu *u(t)* là một nữa mặt phẳng bên phải của mặt phẳng *s*.

✓ ROC của biến đổi Laplace của tín hiệu $x(t) = -u(-t)$ là một nữa mặt phẳng bên trái của mặt phẳng *s*.

- Hai tín hiệu khác nhau có thể có cùng biểu diễn Laplace nhưng vùng hội tụ thì phải khác nhau.

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Vùng hội tụ của biến đổi Laplace

- ROC của biến đổi Laplace chỉ phụ thuộc vào phần thực của s.
- ROC của biến đổi Laplace không được bao gồm các điểm cực.
- Nếu một tín hiệu có chiều dài hữu hạn và tồn tại ít nhất một giá trị s sao cho biến đổi Laplace của tín hiệu hội tụ, thì ROC của biến đổi Laplace là toàn mặt phẳng s.

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Vùng hội tụ của biến đổi Laplace

- Nếu một tín hiệu phía phải có ROC của biến đổi Laplace chứa đường thẳng $\sigma = \sigma_0$, thì ROC chứa toàn bộ phía phải của σ_0 trong mặt phẳng s.
- Nếu một tín hiệu phía trái có ROC của biến đổi Laplace chứa đường thẳng $\sigma = \sigma_0$, thì ROC chứa toàn bộ phía trái của σ_0 trong mặt phẳng s.

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Các tính chất của biến đổi Laplace.

- Tính tuyến tính:

  $\mathcal{L}[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha\mathcal{L}[x_1(t)] + \beta\mathcal{L}[x_2(t)]$.

  với $ROC = ROC[X_1(s)] \cap ROC[X_2(s)]$.

- Tính dịch thời gian:

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)] = e^{-st_0}X(s)$$

  với $ROC = ROC[X(s)]$

- Dịch trong mặt phẳng *s*:

$$\mathcal{L}[e^{s_0 t}x(t)] = X(s - s_0)$$

  với $ROC = ROC[X(s)]$ dịch đi một khoảng s_0.

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Các tính chất của biến đổi Laplace.

- Thay đổi thang thời gian:

$$\mathcal{L}[x(\alpha t)] = \frac{1}{|\alpha|} X(\frac{s}{\alpha}).$$

với $ROC = ROC\ [X(s)]$ được thay đổi với hệ số α.

- Vi phân:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s)$$

với $ROC = ROC[X(s)]$

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Các tính chất của biến đổi Laplace.

- Tích phân:

$$\mathcal{L}[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau] = \frac{1}{s} X(s).$$

với $ROC = ROC\ [X(s)] \cap \{\sigma > 0\}$.

- Tích chập:

$$\mathcal{L}[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(s) X_2(s)$$

với $ROC = ROC[X_1(s)] \cap ROC[X_2(s)]$.

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Các tính chất của biến đổi Laplace.

- Định lý giá trị đầu: Nếu $x(t)$ là một tín hiệu nhân quả và liên tục tại $t = 0$, thì

$$x(0) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

- Định lý giá trị cuối: Nếu $x(t)$ là một tín hiệu nhân quả và liên tục tại $t = 0$, thì

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Tính biến đổi Laplace ngược

Khai triển thành các phân thức hữu tỷ đơn giản(1)

- Không mất tính tổng quát, giả sử $X(s)$ được biểu diễn dưới dạng một hàm hữu tỷ $N(s)/D(s)$ ($N(s)$ và $D(s)$ là các đa thức và bậc của $N(s)$ thấp hơn bậc của $D(s)$).
- Định nghĩa $\{s_{p_k}\}$ là các điểm cực của $X(s)$: $\{s_{p_k}\}$ là nghiệm của phương trình $D(s) = 0$.

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Tính biến đổi Laplace ngược

Khai triển thành các phân thức hữu tỷ đơn giản(2)

- Nếu $\{s_{p_k}\}$ là khác nhau, thì khai triển phân thức hữu tỷ của $X(s)$ là:

$$X(s) = \sum_k \frac{A_k}{s - s_{p_k}}$$

trong đó, các hệ số $\{A_k\}$ được tính như sau:

$$A_k = (s - s_{p_k})\, X(s)\Big|_{s = s_{p_k}}$$

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Tính biến đổi Laplace ngược

Khai triển thành các phân thức hữu tỷ đơn giản(3)

- Trong trường hợp $X(s)$ có các điểm cực lặp, m_k số lần lặp của điểm cực s_{p_k}, là khác nhau, thì khai triển phân thức hữu tỷ của $X(s)$ là:

$$X(s) = \sum_k \sum_{m=1}^{m_k} \frac{A_k}{(s-s_{p_k})^m}$$

trong đó, các hệ số $\{A_{k_m}\}$ được tính như sau:

$$A_{k_m} = \frac{1}{(m_k-m)!} \frac{d^{m_k-m}\left(s-s_{p_k}\right)^{m_k} X(s)}{ds^{m_k-m}}\bigg|_{s=s_{p_k}}$$

4.1 Biến đổi Laplace của tín hiệu

Biến đổi Laplace ngược của một số hàm hữu tỷ

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-\alpha}\right] = \begin{cases} e^{\alpha t}u(t) & (\sigma > \alpha) \\ -e^{\alpha t}u(-t) & (\sigma < \alpha) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\alpha)^n}\right] = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}u(t) & (\sigma > \alpha) \\ -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}u(-t) & (\sigma < \alpha) \end{cases}$$

4.2 Hàm truyền của hệ thống LTI liên tục

Định nghĩa hàm truyền

- Xét một hệ thống LTI liên tục có đáp ứng xung $h(t)$, tức là:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

- Thực hiện biến đổi Laplace cả hai phía của phương trình trên và áp dụng tính chất tích chập của biến đổi Laplace, ta có:

$$Y(s) = H(s)X(s) \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

- $H(s)$ được gọi là hàm truyền của hệ thống.

4.2 Hàm truyền của hệ thống LTI liên tục

Định nghĩa hàm truyền

- Đáp ứng xung hệ thống có thể được xác định bằng cách thực hiện biến đổi Laplace ngược của hàm truyền hệ thống:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{Y(s)}{X(s)}\right]$$

4.2 Hàm truyền của hệ thống LTI liên tục

Định nghĩa hàm truyền

- Một hệ thống LTI thường được biểu diễn tổng quát bởi một phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng có dạng như sau:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- Thực hiện biến đổi Laplace cả hai phía của phương trình trên, ta có:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i s^i Y(s) = \sum_{j=0}^{M} b_j s^j X(s)$$

4.2 Hàm truyền của hệ thống LTI liên tục

Định nghĩa hàm truyền

- Hàm truyền của hệ thống khi đó được tính như sau:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}$$

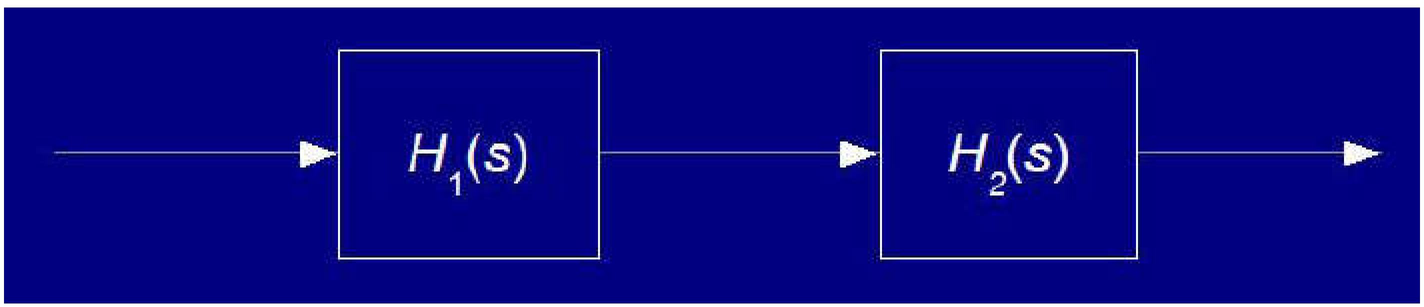
- Hàm truyền xác định một hệ thống, và dựa trên nghiệm của phương trình vi phân sử dụng biến đổi Laplace và biến đổi Laplace ngược:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)X(s)]$$

4.2 Hàm truyền của hệ thống LTI liên tục

Hàm truyền của các hệ thống kết nối

- Kết nối liên tục:

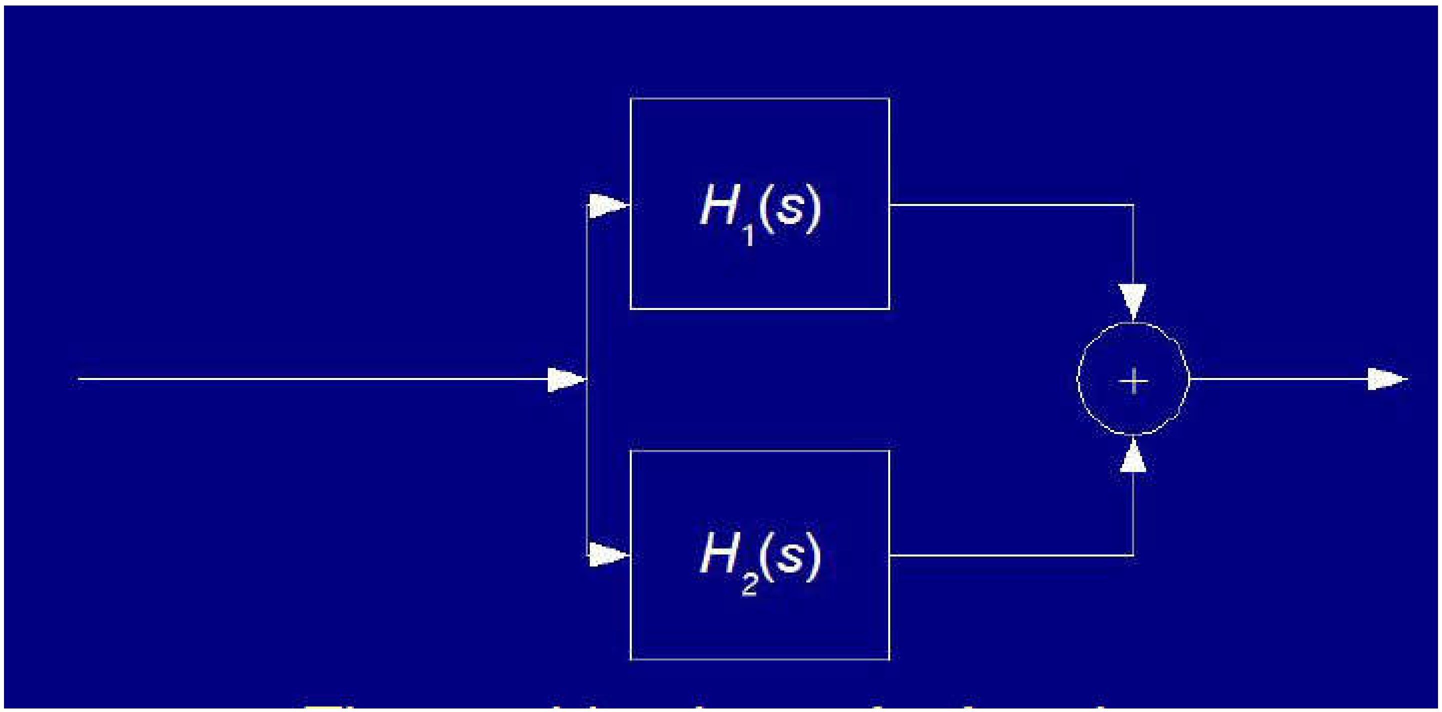


$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

4.2 Hàm truyền của hệ thống LTI liên tục

Hàm truyền của các hệ thống kết nối

- Kết nối song song:

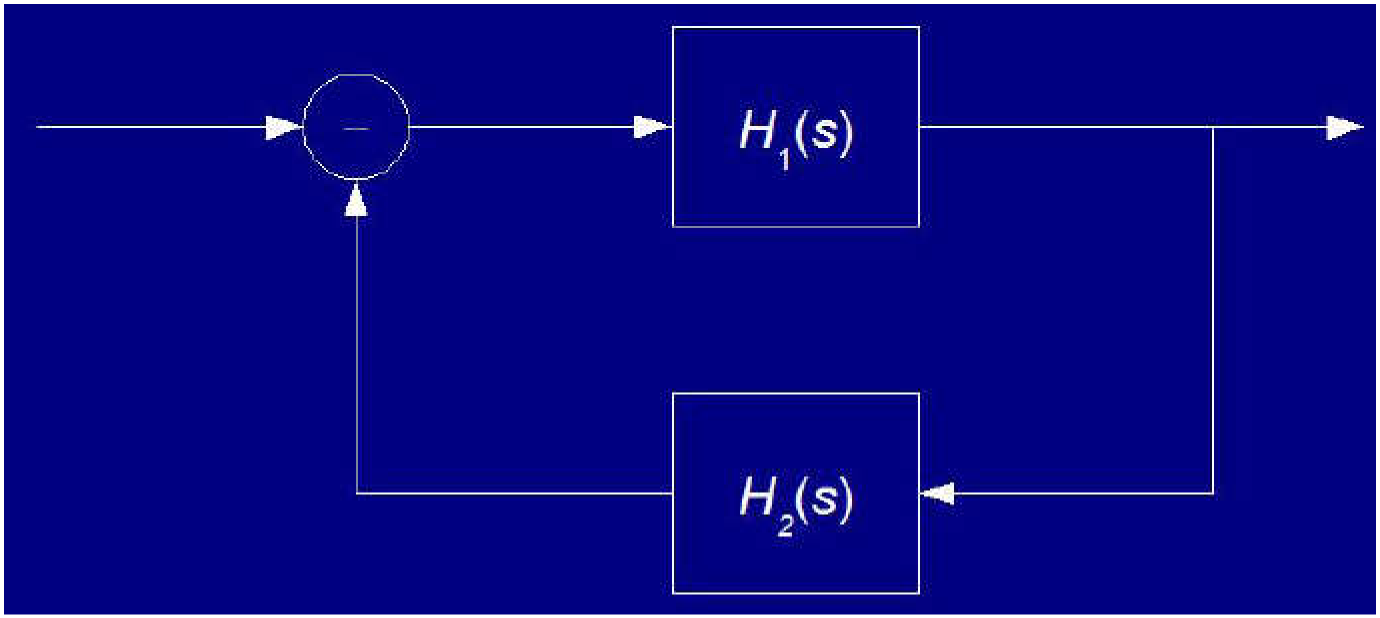


$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

4.2 Hàm truyền của hệ thống LTI liên tục

Hàm truyền của các hệ thống kết nối

- Hệ thống với phản hồi âm:

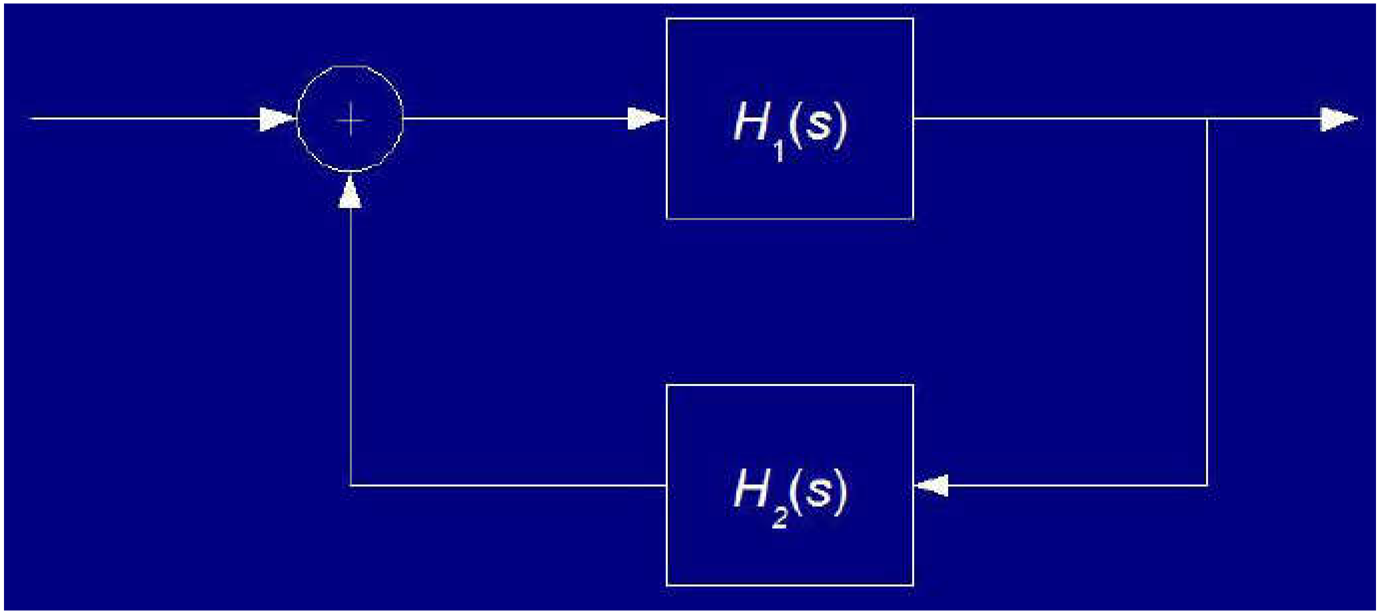


$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

4.2 Hàm truyền của hệ thống LTI liên tục

Hàm truyền của các hệ thống kết nối

- Hệ thống với phản hồi dương:



$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)}$$

4.3 Biến đổi Laplace một phía

Định nghĩa

- Biến đổi Laplace một phía của một tín hiệu $x(t)$ được định nghĩa là:

$$X^1(s) = \mathcal{L}^1[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

- Nếu $x(t)$ là nhân quả: Biến đổi Laplace hai phía và biến đổi Laplace một phía là giống nhau.

4.3 Biến đổi Laplace một phía

Các tính chất của biến đổi Laplace một phía

- Hầu hết các tính chất của biến đổi Laplace một phía tương tự với biến đổi Laplace hai phía:
- Điểm khác nhau nằm trong phương trình vi phân:

$$\mathcal{L}^{1}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

$$\mathcal{L}^{1}\left[\frac{d^{2}x(t)}{dt^{2}}\right] = s^{2}X(s) - sx(0) - \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

- Ứng dụng: giải các phương trình vi phân có điều kiện đầu → được áp dụng với các hệ thống nhân quả.

4.3 Biến đổi Laplace một phía

Giải các phương trình vi phân tuyến tính.

- Cho một hệ thống LTI được biểu diễn bằng phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng có dạng như sau:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- Thực hiện biến đổi Laplace một phía cả hai vế của phương trình trên, ta có:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i s^i Y^1(s) - I(s) = \sum_{j=0}^{M} b_j s^j X^1(s)$$

trong đó, $I(s)$ được tạo ra từ các điều kiện đầu tại $t = 0$.

4.3 Biến đổi Laplace một phía

Giải các phương trình vi phân tuyến tính.

- Đáp ứng $y(t)$ của một hệ thống LTI là nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng, gồm đáp ứng khởi đầu và đáp ứng trạng thái 0:

$$y(t) = y_0(t) + y_s(t)$$

- Hoặc:

$$Y^1(s) = {Y_0}^1(s) + {Y_s}^1(s)$$

4.3 Biến đổi Laplace một phía

Giải các phương trình vi phân tuyến tính.

- Đáp ứng trạng thái 0 với một tín hiệu đầu vào nhân quả (tức là: $X^1(s) = X(s)$):

$$y_s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)X(s)]$$

$$y(t) = y_0(t) + y_s(t)$$

- Đáp ứng khởi đầu:

$$y_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{I(s)}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}\right]$$

4.4 Phân tích hệ thống

Phân tích tính ổn định.

- Một hệ thống LTI có hàm truyền $H(s)$ với các điểm cực $\{s_{p_k}\} \rightarrow H(s)$ có thể được biểu diễn ở dạng sau (nếu các điểm cực khác nhau):

$$H(s) = \sum_k \frac{A_k}{s - s_{p_k}}$$

  - ✓ Nếu hệ thống là nhân quả, thì đáp ứng xung của nó có dạng:

$$h(t) = \sum_k A_k e^{s_{p_k} t} u(t)$$

    - ✓ Nếu hệ thống là phản nhân quả, thì đáp ứng xung của nó có dạng:

$$h(t) = -\sum_k A_k e^{s_{p_k} t} u(-t)$$

4.4 Phân tích hệ thống

Phân tích tính ổn định.

- Nếu hệ thống là nhân quả, điều kiện để nó ổn định là:

$$\forall s_{p_k}: \lim_{t \to +\infty} e^{s_{p_k} t} = 0 \to Re\left(s_{p_k}\right) < 0.$$

tức là, tất cả các điểm cực của $H(s)$ phải nằm trên một nữa mặt phẳng bên trái của mặt phẳng s.

- Nếu hệ thống là phản nhân quả, điều kiện để hệ thống ổn định là:

$$\forall s_{p_k}: \lim_{t \to +\infty} e^{s_{p_k} t} = 0 \to Re\left(s_{p_k}\right) > 0.$$

tức là, tất cả các điểm cực của $H(s)$ phải nằm trên một nữa mặt phẳng bên phải của mặt phẳng s.

4.4 Phân tích hệ thống

Phân tích tính ổn định.

- Một phương pháp khác để phân tích tính ổn định của một hệ thống nhân quả được biểu diễn bởi hàm truyền: sử dụng tiêu chuẩn Routh – Hurwitz.
  - ✓ Không cần phải giải phương trình đặc trưng để tìm các điểm cực.
  - ✓ Một bảng Routh – Hurwitz được tạo ra từ các hệ số của đa thức đặc trưng. Bảng này được sử dụng để xác định tính ổn định của hệ thống.