CHƯƠNG 2:
PHÂN TÍCH HỆ THỐNG TRONG MIỀN THỜI GIAN

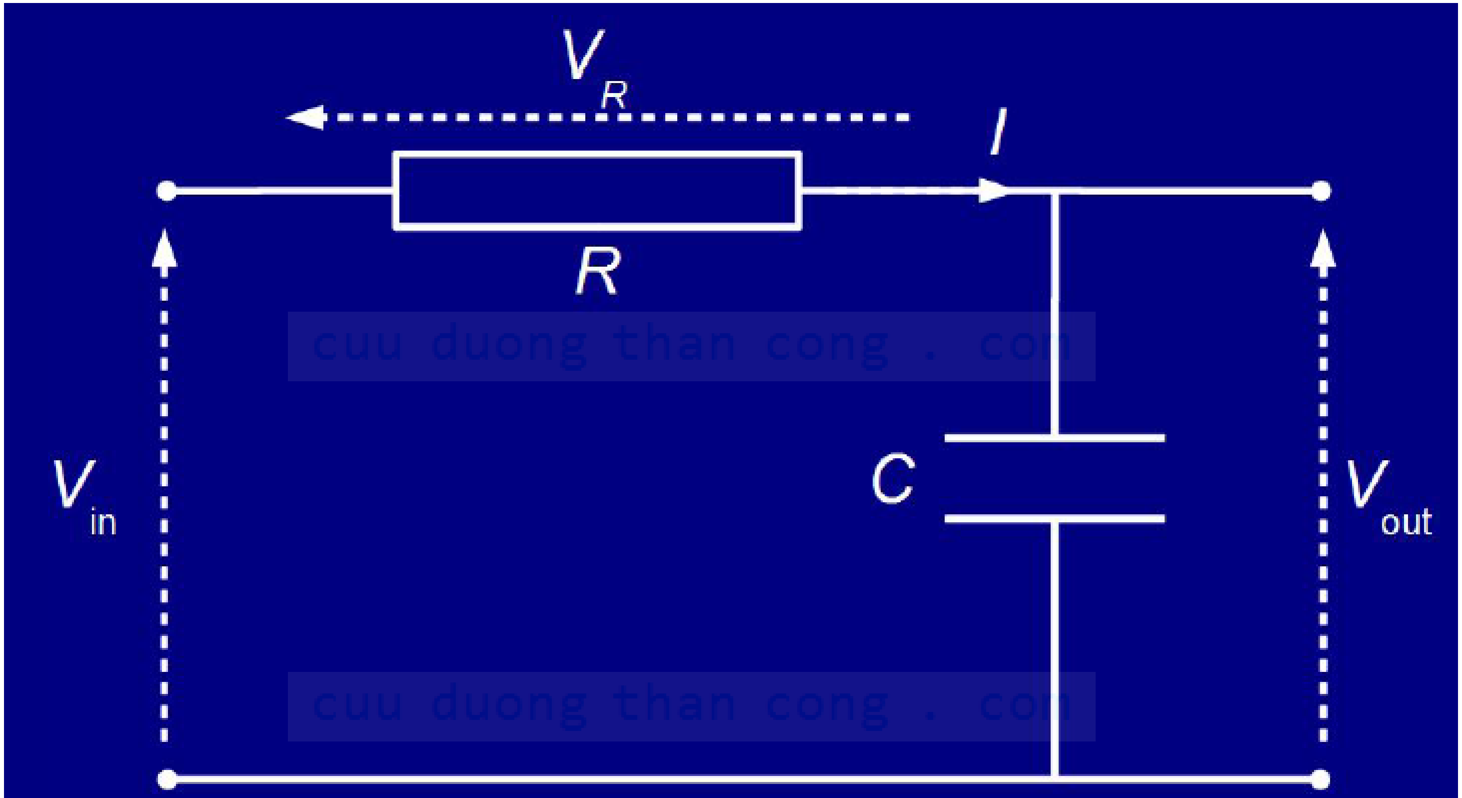
2.1 Hệ thống liên tục

- Phương trình vi phân của hệ thống LTI liên tục
- Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung
- Mô hình biến trạng thái

Phương trình vi phân của hệ thống LTI

- Phương trình vi phân là loại mô hình toán học được sử dụng phổ biến nhất để biểu diễn các hệ thống trong nhiều lĩnh vực khác nhau
- Đối với các hệ thống vật lý, phương trình vi phân biểu diễn hệ thống được thiết lập từ các phương trình của các định luật vật lý mà hoạt động của hệ thống tuân theo
- Các hệ thống LTI được biểu diễn bởi các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Một ví dụ của một hệ thống biểu diễn bằng phương trình vi phân hệ số hằng



$$C\frac{dV_{out}}{dt} + \frac{V_{out}}{R} = \frac{V_{in}}{R}$$

Phương trình vi phân của hệ thống LTI

- Dạng tổng quát của các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng biểu diễn các hệ thống tuyến tính bất biến:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

với x(t) là tín hiệu lối vào, y(t) là tín hiệu lối ra của hệ thống

- Giải phương trình vi phân tuyến tính nói trên cho phép xác định tín hiệu ra y(t) theo tín hiệu vào x(t)

Phương trình vi phân của hệ thống LTI

- Nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng có dạng như sau:

$$y(t) = y_0(t) + y_s(t)$$

$y_0(t)$: đáp ứng khởi đầu, còn gọi là đáp ứng khi không có kích thích, là nghiệm của phương trình thuần nhất

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = 0 \qquad (1)$$

$y_s(t)$: đáp ứng ở trạng thái không, là nghiệm đặc biệt của phương trình đối với tín hiệu vào x(t)

Phương trình vi phân của hệ thống LTI

- $y_0(t)$ là đáp ứng của hệ thống đối với điều kiện của hệ thống tại thời điểm khởi đầu (t=0), không xét tới tín hiệu vào x(t)

- Phương trình thuần nhất (1) có nghiệm dạng e^{st} với s là biến phức, thay vào phương trình ta có:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i s^i e^{st} = 0$$

→ s là nghiệm của phương trình đại số tuyến tính bậc N sau:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i s^i = 0 \qquad (2)$$

Phương trình vi phân của hệ thống LTI

- Phương trình (2) được gọi là phương trình đặc trưng của hệ thống
- Gọi các nghiệm của (2) là $\{s_k|k=1\ldots N\}$, nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (1) sẽ có dạng như sau nếu các nghiệm $\{s_k\}$ đều là nghiệm đơn:

$$y_0(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{s_k t}$$

Giá trị của các hệ số $\{c_k\}$ được xác định từ các điều kiện khởi đầu

Phương trình vi phân của hệ thống LTI

- Trường hợp phương trình (2) có nghiệm bội thì nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (1) sẽ có dạng như sau:

$$y_0(t) = \sum_k (c_k e^{s_k t} \sum_{i=0}^{p_k - 1} t^i)$$

trong đó p_k là bội của nghiệm s_k

Phương trình vi phân của hệ thống LTI

- $y_s(t)$ là đáp ứng của hệ thống đối với tín hiệu vào x(t) khi các điều kiện khởi đầu đều bằng 0

- $y_s(t)$ còn được gọi là nghiệm đặc biệt của phương trình vi phân tuyến tính biểu diễn hệ thống

- Để xác định $y_s(t)$, thông thường giả thiết $y_s(t)$ có dạng tương tự tín hiệu vào x(t) với một vài hệ số chưa biết, sau đó thay vào phương trình để xác định các hệ số.

Phương trình vi phân của hệ thống LTI

- Chú ý khi giả thiết dạng của $y_s(t)$: $y_s(t)$ phải độc lập với tất cả các thành phần của $y_0(t)$
- Ví dụ: nếu $x(t)=e^{\alpha t}$, ta có thể gặp một số trường hợp như sau:

  - Nếu $e^{\alpha t}$ không phải là một thành phần của $y_0(t)$, ta có thể giả thiết $y_s(t)$ có dạng $ce^{\alpha t}$
  - Nếu α là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (2) → $e^{\alpha t}$ là một thành phần của $y_0(t) \rightarrow y_s(t)$ phải có dạng $cte^{\alpha t}$
  - Nếu α là một nghiệm bội bậc p của phương trình đặc trưng (2) → $e^{\alpha t}$, → $te^{\alpha t}$,…, → $t^{p-1}e^{\alpha t}$ là các thành phần của $y_0(t) \rightarrow y_s(t)$ phải có dạng $ct^p e^{\alpha t}$

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Định nghĩa tích chập của hai tín hiệu: f(t) và g(t), ký hiệu là f(t)*g(t), được định nghĩa như sau:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Các tính chất của tích chập:
  - Tính giao hoán:
    $$f(t)*g(t)=g(t)*f(t)$$
  - Tính kết hợp:
    $$[f(t)*g(t)]*h(t)=f(t)*[g(t)*h(t)]$$
  - Tính phân phối:
    $$[f(t)+g(t)]*h(t)=f(t)*h(t)+g(t)*h(t)$$

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Tính dịch thời gian: nếu $x(t)=f(t)*g(t)$ thì

$$x(t-t_0) = f(t-t_0)*g(t) = f(t)*g(t-t_0)$$

- Tính nhân chập với tín hiệu xung đơn vị

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

- Tính nhân quả: nếu f(t) và g(t) là các tín hiệu nhân quả thì f(t)*g(t) cũng là tín hiệu nhân quả

Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Đáp ứng xung của hệ LTI:
  - Cho một hệ thống LTI được biểu diễn bằng mối quan hệ y(t) = **T**[x(t)]. Ta có thể biến đổi biễu diễn đó như sau:

$$y(t) = \mathbf{T}[x(t) * \delta(t)] = \mathbf{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{T}[\delta(t-\tau)]d\tau = x(t) * h(t)$$

trong đó h(t) = **T**[δ(t)] được gọi là đáp ứng xung của hệ LTI biểu diễn bởi **T**

  - Một hệ thống LTI là xác định khi đáp ứng xung của hệ thống đó xác định

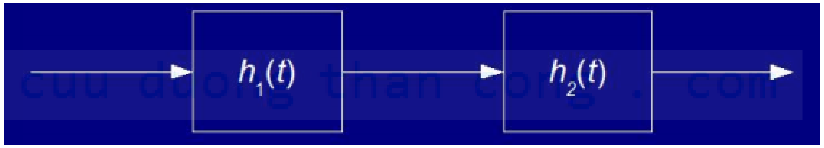
Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Phân tích đáp ứng xung của hệ LTI:
  - Hệ thống tĩnh: đáp ứng xung chỉ có giá trị khác không tại t = 0
  - Hệ thống nhân quả: đáp ứng xung là tín hiệu nhân quả
  - Hệ thống ổn đinh: khi và chỉ khi điều kiện sau đây đối với đáp ứng xung được thỏa mãn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

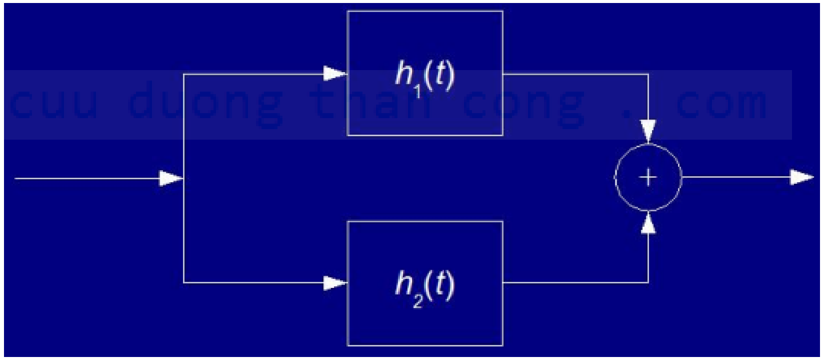
Biểu diễn hệ thống bằng đáp ứng xung

- Đáp ứng xung của các hệ thống ghép nối
  - Ghép nối tiếp hai hệ thống



Đáp ứng xung tổng hợp: $h(t) = h_1(t)*h_2(t)$

  - Ghép song song hai hệ thống



Đáp ứng xung tổng hợp: $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$

Biến trạng thái của hệ thống

• Trạng thái của một hệ thống được mô tả bằng một tập hợp các biến trạng thái

• Mô hình biến trạng thái của một hệ thống tuyến tính bất biến là tập hợp các phương trình vi phân của các biến trạng thái, cho phép xác định trạng thái trong tương lai của hệ thống khi biết trạng thái hiện thời và tín hiệu vào, do đó hệ thống hoàn toàn xác định khi trạng thái khởi đầu của hệ thống là xác định

• Mô hình biến trạng thái rất thuận tiện để biểu diễn hệ thống đa biến

Biến trạng thái của hệ thống

- Gọi $\{u_1(t), u_2(t),\ldots,\}$ là các tín hiệu vào, $\{y_1(t), y_2(t),\ldots,\}$ là các biến ra và $\{q_1(t), q_2(t),\ldots,\}$ là các biến trạng thái của hệ LTI.
- Phương trình trạng thái của hệ thống là các phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất:

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \sum_j a_{\mathrm{ij}} q_j(t) + \sum_k k_{\mathrm{ik}} u_k(t) \qquad (i = 1, 2\ldots)$$

- Các tín hiệu ra được xác định từ biến trạng thái và các tín hiệu vào như sau:

$$y_i(t) = \sum_j c_{\mathrm{ij}} q_j(t) + \sum_k d_{\mathrm{ik}} u_k(t) \qquad (i = 1, 2\ldots)$$

Biến trạng thái của hệ thống

- Mô hình trạng thái của một hệ thống tuyến tính bất biến thường được biểu diễn dưới dạng ma trận như sau:

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \mathbf{Aq}(t) + \mathbf{Bu}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Cq}(t) + \mathbf{Du}(t)$$

trong đó: **u**(t), **y**(t), **q**(t) là vecto cột với các phần tử lần lượt là các tín hiệu vào, tín hiệu ra và các biến trạng thái của hệ thống. **A,B,C,D** là các ma trận hệ số

Biến trạng thái của hệ thống

- Thiết lập phương trình trạng thái từ phương trình vi phân biểu diễn hệ thống LTI sau đây:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

- Đặt $u_j(t) = d^j x(t)/dt^j$ (j=0…M) là các tín hiệu vào của hệ thống và viết lại phương trình trên dưới dạng:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{M} b_j u_j(t)$$

Biến trạng thái của hệ thống

- Chọn các biến trạng thái như sau:

$$q_1(t) = y(t), q_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \ldots, q_N(t) = \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

- Các phương trình trạng thái

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = q_2(t), \frac{dq_2(t)}{dt} = q_3(t), \ldots, \frac{dq_{N-1}(t)}{dt} = q_N(t)$$

$$\frac{dq_N(t)}{dt} = \frac{1}{a_N}\left[-\sum_{i=0}^{N-1} a_i q_{i+1}(t) + \sum_{j=0}^{M} b_j u_j(t)\right]$$