

TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Chương 1: Giới thiệu về tín hiệu và hệ thống

Phần 1: TÍN HIỆU

Trần Thị Thúy Quỳnh



TÍN HIỆU

- Khái niệm
- Phân loại
- Các tín hiệu cơ sở



KHÁI NIỆM

TÍN HIỆU LÀ:

Đại lượng vật lý mang thông tin về một hiện tượng vật lý.
Hàm của một hay nhiều biến.

VÍ DỤ:

- Tín hiệu âm thanh: hàm của thời gian (tín hiệu một chiều).
- Ảnh động (hình chiếu của một khung cảnh động lên một mặt phẳng ảnh): hàm của 3 biến x , y , t .

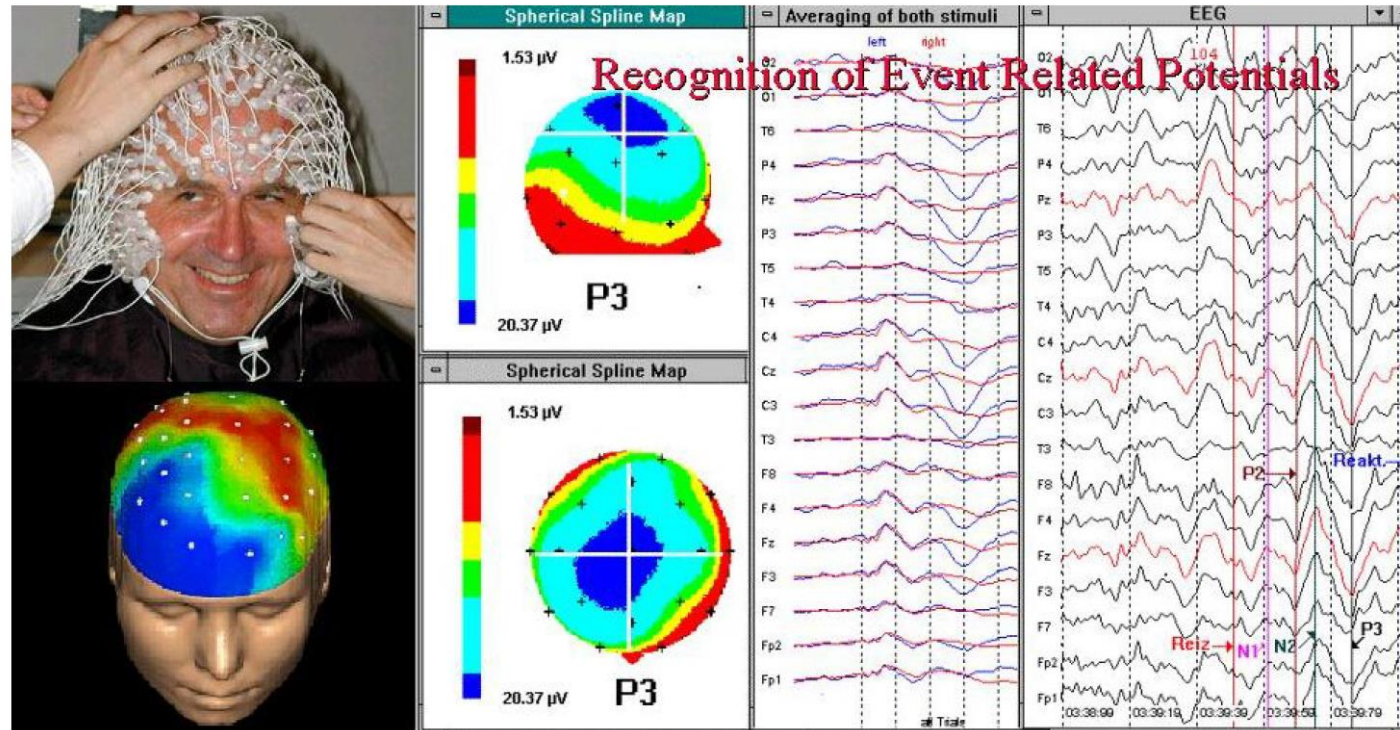


VÍ DỤ



Hình 1: Nhiệt độ thay đổi trong ngày

VÍ DỤ



Hình 2: Tín hiệu điện não

VÍ DỤ



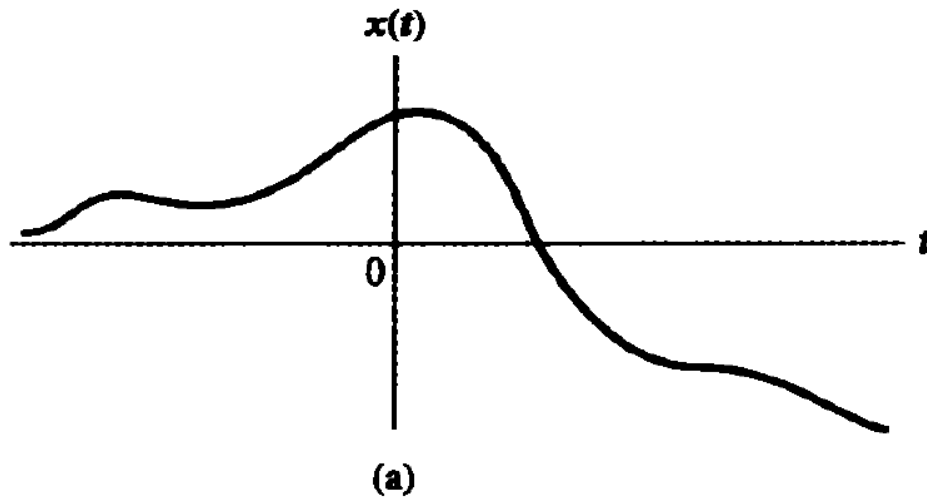
Hình 3: Tín hiệu ảnh/video

PHÂN LOẠI

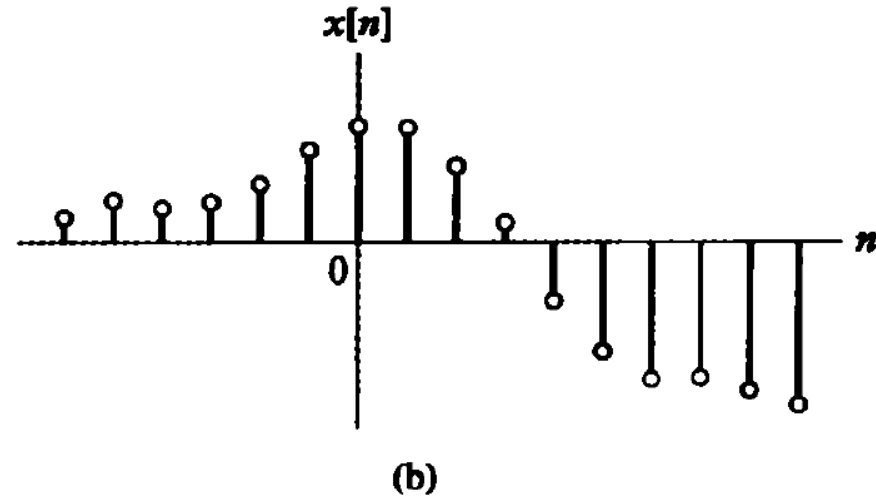
- Tín hiệu thời gian liên tục/thời gian rời rạc
- Tín hiệu tương tự/Tín hiệu số
- Tín hiệu chẵn/lẻ, đối xứng liên hợp phức
- Tín hiệu nhân quả/phản nhân quả/phi nhân quả
- Tín hiệu tuần hoàn/không tuần hoàn
- Tín hiệu xác định/ngẫu nhiên
- Tín hiệu năng lượng/công suất
- Tín hiệu đa kênh/đa chiều



PHÂN LOẠI - Tín hiệu thời gian liên tục/rời rạc



(a) Continuous-time signal $x(t)$



(b) Representation of $x(t)$ as a discrete-time signal $x[n]$

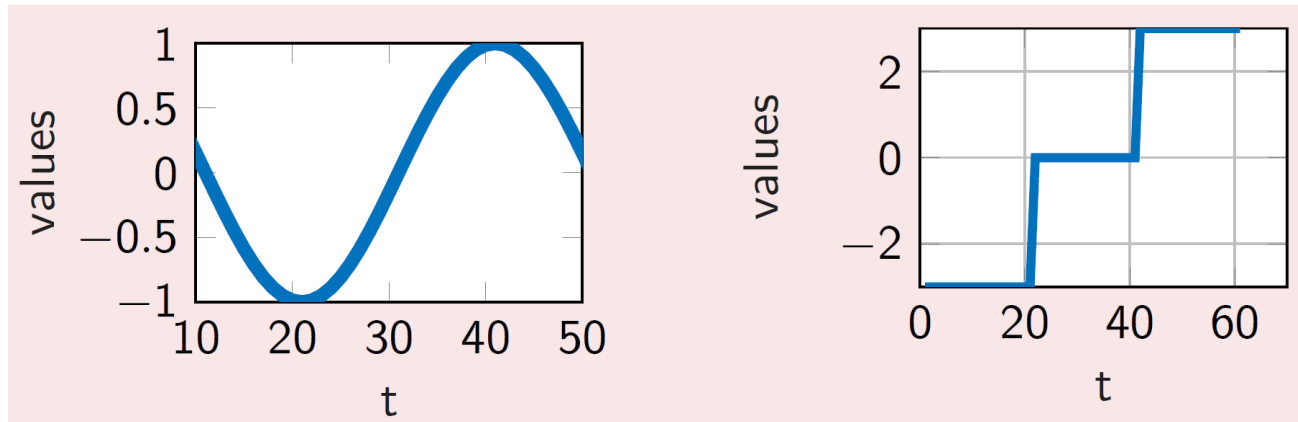
PHÂN LOẠI - Tín hiệu tương tự/tín hiệu số

Tín hiệu tương tự:

$x(t)$ là tín hiệu tương tự nếu nó liên tục theo thời gian và giá trị.

Tín hiệu số:

$x(t)$ là tín hiệu số nếu nó rời rạc theo thời gian và giá trị.



Tín hiệu rời rạc theo giá trị

PHÂN LOẠI - Tín hiệu chẵn/lẻ

Tín hiệu chẵn $x_e(t)$:

$x(t)$ là tín hiệu chẵn nếu $x(-t) = x(t)$ với mọi t .

Tín hiệu lẻ $x_o(t)$:

$x(t)$ là tín hiệu lẻ nếu $x(-t) = -x(t)$ với mọi t .

Với tín hiệu $x(t)$ tùy ý được biểu diễn bởi: $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

$$x(-t) = x_e(-t) + x_o(-t) = x_e(t) - x_o(t)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

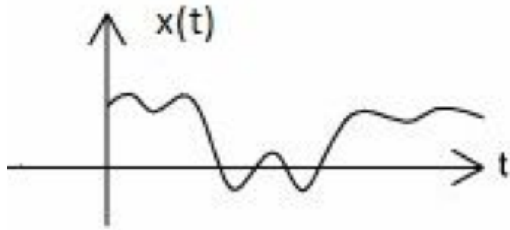
$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Tín hiệu đối xứng liên hợp phức:

$x(t)$ là tín hiệu đối xứng liên hợp phức nếu $x(-t) = x^*(t)$ với mọi t .

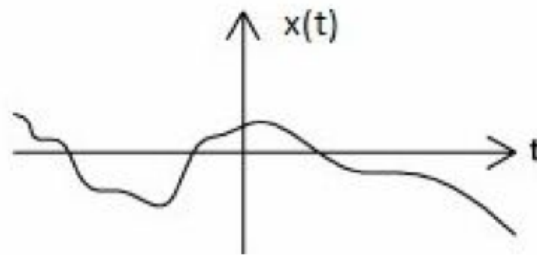
PHÂN LOẠI - Tín hiệu nhân quả/phản nhân quả/phi nhân quả

$$\forall t < 0 : f(t) = 0$$



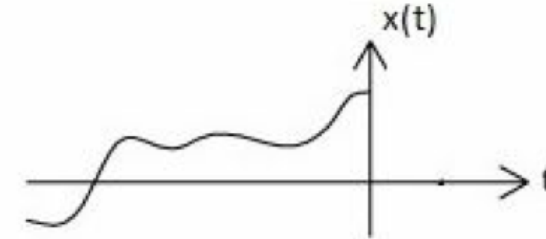
Tín hiệu nhân quả

$$\forall t : f(t) \neq 0$$



Tín hiệu phi nhân quả

$$\forall t > 0 : f(t) = 0$$



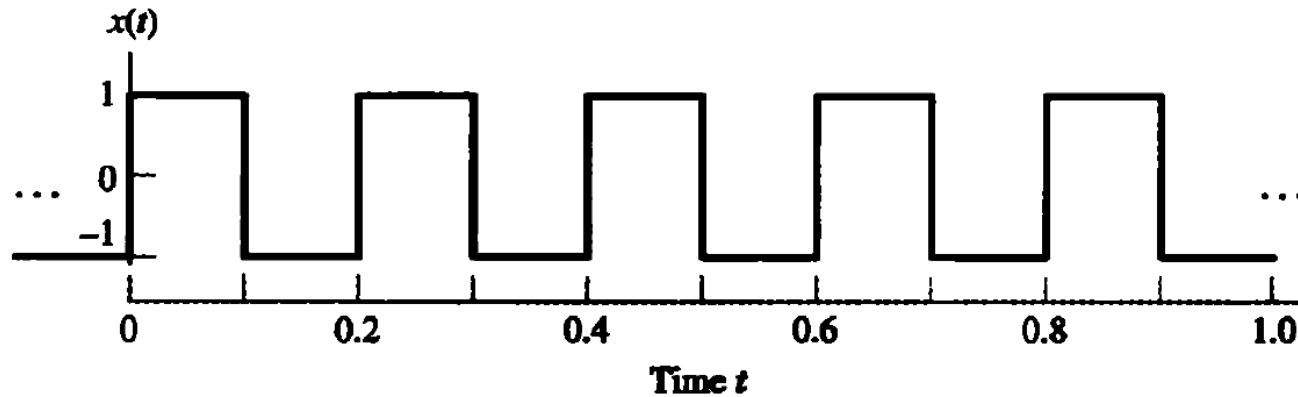
Tín hiệu phản nhân quả

PHÂN LOẠI - Tín hiệu tuần hoàn/không tuần hoàn

Tín hiệu tuần hoàn:

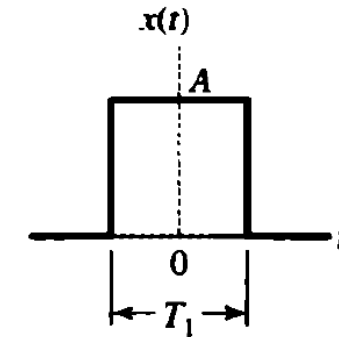
$x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn nếu $x(t) = x(t+T)$ với mọi t .

Chu kỳ cơ sở của tín hiệu tuần hoàn là giá trị T nhỏ nhất.



(a)

(a) Tín hiệu tuần hoàn



(b)

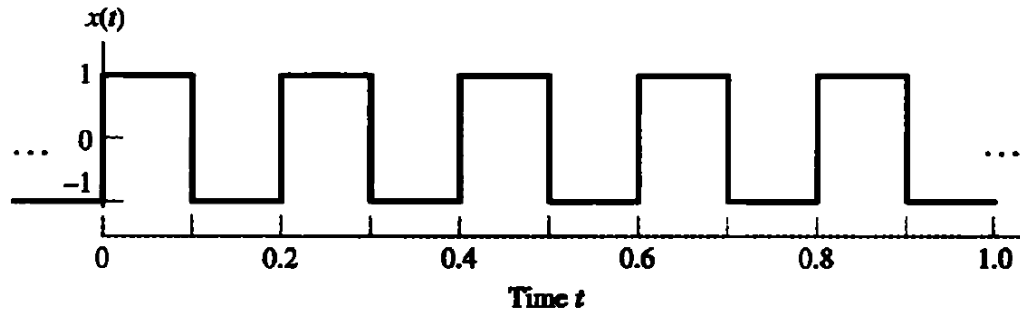
(b) Tín hiệu không tuần hoàn

PHÂN LOẠI - Tín hiệu tuần hoàn/không tuần hoàn

Tín hiệu tuần hoàn:

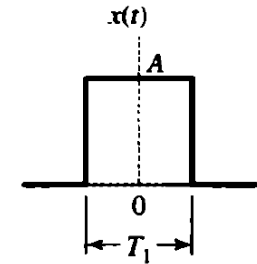
$x(t)$ là tín hiệu tuần hoàn nếu $x(t) = x(t+T)$ với mọi t .

Chu kỳ cơ sở của tín hiệu tuần hoàn là giá trị T nhỏ nhất.



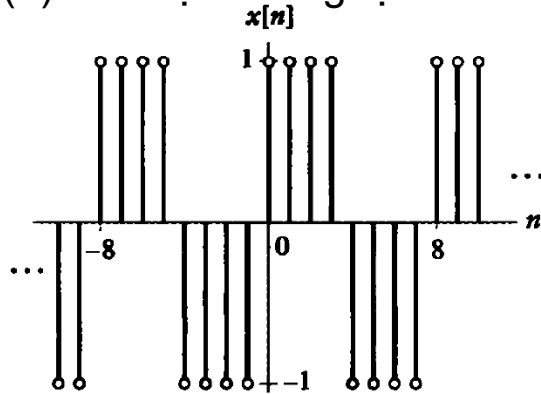
(a)

(a) Tín hiệu tương tự tuần hoàn

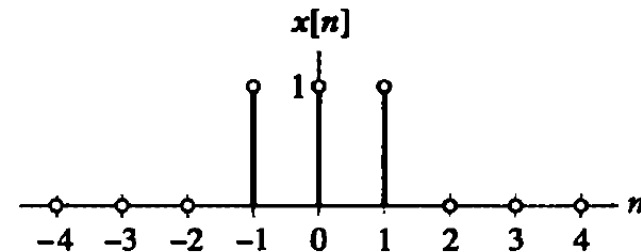


(b)

(b) Tín hiệu tương tự không tuần hoàn



(c) Tín hiệu rời rạc tuần hoàn

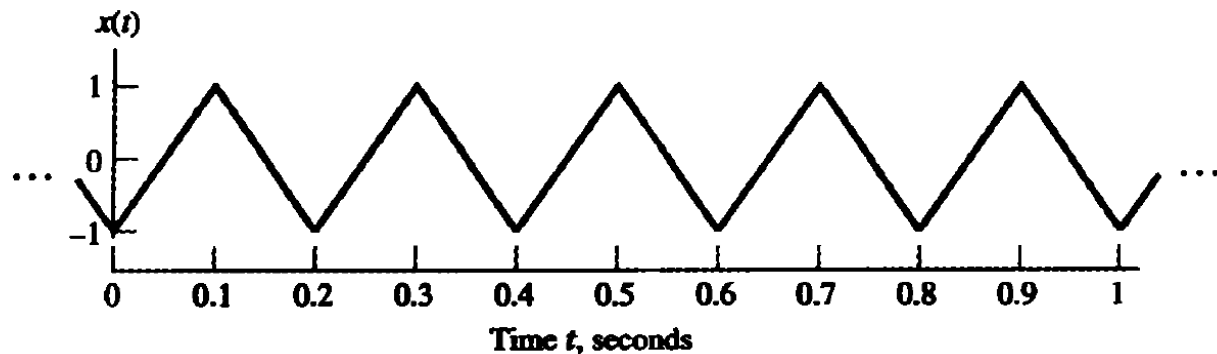


(d) Tín hiệu rời rạc không tuần hoàn

PHÂN LOẠI - Tín hiệu xác định/ngẫu nhiên

Tín hiệu xác định: giá trị tại bất cứ thời điểm nào đều xác định được chính xác bởi một công thức toán học hay một bảng tra cứu.

Tín hiệu ngẫu nhiên: chứa những yếu tố không thể xác định trước thời điểm giá trị của tín hiệu thực sự xuất hiện, vì vậy không thể xác định chính xác giá trị của tín hiệu tại các thời điểm trong tương lai.



(a) Tín hiệu xác định

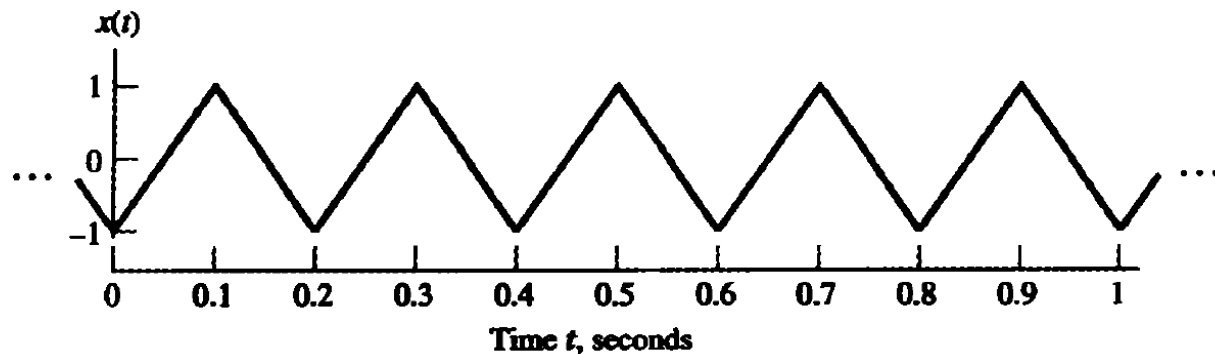


(b) Tín hiệu ngẫu nhiên

PHÂN LOẠI - Tín hiệu xác định/ngẫu nhiên

Tín hiệu xác định: giá trị tại bất cứ thời điểm nào đều xác định được chính xác bởi một công thức toán học hay một bảng tra cứu.

Tín hiệu ngẫu nhiên: chứa những yếu tố không thể xác định trước thời điểm giá trị của tín hiệu thực sự xuất hiện, vì vậy không thể xác định chính xác giá trị của tín hiệu tại các thời điểm trong tương lai.



(a) Tín hiệu xác định



(b) Tín hiệu ngẫu nhiên

PHÂN LOẠI - Tín hiệu năng lượng/công suất

Công suất tức thời trên điện trở $p(t) = \frac{v^2(t)}{R}$ $p(t) = Ri^2(t)$

Công suất tức thời trên điện trở $R=1\Omega$: $p(t) = x^2(t)$

Trong hệ thống điện, tín hiệu có thể là điện áp hoặc dòng điện.

Năng lượng tổng cộng:

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

Công suất trung bình:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

PHÂN LOẠI - Tín hiệu năng lượng/công suất

Công suất trung bình:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

Công suất trung bình của tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ cơ sở T:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$$

\sqrt{P} được gọi là rms (root mean square) của tín hiệu tuần hoàn $x(t)$.



PHÂN LOẠI - Tín hiệu năng lượng/công suất

Với tín hiệu rời rạc:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n]$$

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N x^2[n]$$

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$$

Tín hiệu năng lượng nếu:

$$0 < E < \infty$$

Tín hiệu công suất nếu:

$$0 < P < \infty$$



PHÂN LOẠI - Tín hiệu đa kênh/đa chiều

Tín hiệu đa kênh: được biểu diễn dưới dạng vector với các thành phần là tín hiệu đơn kênh.

$$\mathbf{X}(t)=[x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)]$$

Tín hiệu đa chiều: hàm của nhiều biến độc lập

$$x(a_1, a_2, \dots, a_N)$$



CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

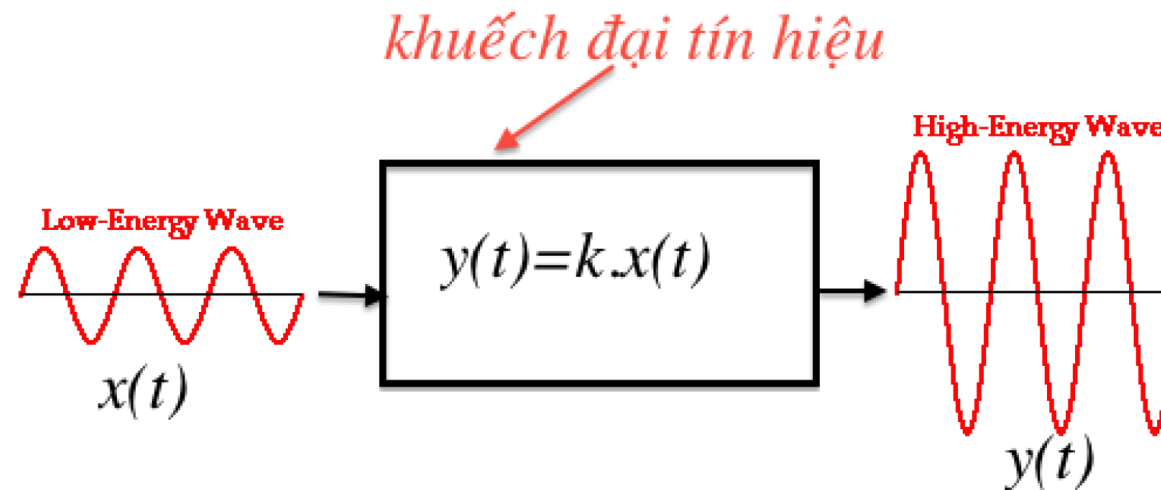
- Nhân với hằng số
- Cộng
- Nhân
- Vi phân
- Tích phân
- Nén/Giãn
- Dịch
- Dịch và Nén/Giãn
- Lật



CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

Nhân tín hiệu với hằng số c: thay đổi biên độ tín hiệu gốc.

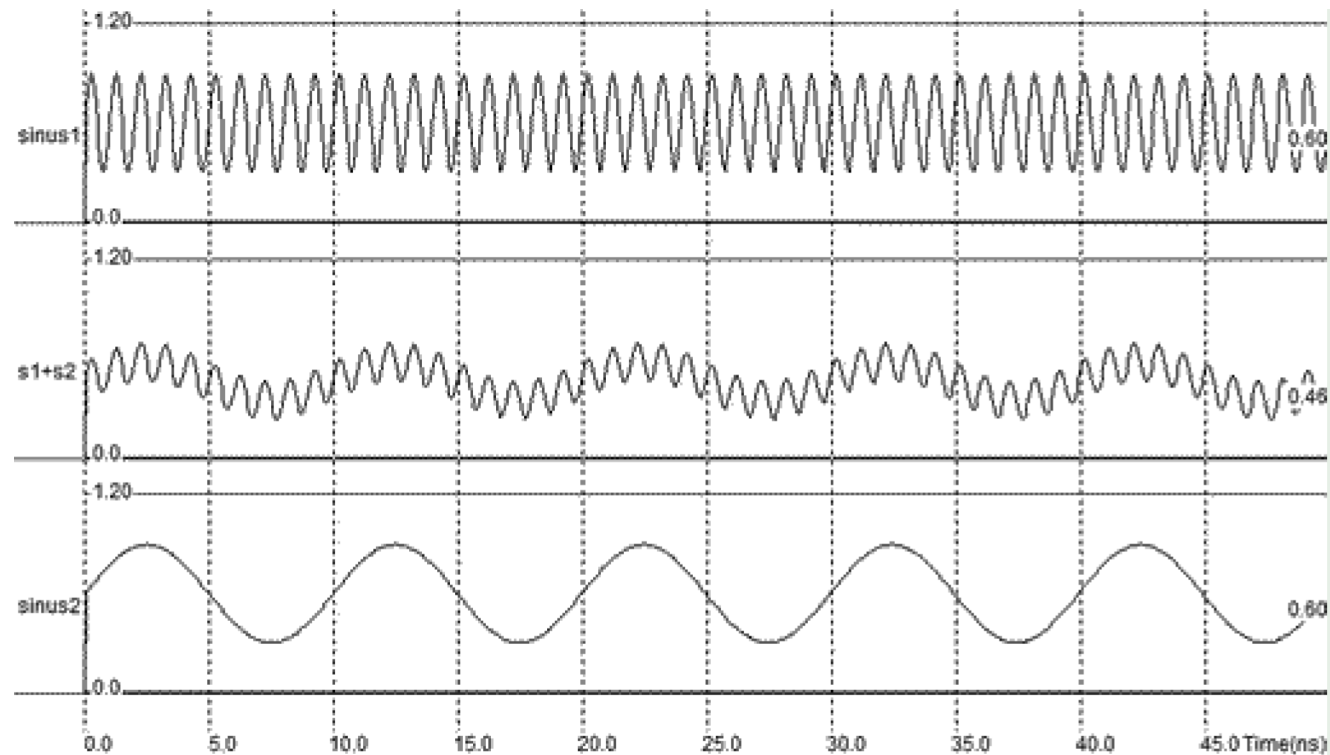
$$y(t) = c x(t) \quad \text{hoặc} \quad y[n] = c x[n] \quad \text{với } c > 0$$



CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

Cộng: cộng giá trị biên độ của các tín hiệu tại cùng thời điểm.

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad \text{hoặc} \quad y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$



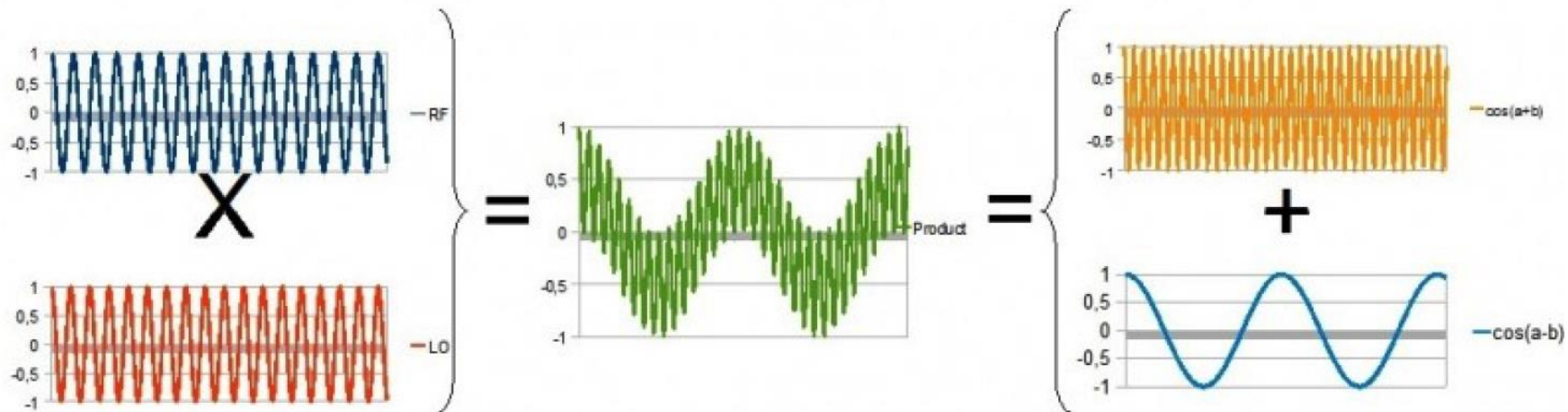
CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

Nhân: nhân giá trị biên độ của các tín hiệu tại cùng thời điểm.

$$y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \quad \text{hoặc} \quad y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$$

$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

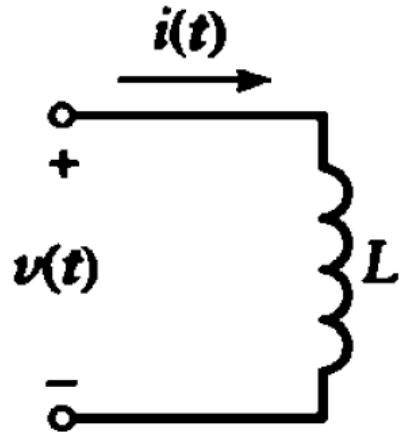
$$\cos(\omega_{RF} \cdot t) \cdot \cos(\omega_{LO} \cdot t) = \frac{1}{2} [\cos((\omega_{RF} + \omega_{LO}) \cdot t) + \cos((\omega_{RF} - \omega_{LO}) \cdot t)]$$



CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

Vi phân:

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

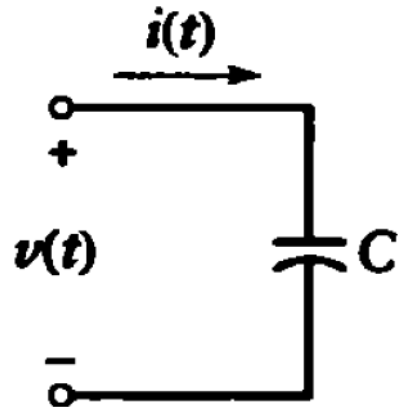


$$v(t) = L \frac{d}{dt}i(t)$$

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

Tích phân:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$



$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

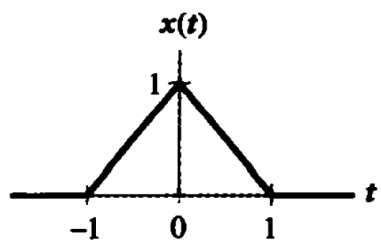
CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

Nén/Giãn:

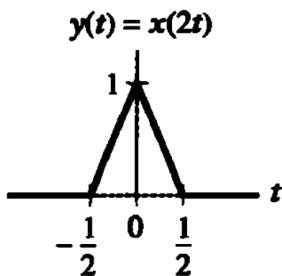
$$y(t) = x(at)$$

Nén tín hiệu nếu a và k lớn hơn 1

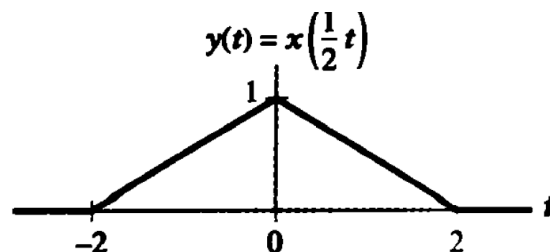
Giãn tín hiệu nếu a và k nằm trong khoảng $[0,1]$



(a)



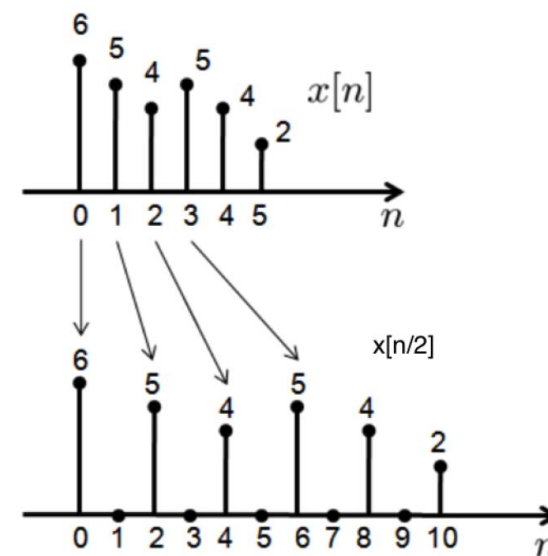
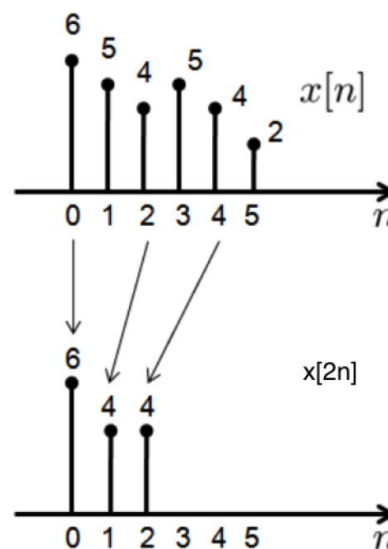
(b)



(c)

Tín hiệu liên tục

$$y[n] = x[kn]$$



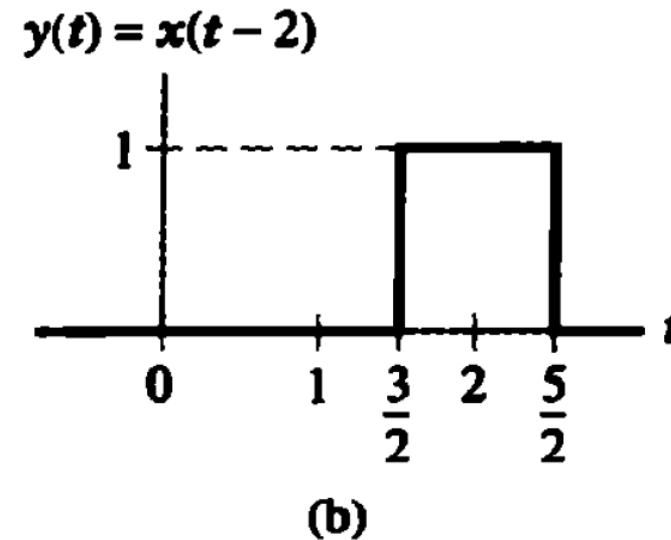
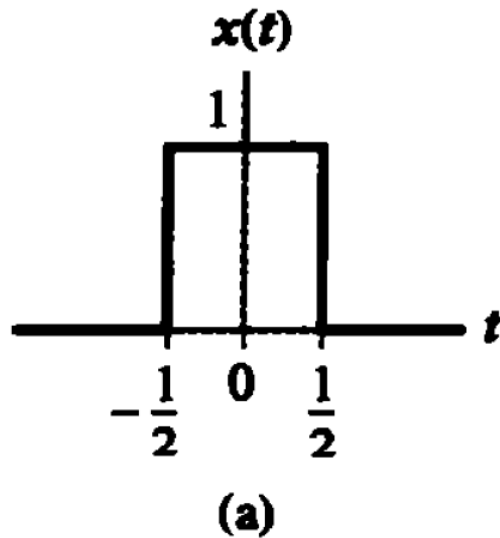
Tín hiệu rời rạc

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

Dịch: $y(t) = x(t - t_0)$

$t_0 > 0$ tín hiệu dịch phải

$t_0 < 0$ tín hiệu dịch trái



Tín hiệu dịch phải

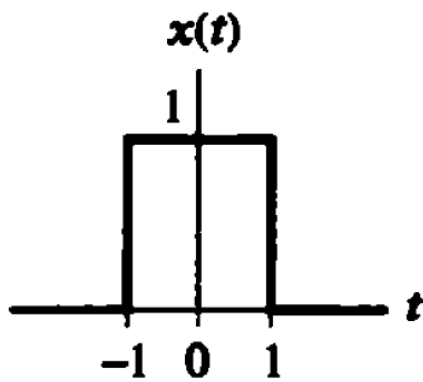
CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

Dịch và Nén/Giãn: $y(t) = x(at - b)$

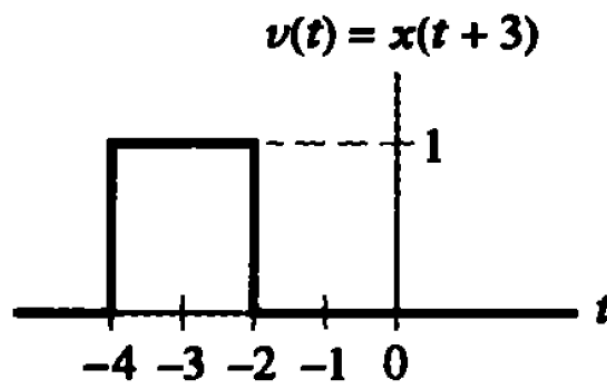
$y(t)$ phải thỏa mãn: $y(0) = x(-b)$ $y\left(\frac{b}{a}\right) = x(0)$

$$\begin{aligned} v(t) &= x(t - b) & y(t) &= v(at) \\ & & &= x(at - b) \end{aligned}$$

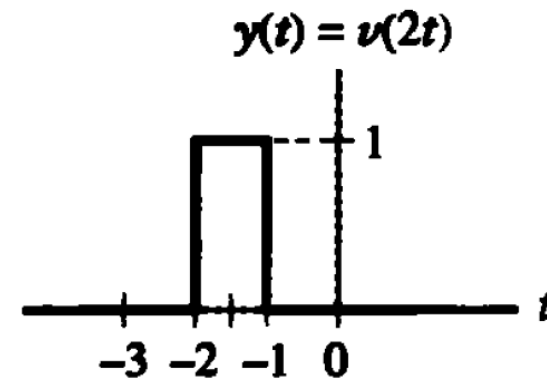
$$y(t) = x(2t + 3)$$



(a)



(b)



(c)

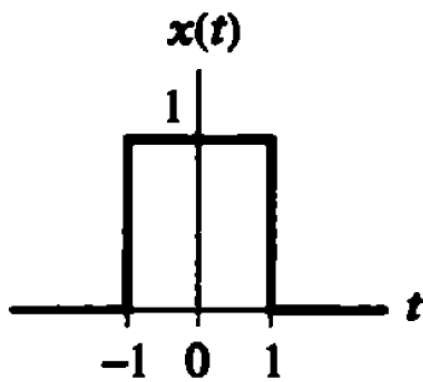
CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

Dịch và Nén/Giãn: $y(t) = x(at - b)$

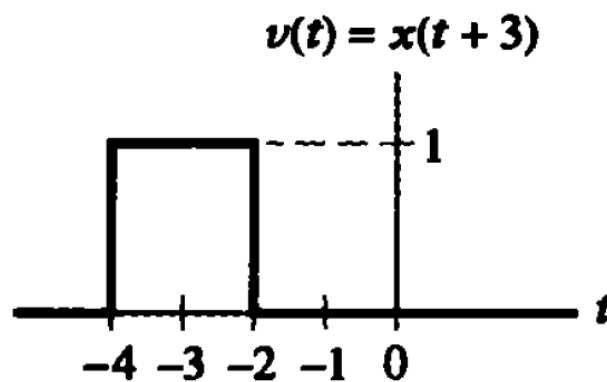
$y(t)$ phải thỏa mãn: $y(0) = x(-b)$ $y\left(\frac{b}{a}\right) = x(0)$

$$\begin{aligned} v(t) &= x(t - b) & y(t) &= v(at) \\ & & &= x(at - b) \end{aligned}$$

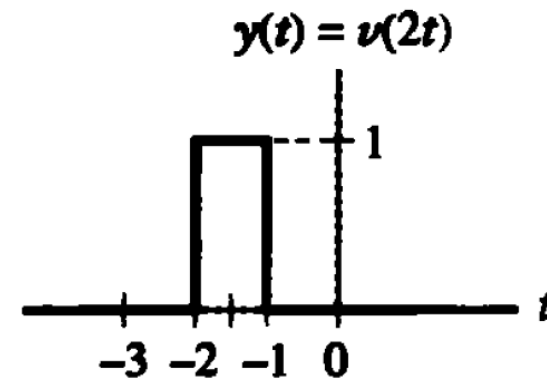
$$y(t) = x(2t + 3)$$



(a)



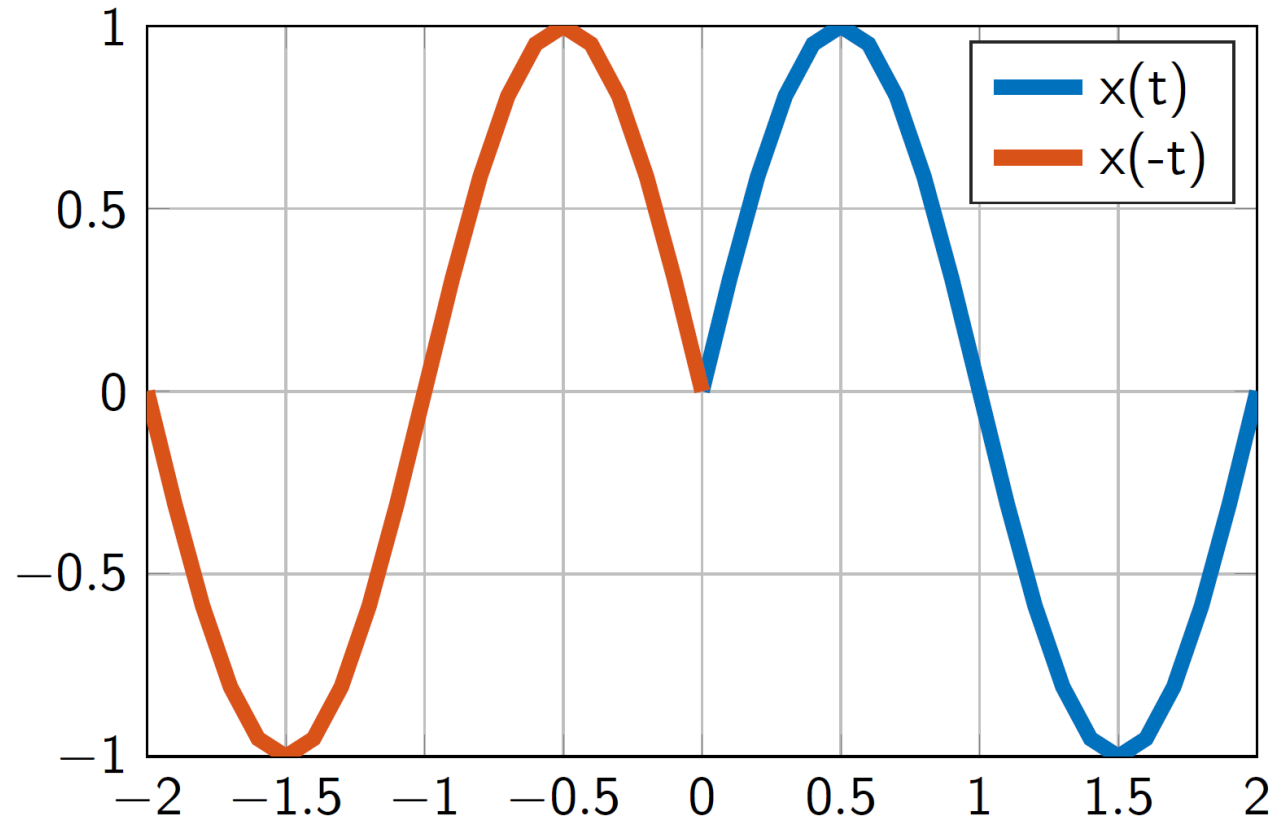
(b)



(c)

CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TÍN HIỆU

Lật: $x(t) = x(-t)$



CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ

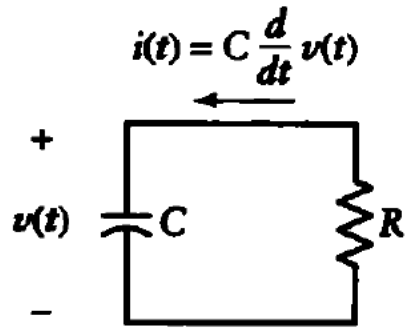
- Hàm mũ
- Hàm sin
- Hàm sin và hàm mũ phức
- Xung đơn vị
- Nhảy bậc đơn vị
- Dốc



CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ - Hàm mũ

$$x(t) = Be^{at}$$

- ▶ *Decaying exponential*, for which $a < 0$
- ▶ *Growing exponential*, for which $a > 0$

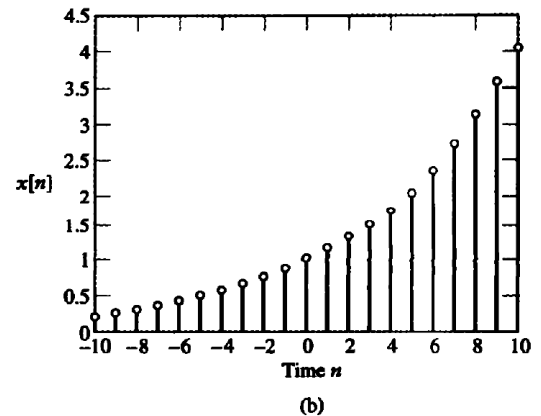
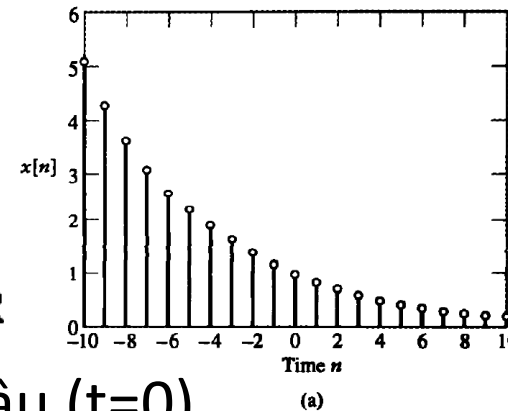
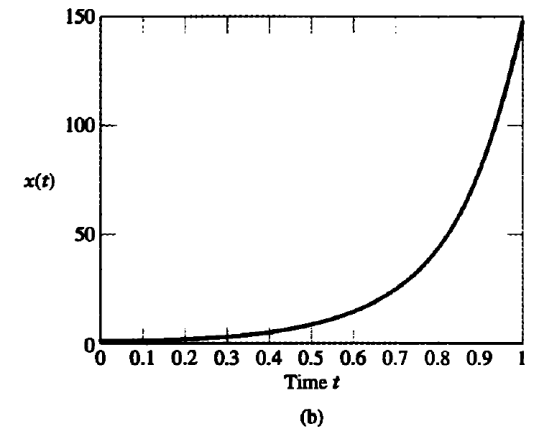
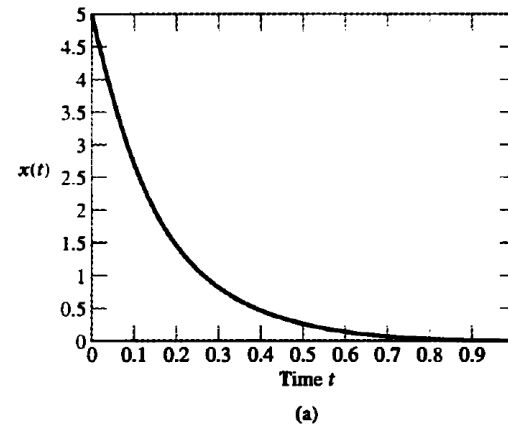


Lossy capacitor, with the loss represented by shunt resistance R

- Kirchhoff về điện áp, V_0 là điện áp ban đầu ($t=0$).

$$RC \frac{d}{dt} v(t) + v(t) = 0$$

$$v(t) = V_0 e^{-t/(RC)}$$

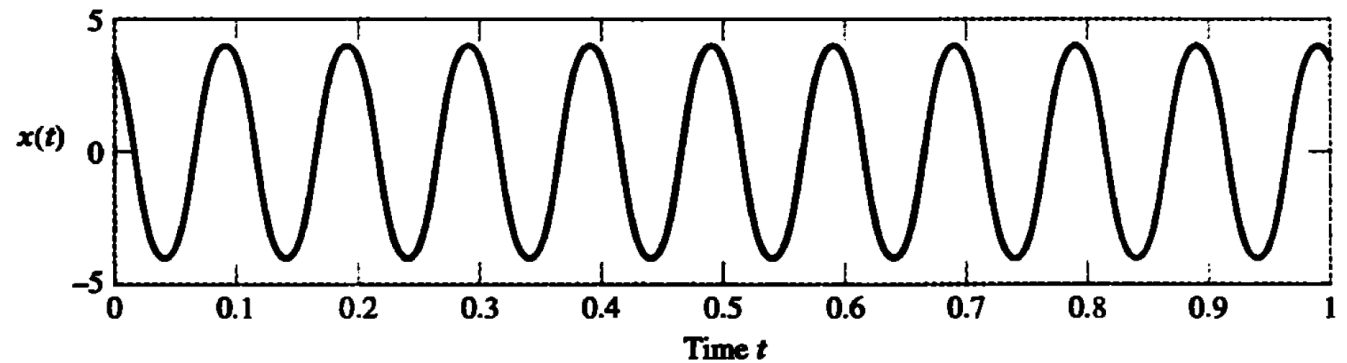


CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ - Hàm sin

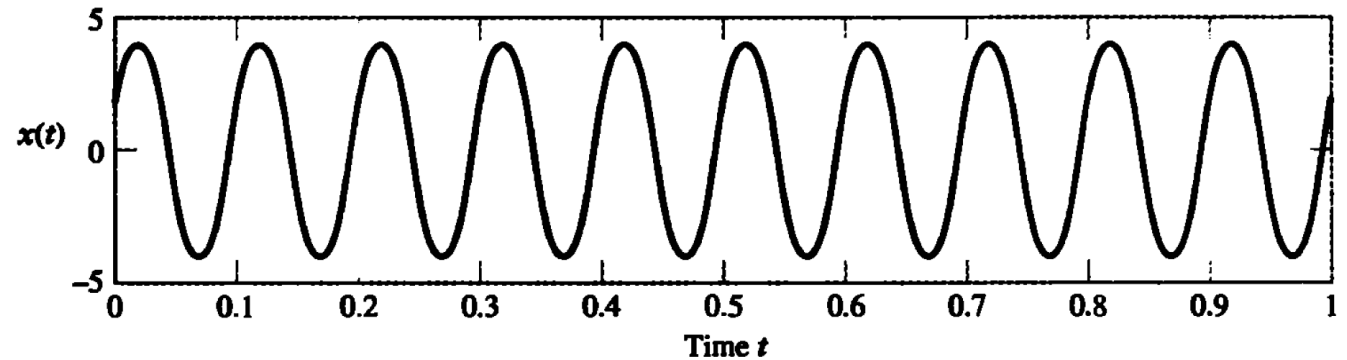
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\begin{aligned} x(t + T) &= A \cos(\omega(t + T) + \phi) \\ &= A \cos(\omega t + \omega T + \phi) \\ &= A \cos(\omega t + 2\pi + \phi) \\ &= A \cos(\omega t + \phi) \\ &= x(t), \end{aligned}$$



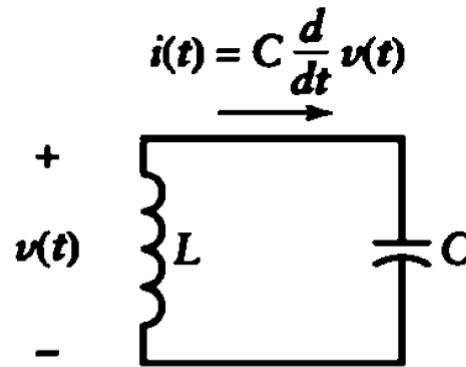
$A \cos(\omega t + \phi)$ with phase $\phi = +\pi/6$ radians



$A \sin(\omega t + \phi)$ with phase $\phi = +\pi/6$ radians

CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ - Hàm sin

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$



Parallel LC circuit, assuming that the inductor L and capacitor C are both ideal

$$LC \frac{d^2}{dt^2} v(t) + v(t) = 0$$

$$v(t) = V_0 \cos(\omega_0 t), \quad t \geq 0 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

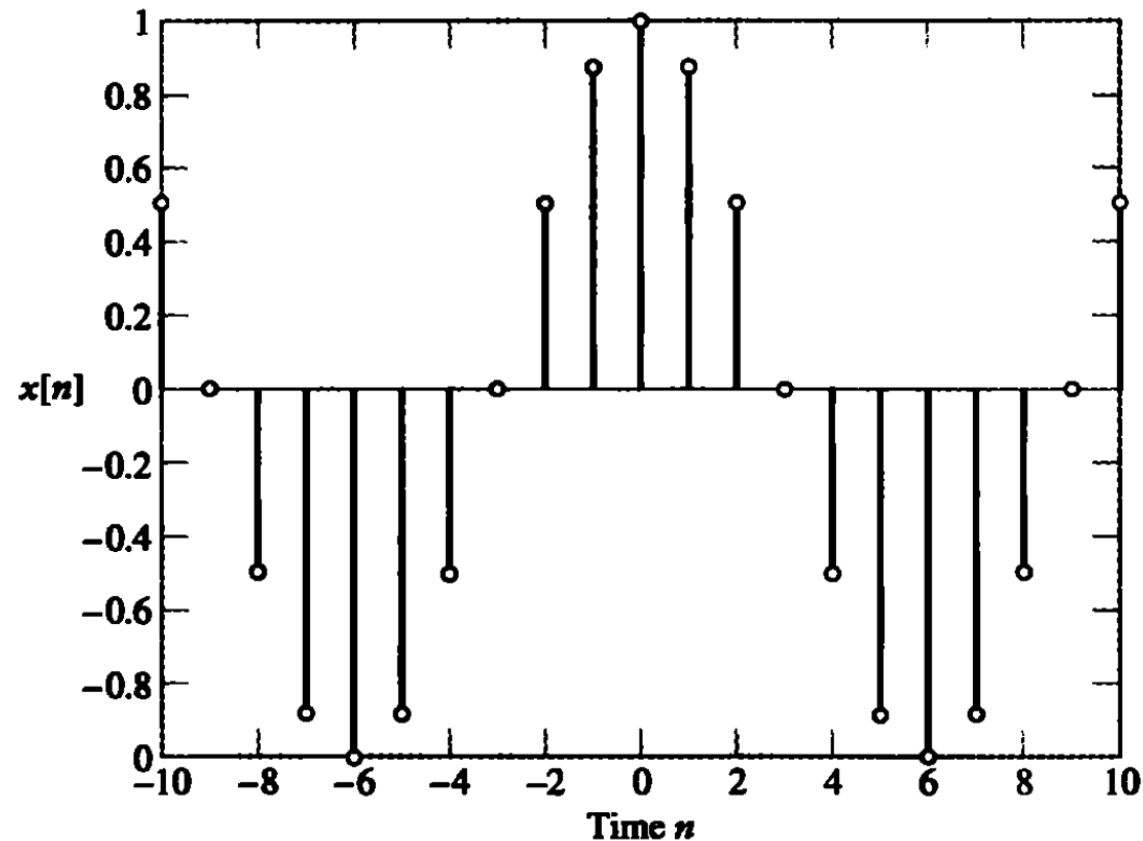
CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ - Hàm sin

$$x[n] = A \cos(\Omega n + \phi)$$

$$x[n + N] = A \cos(\Omega n + \Omega N + \phi)$$

$$\Omega N = 2\pi m \quad \text{radians}$$

$$\Omega = \frac{2\pi m}{N} \text{ radians/cycle,} \quad \text{integer } m, N$$



CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ - Hàm sin và hàm mũ phức

Euler's identity

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad B = Ae^{j\phi}$$

$$Be^{j\omega t} = Ae^{j\phi}e^{j\omega t}$$

$$= Ae^{j(\omega t + \phi)}$$

$$= A \cos(\omega t + \phi) + jA \sin(\omega t + \phi)$$

$$A \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}\{Be^{j\omega t}\}$$

$$A \cos(\Omega n + \phi) = \operatorname{Re}\{Be^{j\Omega n}\}$$

$$A \sin(\omega t + \phi) = \operatorname{Im}\{Be^{j\omega t}\}$$

$$A \sin(\Omega n + \phi) = \operatorname{Im}\{Be^{j\Omega n}\}$$

CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ - Hàm sin và hàm mũ phức

Euler's identity

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad B = Ae^{j\phi}$$

$$Be^{j\omega t} = Ae^{j\phi}e^{j\omega t}$$

$$= Ae^{j(\omega t + \phi)}$$

$$= A \cos(\omega t + \phi) + jA \sin(\omega t + \phi)$$

$$A \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}\{Be^{j\omega t}\}$$

$$A \cos(\Omega n + \phi) = \operatorname{Re}\{Be^{j\Omega n}\}$$

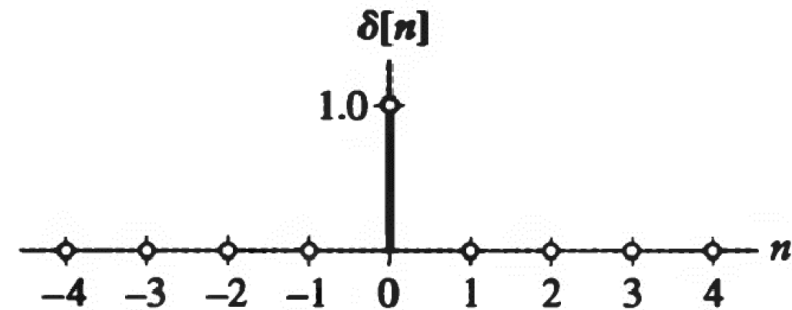
$$A \sin(\omega t + \phi) = \operatorname{Im}\{Be^{j\omega t}\}$$

$$A \sin(\Omega n + \phi) = \operatorname{Im}\{Be^{j\Omega n}\}$$

CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ - Xung đơn vị

unit impulse

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

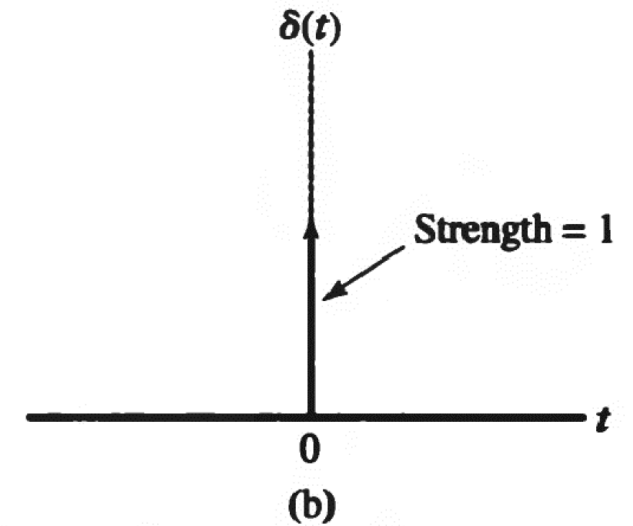
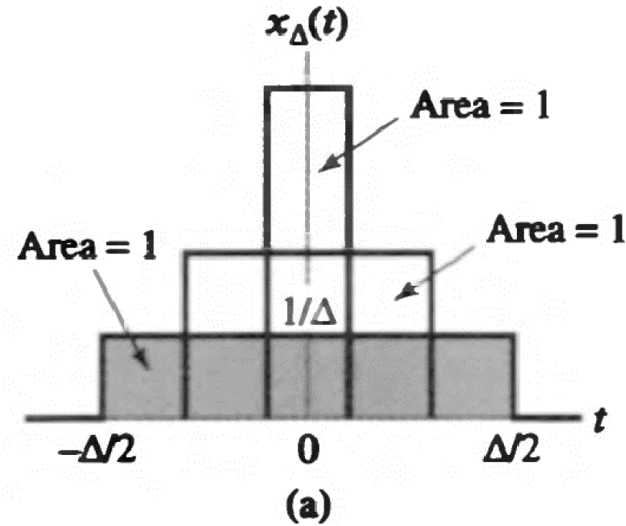


Dirac delta function

$$\delta(t) = 0 \quad \text{for } t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x_{\Delta}(t)$$



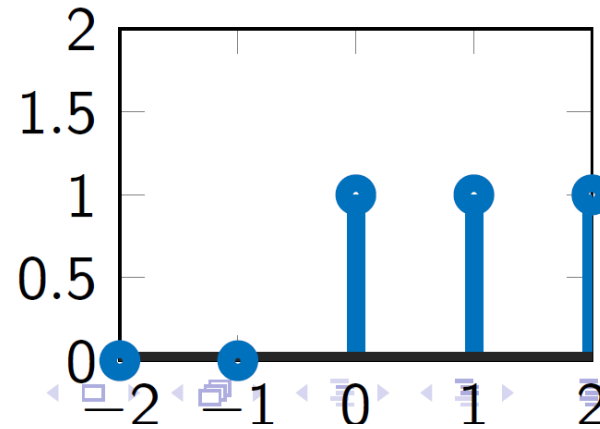
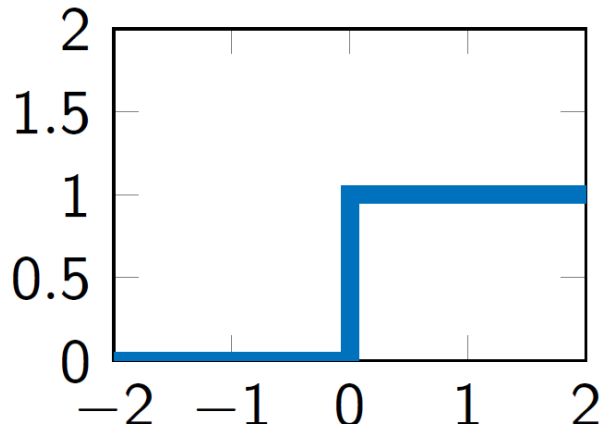
CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ - Nhảy bậc đơn vị

- Tín hiệu nhảy bậc đơn vị liên tục theo thời gian:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Tín hiệu xung đơn vị rời rạc theo thời gian:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



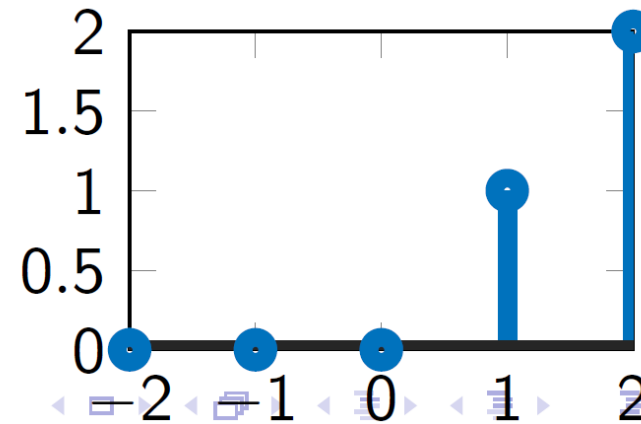
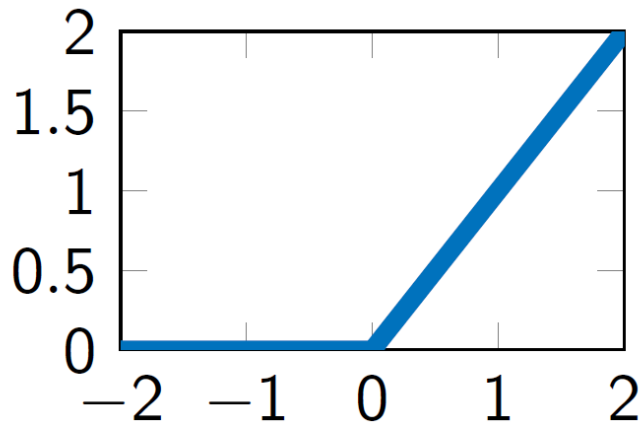
CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ - Dốc

- Tín hiệu dốc liên tục theo thời gian:

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Tín hiệu dốc đơn vị rời rạc theo thời gian:

$$r(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



CÁC TÍN HIỆU CƠ SỞ - Dốc

- Tín hiệu dốc liên tục theo thời gian:

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

- Tín hiệu dốc đơn vị rời rạc theo thời gian:

$$r(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

