Ngày: 03/11/2021

**LUYỆN TẬP MỘT SỐ KIẾN THỨC VỀ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN, SAI PHÂN**

**Bài 1**: Chứng minh rằng nếu $y_1(t)$ và $y_2(t)$ đều là nghiệm của phương trình vi phân hệ số hằng số tuyến tính (LCCDE) thuần nhất

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = 0$$

thì $y_3(t)=\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ (với $\alpha$ và $\beta$ là hai hằng số) cũng là nghiệm của phương trình này.

**Đáp án: 1 điểm/ý x 1 ý = 1 điểm**

We substitute $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ into the homogeneous differential equation

$$\frac{dy_3(t)}{dt} + ay_3(t) = \frac{d}{dt}[\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)] + a[\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)]$$

Since differentiation is distributive, we can express the preceding equation as

$$\alpha\frac{dy_1(t)}{dt} + \beta\frac{dy_2(t)}{dt} + a\alpha y_1(t) + a\beta y_2(t) = \alpha\left[\frac{dy_1(t)}{dt} + ay_1(t)\right] + \beta\left[\frac{dy_2(t)}{dt} + ay_2(t)\right]$$

However, since both $y_1(t)$ and $y_2(t)$ satisfy the homogeneous differential equation, the right side of the equation is zero. Therefore,

$$\frac{dy_3(t)}{dt} + ay_3(t) = 0$$

**Bài 2**: Cho phương trình (LCCDE)

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$$

(a) Tìm nghiệm dạng $y=e^{st}$ của phương trình.

(b) Xác định biểu thức biểu diễn họ các nghiệm của (a) (Gợi ý: dựa vào kết quả câu 1)

**Đáp án: 0,5 điểm/ý x 2 ý = 1 điểm**

**(a)** We are assuming that $y(t) = e^{st}$. Substituting in the differential equation yields

$$\frac{d^2}{dt^2}(e^{st}) + 3\frac{d}{dt}(e^{st}) + 2e^{st} = 0$$

so that

$$s^2e^{st} + 3se^{st} + 2e^{st} = e^{st}(s^2 + 3s + 2) = 0$$

For any finite $s$, $e^{st}$ is not zero. Therefore, $s$ must satisfy

$$0 = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2), \qquad s = -1, -2$$

**(b)** From the answer to part (a), we know that both $y_1(t) = e^{-t}$ and $y_2(t) = e^{-2t}$ satisfy the homogeneous LCCDE. Therefore,

$$y_3(t) = K_1e^{-t} + K_2e^{-2t},$$

for any constants $K_1$, $K_2$, will also satisfy the equation.

**Bài 3**: Cho phương trình (LCCDE)

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{2}y(t) = x(t), \qquad x(t) = e^{-t}u(t)$$

(a) Tìm biểu thức biểu diễn họ các nghiệm thuần nhất

(b) Giả thiết hệ LTI nhân quả (lối vào là tín hiệu phía phải thì lối ra cũng là tín hiệu phía phải), tính lối ra của hệ thống có dạng $y_1(t) = e^{-t}u(t)$ khi lối vào là x(t).

(c) Bằng cách thay

$$y_1(t) = [2e^{-t/2} - 2e^{-t}]u(t)$$

vào LCCDE, CMR đây là một nghiệm của phương trình.

**Đáp án: 0,5 điểm/ý x 3 ý = 1,5 điểm**

**(a)** Assuming $y(t)$ of the form

$$y(t) = Ke^{st},$$

we substitute into the LCCDE, setting $x[n] = 0$:

$$0 = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{2}y(t) = Kse^{st} + K\frac{1}{2}e^{st} = Ke^{st}\left(s + \frac{1}{2}\right)$$

Since $K \neq 0$ and $e^{st} \neq 0$, $s$ must equal $-\frac{1}{2}$. $K$ then becomes arbitrary, so the family of $y(t)$ that satisfies the homogeneous equation is

$$y(t) = Ke^{-t/2}$$

**(b)** Substituting into eq. (P6.3-1) $y_1(t) = Ae^{-t}$ for $t > 0$, we find

$$\frac{dy_1(t)}{dy} + \frac{1}{2} y_1(t) = -Ae^{-t} + \frac{1}{2} Ae^{-t} = e^{-t}, \qquad t > 0$$

Since $e^{-t}$ never equals zero, we can divide it out. This gives us an equation for $A$,

$$-A + \frac{A}{2} = 1 \qquad \text{as } A = -2$$

**(c)** For $y_1(t) = (2e^{-t/2} - 2e^{-t})u(t)$,

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \begin{cases} [2\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-t/2} - 2(-1)e^{-t}], & t > 0 \\ 0, \quad t \leq 0, \end{cases}$$

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{1}{2} y_1(t) = \begin{cases} (-e^{-t/2} + 2e^{-t}) + \frac{1}{2}(2e^{-t/2} - 2e^{-t}) = e^{-t}, & t > 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases}$$

$$= x(t)$$