

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CUỐI KỲ
Môn học: Tín hiệu và hệ thống (ELT2035)

Câu 1. Xem xét tín hiệu $x(t) = [\cos(\pi t)]^2 + \sin(\pi t) + 2$:

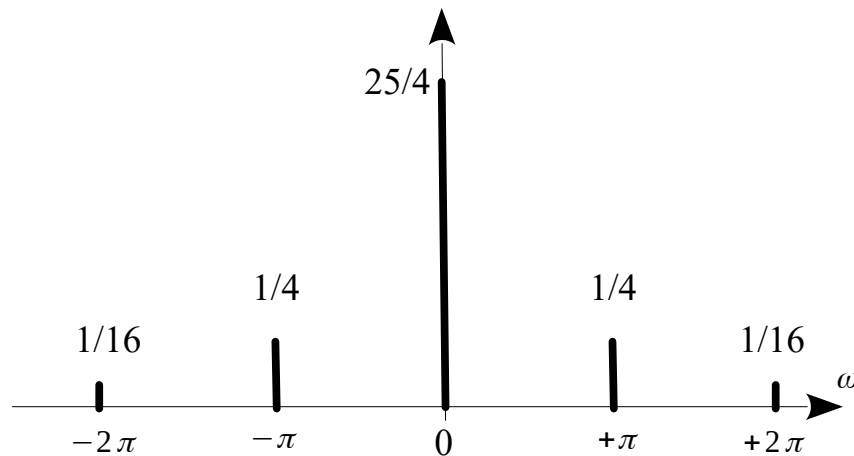
a) Vẽ phổ công suất của $x(t)$. (0,5 điểm)

Đáp án:

$$x(t) = [\cos(\pi t)]^2 + \sin(\pi t) + 2 = \frac{1}{4}[e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}]^2 + \frac{1}{2j}e^{j\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j\pi t} + 2$$

$$x(t) = \frac{1}{4}e^{j2\pi t} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2j}e^{j\pi t} - \frac{1}{2j}e^{-j\pi t} + \frac{5}{2}$$

Phổ công suất $|c_k|^2$:



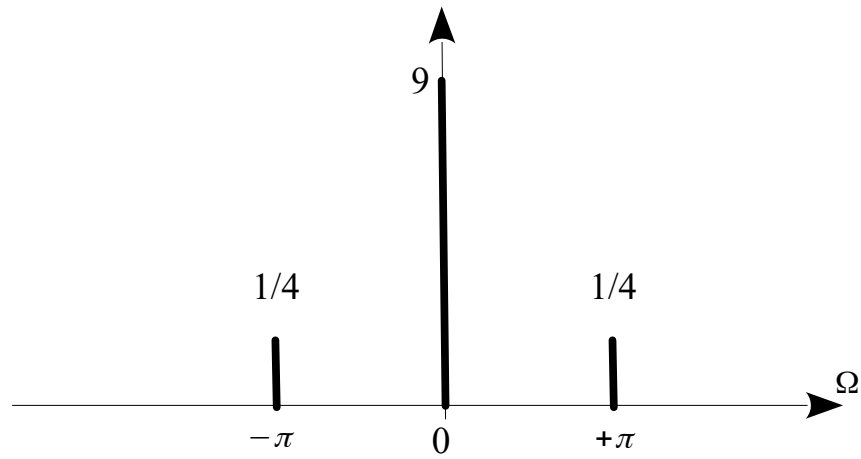
b) Lấy mẫu $x(t)$ với tốc độ lấy mẫu $\omega_s = 2\pi$ (rad/giây) ($f_s = 1$ (mẫu/giây)) để thu được tín hiệu rời rạc $x[n]$. Vẽ phổ công suất của $x[n]$. (0,5 điểm)

Đáp án:

Tín hiệu rời rạc:

$$x[n] = [\cos(\pi n)]^2 + \sin(\pi n) + 2 = \frac{1}{2j}e^{j\pi n} - \frac{1}{2j}e^{-j\pi n} + 3$$

Phổ công suất $|c_k|^2$ trong khoảng $[-\pi, +\pi]$:



Câu 2. Một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục nhân quả được mô tả bởi phương trình vi phân sau đây:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \pi^2 y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

a) Hệ thống có ổn định hay không? Giải thích. (1 điểm)

Đáp án:

Hệ thống không ổn định vì 2 trị cực $s_1 = j\pi$ và $s_2 = -j\pi$ nằm trên trục $j\omega$.

b) Xác định đáp ứng xung $h(t)$ của hệ thống. (1 điểm)

Đáp án:

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + \pi^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{s - j\pi} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + j\pi}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} [e^{j\pi t} + e^{-j\pi t}] u(t) = \cos(\pi t) u(t)$$

c) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(t) = u(t-1)$ (với các điều kiện đầu bằng không). (1 điểm)

Đáp án:

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

$$Y(s) = H(s) X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + \pi^2} = \frac{e^{-s}}{2j\pi} \left(\frac{1}{s - j\pi} - \frac{1}{s + j\pi} \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{2j\pi} [e^{j\pi(t-1)} - e^{-j\pi(t-1)}] u(t-1) = \frac{1}{\pi} \sin[\pi(t-1)] u(t-1)$$

Câu 3. Một hệ thống tuyến tính bất biến liên tục nhân quả có hàm chuyển (hàm truyền đạt) được cho như sau:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

a) Xác định đáp ứng biên độ $|H(\omega)|$ của hệ thống, nếu tồn tại. (1 điểm)

Đáp án:

Hệ thống nhân quả ổn định vì tất cả các trị cực của $H(s)$ đều nằm bên trái trục $j\omega$ (phần thực của các trị cực đều âm), suy ra đáp ứng tần số $H(\omega)$ của hệ thống xác định được từ $H(s)$:

$$H(\omega) = H(s)_{s=j\omega} = \frac{1}{(j\omega+1)(-\omega^2+j\omega+1)}$$

b) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x(t) = \sin(t+\pi/2) - 1$.

Đáp án:

$$x(t) = \sin(t+\pi/2) - 1 = \cos(t) - 1 = \frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt} - 1$$

$$y(t) = \frac{1}{2}H(\omega=1)e^{jt} + \frac{1}{2}H(\omega=-1)e^{-jt} - 1H(\omega=0)$$

ở đó:

$$H(\omega=1) = \frac{1}{(j+1)(-1+j+1)} = \frac{1}{j-1}$$

$$H(\omega=-1) = \frac{1}{(-j+1)(-1-j+1)} = -\frac{1}{j+1}$$

$$H(\omega=0) = 1$$

Câu 4. Một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc nhân quả được mô tả bằng phương trình sai phân sau đây:

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n]$$

a) Xác định đáp ứng xung $h[n]$ của hệ thống. (1 điểm)

Đáp án:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{4}{3} \frac{1}{1 - 2z^{-1}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$h[n] = \frac{4}{3}2^n u[n] - \frac{1}{3}2^{-n} u[n]$$

b) Xác định đáp ứng của hệ thống với điều kiện đầu $\{y[-1]=2, y[-2]=1\}$ khi không có tín hiệu vào.

Đáp án:

$$y_0[n] = c_1 2^n + c_2 2^{-n}$$

$$y_0[-1] = \frac{1}{2}c_1 + 2c_2 = 2$$

$$y_0[-2] = \frac{1}{4}c_1 + 4c_2 = 1$$

$$c_1 = 4, c_2 = 0$$

$$y_0[n] = 4 \times 2^n = 2^{n+2}, n \geq 0 \text{ hay } y_0[n] = 2^{n+2} u[n]$$

c) Xác định đáp ứng của hệ thống với tín hiệu vào $x[n] = 2^{-n} u[n]$, với các điều kiện đầu bằng không. (1 điểm)

Đáp án:

Hệ thống có hai trị cực 2 và 1/2, đáp ứng với tín hiệu vào vì vậy có dạng:

$$y_s[n] = c_1 2^n + c_2 2^{-n} + c_3 n 2^{-n}$$

$$y_s[-2] = 0 = \frac{1}{4}c_1 + 4c_2 - 8c_3$$

$$y_s[-1] = 0 = \frac{1}{2}c_1 + 2c_2 - 2c_3$$

$$y_s[0] - \frac{5}{2}y_s[-1] + y_s[-2] = x[0]$$

$$y_s[0] = 1 = c_1 + c_2$$

$$c_1 = \frac{16}{9}, c_2 = -\frac{7}{9}, c_3 = -\frac{3}{9}$$

$$y_s[n] = \frac{16}{9} 2^n - \frac{7}{9} 2^{-n} - \frac{3}{9} n 2^{-n}, n \geq 0$$

hay

$$y_s[n] = \left[\frac{16}{9} 2^n - \frac{7}{9} 2^{-n} - \frac{3}{9} n 2^{-n} \right] u[n]$$

d) Xác định đáp ứng tần số $H(\Omega)$ của hệ thống, nếu tồn tại. (1 điểm)

Đáp án:

Hệ thống nhân quả không ổn định vì có một trị cực của $H(z)$ nằm ngoài đường tròn đơn vị, suy ra $H(\Omega)$ không xác định.

***** HẾT *****