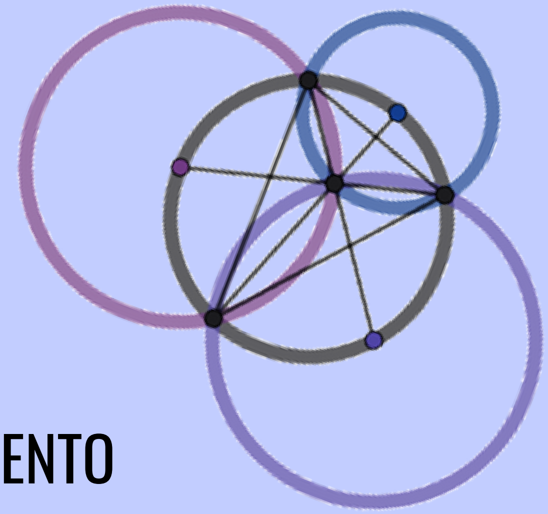
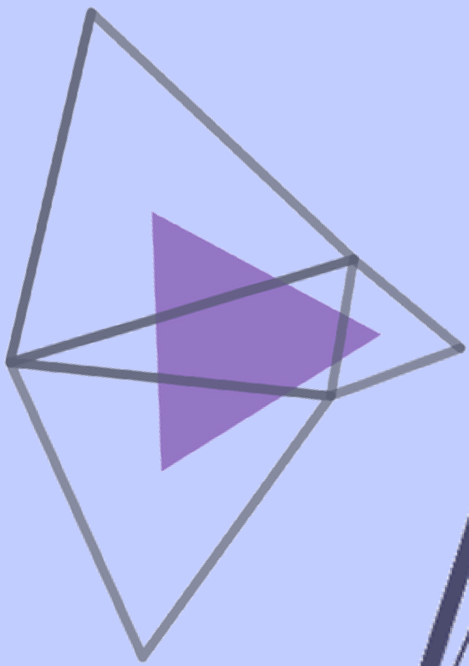
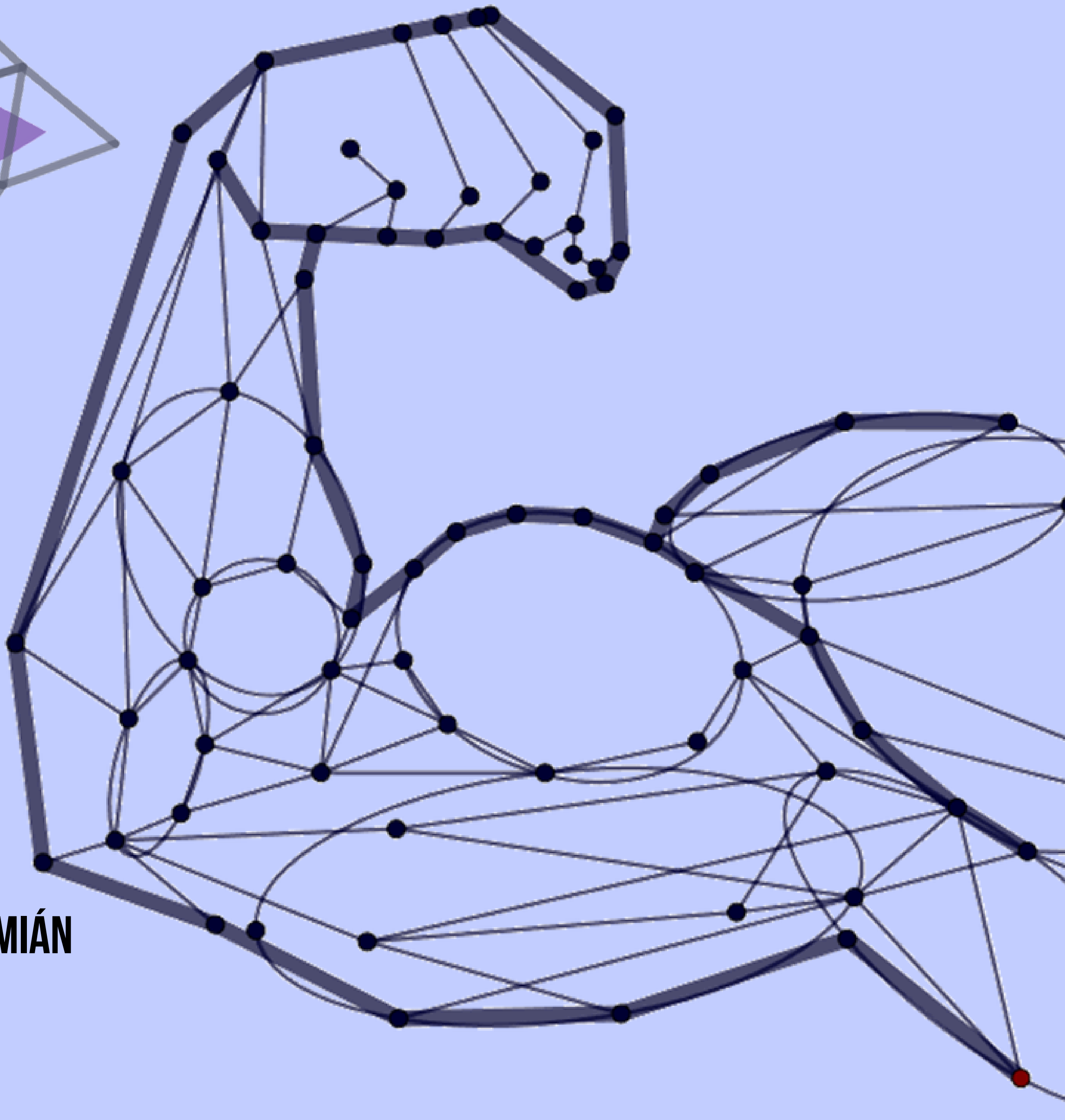


BICEPTRIZ

PROBLEMAS, ESTRATEGIAS Y RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO PARA ESTUDIANTES DE OLIMPIADA





AUTOR: YERIK DAMIÁN FLORES T.

Biceptriz. Geometría de Olimpiada

Correo: yerik.damian.flores@gml.cm

"Dominar la técnica es solo el principio;
el verdadero arte está en aplicarla con creatividad."

Este proyecto es un compendio de técnicas, teoremas, ideas clave y problemas orientados a la geometría de olimpiadas matemáticas, especialmente pensado para el nivel estatal y nacional. Sin embargo, muchos de los conceptos aquí presentados permiten también abordar problemas de nivel internacional si se dominan bien.

Este libro no pretende adentrarse en teoría abstracta ni en soluciones técnicas excesivamente sofisticadas. Su propósito principal es ofrecerte una visión clara, ordenada y funcional de herramientas útiles para enfrentar problemas de geometría en el contexto olímpico.

A lo largo de sus secciones encontrarás una progresión natural: desde hechos conocidos y consejos prácticos, hasta técnicas más poderosas que, si bien exigen mayor madurez matemática, pueden entenderse con práctica constante. Cada capítulo se enfoca en un conjunto de ideas clave: proporciones, semejanza, rotohomotecia y el punto de Miquel, círculos cíclicos y potencia de un punto, así como herramientas fundamentales de concurrencia y colinealidad.

Para enriquecer cada tema, se integran problemas propuestos para cada teorema que se va viendo (en la mayoría de los casos, se incluyen dibujos para facilitar la comprensión) con solución (que suelen ser esquemáticas, tipo sketch o speedrun, por lo que si planeas redactar en un concurso real, deberás justificar cada paso claramente), y secciones de problemas cuyo propósito es invitarte a poner en práctica lo aprendido. Finalmente, se añade un compendio con problemas clásicos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) hasta el año 2019 con su solución como ejemplo de cómo es que se tendría que escribir.

La idea es simple: que este libro te sirva como una brújula para la resolución de problemas de olimpiada.

En algunas partes también encontrarás problemas etiquetados como “Problemas difíciles” o “Extra”, los cuales están pensados para quienes ya tienen cierta experiencia o buscan un reto adicional. No es necesario resolverlos todos, ni mucho menos hacerlo rápido: el objetivo es desarrollar intuición y habilidades para resolver lo que se te ponga enfrente (como en la vida misma).

A veces uso términos en inglés, simplemente porque son más reconocibles o suenan más naturales en el lenguaje olímpico. Si tienes dudas, errores o sugerencias, no dudes en comentarlo.

Terminología y Conceptos básicos.

- Análogo: que corresponde a un proceso de construcción o función similar, pero en otro contexto o figura. Por ejemplo, si tenemos un triángulo ABC y su circuncentro O, el análogo de O en el triángulo DEF sería el circuncentro de dicho triángulo.
- $\cap$ representa la intersección de dos cosas, como líneas, círculos, etc.
- $:=$ representa una definición, es decir, lo que está a la izquierda es igual a lo que está a la derecha.
- Reflexión: es una transformación geométrica que refleja una figura respecto a una línea o punto, de modo que a si reflejamos a la figura A respecto a la línea/punto o nos da la figura A', entonces, para cada punto de A y su análogo en A' su punto medio pasa por o.
- Cíclico: decimos que una figura es cíclica si todos sus vértices están sobre una misma circunferencia.
- $\perp$ simboliza que dos cosas son perpendiculares, como líneas o segmentos.
- $\parallel$ simboliza que dos cosas son paralelas, como líneas o segmentos.
- $\angle$ es el ángulo entre dos segmentos, por ejemplo, $\angle ABC$ es el ángulo formado por los segmentos AB y BC.
- $\implies$ significa: "implica que", "entonces", "por lo tanto", etc.
- $\odot(P_1P_2\dots)$ es el círculo que pasa por los puntos dentro del paréntesis.
- $\measuredangle$ es un ángulo dirigido (un ángulo se considera positivo si se mide en sentido contrario a las agujas del reloj, se considera negativo si se mide en sentido de las agujas del reloj.).
- Segmentos dirigidos: se trata de segmentos con orientación: no representan solo la distancia entre dos puntos, sino también el sentido en que se recorren. Por eso, el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ no es igual a $\overrightarrow{BA}$, sino que $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Es importante no confundirlos con los vectores: aunque ambos representan dirección y magnitud, los segmentos dirigidos son rígidos, es decir, tienen origen y destino fijos. En cambio, los vectores pueden trasladarse libremente mientras conserven su dirección y módulo. Tampoco deben confundirse con la notación de rayos; en este documento no se utilizarán rayos. En caso de que en algún contexto se lleguen a emplear, se especificará claramente de qué tipo de objeto se está hablando.
- $\mapsto$ se usa para reemplazar algún punto o figura por otra: $x \mapsto y$, que se leería algo como x pasa a (ser) y.
- Función. $f : D \to R$ ó $f : D \mapsto R$ nos dice que, a una función f con dominio D nos da valores de un rango R (en otras palabras, a f solo podemos meter valores de un conjunto D y el resultado tiene que estar dentro del conjunto R). Una función es una regla matemática que asigna a cada elemento de un conjunto llamado dominio exactamente un elemento de otro conjunto llamado codominio.
- Colinealidad: los puntos están sobre una misma recta y se representa por $-$, es decir, si los puntos $P_1, P_2, P_3, \dots$ son colineales entonces lo podemos escribir como $P_1 - P_2 - P_3 - \dots$.
- Mediana: recta que pasa por el vértice y el punto medio del lado opuesto a este.
- Altura: recta que pasa por el vértice y es perpendicular al lado opuesto a este.
- Mediatriz: recta que pasa por el punto medio y es perpendicular a dicho segmento.
- Bisectriz: recta que biseca (divide a la mitad) un ángulo.
- Ortocentro: punto por el que pasan las alturas de un triángulo.
- Circuncentro: punto por el que pasan las mediatrices de un triángulo.
- Gravicentro/Baricentro/Centroide: punto por el que pasan las medianas de un triángulo.

- Incentro: punto por el que pasan las bisectrices de un triángulo.
- Excentro: puntos de intersección de dos bisectrices externas, se denotan como I_a, I_b, I_c.
- Circunscrito: circunferencia que pasa por los vértices de un polígono.
- Inscrito: circunferencia que es tangente a los lados de un polígono.
- Circunradio: radio de la circunferencia circunscrita a un polígono.
- Inradio: radio de la circunferencia inscrita a un polígono
- Exradio: radio de las circunferencias exinscritas a un polígono, se denotan como r_a, r_b, r_c.

Índice

1 Hechos conocidos

Es una lista de lemas que se pueden citar sin tener que demostrar. Sin embargo, recomiendo que intentes demostrar cada uno de ellos; si te pierdes en cómo resolverlos, trata de leer las secciones que podrían hablar de ello.

- La línea formada por el circuncentro y el punto medio de cualquier cuerda es perpendicular a dicha cuerda.
- La reflexión del ortocentro sobre cualquier lado de su triángulo cae sobre el circuncírculo de dicho triángulo.
- La reflexión del ortocentro sobre el punto medio de cualquier lado de su triángulo cae sobre el circuncírculo de dicho triángulo.
- La suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados es $(n-2)\cdot 180°$; particularmente para el triángulo y un cuadrilátero son $180^o, 360^o$, respectivamente.
- (Sustitución de Ravi) Los lados de un triángulo ABC cumplen que existen x, y, z reales positivos tales que $AB = x + y, AC = x + z, BC = y + z$.
- El excentro es el centro de la circunferencia que es tangente a un lado del triángulo y a las extensiones de los otros dos lados.
- Sean D, D' los puntos de tangencia del incírculo y del excírculo I_a en BC, entonces $BD = CD'$.
- El punto medio del segmento que une el incentro con el excentro I_a de un triángulo ABC es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices B, C y cae sobre $\odot(ABC)$.
- Área de un triángulo ABC con circunradio e inradio R, r respectivamente, es igual a `base` $\times$ `altura / 2` $= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin(\angle BAC) = \frac{AB+BC+AC}{2}\cdot r == \frac{AB\cdot BC\cdot CA}{4R} = r_a(\frac{AB+BC+AC}{2} - BC)$.
- Sean $A - O - B$ en ese orden y otro punto no colineal P, entonces $\measuredangle AOP = -\measuredangle POA, \measuredangle POB = -\measuredangle BOP, \measuredangle POA + \measuredangle POB = 180^o = \measuredangle AOP + \measuredangle BOP$.
- Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sus diagonales se bisecan entre sí si y solo si es un paralelogramo.
- En cualquier cuadrilátero convexo, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo, y la intersección de las diagonales de ambos cuadriláteros es la misma.
- (Death Star Lemma) La circunferencia Ω es tangete internamente al círculo Γ y a la cuerda AB en P, Q respectivamente. PQ intersecta nuevamente a Γ en R. Entonces R biseca al arco ARB.
- (Iran Lemma) La circunferencia inscrita de $\triangle ABC$ es tangente a BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Sean M y N los puntos medios de BC y AC, respectivamente. El rayo BI corta a la recta EF en K. Entonces, $BK \perp CK$ y K se encuentra en MN.

2 Consejos

Hablando de la olimpiada, no hay una forma de aprender a resolver problemas específicamente, es como aprender caulquier cosa, hay distintas formas de hacerlo (visual, auditivo, etc.).
En cambio, recomiendo que tú como participante, vayas tanteando ciertas formas de hacerlo, por ejemplo, en mi caso es: leer el problema por arriba e ir haciendo un dibujo a mano, de ahí, pensar en todos los teoremas (conceptos) que se puedan aplicar/ocurrir y los voy escribiendo a un lado o en una hoja aparte, ver si hay algo que se pueda hacer, si no, cambiar de problema y volver fresco, cuando encuentro qué hacer, en caso de que crea que alguna propiedad es cierta (como que 3 puntos sean colineales) ahí es dónde uso regla-compás y paciencia para hacer el dibujo de modo que salga tan preciso como sea posible, y de ahí, ver si se puede aplicar el teorema que se me ocurrió. Y así hasta resolverlo.
Como digo, varía de persona a persona, puede que no te sirva más hacer un dibujo a mano y convenga hacerlo bien desde el inicio, pero que sí recomiendo hacer sí o sí:

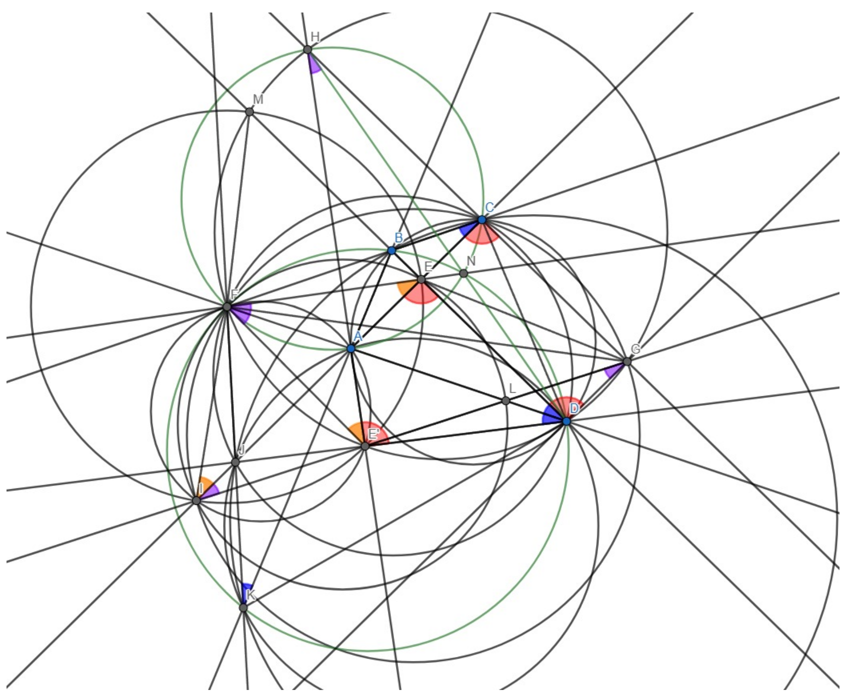
- Hacer un dibujo bien hecho: El trazo a mano pierde exactitud y podrías estar omitiendo algo importante o asumiendo algo que es falso.
- Piensa todo lo que se te venga a la mente, escríbelo y no lo borres: No te limites a lo que crees que es correcto, si no lo es, no pasa nada, pero si no lo escribes o lo borras, puede que se te olvide y luego te arrepientas. Puede incluso que dieras con la idea correcta pero por algún motivo la descartaste, si la escribiste eso se puede pelear y puedes rascar puntos o incluso tener todos los puntos del problema.
- Un problema no se resuelve de un tirón, sino que se resuelve paso a paso: No te desesperes si no puedes resolverlo de inmediato, a veces es mejor tomar un descanso y volver con la mente fresca.
- Usa lo que conoces pero no todo lo que se te ocurra: puede que te venga a la mente un teorema o algo, y te enfocas en usarlo, no lo fuerces. También, puede que se te empiecen a ocurrir un montón de propiedades que sean ciertas pero eso no significan que sean útiles, quédate con las que estén más relacionadas con lo dado en el problema.
- Identifica las hipótesis falsas: Puede que digas "Estos dos triángulo son semejantes" que por cuestiones de dibujo parezca cierto, que aunque éste sea preciso, puede que lo hayas hecho demasiado parecido a un triangulo notable o a justamente una configuración en la que es cierto. Una forma de saberlo en ejemplo del estilo simétrico, que sería como poner puntos (normalmente pares) cuya definición es análoga y contrastarlo con la otra parte, por ejemplo, nos dan la figura $\mathcal{A}$ y se define a $B := \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ y $C := \mathcal{Z} \cap \mathcal{Y}$ (con $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ cualquier figura), si sigue pareciendo que se cumple nuestra hipótesis tanto para B como para C, entonces es una buena señal, de otro modo, podríamos dudar seriamente de que sea cierta. Otra forma sería: generaliza la propiedad, trata casos triviales y/o casos totalmente diferentes a la vista, si originalmente hiciste un triángulo acutángulo, ahora hazlo obtusángulo; el punto es que trates de variar alguna propiedad y observar si la hipótesis se cumple.
- No te agovies, si no te salen uno, dos o ningún problema, hay días buenos y días malos y no hay mucho que hacer al respecto, no te desanimes, si te gusta la olimpiada, sigue practicando, sigue aprendiendo y divirtiéndote con esto, que al final de cuentas es lo que importa.
- Hay problemas que hasta de leerlo dan pereza, dibujarlos da estrés y pensar siquiera en algo que sirva cuesta pero recuerda que *Todo problema difícil alguna vez fue solo un conjunto de ideas sencillas.*
- No te limites a lo que dice el problema, sirve pensar fuera de la caja: puedes buscar algún punto que cumpla alguna propiedad que facilite la conexión con el resto de puntos, es decir, busca un punto (o una figura en general) en el que varios puntos o propiedades se cumplan.
- Trata de explicar tanto como puedas cada paso, si es un borrador, escribe la idea de donde salió tanto para ti (si se te olvida) como para el jurado. Evite usar (que yo haré en las soluciones de este documento) "es fácil de ver" a menos que te estes quedando sin tiempo o sea verdaderamente obvio, si es muy fácil de demostrar, hazlo, si no lo es, tienes que demostrarlo.

- Como último consejo, **Conócete a ti mismo:** Creo que este es el más importante, descubre que cosas te gustan; cuál área es tu fuerte (teoría de números, geometría, combinatoria, etc.); cuál es tu forma de resolver problemas; qué cosas te ayudan a relajarte y a concentrarte; considera que puedes llevar comida o algo que no distraiga mucho a los demás (y que no sea un celular o algo del estilo); cuida tu salud tanto física como mental, créeme por experiencia que no es lo mismo hacer un examen con todo el ánimo de hacer speedrun, que hacerlo con gripe, en un día malo, sin ganas; trata de hacer actividad física; conoce más cosas, no te quedes solo en la olimpiada y ten más hobbies, a lo mejor se te dan bien los números pero hay algo que se te de todavía mejor.

Un ejemplo personal, para hacer estos ejercicios, la mayoría los hice en geogebra, pero como ahí tengo mucha libertad para mover puntos, ver cíclicos, colinealidades, etc., entonces puedo llegar a ver un montón de figuras que no aportan y me quitan la atención de lo importante.
Intentando el problema ISL 2013 G2 que dice:

$ABCD$ es un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales AC y BD se intersectan en E. Las extensiones de los lados AD y BC más allá de A y B se intersectan en F. Sea G un punto tal que $ECGD$ es un paralelogramo, y sea H la imagen de E bajo la reflexión en AD. Demuestra que D, H, F, G son concíclicos

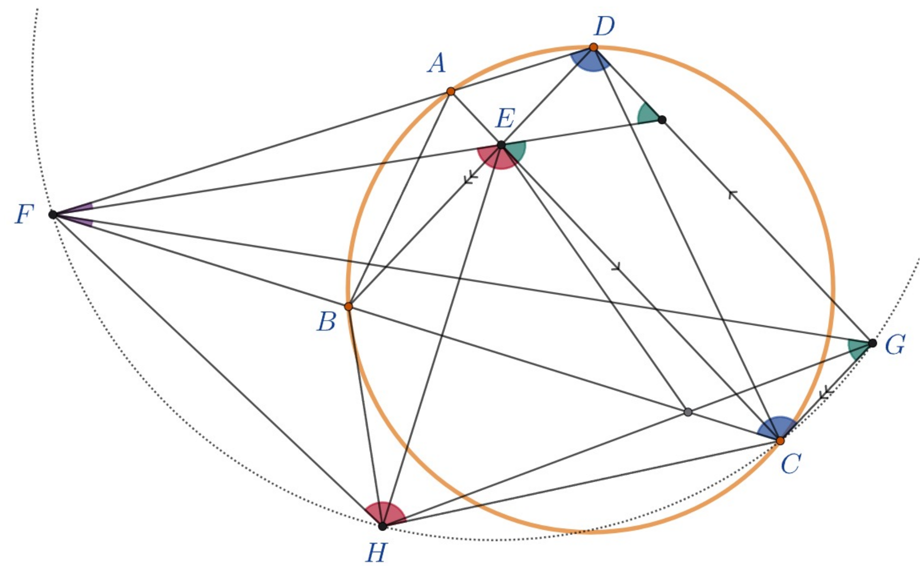
Este fue mi dibujo inicial:



Llegué hasta esto viendo que algunas intersecciones implicaban cíclicos y decía "el problema se resuelve si demostramos ...", así varias veces, hasta que de nuevo me quedé sin ideas claras de cómo seguir. Si mal no recuerdo, no llegué a una solución y decidí dejarlo como problema abierto. Un tiempo después decidí reintentarlo, decidí que como mis ideas no me llevaron a algo muy fuerte entonces debía tomar otro camino. Recordé un lema (que yo considero importante conocerlo junto con su demostración) y en base a ese resultado base toda la solución, solo bastó anguleo y con la motivación inical se terminó fácilmente.
Que de hecho la solución sería:

Isogonality Lemma — El punto P se encuentra dentro de un triángulo ABC, de modo que $\angle ABP = \angle PCA$. El punto Q es tal que $PBQC$ es un paralelogramo. Entonces $\angle QAB = \angle CAP$.

Demostración: Sea $E = \overline{BP} \cap \overline{AC}, F = \overline{CP} \cap \overline{AB}$. Entonces, los puntos B, C, E, F son concíclicos $\Longrightarrow \triangle FPE \sim \triangle BPC \cong \triangle CQB$.
Por otro lado, sea $\mathcal{H} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ la composición de una homotecia con centro A, razón $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ con una reflexión sobre la bisectriz de $\angle BAC$.
Nótese que $\mathcal{H}(B) = F$ y $\mathcal{H}(C) = E$, por lo que $\mathcal{H}(P) = P'$. Por lo tanto, $\triangle FPE \sim \triangle CP'B, \triangle CQB \Longrightarrow P' \equiv Q$, como se quería demostrar. $\square$
Aplicando el lema en $\triangle FCD$ y paralelogramo $CGDE \Longrightarrow$, tenemos que $\angle CFE = \angle DFG$. Puesto que $\angle EDG = \angle ECG$ (por paralelas) y $\angle FCE = \angle EDF$ (por cíclicos), entonces $\angle FCG = \angle FDG$; sea $R = FE \cap CG$, por criterio AA se tiene que $\triangle CFR \sim \triangle DFG \Longrightarrow \angle CGF = \angle FRD$.
Finalmente, $\angle FHC + \angle FGC = \angle FHC + \angle DRE = \angle FHC + \angle REC = \angle FEC + \angle REC = 180° \Longrightarrow \angle FHD + \angle FGD = 180^o$ y esto implica lo que se quería demostrar. $\blacksquare$
Y tras rehacerlo, me quedó así el dibujo:



¿Cómo reaccionar ante ciertos tipos de problemas? Aquí van algunos consejos que me han servido a mí:

- En caso de que te digan paralelas o cíclicos: implica anguleo o proporciones (semejanzas, congruencias).
- Si te piden demostrar la existencia de un punto, colinealidad incluso: supón que existe otro punto P' que cumple algunas características específicas de P (original) y demuestra que P' es igual a P.
- A veces, la concurrencia/colinealidad es algún punto/línea en específico, por lo que basta con resolver para un punto y aplicar el análogo del resto.

¿Cómo reconocer cuándo usar ...?

- Homotecia. Si el problema habla de paralelas (o razones que impliquen paralelismo) como pueden ser: Puntos medios, si los puntos que deben ser colineales cumplen paralelismo o si hay círculos tangentes.
- Rotohomotecia. Si al terminar de hacer la figura nos aparece un cuadrilátero completo o si encuentras dos figuras semejantes que no sean paralelas.
- Propiedades de Cíclicos. Siempre que se hable de circunferencias.
- Ley de Senos/Ratio Lemma. Cuando nos pidan tratar con razones que parezcan ajenas a alguna semejanza o cuando el problema implique ángulos y razones.
- Función Cool Ratio Lemma. Cuando haya un segmento por el que pasa una circunferencia y entre ellos dos pasan varias líneas y puntos. Usualmente es el segmento BC del típico triángulo ABC.

- Desargues. Si encontramos dos triángulos cuya unión de vértices es concurrente o que nos gustaría que fuera.
- Menelao. Si el triángulo por el cual pasan los puntos que se supone que son o que deben ser colineales, es trivial o no es rebuscado definirlo.
- Ceva. Cuando el problema implique cevianas.
- Pappus. Si dos líneas tienen varias intersecciones entre sí.
- Pascal. Intersecciones en círculos, ya sea cuerdas, tangentes o secantes.
- Brianchon. Polígonos que son tangente a un círculo.

Mucha suerte en la olimpiada y espero que te sirva este “manual”.

3 Proporciones

Teorema 3.1: Semejanza

Sean dos triángulos, llámense T_1 y T_2, decimos que son semejantes si sus lados guardan proporciones o tienen los mismos ángulos en algún orden. En otras palabras, $T_1 \sim T_2$ si y solo si

- Criterio LLL (lado-lado-lado): $\frac{X_1Y_1}{X_2Y_2} = k$ donde X_1, Y_1 son cualesquiera de los vértices de T_1 y X_2, Y_2 son los vértices análogos de T_2.
- Criterio LAL (lado-ángulo-lado): $\frac{X_1Y_1}{X_2Y_2} = \frac{Z_1Y_1}{Z_2Y_2} = k$ y $\angle X_1Y_1Z_1 = \angle X_2Y_2Z_2$, donde X_1, Y_1, Z_1 son cualesquiera de los vértices de T_1 y X_2, Y_2, Z_2 son los vértices análogos de T_2.
- Criterio AA (ángulo-ángulo): $\angle X_1Y_1Z_1 = \angle X_2Y_2Z_2$, $\angle Z_1X_1Y_1 = \angle Z_2X_2Y_2$ (nótese que con 2 ángulos basta puesto que podemos determinar el tercero).

Notemos que los triángulos T_1 y T_2 pueden estar rotados, reflejados, etc. pero esto siempre se va a cumplir de uno u otro modo, la cuestión es que el orden de los ángulos o de escribir los lados puede variar. Por lo que no va a ser lo mismo $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ que $\triangle BCA \sim \triangle A_1B_1C_1$, como se puede ver, vértices correspondientes van en el mismo lugar.

Teorema 3.2: Congruencia

La congruencia es, nunca mejor dicho, similar a la semejanza. En este caso tenemos que $k = 1$, por lo que los criterios LLL y LAL sirven, pero el Criterio AA ya no es suficiente, debido a que necesitamos de proporciones para asegurar que son el mismo triángulo:

- Criterio ~~AA~~ ALA: $\angle X_1Y_1Z_1 = \angle X_2Y_2Z_2$, $\angle Z_1X_1Y_1 = \angle Z_2X_2Y_2$ y $\frac{X_1Y_1}{X_2Y_2} = 1$

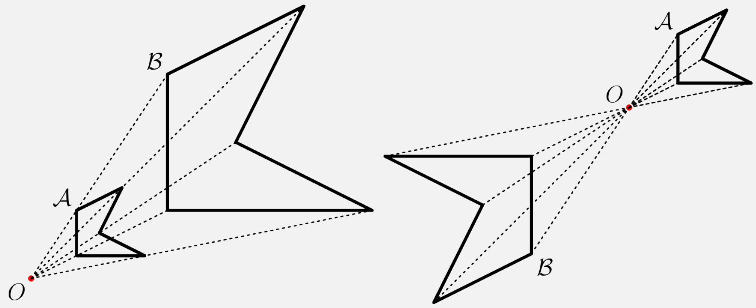
Estos primeros dos conceptos son básicos, con esto sale un montón de resultados más elaborados y resolver algunos problemas muy de olimpiada.
Ahora bien, hemos visto semejanza con triágulos en posición general, es decir, que pueden estar donde quieran, como quieran ¿pero qué pasa si los puntos correpondientes pasan por un mismo punto? Es aquí donde aparece la homotecia, algo que es fácil de aprender pero que puede llegar a asustar. Esta herramienta es como usar Teorema de Tales pero más refinado y gracias a una de sus propiedades, podemos demostrar colinealidad.

> **Definición** (Homotecia) Sea O un punto $k \neq 0$ una constante. Una homotecia es una función $\mathcal{H} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ que preserva una relación directamente proporcional:
> Para todo $P \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{H}(P)$ están en la recta OP y $O\mathcal{H}(P) = OP \cdot k$

Esto es la definición técnica (créditos a Eric Ransom), pero en simples palabras, decimos que dos figuras $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son homotéticas si a cada punto de $\mathcal{A}$ le corresponde su análogo en $\mathcal{B}$. Por ejemplo, el centro de $\mathcal{A}$ va a al centro de $\mathcal{B}$. Quiero aclarar que mientras hablemos de homotecia, vamos a considerar que P' es la imagen de homotecia de P, es decir, $P' = \mathcal{H}(P)$

> **Constante k.** Quiero profundizar sobre la constante de proporcionalidad k. Veamos, si es positiva y > 1 entonces es como si agrandáramos la figura $\mathcal{A}$, si es igual a 1 pues se queda igual y si es < 1 entonces es como si la hicierámos más pequeña; es como si en Word agarráramos la imagen y desde una esquina la estiráramos para cualquier parte.
> ¿Pero que pasa si k es negativa? Tenemos que $\mathcal{A}'$ seria el reflejo de $\mathcal{A}$ sobre O; sería como si la reflejáramos horizontal y verticalmente, y después la agrandáramos o la disminuyéramos. En resumen, si k es negativa entonces O esta entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, si k es positiva entonces O no esta entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$.

¿Pero cómo es que k puede ser negativa si son razones de lados? Esto es porque usamos la idea de segmentos dirigidos, estos nos indican de que lado esta el punto P', de modo que si van en la misma dirección es positivo y de otro modo es negativo.

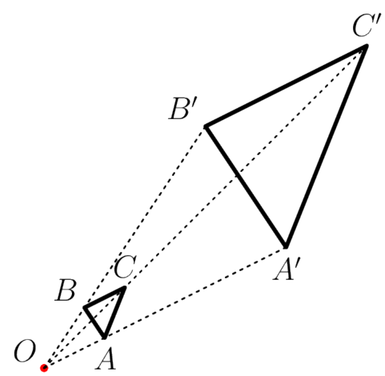


Como la homotecia preserva razones, entonces se cumple lo siguiente:

- Los puntos X, Y cumplen que $XY \parallel X'Y'$.
- A puntos colineales le corresponden puntos colineales, es decir, si $X - Y - Z$ entonces $X' - Y' - Z'$.
- Todas las intersecciones se conservan, ya sea de líneas, círculos, tangencias, etc: Si $P := \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ y $Q := \mathcal{R}' \cap \mathcal{S}'$ entonces $\mathcal{H}(P) = Q$.
- Se preservan ángulos, $\angle XYZ = \angle X'Y'Z'$.
- Sea $\mathcal{A}$ cualquier figura, entonces $\mathcal{A}'$ es semejante.

Teorema 3.3: Homotecia en triángulos

Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son homotéticos si y solo si AA', BB' y CC' concurren en el centro de homotecia, y $AB \parallel A'B', BC \parallel B'C'$ y $CA \parallel C'A'$.

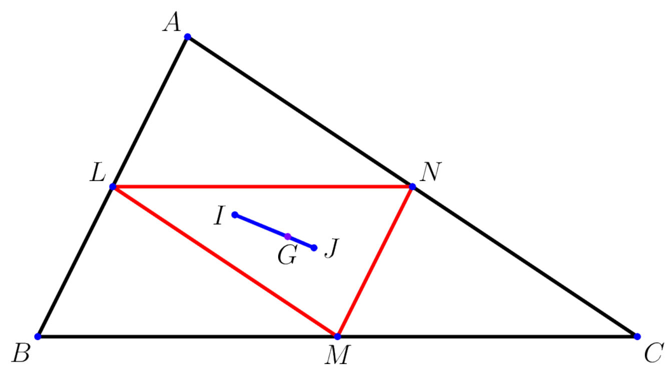


Para el siguiente problema nota que los puntos que nos piden que sean colineales son dos incentros y el gravicentro, lo que nos da una pista de dónde puede ser el centro de homotecia.

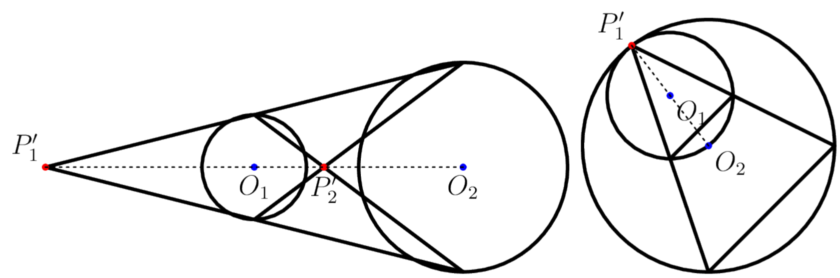
Problema de Práctica 3.1:

Sea I el incentro y G el gravicentro del triángulo ABC. Sean M, N y L los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que G, I y el incentro del triángulo MNL son colineales con G.

Demostración. Es fácil de ver que los triángulos ABC y MNL son homotéticos con centro en G. Por tanto, por la homotecia nos da que los incentros de dichos triángulos son colineales con G. ■

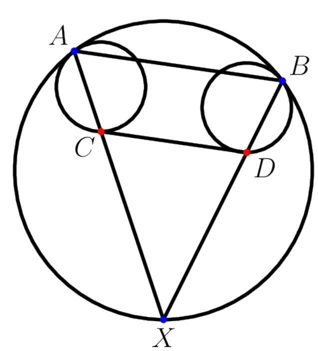


> **Homotecia en círculos** Sean Γ_1, Γ_2 dos círculos cualesquiera, existen dos centros de homotecia. Informalmente, un centro de homotecia estará afuera de ambos círculos y el otro estará entre ambos círculos. Es fácil de ver que por cómo está definida la homotecia, el centro de ésta tiene que ser colineal con los centros de los círculos y a su vez, es es el punto de intersecciones de las tangentes comunes.
> Si Γ_1, Γ_2 son tangentes, entonces uno de los centros de homotecia es exactamente el punto de tangencia.



Problema de Práctica 3.2:

Sea Γ un círculo y, Γ_1 y Γ_2 son dos circunferencias de mismo radio e internamente tangentes a Γ en puntos A y B, respectivamente. Sea X un punto arbitrario en Γ y sean C y D las intersecciones de XA con Γ_1 y XB con Γ_2, respectivamente. Demuestra que AB es paralela a CD.

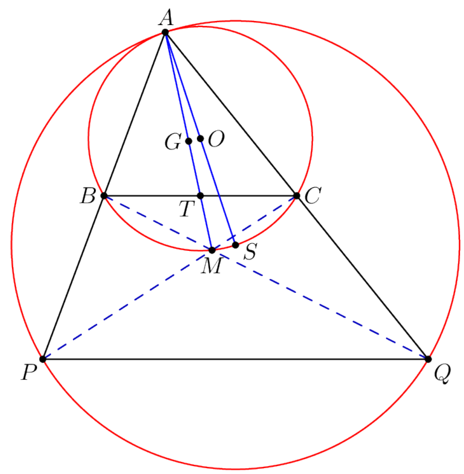


Demostración. Sean r, r_1 y r_2 los radios de Γ, Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Notemos que A es centro de homotecia de Γ_1 y Γ, entonces AC entonces BD tiene que $\frac{AC}{AX} = \frac{r_1}{r}$, y análogamente B es el centro de homotecia de Γ_2 y Γ, $\frac{BD}{BX} = \frac{r_2}{r}$. Puesto que $r_1 = r_2$, se tiene que $\frac{AC}{AX} = \frac{BD}{BX}$, por Teorema de Tales implica que $AB \parallel CD$. ■

Problema de Práctica 3.3: Singapore Open MO 2023 R2P1

En un triángulo escaleno ABC con baricentro G y circunferencia circunscrita ω centrada en O, la prolongación de AG corta a ω en M; las rectas AB y CM se intersecan en P; y las rectas AC y BM se intersecan en Q. Supóngase que el circuncentro S del triángulo APQ se encuentra en ω y que A, O, S son colineales. Demuestre que $\angle AGO = 90^o$.

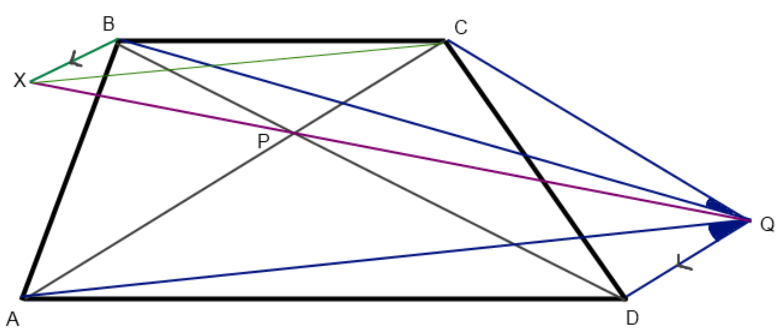
Demostración. Nótese que los centros de las circunferencias pasan por A, entonces ambas son tangentes entre sí en A. Por ende, A es el centro de homotecia de $\triangle ABC$ y $\triangle APQ$. Debido a que $S \in \odot(ABC)$ y $A - O - S$, se tiene que $\triangle ABC$ y $\triangle APQ$ están a razón $AO : AS = 1 : 2$. Esto último implica que M es el gravicentro de $\triangle APQ \implies AG = GM$, y es un hecho conocido que el circuncentro biseca cualquier cuerda, por esto mismo es que $OG \perp AM$. ■



Problema de Práctica 3.4: ISL 2007-G3, VAIMO 2008-P5

Las diagonales de un trapecio $ABCD$ se intersecan en el punto P. El punto Q se encuentra entre las rectas paralelas BC y AD, de modo que $\angle AQD = \angle CQB$, y la recta CD separa los puntos P y Q. Demuestre que $\angle BQP = \angle DAQ$.

Demostración (de AoPS). Usando homotecia, P es el centro, $A \to C, B \to D, Q \to X$, entonces tenemos que X, P, Q son colineales por homotecia $\implies \angle BXC = \angle AQD = \angle CQB \implies BCQX$ es concíclico $\implies \angle DAQ = \angle BCX = \angle BQX$. ■



Teorema 3.4: Teorema de Monge

Sean Γ_1, Γ_2 y Γ_3 tres circunferencias no concentricas. Sean X, Y y Z los centros de homotecia con razón positiva de Γ_1 y Γ_2, Γ_2 y Γ_3, y Γ_1 y Γ_3, respectivamente. Entonces X, Y y Z son colineales.

Ambas demostraciones ocupan teoría de la sección Concurrencia y Colinealidad. *Demostración.* Menelao en el triángulo formado por los centros de los círculo. ■

Otra demostración. Aplicando composición de homotecias de centros X, Y y radios $\frac{r_1}{r_2}, \frac{r_2}{r_3}$ entonces el centro Z de esta composición es colineal con X, Y y tiene razón $\frac{r_1}{r_3}$. Por lo que también es centro de homotecia de Γ_1, Γ_3. ■

3.1 Problemas

Problema 1. *Sea ABC un triángulo y ω su incírculo. Sea D la intersección de la bisectriz de $\angle BAC$ con BC y sea ℓ la recta tangente a ω que pasa por D y no es el lado BC. Prueba que ℓ es tangente al excírculo.*

Problema 2. *(Circunferencia de los 9 puntos). Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Demuestra que los puntos medios de los lados del triángulo, los pies de las perpendiculares de los vértices, y los puntos medios de los vértices con H son concíclicos.*

Problema 3. *(Recta de Euler). Demuestra que el gravicentro, circuncentro, ortocentro y el centro de la circunferencia de los 9 puntos de un triángulo ABC están en una recta.*

Problema 4. *OMM 2024/4*

Problema 5. *Sean ω_1 y ω_2 dos circunferencias tangentes en T con ω_2 en el interior de ω_1. Se tiene A y B puntos en ω_1 tales que AB es tangente a ω_2 en el punto K. Prueba que TK corta a ω_1 en el punto medio del arco AB.*

Problema 6. *Sea I el incentro de un triángulo ABC y D el punto de tangencia de su incírculo con BC. Sea M el punto medio de BC y N el punto medio de AD. Demuestra que I, N y M son colineales.*

Problema 7. *Sea ABC un tríangulo y D el punto de tangencia de su incírculo con BC. Prueba que D, el excentro con respecto a A y el punto medio de la altura con respecto a A son colineales.*

Problema 8. *Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se intersecan en dos puntos distintos X_1 y X_2. Se considera una circunferencia ω tangente exteriormente a ω_1 en un punto T_1, y tangente interiormente a ω_2 en un punto T_2. Demostrar que las rectas X_1T_1 y X_2T_2 se intersecan en un punto que pertenece a ω.*

Problema 9. *Sea ABC un triángulo y Γ su circuncírculo. La circunferencia Ω es tangente internamente a Γ y también tangente a las rectas AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Prueba que el incentro de ABC está sobre DE.* ***NOTA****: a la circunferencia Ω se le conoce como circunferencia mixtilinear del triángulo ABC opuesta a A.*

Problema 10. *Sea A uno de los dos puntos distintos de intersección de dos circunferencias C_1 y C_2 con centros O_1 y O_2 respectivamente. Una de las tangentes comunes a estas circunferencias toca a C_1 en P_1 y a C_2 en P_2, mientras que la otra tangente común toca a C_1 en Q_1 y a C_2 en Q_2. Sea M_1 el punto medio de P_1Q_1 y M_2 el punto medio de P_2Q_2. Prueba que $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.*

Problema 11. *Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se intersecan en los puntos A y B. Considérese una circunferencia Γ contenida en Γ_1 y Γ_2 que es tangente a ambas en D y E, respectivamente. Sea C una de las intersecciones de la recta AB con Γ, F la intersección de la línea EC con Γ_2 y G la intersección de la línea DC con Γ_1. Sean H e I los puntos de intersección de la línea ED con Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Demuestre que F, G, H e I están en una misma circunferencia.*

Problema 12. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo, I su incentro, y $\triangle DEF$ el triángulo de contacto del incírculo. Prueba que DI, EF y la mediana desde A son concurrentes.*

Problema 13. *OMM 2024/3*

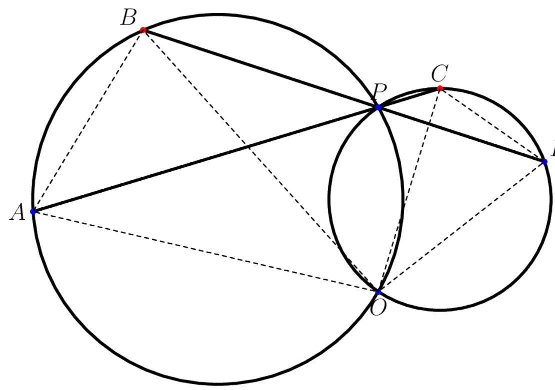
4 Rotohomotecia y Punto de Miquel

Primeramente, ¿qué es rotohomotecia? Tiene un nombre un tanto exótico pero que se explica por si solo: es aplicar una homotecia y una rotación, así de fácil. Sin embargo, a diferencia de la homotecia, aquí nos vamos a fijar solamente en triángulos, figuras más complejas salvo el círculo, pueden llegar a ser difíciles de trabajar, por eso es mejor diseccionar en triángulos.

Definición. Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son rotohomotéticos entonces escribimos que $A \longleftrightarrow A'$ y $AB \longleftrightarrow A'B'$, que se leería como: a A le corresponde A' y visceversa, y a AB le corresponde $A'B'$ y visceversa.
También véase que $\triangle AOB$ es semejante a $\triangle A'OB'$ y así sucesivamente con todos los vértices.

Teorema 4.1: Rotohomotecia

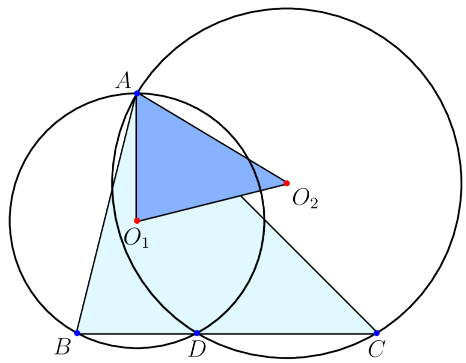
Sean AB y CD dos segmentos no paralelos ni iguales (no pueden ser ambos), entonces existe un único centro de rotohomotecia O tal que $AB \longleftrightarrow CD$. Además, sea P la segunda intersección de $\odot(ABO)$ con $\odot(CDO)$, se tiene que $A-P-C$ y $B-P-D$.



Ahora, hablando de lo último, este tiene su reverso, es decir, tenemos dos triángulos ABP y CDP tal que $A-P-D$ y $B-P-C$, entonces si O es la intersección de $\odot(ABP)$ con $\odot(CDP)$, tenemos que O es el centro de rotohomotecia tal que $AB \longleftrightarrow CD$.
Otro hecho importante es que O también es el centro de rotohomotecia que manda $AC \longleftrightarrow BD$, es por esto que decimos que la rotohomotecia viene en pares.
Trata de demostrar el siguiente teorema siguiendo con esta idea de rotohomotecia en pares.

Teorema 4.2: Teorema de Salmon

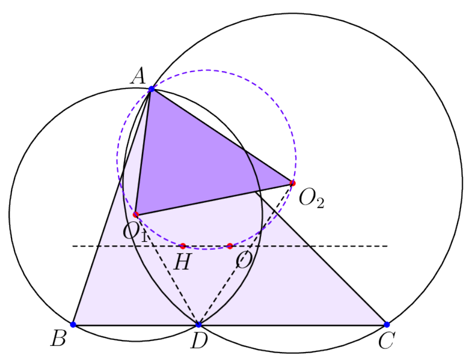
Sea ABC un triángulo y P un punto sobre la línea BC, O_1 es el circuncentro de $\triangle ABP$ y O_2 es el circuncentro de $\triangle ACP$ entonces tenemos que A es el centro de rotohomotecia tal que $BC \longleftrightarrow O_1O_2$



Este teorema es usado en la solución del USAMO 2013 y es parte de la solución del siguiente problema.

Problema de Práctica 4.1:

Sea ABC un triángulo cuyo circuncentro es O, D es cualquier punto sobre BC, O_1 y O_2 son los circuncentros de $\triangle ABD$ y de $\triangle ADC$ respectivamente y H es el ortocentro de $\triangle O_1DO_2$. Demuestra que OH es paralela a BC.

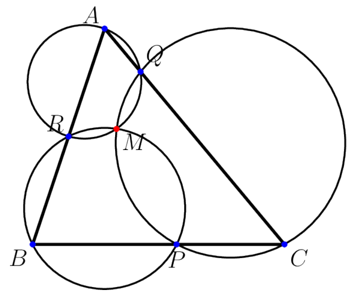


Demostración. Nótese que H es la reflexión del ortocentro de $\triangle O_1AO_2$ sobre O_1O_2.Es un hecho conocido esta reflexión caen sobre el circuncírculo del triángulo, por lo que O_1AO_2H es cíclico.
Debido a que O_1, O son pasan por la mediatriz de AB y O_2, O son pasan por la mediatriz de AC, entonces $\angle ABC + \angle O_1OO_2 = 180^o$.
Por Teorema de Salmon tenemos que $\triangle ABC$ y $\triangle O_1DO_2$ son rotohomotéticos $\Longrightarrow \angle O_1AO_2 = \angle BAC \Longrightarrow \angle O_1AO_2 + \angle O_1OO_2 = 180^o \Longrightarrow O_1AO_2OH$ es cíclico (1).
Como AD es el eje radical de $\odot(ABD)$ y $\odot(ACD)$, se tiene que $AD \perp O_1O_2$ por lo que $H \in AD \Longrightarrow A{-}H{-}D$ (2).
Puesto que es un hecho conocido que los ángulos formados por el ortocentro y circuncentro junto con dos vértices son iguales $\Longrightarrow \angle O_1AH = \angle CAO$ (3).
Juntando (1), (2) y (3) $\Longrightarrow \angle ADB = \angle DAC + \angle ACB = \angle CAO + \angle OAH + \angle ACB = \angle O_1AH + \angle OAH + \angle ACB$
$= \angle OAO_1 + \angle ACB = \angle OO_2O_1 + \angle ACB = \angle OO_2O_1 + \angle AO_2O_1 = \angle OHD \Longrightarrow \angle ADB = \angle OHD$, por tanto terminamos. ■

Ahora pasando a ver lo que es el Teorema de Miquel, he de decir que hay dos versiones pero estan relacionadas entre sí, una para triángulos y otra para cuadriláteros, las demostraciones de ambos se dejan al lector (con un anguleo basta) y nos vamos a enfocar sobre todo en el segundo.

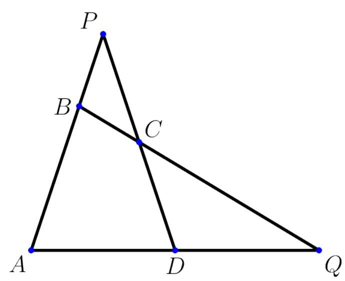
Teorema 4.3: Primer Teorema de Miquel

Sea ABC un triángulo y P, Q, R puntos sobre las líneas BC, AC, AB, respectivamente, entonces los circuncírculos de $\triangle AQR, \triangle BPR$ y $\triangle CPQ$ pasan por un mismo punto.



Veamos el potencial que este teorema puede ofrecer, lo podemos usar para demostrar algún cíclico o construir un punto K (por donde pasan todos los círculos) y así jugar con ángulos.

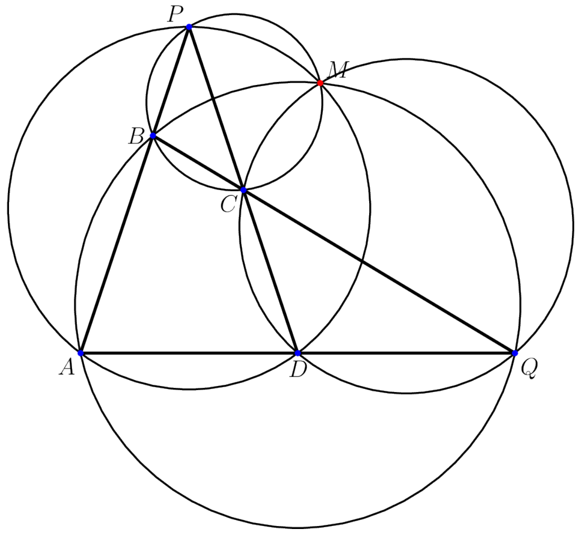
> **Cuadrilátero completo.** Sea $ABCD$ cualquier cuadrilátero convexo, sea P la intersección de AB con CD y Q es la intersección de AD con BC, entonces decimos que $ABCDPQ$ es un cuadrilátero completo.



A priori, parece que solo di un teorema y una definición sin fundamento. La cuestión es que si tomamos $\triangle PAD$ y $\triangle QAB$ y aplicamos el teorema de Miquel sobre los puntos B, C, Q y P, C, D respectivamente, nos daría el siguiente teorema.

Teorema 4.4: Segundo Teorema de Miquel

Sea $ABCDPQ$ un cuadrilátero completo (igualmente definido como antes), entonces los circuncírculos de $\triangle PBC, \triangle PAD, \triangle QAB$ y $\triangle QCD$ pasan por un mismo punto M (el punto de Miquel).



Nota: A cualquiera de los dos teoremas nos podemos referir simplemente como Teorema de Miquel. Con esto mostrado, vamos a juntar rotohomotecia y Miquel para ver la buena dupla que hacen.

Rotohomotecia + Punto de Miquel. El punto de Miquel M de un cuadrilátero completo $ABCDPQ$ es el centro de seis rotohomotecias, en tres pares:

- $AB \longleftrightarrow DC$ y $AD \longleftrightarrow BC$
- $QD \longleftrightarrow BP$ y $QB \longleftrightarrow DP$
- $QA \longleftrightarrow CP$ y $QC \longleftrightarrow AP$

Y esto es lo verdaderamente fuerte, podemos sacar razones y ángulos de triángulos muy fácilmente y esto lo podemos acompañar de Ley de senos, homotecia o cosas de cíclicos para acabar con un problema.
Antes de pasar a hacer algún ejercicio, trata de práticar esto que te acabo de decir con el siguiente problema, profundiza en cómo es que se usó la rotohomotecia en la solución.

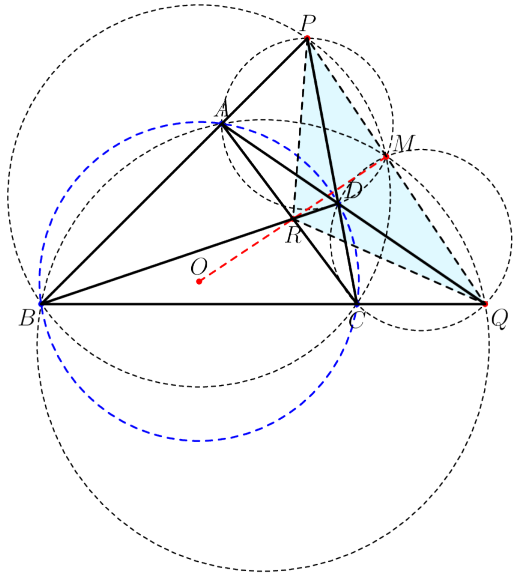
Problema de Práctica 4.2:

Sea $ABCDPQ$ y M como anteriormente los definimos. Prueba que los puntos medios de AB y CD, caen sobre un círculo que también pasa por M y P

Demostración. Sea L y N los puntos medios de AB y CD, entonces $L \longleftrightarrow N$ y a su vez tenemos que $B \longleftrightarrow C \implies \measuredangle LBM = \measuredangle NCM$. $\square$
Si te has dado cuenta de algo, es que $ABCD$ es cualquier cuadrilátero convexo pero en el caso en el que es un cuadrilátero cíclico se cumple que $\boxed{P, Q \text{ y } M \text{ son colineales}}$ y el siguiente teorema. De hecho, también se cumple que $O - R - M$ y $r^2 = OR \cdot OM$, donde r es el circunradio de $\odot(ABCD)$.

Teorema 4.5: Teorema de Brokard

Sea $ABCDPQ$ un cuadrilátero completo tal que $ABCD$ es cíclico cuyo centro es O y R es el punto de intersección de AC con BD. Entonces O es el ortocentro de PQR.

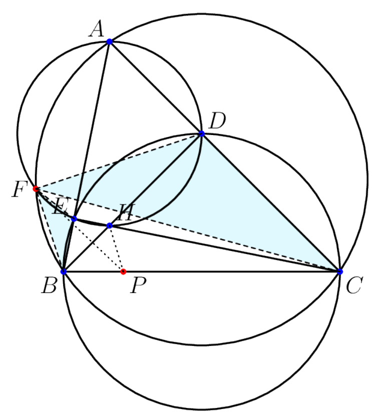


Has dibujos y ve practicando mentalmente cómo es que funciona la rotohomotecia, pon ejemplos que te ilustren las transformaciones. Hecho eso, intenta los siguientes problemas.

Problema de Práctica 4.3: Brazil 2011

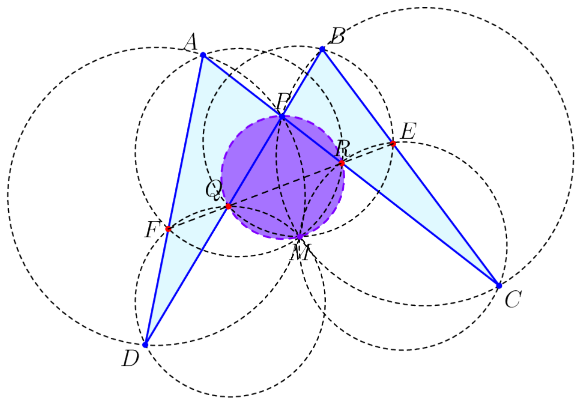
Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H y alturas BD, CE. El circuncírculo de ADE corta al circuncírculo de ABC en $F \neq A$. Prueba que las bisectrices de $\angle BFC$ y de $\angle BHC$ se intersectan en BC.

Demostración. Sea P la intersección de la bisectriz de $\angle BFC$ con BC y P' la intersección de la bisectriz de $\angle BHC$ con BC, basta con demostrar que $\frac{BF}{FC} = \frac{BE}{CD}$, ya que por el teorema de la bisectriz nos daría que $\frac{BP}{PC} = \frac{BP'}{P'C}$ lo que implica que son el mismo punto.
Es fácil de ver que F es el punto de Miquel de $DECB$, por lo que $BD \longleftrightarrow CE \implies \frac{BF}{FC} = \frac{FD}{FE}$. Pero también es fácil de ver que $\triangle BDH$ es semejante a $\triangle CEH \implies \frac{BE}{CD} = \frac{BH}{CH} \implies \frac{BF}{FC} = \frac{BE}{CD}$, justamente como queríamos. ■



Problema de Práctica 4.4: IMO 2005/5

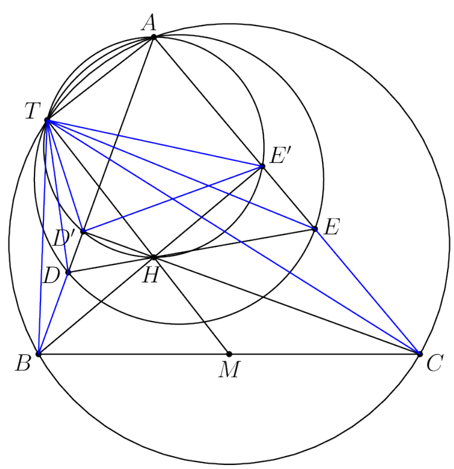
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $BC = AD$ y $BC \nparallel AD$. Sean E y F dos puntos variables en los lados BC y AD, respectivamente, y satisfacen que $BE = DF$. Las líneas AC y BD se intersectan en P, las líneas BD y EF coinciden en Q, las líneas AC y EF coinciden en R. Prueba que los circuncírculos de los triángulos PQR, mientras E y F varían, tienen un punto en común distinto de P.



Demostración. Sea M el centro de rotohomotecia que manda AD a BC, notemos que debido a que $\frac{DF}{FA} = \frac{BE}{EC}$ se tiene que $F \longleftrightarrow E \implies AF \longleftrightarrow CE$ y $DF \longleftrightarrow BE$. Por propiedades de rotohomotecia, tenemos que: $AC \cap BD = \odot(AMD) \cap \odot(BMC)$, $EF \cap AC = \odot(AFM) \cap \odot(ECM)$ y $EF \cap BD = \odot(DFM) \cap \odot(EBM) \implies P = \odot(AMD) \cap \odot(BMC)$, $R = \odot(AFM) \cap \odot(ECM)$ y $Q = \odot(DFM) \cap \odot(EBM)$. Esto implica que M es el punto de Miquel de los cuadriláteros completos $APQFRD$ y $BPRECQ$, por lo que PQR siempre pasa por M. ■

Problema de Práctica 4.5: Swiss Imo Selection 2006

Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. Sea H el ortocentro del triángulo ABC y M el punto medio del lado BC. Sea D un punto del lado AB y E un punto del lado AC tal que $AE = AD$ y los puntos D, H y E estén sobre la misma recta. Demuestre que la recta HM es perpendicular a la cuerda común de las circunferencias circunscritas del triángulo $\triangle ABC$ y del triángulo $\triangle ADE$.



Demostración. Notemos que la reflexión de H sobre M es cae en $\odot(ABC)$ y justamente es el punto diametralmente opuesto a A por suma de ángulos con paralelas y cíclicos. Sea D', E' los pies de las alturas

en C, B respectivamente y T' el punto de intersección de HM con $\odot(ABC) \implies \angle AT'H = 90^o = \angle HE'A = \angle HD'A$, por lo que T cae en $\odot AD'E'$
Sea S el punto de intersección de las circunferencias circunscritas de $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$. Queremos demostrar que $T \in \odot(ADE)$. Notemos que $\triangle BD'H \sim \triangle CE'H$, y $\triangle DD'H \sim \triangle EE'H$ ambos por criterio AA.
De la primera semejanza tenemos que $\frac{BD'}{CE'} = \frac{D'H}{E'H}$, de la segunda tenemos que $\frac{DD'}{EE'} = \frac{D'H}{E'H} \implies \frac{BD'}{CE'} = \frac{DD'}{EE'} \implies \frac{DD'}{EE'} = \frac{BD}{CE}$.
Finalmente, notemos que T es el centro de rotohomotecia tal que $BD' \longleftrightarrow CE'$; debido a la última razón, se tiene que $D \longleftrightarrow E$, por propiedades de rotohomotecia implica que $T \in \odot ADE$. ■

4.1 Problemas

Problema 14. *Sea ABC y Δ triángulos fijos con la misma orientación y considera triángulos variables DEF inscritos en ABC (con D sobre el lado BC, etc.) tales que $\triangle DEF \sim \Delta$. Demuestra que el punto de Miquel de $\triangle DEF$ respecto a $\triangle ABC$ es fijo.*

Problema 15. *IMO 1985/5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con centro O. Las rectas AD y BC se intersectan en P. Las circunferencias de los triángulos PAB y PDC se intersectan en M. Demuestra que $\angle OMP = 90°$.*

Problema 16. *Rusia 1995 et al. El cuadrilátero $ACDB$ está inscrito en un semicírculo con diámetro AB y el punto O es el punto medio de AB. Sea K la intersección de las circunferencias de AOC y BOD. Las rectas AB y CD se intersectan en M. Demuestra que $\angle OKM = 90°$.*

Problema 17. *IMO 1979/3. Dos circunferencias en un plano se intersectan y A es uno de los puntos de intersección. Partiendo simultáneamente desde A, dos puntos se mueven con velocidad constante, cada uno viajando a lo largo de su propia circunferencia en la misma dirección. Los dos puntos regresan a A simultáneamente después de una revolución. Demuestra que existe un punto fijo P en el plano tal que los dos puntos siempre son equidistantes de P.*

Problema 18. *USAMO 2006/6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero, y sean E y F puntos sobre los lados AD y BC, respectivamente, tales que $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. La recta FE intersecta las prolongaciones de BA y CD en S y T, respectivamente. Demuestra que las circunferencias de los triángulos SAE, SBF, TCF y TDE pasan por un punto común.*

Problema 19. *TSTST 2017/7. El triángulo ABC está inscrito en la circunferencia Ω. La bisectriz interior del ángulo $\angle A$ intersecta el lado BC y Ω en D y L (distinto de A), respectivamente. Sea M el punto medio del lado BC. La circunferencia del triángulo ADM intersecta nuevamente a AB y AC en Q y P (distinto de A), respectivamente. Sea N el punto medio del segmento PQ, y sea H el pie de la perpendicular desde L a la línea ND. Demuestra que la recta ML es tangente a la circunferencia del triángulo HMN.*

Problema 20. *USA EGMO TST 2020/2. Sea ABC un triángulo y sea P un punto que no yace sobre ninguna de las tres líneas AB, BC o CA. Puntos distintos D, E y F yacen en las líneas BC, AC y AB, respectivamente, tales que $\overline{DE} \parallel \overline{CP}$ y $\overline{DF} \parallel \overline{BP}$. Demuestra que existe un punto Q sobre la circunferencia de $\triangle AEF$ tal que $\triangle BAQ$ es semejante a $\triangle PAC$.*

Problema 21. *ELMO 2010/6 Sea ABC un triángulo con circunferencia ω, incentro I y excentro A-exterior I_A. Sean D y E los pies del incírculo y el A-excírculo sobre BC, respectivamente. Sea M el punto medio del arco BC que no contiene a A. Considera el círculo tangente a BC en D y al arco BAC en T. Si TI interseca nuevamente a ω en S, demuestra que SI_A y ME se encuentran sobre ω.*

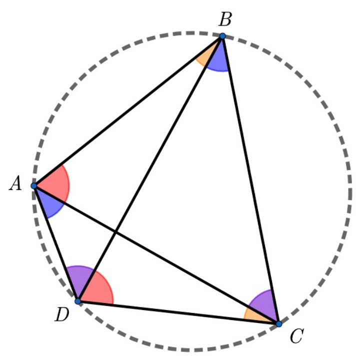
Problema 22. *Sea ABC un triángulo con $\angle C = 90°$, y sea H el pie de la altura desde C. Un punto D se elige dentro del triángulo CBH tal que $\overline{CH}$ biseca $\overline{AD}$. Sea P la intersección de las líneas $\overline{BD}$ y $\overline{CH}$. Sea E el punto medio del arco semicircular con diámetro $\overline{BD}$ que intersecta el segmento CB en un punto interior. Una línea a través de P es tangente a ω en Q. Demuestra que las rectas $\overline{CQ}$ y $\overline{AD}$ se encuentran en ω.*

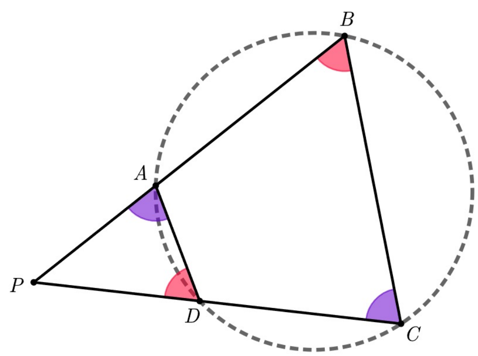
5 Cíclicos y Potencia de Punto

Vamos a comenzar por recordar que es un cuadrilátero cíclico: es un cuadrilátero cuyos puntos están sobre un círculo. Perfecto, ahora vamos a ver algunas propiedades básicas de ángulos de estos, he de decir que junto a las paralelas y a la semejanza, son la mejor forma de atacar un problema con anguleo.

Teorema 5.1: Ángulos en cíclicos

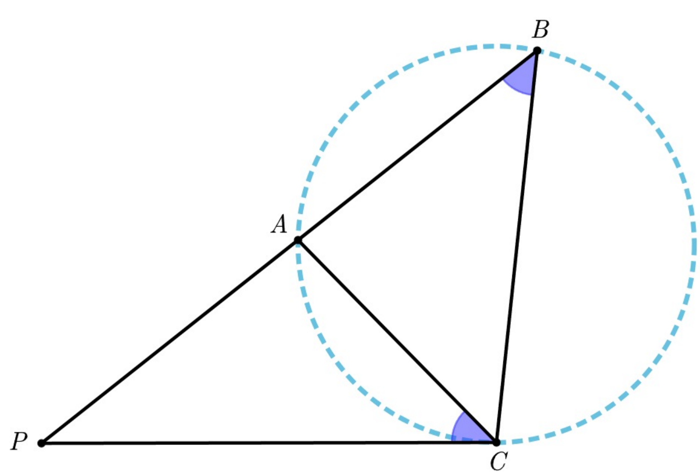
El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico y P es la intersección de AB y CD, entonces se tiene que $\angle ACB = \angle ADB$, $\angle PAD = \angle PCB$, $\angle ABC + \angle ADC = \angle DAB + \angle BCD = 180°$ y $\triangle PCB$ es semejante a $\triangle PAD$.
Y el reverso también es cierto, si se cumple cualquiera de las igualdades de las condiciones anteriores, entonces $ABCD$ es cíclico.





Nota: Podemos cambiar $\angle$ por $\measuredangle$ y las igualdades siguen siendo ciertas, incluso ahora son más generales porque los puntos ahora pueden estar en posición general (en cualquier orden).
La forma de demostrarlo también es una propiedad muy útil, para la primera igualdad basta con demostrar que todo ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo formado por el centro del círculo; para la tercera igualdad usa lo anterior; para la segunda usa la tercera; para la cuarta usa la segunda.

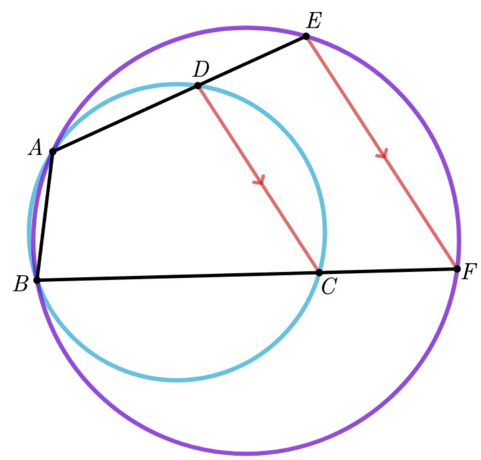
Caso $C = D$. Ahora veamos como esta definido P: $P = AB \cap CC$, pero ¿qué sentido tiene una línea CC? Pues es justamente aproximar C y D hasta que coincidan en un punto, es decir, es la tangente al círculo. Por tanto tenemos que se cumple que $\angle PAC = \angle ABC$, $PA \cdot PB = PC^2$ y $\triangle PBC$ es semejante a $\triangle PAC$.



Perfecto, ahora vamos a ver otra forma de comprobar que un cuadrilátero sea cíclico con otro cíclico. La magia del siguiente teorema es que, nos puede dar paralelas o nos puede dar cíclicos, y en cuanto a angle chasing es de lo mejor que se te puede ocurrir.

Teorema 5.2: Teorema de Reim

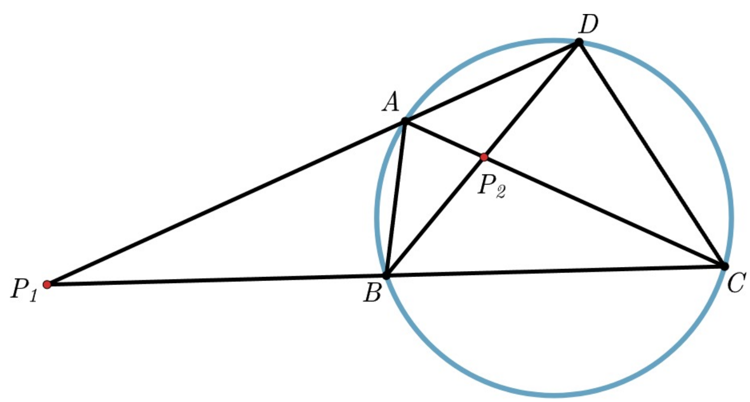
Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, E esta en AC y F en BD entonces $ABFE$ es cíclico si y solo si $CD \parallel EF$



Ahora vamos a confirmar que un cuadrilátero es un cíclico con segmentos.

Teorema 5.3: Potencia de punto

Sea $ABCD$ cualquier cuadrilátero y P es el punto donde AC y BD coinciden. Entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si $AP \cdot PC = BP \cdot PD$.



La mayor virtud que tiene potencia de punto es la parte del "si y solo si", puesto que jugando con los segmentos podemos obtener el dichoso producto y ya la parte de cíclicos, como vimos, da mucha libertad en ángulos. Y también, notemos que este producto es constante, por lo que puedes pasar infinitas líneas que intersecten a la circunferencia y todas las potencias de punto van a ser iguales.
Por otra parte, aquí volvemos a retomar lo que son segmentos diridos de modo que nos que si P esta afuera de la circunferencia su potencia es positiva, si esta adentro es negativa y si esta sobre la circunferencia es 0 (¿por qué?). Y una pregunta válida que nos podemos hacer es ¿y para qué queremos segmentos dirigidos aquí? (Aparte de lo dicho anteriormente) Si bien es cierto que a la hora de hacer un problema, rara vez vamos

a usar segmentos dirigos (excepciones son Menelao, Cross ratios, y a veces potencia de punto), se va a ver más claro su uso con la otra forma de ver potencia de punto.

Teorema 5.4: Potencia de punto

Dado un círculo ω con radio r y un punto P cualquiera en el plano. Definimos a la potencia del punto P como $\text{Pow}(P, \omega)$ (que se lee como la potencia de P con respecto a ω) y cuyo valor es $OP^2 - r^2$.

Y justamente pasa lo que habíamos dicho antes sobre el signo de la potencia depende de si el punto esta afuera o adentro. Para convencerte que ambas definiciones dan lo mismo, si el punto esta afuera considera el punto de tangencia de P y el Teorema de Pitágoras, en caso de que este adentro, considera el diámetro que pasa por P y también Pitágoras. En ambos casos usa segmentos dirigidos.

Pow(P, ω)**.** Resumiendo lo que hemos dicho se tiene que

$$\text{Pow}(P, \omega) = PX \cdot PY = OP^2 - r^2$$

Donde X, Y son las intersecciones de alguna línea que pasa por P con ω.

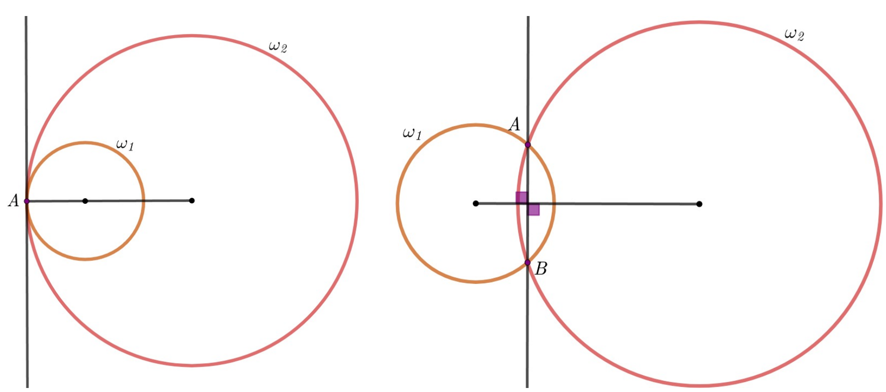
Ahora vamos a ver que pasa si tenemos dos circunferencias, ¿cuál es lugar geométrico (o por dónde pasan) de la potencia de punto? Es decir, queremos saber qué puntos en el plano cumplen que la potencia con respecto a ambos círculos es igual; a este lugar geométrico lo llamamos **Eje radical** de *circunferencia 1* y de *circunferencia 2*. Nótese que por la segunda definición de potencia, es fácil de ver que este eje radical es una recta perpendicular a la línea que une los centros de los círculos (por teorema de Pitágoras).

Teorema 5.5: Eje Radical

Sean ω_1 y ω_2 dos círculos cualesquiera.

- Si ambos círculos son tangentes, entonces la recta tangente es el eje radical.
- Si se intersectan en A y B, entonces AB es el eje radical.

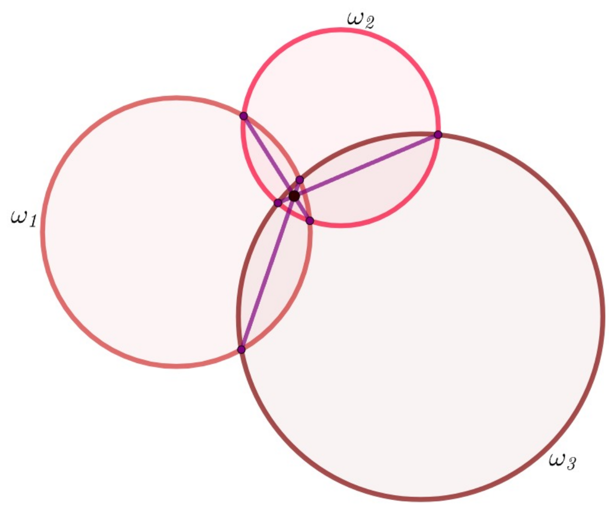
Además, el eje radical es perpendicular a la línea que une los centros de los círculos.



Y ahora la duda es, ¿qué pasa si no se intersectan? Pues no tengo una buena forma de decir dónde esta el eje radical, pero el siguiente teorema nos da una manera de encontrarlo.

Teorema 5.6: Teorema de ejes radicales (Centro radical)

Sean ω_1, ω_2 y ω_3 tres círculos cualesquiera, cuyos centros sean colineales. Entonces los ejes radicales de cada par de círculos son concurrentes.



Y ahora si que si, ya sabemos cómo dibujar el eje radical: Tomamos un circunferencia que intersecte a los dos circulos, toma sus ejes radicales, desde el punto donde se intersecten, toma su perpendicular a la línea que une los centros de los círculos que queremos encontrar su eje radical, y ya esta, esa perpendicular es justamente el eje radical.
Como ejercicio al lector es: ¿Cuál es el eje radical de dos circunferencias de mismo radio? (Usa la segunda definición de potencia de punto).

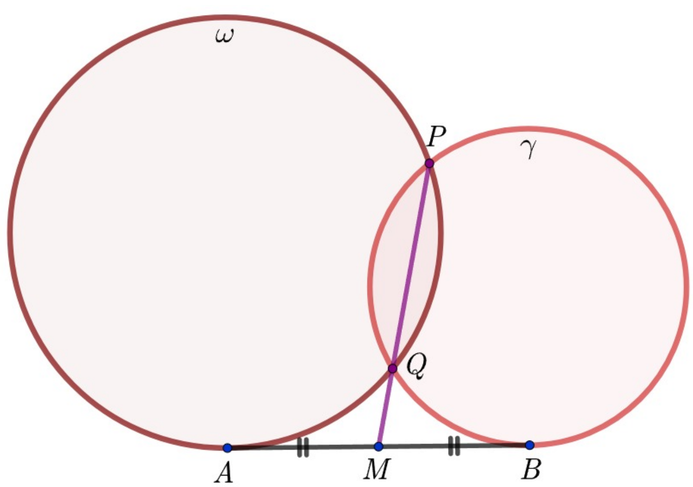
Problema de Práctica 5.1:

Demuestra la existencia del ortocentro con ejes radicales

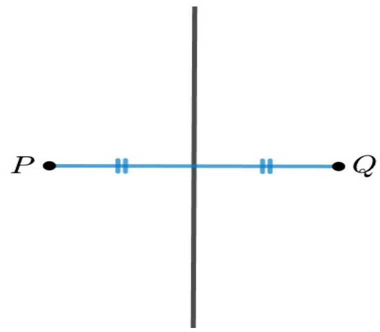
Problema de Práctica 5.2:

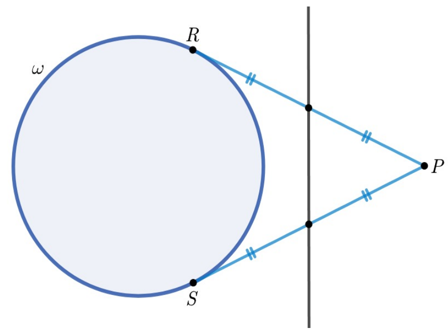
Dados dos círculos ω y γ que se intersectan en P y en Q. Una tangente en común intersecta a ω y γ en A y B respectivamente. Prueba que PQ pasa por el punto medio de AB.

Demostración. Sea M la intersección de PQ con AB, como PQ es eje radical entonces $MA^2 = \text{Pow}(M, \omega) = \text{Pow}(M, \gamma) = MB^2$, lo que implica lo deseado. ■ (a Q se le conoce como el Humpty point de $\triangle APB$)



Radio = ¿0? Técnicamente un círculo de radio 0 es un punto, por lo que la potencia de un punto P con respecto a un punto Q es PQ^2 y ahora la cuestión es ¿cuál es el eje radical de un círculo con un punto? ¿o cuál es el eje radical de dos puntos?
Para la segunda pregunta la respuesta es clara: la mediatriz es el eje radical (otra vez por Pitágoras). Y para la primera, la línea que pasa por los puntos de los segmentos que pasan por el punto y son tangentes al círculo, es el eje radical.
Para ser más claros, el eje radical de dos puntos P y Q es la mediatriz de PQ; si ω es cualquier círculo, P es cualquier punto y R, S son puntos en ω tal que PR y PS son tangentes, entonces el eje radical de ω y P es la línea que une los puntos medios de PR y PS.



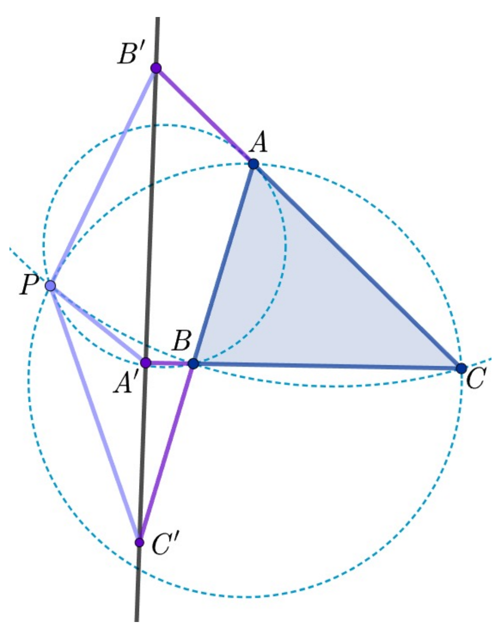


Problema de Práctica 5.3:

Demuestra la existencia del circuncentro con ejes radicales

Problema de Práctica 5.4:

Sea ABC un triángulo y P un punto. La tangente al circuncírculo de $\triangle BPC$ en P intersecta BC en A'. Definimos los puntos $B' \in AC$ y $C' \in AB$ similarmente. Prueba que los puntos A', B', C' son colineares.

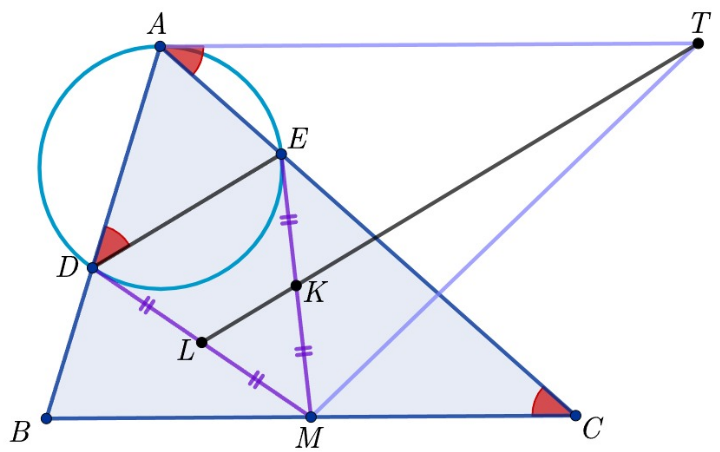


Demostración. Nótese que $\text{Pow}(A', P) = A'P^2 = \text{Pow}(A', \odot(BCD)) = A'B \cdot A'C = \text{Pow}(A', \odot(ABC))$. Entonces A' cae en el eje radical de D y $\odot(ABC)$. Análogamente para los otros dos puntos y lo pedido en el problema se vuelve obvio. ■

He de confesar que el siguiente problema se me hizo imposible. Lo intenté como unas 3 veces y no me salía pero ni siquiera tenía idea de como atacarlo, pero en un entrenamiento de este mismo tema, con esta idea de círculos de radio 0 se volvió demasiado trivial para lo que me gustaría.

Problema de Práctica 5.5: Iran TST 2011

En el triángulo acutángulo ABC el ángulo B es mayor que el ángulo C. Sea M el punto medio de BC. D y E son los pies de las alturas desde C y B, respectivamente. Sea K y L los puntos medios de ME y MD, respectivamente. Si KL intersecta la línea que pasa por A y es paralela a BC en T, prueba que $TA = TM$.



Demostración. Por como estan definidos K y L se tiene que KL es el eje radical de M y $\odot(ADE) \implies \text{Pow}(T, M) = \text{Pow}(T, \odot(ADE))$. Nótese que por cíclicos y paralelas tenemos que $\angle ADE = \angle ACB = \angle TAC \implies TA$ es tangente a $\odot(ADE)$. Por esto y por lo primero dicho, tenemos que $MT^2 = \text{Pow}(T, M) = \text{Pow}(T, \odot(ADE)) = AT^2$, justamente como queríamos. ■

Pasamos a ver casos feos, que no dan mucha información en un problema ¿qué pasa si los 3 centros son colineales? Pues pasa que los ejes radicales son las perpendiculares a la recta que pasa por los centros por lo que son paralelos entre sí, pero por el Teorema de los ejes radicales se tiene que se intersectan en un punto, y este punto es el punto al infinito (véase en la sección Geometria Proyectiva).

Otra pregunta ¿y si los tres comparten el mismo eje radical?

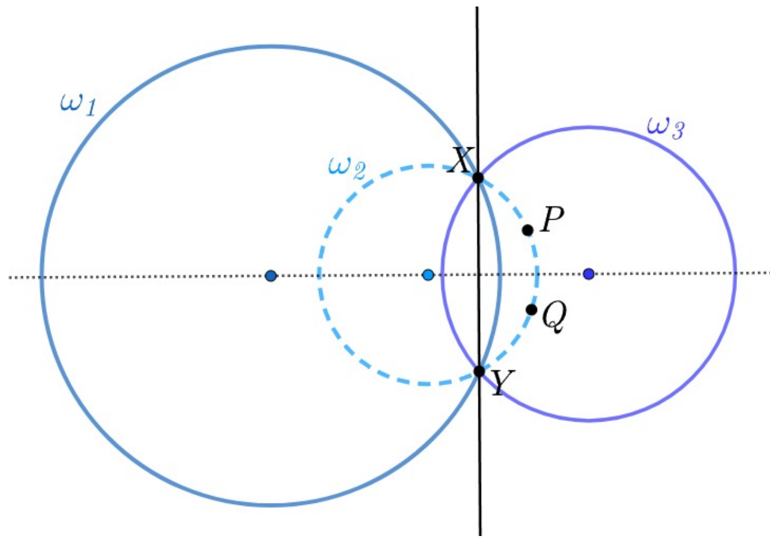
Círculos Coaxiales. Decimos que 3 o más círculos son coaxiales si comparten el mismo eje radical.

Y hay una forma de saber si el tercer círculo es coaxial, digo, una puede ser viendo que los centros son colineales y demostrar que el eje radical de los primeros dos también tiene la misma potencia respecto al tercero, pero podemos caracterizar estos puntos.

Teorema 5.7: Forgotten Coaxility Lemma

Las circunferencias ω_1, ω_2, ω_3 pasan todas por los puntos X y Y. Si los puntos P y Q están en ω_3, demuestra que

$$\frac{\text{Pow}(P, \omega_1)}{\text{Pow}(P, \omega_2)} = \frac{\text{Pow}(Q, \omega_1)}{\text{Pow}(Q, \omega_2)}.$$



La demostración queda como ejercicio al lector (de hecho era parte de los problemas de esta sección). Los últimos 5 problemas están dedicados a este tema.

5.1 Problemas

Problema 23. *En $\triangle ABC$. La perpendicular desde B a AC intersecta el círculo de diámetro AC en los puntos P y Q. La perpendicular desde C a BC intersecta el círculo de diámetro BC en los puntos R y S. Prueba que P, Q, R, S son concíclicos.*

Problema 24. *Sean ω_1, ω_2 dos circunferencias que se intersectan en los puntos S y T, y sean A, B puntos en ω_1, ω_2 tales que AB es tangente a ambas circunferencias.*

(a) Sea la recta ST que interseca el segmento AB en M. Demuestra que M es el punto medio de AB.

(b) Demuestra que $\frac{AS}{AT} = \frac{BS}{BT}$.

Problema 25. *Sea C un punto en un semicírculo de diámetro AB y sea D el punto medio del arco AC. Sea E la proyección de D sobre la línea BC y F la intersección de la línea AE con el semicírculo. Demuestra que BF biseca el segmento de recta DE.*

Problema 26. *Sean A, B, C tres puntos en una circunferencia Γ con $AB = BC$. Sean las tangentes en A y B a Γ que se encuentran en D. Sea DC que interseca nuevamente a Γ en E. Demuestra que la línea AE biseca el segmento BD.*

Problema 27 (Mock USAJMO 1, 2011)**.** *Dados dos puntos fijos y distintos B y C en un plano $\mathcal{P}$, encuentra el lugar geométrico de todos los puntos A pertenecientes a $\mathcal{P}$ tales que el cuadrilátero formado por el punto A, el punto medio de AB, el baricentro de $\triangle ABC$, y el punto medio de AC (en ese orden) puede ser inscrito en una circunferencia.*

Problema 28 (USAJMO 2012)**.** *Dado un triángulo ABC, sean P y Q puntos en los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tales que $AP = AQ$. Sean S y R puntos distintos en el segmento BC tales que S está entre B y R, $\angle BPS = \angle PRS$ y $\angle CQR = \angle QSR$. Demuestra que P, Q, R, S son concíclicos.*

Problema 29. *Sea $\triangle ABC$ con circuncentro O, ortocentro H y alturas AD, BE, CF. Las rectas EF, FD y DE intersectan BC, CA y AB en X, Y y Z, respectivamente. Demuestra que X, Y y Z son colineales en una recta perpendicular a OH.*

Problema 30 (IMO 2000)**.** *Dos circunferencias G_1 y G_2 se intersectan en dos puntos M y N. Sea AB la tangente común a estas circunferencias en A y B, respectivamente, de modo que M está más cerca de AB que N. Sea CD la recta paralela a AB que pasa por el punto M, con C en G_1 y D en G_2. Las rectas AC y*

BD se intersectan en E; las rectas AN y CD se intersectan en P; y las rectas BN y CD se intersectan en Q. Demuestra que $EP = EQ$.

Problema 31 (Fake USAJMO 2020)**.** *Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Los puntos D, E y F se ubican en los lados BC, CA y AB, respectivamente, de modo que $EF \parallel BC$. La recta DE intersecta la circunferencia circunscrita de $\triangle ADC$ nuevamente en $X \neq D$. De forma similar, la recta DF intersecta la circunferencia circunscrita de $\triangle ADB$ en $Y \neq D$. Si D_1 es la reflexión de D a través del punto medio de BC, demuestra que los cuatro puntos D, D_1, X y Y son cíclicos.*

Problema 32 (Olimpiada Rusa 2011)**.** *El perímetro del triángulo ABC es 4. El punto X está marcado en el rayo AB y el punto Y está marcado en el rayo AC tales que $AX = AY = 1$. La recta BC intersecta XY en M. Demuestra que el perímetro de $\triangle ABM$ o $\triangle ACM$ es 2.*

Problema 33 (Finales PUMaC 2017)**.** *El triángulo ABC tiene incentro I. La recta a través de I perpendicular a AI intersecta la circunferencia de ABC en los puntos P y Q, donde P y B están del mismo lado de AI. Sea X el punto tal que $PX \parallel CI$ y $QX \parallel BI$. Demuestra que PB, QC y IX se intersectan en un punto común.*

Problema 34. *Sean AD, BE, CF las alturas de un triángulo escaleno con circuncentro O. Prueba que las circunferencias (AOD), (BOE) y (COF) son coaxiales y, además, que su eje radical común es la Línea de Euler.*

Problema 35 (AoPS)**.** *En el triángulo escaleno $\triangle ABC$ con circuncírculo Γ, sea D el punto medio de BC. La línea AD corta a Γ nuevamente en A_1. La tangente a Γ en A_1 interseca BC en A_2. Denota por ω_A la circuncírculo de $\triangle DA_1A_2$, y define ω_B, ω_C de manera similar. Prueba que ω_A, ω_B, y ω_C son coaxiales.*

Problema 36 (AoPS)**.** *En $\triangle ABC$, sea D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con BC, CA y AB, respectivamente. Si P es la perpendicular desde D hasta EF y $X = AB \cap CP$ e $Y = AC \cap BP$, prueba que (AXY), (AEF) y (ABC) se encuentran en un punto diferente de A.*

Problema 37 (IMO Shortlist 2005/G5)**.** *Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. Sea H el ortocentro del triángulo $\triangle ABC$ y sea M el punto medio del lado BC. Sea D un punto sobre el lado AB y E un punto sobre el lado AC tales que $AE = AD$ y los puntos D, H, E están sobre la misma línea. Prueba que la línea HM es perpendicular a la cuerda común de los circuncírculos de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADE$.*

Problema 38 (SMO 2020/5)**.** *En el triángulo $\triangle ABC$, sea E y F puntos sobre los lados AC y AB, respectivamente, tales que $BFEC$ es cíclico. Sean las líneas BE y CF concurrentes en P, y M y N los puntos medios de BF y CE, respectivamente. Si U es el pie de la perpendicular desde P hasta BC, y los circuncírculos de los triángulos $\triangle BMU$ y $\triangle CNU$ se encuentran en un punto diferente de U, prueba que AP, BM y CN son concurrentes.*

5.2 Linearity of PoP

En general, cuando trabajamos con potencia de punto casi siempre ignarmos la potencia negativa, este no es el caso, aquí si tenemos que considerar potencia positiva, negativa e igual a 0.

> **Potencia de punto con respecto a dos circunferencias.**
> La definiremos como $\mathbb{P}(P, \omega, \gamma)$ cuyo valor es $\text{Pow}(P, \omega) - \text{Pow}(P, \gamma)$.

Y pues hasta aquí todo bien, no tiene nada de excepcional como para verlo. A menos que podamos manipular el punto P y cambiarlo por otros puntos, esto es:

Teorema 5.8: Linearity of Power of Point

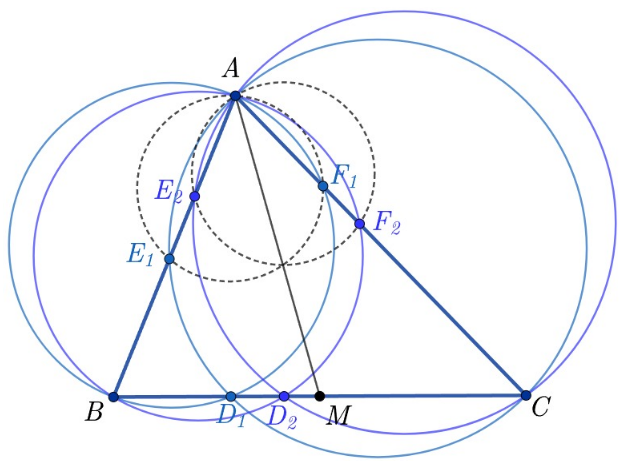
$\mathbb{P}$ es lineal, es decir, supongamos que $X - P - Y$ en ese orden, y $XP = 1 - \lambda$ y $PY = \lambda$, entonces

$$\mathbb{P}(P, \omega, \gamma) = \lambda \cdot \mathbb{P}(X, \omega, \gamma) + (1 - \lambda) \cdot \mathbb{P}(Y, \omega, \gamma)$$

Su demostración es usando el teorema de Stewart en XY y los centros de los círculos. Y esto último es lo padre, las ideas al usar esto es igualar $\mathbb{P}$ a 0, tomar un punto sobre un segmento y de ahí aplicar Linearity of PoP para trabajar más fácilmente, considerar círculos de radio 0. Con los siguientes problemas vas a agarrar vuelo.

Problema de Práctica 5.6: ELMO Shortlist 2013/G3

En $\triangle ABC$, un punto D cae sobre BC. El circuncírculo de ABD intersecta a AC en F (distinto de A), y el circuncírculo de ADC intersecta a AB en E (distinto de A). Prueba que, mientras D varía, el circuncírculo de AEF siempre pasa por un punto fijo distinto de A, y ese punto cae en la mediana de A a BC.



Demostración. Sea M el punto medio de BC. Basta con desmostrar que AM es el eje radical de todos los círculos $\odot(AEF)$, o en otras palabras,
$\mathbb{P}(M, \odot(AE_1F_1), \odot(AE_2F_2)) = 0$. Véase que $\mathbb{P}(M, \odot(AE_1F_1), \odot(AE_2F_2)) =$

$$\frac{1}{2}\mathbb{P}(B, \odot(AE_1F_1), \odot(AE_2F_2)) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C, \odot(AE_1F_1), \odot(AE_2F_2)) =$$

$$\frac{1}{2}(\text{Pow}(B, \odot(AE_1F_1)) - \text{Pow}(B, \odot(AE_2F_2)) + \text{Pow}(C, \odot(AE_1F_1)) - \text{Pow}(C, \odot(AE_2F_2)))$$

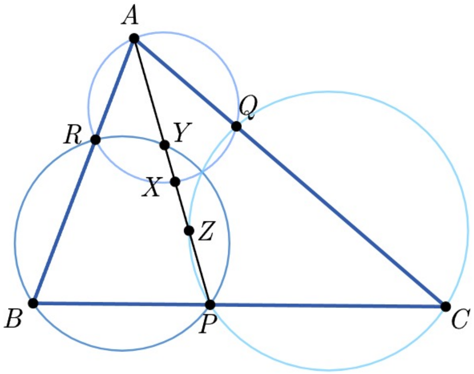
$$= \frac{1}{2}(BE_1 \cdot BA - BE_2 \cdot BA + CF_1 \cdot CA - CF_2 \cdot CA) =$$

$$\frac{1}{2}(\text{Pow}(B, \odot(AE_1C)) - \text{Pow}(B, \odot(AE_2C)) + \text{Pow}(C, \odot(AF_1C)) - \text{Pow}(B, \odot(AF_2C)))$$

$$= \frac{1}{2}(BD_1 \cdot BC - BD_2 \cdot BC + CD_1 \cdot BC - CD_2 \cdot BC) = \frac{1}{2}(BC^2 - BC^2) = 0. \blacksquare$$

Problema de Práctica 5.7: USAMO 2013/1

En el triángulo ABC los puntos P, Q, R están sobre los BC, AC, AB respectivamente. Sea $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ denotan los circuncírculos de los triángulos AQR, BRP, CPQ, respectivamente. Dado que AP intersecta a $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ en X, Y, Z respectivamente, demuestra que $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$



Demostración. Considerando a $\mathbb{P}(X, A, \omega_A) = \text{Pow}(X, A) - \text{Pow}(X, \omega_A)$, donde X es cualquier punto en en plano y considerando $BP = 1 - \lambda$ y $PC = \lambda$, se tiene que

$$\mathbb{P}(P, A, \omega_A) = \lambda \cdot \mathbb{P}(B, A, \omega_A) + (1-\lambda)\mathbb{P}(C, A, \omega_A)$$

$$PA^2 - PA \cdot PX = \lambda(BA^2 - BR \cdot BA) + (1-\lambda)(CA^2 - CQ \cdot CA)$$

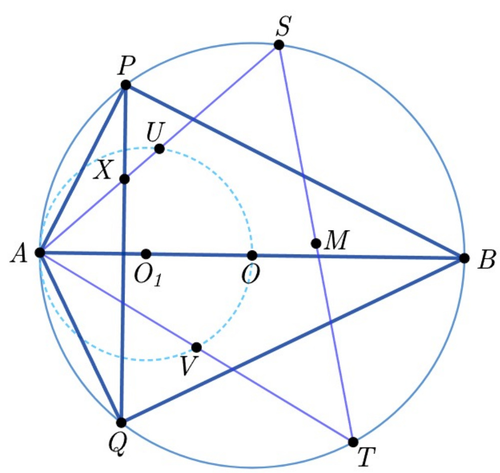
$$PA \cdot AX = \lambda(BA \cdot AR) + (1-\lambda)(CA \cdot AQ)$$

$$\implies \lambda = \frac{PA \cdot AX - CA \cdot AQ}{BA \cdot AR - CA \cdot AQ} = \frac{PA \cdot AX - AP \cdot AZ}{AP \cdot AY - AP \cdot AZ} = \frac{AX - AZ}{AY - AZ} = \frac{XZ}{YZ}$$

$$\frac{BP}{PC} = \frac{(1-\lambda)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} - 1 = \frac{1}{\frac{XZ}{YZ}} - 1 = \frac{YZ}{XZ} - 1 = \frac{XY}{XZ}. \blacksquare$$

Problema de Práctica 5.8: USAMO 2015/2, USAJMO 2015/3

El cuadrilátero $APBQ$ esta inscrito en el círculo ω con $\angle P = \angle Q = 90°$ y $AP = AQ < BP$. Sea X un punto variable en el segmento PQ. La línea AX intersecta ω de nuevo en S (distinto de A). El punto T cae sobre el arco AQB de ω tal que XT es perpendicular a AX. M es el punto medio de la cuerda ST. Mientras X varia sobre el segmento PQ, muestra que M se mueve por un círculo.



Demostración. Sea O el centro del círculo $APBQ$ y U, V son las intersecciónes de AS y AT. Es fácil de ver que A es centro de homotecia de $\odot(APBQ)$ y $\odot(AUV)$ con ratio $\frac{1}{2} \implies U, V$ son puntos medios de AS y AT respectivamente. Ahora, aplicando Linearity of PoP en M se tiene que

$$\text{Pow}(M, \odot(AUV)) + MS \cdot MT = \mathbb{P}(M, \odot(AUV), \odot(APBQ))$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}(S, \odot(AUV), \odot(APBQ)) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(T, \odot(AUV), \odot(APBQ))$$
$$= \frac{1}{2}(AS \cdot US - 0 + AT \cdot VT - 0) = \frac{1}{4}(AS^2 + AT^2)$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Pow}(M, \odot(AUV)) = \frac{1}{4}(AS^2 + AT^2) - MS \cdot MT = \frac{1}{4}(AS^2 + AT^2 - ST^2)$$

Por ley de cosenos se tiene que $AS^2 + AT^2 - ST^2 = 2 \cdot AS \cdot AT \cdot \sin\angle SAT = 2 \cdot AS \cdot AT \cdot \frac{AX}{AT} = 2 \cdot AS \cdot AX \Longrightarrow O_1M^2 - \frac{AO^2}{4} = \mathrm{Pow}(M, \odot(AUV)) = 2 \cdot AS \cdot AX$. Pero es fácil de ver que $\triangle APX \sim \triangle APS \Longrightarrow AS \cdot AX = AP^2 \Longrightarrow O_1M^2 - \frac{AO^2}{4} = \mathrm{Pow}(M, \odot(AUV)) = 2AP^2$. Entonces O_1M es constante, por lo que M varia en un círculo de centro O_1

5.2.1 Problemas

Problema 39. *En el triángulo ABC, sean E y F puntos en los lados AC y BC, respectivamente, tales que los segmentos AE y BF tienen igual longitud. Sea $\odot(ACF)$ y $\odot(BCE)$ la segunda intersección de estas circunferencias. Prueba que CD biseca AC.*

Problema 40 (USAJMO 2012/1)**.** *Dado un triángulo ABC, sean P y Q puntos en los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $AP = AQ$. Sea S la intersección distinta de B del segmento BC con la circunferencia que pasa por B, P, y Q. Si $\angle BPS = \angle PRS$ y $\angle CQR = \angle QSR$, prueba que P, Q, R, y S son concíclicos.*

Problema 41 (Taiwán TST 2016)**.** *Sea O el circuncentro del triángulo ABC, y sea u la circunferencia del triángulo BOC. La línea AO intersecta u en el punto G, diferente de O. Sea M el punto medio del segmento BC, y la bisectriz perpendicular de BC interseca u en los puntos O y N. Prueba que la longitud del segmento AN es el eje radical de las circunferencias del triángulo $\triangle OMG$, y que el diámetro de u biseca AN.*

Problema 42. *Dado un triángulo ABC inscrito en $\odot(O)$. Sea M el punto medio de BC, H el ortocentro de $\triangle ABC$. La circunferencia de nueve puntos de ABC se interseca con la circunferencia circunscrita de $\triangle AM$ en un punto adicional P. Prueba que P yace sobre el eje radical de $\odot(BOC)$ y la circunferencia de nueve puntos de $\triangle ABC$.*

Problema 43 (USA TSTST 2015/2)**.** *Sea $\triangle ABC$ un triángulo escaleno. Sean K_a, I_a, y M_a los respectivos puntos de tangencia del incírculo con BC, el exírculo opuesto a A con BC, y el punto medio de BC. La circunferencia de AK_aI_a intersecta AM_a en un punto adicional X_a, diferente de A. Define X_b y X_c análogamente. Prueba que el circuncentro del triángulo $X_aX_bX_c$ yace sobre la línea de Euler de $\triangle ABC$.*

Problema 44. *Sean u y v dos circunferencias tangentes en un punto A. Sean B, C puntos en u, y trazamos las tangentes BY, CZ a v. Prueba que $\frac{AB}{AC} = \frac{BZ}{CY}$.*

Problema 45 (RMM SL 2017 G3 (muy difícil))**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean P y Q puntos variables dentro de este cuadrilátero tales que $\angle APB = \angle CPD = \angle AQB = \angle CQD$. Demostrar que las líneas PQ obtenidas de esta manera pasan todas por un punto fijo, o son todas paralelas.*

Problema 46 (Inspirado en el problema anterior)**.** *En el trapecio $ABCD$ con bases AB y CD, se eligen puntos P y Q tales que $\angle BPC = \angle BQC = 180° - \angle DPA = 180° - \angle DQA$. Si $U = AC \cap BD$ y $V = BC \cap DA$, demostrar que PQ pasa por la proyección de U sobre la línea que pasa por V y es paralela a AB.*

Problema 47 (Ukraine TST 2013/6)**.** *Sean A, B, C, D, E, F seis puntos, sin tres colineales y sin cuatro concíclicos. Sean P, Q, R los puntos de intersección de las mediatrices de pares de segmentos (AD, BE), (BE, CF), (CF, DA), y P', Q', R' los puntos de intersección de las mediatrices de pares de segmentos (AE, BD), (BF, CE), (CA, DF). Mostrar que $P \neq P'$, $Q \neq Q'$, $R \neq R'$ y demostrar que PP', QQ', RR' son concurrentes o todas paralelas.*

Problema 48 (IMO 2019/6)**.** *Sea I el incentro del triángulo acutángulo ABC con $AB \neq AC$. La circunferencia inscrita ω de ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. La línea que pasa por D perpendicular a EF se encuentra con ω en R. La línea AR se encuentra con ω nuevamente en P. Las circunferencias circunscritas de los triángulos PCE y PBF se encuentran nuevamente en Q. Demostrar que las líneas DI y PQ se encuentran en la línea que pasa por A perpendicular a AI.*

6 Concurrencia y colinealidad

Esta sección es bastante extensa, puesto que hay varias formas de demostrar concurrencia y colinealidad, además de que hay varios teoremas que se pueden usar para resolver problemas. Entre los más sencillos están:

- Si se cumple que $A - B - C$ y $B - C - D$ (no necesariamente en ese orden) entonces A, B, C, D son colineales.
- Si $\measuredangle ABC = \measuredangle A'BC$ entonces A, A', B.
- $A - B - C$ son colineales si y solo si $AB + BC = AC$ (Desigualdad triangular).
- Tres líneas AB, CD, EF son concurrentes si y solo si los puntos A, B y $CD \cap EF$ son colineales.
- Probar que los puntos que tratamos de demostrar caen sobre una línea en particular (alguna paralela, reflexión, eje radical, etc.).
- Probar que las líneas que tratamos de demostrar son concurrentes pasan por un punto en particular.
- Usar una combinación de lo anteriormente mencionado.

También están cosas que ya vimos antes, como ejes radicales u homotecia. De lo último, hay una cosa que quiero agregar. Una composición de dos funciones f, g es aplicar f sobre g, es decir, $f \circ g = f(g(x))$.

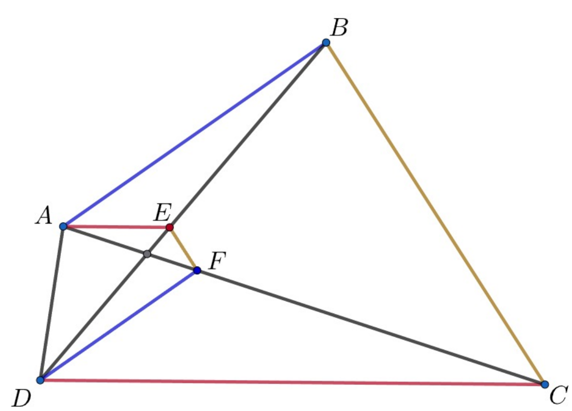
Composición de homotecias.

- La composición de dos homotecias con centro O y razones $\kappa, \varkappa$ es una homotecia de centro O y razón $\kappa \cdot \varkappa$.
- La composición de dos homotecias con centros distintos O, P y razones $\kappa, \varkappa$ es una homotecia de centro Q sobre OP y razón $\kappa \cdot \varkappa$.

Problema de Práctica 6.1:

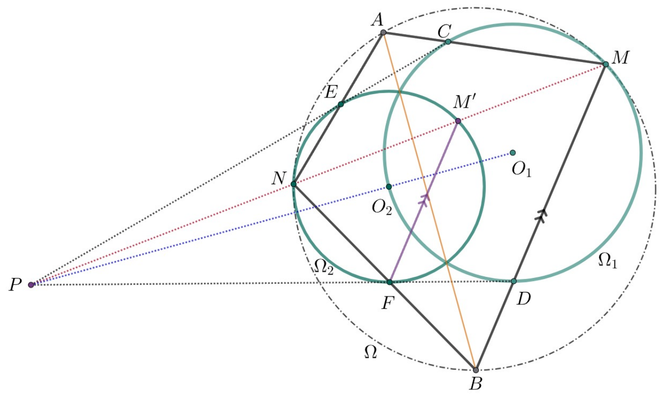
Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea $E \in DB, F \in AC$ tal que $AE \parallel CD$ y $DF \parallel AB$. Demuestra que $EF \parallel BC$.

Demostración. Sea P la intersección de las diagonales; consideramos la homotecias $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ con centro en P y razón $k_1 = \frac{PE}{PD} = \frac{PA}{PC}, k_2 = \frac{PD}{PB} = \frac{PF}{PA}$, entonces la homotecia $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$ tiene centro en P y razón $k = \frac{PF}{PB} = \frac{PE}{PC}$, por lo que $\mathcal{H}(BC) = FE$ y esto implica lo del problema. ■



Problema de Práctica 6.2: Mathematical Excalibur v9n4

Dos círculos Ω_1, Ω_1 son internamente tangentes al círculo Ω en M y N, respectivamente, y el centro de Ω_2. El eje radical de los círculos Ω_1 y Ω_2 insercta a Ω en A y B. MA y MB intersectan Ω_1 en C y D, respectivamente. Demuestra que Ω_2 es tangente a CD.



Demostración. Sean $E := AN \cap \Omega_2, F := BN \cap \Omega_2$; r es el radio de Ω; O_1, O_2 y r_1, r_2 son los centros y radios de Ω_1, Ω_2, respectivamente. Tomando las homotecias $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ con centros en M, N con razones $k_1 = \frac{r}{r_2}, k_2 = \frac{r_1}{r}$, entonces la homotecia $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$ tiene centro en algún punto sobre DF y razón $k = k_1 k_2 = \frac{r_1}{r_2}$, debido a que $\mathcal{H}(F) = \mathcal{H}_1(\mathcal{H}_2(F)) = \mathcal{H}_1(B) = D$, sabemos que P, el centro de homotecia (exterior) de $\mathcal{H}$ tal que $\Omega_2 \mapsto \Omega_1$, es la intersección de MN y DF.
Por otro lado, véase que B por definición cae en en eje radical de Ω_1, Ω_2, por lo que $BF \cdot BN = \text{Pow}(B, \Omega_2) = \text{Pow}(B, \Omega_1) = BD \cdot BM$, por ende $MNFD$ es cíclico.
Sea $M' := \mathcal{H}(M)$, por cuestiones de homotecia implica que $\frac{PM'}{PM} = \frac{PF}{PD}$ (1); además por $PN \cdot PM = \text{Pow}(P, \odot(MNFD)) = PF \cdot PD \Longrightarrow PN \cdot PM = PF \cdot PD$ (2).
Multiplicando (1) y (2) tenemos que $PN \cdot PM' = PF^2$, por lo que PF es tangente a Ω_2 y por la homotecia $\mathcal{H}$, la línea $P - F - D$ es tangente a Ω_1 en D. Análogamente se demuestra que $P - E - C$ es la segunda tangente a ambos círculos. Finalmente, considerando que $P - O_2 - O_1$ es la bisectriz de $\angle DPC$, por cuestiones de tangencia $DPCO_1$ es cíclico, y $O_1O_2 = O_1C = O_1D$ (esto es una consecuencia del dato del problema) entonces necesariamente O_2 tiene que ser el incentro de $\triangle DPC$, por tanto CD es tangente a Ω_2. ■

6.1 Ley de senos y Ratio Lemma

Ley de senos es una de las cosas que son vitales de dominar, esto es porque relaciona ángulos y lados que, como ya vimos, es demasiado útil.

Teorema 6.1: Ley de Senos

En cualquier triángulo ABC con circunradio R se cumple que:

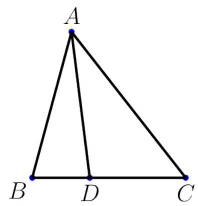
$$\frac{BC}{\sin(\angle A)} = \frac{AC}{\sin(\angle B)} = \frac{AB}{\sin(\angle C)} = 2R$$

Y con esto quiero meter dos propiedades muy importantes, (muy útil) la primera dice: Si $\alpha + \beta = \theta + \gamma$ y $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\theta}{\sin\gamma}$ entonces $\alpha = \theta$ y $\beta = \gamma$.
La segunda propiedad es mucho más sencilla: $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$, por lo que el seno de ángulos suplementarios es el mismo y justamente es la forma de demostrar el siguiente teorema, llamado en español Teorema de la Bisectriz extendida (si $\angle BAD = \angle CAD$ se le conoce simplemente por Teorema de la Bisectriz).

Teorema 6.2: Boring Ratio Lemma

Sea ABC cualquier triángulo y D un punto en BC. Entonces se tiene que

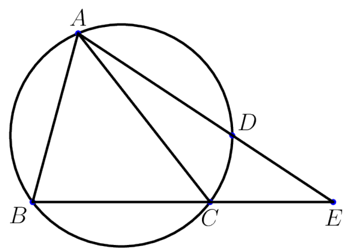
$$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD}$$



Se llama "aburrido" porque es una relación trigonométrica directa, sin embargo, no hay que subestimarlo, este teorema por si solo es suficiente para demostrar buena parte de los problemas.

Teorema 6.3: Cool Ratio Lemma

Sea ω un círculo que pasa por B y C. Una línea intersecta a ω en A, D y a BC en E. Entonces $\frac{BE}{CE} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{BD}{CD}$



Demostración. $\frac{BE}{CE} = \frac{d(B,AD)}{d(C,AD)} = \frac{[ABD]}{[ACD]} = \frac{\frac{1}{2}\sin(\angle ABD)BA \cdot BD}{\frac{1}{2}\sin(\angle ACD)CA \cdot CD} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{BD}{CD}$. $\square$

Aquí $d(X, Y)$ representa la distancia entre X y Y, donde o bien ambos son puntos, o uno es un punto y el otro una línea, para no complicarla mucho.

Apartir de este teorema es que creamos una herramiento que hace más diregible y fáciles de hacer las cuentas ya que se hacen más obvias y fáciles.

Quiero recalcar que es una herramienta, bien se puede usar su expresión en fracción (y es más seguro a la hora de escribir un problema) por lo que las propiedades que tiene se tendrían que demostrar.

Teorema 6.4: Función de Cool Ratio Lemma

Sea X, Y puntos en el plano y definimos $f(P) = \pm\frac{XP}{YP}$, es negativo cuando P esta sobre el segmento XY o debajo de la línea XY, y positivo en caso contrario. Entonces,

- Para A, B ambos sobre un círculo en común con X, Y o ambos en XY, $f(A) = f(B)$ si y solo si $A = B$
- Si $ABXY$ es cíclico y AB intersecta XY en C, entonces $f(A) \cdot f(B) = f(C)$

Demostración.

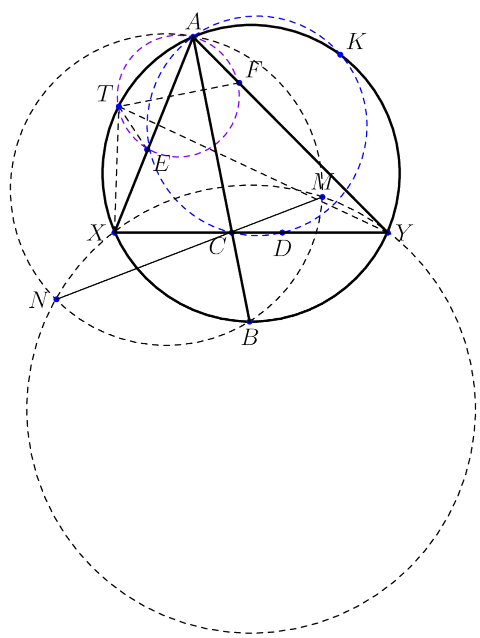
- f es creciente o decreciente a lo largo de cualquier arco, y los arcos opuestos tienen signos opuestos. El caso de la línea es similar.
- Es exactamente Cool Ratio Lemma.

Bueno, antes de pasar a resolver los míticos problemitas, vamos a ver todas las propiedades de esta función para que podamos resolver todo así de fácil.

Propiedades de f. A, B, X, Y estan definidos como anteriormente se hizo.

- $f(P) = -1$ si y solo si P es el punto medio de XY.
- Si P es el punto al infinito de XY entonces $f(P) = 1$, o de otra forma, si $AB \parallel XY$ entonces $f(A) \cdot f(B) = 1$.
- Sean C, D puntos sobre XY y K en $\odot(XBYA)$, entonces $AKCD$ es cíclico si y solo si $f(A) \cdot f(K) = f(C) \cdot f(D)$.
- Sean $ABXY$ y $MNXY$ dos cuadriláteros cíclicos distintos, entonces $ABMN$ es cíclico si y solo si $f(A)f(B) = f(M)f(N)$.
- Sea T un punto sobre $\odot(AXY)$, E y F son las intersecciones de algún círculo que pasa por A, T con AB y AC, respectivamente, entonces $f(T) = \frac{XE}{YF}$.

El siguiente dibujo aplica tanto para todo lo mencionado arriba.



Demostraciones.

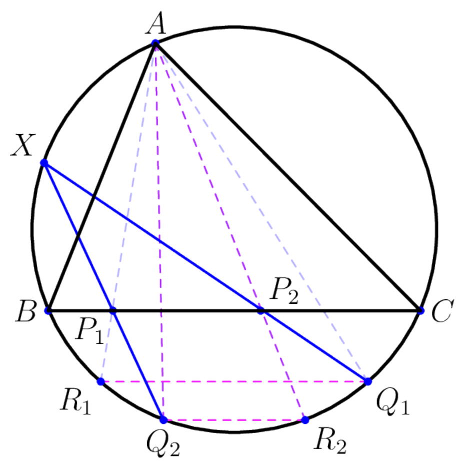
- Trivial
- Trivial
- Teorema de Reim
- Por la segunda propiedad de Teorema 4.4
- Rotohomotecia en T

Perfecto, vamos con los problemas. En los siguientes dos problemas vamos a usar a $f(X)$ como $\pm\frac{BX}{CX}$ (normalmente, si se usa esta función es sobre el segmento BC del típico triángulo ABC).

Problema de Práctica 6.3:

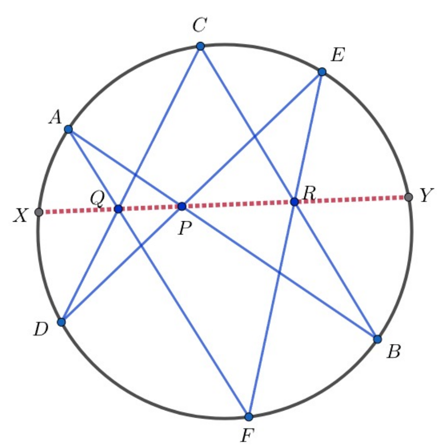
Sea ABC un triángulo y sea P_1 y Q_1 puntos en BC y sobre el circuncírculo de ABC, respectivamente, tal que $\angle BAP_1 = \angle CAQ_1$. Los puntos P_2 y Q_2 tienen una propiedad similar. Prueba que P_1Q_2 y P_2Q_1 concurren en el circuncírculo de ABC.

Demostración. Véase que basta con demostrar que $f(P_1)f(Q_1) = f(P_2)f(Q_2)$. Sea $R_1 = AP_1 \cap \odot ABC \implies f(A)f(R_1) = f(P_1)$, por la condición de ángulos del problema es fácil de ver que $Q_1R_1 \parallel BC \implies f(Q_1)f(R_1) = 1$. Por tanto $f(P_1)f(Q_1) = \frac{f(A)f(R_1)}{f(R_1)} = f(A)$, análogamente para $f(P_2)f(Q_2)$, por lo que se cumple justamente lo primero que dijimos. ■



Teorema 6.5: Teorema de Pascal

Sean los puntos A, B, C, D, E y F en una circunferencia. Sean $P := AB \cap DE, Q := BC \cap EF, R := CD \cap FA$. Demuestre que P, Q y R son colineales.



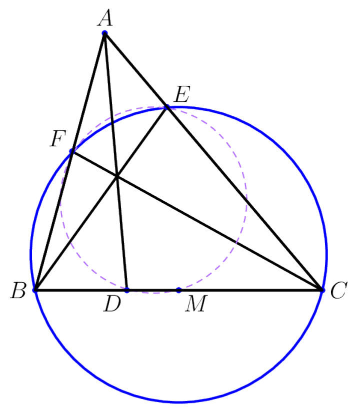
Demostración: Sean X, Y los puntos de intersección de RQ con $\odot(ABCDEF)$, entonces considerando la función $f(P) = \pm\frac{XP}{YP}$. Véase que demostrar $f(A)f(B) = f(P) = f(D)f(E)$ implica lo pedido en el problema.
Por propiedades de f tenemos que $f(A)f(F) = f(Q) = f(C)f(D)$ y $f(E)f(F) = f(R) = f(C)f(B) \implies \frac{f(A)}{f(D)} = \frac{f(C)}{f(F)} = \frac{f(E)}{f(B)} \implies f(A)f(B) = f(P) = f(D)f(E)$, justamente como queríamos. ■
En realidad, Pascal se aplica para cualquier cónica, no únicamente para circunferencias, sin embargo, aplicaciones de cónicas van a una dirección para lo que este documento no fue hecho. En la sección Geometría

Proyectiva, hablo un poco más de Pascal.

Problema de Práctica 6.4:

En el triángulo ABC, toma los puntos D, E y F sobre los segmentos BC, AC y AB, respectivamente, tal que AD, BE, CF concurren y $BCEF$ es cíclico. Demuestra que el circuncírculo de DEF pasa por el punto medio de BC.

Demostración. Nótese que es suficiente con probar $f(E) \cdot f(F) = f(D) \cdot f(M) = -f(D)$. Por teorema de Ceva se tiene que $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \implies f(D) = -\frac{FB}{AF} \cdot \frac{EA}{CE}$. Por criterio AA se tiene que $AEB \sim AFC$, tenemos que $\frac{EA}{AF} = \frac{BE}{CF} \implies -f(D) = \frac{FB}{AF} \cdot \frac{EA}{CE} = \frac{BE}{CF} \cdot \frac{FB}{CE} = f(E) \cdot f(F)$. ■



6.1.1 Problemas

Problema 49. *Puntos distintos B, C, X_1, X_2, Y_1, Y_2 pertenecen al círculo ω. Demuestra que*

$$\frac{BX_1}{CX_1} = \frac{BX_2}{CX_2} \text{ y } \frac{BY_1}{CY_1} = \frac{BY_2}{CY_2}$$

si y solo si las intersecciones $X_1Y_1 \cap X_2Y_2$ y $X_1Y_2 \cap X_2Y_1$ están en la línea BC.

Problema 50. *Los puntos D y E se seleccionan en la circunferencia de $\triangle ABC$. Las líneas AD y AE intersectan BC en X y Y. Sean D' y E' las reflexiones de D y E respecto al eje perpendicular al segmento BC. Demuestra que las líneas $D'Y$ y $E'X$ se intersectan en la circunferencia de $\triangle ABC$.*

Problema 51. *Sea ABC un triángulo con circunferencia circunscrita ω, sean E y F puntos en los segmentos AC y AB, respectivamente, y sea M el pie de la altura desde el circuncentro de ABC hasta EF. La línea AM intersecta ω en $D \neq A$, y se supone que EF, BC, y la tangente a ω en D son concurrentes. Demuestra que M es el punto medio de EF.*

Problema 52. *Sea ABC un triángulo con ortocentro H. Las líneas AH, BH, CH intersectan los lados opuestos en D, E, F, respectivamente, y sea D' la reflexión de D respecto al punto medio de BC. Demuestra que si un punto P en EF satisface que $AP \parallel BC$, entonces las líneas HP y AD' se intersectan en la circunferencia de AEF.*

Problema 53. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Considera pares de puntos P, Q de la diagonal AC tales que los rayos BP y BQ son simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo B. Demuestra que el centro de la circunferencia circunscrita de PDQ está en una línea fija.*

Problema 54. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Sean AA_1 y CC_1 sus alturas, B_0 el punto de intersección de la altura desde B y la circunferencia circunscrita de $\triangle ABC$, y Q el punto de intersección de las circunferencias circunscritas de $\triangle ABC$ y $\triangle A_1C_1B_0$, distinto de B_0. Demuestra que BQ es la simediana de $\triangle ABC$, es decir, que se cumple la relación:*

$$\frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{CB}.$$

Problema 55. *Sean $BCDEF$ los vértices de un pentágono cíclico. Supongamos que las rectas DE y DF intersectan a BC en los puntos X e Y, respectivamente. Sea Z el punto de intersección de la circunferencia circunscrita del triángulo DXY y la circunferencia circunscrita del pentágono. Demuestra que los puntos E, F, la reflexión de Z respecto a la recta BC, y la reflexión de D respecto al punto medio de BC son concíclicos.*

Problema 56. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y sean X e Y puntos sobre su circunferencia circunscrita. Supongamos que las rectas AB y CD intersectan a XY en los puntos P_1 y P_2, respectivamente, que las rectas AC y BD intersectan a XY en los puntos R_1 y R_2, respectivamente, y que las rectas AD y BC intersectan a XY en los puntos S_1 y S_2, respectivamente. Demuestra que existe un punto T sobre XY tal que se cumple la siguiente relación:*

$$TX \cdot TY = TP_1 \cdot TP_2 = TR_1 \cdot TR_2 = TS_1 \cdot TS_2.$$

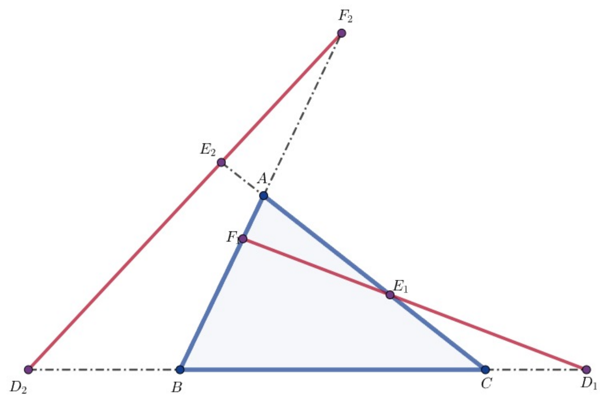
6.2 Menelao-Ceva

Esta parte esta basada, en su mayoría, en la lista de problemas que el profesor Parres (delegado de Puebla) envía como entrenamiento, por lo que la mayoría de problemas son de un nivel más fácil, hay pocos problemas internacionales y cuenta con soluciones (para algunos) y pistas.

Teorema 6.6: Teorema de Menelao

Considerando los puntos A, B, C, vértices del triángulo ABC, y los puntos D, E, F que se encuentran en las rectas BC, AC, AB, entonces los puntos D, E, F estarán en la misma recta si y solo suceda que:

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{FA}} = -1$$



Nota: El hecho de que sean segmentos dirigidos nos dice que siempre hay una cantidad impar de los puntos (a ser colineales) fuera del triángulo. Si no consideramos a los segmentos como dirigidos, entonces el producto de razones es igual a 1.

Al intentar resolver con Menelao hay que buscar el triángulo ABC por el cual, nuestros puntos D, E, F que pasen por sus rectas.

Como tip para aprenderse Menelao es: Inicia en cualquier vértice del triángulo y después nos movemos a algún otro punto sobre las rectas del triángulo original (de los que queremos que sean colineales), desde ese punto nos vamos a otro vértice y así hasta llegar donde comenzamos.

Problema de Práctica 6.5:

Un triángulo ABC con ω circunscrito. Sea X la intersección de la recta BC con la tangente ω en A, defina Y y Z como semejantes. Demuestre que X, Y, Z son colineales.

Demostración: Nótese que $\frac{XB}{XC} = \frac{XB \cdot XC}{XC^2} \overset{\text{Pow}(X,\omega)}{=} \frac{XA^2}{XC^2}$; por ley de senos en $\triangle ACX$ se tiene que $\frac{XA}{XC} = \frac{\sin(\angle ACX)}{\sin(\angle XAC)} = \frac{\sin(\angle YAX)}{\sin(\angle BAC)}$ (1).

Por otro lado, debido a que AX es tangente a ω en A, entonces $\angle XAB = \angle XCA$; por lo que $\angle YAX = 180^o - \angle XAB - \angle BAC = 180^o - \angle ACB - \angle BAC = \angle ABC \implies \angle YAX = \angle ABC$ (2).

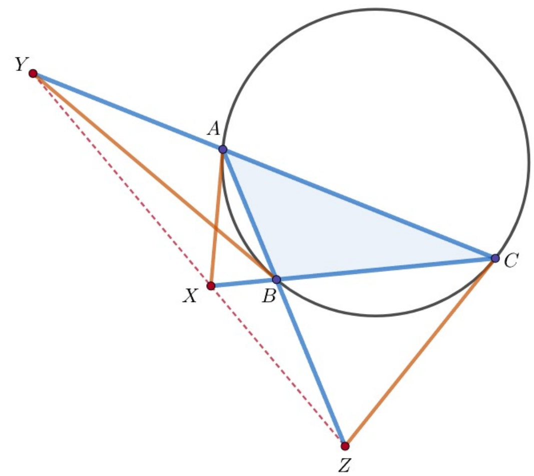
Por (1) y (2) tenemos que $\frac{XA}{XC} = \frac{\sin(\angle YAX)}{\sin(\angle BAC)} = \frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle BAC)} \implies \frac{XB}{XC} = \left(\frac{\sin(\angle ABC)}{\sin(\angle BAC)}\right)^2$.

Haciendo un proceso análogo para $\frac{CY}{YA}, \frac{AZ}{ZB}$ se tiene que $\frac{CY}{YA} = \left(\frac{\sin(\angle ACB)}{\sin(\angle BAC)}\right)^2$ y $\frac{AZ}{ZB} = \left(\frac{\sin(\angle CAB)}{\sin(\angle ABC)}\right)^2$.

Multiplicando las tres fracciones anteriores se tiene que

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = \frac{\sin(\angle ABC)^2}{\sin(\angle BAC)^2} \cdot \frac{\sin(\angle ACB)^2}{\sin(\angle BAC)^2} \cdot \frac{\sin(\angle CAB)^2}{\sin(\angle ABC)^2} = 1$$

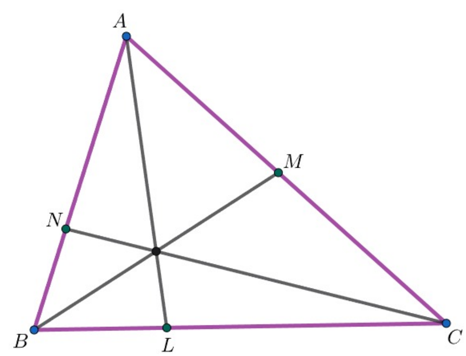
Por teorema de Menelao, los puntos X, Y, Z son colineales. ■
Segunda solución: Por teorema de Pascal en los puntos $AABBCC$ es cierto. ■.



Teorema 6.7: Teorema de Ceva

Sean A, B y C los vértices de un triángulo cualquiera y L, M y N puntos en sus respectivos lados opuestos no sobre sus vértices. Las rectas AL, BM y CN son paralelas o concurrentes (pasan por un mismo punto) si y solo si

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

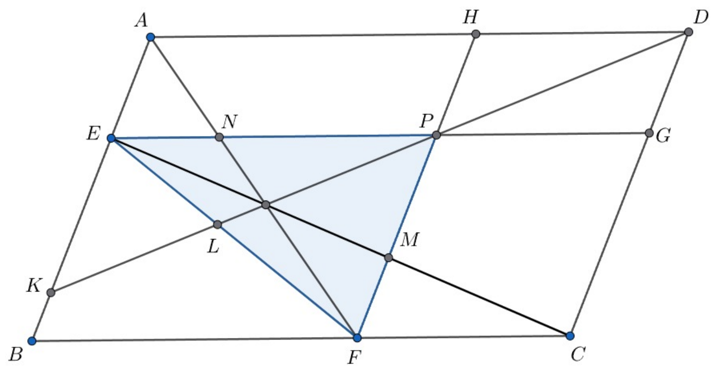


A los segmentos AL, BM, CN se les conoce por el nombre de cevianas.

Problema de Práctica 6.6:

En el paralelogramo ABCD, E, F, G y H son puntos en AB, BC, CD y DA, respectivamente, tales que $EG \parallel BC$ y $HF \parallel AB$. Sea P el punto de intersección de EG y HF. Demuestre que las rectas AF, CE y DP son concurrentes.

Demostración: Sean $M := HF \cap EC, N := AF \cap EC, L := EF \cap DP$ y $K := AB \cap DL$. Nótese que $\frac{EM}{MP} \cdot \frac{PN}{NF} \cdot \frac{FL}{LE} = \frac{AN}{NF} \cdot \frac{EP}{FC} \cdot \frac{PF}{EK} = \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{EB}{EK} = \frac{AE}{EK} \cdot \frac{BF}{FC} = \frac{DG}{EK} \cdot \frac{EP}{PG} = 1$. Todos los cambios de fracciones en las ecuaciones anteriores son respectivos, y son ciertos por semejanza entre paralelas.
Por lo tanto, por el Teorema de Ceva en $\triangle PEF$, las rectas NF, ME y PL son concurrentes. ■



Y versión con ángulos, con la que podemos juntar con el Teorema de la bisectriz, Boring Ratio Lemma o trigonometría en general, para terminar un problema.

Teorema 6.8: Teorema de Ceva trigonométrico

AD, BE, CF son cevianas concurrentes o paralelas si y solo si

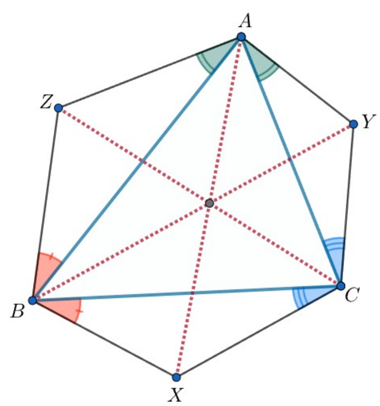
$$\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle CAD}\cdot\frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle ABE}\cdot\frac{\sin\angle ACF}{\sin\angle BCF}=1$$

Teorema 6.9: Teorema de Jacobi

Sea $AYCXBZ$ sea un hexágono con

$$\angle ZAB=\angle YAC, \angle YCA=\angle XCB, \text{y } \angle XBC=\angle ZBA.$$

Demuestre que las diagonales $\overline{AX}$, $\overline{BY}$ y $\overline{CZ}$ son concurrentes.



Demostración: Nuestro objetivo es demostrar $\frac{\sin(\angle ZCB)}{\sin(\angle ZCA)}\cdot\frac{\sin(\angle XAB)}{\sin(\angle XAC)}\cdot\frac{\sin(\angle YBA)}{\sin(\angle YBC)}=1$ ya que, gracias al teorema de Ceva trigonométrico, terminaríamos.
Por ley de senos en los triángulos AZC y BZC tenemos que $\frac{ZA}{\sin(\angle ZCA)}=\frac{CZ}{\sin(\angle ZAC)}, \frac{ZB}{\sin(\angle ZCB)}=\frac{CZ}{\sin(\angle ZBC)}$ (respectivamente)
$\Longrightarrow \frac{\sin(\angle ZBC)}{\sin(\angle ZAC)}=\frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{\sin(\angle ZCB)}{\sin(\angle ZCA)}$. Análogamente, tenemos

$$\frac{\sin(\angle XBA)}{\sin(\angle XCA)}=\frac{XC}{XB}\cdot\frac{\sin(\angle XBA)}{\sin(\angle XCA)};\frac{\sin(\angle YCB)}{\sin(\angle YAC)}=\frac{YA}{YC}\cdot\frac{\sin(\angle YCB)}{\sin(\angle YAB)}$$

$$\Longrightarrow\frac{\sin(\angle ZBC)}{\sin(\angle ZAC)}\cdot\frac{\sin(\angle XBA)}{\sin(\angle XCA)}\cdot\frac{\sin(\angle YCB)}{\sin(\angle YAC)}=$$

$$\frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{\sin(\angle ZCB)}{\sin(\angle ZCA)}\cdot\frac{XC}{XB}\cdot\frac{\sin(\angle XBA)}{\sin(\angle XCA)}\cdot\frac{YA}{YC}\cdot\frac{\sin(\angle YCB)}{\sin(\angle YAB)}$$

$$\Longrightarrow 1=\frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{\sin(\angle ZCB)}{\sin(\angle ZCA)}\cdot\frac{XC}{XB}\cdot\frac{\sin(\angle XBA)}{\sin(\angle XCA)}\cdot\frac{YA}{YC}\cdot\frac{\sin(\angle YCB)}{\sin(\angle YAB)}$$

Pero por ley de senos en $\triangle AZB$ tenemos que $\frac{ZA}{ZB}=\frac{\sin(\angle ZBA)}{\sin(\angle ZAB)}$, análogamente, se tiene que $\frac{XB}{XC}=\frac{\sin(\angle XBC)}{\sin(\angle XCB)}$ y $\frac{YC}{YA}=\frac{\sin(\angle YCA)}{\sin(\angle YAC)}\Longrightarrow$

$$\frac{ZA}{ZB}\cdot\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}=\frac{\sin(\angle ZBA)}{\sin(\angle ZAB)}\cdot\frac{\sin(\angle XBC)}{\sin(\angle XCB)}\cdot\frac{\sin(\angle YCA)}{\sin(\angle YAC)}=1$$

Por lo que $\frac{\sin(\angle ZCB)}{\sin(\angle ZCA)}\cdot\frac{\sin(\angle XAB)}{\sin(\angle XAC)}\cdot\frac{\sin(\angle YBA)}{\sin(\angle YBC)}=1$. ■

6.2.1 Problemas

1. **Baricentro.** En cualquier triángulo, las MEDIANAS de él son concurrentes.
2. **Incentro.** En cualquier triángulo, las BISECTRICES de sus ángulos interiores son concurrentes.
3. **Ortocentro.** En cualquier triángulo, las ALTURAS de él son concurrentes.
4. **Circuncentro.** En cualquier triángulo, las MEDIATRICES de sus lados son concurrentes.
5. **Punto de Gergonne.** En el triángulo ABC, si D, E y F son los puntos en los que la circunferencia inscrita a dicho triángulo es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente, muestra que AD, BE y CF son concurrentes.
6. Demuestra que las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo escaleno cortan a sus respectivos lados opuestos en puntos que son colineales
7. Demuestra que las bisectrices interiores de dos ángulos de un triángulo escaleno y la bisectriz exterior del tercer ángulo intersectan a sus “respectivos” lados opuestos en puntos que son colineales.
8. **Recta de Euler.** Demuestra que en cualquier triángulo, el baricentro, el circuncentro y el ortocentro son colineales.
9. Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC. Sean D y E los puntos medios de AB y CH respectivamente. Si F es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos CAH y CBH, demuestra que los puntos D, E y F son colineales.
10. A partir del punto medio de cada uno de los lados de un cuadrilátero cíclico se traza la perpendicular al lado opuesto. Demuestra que estas 4 rectas son concurrentes.
11. **Excentro** Muestra que en cualquier triángulo, las bisectrices exteriores de DOS de sus ángulos y la bisectriz interior del tercer ángulo son concurrentes.
12. Demuestra que los segmentos que unen los vértices de un triángulo con el punto, sobre el lado opuesto a dicho vértice, de tangencia de la circunferencia EXCRITA son concurrentes.
13. Un hexágono convexo $ABCDEF$, en el cual $AB = CD = EF$ y las diagonales AD, BE y CF son concurrentes, está “inscrito” en una circunferencia. Sea P el punto de intersección de AD y CE. Demuestra que $(CP)(CE)^2 = (PE)(AC)^2$.
14. En un triángulo escaleno ABC; la mediana trazada a partir de A, la altura trazada a partir de B y la bisectriz trazada a partir de C, son concurrentes. Obtén una relación entre las MEDIDAS de los lados del triángulo.
15. En el triángulo ABC, sea L el punto medio de BC. Sean M y N sobre los lados AC y AB, respectivamente. Demuestra que AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si BC y MN son paralelas.

16. En el triángulo ABC, cuyo incentro es I, se tiene que $AB < AC$. Sea E en AC tal que $AE = AB$. Sea F en la recta EI, con I entre E y F, tal que $\angle FBI = \angle ABC$. Demuestra que la recta AI, la "perpendicular" a AE que pasa por E y la "bisectriz" de $\angle BFI$ son concurrentes.

17. Sea E el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero cíclico $ABCD$. Si O es el circuncentro del triángulo ABE y P es el ortocentro del triángulo CDE, muestra que E, O y P son colineales.

18. En el triángulo ABC, las cevianas AD, BE y CF son concurrentes. Sean P, Q y R puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, tales que los puntos D, E, F, P, Q y R son "concíclicos". Demuestra que AP, BQ y CR son concurrentes.

19. **T. Van Aubel** En el triángulo ABC, las cevianas AD, BE y CF son concurrentes en el punto P. Demuestra que:
$$\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}$$

20. **Punto de Herón** En el triángulo ABC, se construyen, en el exterior de él, los cuadrados $ACDE$ y $BCFG$. Si P es el pie de la altura, trazada a partir de C, demuestra que AG, BE y CP son concurrentes.

21. Sea L una recta que NO intersecta a los lados del triángulo ABC. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares bajadas desde A, B y C, respectivamente, a L. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares desde D, E y F a las rectas BC, AC y AB, respectivamente. Muestra que DP, EQ y FR son concurrentes.

22. Considera un triángulo ABC. Una circunferencia corta al lado BC en L y L', al lado CA en M y M', al lado AB en N y N'. Demuestra que si AL, BM y CN son concurrentes entonces AL', BM' y CN' también lo son.

23. Una circunferencia, que pasa por los vértices B y C del triángulo ABC, corta otra vez a los lados AB y AC en C' y B' respectivamente. Si H y H' son los ortocentros de los triángulos ABC y $AB'C'$, respectivamente, demuestra que las rectas BB', CC' y HH' son concurrentes.

24. En el paralelogramo $ABCD$, se tiene que $\angle BAD$ es agudo. La circunferencia con diámetro AC corta, nuevamente, a las rectas BC y CD en L y M, respectivamente. Si la tangente, en el punto A, a tal circunferencia intersecta a BD en N, demuestra que L, M y N son colineales.

25. En el triángulo ABC, cuyo incentro es I, sea D en AC tal que $AB = BD$. Sea L el punto medio de DI y sean M y N los puntos en los que la circunferencia inscrita al triángulo BCD es tangente a BD y CD respectivamente. Demuesta que L, M y N son colineales.

6.2.2 Pistas

1. **Baricentro.** Teorema de Ceva

2. **Incentro.** Teorema de Ceva Trigonométrico

3. **Ortocentro.** Propiedades de cíclicos y Teorema de Ceva Trigonométrico

4. **Circuncentro.** Sea O el punto de intersección de dos mediatrices, ¿qué pasa si hacemos la perpendicular al lado restante?

5. **Punto de Gergonne** Teorema de Ceva

6. Teorema de la Bisectriz Generalizado y Teorema de Menelao

7. Teorema de la Bisectriz Generalizado y Teorema de Menelao

8. **Recta de Euler.** Sea G el baricentro, homotecia en G. Otra forma es: Considera que el baricentro divide a las medianas en una razón de $1:2$. Sea G' la intersección de alguna mediana AA' con la recta que une al ortocentro y al circuncentro, concluye que resolver implica desmotrar que $AH = 2A'O$

9. Sea F' la intersección del círculo de diámetro AB con DE, desmuestra que F' y F son el mismo punto

10. Los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo y aparte, las mediatrices cumplen cosas muy similares a las rectas que nos pide el problema ... curioso cuanto menos

11. **Excentro** Teorema de Ceva Trigonométrico

12. Teorema de Ceva

13. ¿Qué propiedades tiene ese héxagono? (Encuentra una forma de construir ese hexágono con regla y compás). Para las medidas usa Teorema de la bisectriz generalizada y Ley de Senos

14. Demasiadas cosas que al parecer solo pasan en un solo triángulo. Usa el problema siguiente

15. Teorema de Ceva y Teorema de Tales

16. Busca un cíclico, determina por donde pasan esas bisectrices y termina encontrando una relación para la recta que nos falta

17. El ortocentro que nos piden pasa por la perpendicular por E. Usa ángulos para demostrar que OE es dicha línea

18. Potencia de punto y Teorema de Ceva

19. **T. Van Aubel** Hacer dos veces Teorema de Menelao

20. **Punto de Herón** Usa muchas veces Ley de Senos y termina usando Teorema de Ceva Trigonométrico

21. Lo vamos a hacer de la manera fea. Sea L una recta que es perpendicular al eje de las x, y pongamos qué C es el punto de origen del plano. Termina el problema con geometría analítica.

22. Lo mismo que en 11.

23. Busca dos puntos que estan implicados en un cíclico, ¿eso que implica? Aplica Reim y termina con homotecia

24. Encuentra una producto de razones que sea constante y que estén relacionados con N. También, otra forma es ver algo similar con N' (la intersección de LM y la tangente en A). Otra solución es tomar harmónicos en C sobre BD.

25. Refleja a D sobre M, N. Considera a E tal que $BE = AB$, encuentra dos cíclicos que pasen por E y termina desmostrando que dos ángulos son iguales y esto implica colinealidad.

6.2.3 Soluciones

1. **Recta de Euler.** Consideramos el triángulo medial y notamos qué es homotetico al triángulo ABC con centro en el baricentro. Por paralelas podemos concluir qué el ortocentro del triángulo medial es el circuncentro de ABC. Por la homotecia nos da la colinealidad y están a razón $1:2$.■

3. Sea F' el punto de intersección de DE con el círculo de diametro AB, considerando el círculo de diámetro CH tenemos que DE es perpendicular a la recta que une los pies de las alturas desde A y B, llámese P, Q respectivamente. Como P, Q también pertenecen al círculo de diámetro AB entonces $DE = DF'$ es mediatriz de PQ. Esto implica que F' es el punto medio del arco $PF'Q \Longrightarrow F' \equiv F$.■

4. Es un hecho medio conocido que el cuadrilátero formado por los puntos medios de cualquier cuadrilátero es un paralelogramo, y por ende la intersección de sus diagonales es el punto medio de las mismas. Aplicando esto al cíclico $ABCD$ (el del problema), la intersección de las diagonales del paralogramo $MNKL$ (los puntos medios), sea P y el centro de $ABCD$ sea O, Q es la reflexión de O sobre P. Sabiendo que, si dos segmentos comparten el mismo punto medio entonces estos forman un paralelogramo, entonces podemos concluir que $MPKO, NPLO$ son paralelogramos. Por esto último, concluimos que las perpendiculares que nos dice el problema pasan por Q.■

9. Como $\triangle BAE$ es isóceles $\Longrightarrow \alpha = \frac{\angle B}{2} = \angle ABI = \angle AEI$. Por dato del problema tenemos que $\angle FBA + \angle ABI = \angle FBI = \angle ABC = \angle ABI + \angle IBC \Longrightarrow \angle FBA = \alpha \Longrightarrow \angle FBA = \angle AEI \Longrightarrow FAEB$ es cíclico. De esto concluimos que la bisectriz de $\angle BFE$ y la de $\angle BAE$ concurren la intersección de la mediatriz de BE con $FAEB$ (en el arco que no esta A), llámese D y justamente esta mediatriz es $AI \Longrightarrow \angle AED = 90°$. Por lo que las rectas que nos piden concurren en D.■

14. Sean D, E los pies de las perpendiculares desde B, C. Definimos P como la intersección de BB' con CE y Q como la intersección de CC' con BD. Por teorema de Reim tenemos que $B'C' \| DE$. Considerando ángulos en $BCB'C'$ y en $BCDE$ tenemos que $BCQP$ es cíclico. Nuevamente por Reim se tiene que $B'C' \| PQ$. Como $CH \| B'H', BH \| C'H'$, entonces se tiene que $\triangle B'H'C'$ y $\triangle PHQ$ son homotéticos, por tanto PC', HH', QB' pasan por el centro de homotecia.■

15. Sea P el otro punto tal que NP es tangente a al círculo de diámetro AC y O es el punto medio de AC, entonces, es fácil de ver que $NO \perp PA$ y ya que $\angle APC = 90° \Longrightarrow PC \parallel NO(= BD)$. Considerando que $-1 = (BD; O, \infty_{BD}) \stackrel{C}{=} (LM; AP)$, por ende $LAMP$ es un cuadrilátero harmónico $\Longrightarrow L - M - N$. ■

16. Sea M', N' las reflexiones de D sobre M, N respectivamente; J es el incentro de $\triangle BCD$ y E es un punto sobre BC tal que $AB = BE$. Por ser reflexiones, M', N' y E cumplen que $JD = JM' = JN' = JE \Longrightarrow M'DN'E$ es cíclico. Ya que $\angle DBE + 2\angle BDE = 180°$ (debido a que $\triangle BDE$ es isóceles) y $180° = \angle BIC + \angle BDJ = \angle BIC + \angle BEJ$ concluimos que $BIM'JE$ es cíclico. Finalmente, $\measuredangle JM'I = \measuredangle JBI = \frac{\measuredangle CBA - \measuredangle CBD}{2} = \frac{\measuredangle BDC - \measuredangle BAC}{2} \stackrel{\text{anguleo}}{=} \measuredangle JM'N' \Longrightarrow I - M' - N'$ y esto implica lo del problema. ■

6.3 Geometría proyectiva

La geometría proyectiva es una rama de la geometría que estudia las propiedades de las figuras que se mantienen invariantes bajo proyecciones.
En lugar de centrarse en medidas como longitudes, ángulos o áreas, se enfoca en las relaciones de alineación (colinealidad), concurrencia, incidencia (pertenencia de un punto a una línea, etc.) y perspectiva.
Con la geometría proyectiva podemos obtener cosas interesantes, por ejemplo "Dos líneas siempre se intersectan", normalmente siempre decimos que esto se cumple a excepción de las paralelas. Sin embargo, pensemos las vías de un tren, son paralelas (o eso espero) pero sin embargo si nos ponemos a ver el horizonte, parece que las vías se juntan. Esta es una forma sencilla de ver que "dos líneas paralelas se intersectan en el infinito", de hecho, se intersectan en el punto al infinito, normalmente denotado como P_∞ o ∞.
También, dejamos de enfocarnos exactamente en el valor de ángulos y longitudes, sino que nos enfocamos en razones que con cierta propiedad se mantienen constantes.

Cross Ratio

Mucha info para que la resuma, de hecho se merece una sección completa para esto, pero en instancia decimos que $(A, B; C, D) = \frac{CA}{CB}\frac{DA}{DB}$, tal que esos puntos son colineales. Sea P un punto fuera de esa línea y ℓ otra línea, entonces $A' := PA \cap \ell$, y así con el resto, $\Longrightarrow (A, B; C, D) = P(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$. Escribir $P(A, B; C, D)$ indica que los puntos A, B, C, D son "proyectados" (pasan por) el punto P. Para mayor claridad de decir sobre qué línea o curva vas a proyectar, puedes agregar dicha figura encima del igual. En este quedaría así $(A, B; C, D) = P(A, B; C, D) \stackrel{\ell}{=} (A', B'; C', D')$, pero esto es mera comodidad, simplemente puedes dejarlo como mostré antes.
Aparte de esto, también vemos un nuevo concepto de ternas harmónicas, que son cuatro puntos colineales A, B, C, D tales que $(A, B; C, D) = -1$, lo que nos lleva a cuadriláteros harmónicos y, propiedades con cevianas concurrentes y bisectrices.
Si buscas "projective geometry alex remorov" o "cross ratio evan chen" te sale mucho más.

Por lo mientras, considero que este tema también es más avanzado de lo entender y practicar, de hecho, fácilmente podría tener su propia sección, pero por ahora lo dejo aquí.

Como otra idea esta **dualidad**: intercambiar puntos por líneas y viceversa, y propiedades de puntos por propiedades de líneas. Una aplicación de esto es con algo que se llama

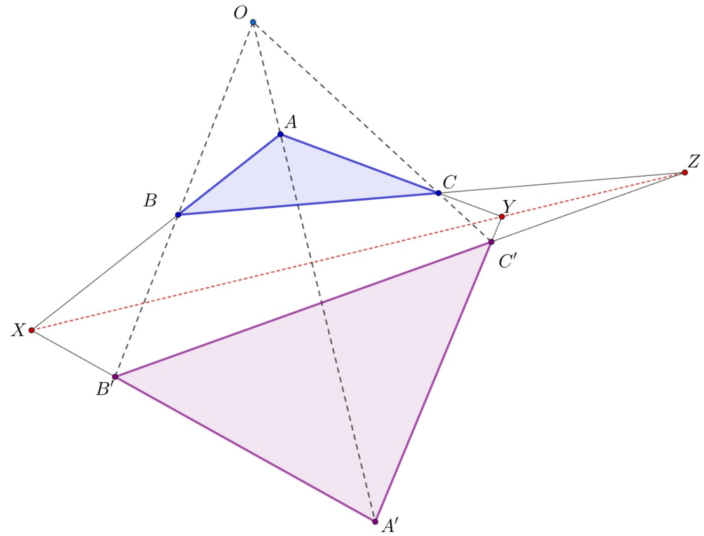
Polos y Polares

También aquí es mucho y tiene demasiada teoría detrás, así que dejaré algunos links para que veas más información, pero en resumen, tenemos un punto (polo) P y un círculo ω con centro O, radio r y sea P' un punto tal que $O - P - P'$ (no necesariamente en ese orden) y $OP \cdot OP' = r^2$, entonces el polar de P es la línea que pasa por P' y es perpendicular a la línea $O - P - P'$ (a P' se le conoce como el inverso de P, forma parte de la transformación "inversión", 1, 2, 3 y el más recomendado para ver más).
Su punto fuerte es: Si P cae sobre el polar de Q, entonces Q cae sobre el polar de P (Teorema de La Hire), con esto podemos demostrar que una línea es el polar de un punto que queremos y así demostrar colinealidad, o bien el reverso, demostrar que el polo de varias líneas pasan son el mismo.
Para más info igual tienes Alex Remorov, además de 1, 2 y el más recomendado.

Dicho esto, veamos algunos teoremas importantes, en otras secciones recomendaría tratar de demostrar los teoremas pero este no es el caso.

Teorema 6.10: Teorema de Desargues

Dados dos triángulos ABC y $A'B'C'$, las rectas AA', BB', CC' son concurrentes si y sólo si las intersecciones de las parejas de rectas $AB, A'B'; BC, B'C'; CA, C'A'$ son colineales.



Problema de Práctica 6.7: Romania TST 5/2007 P2

Sea ABC un triángulo, y ω_a, ω_b, ω_c círculos dentro de ABC, que son tangentes (externamente) entre sí, tales que ω_a es tangente a AB y AC, ω_b es tangente a BA y BC, y ω_c es tangente a CA y CB. Sea D el punto común de ω_b y ω_c, E el punto común de ω_c y ω_a, y F el punto común de ω_a y ω_b. Demuestre que las rectas AD, BE y CF tienen un punto común.

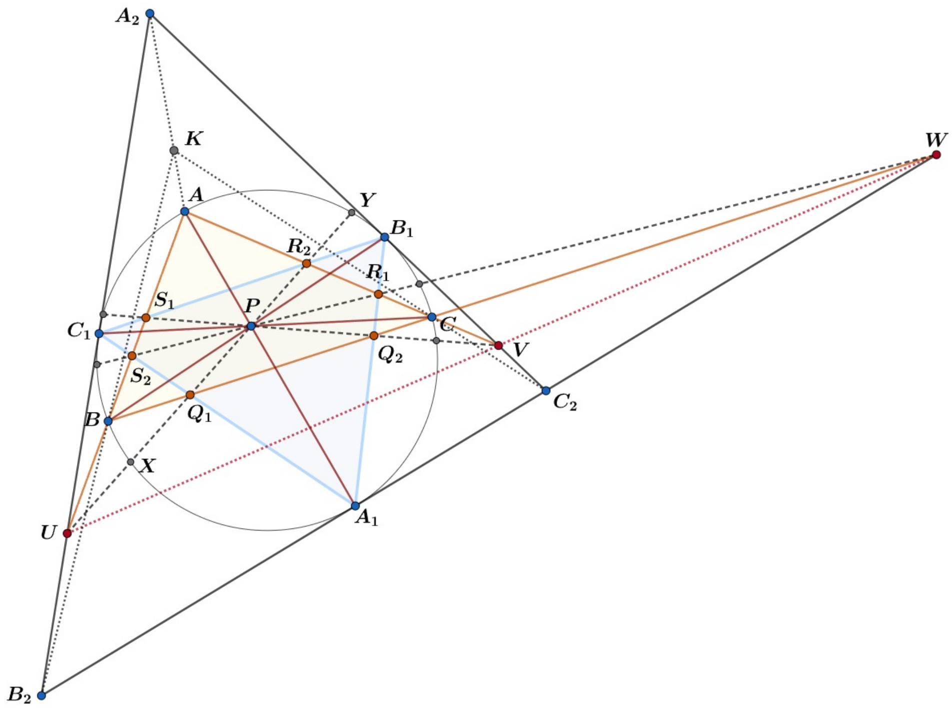
Demostración (de AoPS, JuanOrtiz). Sea $X = DE \cap AC$ y defina Y, Z de forma similar. Según Monge, los centros internos de $(w_c, w_b), (w_b, w_a)$ y el centro externo de (w_a, w_c) son colineales. Es decir, Y es el centro externo de (w_a, w_c). Según Monge, los centros externos de $(w_a, w_b), (w_c, w_a), (w_b, w_c)$ son colineales. Es decir, XYZ son colineales. Por lo tanto, según Desargues, AD, BE, CF son concurrentes.

Problema de Práctica 6.8: Teorema de Steinbart

El triángulo ABC está inscrito en la circunferencia ω. El punto P se encuentra dentro del triángulo ABC. Las rectas AP, BP y CP se intersecan nuevamente con ω en los puntos A_1, B_1 y C_1 (excepto A, B, C), respectivamente. Las rectas tangentes a ω en A_1 y B_1 se intersecan en C_2. Las rectas tangentes a ω en B_1 y C_1 se intersecan en A_2. Las rectas tangentes a ω en C_1 y A_1 se intersecan en B_2. Demuestre que las rectas AA_2, BB_2 y CC_2 son concurrentes.

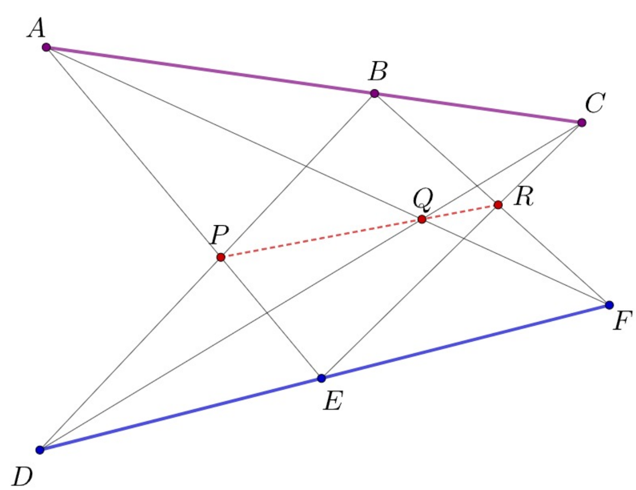
Demostración. Sean $Q_1, Q_2, R_1, R_2, S_1, S_2$ los vértices del hexágono formado por las intersecciones de los triángulos ABC y A_1B_1 como se muestra en la figura de abajo. Sea $U := AB \cap A_2B_2$ y V, W están definidos análogamente. Nuestra meta es demostrar que U, V, W son colineales, puesto que por Desargues en $\triangle ABC, \triangle A_2B_2C_2$, implica que AA_2, BB_2 y CC_2 son concurrentes.
Ahora vamos a demostrar que $U \in \overline{Q_1PR_2}$ son concurrentes: Por teorema de Pascal en $B_1C_1A_1ACB$ tenemos que $Q_1 - P - R_2$. Sean X, Y los puntos de intersección de $\overline{Q_1PR_2}$ con $\odot(ABC)$ y considerando la función de cool ratio $f(O) = \pm\frac{XO}{YO}$, por sus propiedades (que en un problema real se debería demostrar) tenemos que $f(A) = \frac{f(P)}{f(A_1)}, f(B) = \frac{f(Q_1)}{f(C)}, f(C) = \frac{f(P)}{f(C)} = \frac{f(Q_1)}{f(A_1)}$. Sean $U_1 := AB \cap XY, U_2 := CC \cap XY$, se tiene que $f(U_1) = f(A) \cdot f(B) = \frac{f(P)}{f(A_1)} \cdot \frac{f(Q_1)}{f(C)} = f(C)^2 = f(U_2) \implies f(U_1) = f(U_2)$, por tanto U_1, U_2 son el mismo punto, es decir, ambos son U.

Por lo que tenemos que $U = AB \cap Q_1R_2 = AS_2 \cap PQ_1$; similarmente, tenemos que $V = AC \cap Q_2S_1 = AR_1 \cap PQ_2$ y $W = BC \cap S_2R_1 = Q_1Q_2 \cap S_2R_1$. Por Desargues en en $\triangle AS_2R_1, \triangle PQ_1Q_2$, nos da que U, V, W son colineales, como se quería demostrar. ■



Teorema 6.11: Teorema de Pappus

Sean A, B, C tres puntos colineales y D, E, F otros tres puntos colineales, sean $P := AE \cap BD, Q := AF \cap CD, R := BF \cap CE$, entonces P, Q, R son colineales.



Problema de Práctica 6.9:

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que el círculo de diámetro AB es tangente a la línea CD, y el círculo de diámetro CD es tangente a la línea AB. Demuestra que los dos puntos de intersección de estos círculos y el punto $AC \cap BD$ son colineares.

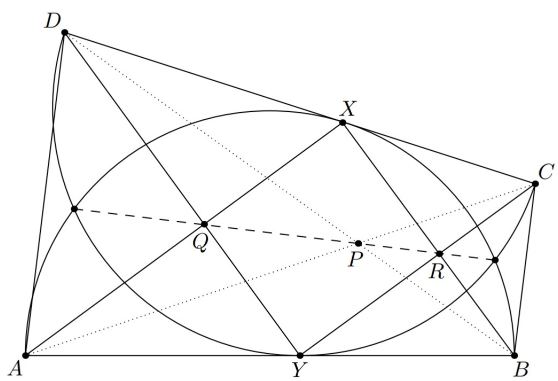
Demostración: Sean $Q := DY \cap AX, R := XB \cap CY$. Por tangencia, tenemos que $\angle QYA = \angle DCY, \angle DXQ = \angle XBA$, por suma de ángulos internos tenemos que $\angle QDX = 90^o - \angle DCY, \angle QAY = 90^o - \angle XBA$

$$\implies (90^o - \angle DCY) + \angle XBA = \angle QDX + \angle DXQ = 180^o - \angle DQX$$

$$= 180^o - \angle AQY = \angle QAY + \angle QYA = (90^o - \angle XBA) + \angle DCY$$

$$\implies (90^o - \angle DCY) + \angle XBA = (90^o - \angle XBA) + \angle DCY \implies \angle XBA = \angle DCY$$

Por lo que $\angle DXA = \angle DYA \implies DXYA$ es cíclico. Por el teorema de ejes radicales, tenemos que Q es el centro radical de $\odot(DXYA)$ y las dos circunferencias del problema; análogamente se demuestra para R. Por tanto QR es el eje radical de las dos circunferencias del problema. Por Pappus se tiene que $Q - P - R$, justamente lo que queríamos demostrar. ■



Retomamos al Teorema de Pascal que ya habíamos visto. Un tip por agregar es, a la hora de escribir cómo vamos a usar Pascal, en vez de estar poniendo todas las intersecciones que son colineales, podemos poner simplemente "Aplicando Pascal en $ABCDEF$" y se entendería que las intersecciones son $AB \cap DE, BC \cap EF, CD \cap AF$.

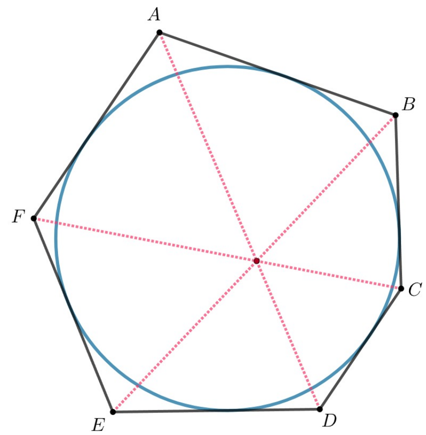
Problema de Práctica 6.10: MOP 1998/2/3a

Sea ABC un triángulo, y sean A', B', C' los puntos medios de los arcos BC, CA, AB, respectivamente, del circuncírculo de ABC. La línea $A'B'$ intersecta BC y AC en S y T. $B'C'$ intersecta AC y AB en F y P, y $C'A'$ intersecta AB y BC en Q y R. Demuestra que PS, QT, FR concurren.

Demostración. Por Pascal en $ABB'A'C'C$ tenemos que Q, T pasan por $BB' \cap CC'$ que justamente es el incentro de $\triangle ABC$, análogamente las otras diagonales también pasan por el incentro. ■

Teorema 6.12: Teorema de Brianchon

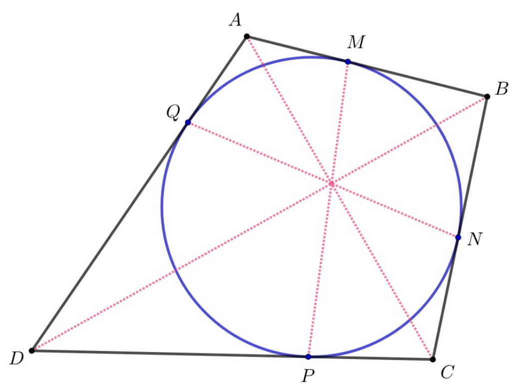
Sea ω un círculo (o una cónica en general) inscrito en el hexágono $ABCDEF$. Entonces las diagonales AD, BE, CF son concurrentes.



Problema de Práctica 6.11:

Sea $ABCD$ un cuadrilátero que es tangente a un círculo en los lados AB, BC, CD, DA en M, N, P, Q respectivamente. Prueba que las líneas AC, BD, MP, NQ son concurrentes.

Demostración. Aplicando Brianchon en el hexágono degenerado $BNCDQA$ nos da la concurrencia BD, NQ, CA y aplicando también en $AMBCPD$ nos da que
AC, MP, BD son concurrentes. Por tanto las 4 líneas son concurrentes. ■



(Avanzado) Desargues' Involution Theorem. Como en otras ocasiones, no me voy a extender explicando a fondo ni resolviendo algún problema por su dificultad.
Por encima de todo, una involución es una función $f : A \mapsto A$ que cumple que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ (por ejemplo, la reflexión es una involución) y preserva el cross ratio: $(A, B; C, D) = (f(A), f(B); f(C), f(D))$. Además, llamamos a la pareja $(A, f(A))$ como una pareja recíproca.
Nuevamente, sin profundizar más, suelto lo que dice el teorema:
Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en un círculo Ω (cónica en general). Una línea cualquiera ℓ intersecta las líneas AB, CD, AD, BC, AC, BD en los puntos $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$, respectivamente. ℓ intersecta a Ω en W_1, W_2. Entonces, los pares (X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (Z_1, Z_2), (W_1, W_2) son parejas recíprocas de alguna involución en ℓ.
Y su dual (**Dual of Desargues' Involution Theorem**):
Sean P, A, B, C, D cinco puntos en el plano, y sea $AB \cap CD = E$, $AD \cap BC = F$. Sea $\mathcal{C}$ un círculo (cónica) tangente a las líneas AB, CD, AD, BC, y sean PX, PY las tangentes a $\mathcal{C}$ que pasan por P. Entonces, las parejas $(PX, PY), (PA, PC), (PB, PD), (PE, PF)$ son parejas recíprocas de alguna involución de un haz de líneas (pencil of lines, en inglés) que pasan por P.

En “On the Desargues’ Involution Theorem” se explica muy bien todo lo que tenga que ver con esto problema, a mi opinión es el mejor texto que puedes encontrar sobre el tema, pero insisto, mejor domina los conceptos anteriores.

Los siguientes problemas es para practicar todo lo aprendido a lo largo de estas tres partes.

6.4 Más problemas

Problema 57 (2011 Sharygin Geometry Olympiad Correspondence Round P22). *Sean CX, CY las tangentes desde el vértice C del triángulo ABC a la circunferencia que pasa por los puntos medios de sus lados. Demuestre que las rectas XY, AB y la tangente a la circunferencia circunscrita de ABC en el punto C concurren.*

Problema 58 (USAMO 2003). *Sea $\triangle ABC$ un triángulo. Una circunferencia que pasa por los puntos A y B corta a los segmentos AC y BC en los puntos D y E, respectivamente. Las rectas AB y DE se cortan en F, mientras que las rectas BD y CF se cortan en M. Demuestra que $MF = MC$ si y solo si $MB \cdot MD = MC^2$.*

Problema 59 (IMO Shortlist 2001). *Sea A_1 el centro del cuadrado inscrito en el triángulo acutángulo $\triangle ABC$, con dos vértices del cuadrado sobre el lado BC. Así, uno de los dos vértices restantes del cuadrado se encuentra sobre el lado AB, y el otro sobre AC. Los puntos B_1 y C_1 se definen de manera similar, como los centros de cuadrados inscritos con dos vértices en los lados AC y AB, respectivamente. Prueba que las rectas AA_1, BB_1, CC_1 son concurrentes.*

Problema 60. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sean A_1, B_1, C_1 los puntos donde el incírculo toca los lados BC, AC y AB, respectivamente. Demuestra que si A_2, B_2, C_2 son puntos sobre los arcos menores B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 del incírculo de $\triangle ABC$ tales que las rectas AA_2, BB_2, CC_2 son concurrentes, entonces las rectas A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 también son concurrentes.*

Problema 61 (Rusia 1997). *Dado el triángulo $\triangle ABC$, sean A_1, B_1, C_1 los puntos medios de los segmentos rotulados CAB, ABC y BCA, respectivamente (tramos dirigidos como caminos). Sean ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C las rectas que pasan por A_1, B_1, C_1, respectivamente, y que son paralelas a las bisectrices de los ángulos A, B, C. Demuestra que las rectas ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C son concurrentes.*

Problema 62 (IMO 1982). *Sea $ABCDEF$ un hexágono regular, y sean M y N puntos sobre las diagonales AC y CE, respectivamente, tales que $AM = CN = r$. Determina el valor de r si los puntos B, M, N son colineales.*

Problema 63 (Teorema de los Siete Círculos). *Sean $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$ circunferencias tales que $\mathcal{C}$ es tangente exterior a cada $\mathcal{C}_i$ en un punto P_i, y cada $\mathcal{C}_i$ es tangente exterior a $\mathcal{C}_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, 5$, y $\mathcal{C}_6$ es tangente exterior a $\mathcal{C}_1$. Prueba que las rectas P_1P_4, P_2P_5, P_3P_6 son concurrentes.*

Problema 64. *Sea $\triangle ABC$ con incentro I. Sea ω el círculo que es tangente a los lados AB, AC y a la circunferencia circunscrita de $\triangle ABC$. Supón que ω toca los lados AB y AC en los puntos X y Y, respectivamente. Prueba que el incentro I es el punto medio del segmento XY.*

Problema 65 (Bulgaria 1997). *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que los ángulos $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD$. Sean H y O el ortocentro y el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$, respectivamente. Demuestra que los puntos H, O, D son colineales.*

Problema 66 (IMO Shortlist 1997). *Las bisectrices de los ángulos A, B, C del triángulo ABC cortan nuevamente su circunferencia circunscrita en los puntos K, L, M, respectivamente. Sea R un punto interior sobre el lado AB. Los puntos P y Q se definen mediante las condiciones: $RP \parallel AK$ y $BP \perp BL$; $RQ \parallel BL$ y $AQ \perp AK$. Prueba que las rectas KP, LQ, MR son concurrentes.*

Problema 67. *Sea ABC un triángulo, y sean D, E, F los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC, CA, AB, respectivamente. Sean A', B', C' los puntos medios de los arcos BC, CA, AB (que no contienen al vértice opuesto) de la circunferencia circunscrita. Si I es el incentro y M, N, P los puntos medios de los segmentos ID, IE, IF, respectivamente, demuestra que las rectas MA', NB', PC' son concurrentes.*

Problema 68 (IMO Shortlist 1997). *Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo no isósceles con incentro I. Para cada $i = 1, 2, 3$, sea $\mathcal{C}_i$ la circunferencia menor que pasa por I y es tangente a los lados A_iA_{i+1} y A_iA_{i+2} (índices módulo 3). Sea B_i el segundo punto de intersección de $\mathcal{C}_{i+1}$ y $\mathcal{C}_{i+2}$. Prueba que los circuncentros de los triángulos $A_1B_1I, A_2B_2I, A_3B_3I$ son colineales.*

Problema 69 (IMO Shortlist 2006). *Sean ω_1 y ω_2 circunferencias con centros O_1 y O_2, respectivamente, tangentes externamente en un punto D, e internamente tangentes a una circunferencia ω en los puntos E y F, respectivamente. Sea t la tangente común a ω_1 y ω_2 en el punto D. Sea AB el diámetro de ω perpendicular a t, con A, E, O_1 del mismo lado de t. Demuestra que las rectas AO_1, BO_2, EF y t son concurrentes.*

Problema 70 (TSTST 2017). *Sea ABC un triángulo con incentro I. Sea D un punto sobre el lado BC, y sean ω_g y ω_c los incírculos de los triángulos ABD y ACD, respectivamente. Supón que ω_g y ω_c son tangentes al segmento BC en los puntos E y F, respectivamente. Sea P la intersección del segmento AD con la recta que une los centros de ω_g y ω_c. Sea X la intersección de las rectas BI y CP, y Y la intersección de las rectas CI y BP. Demuestra que las rectas EX y FY se cortan sobre el incírculo del triángulo ABC.*

Problema 71. *Tres circunferencias iguales $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ son tangentes a los pares de lados del triángulo ABC que se encuentran en A, B y C, respectivamente, y también son tangentes internamente a una circunferencia Ω. Demuestra que el centro de Ω se encuentra sobre la recta que une al incentro y al circuncentro del triángulo ABC.*

Problema 72. *Sea ω una circunferencia y $ABCD$ un cuadrado situado en su interior. Se construyen las circunferencias $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ externas al cuadrado pero tangentes internamente a ω en los puntos A', B', C', D', respectivamente, y tales que son tangentes a los pares de lados AB y AD, AB y BC, BC y CD, CD y DA, respectivamente. Demuestra que las rectas AA', BB', CC', DD' concurren en un mismo punto.*

Problema 73. *Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo en A, y sea D un punto sobre el lado AC. Denota por E el reflejo de A respecto a la recta BD, y por F la intersección de la recta CE con la perpendicular a BC trazada desde D. Demuestra que las rectas AF, DE y BC son concurrentes.*

Problema 74 (ISL 2006). *Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que*

$$\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE.$$

Las diagonales BD y CE se cortan en P. Demuestra que la recta AP biseca al segmento CD.

Problema 75 (ISL 2000). *Sean O y H el circuncentro y el ortocentro de un triángulo acutángulo $\triangle ABC$, respectivamente. Demuestra que existen puntos D, E, F sobre los lados BC, CA, AB, respectivamente, tales que*

$$OD + DH = OE + EH = OF + FH,$$

y que las rectas AD, BE y CF son concurrentes.

Problema 76 (USAMO 2012). *Sea P un punto en el plano del triángulo $\triangle ABC$, y sea ℓ una recta que pasa por P. Sean A', B', C' los puntos en los que las reflexiones de las rectas PA, PB, PC respecto a ℓ cortan a los lados BC, AC, AB, respectivamente. Demuestra que los puntos A', B', C' son colineales.*

Problema 77 (USATSTST 2017). *Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro I. Sea D un punto sobre el lado BC, y sean ω_B y ω_C los incírculos de los triángulos ABD y ACD, respectivamente. Supón que ω_B y ω_C son tangentes al segmento BC en los puntos E y F, respectivamente. Sea P la intersección del segmento AD con la recta que une los centros de ω_B y ω_C. Sea X la intersección de las rectas BI y CP, y Y la intersección de las rectas CI y BP. Demuestra que las rectas EX y FY se cortan sobre el incírculo del triángulo ABC.*

Problema 78 (APMO 2016). *Sean AB y AC dos semirrectas distintas que no están sobre la misma línea recta, y sea ω una circunferencia con centro O que es tangente a la semirrecta AC en E y a la semirrecta AB en F. Sea R un punto sobre el segmento EF. La recta a través de O paralela a EF corta a la recta AB en P. Sea N la intersección de las rectas PR y AC, y sea M la intersección de AB con la recta que pasa por R y es paralela a AC. Demuestra que la recta MN es tangente a ω.*

Problema 79 (USATST 2012). *En un cuadrilátero cíclico $ABCD$, las diagonales AC y BD se cortan en P. Sean E y F los pies de las perpendiculares desde P a las rectas AB y CD, respectivamente. Los segmentos BF y CE se cortan en Q. Demuestra que las rectas PQ y EF son perpendiculares entre sí.*

6.4.1 Problemas difíciles

Problema 80 (USATST 2021). *Sean A, B, C, D cuatro puntos tales que no hay tres colineales y D no es el ortocentro del triángulo ABC. Sean P, Q, R los ortocentros de los triángulos $ABCD, ACAD, AABD$, respectivamente. Supón que las rectas AP, BQ, CR son todas distintas y concurrentes. Demuestra que los cuatro puntos A, B, C, D son cíclicos.*

Problema 81 (USATST 2020). *Dos circunferencias $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ tienen tangentes externas comunes ℓ_1 y ℓ_2 que se intersectan en un punto T. Supón que ℓ_1 es tangente a $\mathcal{T}_1$ en A, y ℓ_2 es tangente a $\mathcal{T}_2$ en B. Una circunferencia ω que pasa por A y B corta nuevamente a $\mathcal{T}_1$ en C y a $\mathcal{T}_2$ en D, tal que el cuadrilátero $ABCD$ es convexo. Supón que las rectas AC y BD se cortan en X, y que las rectas AD y BC se cortan en Y. Demuestra que los puntos T, X, Y son colineales.*

Problema 82 (ISL 2011). *Sea $\triangle ABC$ un triángulo con $AB = AC$, y sea D el punto medio de AC. La bisectriz del ángulo $\angle BAC$ corta a la circunferencia que pasa por D, B, C en un punto E dentro del triángulo ABC. La recta BD corta a la circunferencia que pasa por A, E, B en los puntos B y F. Las rectas AF y BE se cortan en un punto I, y las rectas CI y BD se cortan en un punto K. Demuestra que I es el incentro del triángulo KAB.*

Problema 83 (USAMO 2017). *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cíclico. Sean E la intersección de las diagonales AC y BD, F la intersección de las rectas AB y CD, y G la intersección de las rectas BC y DA. La circunferencia circunscrita del triángulo ABE corta a la recta CB en B y P, y la circunferencia circunscrita del triángulo ADE corta a CD en D y Q, donde los puntos C, B, P, G y C, Q, D, F están alineados en ese orden. Demuestra que si las rectas FP y GQ se cortan en M, entonces $\angle MAC = 90°$.*

Problema 84 (USAMO 2016). *Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo, y sean I_B, I_C, O el exincentro B, el exincentro C, y el circuncentro, respectivamente. Sean E y Y puntos sobre AC tales que $\angle ABY = \angle CBY$ y $BE \perp AC$. De manera similar, sean F y Z puntos sobre AB tales que $\angle ACZ = \angle BCZ$ y $CF \perp AB$. Las rectas I_BF e I_CE se cortan en P. Demuestra que $PO \perp YZ$.*

Problema 85 (USATST 2015). *Sea ABC un triángulo no equilátero, y sean M_a, M_b, M_c los puntos medios de los lados BC, CA, AB, respectivamente. Sea S un punto sobre la recta de Euler del triángulo. Denota por X, Y, Z las segundas intersecciones de las rectas M_aS, M_bS, M_cS con el círculo de los nueve puntos. Demuestra que las rectas AX, BY, CZ son concurrentes.*

7 Misceláneo

Algunos temas que no incluí en el resto del documento, pero que considero importantes o interesantes de mencionar, calificados (a mi opinión) del 0 al 5 ♠ según su importancia para resolver problemas de geometría, son:

4.5 ♠ **Cross Ratio, Polos y polares.** (Ya los mencioné en la sección de Geometría Proyectiva).
(2019 ELMO Shortlist G1) Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H y circunferencia circunscrita Γ. Sea BH la intersección de AC en E y CH la intersección de AB en F. Sea AH la intersección de Γ en $P \neq A$. Sea PE la intersección de Γ en $Q \neq P$. Demuestre que BQ biseca el segmento $\overline{EF}$.

(1988 Mongolia National Olympiad P2) Sea ω una circunferencia con centro en O y A un punto dentro de ω, distinto de O. Sea XY una cuerda de ω que pasa por A. Al variar XY, encuentre el lugar geométrico del punto de intersección de las tangentes en X, Y a ω.

2.5 ♠ **Geometría Analítica:** Usa coordenadas (x, y) y álgebra para representar puntos, rectas, circunferencias, etc. Sirve para convertir una figura en ecuaciones y resolver con álgebra, ayuda con configuraciones donde hay muchas distancias, pendientes o condiciones geométricas precisas. Puedes colocar un triángulo con un vértice en el origen y usar ecuaciones para calcular intersecciones o comprobar alineaciones.

(JBMO 2013 Problem 2) Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$ y O el centro de su circunferencia circunscrita ω. Sea D un punto en el segmento BC tal que $\angle BAD = \angle CAO$. Sea E el segundo punto de intersección de ω y la recta AD. Si M, N y P son los puntos medios de los segmentos BE, OD y AC, respectivamente, demuestre que los puntos M, N y P son colineales.

3.5 ♠ **Números complejos:** Identifica un punto del plano con un número complejo $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta}$. Sirve para usar multiplicación por números de módulo 1 para representar rotaciones, usar conjugados para reflejos o para expresar condiciones como colinealidad o cociclicidad con identidades complejas. Puedes demostrar que cuatro puntos son concíclicos con la condición $\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)} \in \mathbb{R}$. Si consideramos a un triángulo ABC cuyo circuncírculo es el círculo unitario (con centro en el origen y radio 1) entonces el circuncetro, ortocentro, gravicentro y circunferencia de los 9 puntos estan expresados como $0, a+b+c, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{2}$, respectivamente.

(IMO LongList 1959-1966 P36) Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Demuestre que los baricentros de los triángulos ABC, CDA, BCD y DAB se encuentran en una circunferencia.

3.5 ♠ **Barycentric Coordinates:** Son coordenadas de un punto respecto a un triángulo base ABC, escritas como combinaciones lineales de sus vértices $(a : b : c)$. Permite manejar puntos relacionados con el triángulo (medianas, incentro, ortocentro, etc.) o escribir ecuaciones de líneas o circunferencias dentro del triángulo. Por ejemplo, probar que tres cevianas son concurrentes, o que un punto cumple una cierta proporción baricéntrica.

(Romanian National Olympiad, 9th Grade, P1) En un triángulo ABC, el baricentro G, el ortocentro H y el incentro I son colineales. Demuestre que el triángulo es isósceles.

2.0 ♠ **Vectores:** Son representaciones dirigidas de segmentos, que permiten sumar, restar y multiplicar puntos del plano. Sirven para comprobar colinealidad y concurrencia con productos vectoriales, muy útil para demostrar relaciones de paralelismo, ortogonalidad, proporcionalidad. Por ejemplo, usar vectores para probar que tres segmentos se intersectan en un punto (concurrencia), o que dos rectas son perpendiculares.

(2024 Thailand MO P8) Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo y denote U, V, W, X, Y y Z como el punto medio de AB, BC, CD, DE, EF y FA respectivamente. Demuestre que la longitud de UX, VY, WZ puede ser la longitud de cada lado de un triángulo.

2.5 ♠ **Homografía:** Una homografía es una biyección del plano proyectivo que preserva la colinealidad y la razón doble, por lo que transforma cónicas en cónicas. Basta que conserve colinealidad para que la razón doble también se mantenga. Además, mantiene relaciones como las de puntos colineales, rectas concurrentes y cuadriláteros inscritos en cónicas. Es útil para transformar configuraciones complejas en otras más simples.

(APMO 2016/3) Sean AB y AC dos semirrectas distintas que no se encuentran en la misma recta, y sea ω una circunferencia con centro en O, tangente a la semirrecta AC en E y a la semirrecta AB en F. Sea R un punto en el segmento EF. La recta que pasa por O, paralela a EF, interseca a la recta AB en P. Sea N la intersección de las rectas PR y AC, y sea M la intersección de la recta AB y la recta que pasa por R, paralela a AC. Demuestre que la recta MN es tangente a ω.

8 Problemas de la OMM hasta 2019

OMM 2024/3

Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo, y sean A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 y F_1 los puntos medios de AB, BC, CD, DE, EF y FA, respectivamente. Construya puntos A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 y F_2 en el interior de $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ de forma tal que se cumplan:
1. Los lados del dodecágono $A_2A_1B_2B_1C_2C_1D_2D_1E_2E_1F_2F_1$ son todos iguales, y 2. $\angle A_1B_2B_1 + \angle C_1D_2D_1 + \angle E_1F_2F_1 = \angle B_1C_2C_1 + \angle D_1E_2E_1 + \angle F_1A_2A_1 = 360°$, donde todos estos ángulos son menores que 180°.
Demuestre que $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ es cíclico.
Nota: El dodecágono $A_2A_1B_2B_1C_2C_1D_2D_1E_2E_1F_2F_1$ tiene la forma de una estrella de 6 puntas, donde los vértices son A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 y F_1.

Walktrough. Problema demasiado complejo pero su debilidad es la homotecia.

1. ¿Qué implica la condición 2. del problema?
2. Nota que AA_2, CC_2, EE_2 concurren
3. ¿En qué punto concurren?
4. Considera la homotecia de centro A y ratio 2, tras la homotecia, ¿dónde queda A_2?
5. Prueba que AA_2, CC_2, EE_2 concurren en el circuncentro O_2 de $\triangle BDF$
6. Análogamente para BB_2, DD_2, FF_2
7. Considera la homotecia de centro O_2 y ratio $\frac{1}{2}$ en $\triangle AEC$ ¿a dónde va O_1?
8. Has lo mismo en O_1 y concluye

OMM 2024/4

Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H. Sea M un punto en el segmento BC. La línea que pasa por M y es perpendicular a BC corta a las rectas BH y CH en los puntos P y Q, respectivamente. Demuestre que el ortocentro del triángulo HPQ yace sobre la recta AM.

Walktrough. Resuelto con puras razones.

1. Demuestra que $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle HQP$
2. Si R es el ortocentro de $\triangle HQP$, usa semejanza para encontrar una bonita razón
3. Si R' es la intersección de AM con HS, por paralelas saca una razón
4. Considera ambas razones y concluye

OMM 2023/3

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Si M, N, K son los puntos medios de los segmentos de AB, BC, CD, respectivamente, y además existe un punto P dentro de $ABCD$ tal que $\angle BPN = \angle PAD$ y $\angle CPN = \angle PDA$. Muestra que $AB \cdot CD = 4PM \cdot PK$

Walktrough.

1. Nota que $\frac{AB}{2PM} = \frac{CD}{2PK}$ implica una semejanza
2. Toma la reflexión de P sobre M, K

3. Nota que se han formado paralelogramos y ve que triángulos son semejantes
4. Usa Ley de senos en $\triangle APD, \triangle BPN$ y en $\triangle CPN$ para demostrar la semejanza usando la condición de ángulos del problema para terminar

OMM 2023/5

Sea ABC un triángulo acutángulo, Γ su circuncírculo y O su circuncentro. Sea F el punto en AC tal que $\angle COF = \angle ACB$, donde F y B están de lados opuestos respecto a CO. La recta FO corta a BC en G. La paralela a BC por A intersecta a Γ de nuevo en M. Las rectas MG y CO se cortan en K. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos BGK y AOK concurren en AB.

Walktrough. Puro anguleo.

1. Prueba que $AFOM$ es cíclico
2. Considera a la recta $\ell \parallel BC$ que pasa por O
3. Demuestra que $AFOMK$ es cíclico mediante ℓ
4. Sea P la intersección de $\odot(AFOKM)$ con AB, demuestra que $P \in \odot(BGK)$

OMM 2022/6

Encuentra todos los enteros $n \geq 3$ tales que existe un polígono convexto de n lados $A_1A_2 \dots A_n$ que tenga las siguientes características:

- Todos los ángulos internos de $A_1A_2 \dots A_n$ son iguales.
- No todos los lados de $A_1A_2 \dots A_n$ son iguales.
- Existe un triángulo T y un punto O en el interior de $A_1A_2 \dots A_n$ tal que los n triángulos $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots OA_nA_1$ son todos semejantes a T.

Walktrough. Esta medio fácil todos los pasos, pero el último es un dolor de cabeza.

1. Acuérdate ¿qué implica la semejanza?
2. Encuentra todos los posibles valores de $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$
3. ¿Qué pasa si hay dos suma de estas sumas son distintas?
4. Descarta todos los casos excepto uno, ¿cuál es?
5. Apartir de este caso determina que $n = 6$
6. Termina encontrando un héxagono que cumpla las propiedaes

OMM 2021/2

Sea ABC un triángulo tal que $\angle ACB > 90°$ y sea D el punto de la recta BC tal que AD es perpendicular a BC. Considera Γ la circunferencia de diámetro BC. Una recta que pasa por D es tangente a la circunferencia Γ en P, corta al lado AC en M (quedando M entre A y C) y corta al lado AB en N. Demuestra que M es punto medio de DP si y solo si N es punto medio de AB.

Walktrough.

1. Considera los puntos medios de BD, BC, PD.
2. Observa qué cíclico se forma con estos puntos.

3. Considera con Reim otro cíclico que también se forma con estos puntos.

4. Iguala cada punto con su respectivo en el problema y concluye.

OMM 2021/4

Sea ABC un triángulo acutángulo escálelo con $\angle BAC = 60°$ y ortocentro H. Sean ω_b la circunferencia que pasa por H y es tangente a AB en B, y ω_c la circunferencia que pasa por H y es tangente a AC en C.

- Prueba que ω_b y ω_c solamente tienen a H como punto común.
- Prueba que la recta que pasa por H y el circuncentro O del triángulo ABC es una tangente común a ω_b y ω_c.

Walktrough.

1. Prueba y nota que $\angle BAC = 60°$ implica que B, C, O, H sean concíclicos

2. Observa por que recta pasan los centros de ω_b y ω_c

3. Demuestra que dichos son centros son colineales con H ¿qué implica?

4. Usa a) para demostrar que HO es tangente a ω_c y por ende, terminamos

OMM 2020/2

Sea ABC un triángulo con incentro I. La recta BI se encuentra con AC en D. Sea P un punto en CI tal que $DI = DP$, $(P \neq I)$, E el segundo punto de intersección del segmento BC con el circuncírculo de ABD y Q el segundo punto de intersección de la recta EP con el circuncírculo de AEC. Demuestra que $\angle PDQ = 90°$.

Walktrough.

1. Observa fijamente a P ¿qué tiene de especial?

2. Prueba que P es el incentro de $\triangle CDE$

3. Usa esto para demostrar que $\angle PCQ = 90°$

4. Sea R la intersección de AC y QE, ¿qué tienen de importante Q, R, P, E?

5. Termina el problema con harmónicos

OMM 2019/2

Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y M el punto medio de AH. La recta BH corta a AC en D. Se considera un punto E tal que BC es la mediatriz de DE. Los segmentos CM y AE se cruzan en F. Muestra que BF es perpendicular a CM.

Walktrough.

1. Se consciente que para resolver el problema, tenemos que demostrar que F esta sobre un circunferencia particular

2. ¿Qué relación tiene D con AM y EC?

3. Encuentra la rotohomotecia

4. Úsala para demostrar el cíclico deseado

OMM 2019/6

Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 45°$. Sean H, O el ortocentro y el circuncentro de ABC, respectivamente. Sea ω la circunferencia de ABC y P el punto sobre ω tal que la circunferencia de PBH es tangente a BC. Sean X y Y los circuncentros de PHB y PHC respectivamente. Sean O_1, O_2 los circuncentros de PXO y PYO respectivamente. Muestra que O_1 y O_2 están en AB y AC, respectivamente.

Walktrough. La solución esta basada en el pdf: Concurso Nacional de la 33 OMM

1. Nota que $\odot(PHC)$ es también tangente a BC
2. Demuestra que PH pasa por el punto medio de BC
3. Ahora solo nos enfocamos en demostrar alguno de O_1, O_2
4. Sea C' el punto diametralmente opuesto a C y $T := BC \cap BO$, demuestra que $C', T \in \odot(PXO)$
5. Prueba que $T \in \odot(PBH)$
6. Aplica Boring Ratio Lemma en $\triangle C'BH$ y en $\triangle BPC$
7. Concluye

8.1 Soluciones

8.1.1 Solución OMM 2024/3

Lema — AA_2, CC_2, EE_2 concurren en O_2, el circuncentro de $\triangle BFD$

Demostración: Considera la homotecia con centro A y ratio 2, entonces tenemos que $F_1 \mapsto F, A_1 \mapsto B$ y llamamos X_1 al punto tal que $A_2 \mapsto X_1$. Por la homotecia también tenemos que $FX_1 = 2F_1A_2 = 2A_2A_1 = X_1B$. Similarmente para la homotecia con centro C tenemos X_2 y para la de centro E tenemos X_3.
Véase que gracias a la condición 2. del problema, podemos tomar los triángulos $\triangle BX_1F, \triangle BX_2D, \triangle DX_3F$, de modo que los puntos X_1, X_2, X_3 coinciden en X, y esto conlleva a que X es el centro de $\triangle FBD$ y claramente es único.
Retomando lo que llevábamos; puesto que $FX_1 = BX_1 = BX_2 = CX_2 = CX_3 = F_3 = R$, podemos formar círculos de radio R y centro en B, D y F. Al tener estos mismo radio, sus ejes radicales resultan ser la mediatriz de sus centros y estos a su vez pasan por X_2, X_3, X_1 respectivamente. Como los ejes radicales coiciden en un punto llamemos X_4, por potencia de punto es fácil de ver que X_4 es justamente el circuncentro de $\triangle BDF$, pero por lo anterior dicho, se tiene que $X \equiv X_4 \implies BX_4 = DX_4 = FX_4 = R \implies X, X_1, X_2, X_3, X_4$ tienen que ser el mismo punto.
Por como estan definidos X_1, X_2, X_3 y por lo anterior dicho, es que obtenemos lo mencionado en el lema. □
Análogamente demostramos que BB_2, DD_2, FF_2 concurren en O_1, el circuncentro de $\triangle ACE$. Tomando ahora la homotecia con centro O_2 y ratio $\frac{1}{2}$, tenemos que $A \mapsto A_2, C \mapsto C_2, E \mapsto E_2$ y llamamos O al punto tal que $O_1 \mapsto O$, por ende O es punto medio de O_1O_2; análogamente, si tomamos la homotecia con centro en O_1 y ratio $\frac{1}{2}$, tenemos que $B \mapsto B_2, D \mapsto D_2, F \mapsto F_2$ y llamamos O' al punto tal que $O_1 \mapsto O'$, por lo mismo que antes, se tiene que O' es punto medio de $O_1O_2 \implies O \equiv O' \implies \triangle A_2C_2E_2$ y $\triangle B_2F_2D_2$ comparten el mismo circuncentro $\implies A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ están sobre la circunferencia de centro O y radio $\frac{R}{2}$. ■

8.1.2 Solución OMM 2024/4

Demostraremos una semejanza que junto con paralelas, termina el problema.

Lema — $\triangle ABC$ es semejante a $\triangle HQP$

Demostración: Es un hecho conocido que $\angle ABC = \angle CHD$ y puesto que por dato del problema $AD \parallel MP \implies \angle BHD = \angle BPM$ y $\angle ABC = \angle CHD = \angle HQP$, por criterio AA terminamos. $\square$
Sea R el ortocentro de $\triangle HQP$, por la semejanza dicha, tenemos que

$$\frac{HR}{RS} = \frac{AH}{HD}$$

Sea S el pie de la perpendicular de H sobre PQ, es fácil de ver que $HSMD$ es un rectángulo $\implies HD = SM$; sea R' la intersección de AM con HS, por paralelas tenemos que

$$\frac{HR'}{R'S} = \frac{AH}{SM} = \frac{AH}{HD}$$

Por lo tanto, $\frac{HR}{RS} = \frac{HR'}{R'S} \implies R \equiv R'$. ■

8.1.3 Solución OMM 2023/3

Sea M' la reflexión de P sobre M y K' la reflexión de P sobre K, demostraremos que los paralelogramos $AM'BP$ y $CK'DP$ son similares, esto implica lo pedido en el problema.
Aplicando ley de senos en $\triangle APD, \triangle BPN, \triangle CPN$

$$\implies \frac{AP}{PD} = \frac{\sin PAD}{\sin PDA}, \frac{PB}{BN} = \frac{\sin BNP}{\sin BPN}, \frac{PC}{CN} = \frac{\sin CNP}{\sin CPN}$$

respectivamente. Tomando en cuenta las dos últimas igualdades, tenemos que $\frac{PB}{PC} = \frac{\sin CPN}{\sin BPN}$. Considerando la primera igualdad y por la condición de los ángulos del problema, se tiene que

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\sin BNP}{\sin CPN} = \frac{\sin PDA}{\sin PAD} = \frac{AP}{PD} \implies \frac{PB}{PC} = \frac{AP}{PD} \implies \frac{PB}{PA} = \frac{PC}{PD}$$

Por la condición de ángulos del problema sabemos que $\angle APD + \angle BPC = 180° = \angle APB + \angle CPD \implies \angle PAM' = \angle CPD$. Por esto y por la última proporción, se tiene que por criterio LAL, los triángulos $\triangle PAM'$ y $\triangle DPC$ son semejantes. Esto último implica que $AM'BP$ y $CK'DP$ son semejantes, por lo que hemos terminado. ■

8.1.4 Solución OMM 2023/5

Denotemos a $\alpha = \angle ACO = \angle COA, \beta = \angle OCB = \angle OBC, \gamma = \angle OBA = \angle OAB$

Lema — $AFOM$ es cíclico

Demostración: Por dato del problema $\angle COF = \alpha + \beta \implies \angle CFO = 180° - \angle COF - \angle FCO = 2\gamma + \beta$. Por otro lado, como $AM \parallel BC \implies \angle MAB = \gamma+\beta$, y puesto que AO y MO son radios $\implies \angle MAO = 2\gamma+\beta$. Por lo tanto, se tiene que $\angle CFO = \angle MAB$, y esto implica el lema. $\square$

Lema — $AFOKM$ es cíclico

Demostración: Sea ℓ la paralela a BC que pasa por O, es fácil de ver por ángulos en $\triangle AFD$, ℓ es tangente a $AFOM$. Sea X_1 un punto fantasma en el mismo semiplano que A y sea X_2 otro punto fantasma en el mismo semiplano que M, con respecto a O y ambos sobre ℓ, se tiene que por la tangencia mencionada $\angle FOX_1 = \alpha$ y $\angle MOX_2 = \beta \implies \angle COF = \angle FMK$, esto último implica lo del lema. $\square$
Finalmente, sea P la intersección de $\odot(AFOKM)$ con AB, se tiene que $\angle PKM = \angle PAM = \angle BAM = \angle ABC = \angle PMG \implies \angle PKM = \angle PMG$, por lo que $BGPK$ es cíclico. ■

8.1.5 Solución OMM 2022/6

Decimos que la única solución es $n = 6$ cuyo polígono es:

$$(OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, OA_5, OA_6) = \left(\sin\alpha, \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\alpha, \sin\alpha, \sin\beta, \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2\beta, \sin\beta\right)$$

$$(\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \angle A_3OA_4, \angle A_4OA_5, \angle A_5OA_6, \angle A_6OA_1) = (\beta, \beta, 60^\circ, \alpha, \alpha, 60^\circ)$$

Primero notemos que, como todos los triángulos son semejantes a T, entonces estos tienen de ángulos, digamos, a α, β, γ. Esto implica que los ángulos $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ son alguna suma de dichos ángulos.
En general tendremos algunos de los siguientes casos, el resto son análogos: $\alpha+\beta = 2\alpha, \alpha+\gamma = \alpha+\beta, \alpha+\beta = 2\gamma$, y que los ángulos siempre sean (sin pérdida de generalidad), o bien $\alpha+\beta$ o 2α. Por lo que procederemos a ver cada caso.

Caso 1 — Los ángulos siempre son 2α

Notemos que esto implica que $\angle A_{i-1}A_iO = \alpha, \angle A_{i+1}A_iO = \alpha \implies T$ es isósceles y para toda i se tiene que $A_iO = c$, es decir, O es equidistante a los vértices del polígono, por ende, O es su centro, pero esto implica una contradicción al segundo dato del problema, por lo que no es posible. $\square$

Caso 2 — Los ángulos siempre son $\alpha + \beta$

Tenemos que $\alpha \neq \beta$, de otro modo llegamos al caso 1, esto hace que si iniciamos sin pérdida de generalidad en cualquier triángulo, al ir construyendo el polígono irá tomando forma de espiral, ya sea de forma exterior o interior, pero nunca va a llegar a coincidir con nuestro triángulo inicial. Esto es porque la constante de proporcionalidad entre cada 2 triángulos consecutivos ($= \frac{A_iO}{A_{i+1}O}$) es distinta de 1. Por tanto tampoco se puede. $\square$

Caso 3 — $\alpha + \beta = 2\alpha$ y caso $\alpha + \gamma = \alpha + \beta$

Resolveremos ambos debido a que los dos implican que T es isósceles. Esto nos lleva a que los posibles valores de $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ son $\alpha + \beta$ o 2α. Lo cual nos lleva a los casos 1 y 2. $\square$

Caso 4 — $\alpha + \beta = 2\gamma$

Nuestra premisa implica que $3\gamma = 180^\circ \implies \gamma = 60^\circ \implies \angle A_{i-1}A_iA_{i+1} = 120^\circ$. Tomando en cuenta la suma de los ángulos internos del polígono de forma general y de acuerdo al resultado anterior, tenemos que $180^\circ \cdot (n-2) = 120^\circ \cdot n \implies n = 6$, justamente como queríamos demostrar. $\square$ $\blacksquare$

8.1.6 Solución OMM 2021/2

Sea Ω el circuncírculo de PEC donde E es el punto medio de BD. Si X es el punto medio de PD

Lema — X pertenece a Ω

Demostración: Si X' es la segunda intersección de Ω con PD entonces

$$\frac{DX'}{DP} = \frac{DX' \cdot DP}{DP^2} = \frac{\mathrm{Pow}(D, \Omega)}{\mathrm{Pow}(D, \odot(BPC))} = \frac{DC \cdot DE}{DC \cdot DB} = \frac{DE}{DB} = \frac{1}{2}$$

$$\implies \frac{DX'}{DP} = \frac{1}{2} \implies X \equiv X'.\square$$

Sea Υ el circuncírculo de POE donde O es el punto medio de BC, Y es la segunda intersección de Υ con PD entonces

Lema — $OY \parallel XC$

Demostración: Cierto por Teorema de Reim en $\odot(PXCE), \odot(PYOE)$. $\square$
Finalmente, si $X \equiv M \implies OY \parallel MC \implies \overleftrightarrow{OY} = \overleftrightarrow{ON}$, puesto que Y, N caen sobre $PD \implies Y = PD \cap ON = PD \cap OY = N \implies Y \equiv N$.
Si $Y \equiv N \implies OY \parallel AC \implies \overleftrightarrow{AC} = \overleftrightarrow{XC}$, puesto que X, M caen sobre $PD \implies X = PD \cap AC = PD \cap XC = M \implies Y \equiv N$. $\blacksquare$

8.1.7 Solución OMM 2021/4

Primero vamos a demostrar un lema que prácticamente resuelve todo.

Lema — B, C, O, H son concíclicos

Demostración: $\angle BOC = 120° = \angle BHC$. $\square$
Sea O_b y O_c los centros de ω_b y ω_c respectivamente. Al demostrar que estos puntos son colineales con H, probamos la primera parte del problema.

Lema — H, O_c, O_b son colineales

Por la demostración del lema anterior sabemos que $\angle BHC = 120°$; como ω_c es tangente a AC se tiene que $\angle CO_cH = 2\angle ACH = 2(90° - \angle BAC) = 2(30°) \implies \triangle HCO_c$ es equilátero $\implies \angle CHO_c = 60° \implies HO_c$ es la bisectriz de $\angle BHC$, análogamente se demuestra que HO_b es la bisectriz de $\angle BHC$, por tanto O_b, O_c caen en una misma recta que pasa por $H \implies H - O_c - O_b$. $\square$
Finalmente, basta con demostrar que algunas de las circunferencias ω_b, ω_c es tangente a HO, gracias a la primera parte del problema.

Lema — HO es tangente a ω_c en H

Es fácil de ver que $\angle ABH = 30°$, y tomando en cuenta que O y H son conjugados isogonales entre sí, tenemos que $\angle CBO = 30°$.
Por el primer lema y la demostración del segundo tenemos que

$$30° = \measuredangle CBO = \measuredangle CHO = \frac{\measuredangle CO_cH}{2}$$

Lo que implica la tangencia pedida. $\square$ $\blacksquare$

8.1.8 Solución OMM 2020/2

Lema — P es el incentro de $\triangle CDE$

Demostración: $\angle CBI + \angle BCI = \angle DIP = \angle DPI = \angle DCI + \angle CDP \implies \angle CDP = \angle CBI = \frac{\angle B}{2}$. Como $\angle B = \angle CDE = \angle CDP + \angle PDE \implies \angle PDE = \frac{\angle B}{2} \implies DP$ es bisectriz de $\angle CDE$ y esto nos lleva a lo del lema. $\square$

Lema — $\angle PCQ = 90°$

Demostración:

$$\angle PCQ = \angle PCD + \angle DCQ = \frac{\angle C}{2} + \angle DCQ = \frac{\angle C}{2} + \angle AEQ$$

$$= \frac{\angle C}{2} + \angle AED + \angle DEQ = \frac{\angle C}{2} + \angle ABD + \angle DEQ = \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2} + \angle DEQ$$
$$= \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle DEC}{2} = \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle A}{2} = 90°.\square$$

Sea R la intersección de AC y QE. Por ambos lemas concluimos que $-1 = (ER; PQ) = (DE, DR; DP, DQ)$, por el primer lema se tiene que $\angle PDQ = 90°$. $\blacksquare$

8.1.9 Solución OMM 2019/2

Lema — D es el centro de rotohomotecia de

$$\triangle AMD \overset{+}{\sim} \triangle ECD \text{ y } \triangle AMD \overset{+}{\sim} \triangle ECD$$

Demostración: Por cómo esta definido M y E tenemos que $AM = MD$ y $DC = CE$; también es fácil de ver que $AM \parallel DE \implies \angle MAD = \angle EDC \implies$ por criterio AA tenemos que $\triangle AMD \sim \triangle ECD$. $\square$
Por dicha rotohomotecia, tenemos que $\angle FCD = \angle MCD = \angle AED = \angle FED \implies FDCE$ es cíclico. Es fácil de ver que el circuncírculo de DCE es el círculo de diámetro $BC \implies \angle BFC = 90°$. $\blacksquare$

8.1.10 Solución OMM 2019/6

Notamos que $45° = \angle BPH + \angle HPC = \angle CBH + \angle HPC$ y $45° = \angle BAH + \angle HAC = \angle BCH + \angle HAC = \angle BCH + \angle CBH$, por lo que $\angle HPC = \angle HCB$, lo que implica que $\odot(PHC)$ es tangente a BC.
Así que ahora tenemos que H es el Humpty-point de $\triangle BPC$, por lo que PH es la mediana de dicho triángulo.
A su vez, tenemos que el modo de construcción de O_1 y O_2 es simétrico, por lo que basta con demostrar uno y el proceso sería análogo para el otro.
Procederemos a demostrar que $O_1 \in AB$.

Lema — Sea C' el punto diametralmente opuesto a C y $T := PC \cap BO$, entonces $C', T \in \odot(PXO)$.

Demostración: Por ángulos inscritos $\angle PBX = \angle PCO$, puesto que X, O son centros de $\odot(PBH), \odot(ABC) \implies \triangle PXB, \triangle POC$ son isósceles. Por criterio LAL ambos triángulos son semejantes. Debido a que $C'B \perp BC$ y $XB \perp BC$ entonces $C' - X - B \implies \angle PXC' = \angle POC'$, por tanto $C' \in \odot(PXO)$.
Como $\angle BOC = 2\angle BAC = 90°$ entonces BO es la mediatriz de $CC' \implies T$ también esta en la misma mediatriz por definición $\implies TC = TC'$, por criterio de semejanza LAL tenemos que $\triangle POC \sim \triangle C'TC$. $\implies \angle PTC' = \angle POC'$, por tanto $T \in \odot(PXO)$. $\square$

Lema — $T \in \odot(PBH)$

Demostración: Véase que $\angle BXT = \angle C'OT = 90°$ y $\angle XBT = \angle C'BO = 45° \implies \triangle BXT$ es isóceles $\implies XB = XT$, por ende $T \in \odot(PBH)$. $\square$
Finalmente, sea $O_1' := C'T \cap AB$, como $C'T$ es un diámetro de $\odot(PXO)$, entonces si demostramos que $C'O_1' = O_1'T$, implica que $O_1' \equiv O_1$ y esto nos daría lo que estamos buscando.
Para esto, partamos de que O, H son puntos isogonales $\implies \angle ABO = \angle CBH = \angle BPH$ (esto último por propiedades de tangencia), y como ya habíamos visto $\angle BPH = 45° = \angle C'BT$. Por lo que, junto con Boring Ratio Lemma en $\triangle BPC$, tenemos que

$$\frac{PB}{PC} = \frac{MB}{MC}\frac{\sin(\angle BPM)}{sin(\angle MPC)} = \frac{\sin(45° - \angle MPC)}{sin(MPC)} = \frac{\sin(45° - \angle O_1'BC')}{sin(O_1'BC')} = \frac{\sin(\angle TBO_1')}{sin(\angle O_1'BC')}$$

Por otro lado, notemos que $\frac{BC'}{BT} = \frac{OB\sqrt{2}}{XB\sqrt{2}} = \frac{OB}{XB} = \frac{PB}{PC}$. Aplicando Boring Ratio Lemma en $\triangle TBC'$, se tiene que

$$\frac{\sin(\angle O_1'BC')}{sin(\angle TBO_1')} = \frac{PB}{PC} = \frac{C'B}{BT} = \frac{C'O_1'}{O_1'T}\frac{\sin(\angle O_1'BT)}{sin(\angle C'BO_1')}$$

Por lo que $C'O_1' = O_1'T$, justamente lo que necesitamos para concluir. $\blacksquare$