

Limits Continuity

Limit (ลิมิต)

ขีดจำกัดของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ค่า c (แต่ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ c จริงๆ)

เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้แบบนี้ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$

วิธีหา Limit

แทนค่าโดยตรง ถ้าแทนค่าแล้วไม่มีปัญหาค่าหาค่าได้ตรง ๆ

แยกตัวประกอบ ใช้เมื่อมีรูป $\frac{0}{0}$ แล้วแยกตัวประกอบเพื่อลดทอนเศษส่วน

คูณด้วยตัวร่วมสังยุค ใช้กับฟังก์ชันที่มีรากที่สอง

กฎของโลปีตา ใช้กับฟังก์ชันที่มีรากที่สอง ใช้กับกรณีที่ได้รูป $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ โดยใช้อนุพันธ์

ประเภท Limit

One Sided Limit ลิมิตด้านเดียว

ลิมิตด้านซ้าย $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ คือ ค่าที่ $f(x)$ เข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ a จากด้านซ้าย

ลิมิตด้านขวา $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ คือ ค่าที่ $f(x)$ เข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ a จากด้านขวา

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ **แสดงว่า** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ **มีอยู่จริง**

Infinite limit ลิมิตอนันต์

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ หมายถึง เมื่อ x เข้าใกล้ a แล้ว $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงเรื่อย ๆ แบบไม่มีขีดจำกัด

limit at infinite ลิมิตที่อนันต์

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ หมายถึง ค่าที่ $f(x)$ เข้าใกล้เมื่อ x เข้าใกล้ ∞

Contivity (ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน)

ฟังก์ชัน $f(x)$ จะต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1 $f(a)$ มีค่าอยู่

2 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ มีอยู่จริง

3 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

ถ้าฟังก์ชันไม่เป็นไปตามเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่ง จะเรียกว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous)

ประเภทของความไม่ต่อเนื่อง

Removable Discontinuity สามารถกำจัดความไม่ต่อเนื่องได้โดยการเติมค่าที่ขาดไป

Jump Discontinuity ค่าลิมิตด้านซ้ายและด้านขวาไม่เท่ากัน

Infinite Discontinuity ฟังก์ชันมีค่ามุ่งไปที่อนันต์ (∞ or $-\infty$)

กฎการหาลิมิตเบื้องต้น

1 กฎผลรวมและผลต่าง (Sum and Difference Rule)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

2 กฎคูณ (Product Rule)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

3 กฎหาร (Quotient Rule)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ (ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \text{)}$$

4 กฎคูณค่าสเกลาร์ (Constant Multiple Rule)

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ (เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงที่)}$$

5 กฎเลขชี้กำลัง (Power Rule)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

(เมื่อ n เป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเต็ม) ถ้า $f(a) \neq 0$

กฎการหาลิมิตเบื้องต้น

1 ฟังก์ชันมีค่าอยู่ที่ $x = a$

หมายความว่า $f(a)$ ต้องมีความหมายและนิยามได้ (ไม่เป็นนิยามที่เป็น ∞ หรือไม่ได้กำหนด)

2 ลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a มีอยู่

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

(มีค่าแน่นอน (ลิมิตซ้ายและลิมิตขวาต้องมีค่าและเท่ากัน))

3 ค่าลิมิตเท่ากับค่าฟังก์ชันที่จุดนั้น

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ข้อข้างต้นเป็นจริง ฟังก์ชันจะต่อเนื่องที่จุด $x = a$

Straight Line Conic Section

Straight Line (เส้นตรง)

1.1 สมการเส้นตรงในระนาบ

สมการทั่วไป (General Form)

$$Ax + By + C = 0$$

โดยที่ A B C เป็นค่าคงที่ และ A กับ B ไม่สามารถเป็นศูนย์พร้อมกัน

สมการรูปตัดแกน (Slope-Intercept Form)

$$y = mx + b$$

โดยที่ m คือความชัน (slope) ของเส้นตรง
b คือจุดตัดแกน y (y-intercept)

สมการจุด-ความชัน (Point-Slope Form)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ใช้เมื่อต้องการสมการผ่านจุด (x_0, y_0) และมีความชัน m

1.2 ความชันและลักษณะของเส้นตรง

ความชัน (Slope)

คำนวณจากการเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อ x เปลี่ยนไป

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

เส้นขนาน (Parallel Lines)

มีความชันเท่ากัน

$$m_1 = m_2$$

เส้นตั้งฉาก (Perpendicular Lines)

ความชันคูณกันแล้วได้ -1

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

1.3 ระยะห่างระหว่างจุดและเส้นตรง

ระยะห่างจากจุด (x_0, y_0) ถึงเส้นตรง $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Conic Sections (รูปคอนิก)

Conic sections คือรูปทรงที่เกิดจากการตัดระนาบกับกระบอกสองเหลี่ยม ได้แก่ วงกลม, วงรี, พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา

2.1 สมการเส้นตรงในระนาบ

สมการมาตรฐาน

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

โดยที่ (h,k) คือจุดศูนย์กลาง และ r คือรัศมีของวงกลม

2.3 พาราโบลา (Parabola)

สมการมาตรฐาน (เปิดไปทางขวาหรือซ้าย)

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

or

$$(y - k)^2 = -4p(x - h)$$

สำหรับพาราโบลาที่เปิดไปทางซ้าย

สมการมาตรฐาน (เปิดไปทางขึ้นหรือลง)

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

โดยที่ (h,k) คือจุดยอด (vertex)
และ p คือระยะจากจุดยอดถึงโฟกัส

คุณสมบัติ

มีเส้นตรงแนวแกนสมมาตร (axis of symmetry)
และมีโฟกัส (focus) กับไดเรกทริกซ์ (directrix)

2.2 วงรี (Ellipse)

สมการมาตรฐาน (แนวแกนหลักอยู่ตามแกน x)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$$

โดยที่ (h,k) คือจุดศูนย์กลาง, a คือความยาวแกนหลักครึ่งหนึ่ง, b คือความยาวแกนรองครึ่งหนึ่ง

คุณสมบัติ

มีจุดโฟกัส 2 จุด ซึ่งอยู่บนแกนที่มีความยาว 2a

2.4 ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

สมการมาตรฐาน (แนวแกนหลักอยู่ตามแกน x)

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

สมการมาตรฐาน (แนวแกนหลักอยู่ตามแกน y)

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

โดยที่ (h,k) คือจุดศูนย์กลาง, a คือระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอดบนแกนหลัก และ b เกี่ยวข้องกับระยะของ asymptotes (เส้นคาง)

คุณสมบัติ

มีสองกิ่ง (branches) และมี asymptotes ที่เส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางซึ่งเป็นแนวทางที่กิ่งของไฮเพอร์โบลาเข้าใกล้เมื่อ x หรือ y มีค่าใกล้ศูนย์พอดี