

# 《空间机器人动力学模型》说明

弓铎

2018 年 3 月 9 日

空间机械臂动力学模型，根据 Matlab 语言 SpaceDyn 编写

- Python3.6
- 只完成前向动力学
- 某些变量（构型变量）的存储下标并未从零开始，待标准化
- 关节类型只考虑转动关节（rotational），未处理平动关节
- 使用多维数组时，多次强制进行形状转换（reshape），可能导致不易察觉的错误，待改进

## 0. 变量说明 (self)

1. 构型相关：（connect 相关变量存储下标存在问题，并未从 0 开始）
  - link\_num: 连杆数目  $n$ ，编号从 0 到  $n-1$ ，其中，0 为基座
  - connect\_lower: 低连接， $1 \times n - 1$  数组，connect\_lower[i] 表示编号  $i+1$  连杆的低连接编号
  - connect\_upper: 高连接， $n - 1 \times n - 1$  数组
  - connect\_end, connect\_base: 是否与末端、基座相连（1 是，0 否）
2. inertia: 惯量矩阵， $n \times 3 \times 3$  数组，第一下标表示连杆编号
3. mass: 质量，分别为连杆质量
4. q\_from\_Bi\_to\_i: 连杆姿态，为坐标系  $\sum_{B_i}$  到坐标系  $\sum_i$  的欧拉角变换
5. link\_vector: 连杆矢量， $n + 1 \times n + 1 \times 3$  数组，意义如图

## 1. 方向余弦和坐标变换

1. 坐标系定义：原点固连在关节上， $z$  轴为关节旋转轴（关节角  $q$  相关），其余定义可由 self.q\_from\_Bi\_to\_i 和 self.link\_vector 确定
2. 方向余弦，采用如下定义：

$$\begin{aligned}\left\{\sum_i\right\} &= {}^iC_{i-1}\left\{\sum_{i-1}\right\} \\ &= [C_3(q_i)C_3(\gamma_i)C_2(\beta_i)C_1(\alpha_i)]^T\left\{\sum_{i-1}\right\}\end{aligned}$$

3. 坐标变换:  ${}^I A_i = C_i^T$

## 2. 运动学

1. 计算坐标变换  $A = \text{calc\_coordinate\_transform}(A_0, q)$

$$\begin{aligned} A_i &= A_{B_i} \cdot {}^i C_{B_i}^T \\ &= A_{B_i} \cdot (C_z(\gamma + q_i) C_y(\beta) C_x(\alpha))^T \end{aligned}$$

2. 计算连杆位置  $R = \text{calc\_position}(R_0, A, q)$

$$R_i = R_{B_i} + A_{B_i} \cdot l_{B_i, i} - A_i \cdot l_{i, i}$$

3. 计算连杆速度  $v, \omega = \text{calc\_velocity}(A, v_0, \omega_0, q, \dot{q})$

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_{B_i} + (A_i \cdot e_z) \dot{q}_i \\ v_i &= v_{B_i} + \omega_{B_i} \times (A_{B_i} \cdot l_{B_i, i}) - \omega_i \times (A_i \cdot l_{i, i}) \end{aligned}$$

4. 计算连杆加速度

## 3. 前向动力学

系统动力学方程写作:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_b & \mathbf{H}_{bm} \\ \mathbf{H}_{bm}^T & \mathbf{H}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_b \\ \ddot{\Theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \boldsymbol{\tau}_m \end{bmatrix} \quad (1)$$

1. 计算平动雅克比矩阵  $J_t = \text{calc\_translational\_jacobian}(R, A)$

$$\begin{aligned} J_{ti} &= [k_1 \times (r_i - p_1), \dots, k_i \times (r_i - p_i), 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{3 \times n} \\ &= (A_j \cdot e_z) \times (R_i - R_j - (A_j \cdot l_{j, j})) \end{aligned}$$

(i,j 详细计算见程序)

2. 计算转动雅克比矩阵  $J_r = \text{calc\_rotational\_jacobian}(R, A)$

$$\begin{aligned} J_{ri} &= [k_1, \dots, k_i, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^{3 \times n} \\ &= (A_j \cdot e_z) \end{aligned}$$

(i,j 详细计算见程序)

3. 计算惯量矩阵  $H = \text{calc\_inertia\_matrices}(R, A)$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \omega E & \tilde{\omega} r_{0g}^T & J_{tg} \\ \tilde{\omega} r_{0g} & H_{\omega} & H_{\omega q} \\ J_{tg}^T & H_{\omega q}^T & H_q \end{bmatrix}$$

对于公式1, 各项计算有:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_b \in \mathbb{R}^{6 \times 6} &= \begin{bmatrix} \omega E & \tilde{\omega} r_{0g}^T \\ \tilde{\omega} r_{0g} & \mathbf{H}_{\omega} \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_{bm} \in \mathbb{R}^{6 \times n} &= \begin{bmatrix} J_{t\omega} \\ H_{\omega\phi} \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_{\omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} &= \sum_{i=1}^n (I_i + m_i \tilde{r}_{oi}^T \tilde{r}_{oi}) + I_0 \\ \mathbf{H}_{\omega\phi} \in \mathbb{R}^{3 \times n} &= \sum_{i=1}^n (I_i J_{Ri} + m_i \tilde{r}_{0i} J_{Ti}) \\ J_{T\omega} \in \mathbb{R}^{3 \times n} &= \sum_{i=1}^n (J_{Ri}^T I_i J_{Ri} + m_i J_{Ti}^T J_{Ti}) \end{aligned}$$

- $m_i$  : 连杆质量
- $\omega$  : 系统总质量
- $r_i$  : 连杆质心的位置矢量
- $p_i$  : 关节的位置矢量
- $r_g$  : 系统质心位置矢量
- $c_b, c_m$  : 非线性项
- $\tau$  : 关节力矩

#### 4. 递归牛顿欧拉法