《空间机器人动力学模型》说明

弓铎

2018 年 3 月 9 日

空间机械臂动力学模型，根据 Matlab 语言 SpaceDyn 编写

- Python3.6
- 只完成前向动力学
- 某些变量（构型变量）的存储下标并未从零开始，待标准化
- 关节类型只考虑转动关节（rotational），未处理平动关节
- 使用多维数组时，多次强制进行形状转换（reshape），可能导致不易察觉的错误，待改进

0. 变量说明 (self)

1. 构型相关：（connect 相关变量存储下标存在问题，并未从 0 开始）
   - link_num: 连杆数目 n，编号从 0 到 n-1，其中，0 为基座
   - connect_lower: 低连接，$1 \times n-1$ 数组，connect_lower[i] 表示编号 i+1 连杆的低连接编号
   - connect_upper: 高连接，$n-1 \times n-1$ 数组
   - connect_end,connect_base: 是否与末端、基座相连（1 是，0 否）
2. inertia: 惯量矩阵，$n \times 3 \times 3$ 数组，第一下标表示连杆编号
3. mass: 质量，分别为连杆质量
4. q_from_Bi_to_i: 连杆姿态，为坐标系 $\sum_{Bi}$ 到坐标系 $\sum_i$ 的欧拉角变换
5. link_vector: 连杆矢量，$n+1 \times n+1 \times 3$ 数组，意义如图

1. 方向余弦和坐标变换

1. 坐标系定义：原点固连在关节上，z 轴为关节旋转轴（关节角 q 相关），其余定义可由 self.q_from_Bi_to_i 和 self.link_vector 确定
2. 方向余弦，采用如下定义:

$$\begin{aligned}\left\{\sum\nolimits_i\right\} &= {}^iC_{i-1}\left\{\sum\nolimits_{i-1}\right\} \\ &= \left[C_3(q_i)C_3(\gamma_i)C_2(\beta_i)C_1(\alpha_i)\right]^T\left\{\sum\nolimits_{i-1}\right\}\end{aligned}$$

3. 坐标变换：${}^{I}A_i = C_i^T$

2. 运动学

1. 计算坐标变换 $A = clac\_coordinate\_transform(A_0, q)$

$$\begin{aligned} A_i &= A_{B_i} \cdot {}^{i}C_{B_i}^T \\ &= A_{B_i} \cdot (C_z(\gamma + q_i)C_y(\beta)C_x(\alpha))^T \end{aligned}$$

2. 计算连杆位置 $R = calc\_position(R_0, A, q)$

$$R_i = R_{B_i} + A_{B_i} \cdot l_{B_i,i} - A_i \cdot l_{i,i}$$

3. 计算连杆速度 $v, \omega = calc\_velocity(A, v_0, \omega_0, q, \dot{q})$

$$\begin{aligned} \omega_i &= \omega_{B_i} + (A_i \cdot e_z)\dot{q}_i \\ v_i &= v_{B_i} + \omega_{B_i} \times (A_{B_i} \cdot l_{B_i,i}) - \omega_i \times (A_i \cdot l_{i,i}) \end{aligned}$$

4. 计算连杆加速度

3. 前向动力学

系统动力学方程写作：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_b & \boldsymbol{H}_{bm} \\ \boldsymbol{H}_{bm}^T & \boldsymbol{H}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_b \\ \ddot{\boldsymbol{\Theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_b \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_b \\ \boldsymbol{\tau}_m \end{bmatrix} \tag{1}$$

1. 计算平动雅克比矩阵 $J_t = calc\_translational\_jacobian(R, A)$

$$\begin{aligned} J_{ti} &= [k_1 \times (r_i - p_1), \cdots, k_i \times (r_i - p_i), 0, \cdots, 0] \in \mathbb{R}^{3\times n} \\ &= (A_j \cdot e_z) \times (R_i - R_j - (A_j \cdot l_{j,j})) \end{aligned}$$

(i,j 详细计算见程序)

2. 计算转动雅克比矩阵 $J_r = calc\_rotational\_jacobian(R, A)$

$$\begin{aligned} J_{ri} &= [k_1, \cdots, k_i, 0, \cdots, 0] \in \mathbb{R}^{3\times n} \\ &= (A_j \cdot e_z) \end{aligned}$$

(i,j 详细计算见程序)

3. 计算惯量矩阵 $H = clalc\_inertia\_matrices(R, A)$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \omega E & \tilde{\omega r}_{0g}^T & J_{tg} \\ \tilde{\omega r}_{0g} & H_\omega & H_{\omega q} \\ J_{tg}^T & H_{\omega q}^T & H_q \end{bmatrix}$$

对于公式1, 各项计算有:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_b \in \mathbb{R}^{6\times 6} &= \begin{bmatrix} \omega E & \omega\tilde{r}_{0g}^T \\ \omega\tilde{r}_{0g} & \boldsymbol{H}_\omega \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{H}_{bm} \in \mathbb{R}^{6\times n} &= \begin{bmatrix} J_{t\omega} \\ H_{\omega\phi} \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{H}_\omega \in \mathbb{R}^{3\times 3} &= \sum_{i=1}^{n} (I_i + m_i \tilde{r}_{oi}^T \tilde{r}_{0i}) + I_0 \\
\boldsymbol{H}_{\omega\phi} \in \mathbb{R}^{3\times n} &= \sum_{i=1}^{n} (I_i J_{Ri} + m_i \tilde{r}_{0i} J_{Ti}) \\
J_{T\omega} \in \mathbb{R}^{3\times n} &= \sum_{i=1}^{n} (J_{Ri}^T I_i J_{Ri} + m_i J_{Ti}^T J_{Ti})
\end{aligned}$$

m_i	:	连杆质量
ω	:	系统总质量
r_i	:	连杆质心的位置矢量
p_i	:	关节的位置矢量
r_g	:	系统质心位置矢量
c_b, c_m	:	非线性项
τ	:	关节力矩

4. 递归牛顿欧拉法: 对于第 i 个连杆的牛顿、欧拉公式为:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_i &= m_i \dot{v}_i \\
\boldsymbol{N}_i &= I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i)
\end{aligned}$$

其中，是施加在连杆质心上的惯性力和力矩。对于关节与末端上的力与力矩: