Ergänzung

Komplexe Schwingungen

- Darstellung harmonischer Schwingungen
- Überlagerung harmonischer Schwingungen

Harmonische Schwingungen

Harmonische Schwingungen werden als Sinusschwingungen geschrieben:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

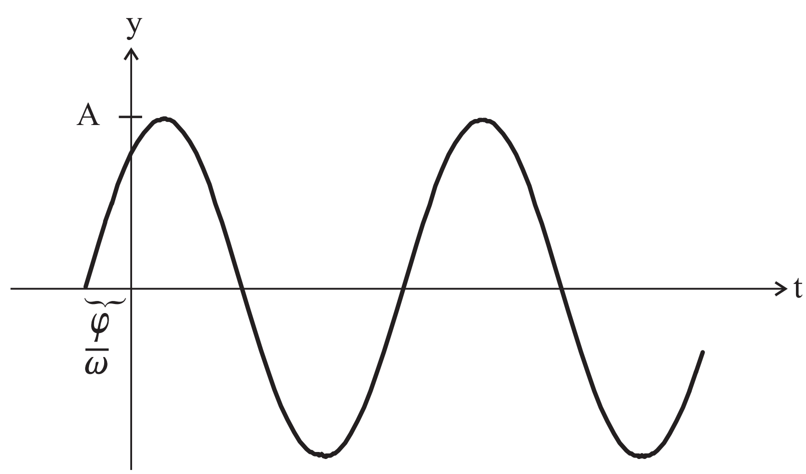
Dabei:
Amplitude A, Kreisfrequenz ω, Phase φ

Sowie:
Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$, Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$

Harmonische Schwingungen

Harmonische Schwingungen werden als Sinusschwingungen dargestellt:

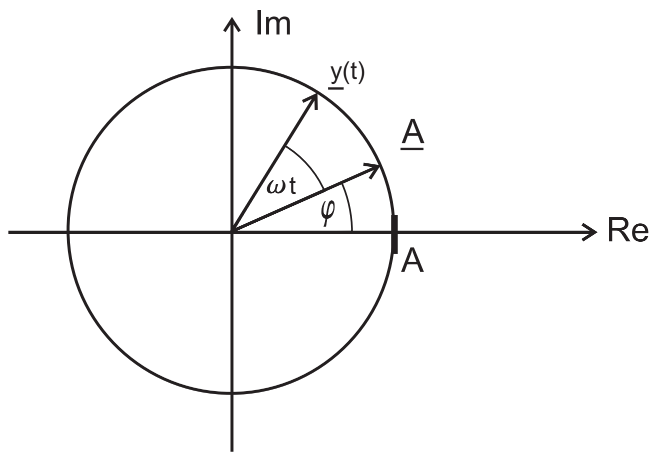
$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$



Darstellung im Komplexen

Harmonische Schwingungen werden im Komplexen als rotierende Zeiger dargestellt:

$$\underline{y}(t) = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = \underbrace{A \cdot e^{i\varphi}}_{=:\underline{A}} \cdot e^{i\omega t}$$



Der momentane (reelle) Wert der Sinusschwingung entspricht dabei dem Imaginärteil des rotierenden (komplexen) Zeigers.

Die komplexe Schreibweise dient insbesondere dazu, gleichfrequente sinusförmige Schwingungen zu überlagern:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

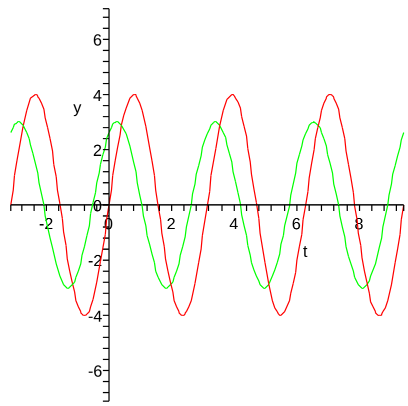
Die resultierende Schwingung $y_1 + y_2$ ist wiederum eine harmonische Schwingung:

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

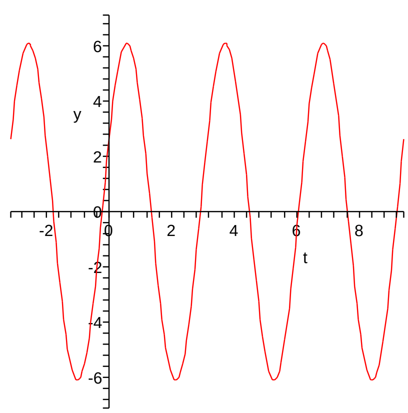
mit zu berechnender Amplitude A und Phase φ.

Beispiel

$$\begin{aligned} y_1 &= 4 \cdot \sin(2t) \\ y_2 &= 3 \cdot \sin(2t + \pi/3) \end{aligned}$$



Die resultierende Schwingung $y_1 + y_2$ ist dann:



Vorgehen: Addition gleichfrequenter Schwingungen

Zwei vorgegebene Schwingungen, die überlagert werden sollen:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \\ y_2 &= A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

- komplex schreiben

$$\begin{aligned} \underline{y_1} &= A_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\omega t} &= \underline{A_1} \cdot e^{i\omega t} \\ \underline{y_2} &= A_2 \cdot e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\omega t} &= \underline{A_2} \cdot e^{i\omega t} \end{aligned}$$

- Superposition

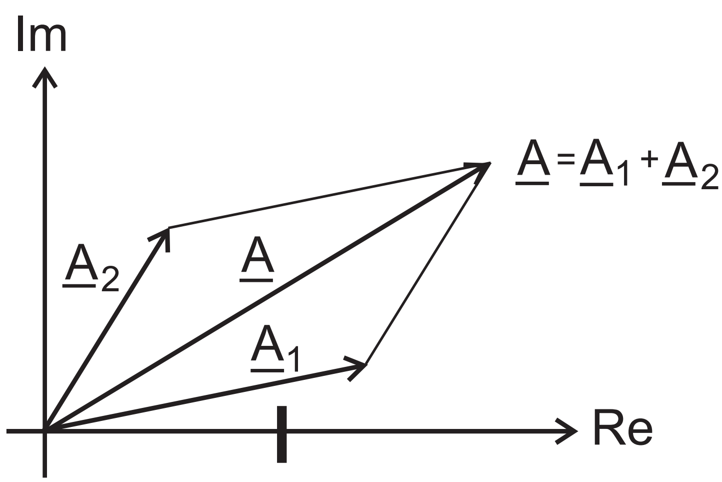
$$\underline{y} = \underline{y_1} + \underline{y_2} = (\underline{A_1} + \underline{A_2}) \cdot e^{i\omega t} = \underline{A} \cdot e^{i\omega t}$$

- zurück reell schreiben

$$y = Im(\underline{y})$$

Unter der Superposition versteht man dabei die Addition komplexer Zahlen:

$$\underline{A} = \underline{A_1} + \underline{A_2}$$



Beispiel: Addition gleichfrequenter Schwingungen

Zwei vorgegebene Schwingungen, die überlagert werden sollen:

$$\begin{aligned} y_1 &= 4 \cdot \sin(2t) \\ y_2 &= 3 \cdot \sin(2t + \pi/3) \end{aligned}$$

Zunächst: Schwingungen komplex schreiben

$$\begin{aligned} \underline{y_1} &= 4 \cdot e^{i2t} &&= 4 && \cdot e^{i2t} \\ \underline{y_2} &= 3 \cdot e^{i(2t+\pi/3)} &&= 3e^{i\pi/3} && \cdot e^{i2t} \end{aligned}$$

Superposition:

$$\underline{y_1} + \underline{y_2} = \left(4 + 3e^{i\pi/3}\right) \cdot e^{i2t}$$

Superposition, komplexe Addition

$$\underline{y_1} + \underline{y_2} = \left(4 + 3e^{i\pi/3}\right) \cdot e^{i2t}$$

$$\begin{aligned} 4 + 3e^{i\pi/3} &= 4 + 3\cos\pi/3 + 3i\sin\pi/3 \\ &= 4 + 3 \cdot 0,5 + 3i\sqrt{3}/2 \\ &= 5,5 + 2,598i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{5,5^2 + 2,598^2} = 6,08 \\ \tan\varphi &= 2,598/5,5 = 0,4724 \\ \varphi &= \arctan 0,4724 = 0,44 \end{aligned}$$

$$\underline{y} = \underline{y_1} + \underline{y_2} = 6,08 \cdot e^{i0,44} \cdot e^{i2t}$$

Die komplexe Addition lieferte für die Superposition der beiden Schwingungen:

$$\underline{y} = \underline{y_1} + \underline{y_2} = 6,08 \cdot e^{i0,44} \cdot e^{i2t}$$

Damit ergibt sich für die resultierende Schwingung in reeller Schreibweise:

$$y = 6,08 \cdot \sin(2t + 0,44)$$

Übung

Berechnen Sie die Superposition folgender Schwingungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t + \pi/2) \\ y_2 &= \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Lösung

Zwei vorgegebene Schwingungen, die überlagert werden sollen:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t + \pi/2) \\
y_2 &= \sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Zunächst: Schwingungen komplex schreiben

$$
\begin{array}{lllll}
\underline{y_1} & = \sqrt{3} \cdot e^{i\pi/2} \cdot e^{i\omega t} & = \sqrt{3} \cdot e^{i\pi/2} & \cdot e^{i\omega t} \\
\underline{y_2} & = e^{i\omega t} & = 1 & \cdot e^{i\omega t}
\end{array}
$$

Superposition:

$$
\underline{y} = \underline{y_1} + \underline{y_2} = \underbrace{\left(\sqrt{3} \cdot e^{i\pi/2} + 1\right)}_{=:\underline{A}} \cdot e^{i\omega t}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{A} &= \sqrt{3} \cdot e^{i\pi/2} + 1 \\
&= \sqrt{3} \cos \pi/2 + \sqrt{3} i \sin \pi/2 + 1 \\
&= 1 + i\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\underline{A}| &= \sqrt{1+3} = 2 \\
\varphi &= \arctan \sqrt{3}/1 = 1{,}047
\end{aligned}
$$

$$\underline{y} = \underline{y_1} + \underline{y_2} = 2 \cdot e^{i1{,}047} \cdot e^{i\omega t}$$

$$y = 2 \cdot \sin(\omega t + 1{,}047)$$