Содержание

1 День 0*. Прелюдия, повторяем комбинаторику

2 День 1. Случайные события и элементарное определение вероятности

Назовем *множеством элементарных исходов* $\Omega = \{\omega_1\omega_2, ...\omega_n\}$ такое конечное множеством, что ω_i и ω_j несовместны

Тогда *Событие* - это любое множество элементарных исходов.

Пусть $A \subset \Omega$ - событие, тогда

- $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$
- $A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$
- $\complement A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$

Примечание. Рассмотрим эксперимент бросок кубика d6

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Событие, что выпала грань с четным числом - {2,4,6} Событие, что выпала грань с числом меньше 3 - {1,2}

Определим некоторую функцию $P : \Omega \to [0, 1]$, которую назовем *распределением вероятностей* Такую, что

$$\sum_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$$

Вероятность P(A) *события* A тогда определим как

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega)$$

Пару (Ω, P) будем называть *Дискретным вероятностным пространством*

Примитивные свойства:

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(\complement A) = 1 - P(A)$
4. Если A и B *не совместны* то есть $A \cap B = \varnothing$ то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Вопрос аудитории: Верно ли что нулевая вероятность может быть только у пустого события ($\varnothing$) ?

Теорема 1 (Формула включений-исключений)**.**

$$P(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) = \sum_{1}^{m} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) ... + (-1)^{m-1} P(\bigcap_{i=1}^{m} A_i)$$

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по m

База при m = 1 очевидна, при m = 2 сошлемся на пятый пункт, который также очевиден.

Переход от m к m+1:

Пусть $B = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$

$$P(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i) = P(B \cup A_{m+1}) = P(B) + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1})$$

Пусть $B_i = A_i \cap A_{m+1} \Rightarrow P(B \cap A_{m+1}) = P(\bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i)$

$$\Rightarrow P(B) + P(A_{m+1}) - P(B \cap A_{m+1}) = P(B) + P(A_{m+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{m} B_i)$$

$$= (\sum_{1}^{m} P(A_i) - \sum_{i<j\leqslant m} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k\leqslant m} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ...) + P(A_{m+1})$$

$$-(\sum_{1}^{m} P(A_i \cap A_{m+1}) - \sum_{i<j\leqslant m} P(A_i \cap A_j \cap A_{m+1}) + ...)$$

Остается сгруппировать и понять, что это именно то, что нас интересует.

Q.E.D.

Рассмотрим важный частный случай, когда все элементарные исходы равновозможны, то есть $P(w_i) = \frac{1}{|\Omega|}$

Тогда вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

3 День 2. Условная вероятность и независимые события

Пусть $P(B) > 0$

Тогда Вероятность события A *при условии* что наступило событие B определим как

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Свойства

1. $P(A|A) = 1$ и если $B \subset A$ то $P(A|B) = 1$
2. $P(\varnothing|B) = 0$
3. Если A_1 и A_2 не совместны, то $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$
4. $P(\complement A|B) + P(A|B) = 1$ **Вопрос аудитории:** Будет ли равняться 1 $P(A|B) + P(A|\complement B)$

4 День 3. Случайные величины и вероятностные характеристики

5 День 4. Геометрическая вероятность и Метод Монте-Карло

6 День 5. Эпилог, что дальше?

7 День 6. Зачет

Post Scriptum