1

La voix et l'image

son : onde acoustique
image : onde lumineuse
=> physique ondulatoire.

A. La voix

1. notion d'onde

a. généralités

- onde : transmission | d'un signal d'un point à un autre sans | d'énergie

transport de matière

- types d'ondes : - matérielles, lumineuse, électrique
  - scalaire, vectorielle

ondes matérielles scalaires : - longitudinales
- transversales
- de surface

- représentation mathématique d'une :
  - onde scalaire : grandeur qui dépend - de l'espace - du temps

=> fonction à 4 variables : $f(x, y, z, t)$

- onde vectorielle : vecteur 3 composantes

=> $\vec{A}(x, y, z, t)$

3 fct° de 4 variables
$$\begin{cases} A_x(x, y, z, t) \\ A_y(x, y, z, t) \\ A_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

• onde plane : onde qui se propageant selon une direction donnée
ex : onde se déplace propageant selon (Ox) ⇒ amplitude $f(x,t)$

b. Onde mécanique

signal : déplacement local des molécules

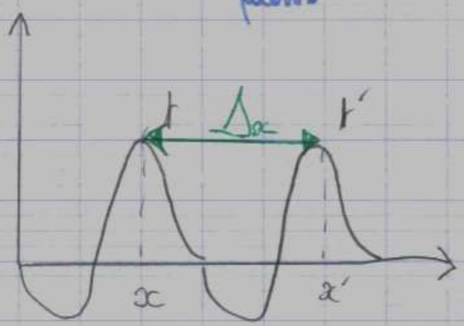
- corde vibrante (transversale)
- compression d'un ressort (longitudinale)
- onde à la surface de l'eau
- ondes élastiques (onde acoustique)

signal déplacement de molécules du milieu

- dans un liquide/gaz / fluide longitudinal onde de pression
- dans un solide : longitudinal (pression) et transversal (cisaillement)

c. Ondes progressives

- onde qui se propage à vitesse constante sans déformation
  - caractérisée par sa vitesse / célérité c en $m.s^{-1}$



onde progressive
⇒ amplitude en (x',t')
= amplitude en (x,t)

$$\Delta x = c\Delta t$$
$$x'-x = c(t'-t)$$
$$x'-ct' = x-ct$$

pour conserver l'amplitude de l'onde constante, il faut $x - ct = cste$

$$\boxed{\rightarrow f(x,t) = f(x-ct)}$$

- généralisation à une onde plane quelconque
  direction propagation : vecteur unitaire $\vec{u}$

$M \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right.$ repéré par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $f(\vec{r},t) = f(\vec{r}.\vec{u} - ct)$

d. Onde harmonique (ou sinusoïdale)

- fonct° sinusoïdale du temps
  → caractérisé par
  - pulsat° ω $rad.s^{-1}$
  - fréquence f Hz
  - période T s

$$f(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

$$\boxed{f(x,t) = A\cos(\omega t - kx)}$$ avec $k = \frac{\omega}{c}$

- propagation selon $\vec{u}$ $f(\vec{r},t) = A\cos(\omega t - k\vec{r}.\vec{u})$
  $= A\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r})$ avec $\vec{k} = k\vec{u}$

$\vec{k}$ vecteur d'onde

- double périodicité : - temporelle
  - spatiale

temps	espace	unité
ω	k	$rad.s^{-1}$
f	σ	m^{-1}
T	λ	m

$\lambda = cT$

• notation complexe

$$f(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

on lui associe une fct° complexe

$$\underline{f}(x,t) = A\, e^{i(\omega t - kx)}$$

seul $f(x,t)$ a une signification physique

$$f(x,t) = \mathrm{Re}(\underline{f}(x,t))$$

• on admet que toute onde progressive peut se décomposer en une superposit° d'ondes harmoniques de différentes fréquences

• onde harmonique : notre plane

2. Onde sphérique

• onde progressive non plane, onde qui se propage dans plusieurs directions
- front d'onde : ensemble des points vibrants en phase

ex : onde plane selon (Ox) : front d'onde = plan $\perp (Ox)$

• onde sphérique : onde émise par une source ponctuelle isotrope.

<u>front d'onde</u> : ensemble de sphères concentriques centrées sur la source

<u>paramètre d'espace</u> : r distance entre la source et le point M

$$f(r,t) = A(r)\, f(r - ct) \Rightarrow f(r,t) = \frac{A}{r} f(r - ct)$$

3

+ onde sphérique harmonique

$$f(r,t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$$

f. Intensité et puissance de l'onde

· puissance : $\mathcal{P}$ énergie totale émise par la source par unité de temps (W)

· intensité : I puissance reçue par unité de surface ($W\,m^{-2}$)

$$I = \frac{\mathcal{P}}{S}$$

On admet par l'instant $I \underset{\text{proportionnel}}{\propto} \langle f^2 \rangle$ (valeur moyenne)

· onde sphérique : front d'onde $(r,t) \to (r',t')$

conservat° de l'énergie :
$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(t')$$
$$I(t)\, S(t) = I(t')\, S(t')$$
$$I(r)\, S(r) = I(r')\, S(r')$$
$$\alpha \left(A(r)\, f(r-ct)\right)^2 4\pi r^2 = \alpha \left[A(r')\, f(r'-ct')\right]^2 4\pi r'^2$$
$$A^2(r)\, f^2(r-ct)\, r^2 = A^2(r')\, f^2(r'-ct')\, r'^2$$

$\longrightarrow$

même front d'onde
$$r - ct = r' - ct'$$
$$f(r-ct) = f(r'-ct')$$
$$A^2(r)\, r^2 = A^2(r')\, r'^2$$

$$\boxed{A(r) = A(r')\,\frac{r'}{r}} \quad \forall r, r'$$

Par exemple $r' = 1$ $\quad A(r) = \frac{A(1)}{r} = \frac{A}{r}$

2 - Ondes acoustiques (dans un fluide)

- onde acoustique : onde mécanique
  signal : · vibration des molécules du milieu
  · variation de pression

a. Pression - pression acoustique

- fluide : milieu constitué de molécules pouvant se déplacer librement (sous l'agitation thermique)
  → chocs entre molécules.
  → force
  → pression $\left[P = \frac{F}{S} \right]$ ($N m^{-2}$ ou Pa)

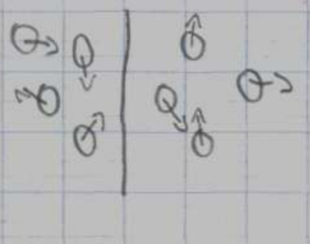
- ordre de grandeur : air à T° ambiante
  vitesse moyenne : $\langle v \rangle = 400\ m.s^{-1} = 1400\ km/h$

  distance entre 2 chocs : $\langle l \rangle = 70\ nm$
  libre parcours moyen :

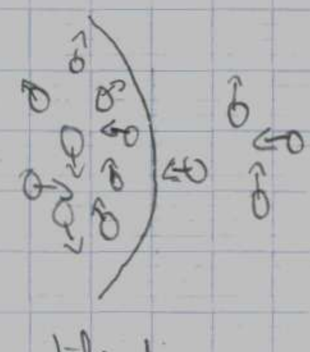
  nbre de collision par unité de temps : $\langle n \rangle = 5 \cdot 10^9$ collisions

  pression atmosphérique $P_0 = 1{,}013 \cdot 10^5\ Pa$

équilibre



équilibre.



déformation

loi des gaz parfaits $PV = n R T = n k T$
nbre de moles — nbre de molécules

· pression acoustique variat° de $P(t)$ (en un pt fixe)

$$P(t) = P_0 + p(t)$$
surpression acoustique.

b. Onde sonore

· onde sonore : onde acoustique audible par l'homme
  · son : variat° périodique de la pression
  · bruit

· caractérist° d'un son :
  - hauteur : aigu ou grave → fréquence
  - timbre : structure du motif
  - force : intensité de l'onde

· hauteur : son grave ou aigu caract. par la fréquence du signal périodique.
- l'effet de 2 sons : successifs (mélodie) ou simultanés (accords) dépend du rapport des fréquences f_2/f_1 et pas de la hauteur absolue

⇒ gamme composée d'octaves de 12 notes
  octave : doublement de fréquence
  - 2 notes différentes sont perçues si : $\frac{\Delta f}{f} \geq 1\%$
  - fréquences audibles par l'homme : $20\,Hz < f < 20\,kHz$
  infrasons — ultrasons

timbre : structure du motif répétitif

→ théorème de Fourier : tout signal périodique de fréquence f, peut se décomposer comme la somme de signaux sinusoïdaux de fréquence f, $2f$, $3f$, $4f$, ...

$$p(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

signal sinusoïdal de fréquence f fondamental
" " " " nf harmonique de rang $(n>1)$

- son "riche" fondamental + beaucoup d'harmoniques
- son "pur" fondamental avec peu d'harmoniques

· force : intensité de l'onde
amplitude de la pression acoustique

	p	I	α
seuil d'audition	$2\cdot10^{-5}$ Pa	10^{-12}	$0{,}5\cdot10^{-10}$
seuil de douleur	20	1	$0{,}5\cdot10^{-4}$

c) Niveau sonore

Tests de sensibilité ⇒ échelle logarithmique
Niveau sonore : $L_{(dB)} = 20 \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$ p_0 : pression de référence ou pression au seuil d'audition, $p_0 = 2\cdot10^{-5}$ Pa

$$I = \alpha . p^2 \Rightarrow \frac{I}{I_0} = \frac{\alpha p^2}{\alpha p_0^2}$$

I_0 : intensité au seuil d'audition
$I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2}

$$\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \sqrt{\frac{I}{I_0}} \Rightarrow L = 20 \log\left(\left(\frac{I}{I_0}\right)^{1/2}\right)$$

$$\boxed{L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

ex : • $I \to I \times 2 \implies L_2 = 10 \log\left(\frac{2I}{I_0}\right) = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) + 10 \log(2)$

$\quad\; L_1 \qquad L_2$

$$\implies L_2 = L_1 + 10 \log(2) \approx L_1 + 3 \text{ dB}$$

niveaux différents perçus si $\Delta L \gtrsim 1 \text{ dB}$

• onde sphérique : $I = \frac{A}{r^2}$

$$L(r) = 10 \log\left(\frac{A}{I_0 r^2}\right) = 10 \log\left(\frac{A}{I_0}\right) + 10 \log\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$L(r) = L_{à\,1m} - 20 \log(r)$$

• addition de sons :

2 sons d'intensité I_1 et I_2 qui s'ajoutent

- 2 sons incohérents : les intensités s'additionnent

$$I = I_1 + I_2$$

- 2 sons cohérents : les pressions s'additionnent.

$$P = P_1 + P_2$$

$$I = \alpha P^2 = \alpha (P_1 + P_2)^2 = \alpha P_1^2 + a P_2^2 + 2 \alpha P_1 P_2$$

$\to I = I_1 + I_2 + 2 I_M$ $\qquad$ I_M : intensité moyenne des sons I_1 et I_2.

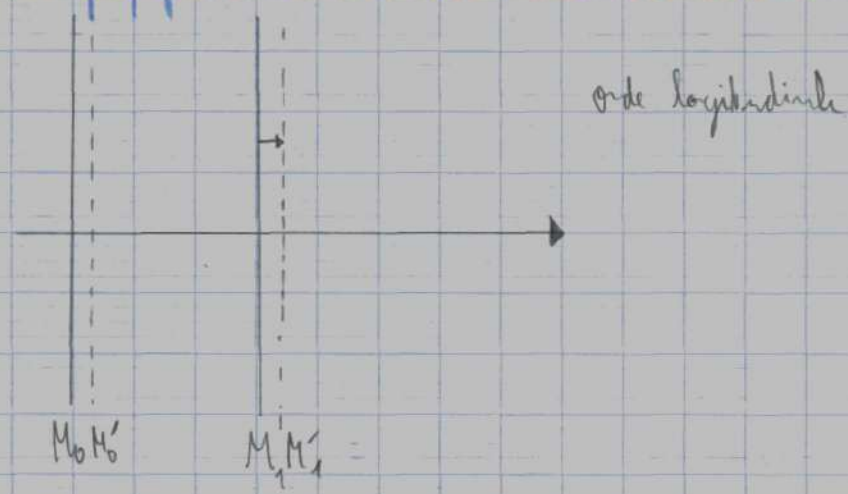
si $I_1 = I_2 \implies I = 4 I_1$

3. Propagation d'une onde acoustique

a. Propagation d'un ébranlement

ébranlement : déplacement rapide et de faible amplitude des molécules du milieu.

⇒ compression ⇒ mise en mvt des molécules adjacentes.
⇒ propagation de l'ébranlement avec une certaine vitesse.



grandeurs mises en jeu : • $\chi(x,t)$ déplacement

• $P(x,t) = P_0 + P_a(x,t)$ (pression totale ; Pression acoustique)

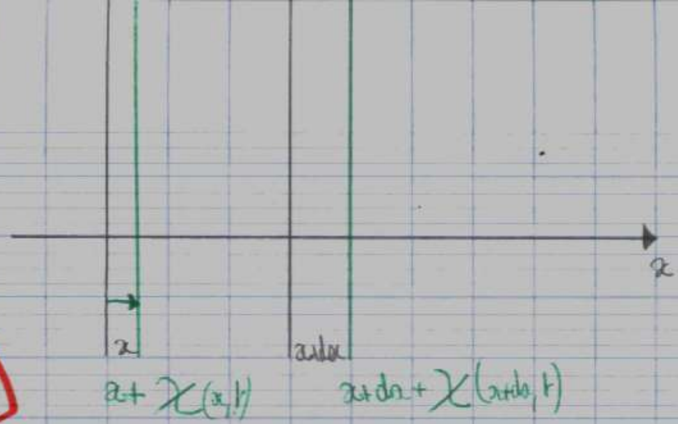
• vitesse • accélération • masse volumique : $\rho(x,t) = \rho_0 + \rho_a(x,t)$

faible amplitude : $P_a \ll P_0$ et $\rho_a \ll \rho_0$

b. Equation de propagation

3 phénomènes :
I le gaz se déplace et change de densité
II le chgt de densité entraîne un chgt de pression
III les inégalités de pressions engendrent le déplacement des molécules adjacentes.

6



$dx \ll 1$

⚠ On note $y(x,t)$ au lieu de χ qui est le coeff de compressibilité

Conservation de la masse : $m_0 = m$

$$\rho_0 V_0 = \rho V \Rightarrow \rho_0 S\,dx = \rho S\big(x+dx+\chi(x+dx,t) - (x+\chi(x,t))\big)$$

$$\Rightarrow \rho_0\,dx = \underbrace{\rho}_{\rho_0+\rho_a}\big(dx + \underbrace{\chi(x+dx,t) - \chi(x,t)}_{\frac{d\chi(x,t)}{dx}\times dx}\big)$$

$$\rho_0\,\cancel{dx} = (\rho_0+\rho_a)\left(\frac{d\chi(x,t)}{dx}+1\right)\cancel{dx}$$

$$\cancel{\rho_0} = \cancel{\rho_0} + \rho_a + \rho_0\frac{d\chi(x,t)}{dx} + \rho_a\frac{d\chi}{dx}(x,t)$$

$$\rho_a = -(\rho_0+\rho_a)\frac{d\chi(x,t)}{dx} \simeq -\rho_0\frac{d\chi}{dx}$$

$$\boxed{\rho_a = -\rho_0\frac{d\chi(x,t)}{dx}}$$

II Dilatat° d'un gaz

relation P et ρ

$$P = f(\rho) = f(\rho_0+\rho_a)$$

$$= f(\rho_0) + f'(\rho_0)\rho_a$$

$$P_0 + P_a = P_0 + f'(\rho_0)\rho_a$$

$$\boxed{P_a = f'(\rho_0)\rho_a}$$

cste indépendante de l'écoulement

La dilatation : $\theta = \dfrac{V - V_0}{V_0}$

ici $m = \rho V = \rho_0 V_0 \Rightarrow V = \dfrac{m}{\rho}$ et $V_0 = \dfrac{m}{\rho_0}$

$$\theta = \frac{\frac{m}{\rho} - \frac{m}{\rho_0}}{\frac{m}{\rho_0}} = \rho_0 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = \frac{\rho_0}{\rho} - 1 = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho}$$

$$\theta = \frac{-\rho_a}{\rho_0 + \rho_a} \Rightarrow \theta \simeq -\frac{\rho_a}{\rho_0}$$

coefficient de compressibilité : $\chi = \dfrac{-1}{V} \left(\dfrac{V - V_0}{P - P_0} \right) = \dfrac{-\theta}{P - P_0}$

$\Rightarrow \chi = -\dfrac{\theta}{P_a} \Rightarrow \theta = -\chi P_a \Rightarrow -\dfrac{\rho_a}{\rho_0} = -\chi P_a$

$$\boxed{P_a = \frac{1}{\rho_0 \chi} \rho_a}$$

III Les inégalités de pression engendrent le mouvement du fluide.

· équation du mvt : $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

$m = m_0 = \rho_0 S dx$

$\vec{a} = \dfrac{d^2 y}{dt^2} \vec{e_x}$

$$\sum \vec{F} = \vec{F_g} + \vec{F_d} = P(x) S \vec{e_x} - P(x + dx) S \vec{e_x}$$
$$= \frac{dP}{dx} dx S \vec{e_x}$$

$=$

(7)

$$\sum \vec{F} = \left(P(x) - P(x+dx)\right) S \vec{e_x}$$
$$= -\frac{dP}{dx} dx \, S \vec{e_x} \qquad (P = P_0 + p_a)$$
$$= \frac{-d\,p_a\,dx}{dx} S \vec{e_x}$$

RFD : $\rho_0 S dx \dfrac{d^2 y}{dt^2} \vec{e_x} = -\dfrac{dp_a}{dx} S dx \vec{e_x}$

$$\boxed{\rho_0 \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{d p_a}{dx}}$$

• équation de propagation :

$$\rho_0 \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho_0 \chi_0} p_a\right) = \frac{-1}{\rho_0 \chi}\left(\frac{d p_a}{dx}\right)$$

$$\rho_0 \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{1}{\rho_0 \chi_0} \frac{d}{dx}\left(-\rho_0 \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\rho_0 \chi_0} \frac{d^2 y}{dx^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\rho_0 \chi_0} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\boxed{\frac{d^2 p_a}{dt^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_0} \frac{d^2 p_a}{dx^2}}$$

$$\boxed{\frac{d^2 p_a}{dt^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_0} \frac{d^2 p_a}{dx^2}}$$

$$[Pa.s^{-2}] = \left[\frac{1}{\rho_0 \chi}\right] \times [Pa.m^{-2}]$$

$$[\rho_0 \chi_0] = \left[\frac{Pa.s^{-2}}{Pa.m^{-2}}\right] = [m^2.s^{-2}] = (m.s^{-1})^2$$

On note $\boxed{c = 1/\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$ la célérité de l'onde

$$\boxed{\frac{d^2 p_a}{dt^2} = c^2 \times \frac{d^2 p_a}{dx^2}}$$

c) Résolution de l'équation de d'Alembert (à 1 dimension)

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 f}{dx^2}$$

• changement de variable : $\begin{cases} v = x - ct \\ w = x + ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v+w}{2} \\ t = \frac{w-v}{2c} \end{cases}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv} \times \frac{dv}{dx} + \frac{df}{dw} \times \frac{dw}{dx} = \frac{df}{dv} \times 1 + \frac{df}{dw} \times 1$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv} + \frac{df}{dw}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dv} + \frac{df}{dw}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{df}{dv} + \frac{df}{dw}\right) \underbrace{\frac{dv}{dx}}_{=1} + \frac{d}{dw}\left(\frac{df}{dv} + \frac{df}{dw}\right) \underbrace{\frac{dw}{dx}}_{=1}$$

$$\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 f}{dv^2} + 2\frac{d^2 f}{dv\,dw} + \frac{d^2 f}{dw^2}}$$

8

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dv} \times \frac{dv}{dt} + \frac{df}{dw} \times \frac{dw}{dt} = \frac{df}{dv}(-c) + \frac{df}{dw}(c)$$

$$\frac{df}{dt} = c\left(\frac{df}{dw} - \frac{df}{dv}\right)$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(c\left(\frac{df}{dw} - \frac{df}{dw}\right)\right) = c\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{df}{dw} - \frac{df}{dv}\right)\times\frac{dv}{dt}\right. \quad = -1$$

$$\left. + \frac{d}{dw}\left(\frac{df}{dw} - \frac{df}{dv}\right)\frac{dw}{dt}\right] \quad = c$$

$$\boxed{\frac{d^2f}{dt^2} = c^2\left[-2\frac{d^2f}{dv\,dw} + \frac{d^2f}{dv^2} + \frac{d^2f}{dw^2}\right]}$$

d'alembert $\Rightarrow$ $$c^2\left(-2\frac{d^2f}{dv\,dw} + \frac{d^2f}{dv^2} + \frac{d^2f}{dw^2}\right) = c^2\left(\frac{d^2f}{dv^2} + \frac{d^2f}{dw^2} + 2\frac{d^2f}{dv\,dw}\right)$$

$$4\frac{d^2f}{dv\,dw} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2f}{dv\,dw} = 0}$$

- intégration par rapport à w: $\frac{d}{dw}\left(\frac{df}{dv}\right) = 0$

$\frac{df}{dv}$ = constante quelconque par rapport à w = fonction quelconque de v $g(v)$

- intégration par rapport à v:

$f = \int g(v)\,dv$ + cste quelconque par rapport

$f(v,w) = f_+(v) + f_-(w)$

$f(x,t) = f_+(x-ct) + f_-(x+ct)$ f_+ et f_- sont 2 fct° quelconques

d) Vitesse du son

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \chi_0}}}$$

• généralités : gaz - liquide - solide

En général $\rho_s > \rho_l > \rho_g$

$\chi_s \ll \chi_l \ll \chi_g$

$\Rightarrow \quad \boxed{c_s > c_l > c_g}$

• valeurs :

en CNTP ($P = 1$ atm, $T = 20°C$)

air	340 $m.s^{-1}$	acier	5100 $m.s^{-1}$
eau	1480 $m.s^{-1}$	granit	6200 $m.s^{-1}$
glace	3200 $m.s^{-1}$		
verre	5300 $m.s^{-1}$		
béton	3100 $m.s^{-1}$		

• vitesse du son dans un gaz parfait

- loi des gaz parfaits $PV = nRT$

• loi de variation adiabatique (sans échange de chaleur)

gaz $\gamma = 5/3$ monoatomique

$\gamma = 7/5$ diatomique. $\boxed{PV^\gamma = cste}$ γ = coeff adiabatique.

$PV^\gamma = cste \Rightarrow \ln PV^\gamma = \ln(cste)$

$(\ln P + \gamma \ln V) = \ln(cste)$

$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{}$

e) Puissance, Intensité et Impédance

· onde : déplacement des molécules dû à des variat° de pression

puissance associée : $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$P = p_a S v$

$P = p_a S \dfrac{dy}{dt}$

onde progressive : $y(x,t) = f(x - ct)$

$\dfrac{dy}{dt} = -c f'(x - ct)$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dx} = 1 \times f'(x - ct)$

$$\frac{dy}{dt} = -c \frac{dy}{dx} \overset{(I)}{=} +c \frac{p_a}{P_0} \overset{(II)}{=} \chi_0 c p_a$$

d'où $\quad P = S \chi_0 c p_a^2 \qquad$ et $\quad c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$

$$\chi_0 = \frac{1}{\rho_0 c^2} \Rightarrow \chi_0 c = \frac{1}{\rho_0 c}$$

$$P = \frac{S}{\rho_0 c} p_a^2$$

· intensité acoustique : $I = \dfrac{\langle P \rangle}{S}$

$$I = \frac{\langle p_a^2 \rangle}{\rho_0 c}$$

· impédance acoustique : $\boxed{Z = \rho_0 c}$

analogie électrique : courant $i \Longleftrightarrow$ vitesse $v = \frac{dy}{dt}$
tension $U \Longleftrightarrow$ pression p_a
puissance $P \Longleftrightarrow$ intensité acoustique I
$U = Zi \Longleftrightarrow p_a = \frac{1}{\chi_S c} \frac{dy}{dt} = \rho_0 c v = Z v$

$$P = Ui = Zi^2 = \frac{U^2}{Z} \Longleftrightarrow I = p_a v = Z v^2 = \frac{p_a^2}{Z}$$

$$\boxed{I = \frac{\langle p_a^2 \rangle}{Z}}$$

• pression efficace : $p_{eff} = \sqrt{\langle p_a^2 \rangle}$

onde harmonique : $p_a = p_0 \cos(\omega t - kx)$

$$p_a^2 = p_0^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

$$\langle p_a^2 \rangle = p_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2} p_0^2$$

R • $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt$ $\quad \langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$

• $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = \langle \cos^2(\omega t) \rangle$ et $\langle \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \rangle = 1$

$\Rightarrow \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$

4 - Décomposit° harmonique

a) Series de Fourier

TD3 : $y_n(x,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(\omega_n t)$ $\qquad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$

solut° générale $\quad y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n(x,t)$

en $t=0$ $\quad y(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ $\quad$ forme initiale de la corde.

en $x_0 = \frac{L}{2}$ ⇒ $y_n(x_0,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\omega t)$ ⇒ signal périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$

On admet que tout signal périodique de période T_0, de pulsation ω_0 peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales de pulsat° multiples de ω_0

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$$

· son : variation périodique de la pression
⇒ hauteur du son = fréquence f.
⇒ timbre ⟺ différence entre 2 sons de même hauteur
⟺ décomposit° différentes en séries de Fourier
⟺ (a_n, b_n) ou (u_n, φ_n) différents.
donne l'importance des harmoniques

· calcul inverse : connaissant $f(t)$, que vaut (a_n, b_n) ?

– a_0 $\qquad \langle f(t)\rangle = \langle a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\rangle$

$$= \langle a_0\rangle + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\langle \cos n\omega t\rangle}_{=0} + b_n \underbrace{\langle \sin(n\omega t)\rangle}_{=0}$$

$$\boxed{a_0 = \langle f(t) \rangle}$$

- a_n : $f(t)\cos(n\omega t) = \left(a_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)\right)\cos(n\omega t)$.

$$\langle f(t)\cos(n\omega t)\rangle = a_0 \langle \cos n\omega t\rangle + \sum_{m=1}^{+\infty}\left(a_m \langle \cos(m\omega t)\cos(n\omega t)\rangle + b_m \langle \sin(m\omega t)\cos(n\omega t)\rangle\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{a_m}{2}\langle \cos((m+n)\omega t) + \cos((m-n)\omega t)\rangle + \frac{b_m}{2}\langle \sin((m-n)\omega t) + \sin((m+n)\omega t)\rangle\right)$$

$$\langle f(t)\cos(n\omega t)\rangle = \sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{a_m}{2}\left(\underbrace{\langle \cos((m+n)\omega t)\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle\cos((m-n)\omega t)\rangle}_{=0 \text{ sauf pr } m=n \Rightarrow = 1}\right) + \frac{b_m}{2}\left(\underbrace{\langle \sin((m+n)\omega t)\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \sin((m-n)\omega t)\rangle}_{=0}\right)\right]$$

$$\langle f(t)\cos(n\omega t)\rangle = \frac{a_n}{2} \Rightarrow a_n = 2\langle f(t)\cos(n\omega t)\rangle$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt}$$

- b_n : $\langle f(t)\sin(n\omega t)\rangle = \frac{b_n}{2}$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt}$$

· spectre d'amplitude