

CONTRÔLE ÉCRIT n°1

La calculatrice et les documents sont interdits.

INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE PREMIÈRE COPIE

EXERCICE N°1 : (3 points)

On rappelle la définition de l'équivalence de deux fonctions :

Définition : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est équivalente à g en a et on note $f \approx_a g$ si en a , $f - g = o(g)$.

1. Rappeler la définition de la négligeabilité.
2. Démontrer que si $f \approx_a g$ et si $h \approx_a k$, alors $fh \approx_a gk$.

EXERCICE N°2 : (2 points)

Déterminer le développement limité de la fonction tangente à l'ordre 5 en 0.

EXERCICE N°3 : (2 points)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$

EXERCICE N°4 : (4 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f(x) = \frac{\cos 2x}{1+x+x^2}$.
2. En déduire l'étude locale de f au voisinage de 0 (limite, tangente à C_f , position relative par rapport à C_f). Tracer l'allure de C_f au voisinage de 0.

EXERCICE N°5 : (3 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-\frac{x}{2})e}{x^2}$.

La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

EXERCICE N°6 : (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f .
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Vous étudierez en particulier l'existence d'une asymptote à la courbe de f ainsi que la position relative de celle-ci par rapport à la courbe de f .
3. Étudier les variations de f .
4. Tracer une ébauche de la courbe de f . On ne déterminera pas la valeur des extremums de f .