TAI - Algègre linéaire

Exercice 1.

$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ est par définition l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$.
Si $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$, alors y s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$.
On sait que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre, ses vecteurs sont donc linéairement indépendants.
Alors le seul moyen que la famille $(x_1, \dots, x_p, y)$ soit liée, est que y s'écrive comme une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_p)$. C'est à dire que $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Version courte équivalente :

$(x_1, \dots, x_p)$ engendre $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$
Or, $(x_1, \dots, x_p)$ est libre. Donc $(x_1, \dots, x_p, y)$ est libre $\Leftrightarrow y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Exercice 2

Mettons sous forme de matrice :

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a autant de 1 directeurs que de lignes donc la famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$
Donc $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}_2[X]$

Exercice 4

Mise sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pour Ker f, on résout $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\mathrm{Ker}\, f = (-2z, -z, z) = \mathrm{Vect}((-2,-1,1))$

  alors ( ) est une base de Ker f

- Il y a deux « 1 directeurs » donc $\mathrm{rg}\, f = 2$, on cherche donc deux vecteurs linéairement indépendants formant une base de Im f.

  $((1,2,0),(-1,0,1))$ est une base de Im f.

Exercice 5

Mise sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autant de « 1 directeurs » que de lignes et de colonnes, donc $(a+b+c,\ a+b,\ 2a+b)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{vect}((2,1,1))$

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{vect}((-1,3,-2),(1,-2,1))$

Exercice 7

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\, f &= \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3),\ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(-x_2, x_2, 0) + (-x_3, 0, x_3),\ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{vect}((-1,1,0),(-1,0,1)) \end{aligned}$$

Exercice 7 (suite)

$\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}((1,1,1))$

Exercice 8 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker} f &= \{(-x_3, -x_4, x_3, x_4),\ (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(-1,0,1,0)x_3 + (0,-1,0,1)x_4,\ (x_3,x_4) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{vect}((-1,0,1,0),(0,-1,0,1)) \end{aligned}$$

$\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))$

Exercice 11

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) En appliquant la méthode précédente, on peut trouver Ker f de tête :

$\mathrm{Ker} f = \mathrm{vect}((-1,2,1,0,0),(3,-2,0,1,0),(-3,2,0,0,1))$

4) $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}((1,2,1),(1,1,2))$

Car ces deux vecteurs sont linéairement indépendants et permettent de générer tous les vecteurs de l'espace des colonnes.

Exercice 10

1) Montrons que φ est une application linéaire :

Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(P_1+P_2) &= (P_1+P_2) + (X-1)(P_1+P_2)'(X) \\ &= P_1+P_2+(X-1)(P_1'+P_2') \end{aligned}$$ car la dérivée s'applique aux deux termes de l'addition

$= P_1 + P_2 + (X-1)P_1' + (X-1)P_2'$

$= P_1 + (X-1)P_1' + P_2 + (X-1)P_2'$

$\Leftrightarrow \varphi(P_1) + \varphi(P_2) = \varphi(P_1 + P_2)$

Soient $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\lambda P) = \lambda P + (X-1)(\lambda P)'(X)$$

$$= \lambda P + (X-1) \cdot \lambda \cdot P'$$

$$= \lambda (P + (X-1)P')$$

$$\Leftrightarrow \lambda \varphi(P) = \varphi(\lambda P)$$

Donc φ est une application linéaire

2) $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}_2[X]$ (ce qui correspond au polynôme $ax^2 + bx + c$)

$\varphi(a, b, c) = (a, b, c) + (X-1)(0, 2a, b) \leftarrow$ dérivée

$= (a, b, c) + (2a, b, 0) + (0, -2a, -b)$ (on a développé)

$= (3a, -2a + 2b, -b + c)$

Calculons Ker f :

$\begin{cases} 3a = 0 \\ -2a + 2b = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases}$ $S = \{(0,0,0)\} = \text{Ker } f$ donc φ est injective.

Calculons l'image :

$\varphi(a, b, c) = (X, Y, Z)$

$\begin{cases} 3a = X \\ -2a + 2b = Y \\ -b + c = Z \end{cases}$ $S = \left\{ \left(\frac{X}{3}, \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}, Z + \frac{X}{3} + \frac{Y}{2} \right), (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

$\forall (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$, on trouve un antécédent qui vérifie $\varphi(a, b, c) = (X, Y, Z)$. Donc $\text{Im } f = \mathbb{R}_3[X]$ et φ est surjective.

φ est de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ donc il suffit qu'elle soit injective ou surjective pour être bijective.

Exercice 10 (suite)

3) $$\mathrm{Mat}(\varphi)_B = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(x) & \varphi(x^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \end{array}$$

Les questions suivantes, je ne suis pas sûr...

Exercice 12

1) $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ $A^3 = A$ (par le calcul matriciel)

2) $A^3 = A \Leftrightarrow A^2 \cdot A = A \Rightarrow A^2 = I$, ce qui est faux

1) Montrons par récurence que $A^n = A^{n+2}$

Initialisation :

$A = A^3$, vrai au rang 1

Récurence :

$A^{n+1} = A^n \cdot A = A^n + A^3 = A^{n+3}$

La propriété est vraie pour tout rang $n \geqslant 2$

Exercice 13

Le système équivaut à : $\begin{pmatrix} 1-m & -2 & 1 \\ 3 & -1-m & -2 \\ 3 & -2 & -1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Le système admet une infinité de solution ssi il est non-injectif, c'est à dire ssi le déterminant de la matrice est nul.

Ce qu'il faut faire :

- calculer le déterminant en fonction de m
- déterminer m tel que le déterminant soit nul.

Exercice 14 :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\,2} & x_1^{\,3} \\ 1 & x_2 & x_2^{\,2} & x_2^{\,3} \\ 1 & x_3 & x_3^{\,2} & x_3^{\,3} \\ 1 & x_4 & x_4^{\,2} & x_4^{\,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^{\,2} & x_2^{\,2} & x_3^{\,2} & x_4^{\,2} \\ x_1^{\,3} & x_2^{\,3} & x_3^{\,3} & x_4^{\,3} \end{vmatrix}$$

En effet, le déterminant ne change pas lorsque l’on transpose la matrice.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^{\,2} & x_2^{\,2} & x_3^{\,2} & x_4^{\,2} \\ x_1^{\,3} & x_2^{\,3} & x_3^{\,3} & x_4^{\,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_1^{\,2} - x_1^{\,2} & x_2^{\,2} - x_1x_2 & x_3^{\,2} - x_1x_3 & x_4^{\,2} - x_1x_4 \\ x_1^{\,2} - x_1^{\,2} & x_2^{\,3} - x_1x_2^{\,2} & x_3^{\,3} - x_1x_3^{\,2} & x_4^{\,3} - x_1x_4^{\,2} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ l_2 - x_1l_1 \\ l_3 - x_1l_2 \\ l_4 - x_1l_3 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ 0 & x_2^{\,2} - x_1x_2 & x_3^{\,2} - x_1x_3 & x_4^{\,2} - x_1x_4 \\ 0 & x_2^{\,3} - x_1x_2^{\,2} & x_3^{\,3} - x_1x_3^{\,2} & x_4^{\,3} - x_1x_4^{\,2} \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & x_4(x_4 - x_1) \\ x_2^{\,2}(x_2 - x_1) & x_3^{\,2}(x_3 - x_1) & x_4^{\,2}(x_4 - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2^{\,2} & x_3^{\,2} & x_4^{\,2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_2 - x_2 & x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \\ x_2^{\,2} - x_2^{\,2} & x_3^{\,2} - x_2x_3 & x_4^{\,2} - x_2x_4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ l_2 - x_1l_1 \\ l_3 - x_1l_2 \end{array}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \\ 0 & x_3^{\,2} - x_3x_2 & x_4^{\,2} - x_3x_4 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \times 1 \times \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \\ x_3(x_3 - x_2) & x_4(x_4 - x_2) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

Exercice 15

Avec Maxima, on obtient $\det(C^t C) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$

$\det(C^t \cdot C) = \det(C^t) \times \det(C) = \det(C) \times \det(C) = \det(C)^2$

Donc $\det(C) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

Exercice 16

Initialisation :

- prérequis : $AB - BA = B \Leftrightarrow B + BA = AB$
- $B \cdot (A + I_n) = BA + B = AB$ vrai au rang 1.

Récurrence :

$AB^{p+1} = AB \cdot B$

$= B^p (A + p I_n) \cdot B$

Utilisons la formule au rang 1 : $MB = B(M + I_n)$, où dans notre cas, $M = (A + p I_n)$, on obtient :

$AB^{p+1} = B^p \cdot B \cdot ((A + p I_n) + I_n)$

$= B^{p+1} \cdot (A + (p+1) I_n)$

La propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.