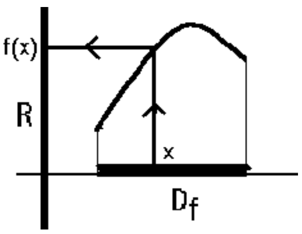
VII- Applications, bijections, bijection réciproque

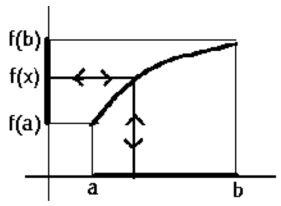
1) Définitions

Une application d'un ensemble (de départ) E dans un ensemble (d'arrivée) F fait correspondre à chaque élément de E un élément unique (appelé image) dans l'ensemble F.

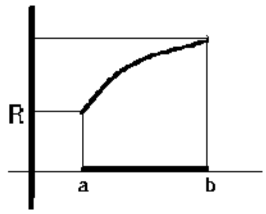


Notamment toutes les fonctions f que nous avons étudiées sont des applications de l'ensemble de définition Df sur l'axe des x dans $\boldsymbol{R}$ sur l'axe des y puisque chaque élément de D_f admet un correspondant unique $y=f(x)$ dans $\boldsymbol{R}$. Cela peut d'ailleurs s'écrire $f: D_f \rightarrow \boldsymbol{R}$
$x \rightarrow f(x)$

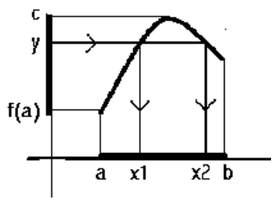
Une bijection est une application telle que chaque élément de l'ensemble d'arrivée F admet un antécédent unique dans l'ensemble de départ E.



(1)Bijection de $[ab]$ sur $[f(a), f(b)]$



(2)Application de $[a\ b]$ dans $\boldsymbol{R}$, mais ce n'est pas une bijection



(3)Application de $[a\ b]$ dans $[f(a), c]$, mais ce n'est pas une bijection

En effet, dans le premier exemple, tous les éléments de $[f(a), f(b)]$ admettent un antécédent unique dans $[a\ b]$, dans le deuxième exemple, certains éléments de $\boldsymbol{R}$ n'ont pas d'antécédent, et dans le troisième exemple, certains éléments de $[f(a)\ , c]$ ont deux antécédents.

2) Théorème de la bijection [1]

Une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a\ b]$ réalise une bijection de $[a\ b]$ sur $[f(a)\ f(b)]$.

(Cela vaut aussi pour un intervalle ouvert $[a\ b]$ ou $]a\ b[$)

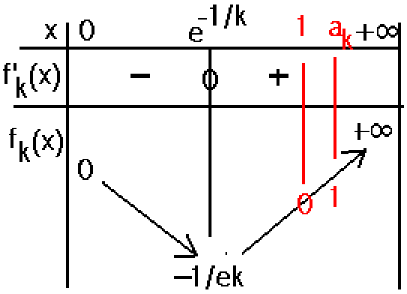
[1] Nous admettons ce théorème

Exemple

On considère la fonction f_k telle que $f_k(x) = x^k \ln x$, définie sur R^*+, avec k entier ≥2. Grâce à l' étude des variations de cette fonction, montrer que l'équation $f_k(x) = 1$ admet une solution unique a_k , avec $1< a_k$.

Commençons par étudier la fonction. Puisque $x>0$, $\ln x$ existe bien, et la fonction aussi sur R*+. Elle est dérivable : $f_k\,'(x) = kx^{k-1}\ln x + \frac{x^n}{x} = x^{k-1}(k\ln x + 1)$. La dérivée est du signe de ($k \ln x$ +1) qui est croissante, et s'annule pour $\ln x = -1/k$, soit $x = e^{-1/k}$. D'autre part, lorsque x tend vers 0, $f_k(x)$ est de la forme indéterminée 0 .∞, mais dans ce cas on sait que la puissance de x l'emporte sur le logarithme d'où une limite 0 en 0. D'autre part, lorsque x tend vers + ∞ , $f_k(x)$ est de la forme +∞ .+∞ et tend vers ∞.

D'où le tableau de variations :



Venons-en à la résolution de l'équation $f_k(x)=1$. Dans l'intervalle]0 $e^{-1/k}$], la fonction décroît à partir de 0- , et ne peut jamais valoir 1. Plaçons-nous maintenant dans l'intervalle [$e^{-1/k}$, +∞[, où la fonction est strictement croissante et continue. Elle réalise une bijection de [$e^{-1/k}$, +∞[sur [-1/ek, +∞[. Comme 1 se trouve dans cet ensemble d'arrivée, il admet un antécédent unique a_k dans l'ensemble de départ. De même, 0 a pour antécédent unique 1, et avec 0<1 et la fonction croissante, on en déduit que $1 < a_k$.

3) Produit (ou composée) de deux applications

Cette opération est notée par un $\circ$. Par définition la fonction $g\circ f$ est telle que : $g\circ f\,(x) = g(f(x))$. Autrement dit, en partant de x, on commence par faire $f(x)$, puis on applique g à $f(x)$ d'où $g(f(x)$. Les deux fonctions s'appliquant l'une après l'autre, f en premier puis g.

Rappelons que lorsqu'il s'agit de fonctions d'une variable réelle x, la dérivée d'une fonction composée est telle que $(g(f(x))' = g'(f(x)\;.\;f\,'(x)$.

Exemple

Montrer que la composée de deux fonctions du premier degré (aussi appelées fonctions affines) est une fonction du premier degré

Prenons f et g telles que $f(x) = a\,x + b$ et $g(x) = a'\,x + b'$. Puis faisons $g\circ f$:

$$x \xrightarrow{f} y_1 = ax + b \xrightarrow{g} y = a'y_1 + b'$$
$$= a'(ax+b) + b' = aa'x + a'b + b'$$

d'où $g\circ f\,(x) = aa'\,x + a'b + b'$. Il s'agit aussi d'une fonction affine.
Remarquons que l'opération $\circ$ n'est pas commutative, puisque
$f\circ g\;(x) = aa'\,x + ab' + b$.

4) Bijection et sa bijection réciproque

Soit f une bijection définie sur I. Ainsi tout élément y de l'intervalle image $J = f(I)$ admet un antécédent unique x dans I. Cela permet de définir la bijection réciproque de f, notée f^{-1}, qui à chaque y de $f(I)$ fait correspondre un x unique dans I, et cet x admet à son tour un antécédent unique y.

Ainsi $\underset{x\in I}{y = f(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{y\in J}{x = f^{-1}(y)}$

La courbe de f^{-1} est la même que celle de f, sauf que l'axe de départ où se trouve y est maintenant vertical, et l'axe d'arrivée est horizontal. Pour revenir à la situation classique où c'est l'axe de départ qui est horizontal, on fait une symétrie par rapport à la première bissectrice du repère (celui-ci étant orthonormé), l'axe de départ qui est l'axe des y devient maintenant horizontal. On peut ensuite revenir aux notations classiques en posant $X=y$, et $Y=x$, de façon que l'axe horizontal soit l'axe des X.

Propriétés de la bijection réciproque

- Comme f, f^{-1} est continue sur J.
- Si f est croissante, f^{-1} est aussi croissante. De même pour la décroissance.
- Si f est dérivable sur I, f^{-1} est aussi dérivable sur J, sauf aux points où la dérivée de f est nulle (tangente horizontale), la symétrie rendant alors la tangente verticale pour la courbe de f^{-1}, f^{-1} n'est pas dérivable en ces points où $f'(x)=0$. La dérivée de f^{-1}, quand elle existe, peut se calculer ainsi de façon formelle :
  $f^{-1}{}'(y) = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ (pour f^{-1}, la variable est y)

5) Exemples classiques

Exemple 1

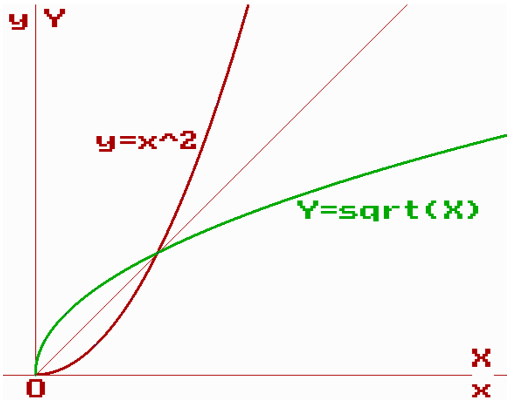
On considère la fonction f telle que $f(x) = x^2$, définie sur $R+$. Montrer qu'elle admet une bijection réciproque f^{-1} que l'on précisera

La courbe de f est une demi-parabole. La fonction étant continue et strictement croissante sur ***R+***, elle réalise une bijection de ***R+***$=[0\ ,+\infty[$ sur $[f(0), f(+\infty)[=[0, +\infty[=$***R+*** aussi. Elle admet une bijection réciproque f^{-1} telle que :

$y = f(x)$ sur ***R+*** $\Leftrightarrow$ $x = f^{-1}(y)$ sur ***R+***.

Plus précisément : $y = x^2$ donne, puisque $x\geq 0$ et $y\geq 0$, $x = \sqrt{y}$. Procédons à un changement de variables $X=y$ et $Y=x$ pour que l'axe horizontal ne soit plus l'axe des y mais l'axe des X : $Y = \sqrt{X}$.

Par symétrie autour de la première bissectrice du repère, la fonction racine carrée est représentée par une demi-parabole d'axe horizontal. Elle est continue, strictement croissante sur R+.



La dérivée de f étant $f\,'(x) = 2x$ qui s'annule en 0, la fonction racine carrée est seulement dérivable sur $\boldsymbol{R}$ *+.

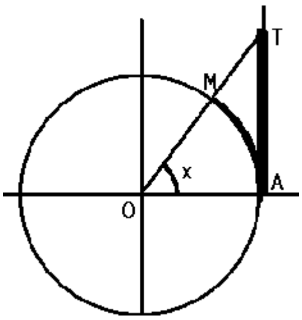
La dérivée de $x = f^{-1}(y)$ est $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f\,'(f^{-1}(y))}$, cela donne dans le cas présent $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, d'où avec $Y = \sqrt{X}$, $Y' = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$.

On constate que la formule de dérivation $(x^n)' = n\ x^{n-1}$ s'étend aux puissances fractionnaires, puisque $\sqrt{x}$ s'écrit $x^{\frac{1}{2}}$ et que l'on a bien $(x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exemple 2

Prendre la fonction f telle que $f(x) = \tan x$, définie sur]-π/2 , π/2[. Montrer qu'elle admet une bijection réciproque tan^{-1} dont on précisera les caractéristiques.

Rappel sur *tan x* :



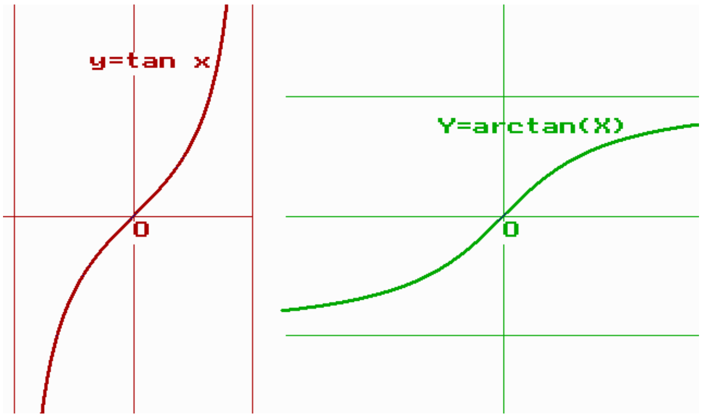
Sur le cercle trigonométrique (repère orthonormé d'origine O, le rayon du cercle est 1, et le cercle est orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre), on prend un arc $x = AM$ à partir de A, cet arc est par définition égal à l'angle x en radians. Par définition aussi :
$\tan x = \overline{AT}$ (positif quand T est au-dessus de A, et négatif au-dessous). On a aussi $\tan x = \sin x / \cos x$.

Lorsque x va de -π/2 à π/2 , $y=\tan x$ va de -∞ à +∞. Cette fonction est strictement croissante et continue sur]-π/2 , π/2[. Elle réalise une bijection de]-π/2 , π/2[sur]f(-π/2) , f(π/2)[=]-∞, +∞[= $\boldsymbol{R}$. Elle admet une bijection réciproque f^{-1} telle que :
$y = \tan x$ sur]-π/2 , π/2[⇔ $x = \tan^{-1} y$ sur $\boldsymbol{R}$

La bijection réciproque tan^{-1} est souvent notée *Arctan* pour exprimer très concrètement que $x = \mathrm{Arctan}\, y$ est l'arc (l'angle) dont la tangente est y. [2]

---

[2] Dans les langages informatiques, *Arctan* s'écrit *atan*.



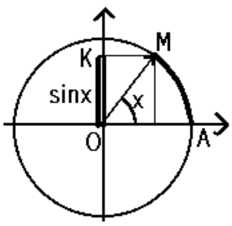
La dérivée de *tan x* est $(tan\,x)' = 1 + tan^2 x$,[3] d'où pour $x = tan^{-1} y$, la dérivée est :

$$(\tan^{-1} y)' = \frac{1}{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan y))^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Finalement la dérivée de $Y = \text{Arctan } X$ est $\frac{1}{1+X^2}$. Ou encore une primitive de $\frac{1}{1+X^2}$ est Arctan X.

Exemple 3

On prend la fonction *sin x* avec *x* dans [-π/2 , π/2]. Montrer qu'elle admet une bijection réciproque notée *Arcsin* dont on précisera les caractéristiques



Lorsque *x* va de -π/2 à π/2 , *y* = *sin x* va de -1 à 1. Sur [-π/2 , π/2] , la fonction *sin* est continue et croissante. Elle réalise une bijection de [-π/2 , π/2] sur [-1 , 1]. Elle admet une bijection réciproque sin^{-1} notée *Arcsin* telle que :

y = *sin x* sur [-π/2 , π/2] ⇔ *x* = *Arcsin y* sur [-1 , 1]
où *x* est l'arc (l'angle) dont le *sinus* est *y*.

Tout comme la fonction *sinus*, la fonction *Arcsin* est impaire et croissante. Sa dérivée est telle que $(Arc\sin y)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(Arc\sin y)}$. Mais il existe un lien entre le sinus et le cosinus, soit : $cos^2 x + sin^2 x = 1$, d'où $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2}$.

Finalement $(\text{Arc}\sin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ ou encore, après changement de notations :

$$(\text{Arc}\sin X)' = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}.$$

[3] On sait que *tan x* = *sin x* / *cos x*. D'où $(\tan x)' = (\cos^2 x + \sin^2 x) / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x$ en cassant la fraction, ou encore $1/\cos^2 x$ puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

6) Exercices : Suites et fonctions composées

Exercice 1

On se donne les deux fonctions f et g telles que $f(x) = 1/2\,x$ et $g(x) = 1/2\,x + 1$, et on considère la suite (u_n) démarrant en u_0 donné quelconque et telle que $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = g(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$, etc., où l'on fait jouer en alternance f et g. Déterminer le comportement à l'infini d'une telle suite. Pour cela étudier la suite (u_{2n}) à indices pairs et la suite (u_{2n+1}) à indices impairs.

Commençons par étudier la suite extraite (u_{2n}) : u_0 , u_2 , u_4 , … On a :

$$u_{2n} \xrightarrow{f} u_{2n+1} = \frac{1}{2}u_{2n} \xrightarrow{g} u_{2n+2} = \frac{1}{2}u_{2n+1} + 1 = \frac{1}{4}u_{2n} + 1$$

Puisque $u_{2n+2} = 1/4\,u_{2n} + 1$, il s'agit d'une suite arithmético-géométrique ayant pour point fixe L tel que $L = 1/4\,L+1$, soit $L=4/3$.

Avec $u_{2n+2} = 1/4\,u_{2n} + 1$

et $L = 1/4\,L + 1$, il reste après soustraction $u_{2n+2} - L = 1/4\,(u_{2n} - L)$.

La suite $v_n = u_{2n} - L$ est une suite géométrique de raison 1/4. On en déduit qu'elle tend vers 0 pour n infini. Ainsi la suite (u_{2n}) tend vers $L = 4/3$.

Prenons maintenant la suite extraite (u_{2n+1}) : u_1 , u_3 , u_5 , …

$$u_{2n+1} \xrightarrow{g} u_{2n+2} = \frac{1}{2}u_{2n+1} + 1 \xrightarrow{f} u_{2n+2} = \frac{1}{2}u_{2n+1} = \frac{1}{4}u_{2n} + \frac{1}{2}$$

On tombe encore sur une suite arithmético-géométrique de point fixe $L' = 2/3$ cette fois. Pour les mêmes raisons que précédemment, la suite $w_n = u_{2n+1} - L'$ est une suite géométrique de raison 1/4. On en déduit qu'elle tend vers 0 pour n infini. Ainsi la suite (u_{2n+1}) tend vers $L' = 2/3$.

La suite (u_n) finit par osciller sur les deux nombres 4/3 et 2/3. [4]

Exercice 2

On considère la fonction telle que $f(x) = c\,x\,(1-x)$, définie sur [0 1], c étant un nombre donné compris entre 2 et 4.

1) Déterminer les points fixes de f.

Il s'agit des x tels que $f(x) = x$, soit $c\,x(1-x) = x$. On distingue deux cas :

- $x=0$ qui est un point fixe
- si $x \neq 0$, on peut diviser par x : $c(1-x)=1$, d'où $x = 1 - 1/c$, deuxième point fixe.

2) Vérifier que $f([0\ 1] \subset [0\ 1]$

[4] La suite diverge, puisqu'elle ne converge pas vers un point. Mais on peut se permettre de dire qu'elle converge vers un cycle de deux points, 4/3 et 2/3.

La courbe de f est une partie de parabole avec $f(0)= f(1)=0$, située du côté des y positifs et admettant un maximum pour $x=1/2$, soit $f(1/2)= c/4 \leq 4$ puisque c est entre 2 et 4. On a toujours $f(x)$ dans [0 1] , ce qui signifie que $f([0\ 1] \subset [0\ 1]$

3) Déterminer $f \circ f$

Avec x dans [0 1] :

$x \rightarrow y_1 = f(x) = c\, x\, (1-x) \rightarrow y = f(y_1) = c\, c\, x\, (1-x)(1-cx\,(1-x))$

Remarquons que y_1 est dans [0 1], donc $f \circ f$ existe bien.

On trouve $y = f \circ f\,(x) = c^2\, x\,(1-x)(1-cx+cx^2)$.

4) Pourquoi les points fixes de f sont-il aussi des points fixes de $f \circ f$? En déduire les points fixes de $f \circ f$, et notamment l'existence de deux nouveaux points fixes, que l'on notera x_1 et x_2, dès que c dépasse une valeur que l'on précisera.

Les points fixes de f vérifient $f(x) = x$, d'où aussi $f(f(x) = f(x) = x$. Ils sont aussi points fixes pour $f \circ f$. On retrouve pour $f \circ f$ les deux points fixes précédemment trouvés, soit $x = 0$ et $x = (c-1)/c$. Mais il y en a éventuellement d'autres. Les points fixes de $f \circ f$ vérifient :

$c^2\, x\,(1-x)(1-cx+cx^2) = x$. Divisons par x car on connaît déjà le point fixe 0 :

$c^2\, x\,(1-x)(1-cx+cx^2) = 1$, puis développons et ordonnons, ce qui va donner une équation du troisième degré :

$cx^3 - 2\,c\,x^2 + (c+1)x + (1-c^2)/c^2 = 0$, ou encore

$$x^3 - 2x^2 + \frac{c+1}{c}x + \frac{1-c^2}{c^3} = 0$$

On sait que $(c-1)/c$ est solution, on factorise donc $(x-(c-1)/c)$ dans le polynôme du troisième degré. Cela donne :

$$(x - \frac{c-1}{c})(x^2 - \frac{c+1}{c}x + \frac{c+1}{c^2}) = 0.$$

Pour trouver les nouveaux points fixes éventuels, il suffit de résoudre l'équation du second degré $x^2 - \frac{c+1}{c}x + \frac{c+1}{c^2} = 0$. Son discriminant est :

$\Delta = (\frac{c+1}{c})^2 - 4\frac{c+1}{c^2} = (c+1)\frac{c-3}{c^2}$. Dès que c est supérieur à 3, le discriminant est positif et il existe deux nouveaux points fixes x_1 et x_2 .

5) Pourquoi a-t-on $f(x_1) = x_2$ et $f(x_2) = x_1$? Puis, en posant $g = f \circ f$, montrer que $g'(x_1) = g'(x_2)$.

Notons que x_1 est un point fixe pour $f \circ f$ et pas pour f, d'où $f(x_1) \neq x_1$. En faisant agir la fonction f à répétition à partir de x_1, on a :

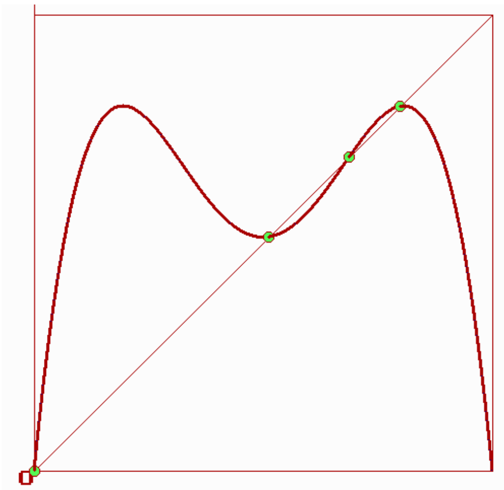
$x_1 \rightarrow y_1 = f(x_1) \rightarrow x_1 \rightarrow y_1 = f(x_1)$. On en déduit que $y_1 = f(f(y_1)$, d'où y_1 est un point fixe pour $f \circ f$ et pas pour f, et ce n'est pas x_1. Ce ne peut être que x_2.

Finalement $f(x_1) = x_2$ et par suite $f(x_2) = x_1$.

Maintenant dérivons : $g'(x) = f\,'(f(x)\,.\,f\,'(x)$.

En particulier $g'(x_1) = f\,'(f(x_1)\,.\,f\,'(x_1) = f\,'(x_2).\,f\,'(x_1)$. Et de même pour $g'(x_2)$.

6) Tracer par programme la courbe de g pour $c = 3{,}2$.



(On retrouvera ce problème classique dans le *chapitre 9* sur les suites)