Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Travaux d’Autonomie et d’Initiation de Mathématiques

Résolution d’équations de degré inferieur a 5

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Sommaire

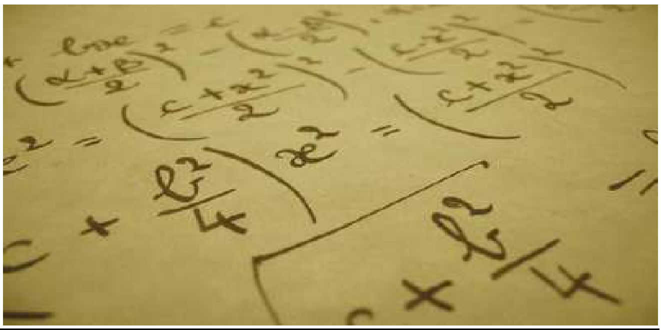
Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Introduction :

Les mathématiques ont pour but premier de nous enseigner certaines connaissance que nous utiliserons comme base ou comme outil. Les mathématiques sont souvent perçues comme une science « brute » et abstraite. Cependant la science faisant parti de la culture les mathématiques ne possède pas qu'un aspect scientifique. En effet toutes les techniques de calcul et autre ne sont pas parvenu jusqu'à nous du jour au lendemain, il y a toute une histoire derrière ces techniques. Cette dernière n'est pas indispensable à l'étude des mathématiques (du moins au niveau scolaire) mais permet cependant de mieux comprendre comment l'évolution a conduit cette matière a devenir ce qu'elle est aujourd'hui. Elle peut également permettre pour les plus modus de la matière de reprendre les travaux de certaine personne ou encore de certaines civilisation pour pouvoir peu être un jour faire de nouvelles découverte et peu être faire avancer cette science. Bien sur une vie entière ne suffirait certainement pas pour acquérir l'entière connaissance de l'histoire des mathématiques et la connaissance parfaite de toutes les techniques et autres découvertes. Cependant il est souvent intéressant de porter des études sur des points précis des mathématiques, c'est pourquoi dans cette courte étude nous exposerons l'histoire de l'algèbre ainsi que les principaux personnages qui ont permis son évolution. Cette étude portera principalement sur les techniques de résolutions des équations de degré inferieur ou égale à 5. Nous présenterons les principaux responsables de la mise au point des différentes techniques de mise en équations ainsi que de leur résolutions.

Définition d'une équation

En mathématiques, une équation est une égalité qui lie différentes quantités, généralement pour poser le problème de leur identité. Résoudre l'équation consiste à déterminer toutes les façons de donner à certaines des quantités qui y apparaissent, les inconnues, des valeurs qui rendent l'énoncé vrai



Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Équations de degré 1

Le premier degré

Histoire

L'histoire des équations polynomiales trouve son origine dans l'antiquité, et plus précisément par des algorithmes babyloniens (qui n'ont malheureusement laisser que de rares traces au cours de l'histoire) et des écrits égyptiens, plus anciens mais, eux, conservés malgré les nombreux siècles écoulés jusqu'à leur découverte.
Les égyptiens ont beaucoup étudié les équations du premier degré, l'exemple le plus connu d'ancien écrit mathématique Egyptien est le papyrus de Rhind datant des alentours de 1700 avant Jésus-Christ. Il contient des problèmes arithmétiques, de géométrie ainsi qu'un grand nombre d'équations algébrique du premier degré.
La résolution des équations de degré 1 et 2 (dites quadratiques) part donc de deux considérations distinctes : l'une d'ordre géométrique (en provenance d'Égypte), et l'autre d'ordre arithmétique (en provenance de Mésopotamie).

Dans ce même papyrus de Rhind, on trouve des problèmes du type :

"Une quantité et une portion de celle-ci vaut tant, quelle est cette quantité ?"

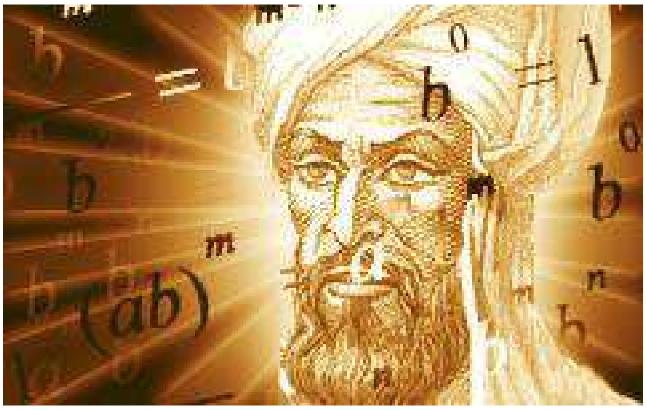
Longtemps les Grecs avaient été considérés comme les maîtres incontestés des mathématiques. Le Papyrus Rhind, qui reste de même le premier ouvrage où apparaît le nombre pi, est la référence en matière de mathématiques égyptiennes.

Découvert en 1857 dans la tombe mortuaire de Ramsès II à Thèbes, en Egypte, ce papyrus est acheté un an après sur un marché de Louxor par un Ecossais âgé de 25 ans, Alexander Henry Rhind qui, très malade, décède et permet au British Muséum de Londres d'acquérir le précieux rouleau en 1864 dont il ne se séparera jamais. Retour sur l'histoire d'un trésor du patrimoine mathématique égyptien.

L'auteur de ce papyrus est le scribe Almès. Il rédige cet ouvrage en 1600 avant Jésus-Christ mais avoue avoir recopié en partie des résultats vieux de 2000 ans avant J-C, venant des Babyloniens.

Il contient donc en tout 87 problèmes mathématiques (incluant les équations du 1er degré ; équation de volumes, cylindres ou prismes, des calculs de superficies de triangles, rectangles, cercles, trapézoïdes, des calculs de fractions etc…).

Al Khwarizmi et l'al jabr :



Selon l'historien *Ahmed Djebbar*, l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline vient avec le savant perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790 ; 850) (Son nom a d'ailleurs donné le mot « algorithme »). Né vers 783 à Khiva dans le Khwarezm qui lui a donné son nom, décédé vers 850 à Bagdad

Al-Kwharizmi est considéré comme le père de l'algèbre.

Il a écrit un traité du nom de *Al-ĵabr wa'l-muqābalah* où il établit les règles (maintenant élémentaires) qui sont autorisées dans les manipulations d'égalités et donna le mot « algèbre ».

Il pose les bases des méthodes algébriques de résolution des équations ainsi qu'une synthèse des règles héritées des grecs et des textes néo-persans. Al-Kwharizmi a aussi résolu des équations du second degré, utilisant des raisonnements géométriques, mais ne savait pas toutes les résoudre.

Il distingue 6 types d'équations de degré inférieur ou égal à 2 (car les coef. a,b,c sont positifs) $ax^2=bx$; $ax^2=b$; $ax=b$; $ax^2+bx=c$; $ax^2+c=bx$ et $ax^2=bx+c$

Son algèbre reste rhétorique sans symbolisme aucun, même pour les nombres

Les racines négatives sont ignorées jusqu'au 16e Suivant les idées développées par Stevin en 1585, Girard en 1629 donne des exemples d'équations avec racines négatives. "Le négatif en géométrie indique une régression, alors que le positif correspond à un avancement.". Il n'a d'ailleurs pas plus de scrupules avec les racines complexes.

- **les algébristes arithméticiens** qui voient l'arithmétique au service de l'algèbre au moyen d'algorithmes numériques performants aidant à la résolution des équations. *Abu Bakr al Karaji* (953 ; 1029), au travers de son traité « al Kitab al fakhri fi l-jabr wa l-muqabala » (Le Fakhri en algèbre) en sera un acteur et fera progresser les méthodes sous l'influence des techniques algébriques des « Arithmétiques » de Diophante. Ses méthodes de calculs algébriques sur l'inconnue et ses différentes puissances donneront naissance à la théorie des polynômes.

A cette occasion, *al Karaji* expose un triangle de détermination du binôme $(a+b)^n$.

les géomètres algébristes font avancer l'algèbre par la géométrie en étudiant en particulier les constructions géométriques permettant de représenter les racines des équations.

Au XVe et XVIe siècle, l'algèbre prend son essor avec des méthodes de résolution pour des équations du 3e et 4e degré et l'apparition des nombres complexes. Les premières traductions de traités arabes comme le « Livre d'algèbre » d'*al Khwarizmi* ou le « Livre complet » d'*Abu Kamil* commencent à faire leur apparition.

"Le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite, à condition qu'ils soient bien l'un en face de l'autre." Pierre Dac

Méthode de "fausse position"

La mise en équation est devenue au fil du temps une habitude automatique avec des notations récurrentes (telle que l'appellation d'une inconnue "x").

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Clairement, lorsqu'on met une personne devant un problème nécessitant une mise en équation, cette personne va faire une traduction algébriquement des données puis résoudre par une suite de calculs simple, l'équation qu'il aura mis en place initialement.

Mais au temps des pyramides, incantations et vie d'aventure, les mathématiciens (oui il y en avait déjà) ne symbolisaient pas l'algèbre aussi simplement qu'aujourd'hui.

D'une part, les problèmes posés étaient numériquement concrets mais n'avaient qu'une résolution verbale, on peut même imaginer une gestuelle ou une réalisation avec des objets simples de manipulation.

D'autre part, ils utilisaient des notations ou des hiéroglyphes différents des nôtres (issus des équations basiques de Viète).

On a donc une limitation due a un manque de symbolisme mathématique.

Toutefois L'histoire montre qu'un problème purement technique peut amener la naissance de concepts théoriques profonds :

Une méthode longtemps utilisée fut celle de la "fausse supposition".

*Si on **ajoute** à **une quantité** le **quart de sa valeur**, on **obtient 15**. Quelle est cette **quantité ?***

X + x/4 = 15 x= ?

Posé sous une forme moderne le problème devient l'équation :

$$\boldsymbol{x + \frac{x}{4} = 15}$$

Les égyptiens auraient résolut cette équation comme ceci :

Calculé avec **4**, ils prenaient le quart : $\frac{4}{4} = \mathbf{1}$

Puis **1** ajouté à **4** = **5** ;

Ce qui, si on le retranscrit a notre système donne que l'on suppose que la valeur cherchée est 4. Si on la traite comme dans l'énoncé, on obtient :

$$4 + \frac{4}{4} = 4 + 1 = 5 \neq 15$$

Ce qui ne satisfait pas l'égalité de départ mais permet de remarquer que le résultat obtenu est **3 fois** plus petit que ce qu'il devrait être.

On peut alors, à partir d'une "supposition **3 fois** plus grande", calculer la valeur de x soit :

$$x = 4 \times 3 = 12$$

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

On effectue une vérification :

$$12 + \frac{12}{4} = 12 + 3 = 15$$

Et on voit que la solution calculée est juste !

Les Égyptiens auraient donc eu l'intuition d'une forme très riche de raisonnement mathématique : La fausse supposition.

On notera aussi qu'il faut choisir la "solution de facilité" en choisissant le chiffre 4 afin de lui faire correspondre le quart.

Si à la quantité du problème on avait ajouté $\frac{1}{5}$ à x, il aurait fallu choisir de supposer que x=5 afin de former des simplifications… Supposer x=7 pour son septième, x=9 pour son neuvième etc…

Le papyrus de Rhind

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Résolutions:

Règles algébriques de transposition (transformations *régulières*) :

A, B et u désignant des nombres quelconques complexes ou réels :

A + B = 0 ⇔ B = - A ⇔ A = - B

A ± u = B ± u ⇔ A = B

A = B ⇔ - A = - B (règle des opposés)

Une transformation sur une expression mathématique est dite *régulière* si elle fournit une expression équivalent.

Résolution :

Une équation d'inconnue *x* est dite du 1er degré si elle peut se ramener, grâce aux transformations *régulières*, à la forme $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = 0$.

Le membre de gauche est un polynôme du 1er degré : c'est un binôme (deux termes) du premier degré.

L'équation de 1er degré se note de manière générale :

$$\boldsymbol{ax + b = 0}$$

Où **a** et **b** sont des nombres, réels ou complexes, représentant les **coefficients**.

Si b = 0, l'équation se réduit à $ax = 0$

La solution de l'équation $ax = 0$ (avec a non nul) est $a = 0$ car il s'agit là d'un produit nul.

Si b ≠0, l'équation est équivalente à $ax = -b$

La solution est par conséquent, en règle générale :$x = \frac{b}{a}$

Si *a* = 0 et b ≠ 0, l'égalité n'a aucune chance de se produire et l'équation n'admet alors aucune solution. L'ensemble des solutions est alors vide.

Si *a* = 0 et *b* = 0 alors l'égalité est vraie quelle que soit la valeur de l'inconnue. L'équation admet alors pour ensemble de solution l'ensemble de tous les nombres de ce même ensemble.

Les équations sont de la forme $\boldsymbol{ax + b = 0}$. Toutes les équations du premier degré possèdent une solution unique :

$$\boldsymbol{x = \frac{-b}{a}}$$

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Exemple:

On cherche, dans $\mathbb{R}$ à résoudre l'équation :

$$x + \frac{x}{7} = \frac{8}{5}$$

Les règles de somme et de différence permettent de dire que cette équation est équivalente successivement aux équations suivantes:

On a :

$$x + \frac{x}{7} = \frac{8}{5}$$

En mettant x en facteur

$$x\left(1 + \frac{1}{7}\right) = \frac{8}{5}$$

Réduction des termes de la parenthèse

$$x\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{8}{5}$$

$$x = \frac{8}{5} \times \frac{7}{8}$$

$$\boldsymbol{x = \frac{56}{40} = \frac{7}{5}}$$

Résultat final

Si l'on vérifie grâce à $x = \frac{-b}{a}$

- Qu'est-ce qu'un ours polaire ?

- Un ours cartésien après un changement de coordonnées.

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Équations du Second degré

Une équation de deuxième degré du type $ax^2+bx+c = 0$ se resoud en deux étapes :

Tout d'abord on calcul ce que l'on appel le discriminant. En fonction de la valeur du discriminant, on peut savoir quelles formules appliquer pour avoir les racines du polynôme de degré 2.

Le discriminant (noté Δ) se calcule a l'aide des coefficients de l'équation. Pour le calculer il suffit de faire $\Delta=b^2-4ac$. Δ peut être soit strictement positif, soit strictement négatif, soit nul.

Si Δ est négatif, il n'y a pas de solution dans R mais deux solutions dans C.

En effet, Nous savons que le domaine complexe C possède un élément i tel que $i^2=-1$ par conséquent on peu dire que $\left(i\sqrt{|\Delta|}\right)^2 = -\Delta$

Donc on peut écrire x_1 et x_2 tel que :

$X_1=(-b+\left(i\sqrt{|\Delta|}\right))/2a$

$X_2=-b- \left(i\sqrt{|\Delta|}\right)2a$

Si Δ est nul alors l'équation $ax^2+bx+c = 0$ possède une unique solution dans R tel que :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Exemple

Prenons l'équation suivante $4x^2+4x+1=0$:

L'équation est du type $ax^2+bx+c=0$ donc dans un premier on calcul le discriminant

$\Delta=b^2-4(ac)=4^2-4(4*1)=16-(16)=0$

On a donc bien un discriminant nul donc l'équation $4x^2+4x+1=0$ possède une unique solution dans R qui est d'après la formule , $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

On calcul maintenant x0 :

$X0 =-b/2a= (-4)/(2*4)=-4/8=-1/2$

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Si Δ est positif alors l'équation $ax^2+bx+c=0$ possède deux solutions dans R, x1, x2 et deux solutions dans C tel que :

Dans R

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Exemple avec des coefficients réels

Prenons l'équation suivante $4x^2+5x+1=0$:

Toujours pareil, on calcul dans un premier temps le discriminant de l'équation :

$\Delta = b^2- 4ac =5^2-4*4*1=25-16=9$

Δ>0 donc on a deux solution x1 et x2 tel que :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc

$x1=(-b+(\sqrt{\Delta}))/2a =(-5+3)/(8)=-2/8=-1/4$

$x2=(-b-(\sqrt{\Delta}))/2a =(-5-3)/(8)=-1$

Exemple avec des coefficients complexes

Prenons l'équation suivante : $x^2+ (-4-3i)x + (13+13i)=0$

On calcul dans un premier temps Δ :

$\Delta = (-4-3i)^2 -4(13+13i) = -45-28i$

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Pour calculer la racine de delta on utilise la méthode suivante (comme nous l'avons vu dans le cour d'algèbre) :

Soit $(x+iy)^2=-45-28i$, x et y des réels

Ce qui nous donne : $x^2-y^2+2*xy= -45 -28i$

On met ensuite en place un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x^2-y^2 = -45 & (1) \\ xy=-14 & (2) \end{cases}$$

De l'équation (2) on en déduit que y=-14/x (on choisit de prendre y pour que par la suite nous ayons que des x dans notre équation)

On a donc : $x^2 - \frac{196}{x^2} - 45 = 0$

on multiplie tout les membres de l'équation par x² et on obtient : $x^4-45x^2-196=0$

On remarque que cette équation est une équation bicarré à coefficient constant négatif

On pose $X=x^2$, l'équation est alors égale à $X^2-45X-196=0$

On peut donc calculer le discriminant de cette équation : $\Delta'=45^2-4*(-196) = 2809 = 53^2$

L'équation n'admet qu'une seule solution positive qui est :

$X^2=\frac{-45+53}{2*1}$ = 4 donc x = 2 ou x = -2

On injecte les solutions de x dans l'équation (2) et on obtient facilement les deux couples de solutions :

$$\begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -7 \\ b = 7 \end{cases}$$

Et donc $\sqrt{\Delta}$ = (2-7i) ou (–2+7i)

En revenant a l'équation de base $x^2+(-4-3i)x+(13+13i)=0$

On aura les solutions :

$x=\frac{(4+3i)+(2-7i)}{2*1}$ =3-2i

$x'=\frac{(4+3i)-(2-7i)}{2*1}$ =1+5i

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

On a donc 1+5i et 3-2i solutions complexes de l'équation.

Troisième degré

En **1 515** Scipione (professeur de mathématiques) découvrit enfin la méthode algébrique de résolution des équations du 3° degré. Plutôt que de la publier, il la nota sur son bloc-notes.

En **1 526**, C'est son gendre, Hannibal Nave (également professeur de mathématiques), qui hérita du bloc-notes à la mort de Scipione. Sur son lit de mort, il ne confia à son étudiant Fiore, qu'une partie de la méthode. Dès lors Fiore commença à se vanter qu'il était capable de résoudre toutes les équations du 3° degré et lança des défis aux mathématiciens.

Au XVI siècle, le mathématicien Del Ferro parvint à trouver certaines solutions d'équations du 3eme degré. Il garde sa méthode secrète mais Del Fiore en prend connaissance et l'exploite dès la mort de Del Ferro En 1535, il lance un défi à Tartaglia en vue de résoudre trente problèmes, chacun conduisant à une équation de degré trois. L'un d'eux est par exemple :
« Trouver un nombre qui ajouté à sa racine cubique, fasse 6 »"

En **1 535**, Tartaglia releva le défi algébrique et une sorte de duel s'engagea entre les deux hommes. Chacun déposa une liste de 30 problèmes chez un notaire ainsi qu'une somme d'argent. Celui qui, dans les 40 jours, aurait résolu le plus de problèmes serait désigné vainqueur et remporterait la somme. Tartaglia découvrit à son tour la méthode et résolut les 30 équations alors que Fior n'en résolut que 10.

Tartaglia découvre une démarche générale de résolution des équations, il remporte le duel mais garde ses méthodes de résolution secrètes. Cardan après maintes supplications, arrache ce secret et le publie dans l'ouvrage Ars Magna en 1545. Comme Al Khwarizmi, il commence par réorganiser l'équation de sorte que chaque quantité engagée soit positive, pis en fonction du type d'équation obtenu, il présente la résolution de celle-ci. Voyons la démarche générale de la méthode qui porte désormais son nom.

Résolution des équations du troisième degré

Il existe différentes méthodes pour résoudre les équations du troisième degré, des méthodes pour les cas particuliers et des méthodes générales trouvées par différents mathématiciens.

Une équation du 3ème degré est de la forme :

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ où a, b, c et d sont des complexes et a≠0 sinon on retrouve une équation du second degré.

Méthodes des cas particuliers :

- Si le coefficient d est nul, alors nous pouvons factoriser l'équation par x et nous avons donc :

$$x\,(ax^2 + bx + c) = 0$$

Puis il suffit de résoudre l'équation du second degré (comme vu précedemment).

Les solutions sont donc $x = 0$ et les deux solutions de l'équation du second degré.

- Si on remarque une racine évidente x_0, alors il suffit de factoriser l'équation par $(x - x_0)$, et résoudre l'équation de second degré obtenue.

Méthode de résolution générale par Cardan :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Cette équation cubique sous forme générale peut toujours se ramener à une équation sous la forme réduite en divisant par a (nous avons le droit de diviser par a car a≠0).

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Puis on supprime le terme carré au moyen d'une transformation de Tchirnhaus en posant : $x = X - \frac{\frac{b}{a}}{3}$

Soit : $x = X - \frac{b}{3a}$ et l'équation devient : $\left(X - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$

On a donc : $\left(X - \frac{b}{3a}\right)^3 = X^3 + 3X^2\left(-\frac{b}{3a}\right) + 3X\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + \left(-\frac{b}{3a}\right)^3 = X^3 - \frac{b}{a}X^2 + \ldots$

Et $\frac{b}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right)^2 = \frac{b}{a}X^2 + 2\frac{b}{a}X(-\frac{b}{3a})$

On constate que les termes en x^2 s'annulent.

Nous obtenons donc une équation de la forme $X^3 + pX + q = 0$.

A partir de cette forme, nous pouvons appliquer la méthode trouvée par Cardan.

Faire un changement de variable : on pose $X = u + v$ avec $(u, v) \in \mathbb{C}$

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Nous avons donc : $(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0$

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$

$u^3 + v^3 + q + (u+v)(3uv+p) = 0$

Pour que cette équation soit égale à 0, il faut que $(u+v)(3uv+p) = 0$ et $u^3 + v^3 + q = 0$, on a donc le système somme-produit suivant :

$$\begin{cases} 3uv + p = 0 \\ u^3 + v^3 + q = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent :

$$\begin{cases} 3uv = -p \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \qquad \begin{cases} u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

D'après les propriétés des équations du second degré, on peut affirmer que u^3 et v^3 sont racines de l'équation du second degré suivante :

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

Puis on applique la méthode vu précédemment pour la résolution des équations du second degré.

Nous calculons donc le discriminant :

$$\Delta = q^2 - 4 \times \left(-\frac{p^3}{27}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

3 cas sont alors possibles :

- Δ est positif :

On a alors $u^3 = \frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $v^3 = \frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}$ ou inversement. En remontant dans les changements de variables, nous avons $X = u + v$ et $x = X - \frac{b}{3a}$ donc $x = u + v - \frac{b}{3a}$

Donc de manière générale, l'équation de degré 3 admet une racine réelle qui est :

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}$$

Cardan arrête sa méthode ici, c'est plus tard qu'Euler trouve et montre ces deux racines complexes conjugués qui sont : $x_1 = ju + \bar{j}v$ et $x_2 = j^2u + \overline{j^2}v = \bar{j}u + jv$

Avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

- Δ est égale à 0 : L'équation de degré 3 possède trois racines réelles dont sont identiques :

Dans ce cas $u = v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

$x_0 = u + v - \frac{b}{3a} = 2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - \frac{b}{3a}$ et $x_1 = x_2 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} - \frac{b}{3a}$

- Δ est négatif : L'équation de degré 3 admet trois racines réelles (sommes de deux complexes conjugués). On trouve $u = \sqrt[3]{\frac{-q+i\sqrt{\Delta}}{2}}$ et $v = \bar{u}$

$$x_1 = u + \bar{u}$$
$$x_2 = ju + \overline{ju}$$
$$x_2 = j^2u + \overline{j^2u}$$

Toujours avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

Exemple

Après toutes ces belles théories, prenons un exemple : résolvons l'équation $x^3 + 6x^2 - 4x - 193 = 0$

On pose $x = X - \frac{6}{3}$ soit $x = X - 2$

En remplaçant dans l'équation, nous obtenons :

$(X-2)^3 + 6(X-2)^2 - 4(X-2) - 193 = 0$

$X^3 - 6X^2 + 12X - 8 + 6X^2 - 24X + 24 - 4X + 8 - 193 = 0$

$X^3 - 16X - 169 = 0$

On pose $X = u + v$

$(u+v)^3 - 16(u+v) - 169 = 0$

$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 16u - 16v - 169 = 0$

$u^3 + v^3 - 169 + (u+v)(3uv - 16) = 0$

D'où :

$\begin{cases} 3uv - 16 = 0 \\ u^3 + v^3 - 169 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3uv = 16 \\ u^3 + v^3 = 169 \end{cases}$ $\begin{cases} u^3v^3 = \frac{16^3}{27} \\ u^3 + v^3 = 169 \end{cases}$

u^3 et v^3 sont racines de l'équation : $t^2 - 169t - \frac{(-16)^3}{27} = 0$

$t^2 - 169t + \frac{4096}{27} = 0$

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

On calcule donc le discriminant :

$$\Delta = (-169)^2 - 4 \times \frac{4096}{27} = 28561 - \frac{16384}{27}$$

u et v étant les racines de l'équation du second degré (en fonction de t), on a :

$$u^3 = \frac{169 + \sqrt{28561 - \frac{16384}{27}}}{2}$$

$$v^3 = \frac{169 - \sqrt{28561 - \frac{16384}{27}}}{2}$$

$$X = u + v = \sqrt[3]{\frac{169 + \sqrt{28561 - \frac{16384}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1696 - \sqrt{28561 - \frac{16384}{27}}}{2}} = 6{,}485289$$

(Résultat arrondi) D'où la solution réelle de l'équation $x^3 + 6x^2 - 4x - 193 = 0$ est :

$x_0 = X - 2 = 4{,}485289$

Et les deux racines complexes conjuguées de cette équation sont :

$$x_1 = uj + vj^2 = \sqrt[3]{\frac{169 + \sqrt{28561 - \frac{16384}{27}}}{2}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{\frac{1696 - \sqrt{28561 - \frac{16384}{27}}}{2}} \times \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2$$

$$x_2 = uj^2 + vj = \sqrt[3]{\frac{169 + \sqrt{28561 - \frac{16384}{27}}}{2}} \times \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1696 - \sqrt{28561 - \frac{16384}{27}}}{2}} \times e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Qu'est-ce qu'un homme complexe dit à une femme réelle ?

Réponse: " viens danser ! ". ('dans C', l'ensemble des complexes)

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

Résolution des équations du 4ème degré

C'est en 1545 que Ludovico Ferrari, né à Bologne en 1922 et mort à l'âge de quarante-trois ans, détermine une solution exacte pour les équations du quatrième degré. Ferrari est entré à l'âge de quatorze ans dans la maison de Jérôme Cardan, dans laquelle les domestiques travaillaient avec leurs maîtres. Cardan s'est vite aperçu que Ferrari était plus qu'un simple servant puisqu'il savait lire et écrire. Il l'a donc exempté des tâches ménagères et a commencé à lui enseigner les mathématiques, après en avoir fait son secrétaire. Il parut évident que Ferrari était un jeune particulièrement doué. En aidant donc Cardan dans son travail et dans l'élaboration de ses différents ouvrages, il a résolu l'équation de degré 4 par une réduction à une équation de degré 3, résolution qui figure dans le livre *Ars Magna*, où il est bien mentionné que la solution a été trouvée par Ludovico Ferrari.

Le 4ème degré selon FERRARI *(non, pas la voiture : le mathématicien)*

Les équations du 4ème degré sont de la forme $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ (E) (à noter que $a \neq 0$ car sinon ce serait une équation du troisième degré dont la méthode de résolution à déjà été expliqué, par conséquent on peut diviser par a).

Dans un premier temps nous allons faire disparaître le terme en x^3

Posons $x = z - \frac{b}{4a}$

L'équation devient alors :

$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$

Ce qui s'écrit aussi

$z^4 = -pz^2 - qz - r$

Avec :

$$p = \frac{-3b^2}{8a^3} + \frac{c}{a}$$

$$q = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^3}{a^3} - \frac{1}{2} \times \frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}$$

$$r = -3\left(\frac{b}{4a}\right)^4 + c\frac{\left(\frac{b}{4}\right)^2}{a^3} - \frac{1}{4} \times \frac{bd}{a^2} + \frac{e}{a}$$

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

On cherche à remplacer z^4par $(z^2+y)^2$

On sait que $(z^2+y)^2 = z^4 + 2yz^2 + y^2$

On a donc $0 = (z^2+y)^2 - z^4 - 2yz^2 - y^2 = (z^2+y)^2 + pz^2 + qz + r - 2yz^2 - y^2$

$$= (z^2+y)^2 - (2y-p)z^2 + qz - y^2 + r \ (E_1)$$

On va maintenant chercher à écrire E_1 sous forme de carrée. Pour cela nous allons le considérer comme un polynôme du second degré. Pour le mettre sous forme de carré, il faut que son discriminant soit nul.

On a donc : $q^2 - 4(2y-p)(y^2-r)$=0

Soit : $8y^3 - 4py^2 - 8ry + 4rp - q^2 = 0$

On obtient donc une équation du 3ème degré dont la résolution a déjà été expliqué auparavant, nous n'allons donc pas réexpliquer la résolution de ce genre d'équation.

Pour résoudre l'équation, la méthode de Cardan nous donne au moins une valeur réelle de y_0 .

En réinjectant le y_0 trouvé on obtient :

$$(E_2) \ \ (z^2+y_0)^2 = (a_0z+b_0)^2 \quad avec \ \ {a_0}^2 = -p + 2y_0 \quad et \quad b_0 = -\frac{q}{2a_0}$$

On peut aussi écrire E_2 sous la forme : $(z^2+y_0)^2 - (a_0z+b_0)^2 = 0$

Qui est une identité remarquable.

On obtient donc

$$(z^2 + y_0 - a_{0z} - b_0)(z^2 + y_0 + a_0z + b_0) = 0$$

Or un produit est nul lorsqu' au moins un des 2 facteurs est nul. On a donc

$$(z^2 + y_0 - a_{0z} - b_0) = 0 \qquad OU \qquad (z^2 + y_0 + a_0z + b_0) = 0$$

Ce qui revient à résoudre 2 équations du second degré. On a donc au maximum 4 solutions pour z. On peut donc en déduire les valeurs de x solutions de l'équation initiale.

Exemple

Posons P(x) = $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10$ et résolvons l'équation P(x)=0.

Tourrette Benjamin
Carole Boutin
Sébastien Roth
Thomas Abbas

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 8x - 10 = 0$$

Posons $x = z - \left(\frac{-4}{4\times 1}\right) = z - 1$

On développe, on simplifie et on regroupe les termes de même degré

Ce qui nous donne l'équation suivante :

$$z^4 - 3z^2 - 6z - 2 = 0$$

On sait que

$$(z^2 + y)^2 = z^4 + 2yz^2 + y^2$$

On a donc

$$(X^2 + y)^2 = 3z^2 + 6z + 2 + 2yz^2 + y^2$$

On réécrit le second membre sous forme de polynôme en z

$(X^2 + y)^2 = (3 + 2y)z^2 + 6z + y^2 + 2$ (E_1)

Si on veut que le deuxième membre soit sous forme de carré, il faut trouver un y tel que le discriminant de ce polynôme.

$$\Delta = 6^2 - 4(3 + 2y)(y^2 + 2) = 0$$

Développé et simplifié, on obtient :

$2y^3 + 3y^2 + 4y - 3 = 0$

On remarque que $y = \frac{1}{2}$ est une racine évidente, il est donc inutile d'utiliser Cardan dans ce cas.

On le réinjecte dans E_1 :

$$(z^2 + 0.5)^2 = 4z^2 + 6z + 2.25$$

On a donc $(z^2 + 0.5)^2 = (2z + 1.5)^2 \Leftrightarrow (z^2 + 0.5)^2 - (2z + 1.5)^2 = 0$

C'est une identité remarquable qui nous donne :

$$[z^2 + 2z + 2][z^2 - 2z - 1] = 0$$

Pour qu'un produit soit nul, il faut qu'au moins un de ses termes soit nul. Il vient donc

$$[z^2 + 2z + 2] = 0$$
$$[z^2 - 2z - 1] = 0$$

Le discriminant de la première équation est $\Delta_1 = 4 - 4 \times 2 = -4$

Le discriminant de la première équation est $\Delta_2 = 4 - 4 \times (-1) = 8$

Pour la première équation on a donc

$$z_1 = -1 - i$$
$$z_2 = -1 + i$$

Pour la deuxième équation on a

$$z_3 = 1 - \sqrt{2}$$
$$z_4 = 1 + \sqrt{2}$$

On obtient donc

$$x_1 = -2 - i$$
$$x_2 = -2 + i$$
$$x_3 = -\sqrt{2}$$
$$x_4 = \sqrt{2}$$

Équations du Cinquième degré

Évariste Galois

Evariste Galois (1811-1832)

Né à Paris le 25 octobre 1811,

décédé à Paris le 31 mai 1832.

La vie de Galois fut dominée par la politique et les mathématiques. Ardent républicain, il était dans une position inconfortable; en effet, le seul mathématicien français capable de comprendre ses travaux était Cauchy, royaliste tout aussi ardent.

En 1829 il publia son premier article sur les fractions continues suivi d'une démonstration prouvant l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré par radicaux. Cela conduisit à la théorie de Galois, une branche des mathématiques traitant de la résolution des équations algébriques.

Célèbre pour sa contribution à la théorie des groupes, il découvrit une méthode déterminant quand une équation pouvait être résolue par radicaux. Cette théorie apportait ainsi une réponse à des problèmes fort anciens tels que la trisection de l'angle et la duplication du cube.

Il introduisit le mot "groupe" en considérant le groupe de permutations des racines d'une équation. C'est la théorie de groupes qui rendit possible la synthèse de la géométrie et de l'algèbre.

Conclusion :

L'étude des méthode de résolutions des différentes équations nous on permis d'analyser le contexte historique des équations auquel nous ne sommes pas habitué, ce fut par conséquent instructif et nous a permis de découvrir les autre méthodes de résolutions d'équations encore inconnues à ce jour. Cependant il est vrai que la résolution de l'équation personnel ne fut pas trivial et cela nous a couté une nuit pour tenter de comprendre comment fonctionner la fin de la méthode de résolutions (car nous étions bloqué après la résolution de l'équation du troisième degré par la méthode de Cardan), mais on le dit si bien « c'est en forgeant qu'on devient forgeron ». Ce tai a donc contribué à nous entrainer à faire des recherches et à ce débrouiller par nous même (c'est dans ce genre de situation que Google devient de plus en plus notre ami). On peut ce demander à présent quel autre surprise notre professeur de mathématiques nous réserve pour la suite…

"*La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques"*

Simeon Denis Poisson