Feuille de TD n° 3 : Fonctions polynômes

Les fondamentaux

Exercice 1.
Effectuer la division de $A \in \mathbb{C}[X]$ par $B \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :

a. $A(x) = x^3 - 1, \quad B(x) = x + 2\,;$
b. $A(x) = 3x^5 + 4x^2 + 1, \quad B(x) = x^2 + 2x + 3\,;$
c. $A(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^2 + 1, \quad B(x) = x^3 + x + 2\,;$
d. $A(x) = x^4 - x^3 + x - 2, \quad B(x) = x^2 - 2x + 4\,;$
e. $A(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 + 4, \quad B(x) = x^2 - 1\,;$
f. $A(x) = x^4 + ix^3 - ix^2 + x + 1, \quad B(x) = x^2 + ix + 1\,;$
g. $A(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2, \quad B(x) = x^2 + (1-i)x + 1 + i\,;$
h. $A(x) = x^4 - 2x^2\cos(2\varphi) + 1, \quad B(x) = x^2 - 2x\cos(\varphi) + 1.$

Exercice 2.
Les fonctions polynômes $A(x) = x^5 + x^4 + x - 2$ et $B(x) = x^3 - x + 1$ ont-ils une racine commune ?

Exercice 3.
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $x - a$ divise $x^n - a^n$.

Exercice 4.
Montrer que la fonction polynôme $x(x+1)(2x+1)$ divise $A(x) = (x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$.

Exercice 5.
Soit P une fonction polynôme à coefficients réels. En notant R le reste de la division euclidienne de P par $x^2 + 1$, montrer que $R(i) = P(i)$. En déduire que $x^2 + 1$ divise P si et seulement si $P(i) = 0$.
Montrer ce même résultat sans passer par le reste de la division enclidienne.

Exercice 6.
Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division de

$$A(x) = (\cos a + x\sin a)^n \quad \text{par} \quad B(x) = x^2 + 1.$$

Exercice 7.
Trouver une racine du polynôme $P(X) = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$, puis décomposer P en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 8.
Montrer que les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels, sont réelles ou conjuguées.

Exercice 9.
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que P est divisible par $(x-a)^2$ si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$.

Exercice 10.
Soit $T(X) = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 1$. Montrer que $T(1) = T'(1) = 0$ et en déduire la décomposition de T en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 11.
Soit $P(x) = x^2 + ax + b$ une fonction polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré 2 et unitaire. Si α et β sont les racines de P, montrer que l'on a $\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = b$.

Exercice 12.
Déterminer a et b pour que

$$P(x) = ax^{n+1} + bx^n + 1$$

admette la racine double $x = 1$. Quel est alors le quotient de $P(x)$ par $(x-1)^2$?

Exercice 13.

a. Soit $n \geq 3$ un entier, montrer que le polynôme $P(x) = nx^n - (n+1)x^{n-1} - x + 2$ est divisible par $(x-1)^2$.
b. Soit $n \geq 1$ un entier, montrer que le polynôme $Q(x) = (x-3)^{2n} + (x-2)^n - 1$ est divisible par le polynôme $x^2 - 5x + 6$. *Indication : on pourra commencer par vérifier que* 2 *et* 3 *sont des racines de* $Q(x)$.

Exercice 14.
Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons le polynôme $P_n(x) = (x+1)^n - (x-1)^n$.

a. Quel est le degré de P_n ?
b. Montrer que le polynôme P_n est impair lorsque n est pair, et pair lorsque n est impair.
c. Déterminer les racines complexes de P_n. Parmi ces racines, combien sont réelles ?
d. Déterminer les racines complexes du polynôme dérivé P'_n. Que remarque-t-on ?

Un peu de réflexion

Exercice 15.
Trouver toutes les fonctions polynômes de degré $\leqslant 3$ telles que

$$P(0) = 1,\ P(1) = 2,\ P(2) = -1,\ P(3) = -2.$$

Exercice 16.
Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $x^3 - 2x^2 + x + 3$. Calculer $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Exercice 17.
Déterminer toutes les fonctions polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 telles que

$$P(x+1) - P(x-1) = x^2 + 1.$$

Exercice 18.

a. Déterminer toutes les fonctions polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ telles que $P(x^2) = (x^2+1)P(x)$.
b. Déterminer toutes les fonctions polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ telles que $P'(x) = 4P(x)$.

Exercice 19.
Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit la fonction polynôme $P(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} ... + \dfrac{x^n}{n!}$.

a. Calculer $P(x) - P'(x)$.

b. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 20.
Quels sont les fonctions polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ telles que P' divise P ?

Exercice 21.
Factoriser $A(x) = x^5 + x$ dans $\mathbb{C}[X]$. (Il y a deux manières de faire.)

Exercice 22.
Trouver la décomposition de $A(x) = x^6 + 1$ en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 23.
Soit la fonction polynôme

$$P(x) = x^4 + (-4 + 2i)x^3 + (12 - 8i)x^2 + (4 + 26i)x - 13$$

a. Montrer que $-i$ est une racine de P. Préciser son ordre de multiplicité.

b. Calculer les racines de P.

Exercice 24.
Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ la fonction polynôme

$$P(x) = x^5 + 8x^4 + 26x^3 + 44x^2 + 40x + 16$$

après avoir vérifié qu'elle admet -2 pour racine.

Exercice 25.
Soit $P = (x^2 - x + 1)^2 + 1$.

a. Vérifier que i est racine de P.

b. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$

c. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles : $P(x) = x^4 + x^2 + 1, \quad Q(x) = x^{2n} + 1, \quad R(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$

Exercice 26.
Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

a. $x^3 - 3$.

b. $x^{12} - 1$.

c. $x^n - 1$.

Exercice 27.

a. On suppose que b est un paramètre dans $\mathbb{C}$ et on considère la fonction polynomiale $S_b(X) = X^3 - b^3$ de la variable complexe X. Effectuer la division euclidienne de $S_b(X)$ par $X - b$.

b. On considère dans la suite le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 9$. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $X - 1$.

c. Déduire de la question précédente que $P(X)$ peut s'écrire comme la différence entre deux cubes.

d. Déduire des questions précédentes une factorisation de $P(X)$ en un produit de polynômes de degré un à coefficients complexes.

Exercice 28.
Soit P une fonction polynôme non constant et $m \geq 1$. On suppose que a est racine de P de multiplicité exactement m.
Montrer que a est racine de P' de multiplicité exactement $m - 1$.

Pour aller plus loin

Exercice 29.
Soit n un entier strictement positif. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ la fonction polynôme

$$P(x) = (x+1)^n - (x-1)^n.$$

Exercice 30.
Montrer que toute fonction polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 3 admet une racine réelle :

a. en passant par $\mathbb{C}[X]$;

b. sans passer par $\mathbb{C}[X]$.

Est-ce que toute fonction polynôme de degré 4 et plus admet une racine réelle ?