CORRIGE CONTROLE ECRIT Octobre 2012

Exercice n°1 :(3 points)

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b]. On suppose en outre que f est n fois dérivable sur [a ; b] et est n+1 fois dérivable en a. Alors, il existe une fonction notée ε vérifiant $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que pour tout x appartenant à [a ; b]

$$f(x)= f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x)$$

2. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. On peut donc lui appliquer le théorème énoncé ci-dessus.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = e^x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. On a donc, à l'ordre 3 en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\mathcal{E}(x), \qquad \text{où } \lim_{x\to 0}\mathcal{E}(x) = 0$$

Exercice n°2 :(4 points)

Théorème des accroissements finis : Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b], dérivable sur l'intervalle ouvert]a ; b[. Alors, il existe un point $c \in]a;b[$ tel que $f(b)- f(a)= f'(c)(b-a)$.

Soit la fonction g définie sur [a ;b] par :

$$g(x) = (f(b) - f(a)(x-a) - (f(x) - f(a))(b-a)$$

La fonction g est continue sur [a ;b] et est dérivable sur]a ;b[. De plus, $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe c appartenant à]a ;b[tel que $g'(c) = 0$.

Or $g'(x) = f(b) - f(a) - f'(x)(b-a)$. Donc $g'(c) = 0 \Leftrightarrow f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Exercice n°3 :(3 points)

La fonction f est continue et dérivable sur [0 ;+∞[comme composée de fonctions continues et dérivables

$$\forall x \in [0;+\infty[, f'(x) = 2x \times \frac{1}{1+(1+x^2)^2} = \frac{2x}{1+(1+x^2)^2} \geq 0 \text{ car } x \geq 0$$

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. De plus, $f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x = \dfrac{\pi}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Donc f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[, y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = \arctan(1+y^2) \Leftrightarrow \tan x = 1 + y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{\tan x - 1}$$

Donc la bijection réciproque de f est définie sur $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[$ par $f^{-1}(x) = \sqrt{\tan x - 1}$

Exercice n°4 :(10 points)

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues.

$$en\ 0, \sin(2x) \approx 2x\ donc\ f(x) \approx \frac{2x}{x} = 2\ donc\ \lim_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0) donc\ f\ continue\ en\ 0$$

Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. En appliquant la formule de Taylor Young à la fonction $x \longmapsto \sin(2x)$ en 0 à l'ordre 3, on obtient :

$$\sin(2x) = 0 + 2x + \frac{x^2}{2!}\times 0 + \frac{x^3}{3!}\times(-8) + x^3\varepsilon(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\ où\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$en\ 0: \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{\sin(2x)}{x} - 2}{x} = \frac{2 - \frac{4}{3}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 2}{x} = -\frac{4}{3}x + x\varepsilon(x)\ en\ utilisant\ 2.$$

$$donc\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{4}{3}x + x\varepsilon(x)\right) = 0\ donc\ f\ dérivable\ en\ 0\ et\ f'(0) = 0$$

4. $\forall x \neq 0, -1 \leq \sin(2x) \leq 1 \Rightarrow \forall x > 0, -\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\ car\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$

$De\ même, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.\ La\ droite: y = 0\ est\ asymptote\ à\ la\ courbe\ de\ f.$