Relation d'équivalence

Exercice 1 [02643] [correction]
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E à la fois réflexive et transitive.
On définit les nouvelles relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ par :

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \text{ et } x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$$

Les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont-elles des relations d'équivalences ?

Exercice 2 [02644] [correction]
Soit E un ensemble et A une partie de E.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\wp(E)$ par :

$$X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
b) Décrire la classe d'équivalence de $X \in \wp(E)$

Exercice 3 [02983] [correction]
On considère sur $\mathcal{F}(E, E)$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathfrak{S}(E) \text{ telle que } f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) Décrire la classe d'équivalence d'une fonction donnée $f \in \mathfrak{S}(E)$.

Exercice 4 [02984] [correction]
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive.
On définit une relation $\mathcal{S}$ par :

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.

Exercice 5 [02985] [correction]
Soit $(G, \times)$ un groupe et H un sous groupe de $(G, \times)$.
On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur G par :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et en décrire les classes d'équivalence.

Exercice 6 [03453] [correction]
Soit $(G, .)$ un groupe de cardinal $2n$.
a) Justifier que l'on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur G en posant

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = y^{-1}$$

b) En déduire l'existence dans G d'un élément d'ordre 2.

Exercice 7 X MP [03243] [correction]
Soit G un groupe multiplicatif de cardinal p^α avec p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^\star$.
Montrer que

$$Z(G) \neq \{1\}$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont clairement réflexives et symétriques.
Soient $x, y, z \in E$.
Supposons $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$.
On a alors $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ donc $x\mathcal{R}z$ et aussi $y\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$ donc $z\mathcal{R}x$ puis $x\mathcal{S}z$.
Le raisonnement n'est plus valable avec $\mathcal{T}$ et on peut présumer que $\mathcal{T}$ ne sera pas une relation d'équivalence.
Prenons pour $\mathcal{R}$ la relation divise définie sur $\mathbb{N}^\star$. On a $2 \mid 6$ et $3 \mid 6$ donc $2\mathcal{T}6$ et $6\mathcal{T}3$ or $2 \not\mathcal{T} 3$.
Ici la relation $\mathcal{T}$ n'est pas transitive.

Exercice 2 : [énoncé]
a) La relation étudiée est évidemment réflexive, symétrique et transitive.
b) $Y \in Cl(X) \Leftrightarrow Y \cup A = X \cup A$.
Soit $Y \in Cl(X)$. On a $Y \cup A = X \cup A$
$\forall x \in Y\backslash A$ on a $x \in Y \cup A = X \cup A$ et $x \notin A$ donc $x \in X\backslash A$. Ainsi $Y\backslash A \subset X\backslash A$ et inversement $X\backslash A \subset Y\backslash A$ donc $X\backslash A = Y\backslash A$.
Puisque $Y = (Y\backslash A) \cup (Y \cap A)$ on a $Y = (X\backslash A) \cup B$ avec $B \in \wp(A)$.
Inversement soit $Y = (X\backslash A) \cup B$ avec $B \in \wp(A)$.
On a $Y \cup A = (X\backslash A) \cup (B \cup A) = (X \cap \bar{A}) \cup A = X \cup A$.
Finalement $Cl(X) = \{(X\backslash A) \cup B / B \in \wp(A)\}$.

Exercice 3 : [énoncé]
a) $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f$ donc $f\mathcal{R}f$.
Si $f\mathcal{R}g$ alors il existe $\varphi \in \mathfrak{S}(E)$ telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ mais alors $g \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ f$ donc $g\mathcal{R}f$.
Si $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$ alors il existe$\varphi, \psi \in \mathfrak{S}(E)$ telles que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ et $g \circ \psi = \psi \circ h$ donc $f \circ \theta = \theta \circ h$ avec $\theta = \varphi \circ \psi \in \mathfrak{S}(E)$. Ainsi $f\mathcal{R}h$.
b)

$$g \in \mathcal{C}l(f) \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathfrak{S}(E),\, g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$$

Finalement

$$Cl(f) = \left\{\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi / \varphi \in \mathfrak{S}(E)\right\}$$

Exercice 4 : [énoncé]
$\mathcal{S}$ est réflexive, symétrique et transitive sans difficultés.
On définit $Cl(x) \preccurlyeq Cl(y) \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$. La relation $\preccurlyeq$ est bien définie, réflexive transitive.
Si $Cl(x) \preccurlyeq Cl(y)$ et $Cl(y) \preccurlyeq Cl(x)$ alors $x\mathcal{S}y$ donc $Cl(x) = Cl(y)$.

Exercice 5 : [énoncé]
Soit $x \in G$. On a $x\mathcal{R}x$ car $xx^{-1} = 1 \in H$.
Soient $x, y \in G$. Si $x\mathcal{R}y$ alors $xy^{-1} \in H$ et donc $yx^{-1} \in H$ d'où $y\mathcal{R}x$.
Soient $x, y, z \in G$. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $xy^{-1} \in H$ et $yz^{-1} \in H$ donc $xz^{-1} \in H$ d'où $x\mathcal{R}z$.
Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Soit $a \in G$.

$$x \in Cl(a) \Leftrightarrow x\mathcal{R}a \Leftrightarrow xa^{-1} \in H$$

donc

$$Cl(a) = Ha = \{ha / h \in H\}$$

Exercice 6 : [énoncé]
a) La relation est immédiatement réflexive et symétrique.
En discutant selon les cas d'égalité, on montre aussi qu'elle est transitive.
b) S'il n'existe pas dans $(G, .)$ d'élément d'ordre 2, les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ comportent toutes deux éléments sauf celle de e qui ne comporte qu'un élément. Les classes d'équivalence étant disjointes de réunion G, le cardinal de G est alors impair ce qui est contraire aux hypothèses.

Exercice 7 : [énoncé]
Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ sur G définie par

$$y_1 \mathcal{R} y_2 \Leftrightarrow \exists x \in G, xy_1 = y_2 x$$

Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G. Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ forment donc une partition de G ce qui permet d'affirmer que le cardinal de G est la somme des cardinaux des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.
Une classe d'équivalence d'un élément y est réduite à un singleton si, et seulement si,

$$\forall x \in G, xy = yx$$

i.e.

$$y \in Z(G)$$

En dénombrant G en fonction des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ et en isolant parmi celles-ci celles qui sont réduites à un singleton on a

$$\text{Card}G = \text{Card}Z(G) + N$$

avec N la somme des cardinaux des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ qui ne sont pas réduites à un singleton.
Pour poursuivre, montrons maintenant que le cardinal d'une classe d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ divise le cardinal de G.
Considérons une classe d'équivalence $\{y_1, \ldots, y_n\}$ pour la relation $\mathcal{R}$ et notons

$$H_i = \{x \in G / xy_1 = y_i x\}$$

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, puisque $y_1 \mathcal{R} y_i$, il existe $x_i \in G$ tel que

$$x_i y_1 = y_i x_i$$

Considérons alors l'application $\varphi : H_1 \to H_i$ définie par

$$\varphi(x) = x_i x$$

On vérifie que cette application est bien définie et qu'elle est bijective.
On en déduit

$$\text{Card}H_1 = \ldots = \text{Card}H_m = n$$

et puisque G est la réunion disjointes des $H_1, \ldots, H_m$

$$\text{Card}G = mn = p^\alpha$$

Ainsi toutes les classes d'équivalences qui ne sont pas réduites à 1 élément ont un cardinal multiple de p et donc $p \mid N$.
Puisque p divise $\text{Card}G = \text{Card}Z(G) + N$, on a

$$p \mid \text{Card}Z(G)$$

Sachant $Z(G) \neq \emptyset$ (car $1 \in Z(G)$) on peut affirmer

$$\text{Card}Z(G) \geqslant p$$