EFREI PL1

G. Vinaver.

Formulaire d'intégration

1 Autour de $\operatorname{Arc\,tg}$

A savoir par coeur :

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arc\,tg} x + C, \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{(x-b)^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x-b}{a} + C$$

A savoir retrouver :

$$\int \frac{dx}{c^2x^2+d^2} = \frac{1}{c^2}\int \frac{dx}{x^2+\frac{d^2}{c^2}} = \frac{1}{cd}\operatorname{Arc\,tg}\frac{cx}{d}$$

Un cas un peu plus général : des calculs à savoir faire :

Soit l'intégrale

$$\int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

Il existe des constantes K et L (à déterminer) telles que

$$\int \frac{ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2} = K\int \frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + L\int \frac{dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$= K\ln((x-\alpha)^2+\beta^2) + \frac{L}{\beta}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x-\alpha}{\beta}$$

On a donc fait en sorte d'obtenir une partie en u'/u, qui donne un logarithme, et une partie en $1/u$, qui donne un arctangente. A vous d'apprendre à bidouiller pour calculer les deux constantes permettant de le faire.

2 Eléments simples

.

Deux types $\dfrac{a}{(x-\alpha)^k}$, et $\dfrac{ax+b}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}$

Toute fraction rationnelle est somme d'un polynôme (qui peut être nul) et d'élément simples.
Exemple : une fraction de type $F(x)=\frac{P(x)}{(x-a)^k(x-b)^l}$ s'écrit

$$F(x)=\frac{a_k}{(x-a)^k}++\frac{a_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{a_1}{(x-a)}+\frac{b_l}{(x-b)^l}+\cdots$$

Méthode pour déterminer les coefficients. Donnons la sur des exemples.

$F(x)=\dfrac{x}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x-3}$
Calcul de a : on multiplie tout par $x-2$, puis on fait $x=2$. On obtient $a=-2$. Idem pour b.
$F(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)(x-3)}=\dfrac{a}{x-3}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

Calcul de a : idem. Calcul de b et c : on multiplie par x^2+1 et on remplace x par une racine de x^2+1, à savoir i.

$bi+c=\dfrac{i}{i-3}=\dfrac{1-3i}{10}$, donc $b=-3/10$, et $c=1/10$.

$F(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)}=\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x-1}$

c : comme d'hab'. a : comme pour a. On obtient $a=-1$.

Pour b, on "envoie" le a/x^2 à droite, on réduit au même dénominateur, et là, miracle : le degré baisse, et on peut utiliser la méthode standard pour b.

$$\frac{1}{x^2(x-1)}+\frac{1}{x^2}=\frac{x}{x^2(x-1)}=\frac{1}{x(x-1)}$$

d'où : =

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{b}{x}+\frac{c}{x-1}$$

et là, on remet le couvert.