Algèbre linéaire d'un point de vue algorithmique

chapI. SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

(1 séance)

1. Equations linéaires

Définition 1. *Equation d'une droite dans le plan* $a_1x+a_2y=b$

Définition 2. *Equation d'un plan dans l'espace* $a_1x+a_2y+a_3z=b$

Définition 3.

Equation linéaire en les variables $x_1, \ldots., x_n$*:* $a_1x_1+a_2x_2+\ldots\ldots+a_nx_n=b$

Définition 4. *Soit l'équation* $a_1x_1+a_2x_2+\ldots\ldots+a_nx_n=b$

Une solution de l'équation est un n-uplet $(s_1, \ldots, s_n)$ *de réels tels que* $a_1s_1+a_2s_2+\ldots\ldots+a_ns_n=b$.

Résoudre l'équation c'est rendre apparentes les valeurs (toutes les valeurs!) que peuvent prendre les inconnues.

La résolution se fait au moyen d'équivalences ($\Longleftrightarrow$!)

on remplace le système S_1 par un système équivalent S_2 :

si S_1 est vrai S_2 l'est aussi et si S_2 est vrai S_1 l'est aussi

jusqu'à ce qu'on arrive

à une description de l'ensemble des solutions

ou

à la conclusion qu'il n'y en a pas.

Exercice 1. x_1-$4x_2$+$13x_3$=5

Solution. x_1-$4x_2$+$13x_3$=5 $\Longleftrightarrow$ x_1=$4x_2$-$13x_3$+5; l'ensemble des solutions est $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, x_1 = 4x_2\text{-}13x_3+5\}$ ou si vous préférez $\{(4x_2\text{-}13x_3+5, x_2, x_3), (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\}$.

On ne peut aller plus loin il y a deux variables qui sont « libres » et la troisième, x_1, est déterminée chaque fois que nous avons choisi (x_2, x_3).

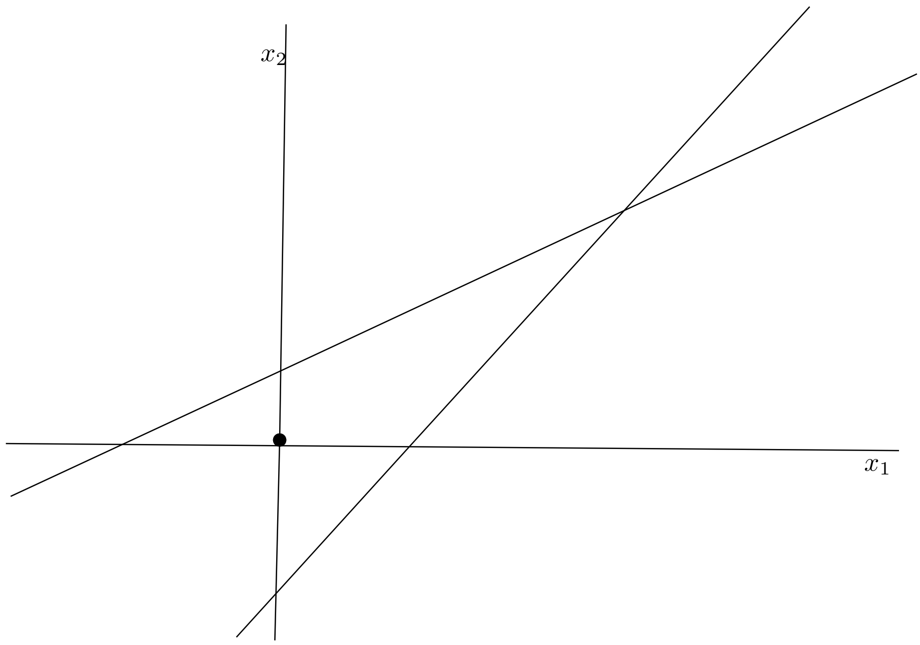
Les solutions sont déterminées par le choix de (x_2, x_3).

Exercice 2. x_1-$6x_2$+$3x_3$-$8x_4$=15

à vous ....

2. Systèmes d'équations linéaires

Exemple 5. On désire savoir si deux droites du plan ont un point commun et, si oui, le déterminer



La première droite a pour équation: x_1-$4x_2$+4=0

La seconde droite a pour équation: $2x_1$-x_2-6=0

Les points communs aux deux droites, s'il y en a, vérifient les deux équations à la fois c'est à dire le système: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 6 = 0 \end{cases}$

Définition 6. *Un système d'équations linéaires est un ensemble fini d'équations*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots\ldots + a_{\mathrm{pn}}x_n = b_p \end{cases}.$$

Définition 7. *Une solution du système d'équations linéaires ci-dessus est un n-uplet* $(s_1, \ldots, s_n)$ *de réels tels que* $\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots\ldots + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots\ldots + a_{2n}s_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}s_1 + a_{p2}s_2 + \ldots\ldots + a_{\mathrm{pn}}s_n = b_p \end{cases}$ *pour tout i=1,..,m .*

Exercice 3. Résoudre le système $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$.

Solution.

sans méthode nous dépendons de la chance, avec méthode nous dépendons de notre seul travail.

Si nous conservons la première équation L_1 et nous ajoutons cette équation à la seconde (L2), en appelant le résultat L_2' ce sera une opération « réversible », nous pourrons reconstituer l'ancienne L_2 en retranchant L_1 à L'2; donc nous n'avons pas modifié l'ensemble des solutions.

Donc $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$.

Recommençons

Ajoutant à la première équation « actuelle » le produit de la seconde par 3; ce sera encore une opération réversible, donc nous avons un nouveau système qui possède les mêmes solutions

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1\text{-}5x_3 = 31 \\ x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_3 + 1 \\ x_2 = 2x_3 + 10 \end{cases}.$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{(5x_3 + 1, 2x_3 + 10, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$

Une variable, x_3, est « libre », mais pour chaque valeur de x_3, les deux autres ont leur valeur « déterminée ».

Attention il y a des systèmes d'équations linéaires qui ont des solutions, il y en a qui n'en ont pas :

Définition 8.

Un système d'équations linéaires est dit

consistant lorsqu'il possède au moins une solution

et

incompatible lorsqu'il n'a pas de solution.

Exercice 4. Résoudre le système $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 11x_1 + 11x_2 = 9 \end{cases}$

Solution. Opérons de même

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 11x_1 + 11x_2 = 9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 0 = \text{-29} \end{cases}$!!!!! bizarre !

Remarque 9. Toute équation de la forme $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b$, où $b \neq 0$ est incompatible.

3. La méthode de résolution

Définition 10. *Opérations élémentaires*

Soit un système d'équations linéaires $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ . \\ \dots \\ L_p \end{cases}$*, on appelle opérations élémentaires*

i) Multiplier une équation par une constante k non nulle: $L_i \longleftarrow \mathrm{kL}_i$.

ii) Echanger (permuter) deux équations: $L_i \leftrightarrow L_j$

iii) Ajouter un multiple d'une équation à une autre équation: $L_i \longleftarrow L_i + \mathrm{k}\mathrm{L}_j$

Théorème 11.

Les opérations élémentaires conservent l'ensemble des solutions du système.

Exercice 5. Résoudre le système ci-dessus en utilisant des opérations élémentaires.

Solution. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ -x_1-3x_2-4x_3=-5 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 0-2x_2\text{-}2x_3=-6 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-5 \end{cases} \Longleftrightarrow$
$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ -2x_2\text{-}2x_3=-6 \\ 0-3x_2-2x_3=-3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ x_2+x_3=3 \\ -3x_2-2x_3=-3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ x_2+x_3=3 \\ x_3=6 \end{cases} \Longleftrightarrow$
$\begin{cases} x_1+x_3=-4 \\ x_2+x_3=3 \\ x_3=6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=-10 \\ x_2=-3 \\ x_3=6 \end{cases}.$

D'où l'ensemble des solutions est le singleton $\{(-10,-3,+6)\}$.

Exercice 6. Résoudre le système suivant en utilisant des opérations élémentaires

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ 0x_1+x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2+0x_3-3x_4=1 \\ 0x_1-7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ 0x_1+x_2-x_3+x_4=-3 \\ 0x_1+5x_2\text{-}3\mathrm{x}_3\text{+}x_4=\text{-}3 \\ 0x_1-7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ 0x_1+x_2-x_3+x_4=-3 \\ 0x_1+0x_2+2\mathrm{x}_3\text{-}4x_4=12 \\ 0x_1-7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\ 0x_1+x_2-x_3+x_4=-3\\ 0x_1+0x_2+2x_3-4x_4=12\\ 0x_1+0x_2-4x_3+8x_4=-24\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\ 0x_1+x_2-x_3+x_4=-3\\ 0x_1+0x_2+x_3-2x_4=6\\ 0x_1+0x_2-4x_3+8x_4=-24\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\ 0x_1+x_2-x_3+x_4=-3\\ 0x_1+0x_2+x_3-2x_4=6\\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4\\ 0x_1+x_2+0x_3-x_4=3\\ 0x_1+0x_2+x_3-2x_4=6\\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases} x_1-2x_2+0x_3+2x_4=-14\\ 0x_1+x_2+0x_3-x_4=3\\ 0x_1+0x_2+x_3-2x_4=6\\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases} x_1+0x_2+0x_3+0x_4=-8\\ 0x_1+x_2+0x_3-x_4=3\\ 0x_1+0x_2+x_3-2x_4=6\\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0\end{cases}.$$

CONCLUSION:

Le système donné est équivalent à

$$\begin{cases} x_1=-8\\ x_2-x_4=3\\ x_3-2x_4=6\\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0\end{cases} \text{ c'est à dire à } \begin{cases} x_1=-8\\ x_2=3+x_4\\ x_3=6+2x_4\\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0\end{cases},$$

on remarquera que x_4 est libre et que les autres s'expriment en fonction de x_4.

l'ensemble des solutions est $\{(-8,3+x_4,6+2x_4,x_4), x_4\,\text{libre}\}$.

3. La matrice augmentée d'un système d'équations linéaires

Pour éviter ces longues lignes nous allons garder seulement ce qui est nécessaire:

Définition 12. *L'OUTIL*

La Matrice augmentée du système $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots\ldots + a_{\text{pn}}x_n = b_p \end{cases}$

Ce sera la matrice (le tableau) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & \ldots & a_{\text{pn}} & \text{bp} \end{pmatrix}$

Exercice 7. Déterminer la matrice augmentée du système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ \text{-}x_1 - 3x_2\text{-}4x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

Solution. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ \text{-1} & -3 & \text{-4} & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

Méthode algorithmique de résolution d'un système d'équations linéaires au moyen de la matrice augmentée:

Nous allons effectuer les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ \text{-1} & -3 & \text{-4} & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 + \mathrm{L}_1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & \text{-2} & -6 \\ 2 & -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3\text{-}2\mathrm{L}_1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & \text{-2} & -6 \\ 0 & \text{-3} & \text{-2} & -3 \end{pmatrix} L_2 \longrightarrow$ -1/ $2L_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & \text{-2} & -3 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3 + 3L_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} L_2 \longrightarrow L_2\text{-}\mathrm{L}_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} L_1 \longrightarrow L_1\text{-}2L_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & \text{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Et là on retourne au système

$$\begin{cases} x_1 = \text{-10} \\ x_2 = \text{-3} \\ x_3 = 6 \end{cases}.$$

l'ensemble des solutions est $\{(-10, -3, +6)\}$

Exemple 13. Résoudre le système $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 - 3x_4 = 1 \\ 0x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$ en utilisant la matrice augmentée

Solution.

La matrice augmentée du système est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3\text{-}L_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow L_3\text{-}5\mathrm{L}_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} L_4 \longrightarrow L_4 + 7L_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix} L_3 \longrightarrow 1/2L_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix} L_4 \longrightarrow L_4 + 4L_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_2 \longrightarrow L_2 + L_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1\text{-}3L_3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C'est fini, on retourne au système

$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 - x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = 6 \\ 0x_4 = 0 \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = x_4 + 3 \\ x_3 = 2x_4 + 6 \\ x_4 = \text{libre} \end{cases}$

L'ensemble des solutions est donc $\{(-8, 3 + x_4, 6 + 2x_4, x_4), x_4 \text{ libre}\}$.

la vérification consistera à remplacer dans chacune des équations x_1 par -8, x_2 par x_4+3, x_3 par $2x_4+6$ et x_4 « par lui-même ».

Expliquons comment on opère

4. Elimination Gaussienne

Définition 14. *Matrice échelonnée*

Une matrice $M = (m_{ij})_{(i=1,..,p; j=1,..,n)} = (M_1, \ldots, M_n)$ *est dite* ***échelonnée*** *lorsque*

i) Dans toute ligne non nulle le premier élément (en lisant de gauche à droite) non nul vaut 1; il est appelé ***1 directeur****.*

ii) Les lignes dont les éléments sont tous nuls sont regroupées au bas de la matrice.

iii) Dans deux lignes non nulles successives le 1 directeur de la ligne inférieure est situé plus à droite que le 1 directeur de la ligne supérieure.

Elle est dite ***réduite*** *lorsque, de plus, toute colonne qui a 1 directeur a des zéros ailleurs.*

Exercice 8. Déterminer parmi les matrices suivante celles, s'il y en a, qui sont échelonnées et réduites $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Théorème 15. *Toute matrice peut être transformée par une suite d'opérations élémentaires en une matrice* ***échelonnée réduite****.*

1. Déterminer la colonne la plus à gauche M_j contenant un élément non nul, m_{ij}.

2. Si cet élément se trouve dans la première ligne passer à l'étape 3, sinon, s'il se trouve dans la i-ème ligne, échanger la première et la i-ème ligne.

3. Si le premier élément non nul de la première ligne est égal à 1 passer à l'étape 4, s'il est égal à $k \neq 1$ multiplier la première ligne par 1/k, ce qui permet d'obtenir un 1 directeur.

4. Ajouter à toutes les lignes se situant ***au-dessus et au-dessous*** *un bon multiple de la première ligne pour annuler tous les termes en-dessous du 1 directeur.*

5. Retourner à l'étape 1 pour la matrice ***restante****.*

Exercice 9. Mettre sous forme échelonnée réduite en utilisant des opérations élémentaires: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Solution. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 16. *Résolution d'un système dont la matrice augmentée est* ***échelonnée réduite***

0. S'il existe une équation de la forme $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = \beta$, où $\beta \neq 0$, le système est incompatible.

Sinon

Les variables correspondant à des 1 directeurs seront appelées ***variables directrices****, les autres variables seront appelées* ***variables libres****.*

Les variables libres peuvent prendre des valeurs arbitraires, les variables directrices s'expriment en fonction des variables arbitraires.

Exercice 10. Résoudre les systèmes d'équations linéaires dont les matrices échelonnées réduites sont les suivantes:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(on donnera les réponses sous la forme $x_1 = ..., x_2 = ...$)

Solution. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; le système est $\begin{cases} x_1 = \text{-}2 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 1 \end{cases}$; d'où solution unique (-2,4,1).

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; le système est $\begin{cases} x_2 + 3x_3 = \text{-}1 \\ x_4 = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}$; d'où l'ensemble des solutions est $\{(x_1,$ -3x$_3$-1,x$_3$, $5), (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2\}$

Remarque 17. Un système d'équations linéaires a

soit aucune solution (incompatible),

soit une seule solution (pas de variables libres),

soit une infinité de solutions (dues à des variables libres)

6. Systèmes homogènes d'équations linéaires

Définition 18.

Un système d'équations linéaires est dit homogène lorsqu'il est de la forme $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + a_{\mathrm{pn}}x_n = 0 \end{cases}$.

Théorème 19.

Tout système homogène d'équations linéaires est consistant.

Dans le cas d'un système homogène de p équations linéaires à n inconnues, où p<n, l' ensemble des solutions est infini.

Exercice 11. Résoudre le système homogène d'équations linéaires

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2-2x_3-x_5=0 \\ -x_1-x_2+x_3+3x_4+x_5=0 \\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4+2x_5=0 \\ 8x_4+4x_5=0 \end{cases}$$

Solution.

La matrice augmentée du système est $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 3 & 14/3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 3 & 14/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2 & 8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 3 & 14/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

d'où l'ensemble des solutions:

$\{(-x_2,x_2,0,0,0), x_2 \in \mathbb{R}\}$.

On vérifie ?

Objectifs:

0) Savoir ce qu'est une solution d'un système d'équations linéaires et savoir vérifier si un n-uplet est solution.

1) Savoir effectuer de manière efficace l'Elimination Gaussienne.

2) Savoir reconnaître si un système d'équations linéaires possède des solutions.

3) Savoir décrire l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires.

4) Activités informatiques: néant, il faut d'abord apprendre à manipuler à la main.

Problème 1.

1. Ecrire la matrice échelonnée du système suivant : $\begin{cases} x_1+x_2\text{-}2x_3=3 \\ 2x_1-x_2+2x_3=3 \\ -x_1-3x_2+6x_3=-5 \end{cases}$

2. Résoudre c'est à dire déterminer l'ensemble des solutions.

3. Vérifier si (2,1,0) est une solution.

Problème 2.

1. Ecrire la matrice échelonnée du système suivant : $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2+x_3=4 \\ x_2+x_3+x_4=\text{-}3 \\ x_3+x_4+x_5=2 \\ x_4+x_5=\text{-}1 \end{cases}$

2. Résoudre, c'est à dire déterminer l'ensemble des solutions.

3. Vérifier votre réponse.

Travaux Dirigés

Exercice 12. Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée réduite en utilisant des opérations élémentaires: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$*, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Exercice 13. Résoudre les systèmes d'équations linéaires:

$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2-6x_3=0 \\ 7x_1+4x_2-5x_3=0 \\ x_1+7x_3=0 \end{cases}$*; $\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3-3x_5=0 \\ 2x_1+9x_2+5x_3+2x_4+x_5=0 \\ x_1+3x_2+x_3-2x_4-9x_5=0 \end{cases}$*; $\begin{cases} 2x_1-5x_2+4x_3=0 \\ 3x_1-4x_2+7x_3=0 \\ 4x_1-9x_2+8x_3=0 \\ -9x_1+18x_2-19x_3=0 \end{cases}$ *

Exercice 14. Montrer que le système suivant n'a pas de solutions

$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=1 \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=2 \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=3 \\ 3x_1-2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=3 \end{cases}$.*

Exercice 15. Soit le système $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=-1 \\ 7x_1+6x_2+5x_3=a \\ 5x_1+4x_2+3x_3=2 \end{cases}$; * déterminer la (les) valeur(s) du réel a pour laquelle(lesquelles) ce système possède des solutions.

Exercice 16. Soit le système $\begin{cases} x_1+x_2+\mathrm{a}x_3=1 \\ x_1+\mathrm{a}x_2+x_3=1 \\ \mathrm{a}x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$; * déterminer la (les) valeur(s) du réel a pour laquelle(lesquelles) ce système possède des solutions.

Exercice 17. Soit le système $\begin{cases} x_1+x_2+\mathrm{a}x_3=2 \\ x_1+\mathrm{a}x_2+x_3=\text{-}1 \\ \mathrm{a}x_1+x_2+x_3=\text{-}1 \end{cases}$; * déterminer la (les) valeur(s) du réel a pour laquelle(lesquelles) ce système possède des solutions.

Exercice 18. Déterminer le (les) polynômes de degré inférieur ou égal à deux tels que $\begin{cases} P(0)=0 \\ P(1)=1 \\ P(2)=\text{-}4 \end{cases}$ *

Exercice 19. Montrer qu'il existe un poynôme P(X) de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$\begin{cases} P(1)=45 \\ P'(1)=45 \\ P''(1)=45 \\ P'''(1)=45 \end{cases}$.

Algèbre linéaire d'un point de vue algorithmique

chapII. CALCUL MATRICIEL

(1.5 séances cours; 1.5 séances td)

0. Comme de nouveaux nombres

Définition 1. *Matrices rectangulaires*

On appelle matrice à p lignes et n colonnes un tableau de nombres à p lignes et n colonnes

exemple: $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -9 & 23 \\ 2 & 6 & -1 & 55 & 0 \\ 3 & 10 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 17 & 2 \end{pmatrix}$

Définition 2. *L'ensemble des matrices à p lignes et n colonnes est désigné par* $\mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R})$.

p et n donnent la « taille » de la matrice

1. Le calcul matriciel

Définition 3. *Somme de deux matrices de même taille*

Soient $(A,B)\in\mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R})^2$,

où $A=(a_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,n\}}$

et $B=(b_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,n\}}$,

alors $A+B=(c_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,n\}}$ *où* $\forall(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,n\}$, $c_{\mathrm{ij}}=a_{\mathrm{ij}}+b_{\mathrm{ij}}$.

Exemple 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

Définition 5. *La matrice nulle de* $\mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R})$ $O_{\mathrm{pn}}=\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots. & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$*; on voit vite que* $\forall A\in\mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R})$, $A+O_{\mathrm{pn}}=O_{\mathrm{pn}}+A=A$.

Définition 6. *Produit d'une matrice par un scalaire (cad un réel)*

Soient $A \in \mathcal{M}_{\text{pn}}(\mathbb{R})$, *où* $A = (a_{\text{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,n\}}$ *et* $k \in \mathbb{R}$, *alors* $kA = (c_{\text{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,n\}}$ *où* $\forall (i,j) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,n\}, c_{\text{ij}} = \text{ka}_{\text{ij}}$.

$5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et de même $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}5 = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 7. (-1)A=$(-a_{\text{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,n\}}$ et donc A+(-1)A=0; (-1)A sera noté -A.

Définition 8. *Produit de deux matrices*

(attention il y a une condition de type « Chasles » pour que le produit existe)

Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_{\text{pn}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{\text{nq}}(\mathbb{R})$,

où $A = (a_{\text{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,n\}}$

et $B = (b_{\text{jk}})_{(j,k)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,q\}}$,

alors $\text{AB} = (c_{\text{ik}})_{(i,k)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,q\}}$

où $\forall (i,k) \in \{1,\ldots,p\} \times \{1,\ldots,q\}, c_{\text{ik}} = \sum_{j=1\ldots n} a_{\text{ij}} b_{\text{jk}}$.

ATTENTION $(A,B) \in \mathcal{M}_{\text{pn}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{\text{nq}}(\mathbb{R})$ *et* $\text{AB} \in \mathcal{M}_{\text{pq}}(\mathbb{R})$

Exemple 9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 10. On peut écrire (pour apprendre)

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} & \ldots & b_{1q} \\ \ldots & & & b_{2k} & & \\ \ldots & & & b_{3k} & & \\ b_{j1} & b_{j2} & \ldots & . & & b_{\text{jq}} \\ \ldots & & & \ldots & & \\ \ldots & & & \ldots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{\text{nk}} & & b_{\text{nq}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & . & \dots & \dots & a_{\mathrm{iq}} \\ \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & . & \dots & \dots & a_{\mathrm{pn}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} & c_{1q} \\ \dots & & & c_{2k} & \\ \dots & & & \dots & \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{\mathrm{ik}} & c_{\mathrm{iq}} \\ \dots & & & \dots & \\ \dots & & & \dots & \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{\mathrm{pk}} & c_{\mathrm{pq}} \end{pmatrix}.$$

où $\forall (i,k) \in \{1,\dots,p\} \times \{1,\dots,q\}, c_{\mathrm{ik}} = \sum_{j=1\dots n} a_{\mathrm{ij}} b_{\mathrm{jk}}$

Définition 11. *La matrice unité de taille n* $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & . & \dots & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & 1 \end{pmatrix}$*; on voit vite que* $\forall A \in \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R}), \mathrm{AI}_n = I_p A = A$.

Exercice 1. Calculer le produit AB où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Que pensez-vous du produit BA ?

Solution. AB peut se calculer car 3=3

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & -1+2+1 & 1+2+1 & -1+1 \\ 1+1+1 & -1+2+1 & 1+2+1 & -1+1 \\ 1+1+1 & -1+2+1 & 1+2+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

et on ne peut calculer BA car 4≠3

Exercice 2. Calculer les produits AB et BA, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Solution. Ici AB et BA sont possibles, $\mathrm{AB} \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{BA} \in \mathcal{M}_{44}(\mathbb{R})$

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}. \ \mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 10 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Les vecteurs colonnes

Définition 12. *On appelle vecteurs colonnes les matrices à une seule colonne* *exemple:* $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{51}(\mathbb{R})$

Remarque 13. Le produit d'une matrice de $\mathcal{M}_{\text{pn}}(\mathbb{R})$ par un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{q1}(\mathbb{R})$ n'est possible que lorsque n=q

et le résultat est un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{R})$.

Exemple 14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & 6 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 7 \\ 20 \\ 47 \\ 15 \end{pmatrix}$

Remarque 15.

Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots. + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots. + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ \dots. \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots. + a_{\text{pn}}x_n = b_p \end{cases}$$

se lit $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & \dots & a_{\text{pn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ \dots \\ b_p \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

Résoudre le système $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix}$

Le système s'écrit $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 21 \\ 1x_1 + 2x_2 + -1x_3 = -9 \end{cases}$

pour le résoudre on écrit la matrice augmentée du système $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 21 \\ 1 & 2 & -1 & -9 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 21 \\ 1 & 2 & -1 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 21 \\ 1 & 2 & -1 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 24 \\ 1 & 2 & -1 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 24 \end{pmatrix} \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & -3 & 0 & 24 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; d'où $x1=7$, x2=-8, x3=0

Donc la solution est $(7,8,0)$.

Si on regarde de manière plus précise

Théorème 16. ***le rôle des colonnes de la matrice de droite***

Soient les matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{\mathrm{nq}}(\mathbb{R})$*, où* $B = (B_1, B_2, \ldots, B_q)$ *(écriture des colonnes), alors* $\mathrm{AB} = (\mathrm{AB}_1, \mathrm{AB}_2, \ldots, \mathrm{AB}_q)$.

Théorème 17. ***le rôle des lignes de la matrice de gauche***

Soient les matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{\mathrm{nq}}(\mathbb{R})$*, où* $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ L_p \end{pmatrix}$ *(écriture des lignes), alors* $\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} L_1 B \\ \ldots \\ \ldots \\ L_p B \end{pmatrix}$.

(à lire et relire après le TD; ceci peut faire gagner du temps)

2. Règles du calcul matriciel

Proposition 18. $\forall (A, B, C)$ *telles que les opérations soient possibles*

A+B=B+A (commutativité)

A+(B+C)=(A+B)+C (associativité de l'addition)

A(BC)=(AB)C (associativité de la multiplication)

A(B+C)=AB+AC; (A+B)C=AC+BC (distributivité de la multiplication sur l'addition)

A+O=O+A=A

AI=A, IA=A

AO=OA=O

Comme les réels et les complexes

sauf

attention la multiplication n'est pas commutative.

Exercice 4. Soit les matrices A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, C= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; calculer ABC.

Solution. AB=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ on utilise les lignes de A

(AB)C=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

tandis que A(BC)=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Welcome Maxima !!!!!!!

Le but de la vie n'est pas de calculer mais de comprendre les calculs dont on a besoin, de savoir les faire effectuer et de savoir les contrôler et ensuite d'en tirer des conclusions.

4. Matrice inverse

Définition 19. *Matrice inversible*

Une matrice ***carrée*** $A \in \mathcal{M}_{\text{nn}}(\mathbb{R})$ *est dite inversible lorsqu'il existe une matrice* $B \in \mathcal{M}_{\text{nn}}(\mathbb{R})$ *telle que* $\text{AB} = I_n$ *et* $\text{BA} = I_n$.

Proposition 20. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{\text{nn}}(\mathbb{R})$ *s'il existe des matrices* $(B, C) \in \mathcal{M}_{\text{nn}}(\mathbb{R})^2$ *telles que* $\text{AB} = \text{BA} = I_n$ *et* $\text{AC} = \text{CA} = I_n$ *alors* $B = C$.

d'où B *sera appelée* ***l'inverse*** *de* A *et sera notée* A^{-1}.

Exemple 21. Le cas des matrices de $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$.

La matrice $\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ a comme inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour laquelle ad-bc $\neq 0$ et $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, effectuer le produit AB, en déduire l'expression de A^{-1};

malheureusement ce ne sera pas aussi simple pour des matrices carrées de taille plus élevée.

Exercice 5.

$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est son inverse

Définition 22. *Puissances d'une matrice carrée*

$A^m = A...A$ *lorsque* $m \in \mathbb{N}$

Si A *est inversible et* $m \in -\mathbb{N}$, $A^m = A...A$ *(valeur absolue de m fois).*

Si A *est inversible* $A^{-k} = (A^{-1})^k$.

Exercice 6. $\text{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$\text{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{A}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$\text{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{A}^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = ...$

oh! surprise

Théorème 23. *Si A et B sont dans $\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ et inversibles alors AB est inversible et* $(\mathrm{AB})^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Théorème 24. *Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ et une matrice $B \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

i) $\mathrm{AB} = I_n$

ii) $\mathrm{BA} = I_n$.

Donc pour qu'une matrice carrée soit inversible il suffit qu'elle admette une inverse à gauche ou une inverse à droite.

Question 25.

Et à quoi ça sert ?

Pour résoudre l'équation 2x=1246 on multiplie les deux membres par 1/2 comme suit:

2x=1246 $\Longleftrightarrow (1/2)2x = (1/2)1246 \Longleftrightarrow x = (1/2)1246 \Longleftrightarrow x = 623$

Pour résoudre l'équation AX=b , si A est CARRE ET INVERSIBLE on multiplie les deux membres par A^{-1}

$AX{=}b \Longleftrightarrow A^{-1}(\mathrm{AX}) = A^{-1}b \Longleftrightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}b \Longleftrightarrow IX{=}A^{-1}b \Longleftrightarrow X = A^{-1}b$

et hop! on a trouvé X.

Exercice 7.

Soit A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que A^{-1}=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Trouver l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_2+x_3=3 \\ x_3+x_4=1 \\ x_4=7 \end{cases}$

Problème 1.

Soient les quatre matrices

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ D=$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Trouver qui est l'inverse de qui.

Problème 2.

1 Soit la matrice $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; calculer ses puissance successives jusqu'à trouver une puissance égale à I_4.

2. Soit la matrice N=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $V_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,$V_5=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_6=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Trouver parmi ces six vecteurs celui ou ceux qui vérifient NV=$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Soit P=$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer NP et PN.

Travaux Dirigés

Exercice 8. Soient les matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; calculer leurs carrés.

Exercice 9. Soit les matrices $A=(\ a_{\mathrm{ij}}\ )_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}\times\{1,\ldots,n\}}$ et $B=(\ b_{\mathrm{jk}}\ )_{(j,k)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,q\}}$.

a. Montrer que si la 1ère colonne de B est nulle, il en est de même pour la 1ère colonne du produit AB

b. Montrer que si la kième colonne de B est nulle, il en est de même pour la kième colonne du produit AB

c. Enoncer et prouver une condition suffisante sur une ligne de A pour que le 1ère ligne de AB soit nulle.

Cette condition est-elle nécessaire ? penser à $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. Déterminer si la matrice $M=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et , si oui, calculer son inverse en vous aidant du cours.

Exercice 11. Soit la matrice $N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, en vous aidant de résultats d'un exercice au-dessus montrer qu'elle n'est pas inversible.

Exercice 12. Soit la matrice Q=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, calculer Q^2 en déduire si Q est inversible et si oui déterminer son inverse.

Exercice 13. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2, A^3.

b. Enoncer et prouver une conjoncture sur l'expression de A^k.

c. Déterminer si A est inversible.

LE THEOREME DU CARRE

Théorème 26. *Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$les propositions suivantes sont équivalentes:*

i) A est inversible

ii) Quelle que soit la matrice $b \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ le système $AX=b$ possède une solution unique $X=A^{-1}b$.

iii) L'équation matricielle AX=0 possède une solution unique X=0.

iv) A est équivalente par lignes à la matrice I_n.

.

$$
\begin{tikzcd}
\forall b \in \mathrm{Mn1}(\mathbb{R}), \exists! X, \mathrm{AX} = b \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \mathrm{AX} = (0) \Longleftrightarrow X = (0) \arrow[d, dash] \arrow[dl, dash] \\
A\,\text{inversible} \arrow[r, dash] & \text{A equivalente par lignes à In}
\end{tikzcd}
$$

Remarque 27. Calcul réaliste de l'inverse

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, pour calculer son inverse on pose le système $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{\mathrm{nn}}x_n = y_n \end{cases}$ et on entreprend sa résolution (on verra au chapitre suivant qu'il existe des outils pour savoir à l'avance si A est inversible); si il n'y a pas de solution unique, A n'est pas inversible, et si il y a une solution elle s'écrira $\begin{array}{l} x_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12y}y_2 + \ldots\ldots + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 = \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots\ldots + \alpha_{2n}y_n \\ \ldots \\ x_n = \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots\ldots + \alpha_{\mathrm{nn}}y_n \end{array}$

ce qui permet de récupérer $A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & . & \dots & \dots & \alpha_{\mathrm{iq}} \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & . & \dots & \dots & \alpha_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix}$.

Attention, si la question est le calcul de l'inverse c'est une méthode, mais **si la question est l'inversibilité de A**, il y aura plus utile et plus rapide bientôt.

Exercice 14. Déterminer par cette méthode l'inverse de la matrice A$=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution.

On pose le système $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & y1 \\ 1 & 2 & 3 & y2 \\ 1 & 1 & 2 & y3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & y1/2 \\ 1 & 2 & 3 & y2 \\ 1 & 1 & 2 & y3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & y1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 & y2\text{-}y1/2 \\ 1 & 1 & 2 & y3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & y1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 & y2\text{-}y1/2 \\ 0 & \text{-}1/2 & 0 & y3\text{-}y1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & y1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 2y2\text{-}y1 \\ 0 & \text{-}1/2 & 0 & y3\text{-}y1/2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 & y1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 2y2\text{-}y1 \\ 0 & 0 & 1 & \text{-}y1+y2+y3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{-}1 & 2y1\text{-}3y2 \\ 0 & 1 & 2 & 2y2\text{-}y1 \\ 0 & 0 & 1 & \text{-}y1+y2+y3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y1\text{-}2y2+y3 \\ 0 & 1 & 2 & 2y2\text{-}y1 \\ 0 & 0 & 1 & \text{-}y1+y2+y3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & y1\text{-}2y2+y3 \\ 0 & 1 & 0 & y1\text{-}2y3 \\ 0 & 0 & 1 & \text{-}y1+y2+y3 \\ & & & \end{pmatrix}.$$

D'où $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \text{-}2 & 1 \\ 1 & 0 & \text{-}2 \\ \text{-}1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

On vérifie $\begin{pmatrix} 1 & \text{-}2 & 1 \\ 1 & 0 & \text{-}2 \\ \text{-}1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

5 bis. Activité informatique (Maxima):

à rendre par campus, suivant les modalités fixées.

Pour utiliser Maxima voir le Maxima-intro.1

Avertissement 28. syntaxe de maxima

(%i1) a:matrix([1,2,3],[4,5,6]; déclare une matrice à 2 lignes et 3 colonnes

(%i2) a.b; calcule le produit de deux matrices de tailles convenables

(%i3) invert(m); calcule l'inverse d'une matrice , si celle-ci est inversible

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$(4 lignes et 4 colonnes).

1. Vous allez réaliser à la main des opérations élémentaires successives sur A pour la transformer en une matrice échelonnée, si possible réduite.

2. Faites calculer par Maxima la matrice A^{-1}.

3. Déterminer grâce à la question 2. si l'équation $\begin{cases} x1 + x2 + x3 + x4 = 4 \\ x1 + x3 + x4 = 6 \\ x1 + x2 + x4 = 7 \\ x1 + x2 + x3 = 0 \end{cases}$ possède des solutions; si oui les trouver à l'aide du 2.

4. Déterminer grâce à la question 2. si l'équation $\begin{cases} x1 + x2 + x3 + x4 = 0 \\ x1 + x3 + x4 = 0 \\ x1 + x2 + x4 = 0 \\ x1 + x2 + x3 = 0 \end{cases}$ possède des solutions; si oui les trouver à l'aide du 2.

5. A l'aide de Maxima calculer A^2, expliquer pourquoi elle est inversible.

Sans aucun calcul expliquer quelles sont les solutions de $A^2X=(0)$.

6. A l'aide de Maxima calculer $B=A^2+A$; à l'aide de Maxima déterminer si B est inversible.

Expliquer sans calcul si l'équation BX=(0) a des solutions ou pas; si une seule ou plus.

Résoudre à la main.

7. A l'aide de Maxima calculer $C=A^2-A$ et son inverse; en vous aidant du théorème du carré trouver sans calcul supplémentaire les solutions du système CX=(0).

6. Matrices triangulaires

Définition 29. $A = (a_{\mathrm{ij}}) \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ est appelée triangulaire supérieure lorsque $\forall i > j \ \ a_{\mathrm{ij}} = 0$

cad $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & ... \\ 0 & a_{22} & a_{23} & & \\ ... & 0 & a_{33} & & \\ ... & ... & 0 & & \\ 0 & 0 & ... & & \end{pmatrix}$, les a_{ij} indiqués par des lettres peuvent aussi être (ou ne pas être) nuls.

$A\in\mathcal{M}_{\text{nn}}(\mathbb{R})$ est appelée triangulaire inférieure lorsque $\forall i<j\ \ a_{\text{ij}}=0$

cad $A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ ... & a_{31} & a_{33} & 0 & ... \\ ... & ... & a_{41} & & \\ ... & ... & ... & & \end{pmatrix}$

Exemple 30.

$\text{A}=\begin{pmatrix} 5 & 32 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\text{B}=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 56 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\text{C}=\begin{pmatrix} 5 & 32 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 25 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

.

Remarque 31.

La somme de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Exemple 32.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 17 & 5 & 63 \\ 0 & 25 & 36 \\ 0 & 0 & \text{-15} \end{pmatrix}$$

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Exemple 33. $\begin{pmatrix} 12 & 25 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Question 34.

Quand une matrice triangulaire supérieure est-elle inversible ?

Solution. Penser au calcul réaliste de l'inverse ......

Exemple 35. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exemple 36. $A = \begin{pmatrix} 2 & 25 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^{-1} =$

Théorème 37. *Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si les termes de sa diagonale sont tous non nuls.*

Objectifs:

1. Savoir additionner et multiplier des matrices rapidement et juste.

2. Comprendre et savoir utiliser le lien entre le système AX=b et la matrice A: existence et nombre de solutions et l'inversibilité éventuelle de A.

3. Savoir trouver l'inverse d'un produit.

4. Savoir trouver à la main l'inverse d'une matrice de petite taille.

5. Comprendre les particularités de l'addition et de la multiplication de matrices triangulaires.

7. La transposée d'une matrice

Définition 38. *Soit* $A = (a_{\mathrm{ij}}) \in \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R})$ *on désigne par* ${}^tA$ *(ou* A^T*) la matrice obtenue en échangeant lignes et colonnes de* A*, cad*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{\mathrm{ij}}. & \dots & \dots & a_{\mathrm{iq}} \\ \dots \\ \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & . & \dots & \dots & a_{\mathrm{pn}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R}) \quad et$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{p1} \\ \dots \\ \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & . & \dots & \dots & a_{\mathrm{pj}} \\ \dots \\ \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & . & \dots & \dots & a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathrm{np}}(\mathbb{R})$$

Exemple 39.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Proposition 40. *Propriétés de la transposition*

i) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R})^2, {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$

ii) $\forall (k, A) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R}), {}^t(\mathrm{kA}) = k^tA$

iii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{\mathrm{nq}}(\mathbb{R}), {}^t(\mathrm{AB}) = {}^tB^tA$

iv) $\forall A \in \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R}), {}^t({}^t(A))=A$

v) Si $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ *est inversible,* ${}^tA$ *aussi et* $({}^t(A))^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Exercice 15. Déterminer les transposées des matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Calculer ${}^t\mathrm{AA}$ et A^tA, ${}^t\mathbb{B}B$ et B^tB. (avec A et B comme au-dessus)

Solution. ${}^t\mathrm{AA} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 26 & 10 \\ 26 & 57 & 26 \\ 10 & 26 & 14 \end{pmatrix}$

tandis que $\mathrm{A}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 28 & 22 \\ 28 & 31 & 28 \\ 22 & 28 & 26 \end{pmatrix}$

ce qui suit est cadeau, à lire seuls

8. La trace d'une matrice carrée

Définition 41. *Soit* $A = (a_{\mathrm{ij}}) \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ *on appelle trace(A) le réel* $\sum_{i=1\ldots n} a_{\mathrm{ii}}$, *somme des termes de la diagonale.*

Exemple 42.

la trace de $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est 1+0+(-1)=0

la trace de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 64 \\ 3 & 2 & -1 & 124 \end{pmatrix}$ est ......

Proposition 43. *Propriétés de la trace*

i) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})^2, \mathrm{trace}(A + B) = \mathrm{trace}(A) + \mathrm{trace}(B)$

ii) $\forall (k, A) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R}), \mathrm{trace(kA)} = \mathrm{ktrace}(A)$

iii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{\mathrm{np}}(\mathbb{R}), \mathrm{trace(AB)} = \mathrm{trace}(BA)$

iv) $\forall A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R}), \mathrm{trace}({}^tA)=\mathrm{trace}(A)$

v) Si $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ *est inversible,* ${}^tA$ *aussi et* $({}^t(A))^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, calculer AB et BA, comparer leurs traces et comparer trace(AB) avec le produit trace(A)trace(B).

Exercice 18.

A=$\begin{pmatrix} a & p & u \\ b & q & v \\ c & r & t \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & \text{-1} & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

a. Calculer AB et ^{t}(AB)

b. Calculer ${}^tB{}^tA$

c. Conclure sur cet exemple

(on admettra que ce résultat est toujours vrai).

Exercice 19.

Sachant que A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour inverse U=$\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer sans calcul l'inverse de ${}^tA$.

10. Matrices symétriques, matrices antisymétriques

Définition 44. *Matrices symétriques*

$A = (a_{\mathrm{ij}}) \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ est appelée symétrique lorsque $\forall (i,j) \in 1...n, a_{\mathrm{ij}} = a_{\mathrm{ji}}$, cad ${}^tA = A$.

Proposition 45.

i) Si A et B sont symétriques et de mêmes tailles, $A+B$ aussi.

ii) Si k est un scalaire et A symétrique , kA aussi.

iii) $\forall A \in \mathcal{M}_{\mathrm{pn}}(\mathbb{R}), {}^tAA$ et A^tA sont symétriques.

Exercice 20.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Que pensez-vous de la somme A+B ?

Que pensez-vous du produit AB ?

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, calculer $A^t A$ et montrer l'implication suivante

trace$(A^t A) = 0 \Longrightarrow A = 0$.

Solution.

Exercice 22.

Soit une matrice symétrique et inversible S, est-ce que son inverse est symétrique?

exemple: A=$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 46. *Matrices antisymétriques*

$A = (a_{\text{ij}}) \in \mathcal{M}_{\text{nn}}(\mathbb{R})$ *est appelée antisymétrique lorsque* $\forall (i, j) \in 1 \ldots n$, $a_{\text{ij}} = -a_{\text{ji}}$, *cad* ${}^t A = -A$.

Proposition 47. *Toute matrice* $A = (a_{\text{ij}}) \in \mathcal{M}_{\text{nn}}(\mathbb{R})$ *est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*

$A = \frac{1}{2}(A +^t A) + \frac{1}{2}(A - {}^t A)$

Exercice 23.

Soit M=$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$; la décomposer en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice symétrique

Objectifs:

1. Savoir additionner et multiplier des matrices rapidement et juste.

2. Comprendre et savoir utiliser le lien entre le système AX=b et la matrice A: existence et nombre de solutions et l'inversibilité éventuelle de A.

3. Savoir trouver l'inverse d'un produit, d'une transposée.

4. Savoir trouver à la main l'inverse d'une matrice de petite taille.

5. Comprendre les particularités de l'addition et de la multiplication de matrices triangulaires.

6. Savoir ce qu'est la trace d'une matrice et ses propriétés.

7. Savoir ce qu'est une matrice symétrique, une matrice antisymétrique; savoir décomposer une matrice en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Travaux Dirigés

Exercice 24. Soit $T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, déterminer, en utilisant le « calcul réaliste » de l'inverse, si elle est inversible et si oui trouver son inverse. *

Exercice 25. Soit $U=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, la décomposer en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 26. Soit M=$(m_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$ une matrice antisymétrique, déterminer sa trace.

Exercice 27. Soit $T=\begin{pmatrix} p & 3 & 4 & 5 \\ 0 & q & 4 & 5 \\ 0 & 0 & r & 5 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$.*

a. En vous aidant du théorème sur l'inversibilité et du système TX=b, montrer qu'elle est inversible si et seulement si p,q,r et s sont non nuls.

b. Dans le cas où T est inversible montrer, en vous aidant du « calcul réaliste », que son inverse est triangulaire supérieure.

c. Soit $W=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 23 & -89 & 0 \\ 51 & 652 & 273 & 0.64 \end{pmatrix}$; montrer sans calculs que W est inversible.

Exercice 28. Soit la matrice triangulaire supérieure $T=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, que l'on notera (t_{ij}).

1. Ecrire l'expression du réel t_{ij} suivant les valeurs de i et j.
2. On notera $\mathrm{T}^2=(u_{\mathrm{ij}})$, déterminer T^2.
3. Que peut-on conjecturer sur la suite des matrices (T^k) ?
4. Le démontrer.

11. Archives

1. Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=0 \\ 7x_1+4x_2+6x_3-5x_4=0 \\ x_1+8x_3+7x_4=0 \end{cases}.$$

Attention: résoudre c'est trouver et donner l'ensemble des solutions !!

2. Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+x_4=6 \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=2 \\ 7x_1+4x_2+6x_3-5x_4=13 \\ x_1+8x_3+7x_4=9 \end{cases}.$$

3. Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=0 \\ 7x_1+4x_2+6x_3-5x_4=0 \\ x_1+8x_3+7x_4=9 \end{cases}.$$

4. Question:

En vous aidant du théorème adéquat déterminer si la matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \\ 7 & 4 & 6 & -5 \\ 1 & 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ est inversible.

Si elle l'est trouver son inverse, si elle ne l'est pas justifier votre réponse.

5. Inverser une matrice

Soit la matrice B$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer B^{-1}.

b. Déterminer l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires BX $=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

corPremier devoir d'Algebre lineaire

1. Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=0 \\ 7x_1+4x_2+6x_3-5x_4=0 \\ x_1+8x_3+7x_4=0 \end{cases}.$$

La matrice augmentée du système est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$; $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ donne $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$; l' opération $L_1 \leftarrow -L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$; les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$ donnent $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 14 & 15 & 0 \\ 0 & -3 & 41 & 44 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & 14 & 0 \end{pmatrix}$;puis $L_2 \leftarrow -L_2$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & 0 \\ 0 & -3 & 41 & 44 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & 14 & 0 \end{pmatrix}$; d'où $\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases}$ nous conduit à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; effectuons maintenant $L_3 \longleftarrow -L_3$ d'où $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, qui après l'opération $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$ devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; maintenant effectuons $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - 9L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 14L_3 \end{cases}$ ce qui transforme la matrice augmentée comme suit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; ; d'où l'ensemble des solutions $\{(x_4, x_4, -x_4, x_4), x_4 \in \mathbb{R}\}$ et ON VERIFIE !!

2. Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+x_4=6 \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=2 \\ 7x_1+4x_2+6x_3-5x_4=13 \\ x_1+8x_3+7x_4=9 \end{cases}.$$

La matrice augmentée du système est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 13 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ donne $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 13 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; l' opération $L_1 \leftarrow -L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 2 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 13 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$ donnent $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & 14 & 15 & 14 \\ 0 & -3 & 41 & 44 & 41 \\ 0 & -1 & 13 & 14 & 13 \end{pmatrix}$;puis $L_2 \leftarrow -L_2$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 & -4 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & -14 \\ 0 & -3 & 41 & 44 & 41 \\ 0 & -1 & 13 & 14 & 13 \end{pmatrix}$; d'où $\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases}$ nous conduit à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; effectuons maintenant $L_3 \longleftarrow -L_3$ d'où $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, qui après l'opération $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$ devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; maintenant effectuons $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - 9L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 14L_3 \end{cases}$ ce qui transforme la matrice augmentée comme suit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; ; d'où l'ensemble des solutions

D'où l'ensemble des solutions $\{(x_4+1, x_4, -x_4+1, x_4, x_4), x_4 \in \mathbb{R}\}$.
ON VERIFIE !!

3. Résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_2-x_3-6x_4=0 \\ 7x_1+4x_2+6x_3-5x_4=0 \\ x_1+8x_3+7x_4=9 \end{cases}.$$

Même chose

La matrice augmentée du système est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ donne $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; l' opération $L_1 \leftarrow -L_1$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$; les opérations $\begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$ donnent $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & -1 & 14 & 15 & 0 \\ 0 & -3 & 41 & 44 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & 14 & 9 \end{pmatrix}$;puis $L_2 \leftarrow -L_2$ donne $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & 0 \\ 0 & -3 & 41 & 44 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & 14 & 9 \end{pmatrix}$; d'où $\begin{cases} L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{cases}$ nous conduit à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$; effectuons maintenant $L_3 \longleftarrow -L_3$ d'où $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, qui après l'opération $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$ devient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$; ce qui met en évidence une 4ième équation inconsistante, d'où le système tout entier est inconsistant.

4. Question:

D'après le théorème 25 du chapitre II, si la matrice A était inversible, le système AX=b aurait une solution unique quel que soit le vecteur colonne b; les trois exercices précédents suffisent, chacun séparément, pour conclure que ce n'est pas vrai, donc par contraposée A n'est pas inversible.

5. Inverser une matrice

Soit la matrice B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. B^{-1}=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; qui se trouve par la méthode que j'ai appelée « calcul réaliste de l'inverse »):

on résoud le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$:

la matrice augmentée du système est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_4 \end{pmatrix}$, qui devient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & y_2\text{-}y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_4 \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -y_2+y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_4 \end{pmatrix}$, ensuite $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -y_2+y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_4 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & y_2\text{-}y_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -y_2+y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & y_4 \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & y_2\text{-}y_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -y_2+y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4\text{-}y_3 \end{pmatrix}$ et enfin $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y_2\text{-}y_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -y_2+y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4\text{-}y_3 \end{pmatrix}$; de cette dernière matrice (échelonnée et réduite) on déduit la solution du système: $(x_1 = y_2\text{-}y_4, x_2 = y_1\text{-}y_2, x_3 = y_3, x_4 = \text{-}y_3 + y_4)$, donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires BX$=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après le th 25 (i) comme B est inversible BX $= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff X = B^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ON VERIFIE .

Algèbre linéaire d'un point de vue algorithmique

chapIII. DETERMINANTS

(2 séances cours; 2 séances td)

Question 1. *Nous connaissons l'aire du parallélogramme construit sur deux vecteurs* $x\vec{i} + y\vec{j}$ *et* $x'\vec{i} + y'\vec{j}$ *et qui peut se calculer par la formule* $xy'-yx'$

Nous concevons l'idée d'un parallélépipède (en clair une « boîte ») construit sur trois vecteurs de l'espace

$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ *et* $x''\vec{i} + y''\vec{j} + z''\vec{k}$

et nous aimerions calculer son volume

et même continuer dans des dimensions plus grandes.

1. Le déterminant d'une matrice carrée.

Définition 2.

1. Le déterminant de $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$*:*

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, *det(A)=* $a_{11}a_{22}$-$a_{12}a_{21}$

2. Le déterminant de $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ *(règle de Sarrus):*

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

det(A)= $(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$.

Que l'on retient par un petit schéma.

ATTENTION : cette règle ne convient que pour le cas n=3 !!!!

Exercice 1. Calcul du déterminant de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution. Appliquer la régle de Sarrus

Définition 3. *Le Déterminant d'une matrice CARREE de taille n*

AVANT TOUT

1. Si A possède une ligne ou une colonne nulle det(A)=0.

2. Si A est triangulaire supérieure ou inférieure det(A)=$\prod_{i=1\dots n} a_{\mathrm{ii}_{i\in\{1,\dots,n\}}}$.

3. Si A possède deux lignes égales det(A)=0.

DE MANIERE GENERALE

4. Le déterminant de A ne change pas si on ajoute à une ligne un multiple d'une autre.

5. Le déterminant est multiplié par -1 si on échange deux lignes.

6. Le déterminant est multiplié par k lorsqu'on multiplie une de ses lignes par k.

Exercice 2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; montrer par un minimum de calculs que det(B)=0.

Solution. Si on soustrait deux fois la première ligne de la deuxième ligne on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, dont le déterminant est nul donc det(B)=0

Proposition 4. *Stratégie de calcul d'un déterminant*

Soit une matrice carrée A

pour calculer det(A)

on peut effectuer une suite d'opérations élémentaires sur les lignes afin d'aboutir à une matrice triangulaire

(en appliquant les 4, 5 et 6)

si en route on trouve une ligne nulle, on peut s'arrêter, det(A)=0

si on aboutit à une matrice triangulaire son déterminant est immédiat

.

Exercice 3.

Calculer les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 25 \\ -1 & 1 & 4 & 21 \\ 1 & 0 & 1 & 25 \\ -1 & 1 & 23 & 0 \end{vmatrix}$$

.

DEUX GRANDES PROPRIETES DES DETERMINANTS

Théorème 5. *det(A) et l'inversibilité*

1. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, A est inversible si et seulement si det(A)$\neq 0$.

*2. **Dans ce cas** det(A^{-1})=1/det(A).*

Exercice 4.

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; déterminer à l'aide de son déterminant si B est inversible

2. Soit $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; déterminer à l'aide de son déterminant si T est inversible

3. Si l'une de ces deux matrices est inversible, que feriez-vous pour la calculer ?

Théorème 6. *Le déterminant est multiplicatif*

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})^2, \det(\mathrm{AB}) = \det(A)\det(B).$

Exercice 5.

Soient les deux matrices

A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Calculer leurs déterminants
2. Calculer leur produit.
3. Vérifier que det(A)det(B)=det(AB)

Théorème 7. *le déterminant est invariant par transposition*

$\forall A \in \mathcal{M}_{\text{nn}}(\mathbb{R}), \det({}^tA) = \det(A).$

Remarque 8. Ceci est très important

Donc toutes les propriétés des déterminants relatives aux lignes sont aussi vraies pour les colonnes.

Exercice 6.

1. M=$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 15 \end{pmatrix}$; prouver que det(M)=0.
2. N=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & a & 0 & 2 \end{pmatrix}$; choisir une valeur de a pour que det(N)=0

Proposition 9. *Stratégie de calcul d'un déterminant*

Soit une matrice carrée A

pour calculer det(A)

on peut effectuer une suite d'opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes afin d'aboutir à une matrice triangulaire

si en route on trouve une ligne ou une colonne nulle, on peut s'arrêter, det(A)=0 *si on aboutit à une matrice triangulaire son déterminant est immédiat*

Exercice 7.

R=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 6 & 7 & 24 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; calculer det(R).

Problème 1.

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$; montrer par un minimum de calculs que det(B)=0.

2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 25 \\ -1 & 1 & 4 & 21 \\ 1 & 0 & 1 & 25 \\ -1 & 1 & 23 & 0 \end{vmatrix}$.

Problème 2.

1. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Travaux Dirigés

Exercice 8. Soit les matrices M=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ calculer det(M) et det(N).

Exercice 9. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ et d=det(A) (n>1)

a. Déterminer det(-A).

b. Déterminer det(kA), où k est un réel.

Exercice 10. Pour montrer que la matrice suivante a un déterminant nul

A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 111 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 121 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 132 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 157 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 158 \end{pmatrix}$.

a. Ecrire sa transposée.

b. Dans la transposée soustraire la troisième ligne de la quatrième ligne puis la première de la deuxième ligne.

c. Conclure.

Exercice 11. Soient les matrices de $\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ A et B; on suppose que le déterminant de la matrice produit AB est nul, montrer que l'une au moins n'est pas inversible.

Exercice 12. Trouver le déterminant de la matrice suivante en effectuant une suite d' opérations élémentaires:
A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, montrer que le déterminant de ^{t}AA est positif.

Exercice 14. Soit les matrices $(A,B,M)\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})^3$, où M est inversible; on suppose que A=M^{-1}BM, comparer det(A) et det(B).

3. Mineurs et Cofacteurs

Définition 10. *Mineurs, cofacteurs*

Soit $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, *où* $A=(a_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}}$

On appelle mineur de l'élément a_{ij} *le déterminant de la matrice extraite obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne; on le note* M_{ij}.

On appelle cofacteur de l'élement a_{ij} *la quantité* $C_{\mathrm{ij}}=(-1)^{i+j}M_{\mathrm{ij}}$.

Exemple 11.

A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

mineur de a_{11}: M$_{11}$=$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=15$; cofacteur de a_{11}: C$_{11}$=$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=$ 15 mineur de a_{12}: $\mathrm{M}_{12}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-15$; cofacteur de a_{12}: $\mathrm{C}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-15$

mineur de a_{13}: $\mathrm{M}_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=0$; cofacteur de a_{13}: $\mathrm{C}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=0$

mineur de a_{31}: $\mathrm{M}_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-5$; cofacteur de a_{13}: $\mathrm{C}_{13}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-5$

etc..

Théorème 12. *Calcul d'un déterminant par la méthode des cofacteurs*

Soit $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, *où* $A=(a_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}}$

1. (développement par rapport à la i-ème ligne)

Quel que soit $i\in\{1,\ldots,n\}$, *det(A)*$=\sum_{j=1\ldots n} a_{\mathrm{ij}}(-1)^{i+j}M_{\mathrm{ij}}$.

2. (développement par rapport à la j-ème colonne)

Quel que soit $j\in\{1,\ldots,n\}$, *det(A)*$=\sum_{i=1\ldots n} a_{\mathrm{ij}}(-1)^{i+j}M_{\mathrm{ij}}$.

Exercice 15. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; calculer det(A) en développant suivant une ligne ou une colonne, choisie parce qu'elle contient beaucoup de 0.

4. Systèmes de Cramer, formules de Cramer

Définition 13.

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$*, où* $A = (a_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}}$*,* $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$*, où* $B = (b_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ *et le système AX=B.*

On désignera pour tout j par A_j *la matrice A, modifiée en remplaçant la j-ième colonne par la colonne B.*

Théorème 14. *Formules de Cramer*

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$*, où* $A = (a_{\mathrm{ij}})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}}$*,* $B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$*, où* $B = (b_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ *et le système AX=B.*

Le système sera dit de Cramer lorsque det(A)≠0.

Dans ce cas le système possède une solution unique $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *et pour tout i* $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

Exercice 16. Appliquer le résultat au-dessus au système $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 101x_1 - 52x_2 - 32x_3 = 49 \\ 46x_1 + 42x_2 + 23x_3 = 111 \end{cases}$.

Problème 3.

1. Le système suivant est-il de Cramer pour résoudre le système $\begin{cases} x1 + x2 + x3 + x4 = 4 \\ x1 + x3 = 2 \\ x2 - x4 = -2 \\ x1 + x4 = 4 \end{cases}$?

2. Et celui-ci ? (soyez paresseux) $\begin{cases} x1+x2+x3+x4=4 \\ x1+x4=2 \\ x2-x4=-2 \\ x1-x3=4 \end{cases}$?

Problème 4. avec Maxima

la commande pour calculer le déterminant de la matrice a est « determinant(a) »

1. A l'aide de Maxima calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 125 \end{vmatrix}$

2. Déterminer si la matrice M=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 125 \end{pmatrix}$ est inversible

3. A l'aide de Maxima calculer det(A)= $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, déterminer si A est inversible

Objectifs:

1. Savoir calculer immédiatement le déterminant d'une matrice triangulaire.

2. Savoir que le déterminant est nul lorsqu'une ligne ou une colonne est nulle, ou deux lignes (ou colonnes) sont égales.

3. Connaître et savoir utiliser les propriétés du déterminant (produit, inverse, transposée).

4. Savoir ce que sont les mineurs, les cofacteurs.

5. Connaître, comprendre et appliquer les formules de développement d'un déterminant suivant une ligne ou une colonne pour effectuer des calculs de déterminants.

6. Connaître la caractérisation des matrices carrées inversibles par le déterminant; savoir ce qu'est l'adjointe d'une matrice carrée, comprendre pourquoi l'inverse d'une matrice carrée inversible à droite est le même qu'à gauche.

7. Savoir reconnaître un système de Cramer; connaître les formules de Cramer et savoir les utiliser (en basse dimension).

Travaux Dirigés

Exercice 17. Que pensez-vous de l'égalité det(A+B)=det(A)+det(B) ?

Exercice 18. Soit les matrices $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 66 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 77 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 88 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 99 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5.6 & 5 & 0 & 0 \\ 87 & 120 & -65 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; calculer det(C) et det(D) en développant suivant une ligne ou une colonne bien choisie.

Exercice 19. On désignera par A_n la matrice à n lignes et n colonnes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & .. & ... & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & .. & ... & ... \\ 0 & -1 & 0 & 1 & .. & ... & ... \\ 0 & 0 & -1 & 0 & .. & ... & ... \\ ... & .... & 0 & -1 & .. & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & .. & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. Calculer det(A_2)

b. Calculer det(A_3)

c. Calculer det(A_4)

d. Conjecturer la valeur de det(A_n) en fonction de n; démontrer la conjecture.

Exercice 20. Soit une matrice A dont les termes sont des entiers et dont le déterminant est égal à -1, montrer que A^{-1} existe et ses termes sont des entiers.

Exercice 21. Soit A_n=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & 1 & 2 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & 1 & 2 & 1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer det(A_1) et det(A_2).

b. En développant det(A_{n+2}) suivant la première ligne (ou la première colonne) et en répétant l'opération, déterminer une relation exprimant det(A_{n+2}) en fonction de det(A_{n+1}) et det(A_n).

c. Déterminer l'expression de det(A_n).

Exercice 22. Soit A_n=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & . & . & . & . & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & -1 & 1 & -1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & -1 & 1 & -1 \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer det(A_1) et det(A_2).

b. En développant det(A_{n+2}) suivant la première ligne (ou la première colonne) et en répétant l'opération, déterminer une relation exprimant det(A_{n+2}) en fonction de det(A_{n+1}) et det(A_n).

c. Déterminer l'expression de det(A_n).

5. Activité informatique Maxima

à rendre par Campus suivant les modalités fixées

Avertissement 15. syntaxe maxima

determinant(A); donne le déterminant (pas d'accent, c'est de l'anglais)

Pour résoudre un système

1. Ecrire les équations comme suit E1:x+2*y+6*z=4, ...

2. solve([E1,E2,...],[x,y,z]);

Pour toute liste de réels $(a_1, a_2, ..., a_n)$ on désigne par D$(a_1, a_2, ..., a_n)$ le déterminant de la matrice
$\begin{pmatrix} a_1+a_2 & -a_2 & & & & & \\ -a_2 & a_2+a_3 & -a_3 & & & & \\ 0 & -a_3 & a_3+a_4 & .... & .... & & \\ ... & 0 & & ... & ... & -a_{n-1} & \\ ... & ... & & & & a_{n-1}+a_n & -a_n \\ 0 & 0 & & & & -a_n & a_n \end{pmatrix}$.

1. Etudier sur des exemples les affirmations suivantes:

a. Si les $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sont des entiers le déterminant aussi.

b. Si les $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sont des entiers positifs le déterminant aussi

c. Si l'un des $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est nul le déterminant aussi

2. Résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ \ldots \\ \ldots \\ -x_8 + 2x_9 - x_{10} = 1 \\ -x_9 + x_{10} = 1 \end{cases}$. avec Maxima bien sûr

3. Etudier sur des exemples l'inversion de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ 0 & -1 & 2 & \ldots. & \ldots. & & \\ \ldots & 0 & & \ldots & \ldots & -1 & \\ \ldots & \ldots & & & & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$. avec Maxima

4. En déduire l'expression possible de son inverse; vérifier.

6. Archives

CE Algèbre Linéaire 2014

Ni documents, ni machines, ni téléphone

Remarque: chaque fois qu'un théorème peut économiser des calculs il est conseiller de le faire, en citant clairement le théorème , en vérifiant clairement que les hypothèses de celui-ci sont réalisées.

Exercice 23. On désigne par A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (8 pts)

a. Calculer A^2.

b. Résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

c. On pose B=$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; B est-elle inversible ? Justifier votre réponse

d. En vous aidant d'un théorème du cours répondre à la même question pour A.

Exercice 24. On désigne par C la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (8 pts)

a. Montrer que la matrice C est inversible.

b. Déterminer les solutions du système d'équations linéaires $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$.

c. Déterminer la matrice inverse C^{-1}.

d. Sachant que le système $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ possède comme solution le quadruplet (1,0,0,0) déterminer toutes ses solutions.

Exercice 25.

a. En vous aidant des résultats de l'exercice 1 et d'un théorème du cours que l'on détaillera déterminer le déterminant de la matrice B. (3 pts)

b. En vous aidant des techniques du cours calculer le déterminant de la matrice C. (4 pts)

corCE Algèbre Linéaire

Ni documents, ni machines, ni téléphone

Remarque: chaque fois qu'un théorème peut économiser des calculs il est conseillé de le faire, en citant clairement le théorème , en vérifiant clairement que les hypothèses de celui-ci sont réalisées.

Exercice 26. On désigne par A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. A^2=$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. 2 points

b. Pour résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ écrivons sa matrice augmentée: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d'où l'ensemble des solutions $\{(x_2+1, x_2, x_4, x_4)$, $(x_2, x_4) \in \mathbb{R}^2\}$. 2 points

c. On pose B=$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; comme nous avons montré au b. que l'équation BX = $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ possède plus d'une solution la matrice B n'est pas inversible (théorème de caractérisation des matrices inversibles). 2 points

d. Nous savons que si A est inversible alors $B = A^2$ l'est aussi; comme B ne l'est pas, A non plus. 2points

le déterminant de A est aussi une méthode acceptée

Exercice 27. On désigne par C la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Pour montrer que C est inversible on peut soit étudier le système CX=(0), soit calculer son déterminant, soit faire des opérations élémentaires.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C est équivalente par lignes à la matrice unité donc elle est inversible (th de caractérisation) 2 points

(sinon son déterminant)

b. Par suite le système d'équations linéaires $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ possède une solution unique (0,0,0,0). 2 points

c. Pour déterminer C^{-1} résolvons le système $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = y_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_4 \end{cases}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & y_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & y_2-y_1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & y_3-y_1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & y_4-y_1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{y_2-y_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{y_3-y_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{y_4-y_1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{y_4-y_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{y_3-y_1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{y_2-y_1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{y_4+y_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{y_4-y_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{y_3-y_4}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{y_2-y_4}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{y_4+y_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{y_4-y_1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{y_2-y_4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{y_3-y_4}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{y_4+y_1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{y_4-y_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-y_2+y_4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{y_3-y_4}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{y_1+y_2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{y_4-y_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-y_2+y_4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{y_3-y_4}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{y_1+y_2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{y_4-y_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-y_2+y_4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{y_4-y_3}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_3-y_4}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{y_4-y_1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-y_2+y_4}{2}. \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{y_4-y_3}{2} \end{array}\right) \text{c'est à dire } C^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}=1/2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 points

d. Comme la matrice C est inversible alors (théorème de caractérisation) le système $CX=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ a une solution unique; sachant que le système $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3-x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \end{cases}$ possède comme solution le quadruplet (1,0,0,0) celle-ci sera la seule. 2 points

Exercice 28.

a. En vous aidant des résultats de l'exercice 1 et d'un théorème du cours que l'on détaillera déterminer le déterminant de la matrice B.

B n'est pas inversible (exercice 1) donc (théorème sur le déterminant) son déterminant est nul. 3 points

(2 points seulement si l'étudiant a choisi le calcul du déterminant)

b. En vous aidant des techniques du cours calculer le déterminant de la matrice C.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -8\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -$$

$$8\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 8\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -8\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -8\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 8\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 8.$$

4 points

Algèbre linéaire d'un point de vue algorithmique

chapIV. ESPACES R^n ET APPLICATIONS LINEAIRES

(1 séance)

1. Espaces de dimension n

Nous connaissons la droite, qui représente l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, nous dirons que c'est un espace de dimension 1.

Nous connaissons le plan où les points sont définis par des couples $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ de réels, nous le noterons $\mathbb{R}^2$ et nous dirons que c'est un espace de dimension 2.

Nous connaissons l'espace « usuel » de dimension 3, que nous noterons $\mathbb{R}^3$, il est constitué des triplets $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

On remarquera qu'un couple $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ peut représenter aussi bien un point A du plan que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

De même un triplet $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ pourra représenter aussi bien un point A de l'espace usuel que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ dans l'espace.

On notera $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$.

« c'est pas des maths c'est le monde des données »

Définition 1. ***Opérations sur les vecteurs***

Soient deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ ... \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ ... \\ v_n \end{pmatrix}$ et un scalaire k.

1. ***Leur somme u+v est définie comme le vecteur*** $\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ ... \\ ... \\ u_n+\mathrm{vn} \end{pmatrix}$

2. ***Le produit ku est défini comme le vecteur*** $k\vec{u} = \begin{pmatrix} \mathrm{ku}_1 \\ \mathrm{ku}_2 \\ ... \\ ... \\ \mathrm{ku}_n \end{pmatrix}$

3. ***Le vecteur*** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$ ***sera appelé le vecteur nul et noté*** $\vec{0}$.

4. ***On désignera par*** -$\vec{u}$ ***le vecteur*** $\begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ ... \\ ... \\ -u_n \end{pmatrix}$.

Théorème 2. ***Propriétés des opérations sur les vecteurs***

Soient trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ***et deux scalaires (k,p)***$\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (\overrightarrow{-u}) = \vec{0}$
5. ***k(p***$\vec{u}$***)=(kp)***$\vec{u}$
6. ***k***$(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
7. ***(k+p)***$\vec{u}$***=k***$\vec{u}$***+p***$\vec{u}$
8. ***1.***$\vec{u}$***=***$\vec{u}$

Définition 3. ***La base standard de*** $\mathbb{R}^n$

On appelle base standard de $\mathbb{R}^n$ ***les vecteurs*** $\vec{\varepsilon_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\vec{\varepsilon_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$,..,$\vec{\varepsilon_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 4. ***A quoi sert la base standard ?***

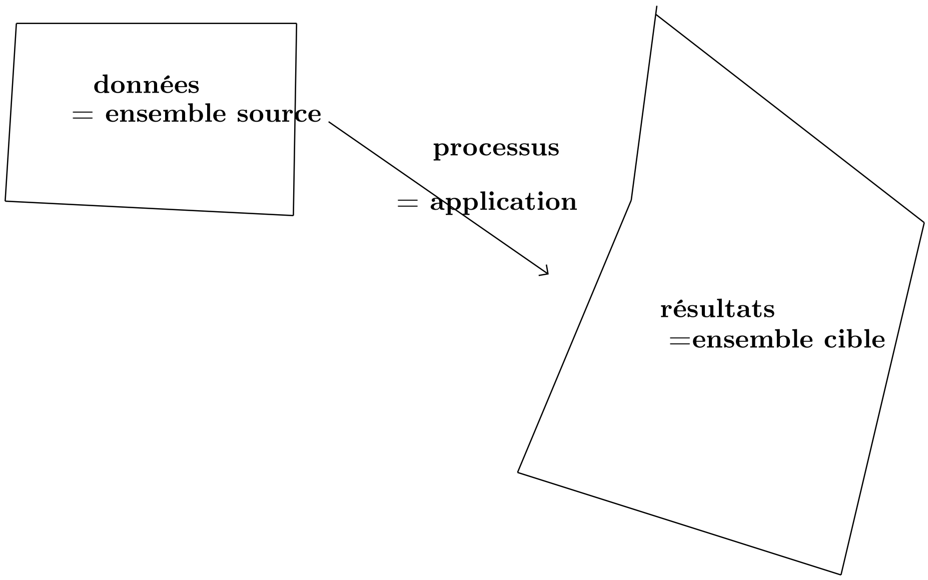
Tout vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ ... \\ u_n \end{pmatrix}$ ***de*** $\mathbb{R}^n$ ***s'écrit*** $u_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}+u_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}+\boldsymbol{u_k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{+..,+u_n}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=u_1\vec{\varepsilon}_1+....+u_k\vec{\varepsilon_k}+....+u_n\vec{\varepsilon_n}$.

Exercice 1.

1. Ecrire le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix}$ **à l'aide de la base standard.**

2. Calculer dans $2\vec{\varepsilon}_1+5\vec{\varepsilon}_2-10\vec{\varepsilon}_3+30\vec{\varepsilon}_4$ **-5(**$\vec{\varepsilon}_1+\vec{\varepsilon}_2+4\vec{\varepsilon}_3+6\vec{\varepsilon}_4$**).**

« Agir c'est transformer des données en résultats au moyen d'un processus »



Les résultats sont la conséquence des données

Les résultats se calculent à partir des données

le cas le plus simple: lorsque les calculs sont linéaires

c'est

2. Applications linéaires

Définition 5. *Définition des applications linéaires*

Une application f $:\mathbb{R}^p\longmapsto\mathbb{R}^n$ ***est linéaire si et seulement si*** $\forall(k,\vec{u},\vec{v})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^p$***,***

f($\vec{u}+\vec{v}$)=***f***($\vec{u}$)+***f***($\vec{v}$)

f(***k***$\vec{u}$)=***kf***($\vec{u}$)***.***

Exercice 2.

Déterminer parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^3$ **vers** $\mathbb{R}^3$ **celles qui sont des applications linéaires**

i) f**:**$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (y_1, y_2, y_3)$ **tel que** $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\ y_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{cases}$.

ii) g**:**$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (y_1, y_2, y_3)$ **tel que** $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 + 16x_3 \\ y_3 = x_1 \text{-} x_2 + 7x_3 \end{cases}$

iii h**:**$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (y_1, y_2, y_3)$ **tel que** $\begin{cases} y_1 = x_1 \ + x_3 \\ y_2 = x_1 \ + x_3 \\ y_3 = x_1 \textbf{-2} x_3 \end{cases}$

Théorème 6. ***Pour définir une application linéaire f***: $\mathbb{R}^p \longmapsto \mathbb{R}^n$

il suffit de connaître les images par f des vecteurs de la base standard

$(\vec{\varepsilon}_1, \ldots., \vec{\varepsilon}_k, \ldots., \vec{\varepsilon}_p)$ ***de*** $\mathbb{R}^p$***.***

Exemple 7. On veut définir une application linéaire f: $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$

On désigne par $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ **la base standard de** $\mathbb{R}^2$ **et par** $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ **la base standard de** $\mathbb{R}^3$ **; on décide f**$(\vec{\varepsilon}_1) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$**, c'est à dire** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$**et f**$(\vec{\varepsilon}_2) \overline{=\vec{u}_1} - \vec{u}_2 + 10\vec{u}_3$**, c'est à dire**$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$

Alors on sait tout sur f !

Par exemple f$(4\vec{\varepsilon}_1 + 5\vec{\varepsilon}_2) = 4$**f**$(\vec{\varepsilon}_1)$+**5f**$(\vec{\varepsilon}_2) = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5 \\ 4-5 \\ 0+50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 50 \end{pmatrix}$**.**

Calculer f$(7\vec{\varepsilon}_1 - 2\vec{\varepsilon}_2)$**.**

Question 8. ***Peut-on zipper les applications linéaires ?***

Existe-t-il une manière compactée de représenter les applications linéaires ?

Définition 9. ***La matrice standard d'une application linéaire***

Soit une application f de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$ définie par

$$f(\varepsilon_1)=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ ... \\ a_{n1} \end{pmatrix}, f(\varepsilon_2)=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ ... \\ ... \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, f(\varepsilon_k)=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ ... \\ ... \\ a_{\mathrm{nk}} \end{pmatrix}, \ldots, f(\varepsilon_p)=\begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ ... \\ ... \\ a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix}$$

On appelle matrice standard de f la matrice

Mat(f)$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix}$

Autant de colonnes que l'espace de départ (ou source)

Autant de lignes que l'espace d'arrivée (ou cible)

Les colonnes portent une information

Les lignes ne donnent pas d'information directe

Théorème 10. ***A quoi sert M(f) ?***

Soit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$ de matrice standard

M(f)$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix}$.

Alors l'image d'un vecteur $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}=x_1\vec{\varepsilon_1}+....+x_k\vec{\varepsilon_k}+....+x_p\vec{\varepsilon_p}$ ***se calcule comme suit f($\vec{x}$)***$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2p}x_p \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{\mathrm{np}}x_p \end{pmatrix}$.

Exemple 11.

On veut définir une application linéaire f: $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$

On désigne par $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ **la base standard de** $\mathbb{R}^2$**; on décide** **f**$(\vec{\varepsilon}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **et f**$(\vec{\varepsilon}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$ **.**

Alors M(f)=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$**.**

$$\mathbf{f}(4\vec{\varepsilon}_1 + 5\vec{\varepsilon}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(7\vec{\varepsilon}_1 - 2\vec{\varepsilon}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit une application linéaire f: $\mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$

On désigne par $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$ **la base standard de** $\mathbb{R}^4$**; on décide f**$(\vec{u_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ **, f**$(\vec{u_2}) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ **, f**$(\vec{u_3}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$**, f**$(\vec{u_4}) = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice m(f).

2. Déterminer f$(\vec{u_1} + \vec{u_2} + 2\vec{u_3} - \vec{u_4})$**.**

Exercice 4. Soit une application linéaire f: $\mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$

On désigne par $(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$ **la base standard de** $\mathbb{R}^4$ **et la matrice standard de f est M(f)=** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**.**

1. Que valent $f\Big(\vec{u_1}\Big), f(\vec{u_2}), f(\vec{u_3}), f(\overrightarrow{u_4})\Big)$ **?**

2. Que vaut f$(\vec{0})$ **?**

Quelques exemples d'applications linéaires: (à lire seuls)

L'application identique, dont la matrice sera $\mathbf{I}_n$**.**

L'application nulle, dont la matrice standard sera $\mathbf{0}_n$**.**

La réflexion par rapport à l'axe Oy: $f\colon \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$**,** $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \text{-}x \\ y \end{pmatrix}$**, dont la matrice standard sera** $\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

La réflexion par rapport à la droite d'équation y=x: $f\colon \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ x \end{pmatrix}$, **dont la matrice standard sera** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La réflexion dans l'espace par rapport au plan Oxy: $f\colon \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \mathbf{-z} \end{pmatrix}$, **dont la matrice standard sera** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$.

La projection orthogonale sur l'axe Ox (dans $\mathbb{R}^2$**):** $f\colon \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, **dont la matrice standard sera** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La projection orthogonale sur le plan Oxy (dans $\mathbb{R}^3$**):** $f\colon \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$, $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, **dont la matrice standard sera** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le glisser de côté dans $\mathbb{R}^2$**:** $f\colon \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$, $f\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y+x \end{pmatrix}$, **dont la matrice standard sera** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit l'application de $\mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$ **définie par**

$$\begin{array}{l} w_1 = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 \\ w_2 = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \\ w_3 = 7x_1 - 3x_2 + 9x_4 \end{array}$$ **; déterminer sa matrice standard.**

Solution.

Attention à ne pas confondre les lignes et les colonnes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & -7 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Théorème 12. ***Composition d'applications linéaires***

Soient deux applications linéaires f_A: $\mathbb{R}^p \longmapsto \mathbb{R}^n$, de matrice A, et f_B: $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^q$, de matrice B, alors $f_B \circ f_A$: $\mathbb{R}^p \longmapsto \mathbb{R}^q$ est une application linéaire, de matrice BA; $f_B \circ f_A = f_{\mathrm{BA}}$.

Exercice 6. **Soient les applications linéaires f: $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ et g: $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ définies dans cet ordre par**

i) $\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 \\ y_2 = -x_1 + x_2 + 3x_3 \end{array}$ **et ii)** $\begin{array}{l} z_1 = 4y_1 - y_2 \\ z_2 = y_1 + 3y_2 \end{array}$.

a. Déterminer les matrices standard de f et g

b. En déduire la matrice standard de $g \circ f$

c. En déduire l'expression de $g \circ f$**.**

Solution.

matrice standard de f :$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$**; matrice standard de g: B=**$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

matrice standard de $g \circ f$**: BA=**$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 19 & -35 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $g \circ f(x) = \begin{pmatrix} 9 & 19 & -35 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_1 + 19x_2 - 35x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

Exercice 7.

Soit f: $\mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$ **définie par** $\begin{cases} y_1 = x_1\text{-}x_2 + x_3 + x_4 \\ y_2 = 2x_1\text{-}x_2 + x_3 + 2x_4 \\ y_3 = x_1 + 2x_2\textbf{-2}x_3 + x_4 \end{cases}$

On désigne par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ **la base standard de** $\mathbb{R}^4$ **et par** $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ **la base standard de** $\mathbb{R}^3$**.**

1. Décrire $f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3), (\varepsilon_4)$ **sous la forme de combinaisons linéaires de** $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$**.**

2. Déterminer la matrice standard de f.

Solution.

Les images des vecteurs de la base standard sont

$f(\varepsilon_1) = \varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3$

$f(\varepsilon_2) = \text{-}\varphi_1\text{-}\varphi_2 + 2\varphi_3$

$f(\varepsilon_3) = \varphi_1 + \varphi_2\textbf{-2}\varphi_3$

$f(\varepsilon_4) = \varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3$

2. La matrice standard de f est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 13. *Propriétés des applications linéaires de* $\mathbb{R}^p \longmapsto \mathbb{R}^n$

Soit une matrice A $=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix}$ ***application linéaire*** $\boldsymbol{f}_A$:

$\mathbb{R}^p \longmapsto \mathbb{R}^n$

i) f_A ***est injective si et seulement si la matrice échelonnée réduite de A montre p VARIABLES DIRECTRICES (c'est à dire AUCUNE VARIABLE LIBRE).***

ii) f_A ***est surjective si et seulement si la matrice échelonnée réduite de A montre n VARIABLES DIRECTRICES.***

i) **si n<p f ne peut être injective**

ii) **si n>p f ne peut être surjective**

Remarque 14.

à mon humble avis on ne peut retenir ce résultat « par coeur » sans risque de se tromper; il faut l'avoir compris, pour le retenir, pour le retrouver !!

(à bon entendeur salut !)

Théorème 15. ***Propriétés des applications linéaires de*** $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$

ATTENTION CAS PARTICULIER CAR n ET n.

1. Soit A$\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$***, les propriétés suivantes sont équivalentes:***

i) A est inversible

ii) $\forall w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$***,*** $\exists x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathrm{Ax} = w$

iii) $\forall w \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$***,*** $\exists! x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \mathrm{Ax} = w$

2. Soit A$\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ ***et l'application linéaire associée f***$_A$: $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$***, les propriétés suivantes sont équivalentes:***

i) f$_A$: $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ ***est surjective***

ii) f$_A$: $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ ***est injective***

ii) f$_A$: $\mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ ***est bijective***

Remarque: dans ce cas $(\mathrm{f}_A)^{-1}$=$\mathrm{f}_{A^{-1}}$**, ce qui signifie que dans ce cas la matrice standard de** $(\mathrm{f}_A)^{-1}$ **c'est** A^{-1}.

Exercice 8.

Soient les applications linéaires f: $\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ **et g:** $\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ **définies dans cet ordre par**

i) $\begin{array}{l} y_1 = 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 \\ y_2 = -x_1 + x_2 + 3x_3 \end{array}$ **et ii)** $\begin{array}{l} z_1 = 4y_1 - y_2 \\ z_2 = y_1 + 3y_2 \end{array}$

i) Déterminer au moyen de leurs matrices si f et (ou) g sont inversibles.

ii) Déterminer alors la (ou les) matrice(s) inverse(s).

iii) En déduire l'expression de f^{-1} **et (ou) de** g^{-1}.

Solution.

i. a. $\det(B)=\det\left(\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)=13\neq 0$, **donc f est inversible**

b. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **n'est pas carrée donc pas de déterminant; par ailleurs** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 1 & 3 \\ 2 & 5 & \mathbf{-8} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \text{-1} & \text{-3} \\ 2 & 5 & \mathbf{-8} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \text{-1} & \text{-3} \\ 0 & 7 & \mathbf{-2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \text{-1} & \text{-3} \\ 0 & 1 & \mathbf{-2/7} \end{pmatrix} \longrightarrow$ $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \text{-23/7} \\ 0 & 1 & \mathbf{-2/7} \end{pmatrix}$; **la troisième colonne montre que A n'est pas inversible.**

ii) L'inverse $A^{\mathbf{-1}}$ **est** $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \mathbf{-1} & 4 \end{pmatrix}$

iii) donc seule f^{-1} **existe, a pour matrice** $A^{\mathbf{-1}}$**, c'est donc** f^{-1}: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ \mathbf{-1} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3y_1+y_2 \\ \mathbf{y_1+4y_2} \end{pmatrix}$

Problème 1.

1. Soit la matrice A=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **et l'application linéaire f$_A$ de $\mathbb{R}^?$ vers $\mathbb{R}^?$ associée; déterminer si f$_A$ est injective, surjective.**

2. Soit la matrice B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et l'application linéaire g$_A$ de $\mathbb{R}^?$ vers $\mathbb{R}^?$ associée; déterminer si g_A est injective, surjective.**

Problème 2. Soient $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_4)$ la base standard de $\mathbb{R}^4$ et $(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3)$ la base standard de $\mathbb{R}^3$ et les matrices

P=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **Q=**$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, **R=**$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer laquelle est la matrice standard d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^4$, cette application sera désignée par h.

2. Déterminer h$(\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2 + \vec{\alpha}_3)$, que l'on exprimera comme combinaison linéaire des vecteurs $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3, \vec{\varepsilon}_4)$

3. Déterminer laquelle est la matrice standard d'une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$, cette application sera désignée par φ.

4. La composée $\varphi \circ h$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$

et la composée h$\circ\varphi$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$.

Déterminer la matrice standard A de $\varphi \circ h$

et la matrice standard B de h$\circ\varphi$.

Travaux Dirigés

Exercice 9. Déterminer les valeurs de

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}$ *

Exercice 10.

On définit les applications

i) f: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **définie par** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$ **tels que** $\begin{cases} y_1 = x_2 \\ y_2 = x_3 \\ y_3 = x_4 \\ y_4 = x_1 \end{cases}$

ii) g: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **définie par** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$ **tels que** $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 + 3x_3 \\ y_3 = x_3 \text{-} \mathbf{2}x_4 \\ y_4 = x_3 \text{-} \mathbf{4}x_4 \end{cases}$

iii) h: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **définie par** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$ **tels que** $\begin{cases} y_1 = x_1.x_2 \\ y_2 = x_2 + \sin(x_3) \\ y_3 = x_3 \text{-} \mathbf{2}x_4 \\ y_4 = x_1 \text{-} \mathbf{4}x_4 \end{cases}$

iv) k: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **définie par** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$ **tels que** $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 + x_3 + x_4 \\ y_3 = x_1 + x_3 + x_4 \\ y_4 = x_1 + \mathbf{x}_2 + x_4 \end{cases}$

v) m: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **définie par** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$ **tels que** $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \end{cases}$

vi) n: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **définie par** $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$ **tels que** $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ y_3 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ y_4 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{cases}$

Déterminer celles qui sont des applications linéaires. *

Exercice 11. Avec les notations de l'exercice au-dessus

a. Déterminer la matrice standard de $m \circ n$ *****

b. Déterminer la matrice standard de k$\circ n$

c. Déterminer la matrice standard de $m \circ k$

Exercice 12. *

a. Déterminer s'il existe une application linéaire f de $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **telle que** $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 - \varepsilon_4$; $f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \varepsilon_4$; $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$; $f(\varepsilon_4) = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 - \varepsilon_4$.

b. Si non, terminé; si oui déterminer sa matrice standard.

c. Et dans ce cas déterminer si f est une bijection de $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$**.**

Exercice 13. *

Soit f une application linéaire non injective de $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$

a. Montrer qu'il existe un vecteur $z \neq 0$**, tel que f(z)=0.**

b. Montrer qu'il existe b$\in \mathbb{R}^4$ **tel que l'équation f(x)=b n'ait pas de solution.**

c. Soit c$\in \mathbb{R}^4$ **tel que l'équation f(x)=c ait (au moins) une solution** x_0**, montrer qu'alors** $f(x_0 + z)$**=c.**

d. Avec les mêmes hypothèses qu'au c. montrer que $\{x \in \mathbb{R}^4, f(x) = c\} = \{x_0 + z, f(z) = 0\}$**. ***

Exercice 14. *

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **dont la matrice standard est** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a. Est-elle injective ?

b. Est-elle surjective ?

c. Déterminer l'ensemble des x de $\mathbb{R}^4$ tels que f(x)=0.

d. Si le chapitre suivant est assez avancé montrer que cet ensemble est un espace vectoriel.

e. Déterminer l'ensemble des x de $\mathbb{R}^4$ tels que f(x)=$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f. Déterminer l'ensemble des x de $\mathbb{R}^4$ tels que f(x)=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g. Si le chapitre suivant est assez avancé montrer que l'ensemble des y de $\mathbb{R}^4$ tels qu'il existe x de $\mathbb{R}^4$ tel que f(x)=y est un espace vectoriel.

Exercice 15. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dont la matrice standard est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Est-elle injective ?

b. Est-elle surjective ?

c. Déterminer l'ensemble des x de $\mathbb{R}^3$ tels que f(x)=0.

d. Si le chapitre suivant est assez avancé montrer que cet ensemble est un espace vectoriel.

e. Déterminer l'ensemble des x de $\mathbb{R}^3$ tels que f(x)=$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f. Déterminer l'ensemble des x de $\mathbb{R}^3$ tels que f(x)=$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g. Si le chapitre suivant est assez avancé montrer que l'ensemble des y de $\mathbb{R}^4$ tels qu'il existe x de $\mathbb{R}^3$ tel que f(x)=y est un espace vectoriel.

Exercice 16. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice standard est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a. Est-elle injective ?

b. Est-elle surjective ?

c. Déterminer l'ensemble des x de $\mathbb{R}^4$ tels que f(x)=0.

d. Si le chapitre suivant est assez avancé montrer que cet ensemble est un espace vectoriel.

e. Déterminer l'ensemble des x de $\mathbb{R}^4$ tels que f(x)=$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

f. Déterminer l'ensemble des x de $\mathbb{R}^4$ tels que f(x)=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

g. Si le chapitre suivant est assez avancé montrer que l'ensemble des y de $\mathbb{R}^4$ tels qu'il existe x de $\mathbb{R}^3$ tel que f(x)=y est un espace vectoriel.

Objectifs:

1. Savoir additionner des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$, multiplier des vecteurs par des scalaires.

2. Savoir reconnaître une application linéaire et déterminer sa matrice standard.

3. Connaître des exemples d'applications linéaires et savoir reconnaître une application linéaire.

4. Comprendre le lien entre la matrice standard d'une application linéaire et la base standard

5. Connaître la matrice standard de la composée de deux applications linéaires.

6. Savoir et comprendre le problème de l'injectivité et de la surjectivité d'applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$

7. Connaître et comprendre le lien entre injectivité, surjectivité, bijectivité d'applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

8. Connaître la base standard de $\mathbb{R}^n$.

3. Activité informatique Maxima

à rendre par Campus suivant les modalités fixées

Exercice 17.

Pour tout entier n on pose $\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & .... & ... \\ 1 & 1 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & ... & 0 \end{pmatrix}$.

1. Après des essais informatiques déterminer son déterminant en fonction de n.

2. Après des essais informatiques déterminer son inverse en fonction de n.

3. Déterminer $f_{A_n}^{-1}(\varepsilon_k)$ pour chacun des vecteurs de la base standard (Maxima); vérifier.

Exercice 18.

Soit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ vers $\mathbb{R}^5$ définie de la manière suivante:

si on désigne par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_5)$ la base standard

f(ε_1)=ε_2, f(ε_2)=ε_3, f(ε_3)=ε_4, f(ε_4)=ε_5, f(ε_5)=aε_1+(a+1)ε_2+(a+2)ε_3+(a+3)ε_4+(a+4)ε_5

1. Déterminer la matrice standard de f, que l'on désignera par M

2. A l'aide du déterminant trouver pour quelles valeurs de a f est une bijection de $\mathbb{R}^5$ sur $\mathbb{R}^5$

3. Lorsque f est une bijection déterminer la matrice standard de f^{-1}.

4. En déduire les images $f_{A_n}^{-1}(\varepsilon_k)$ de chacun des vecteurs de la base standard.

4. Archives

Deuxième devoir d'Algèbre linéaire

Il est conseillé de traiter les questions dans l'ordre car certains questions utilisent des résultats de questions précédentes.

I. On désigne par A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.

2. Déterminer deux réels (u,v) tels que A^2=uI+vA.

3. On sait que $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et on désigne par F le sous-espace vectoriel Vect(I,A), montrer que I et A en constituent une base.

II. Calculer le déterminant de A

(il est conseillé de commencer par ajouter à la première ligne, l'une après l'autre, les trois autres et d'observer la matrice obtenue afin de développer son déterminant).

III. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

IV. On désigne par f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers lui-même dont la matrice standard est M=A-3I$_4$.

a. Montrer que f n'est pas bijective.

La suite relève des chapitres 5 et 6

b. Déterminer le noyau de f et montrer qu'il possède une base formée d'un vecteur, on en choisira un que l'on appellera v.

c. Déterminer le rang de M.

d. Déterminer trois vecteurs colonnes de M linéairement indépendants, on les désignera par (w_1, w_2, w_3)

e. Montrer que $B' = (v, w_1, w_2, w_3)$ constitue une base de $\mathbb{R}^4$.

V. Exprimer les quatre vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de la base standard relativement à la nouvelle base B'.

corDeuxième devoir d'Algèbre linéaire

I. On désigne par A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. Pour déterminer deux réels (u,v) tels que A^2=uI+vA (et même vérifier s'il y en a) on pose l'équation $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v & v & v \\ v & 0 & v & v \\ v & v & 0 & v \\ v & v & v & 0 \end{pmatrix}$, ce qui équivaut à $\begin{cases} 3 = u \\ 2 = v \end{cases}$.

3. On sait que $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et on désigne par F le sous-espace vectoriel Vect(I,A), montrer que I et A en constituent une base.

La définition de f en fait un espace vectoriel, engendré par I et A; pour montrer qu'ils en forment une base il suffit de montrer la liberté de cette famille; pour cela on pose xI + yA = 0, d'où $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y & y & y \\ y & 0 & y & y \\ y & y & 0 & y \\ y & y & y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, par suite $\begin{pmatrix} x & y & y & y \\ y & x & y & y \\ y & y & x & y \\ y & y & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et x=y=0.

II. Calculer le déterminant de A

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3.$

III. Son déterminant est non nul donc A est inversible. et déterminer son inverse.

Le plus simple c'est d'exploiter le résultat de I.2. A^2=3I+2A, d'où $A(A-2I) = 3I$ et donc $A((1/3)A - (2/3)I) = I$; donc $A^{-1} = 1/3(A - 2I) = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$. On vérifie.

IV. On désigne par f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers lui-même dont la matrice standard est M=A-3I$_4$.

a. Ecrivons la matrice standard de f M=$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, donc $|M| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$
$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{matrix}$ =0, donc f n'est pas bijective.

Voir chapitres 5 et 6

b. Pour déterminer le noyau de f on résoud le système f(x)=0 d'où la matrice augmentée
$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où Ker(A)=$\{(x_4, x_4, x_4, x_4), x_4 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1,1,1,1) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$; il possède une base formée de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$=v.

c. Le rang de M est donc égal à 4-1=3

d. Montrons que les trois premiers vecteurs colonnes de M sont linéairement indépendants:

$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où 3 »1 » directeurs, donc une soluion unique 0,0,0, donc famille libre.

On posera $\omega_1 =$ -3$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\omega_2 = \varepsilon_1$-3$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\omega_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2-3\varepsilon_3 + \varepsilon_4$.

e. Pour montrer que $B' = (v,\ w_1,\ w_2,\ w_3)$ constitue une base de $\mathbb{R}^4$, considérons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, montrons que l'équation $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'a que la solution nulle.

Calculons le déterminant: $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$
$16\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 64$

V. Exprimer les quatre vecteurs $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ de la base standard relativement à la nouvelle base B'.

Pour exprimer ε_1 dans la base $B' = (v, w_1, w_2, w_3)$ on cherche (a,b,c,d) tq ε_1=av + bw_1 + cw_2 + dw_3, ce qui conduit à un système d'équations linéaires $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; d'où la résolution :

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 1/4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; donc ε_1=1/4v-1/4w_1.

Pour exprimer ε_2 dans la base $B' = (v, w_1, w_2, w_3)$ on cherche (a,b,c,d) tq ε_2=av + bw_1 + cw_2 + dw_3, ce qui conduit à un système d'équations linéaires $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; d'où la résolution :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 3/4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 3/4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$; d'où ε_2=1/4v-1/4w_2

Pour exprimer ε_3 dans la base $B' = (v, w_1, w_2, w_3)$ on cherche (a,b,c,d) tq ε_3=av + bw_1 + cw_2 + dw_3, ce qui conduit à un système d'équations linéaires $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; d'où la résolution :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{pmatrix}$$; d'où ε_3=1/4v-1/4w_3.

Et enfin pour exprimer ε_4 dans la base $B' = (v, w_1, w_2, w_3)$ on cherche (a,b,c,d) tq ε_4=av + bw_1 + cw_2 + dw_3, ce qui conduit à un système d'équations linéaires $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; d'où la résolution :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}$$; d'où ε_4=1/4v + 1/4w_1 + 1/4w_2 + 1/4w_3.

En désignant par B la base standard et par B' la base (v, w_1, w_2, w_3)

$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ tandis que $P_{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ne pas les confondre !!)

et on peut vérifier leur produit.

Algèbre linéaire d'un point de vue algorithmique

chapV. ESPACES VECTORIELS, BASES ET DIMENSIONS

(1 séance cours; 1.5 séances td)

1. Définitions

Définition 1. *Espace vectoriel*

Un ensemble V, muni de deux opérations, une addition et une multiplication par les scalaires

$V \times V \longrightarrow V$

$(\vec{u},\vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$

$\mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(k,\vec{u}) \longmapsto k\vec{u}$

sera appelée « espace vectoriel » si il existe un élément 0 de V et si pour tout $(k,p) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(u,v,w) \in V \times V \times V$

1. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

2. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

3. $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

4. *Il existe* $-\vec{u}$ *dans V,* $\vec{u}+\overrightarrow{-u}=\vec{0}$

5. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$

6. $(k+p)\vec{u}=k\vec{u}+p\vec{u}$

7.$k(p\vec{u})=(kp)\vec{u}$

8.$1\vec{u}=\vec{u}$.

Exemples d'espaces vectoriels:

Pour tout entier strictement positif $\mathbb{R}^n$

Pour tout couple d'entiers strictement positifs $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

L'ensemble des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$

Théorème 2. *Soit un espace vectoriel V, un scalaire k, un vecteur* $\vec{u}$

$0.\vec{u}=\vec{0}$

$k.\vec{0}=\vec{0}$

$(-1)\vec{u}=-\vec{u}$

Si $k.\vec{u}=\vec{0}$*, k est le scalaire nul ou* $\vec{u}$ *est le vecteur nul.*

2. Sous-espaces vectoriels

Définition 3. ***sous-espace vectoriel de***

Un sous-ensemble W d'un espace vectoriel V est un ***sous-espace vectoriel de*** *V lorsqu'il est un espace vectoriel pour les opérations de V.*

Théorème 4. *Caractérisation des sous-espaces vectoriels*

Soit V un espace vectoriel et W un sous-ensemble de V, W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si:

i) $\vec{0} \in W$

ii) $\forall(\vec{u}, \vec{v}) \in W \times W, \vec{u} + \vec{v} \in W$

iii) $\forall(k, \vec{u}) \in \mathbb{R} \times W, k\vec{u} \in W$

On en déduira qu'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel lui-même.

(remarque :il vaut mieux vérifier 4 conditions que 8 conditions)

Exercice 1. Soit un entier n>1 et S_n l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et colonnes; montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit un entier n et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n ; montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{R}[X]$ et l'ensemble des polynômes de degré 3; expliquer pourquoi ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème 5. *L'espace vectoriel des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes*

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$*, l'ensemble des solutions du système AX=0 est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^p$*.*

3. Combinaison linéaire

Définition 6. *Combinaison linéaire*

Dans un espace vectoriel un vecteur w est appelé combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, \ldots, v_t)$ lorsqu'il existe des scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ tels que $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_t v_t$.

Théorème 7. *Soient des vecteurs $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_t})$ dans un espace vectoriel V; alors l'ensemble W des combinaisons linéaires des vecteurs $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_t})$ est un sous-espace vectoriel de V.*

W sera noté Vect$(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_t})$ et appelé le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs$(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_t})$.

C'est le plus petit sous-espace vectoriel de V qui contienne les vecteurs $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_t})$.

On dira aussi que les vecteurs $(\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_t})$ forment une famille génératrice de W.

Exercice 4. Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{t_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{t_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{t_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{t_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; déterminer s'ils forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Solution. posons le système $x_1\vec{t_1} + x_2\vec{t_2} + x_3\vec{t_3} + x_4\vec{t_4} = \vec{v}$ et cherchons s'il a des solutions **pour tous les seconds membres $\vec{v}$ possibles**

écrivons la matrice du système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; il y a trois « 1 directeurs »

donc quel que soit v le système a des solutions; donc c'est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$

Exercice 5. Même question pour les vecteurs $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{z}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{z}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solution. posons le système $x_1\vec{z_1}+x_2\vec{z_2}+x_3\vec{z_3}+x_4\vec{z_4}=\vec{v}$ et cherchons s'il a des solutions quel que soit le second membre $\vec{v}$

écrivons la matrice du système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; il n'y a 3 « 1 directeurs » donc

on voit il y aura des cas où le système n'a pas de solutions donc ce n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$

Théorème 8. *Deux familles génératrices d'un même espace vectoriel*

Soient dans l'espace vectoriel V les familles de vecteurs $S=(\vec{v_1},\ldots,\vec{v_t})$ et $S'=\left(\vec{v'_1},\ldots,\vec{v'_s}\right)$; alors

$Vect(\vec{v_1},\ldots,\vec{v_t}) = Vect\left(\vec{v'_1},\ldots,\vec{v'_s}\right)$ si et seulement si tout vecteur de S est une combinaison linéaire de vecteurs de S' et tout vecteur de S' est une combinaison linéaire de vecteurs de S.

4. Indépendance linéaire

Remarque 9. Soit dans un espace vectoriel V une famille de vecteurs $S = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_t)$, alors forcément $0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + ... + \vec{v}_t) = \vec{0}$.

Définition 10. *Indépendance linéaire*

Soit dans un espace vectoriel V une famille de vecteurs $S = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_t)$*, on dira qu'elle est linéairement indépendante lorsque la seule solution à l'équation* $\lambda_1\vec{v}_1 + ... \lambda_t\vec{v}_t) = \vec{0}$ *est* $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_t = 0$.

On dira aussi que cette famille est libre.

Exercice 6. Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; déterminer s'ils forment une famille libre ou liée.

Solution. on pose donc le système $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \vec{0}$, c'est à dire , sous forme matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; échelonnons $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ déjà qu'il n'y aura pas trois « 1 directeurs », donc le système, qui a forcément la solution nulle ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) n'aura pas de solution unique, donc la famille est liée.

Remarque 11. Une famille qui contient le vecteur nul n'est pas linéairement indépendante (on dira aussi qu'elle est liée).

Exercice 7. Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; déterminer s'ils forment une famille libre ou liée.

Solution. on pose le système on pose donc le système $x_1\vec{w}_1 + x_2\vec{w}_2 + x_3\vec{w}_3 = \vec{0}$, c'est à dire , sous forme matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; échelonnons $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; trois « 1 directeurs », donc solution unique $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; la famille est libre.

Théorème 12. *Caractérisation des familles liées*

Soit dans un espace vectoriel V une famille de vecteurs $S = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t)$; elle est liée si et seulement si au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

OUI, mais lequel ?

Théorème 13. *Interprétation géométrique de la dépendance linéaire dans* $\mathbb{R}^n$

Soit dans $\mathbb{R}^n$ *une famille de vecteurs* $S = (v_1, \ldots, v_t)$ *où* $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \ldots \\ \ldots \\ v_{n1} \end{pmatrix}$,

$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \ldots \\ \ldots \\ v_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{v_k} = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ \ldots \\ \ldots \\ v_{\mathrm{nk}} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{v_t} = \begin{pmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ \ldots \\ \ldots \\ v_{\mathrm{nt}} \end{pmatrix}$.

La famille $S = (\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_t})$ *est libre si et seulement si le système* $\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \ldots\ldots + v_{1t}x_t = 0 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \ldots\ldots + v_{2t}x_t = 0 \\ \ldots \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \ldots\ldots + v_{\mathrm{nt}}x_t = 0 \end{cases}$ *ne possède que la solution nulle.*

D'où

Théorème 14. *Dans* $\mathbb{R}^n$ *une famille de vecteurs de plus de n éléments est nécessairement liée.*

5. Bases et dimension

Définition 15. *Base d'un espace vectoriel*

Soit un espace vectoriel V et la famille de vecteurs $S = (\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_t})$.

On dit que S est une base de V lorsque S est ***libre et génératrice*** *de V (cad Vect(S)=V).*

A QUOI SERVENT LES BASES ?

Théorème 16.

Soit un espace vectoriel V et $S = (\vec{v_1}, ..., \vec{v_t})$ une famille de vecteurs de V.

Tout vecteur $\vec{w}$ de V s'exprime de manière ***unique*** *comme combinaison linéaire d'éléments de S: $\vec{w} = \lambda_1\vec{v_1} + ... + \lambda_t\vec{v_t}$ si et seulement si S est une base de V.*

Définition 17. *Coordonnées d'un vecteur par rapport à une base*

Les coefficients (λ_1, ..., λ_t) sont appelés les « coordonnées » de $\vec{w}$ par rapport à la base S.

Exemple 18. FONDAMENTAL

Dans $\mathbb{R}^n$ la base standard est une base

si n=4, $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base

1. Elle est libre car, si $x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$ x$_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\begin{cases} x1 = 0 \\ x2 = 0 \\ x3 = 0 \\ x4 = 0 \end{cases}$

2. Elle est génératrice car le système $x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$ x$_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ a toujours des solutions comme le prouve son écriture matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}$.

c'est donc une base.

3. Dans cette base les coordonnées de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ sont justement x_1, x_2, x$_3$ et x_4

Exercice 8.

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; nous avons déjà vu qu'elle est libre

1. Montrer qu'elle est génératrice.

2. Soit le vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; déterminer ses coordonnées dans la base W=$(\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3})$.

3. Même question pour $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Définition 19. *Dimension finie*

Soit un espace vectoriel V; on dit que V est de dimension finie lorsqu'il possède une base finie; sinon on dira qu'il est de dimension infinie.

Théorème 20.

Soit un espace vectoriel V de dimension finie et $S=(\vec{v_1},...,\vec{v_t})$ *une base de V.*

1) Toute famille de V qui possède plus de t éléments est liée.

2. Aucun sous-ensemble de moins de t éléments ne peut engendrer V.

Donc toutes les bases de V ont le même nombre d'éléments.

Définition 21. *Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie:*

C'est le nombre d'éléments de chacune de ses bases.

Par convention la dimension de $\left\{\vec{0}\right\}$ *est 0.*

Exercice 9. Déterminer la dimension de $\mathbb{R}^n$

ouf !

Exercice 10. On désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n; montrer que $(1, X, X^2, ..., X^n)$ en constitue une base et donc déterminer sa dimension.

Solution. tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit (et forcément de manière unique) $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, donc les vecteurs $(1, X, X^2, ..., X^n)$ en forment une base et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est N+1 !!!attention

Remarque 22. On admettra , pour éviter des vérifications fastidieuses, que $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ a comme base la famille des matrices $M_{\mathrm{ij}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... \\ ... & 1 & 0 & ... \\ ... & 0 & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$(un seul terme non nul , égal à 1, à la i-ème ligne, j-ème colonne); donc la dimension de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ est pn.

***Note* 23.** *(entre nous)*

La dimension d'un espace vectoriel c'est le nombre d'informations indépendantes nécessaires pour y connaître un élément)

{ IMPORTANT mais difficile

Proposition 24. *Soit V un espace vectoriel et S une famille de vecteurs de V.*

1. Si S est libre et si $\vec{v} \notin \mathrm{Vect}(S)$, $S \cup \{\vec{v}\}$ reste libre.

2. Si $\vec{v}$ est combinaison linéaire de vecteurs de $S \setminus \{\vec{v}\}$, Vect(S)=Vect($S \setminus \{\vec{v}\}$).

}

IMPORTANT mais facile

Théorème 25. *Caractérisation des bases d'un espace vectoriel de dimension n*

Soit V un espace vectoriel de dimension n et S une famille de vecteurs de V contenant exactement n vecteurs; les affirmations suivantes sont équivalentes:

1. S est une base de V.

2. S engendre V.

3. S est libre.

Théorème 26.

Comment reconnaître une base ?

Soit dans $\mathbb{R}^n$ *une famille de vecteurs* $S = (v_1, ..., v_n)$ *où* $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ ... \\ ... \\ v_{n1} \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ ... \\ ... \\ v_{n2} \end{pmatrix}$,.., $\vec{v_k} = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ ... \\ ... \\ v_{\mathrm{nk}} \end{pmatrix}$,..,$\vec{v_n} = \begin{pmatrix} v_{1\mathrm{tn}} \\ v_{2n} \\ ... \\ ... \\ v_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix}$.

La famille $S = (\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ *est libre si et seulement si le système* $\begin{cases} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + ... + v_{1n}x_n = b_1 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + ... + v_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + ... + v_{\mathrm{nn}}x_n = b_{\mathrm{nn}} \end{cases}$ *a une solution unique pour tout* $b = (\, b_1, ..., b_n \,)$

C'est à dire si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} v_{11} & ... & ... & v_{1n} \\ v_{21} & & & ... \\ ... & & ... & ... \\ ... & .... & ... & ... \\ v_{n1} & ... & ... & v_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix} \neq 0.$

Exercice 11. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$

a. Rappeler sa dimension (cf exercice au-dessus)

b. Soient les polynômes $P_0 = (X\text{-}1)(X\text{-}2)(X\text{-}3)$, $P_1 = X(X\text{-}2)(X\text{-}3)$,$P_2 = X(X\text{-}1)(X\text{-}3)$,$P_3 = X(X\text{-}1)(X\text{-}2)$, montrer qu'ils forment une famille libre

c. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution.

a. 4

b. soient (x_0, x_1, x_2, x_3) tels que $x_0 P0 + x_1 P1 + x_2 P2 + x_3 P3 = 0$ alors, en particulier,

$(x_0 P0 + x_1 P1 + x_2 P2 + x_3 P3)(0) = 0$, d'où , en calculant, x_0(0-1)(0-2)(0-3)+ 0+0+0=0; d'où -6$x_0 = 0$ donc $x_0 = 0$

$(x_0P0 + x_1P1 + x_2P2 + x_3P3)(1) = 0$, d'où, en calculant, 0+ x_1(1)(1-2)(1-3) +0+0=0; d'où $2x_1$=0, donc x_1=0

$(x_0P0+x_1P1+x_2P2+x_3P3)(2)=0$, d'où, en calculant, 0+0+x_2(2)(2-1)(2-3)+0=0; d'où -2x_2=0, donc x_2=0

$(x_0P0+x_1P1+x_2P2+x_3P3)(3)=0$, d'où, en calculant, 0+0+0+x_3(3)(3-1)(3-2)=0; d'où $6x_3=0$, donc x_3=0.

la famille est donc libre.

c. voir « caractérisation des bases des espaces vectoriels de dimension finie »

Théorème 27. *régime minceur* *régime gourmand*

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et S une famille finie de V.

1. Si S engendre V sans être libre on peut rétrécir S en une base de V.

2. Si S est libre mais pas génératrice on peut la compléter en une base de V.

Exercice 12. Soit dans $\mathbb{R}^4$ la famille $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Si elle liée, c'est fini, mais si elle est libre, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 13. Soit dans $\mathbb{R}^4$ la famille $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Si elle est libre passer à b, mais si elle est liée, la rétrécir en une famille libre puis passer à b.

b. Et maintenant est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

Solution. a. u_1-u$_3$-u$_4$=(0) donc cette famille est liée,

b. retirons par exemple u_1; cherchons si (u_2, u_3, u_4, u_5) est libre étudions le système $x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4 + x_5u_5 = (0)$: det $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

et si on continue à retirer il y aura une famille de 3 vecteurs qui ne peut pas engendrer $\mathbb{R}^4$.

D'où

Théorème 28. *Inclusion et dimensions*

Soit un espace vectoriel de dimension finie V et un sous-espace vectoriel W.

1. *dim(W)*$\leqslant \dim(V)$
2. *Si dim(W)=dim(V) alors V=W. (important)*

6. Coordonnées d'un vecteur dans une base

Définition 29. *Coordonnées*

Soit un espace vectoriel E et la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots., e_n)$

Tout vecteur v s'écrit de manière unique $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots. + x_ne_n$.

Les scalaires $(x_1, x_2, \ldots., x_n)$ *s'appellent les coordonnées de v dans la base* $\mathcal{B}$.

Exemple 30. Soit $\mathbb{R}_3[X]$

1. On connaît sa base $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$

Dans la base $\mathcal{C}$

les coordonnées du polynôme $-6 + 11X - 6X^2 + X^3$ sont (-6,11,-6,1)

les coordonnées du polynôme $6X - 5X^2 + X^3$ sont (0,6,–5,1)

les coordonnées du polynôme $3X - 4X^2 + X^3$ sont (0,3,-4,,1)

les coordonnées du polynôme $2X - 3X^2 + X^3$ sont (0,2,-3,1)

2. On connaît sa base $\mathcal{C}'$ formée des vecteurs $P_0 = (X\text{-}1)(X\text{-}2)(X\text{-}3)$, $P_1 = X(X\text{-}2)(X\text{-}3)$,$P_2 = X(X\text{-}1)(X\text{-}3)$,$P_3 = X(X\text{-}1)(X\text{-}2)$

Dans la base $\mathcal{C}'$

$-6 + 11X - 6X^2 + X^3$=P$_0$=1P$_0$+$0P_1 + 0P_2 + 0P_3$,

donc cette base les coordonnées de $-6 + 11X - 6X^2 + X^3$ sont (1,0,0,0)

de même $6X - 5X^2 + X^3 = P_1$=0P$_0$+$1P_1 + 0P_2 + 0P_3$

donc dans cette base es coordonnées du polynôme $6X - 5X^2 + X^3$ sont (0,1,0,0)

Le polynôme X=0P$_0$+$\frac{1}{2}P_1 - P_2 + \frac{1}{2}P_3$; ses coordonnées dans cette base sont $(0, 1/2, -1, 1/2)$

6. Matrice de passage d'une base à une autre

Définition 31. *Matrice de passage*

Soit un espace vectoriel E et deux bases différentes

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *et* $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', ..., e_n')$

On désigne par $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ *la matrice dont les colonnes représentent les coordonnées dans cet ordre de* $e_1', e_2', ..., e_n'$ *dans la base* $\mathcal{B}$.

Exemple: $E = R^4$, $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_4)$ est la base standard et $\varepsilon_1' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_2' = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\varepsilon_3' = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\varepsilon_4' = \varepsilon_1 + 5\varepsilon_4$.

On admet que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1', \varepsilon_2', ..., \varepsilon_4')$ est une base $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Théorème 32. *Comment changent les coordonnées d'un vecteur lorsqu'on change de base ?*

Soit un espace vectoriel E et deux bases différentes $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ *et* $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', ..., e_n')$.

Soit un vecteur v de E

On désigne par $v_{\mathcal{B}}$ *le vecteur colonne des coordonnées de v dans la base* $\mathcal{B}$

on désigne par $v_{\mathcal{B}'}$ *le vecteur colonne des coordonnées de v dans la base* $\mathcal{B}$'

alors $v_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}}$'

Exemple 33. Avec les notations de l'exemple précédent

On considère le vecteur v=$\varepsilon_1' + 2\varepsilon_2'$

v$_{\mathcal{B}'}$=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; exprimons v relativement à la base $\mathcal{B}$', v=$(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3$

donc v$_{\mathcal{B}}$=$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vérifions la formule $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Problème 1.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et sa base standard $\vec{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\varepsilon}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\alpha_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base que l'on désignera par A.

2. Montrer que les vecteurs $\vec{\beta_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne forment pas une base.

Problème 2.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ dont on admettra que les polynômes (1,X,X^2, X^3) forment une base que l'on désignera par $\mathcal{C}$.

1. Montrer que les polynômes $(1 + X, X + X^2, X^2 + X^3, X^3)$ en forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$ que l'on désignera par $\mathcal{D}$.

2. Montrer que les polynômes $(1 + X^2, X + X^3, X^2, 1 + X + 2X^2 + X^3)$ ne forment pas une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Travaux Dirigés

Exercice 14. Soit A$\in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, montrer que l'ensemble $K = \{B \in \mathcal{M}_{4,4}(\mathbb{R}), \mathrm{AB} = 0\}$, muni de l'addition des matrices et du produit des scalaires par les matrices, est un espace vectoriel.

Exercice 15. Soit dans $\mathbb{R}^4$ la famille constituée par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, que feriez-vous pour montrer qu'elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Vous terminerez cet exercice avec Maxima.

Exercice 16. Soit dans $\mathbb{R}^4$ la famille constituée par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, que feriez-vous pour montrer qu'elle est libre dans $\mathbb{R}^4$?.

Vous terminerez cet exercice avec Maxima

Exercice 17. Soit dans $\mathbb{R}^n$ une famille libre $(v_1, ..., v_p)$, montrer que la famille $(v_1, ..., v_{p-1})$ est aussi libre.

Exercice 18. Soit dans $\mathbb{R}^n$ une famille génératrice $(v_1, \ldots, v_p)$ et un vecteur w tel que w=$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots \lambda_{p-1} v_{p-1} + v_p$, montrer que la famille $(v_1, ..., v_{p-1}, w)$ est aussi génératrice.

Exercice 19. Soit dans $\mathbb{R}^4$ la famille constituée par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On voit vite qu'elle est libre dans $\mathbb{R}^4$, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 20. Soit dans $\mathbb{R}^4$ l'ensemble E=$\{x = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4, x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0\}$

a. Montrer que E est un espace vectoriel.

b. Déterminer une base et la dimension de E.

Exercice 21. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a. On pose $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \mathrm{AX} = 0\}$; on voit vite que F est un espace vectoriel,, déterminer une base de F et sa dimension.

Rappeler comment il est dénommé dans le cours.

b. On pose $G = \{M \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}), \mathrm{AM} = 0\}$; on voit vite que G est un espace vectoriel, déterminer une base de G et sa dimension.

Rappeler comment il est désigné dans le cours.

Exercice 22. Soit E=$\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}$=$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ la base standard

On pose $\varepsilon_1' = \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_2' = \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \varepsilon_3' = \varepsilon_4 + \varepsilon_1, \varepsilon_4' = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$;

1. Montrer qu'ils forment une base que l'on désignera par $\mathcal{B}'$

2. Déterminer $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

3. Soit v=$2\varepsilon_2' + 3\varepsilon_3' - 2\varepsilon_4'$, déterminer le vecteur colonne de ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$, puis, en utilisant la bonne formule, dans $\mathcal{B}$.

REVISION

Exercice 23.

Soit la matrice A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire $f_A : \mathbb{R}^6 \longmapsto \mathbb{R}^6$.

a. Montrer que le déterminant de A est nul.

b. Déterminer si f_A est injective, surjective.

e. On désigne par g l'application composée $f_A \circ f_A$; déterminer sa matrice standard, que l'on désignera par G.

f. Prouver, sans calcul que det(G)=0.

i. On désigne par h l'application composée $g \circ f_A$; déterminer sa matrice standard, que l'on désignera par H.

j. Mêmes questions pour h que les questions f,g,h,

k. On désigne par m l'application composée $h \circ f_A$; déterminer sa matrice standard, que l'on désignera par M.

l. Mêmes questions.

Exercice 24. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, sa base standard $\mathcal{B} = (\varepsilon 1, \varepsilon 2, \varepsilon 3, \varepsilon 4)$ et la famille de vecteurs $(\omega 1, \omega 2, \omega 3, \omega 4)$, définie par $\omega 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega 2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\omega 4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que ces vecteurs forment une base que l'on notera $\mathcal{B}'$.

b. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

c. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

d. Le vecteur v a pour expression $\varepsilon 1 + 2\varepsilon 2 - 2\varepsilon 3 + \varepsilon 4$; déterminer son expression dans la base $\mathcal{B}'$.

e. Le vecteur w a pour expression $3\omega 1 + 4\omega 2 - 5\omega 3 + \omega 4$; déterminer son expression dans la base $\mathcal{B}'$.

Objectifs:

1. Connaître la définition d'espace vectoriel et savoir déterminer si un ensemble est (ou n'est pas) un espace vectoriel.

2. Savoir ce qu'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel, utiliser cette notion pour reconnaître des espaces vectoriels.

3. Savoir ce qu'est une combinaison linéaire de vecteurs d'un espace vectoriel, savoir déterminer si un vecteur est combinaison linéaire de vecteurs donnés.

4. Savoir ce qu'est le sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs; savoir déterminer si une famille de vecteurs de V est génératrice de V.

5. Savoir ce qu'est une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel, savoir déterminer si une famille de vecteurs est libre.

6. Savoir ce qu'est une base, savoir ce qu'est la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie; savoir utiliser l'inclusion et la dimension.

7. Savoir déterminer si une famille de vecteurs de V est une base, en utilisant éventuellement les informations: nombre d'éléments, liberté, génératrice.

8. Savoir ce que sont les coordonnées d'un vecteur dans une base

9. Savoir ce qu'est la matrice de passage d'une base à une autre; savoir la trouver.

8. Activité informatique Maxima

Exercice 25. On considère l'espace vectoriel E=$\mathbb{R}^6$ et sa base standard B=(ε_1,ε_2,ε_3, ε_4, ε_5,ε_6)

1. Soit la famille de vecteurs:

$v_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6$

$v_2 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 4\varepsilon_4 + 5\varepsilon_5 + 6\varepsilon_6$

$v_3 = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 5\varepsilon_4 + 6\varepsilon_5 + 7\varepsilon_6$

$v_4 = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 5\varepsilon_3 + 6\varepsilon_4 + 7\varepsilon_5 + 8\varepsilon_6$

$v_5 = \varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + 7\varepsilon_4 + 8\varepsilon_5 + 9\varepsilon_6$

$v_6 = \varepsilon_1 + 6\varepsilon_2 + 7\varepsilon_3 + 8\varepsilon_4 + 9\varepsilon_5 + 10\varepsilon_6$

Déterminer à l'aide de Maxima si c'est une base de E

Et sans Maxima ?

2. Soit la famille de vecteurs:

$w_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6$

$w_2 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 8\varepsilon_4 + 16\varepsilon_5 + 32\varepsilon_6$

$w_3 = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 6\varepsilon_3 + 12\varepsilon_4 + 24\varepsilon_5 + 48\varepsilon_6$

$w_4 = \varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + 8\varepsilon_3 + 16\varepsilon_4 + 32\varepsilon_5 + 64\varepsilon_6$

$w_5 = \varepsilon_1 + 5\varepsilon_2 + 10\varepsilon_3 + 20\varepsilon_4 + 40\varepsilon_5 + 80\varepsilon_6$

$w_6 = \varepsilon_1 + 6\varepsilon_2 + 12\varepsilon_3 + 24\varepsilon_4 + 48\varepsilon_5 + 96\varepsilon_6$

Déterminer à l'aide de Maxima si c'est une base de E

et sans Maxima ?

3. Soit la famille de vecteurs:

$z_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6$

$z_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6$

$z_3 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + 8\varepsilon_4 + 16\varepsilon_5 + 32\varepsilon_6$

$z_4 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 - 8\varepsilon_4 + 16\varepsilon_5 - 32\varepsilon_6$

$z_5 = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 + 9\varepsilon_3 + 27\varepsilon_4 + 81\varepsilon_5 + 243\varepsilon_6$

$z_6 = \varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 9\varepsilon_3 - 27\varepsilon_4 + 81\varepsilon_5 - 243\varepsilon_6$

Montrer à l'aide de Maxima que c'est une base de E: B'

4. Et la famille (z_3,z_6,z_1, z_4, z_5,z_2) ? B''

et sans Maxima ?

5. Dans le cas où on a affaire à une base donner chaque fois les deux matrices de passage

a. de la base standard à la nouvelle base

b de la nouvelle base à la base standard

6. Soit le vecteur $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 5\varepsilon_3 + 10\varepsilon_4 + 20\varepsilon_5 + 40\varepsilon_6$

déterminer avec Maxima ses coordonnées dans chacune des « nouvelles bases » B' et B''

9. Problèmes de révision

Ce premier problème a pour objectif de montrer que les connaissances du cours permettent parfois d'éviter de longs calculs.

Exercice 26.

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base standard $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$ définie par les données suivantes:

$f(\varepsilon_1)$=ε_2 ,$f(\varepsilon_2)$= ε_1+ ε_3, $f(\varepsilon_3)$=ε_2+ε_4, $f(\varepsilon_4)$=ε_3.

a. Déterminer la matrice standard de f , que l'on désignera par M.

b. Déterminer le déterminant de M.

c. Déterminer (si possible sans calcul) le noyau de M .

d. Montrer (si possible sans nouveau calcul) que les vecteurs colonnes de M sont linéairement indépendants.

e. Montrer (si possible sans calcul) que les vecteurs $v_1 = \varepsilon_2$, v$_2$=ε_1+ ε_3, v$_3$=ε_2+ε_4, $v_4 = \varepsilon_3$ forment une base de $\mathbb{R}^4$ que l'on désignera par $\mathcal{B}'$.

f. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

g. Exprimer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ en fonction de v_1, v_2, v_3, v_4.

h. En déduire $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

i. Déterminer si M est inversible, et si oui déterminer (si possible sans calcul) M^{-1}.

j. Soit b=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, justifier l'existence (ou la non-existence) d'un vecteur X de $\mathbb{R}^4$ tel que MX=b.

k. Si X existe, le déterminer avec un minimum de calculs.

Solution.

a. La matrice standard de f est celle dont les colonnes contiennent les images des vecteurs de la base standard donc M=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Nous allons développer det(M) suivant la première colonne (car il n ' y a qu'un terme non nul):

det(M)=1(-1)$^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; on continue suivant la première ligne $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; d'où det(M)=(-1)$\times(-1) = 1$.

c. Dans ce cas M est inversible, donc injective, d'où Ker(M)=$\{X, \text{MX} = (0)\}$ ne contient qu'un élément le vecteur nul.

d. Pour savoir si les vecteurs colonnes de M, que je désignerai par M_1,M$_2$,M_3,M$_4$, sont liées ou pas on considère des scalaires (a,b,c,d) tels que aM$_1 + b$M$_2$+cM_3+dM$_4$=(0). Or aM$_1 + b$M$_2$+cM_3+dM$_4$=M$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$; donc nus avons supposé que M$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mais comme M est injective il en découle que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où ces vecteurs colonnes sont libres.

e. Les vecteurs $v_1 = \varepsilon_2$, v$_2$=ε_1+ ε_3, v$_3$=ε_2+ε_4, $v_4 = \varepsilon_3$ sont justement les vecteurs colonnes de M, nous venons de montrer qu'ils sont libres, il s'agit de quatre vecteurs libres dans $\mathbb{R}^4$, qui est de dimension 4, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

f. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est la matrice dont les colonnes représentent dans la base $\mathcal{B}$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$, donc c'est exactement la matrice M.

g. Nous savons que $v_1 = \varepsilon_2$, v$_2$=ε_1+ ε_3, v$_3$=ε_2+ε_4, $v_4 = \varepsilon_3$, ce qui nous donne déjà $\varepsilon_2 = v_1$ et ε_3=v_4; pour les deux autres il suffit d'éliminer ε_3 entre les deux égalités : v$_2$=ε_1+ ε_3 et ε_3=v_4, d'où $\varepsilon_1 = v_2$-v_4 et, de même, $\varepsilon_4 = -v_1 + v_3$.

h. Pour construire $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ il suffit de savoir exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}'$, c'est juste ce que nous venons de faire:

$\varepsilon_1 = v_2$-v_4, $\varepsilon_2 = v_1$, ε_3=v_4, $\varepsilon_4 = -v_1 + v_3$; donc nous connaissons les colonnes de $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$: donc $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

i. Nous savons, depuis le c que M est inversible (sinon elle est inversible car c'est une matrice de changement de base); et nous savons aussi(cf cours) que $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$=$\Big($ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$')$^{-1}$, et $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$=M; donc $M^{-1} = \Big($ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$')$^{-1}$=$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque: sinon il fallait poser $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \end{pmatrix}$ et résoudre ce système pour en déduire M^{-1}.

j. Comme M est inversible MX=b est équivalent à X=M^{-1}b.

k. Donc X=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 1 \\ 4 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 27.

Toutes les matrices considérées sont dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 34. *Une matrice M=(a_{ij})∈$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite magique lorsque les huit sommes suivantes sont égales:*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} \\ a_{11}+a_{21}+a_{31} \\ a_{12}+a_{22}+a_{32} \\ a_{13}+a_{23}+a_{33} \\ a_{11}+a_{22}+a_{33} \\ a_{31}+a_{22}+a_{13} \end{array}\right. \textit{sont égales.}$$

Une matrice M=(a_{ij})∈$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est symétrique lorsque $M = {}^tM$ et antisymétrique lorsque $M = -{}^tM$.

On définit les trois matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = {}^t A$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Sont-elles magiques ? symétriques ? antisymétriques ?

2. Soit M=(a_{ij})∈$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ montrer que $M' = \frac{M+{}^tM}{2}$ et $M'' = \frac{M-{}^tM}{2}$; les utiliser pour établir que toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique; montrer que cette décomposition est unique.

solution:

i. on remarque que M' est symétrique, car égale à sa transposée et M" antisymétrique car opposée à sa transposée.

ii. l'unicité ? Si M=S+A, où S est symétrique et A antisymétrique, alors ^{t}M=S-A, d'où 2S=M+^{t}M et 2A=M-^{t}M

donc S=M' et A=M", ce qui établit l'unictié

3. Soit $\mathcal{MAG}$ l'ensemble des matrices magiques, montrer que

i) $\mathcal{MAG}$ est un espace vectoriel

voir caractérisation des sous ev

ii) la transposée d'une matrice magique est une matrice magique

voir def des matrices magiques et faire un schéma pour se convaincre

iii) si $M \in \mathcal{MAG}$ il en est de même pour M' et M" (définies au dessus).

découle du i)

4. Montrer que les matrices qui sont à la fois magiques et antisymétriques forment un espace vectoriel de dimension 1 dont vous déterminerez une base, que l'on désignera par $\mathcal{A}$.

Soit M magique et antisymétrique elle a nécessairement l'air suivant :$\begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & 0 & -a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}$=a$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où on prend $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que les matrices qui sont à la fois magiques et symétriques et dont la trace est nulle forment un espace vectoriel de dimension 1 dont vous déterminerez une base que l'on désignera par $\mathcal{S}$.

Soit M magique et symétrique et de trace nulle, elle a nécessairement l'air suivant :$\begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ b & 2a+2b & -2a-3b \\ -a-b & a & -3a-2b \end{pmatrix}$, ce qui vérifie 6 conditions et il faut en plus que -6a-6b=0, -3a-3b=0, d'où il faut b=-a; c'est à dire $\begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; on posera $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Soit une matrice M, magique et symétrique, dont la trace est égale à t, montrer qu'elle est la somme d'un multiple de $\mathcal{S}$ et d'un multiple de C.

M=(M-tC/3)+tC/3 et (M-tC/3) vérifie les hyppothèses du 5 donc c'est un multiple de $\mathcal{S}$.

7. En déduire une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{MAG}$ et sa dimension.

synthèse du 2,3,4 et du 6

Si M est magique , elle est la somme d'une symétrique M' et d'une antisymétrique M" (2), celles-ci sont magiques (3), la première est une combinaison linéaire de S et C, la seconde est un multiple de $\mathcal{A}$, donc M est une combinaison linéaire de ces trois matrices; donc elles forment une famille génératrice de $\mathcal{MAG}$.

Soient (a,c,s) telles que aC+cC+sS=(0) alors (0) est la somme d'une symétrique aC+sS et d'une antitymétrique a$\mathcal{A}$; or (0)=(0)+(0), et la décomposition entre symétrique et antisymétrique est unique donc aA=(0) et cC+sS=(0), d'où a=0

pour le reste on a cC+sS=$\begin{pmatrix} c & c & c \\ c & c & c \\ c & c & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & -s & 0 \\ -s & 0 & s \\ 0 & s & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+s & c-s & c \\ c-s & c & c+s \\ c & c+s & c-s \end{pmatrix}$, si cette matrice est nulle, c est nul, et alors s aussi

nous avons donc une base de $\mathcal{MAG}$: $\mathcal{A}$, C, S.

et donc sa dimension :3.

8. Montrer que (A,B,C) forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{MAG}$; comme la dimension de $\mathcal{MAG}$ est 3, il suffit de montrer que cette famille est génératrice, et pour cela qu'elle engendre A, B, C:

Or

$\mathcal{A} = (1/2)A - (1/2)B + 0C$

$\mathcal{S} = (-1/2)A + (-1/2)B + 0C$

$C = 1C$

9. Déterminer les deux matrices de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ est son inverse $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Algèbre linéaire d'un point de vue algorithmique

chapVI. NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINEAIRE

(1 séance cours; 1.5 séance td)

1. Espace des lignes et espace des colonnes d'une matrice

Définition 1. ***Vecteurs lignes et vecteurs colonnes d'une matrice***

Soit la matrice A $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & ... & ... & a_{1p} \\ ... & & & & & & \\ ... & & & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & . & ... & ... & a_{\mathrm{ip}} \\ ... & & & & & & \\ ... & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & . & ... & ... & a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix}$.

1. Les vecteurs $\vec{l_1} = (a_{11}, ..., a_{1p})$, $\vec{l_2} = (a_{21}, ..., a_{2p})$, .., $\vec{l_i} = (a_{i1}, ..., a_{\mathrm{ip}})$,..,$\vec{l_n} = (a_{n1}, ..., a_{\mathrm{np}})$ ***sont appelés vecteurs-lignes de A.***

Les vecteurs $\vec{c_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ ... \\ a_{i1} \\ ... \\ ... \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, ..,$\vec{c_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ ... \\ ... \\ a_{\mathrm{ij}} \\ ... \\ ... \\ a_{\mathrm{nj}} \end{pmatrix}$,..,$\vec{c_p} = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ ... \\ ... \\ a_{\mathrm{ip}} \\ ... \\ ... \\ a_{\mathrm{np}} \end{pmatrix}$ ***sont appelés vecteurs-colonnes de A.***

2. Le sous-espace de $\mathbb{R}^p$ ***engendré par les vecteurs-lignes de A est appelé espace des lignes de A.***

Le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ ***engendré par les vecteurs-colonnes de A est appelé espace des colonnes de A (noté col(A)).***

Définition 2. ***Noyau d'une application linéaire***

Soit f une application linéaire de matrice standard $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{np}}(\mathbb{R})$, on appelle noyau de f, noté Ker(f), l'espace des solutions de l'équation f($\vec{x}$)=$\vec{0}$, c'est à dire du système d'équations AX=0, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Exercice 1. **Soit** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et f de matrice standard A.**

On désignera par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ **la base standard de** $\mathbb{R}^4$**.**

a. Déterminer Ker(f).

b. Déterminer une base de Ker(f).

c. Montrer que col(A) est de dimension 2 et en déterminer une base.

Solution.

a. on résoud f(x)=(0):

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **donc Ker(f)**$=\{(2x_2$**-x**$_3$**,x**$_2, x_3, 0), (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} = \{x_2(2, 1, 0, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0, 0), (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} = \{x_2(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + x_3\varepsilon_3, (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} =$ **Vect**$(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_3)$**; d'où**

une famille génératrice de Ker(f):$(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

b. Pour savoir si cette famille est une base il reste à vérifier si elle est libre.

c. les 3 premières colonnes sont des multiples de la première; la première et la quatrième sont linéairement indépendantes.

Remarque 3.

Lorsqu'on écrit que Ker(f)=Vect($2\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_3$) cela signifie que Ker(f) est l'ensemble de TOUS LES VECTEURS de la forme $\{a(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)+b\varepsilon_3\}$.

Ne pas confondre l'ensemble de ces vecteurs avec la simple liste de sa base

Définition 4. ***Image d'une application linéaire***

Soit f une application linéaire de matrice standard $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{np}}(\mathbb{R})$, on appelle image de f, notée Im(f), l'espace des vecteurs de la forme $\vec{y}$=f($\vec{x}$), c'est à dire l'ensemble des vecteurs $\vec{b}$, tels que le système d'équations AX=b est résoluble, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Avertissement 5.

Ce qui suit concerne l'injectivité, la surjectivité , la bijectivité

si vous ne savez pas , vous êtes mal

très mal

Question 6.

Soit une application f de A vers B

lire la suite de propositions

i) tout élément y de B possède au moins un antécédent

ii) si deux éléments x et x' de A ont la même image f(x)=f(x') ils sont forcément égaux

iii) si deux éléments x et x' de A sont égaux alors leurs images f(x) et f(x') sont égales

iv) tout élément x de A possède une seule image f(x)

v) tout élément y de B possède un et un seul antécédent x dans A

Déterminer ce qui exprime l'injectivité de f, ce qui exprime la surjectivité de f , ce qui exprime la bijectivité de f et ce qui est sans intérêt.

Solution. Soit une application f de A vers B

i) tout élément y de B possède au moins un antécédent SURJECTIVITE

ii) si deux éléments x et x' de A ont la même image f(x)=f(x') ils sont forcément égaux INJECTIVITE

iii) si deux éléments x et x' de A sont égaux alors leurs images f(x) et f(x') sont égales *banalité*

iv) tout élément x de A possède une seule image f(x) *banalité*

v) tout élément y de B possède un et un seul antécédent x dans A BIJECTIVITE

Théorème 7.

Soit $A \in \mathcal{M}_{\text{np}}(\mathbb{R})$ ***et f l'application linéaire de*** $\mathbb{R}^p$ ***vers*** $\mathbb{R}^n$ ***dont la matrice standard est A alors***

1. L'espace des colonnes de A est égal à $\mathbb{R}^n$ ***si et seulement si f est surjective.***

2. Le noyau Ker(f) est égal à $\{0\}$ ***si et seulement si f est injective.***

3. AX=b admet une solution (au moins) si et seulement si b appartient à l'espace des colonnes de A.

4. Lorsque f n'est pas injective la résolution du système AX=0 permet d'obtenir une base du noyau de f.

5. Soit x_0 ***un vecteur solution du système AX=b et*** $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_t)$ ***une base de Ker(f*** $_A$***), alors l'ensemble des solutions du système AX=b est*** $\{x_0 + \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots, \lambda_t\vec{v}_t, (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)\,\text{réels}\}$***.***

6. L'image de f, Im(f), est engendrée par les vecteurs colonnes de la matrice A

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **et l'application linéaire f:** $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ **dont la matrice standard est A.**

On désigne ici par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ **la base standard de** $\mathbb{R}^4$

a. Déterminer si f est surjective .

b. Déterminer si f est injective .

c. Déterminer un vecteur b tel que le système $\mathrm{AX} = b$ **possède des solutions et un vecteur b tel que ce système n'en possède pas.**

d. Soit le système $\mathrm{AX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**; déterminer une solution et en vous aidant des résultats de l'exercice précédent déterminer l'ensemble des solutions.**

Solution.

a. échelonnons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **on voit que le système associé n'a pas toujours de solutions, donc pas surjective.**

b. On voit immédiatement sur les colonnes 1 et 3 que f($\vec{e1}$)=f($\vec{e3}$), donc f n'est pas injective.

Le noyau de f se trouve en résolvant $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$**; on obtient ker(f)=Vect(2ε_1+ε_2,$\varepsilon_1 - \varepsilon_3$).**

c. Aidons-nous de la première colonne f(ε_1)=$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Si on regarde bien les colonnes de la matrice on voit que les colonnes $\mathbf{A}_2$ et A_3 sont des multiples de A_1 donc les colonnes sont des combinaisons linéaires de A_1 et de A_4.

Donc les images sont des combinaisons linéaires de $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ et de ε_4.

Alors si on prend le vecteur ε_1 il ne peut être dans l'image.

d. Le calcul montre qu'une solution est $\varepsilon_1 + \varepsilon_4$.

Mais aussi tout vecteur de la forme $\varepsilon_1 + \varepsilon_4$ +$\vec{v}$,où $\vec{v}$ appartient à Ker(f), aura pour image $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$.

Est-ce tout ?

réciproque :

si f($\vec{x}$)=f($\varepsilon_1 + \varepsilon_4$) alors f($\vec{x}$-($\varepsilon_1 + \varepsilon_4$))=$\vec{0}$ donc $\vec{x}$-($\varepsilon_1 + \varepsilon_4$) appartient au noyau

Conclusion: nous avons montré par double inclusion que $\{x,\, f(\vec{x}) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = \{\varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \vec{v}\,, \vec{v} \in \mathrm{Ker}(f)\}$.

Question: cet ensemble est-il un espace vectoriel ?

Revoir la caractérisation des sous-espaces vectoriels

Théorème 8. *« les lignes »*

Soit une matrice A et l'application linéaire f.

Les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas le noyau de l'application f;

Les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas l'espace des lignes de la matrice.

Les lignes non nulles de la matrice échelonnée réduite forment une base de l'espace des lignes de A.

Théorème 9.

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{np}}(\mathbb{R})$ ***alors la dimension de l'espace des lignes de A est égale à la dimension de l'espace des colonnes de A; cette dimension sera appelée le rang de A et notée rg(A); c'est aussi la dimension de Im(f); on la note alors aussi rang(f).***

Définition 10. ***Soit f une application linéaire de*** $\mathbb{R}^p$ ***vers*** $\mathbb{R}^n$***, on appelle nullité de f la dimension du noyau de f: dim(Ker(f)).***

Attention : TRES IMPORTANT

Théorème 11. *Théorème du rang*

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{np}}(\mathbb{R})$ ***et l'application linéaire f de matrice standard A, alors rg(f)+dim(Ker(f))=p.***

Exercice 3. Soit A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{-1} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On désigne par f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$

vers $\mathbb{R}^4$ dont la matrice standard est A.

On désigne par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ la base standard de $\mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le noyau de f.

b. En déduire le rang de f.

c. Déterminer une base de col(A).

Solution.

a. Il s'agit de résoudre le système $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{-1} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de matrice associée $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1} & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; réduisons:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \mathbf{-1} & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**; d'où le noyau** $\{(x4, x4, \mathbf{-x4,x4})\} = \mathrm{Vect}(1, 1, \mathbf{-1,1}) = \mathrm{Vect}((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4))$**; donc le noyau est de dimension 1**

b. Par suite le rang est 4-1=3

c. Une base de col(A) est formée par les 3 premiers vecteurs colonnes, puisqu'ils sont indépendants.

Une base de Im(f) est donc $(\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3 + \varepsilon_4)$.

Questions:

1. Comment montrer facilement que f n'est pas surjective ?

2. Comment montrer facilement que ε_4 est dans Im(f) ?

3. Comment tester si $\varepsilon_1 + \varepsilon_3$ est dans Im(f) ?

4. Comment montrer facilement que $\varepsilon_1 + \varepsilon_3$ n'est pas dans Ker(f) ?

Théorème 12. ***Le cas des matrices carrées***

Soit $A \in \mathcal{M}_{\text{nn}}(\mathbb{R})$***, alors les affirmations suivantes sont équivalentes***

1. ***A est inversible***
2. ***rg(A)=n***
3. ***null(f*** $_A$***)=0***

Exercice 4. Soit A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**. (n>1).**

On désigne par f l'application linéaire de $\mathbb{R}^6$ **vers** $\mathbb{R}^6$ **dont la matrice standard est A.**

On désigne par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, ..., \varepsilon_6)$ **la base standard de** $\mathbb{R}^6$

a. Montrer que la résolution du système AX=0 conduit à une solution unique que l'on trouvera.

b. Déduire le rang de A.

c. Déterminer une base (simple !) de col(A).

Solution.

a. A=J-I, où $=J=$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **et I est la matrice unité; donc AX=(0)**

équivaut à JX=X; mais JX= $\begin{pmatrix} x1 + x2 + x3 + ... + x6 \\ x1 + x2 + x3 + ... + x6 \\ ... \\ ... \\ x1 + x2 + x3 + ... + x6 \end{pmatrix}$**, donc JX=X entraine** $x1 = x2 = x3 = ... = x6$**. Désignons par u cette valeur commune**

X=$\begin{pmatrix} u \\ \cdots \\ \cdots \\ u \end{pmatrix}$ et JX=$\begin{pmatrix} \text{nu} \\ \text{nu} \\ \cdots \\ \text{nu} \end{pmatrix}$, donc AX=(0) entraîne que u=6u, d'où u=0, et par suite X=(0)

b. Donc rang(A)=6.

c. col(A) est un sous-ev de dimension 6 dans R^6, c'est donc R^6.

Problème 1.

Soit A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^4$ de matrice standard A; on désigne par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base standard de $\mathbb{R}^3$ et par $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ la base standard de $\mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le noyau de f.

b. En déduire le rang de f.

c. Déterminer une base de Im(f).

Problème 2.

Soit A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ vers $\mathbb{R}^4$ de matrice standard A; on désigne par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_5)$ la base standard de $\mathbb{R}^4$ et par $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ la base standard de $\mathbb{R}^4$.

a. Déterminer le noyau de f.

b. En déduire le rang de f.

c. Déterminer une base de Im(f).

2. Changements de bases

Remarque 13. Coordonnées d'un vecteur dans une base

Soit V un espace vectoriel de dimension n et une base $B=(\vec{v_1},\ldots,\vec{v_t})$**.**

Un vecteur $\vec{v}\in V$ **s'écrit de manière unique** $\vec{v}=\lambda_1\vec{v_1}+\ldots\lambda_n\vec{v_n}$**, les réels** $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ **sont appelés les coordonnées de** $\vec{v}$ **dans la base B, on note** $(\vec{v})_B=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \ldots\\ \ldots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$**.**

Définition 14. ***Matrice de passage de la base B' à la base B***

Soit V un espace vectoriel de dimension n et deux bases $B=(\vec{u_1},\ldots,\vec{u_n})$ ***(« l'ancienne base ») et*** $B'=\left(\vec{u'_1},\ldots,\vec{u'_n}\right)$ ***(« la nouvelle base »)***

On désigne par $\boldsymbol{P}_{B,B'}$ ***la matrice*** $\left(\left(\vec{u'_1}\right)_B,\ \left(\vec{u'_2}\right)_B,\ \ldots,\ \left(\vec{u'}_n\right)_B\right)$***, appelée « matrice de passage de B à B').***

Exemple 15. Soit R^4 **et**

1. la base standard $\mathcal{B}$ **formée de** $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

2. la base $\mathcal{C}$ **formée de** $\gamma_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\gamma_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\gamma_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

La matrice de passage $P_{\mathcal{BC}}$ **est** $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$

3. la base $\mathcal{D}$ **formée de** $\delta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\delta_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\delta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\varepsilon_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

La matrice de passage $P_{\mathcal{BD}}$ **est** $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$

4. Si on veut maintenant la matrice $P_{\mathcal{CD}}$ **il faut exprimer les vecteurs de** $\mathcal{D}$ **en fonction de ceux de** $\mathcal{C}$

bien sûr $\varepsilon_4=\varepsilon_4$

$$\delta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=-\gamma_3+2\varepsilon_4=$$

$$\delta_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=-\gamma_2+2\gamma_3-2\varepsilon_4$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\gamma_1 + 2\gamma_2 - 2\gamma_3 + 2\varepsilon_4$$

D'où $P_{\mathcal{CD}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 16. *Formule de changement de base*

Soit V un espace vectoriel de dimension n et deux bases $B = (\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n})$ ***et*** $B' = \left(\vec{u_1'}, \ldots, \vec{u_n'}\right)$***.***

Quel que soit $\vec{v} \in V$***,*** $(\vec{v}\,)_B = \boldsymbol{P}_{B,B'}(\vec{v}\,)_{B'}$***.***

Exercice 5. Soit la base standard B=$(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_4)$ **de** $\mathbb{R}^4$**.**

a. Montrer que les vecteurs $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **forment une base B' de** $\mathbb{R}^4$**.**

b. Parmi les deux matrices $\mathbf{P}_{B,B'}$ **et** $\mathbf{P}_{B',B}$ **l'une des deux est immédiate, laquelle ? que vaut-elle ?**

Solution.

a. On calcule le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & 1 \\ 0 & \mathbf{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{-1} & 1 \\ \mathbf{-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{3}.$

b. $\mathbf{P}_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Proposition 17.

Soit V un espace vectoriel de dimension n et deux bases $B = (\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_n})$ ***et*** $B' = \left(\vec{u'}_1, \ldots, \vec{u'}_n\right)$***.***

$\boldsymbol{P}_{B,B'}\boldsymbol{P}_{B',B} = \boldsymbol{I}_n$***.***

Exercice 6. (suite du précédent)

Calculer l'autre matrice de passage.

Solution.

$\mathbf{P}_{B',B}$ **est l'inverse de** $\mathbf{P}_{B,B'}$=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**; pour la trouver on pose le système** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$**.**

D'où $\mathbf{P}_{B',B}$=$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{-2} \\ 1 & 1 & \mathbf{-2} & 1 \\ 1 & \mathbf{-2} & 1 & 1 \\ \mathbf{-2} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Proposition 18.

Soit V un espace vectoriel de dimension n et trois bases $B=(\vec{u}_1,...,\vec{u}_n)$***,*** $B'=\left(\vec{u'}_1,...,\vec{u'_n}\right)$ ***et*** $B''=\left(\vec{u''}_1,...,\vec{u''_n}\right)$

$\boldsymbol{P}_{B,B''}$=$\boldsymbol{P}_{B,B'}\boldsymbol{P}_{B',B''}$***.***

Exercice 7. Soit la base standard B=$(\vec{\varepsilon}_1,...,\vec{\varepsilon}_4)$ **de** $\mathbb{R}^4$**.**

On désigne par B' la base $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\vec{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\vec{v}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**.**

Soit le vecteur $\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$**, déterminer ses coordonnées dans la base B' en utilisant la bonne formule.**

Solution. $\mathbf{P}_{B',B}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$**; c'est à dire** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{-2} \\ 1 & 1 & \mathbf{-2} & 1 \\ 1 & \mathbf{-2} & 1 & 1 \\ \mathbf{-2} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$**, bizarre mais vrai**

Exercice 8. Soit la base standard B=$(\vec{\varepsilon}_1,...,\vec{\varepsilon}_4)$ **de** $\mathbb{R}^4$**.**

On désigne par B' la base $\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\vec{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\vec{v}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\vec{v}_4=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**.**

Soit le vecteur $\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$**, déterminer ses coordonnées dans la base B' en utilisant la bonne formule.**

Solution. $\mathbf{P}_{B',B}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix}$**; c'est à dire** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{-2} \\ 1 & 1 & \mathbf{-2} & 1 \\ 1 & \mathbf{-2} & 1 & 1 \\ \mathbf{-2} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \\ -8/3 \\ \mathbf{1/3} \end{pmatrix}$**.**

Théorème 19. ***Formule de changement de base pour les matrices***

Soit V un espace vectoriel de dimension n et deux bases $B = (\vec{u_1}, ..., \vec{u_n})$ ***et*** $B' = \left(\vec{u_1'}, ..., \vec{u_n'}\right)$***.***

On considère une application linéaire f de V vers V et sa matrice A relativement à la base B, alors sa matrice relativement à la base B' est A'= $\boldsymbol{P}_{B',B} A \boldsymbol{P}_{B,B'}$***.***

(on rappelle que l'image z=f(v) d'un vecteur v s'exprime dans la base B: $z_B = \mathrm{Av}_B$ ***et*** $z_B' = \boldsymbol{P}_{B',B} A \boldsymbol{P}_{B,B'} \boldsymbol{v}_{B'}$***).***

Exercice 9. Soit la base standard B=$(\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_4)$ **de** $\mathbb{R}^4$**.**

On désigne par B' la base $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit l'application linéaire f de V vers V, qui est représentée dans la base B par la matrice A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**; déterminer la matrice A' qui la représentera dans la base B'**

Solution. **A'=** $\mathbf{P}_{B',B} A \mathbf{P}_{B,B'}$ **c'est à dire**

A'= $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{-2} \\ 1 & 1 & \mathbf{-2} & 1 \\ 1 & \mathbf{-2} & 1 & 1 \\ \mathbf{-2} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{-2} \\ 1 & 2 & \mathbf{-6} & 1 \\ 1 & \mathbf{-4} & 3 & 1 \\ \mathbf{-2} & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$
$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Nous verrons dans le chapitre sur la diagonalisation quel est l'usage réel de ces changements de base.

Problème 3.

Soit R^4**, avec la base standard** $\mathcal{B}$ **formée de** $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et la base $\mathcal{C}$ **formée de** $\gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et la base $\mathcal{D}$ **formée de** $\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \varepsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{DC}}$.

2. Soit Le vecteur $v = \mathbf{2}\gamma_1 - \gamma_2 + 3\gamma_3 - \varepsilon_4$

Ecrire ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ **c'est à dire** $(\vec{v})_{\mathcal{C}}$

Calculer ses coordonnées dans la base $\mathcal{D}$ **c'est à dire** $(\vec{v})_{\mathcal{D}}$.

Problème 4.

Avec les mêmes données qu'au-dessus

1. Déterminer $P_{\mathcal{CB}}$.

2. Soit le vecteur w=$\mathbf{2}\varepsilon_1$**-** $\beta_2 + 3\varepsilon_3 - \varepsilon_4$**; Calculer ses coordonnées dans la base** $\mathcal{C}$**.**

3. Soit l'application linéaire f de R^4 **vers** R^4 **dont la matrice, relativement à la base standard** $\mathcal{B}$ **est A=**$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**; poser les opérations nécessaires pour calculer la matrice de f relativement à la base** $\mathcal{C}$**.**

Faire exécuter par maxima.

Travaux Dirigés

Exercice 10.

Soit la matrice A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **et l'application linéaire** $f_A : \mathbb{R}^6 \longmapsto \mathbb{R}^6$.

a. Montrer que le déterminant de A est nul.

b. Déterminer si f_A **est injective, surjective.**

c. Déterminer le noyau de f_A **, une base et sa dimension.**

d. En déduire la dimension de Im(f_A**) et en déterminer une base.**

e. On désigne par g l'application composée $f_A \circ f_A$ **; déterminer sa matrice standard, que l'on désignera par G.**

f. Prouver, sans calcul que det(G)=0.

g. Déterminer le noyau de g , une base et sa dimension.

h. En déduire la dimension de Im(g) et en déterminer une base.

i. On désigne par h l'application composée $g \circ f_A$ **; déterminer sa matrice standard, que l'on désignera par H.**

j. Mêmes questions pour h que les questions f,g,h,

k. On désigne par m l'application composée $h \circ f_A$ **; déterminer sa matrice standard, que l'on désignera par M.**

l. Mêmes questions.

Exercice 11.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$**, sa base standard** $\mathcal{B} = (\varepsilon 1, \varepsilon 2, \varepsilon 3, \varepsilon 4)$ **et la famille de vecteurs** $(\omega 1, \omega 2, \omega 3, \omega 4)$**, définie par** $\omega 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega 2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\omega 3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\omega 4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que ces vecteurs forment une base que l'on notera $\mathcal{B}'$.

b. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

c. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

d. Le vecteur v a pour expression $\varepsilon 1 + 2\varepsilon 2 - 2\varepsilon 3 + \varepsilon 4$**; déterminer son expression dans la base** $\mathcal{B}'$.

e. Le vecteur w a pour expression $3\omega 1 + 4\omega 2 - 5\omega 3 + \omega 4$**; déterminer son expression dans la base** $\mathcal{B}$.

f. L'application linéaire f a pour matrice dans la base standard la matrice A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$**; ce qui signifie que l'image z d'un vecteur v s'exprime dans la base B comme suit:** $z_B = \mathrm{A}\mathrm{v}_B$**; comment s'expriment les coordonnées** $\mathbf{z}_{B'}$ **de z dans la base B' en fonction des coordonnées** $\mathbf{v}_{B'}$ **de v dans la base B' ?**

On trouvera une matrice que l'on désignera sous le nom de matrice de f dans la base B'; si on la nomme A' exprimer A' en fonction de A.

Exercice 12.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$**, sa base standard** $\mathcal{B} = (\varepsilon 1, \varepsilon 2, \varepsilon 3, \varepsilon 4)$ **et l' application linéaire de** $\mathbb{R}^4$ **vers** $\mathbb{R}^4$ **de matrice standard A=**$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau de f et une base de celui-ci.

2. Déterminer la dimension du noyau de f.

3. En déduire la dimension de l'image et une base de celle-ci.

4. Montrer que la concaténation de ces deux bases donne une base de $\mathbb{R}^4$, que vous appellerez $\mathcal{B}'$.

5. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

6. Calculer (éventuellement par Maxima) la matrice $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

7. Déterminer, sans utiliser la formule du cours, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$

(vous penserez à la signification des colonnes de la matrice d'une application relativement à une base)

8. Résoudre la question au moyen de la formule du cours (éventuellement avec Maxima).

Exercice 13.

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, sa base standard $\mathcal{B} = (\varepsilon 1, \varepsilon 2, \varepsilon 3, \varepsilon 4)$ et l' application linéaire de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$ de matrice standard A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau de f et une base de celui-ci.

2. Déterminer la dimension du noyau de f.

3. En déduire la dimension de l'image et une base de celle-ci.

4. Montrer que la concaténation de ces deux bases ne donne pas une base de $\mathbb{R}^4$.

Objectifs:

1. Savoir ce qu'est l'espace des lignes, l'espace des colonnes d'une matrice.

2. Savoir la signification des colonnes d'une matrice représentant une application linéaire relativement à une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée.

3. Savoir ce qu'est le noyau d'une application linéaire, savoir que le noyau est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

4. Savoir ce qu'est l'image d'une application linéaire, savoir que c'est un sous-espace de l'espace d'arrivée.

5. Savoir ce qu'est le rang d'une application linéaire, savoir ce qu'est la nullité d'une application linéaire.

6. Connaître le théorème du rang et savoir l'utiliser pour découvrir le rang ou la nullité.

7. Savoir ce qu'est la matrice de passage d'une base à une autre.

8. Savoir ce que sont les coordonnées d'un vecteur dans une base.

9. Savoir que les matrices de passage sont inversibles.

10. Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base à partir des anciennes et de la matrice de passage.

11. Savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans une nouvelle base à partir de la matrice dans l'ancienne et de la matrice de passage.

8. Activité informatique Maxima

le rang d'une matrice M s'obtient avec « rank(M) »

le noyau de la matrice M s'obtient avec « nullspace(M) »

l'espace des colonnes de M s'obtient avec « columnspace(M) »

Exercice 14.

Soit l'espace E=$\mathbb{R}^6$ et sa base standard $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6)$

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^6$ vers $\mathbb{R}^6$ de matrice standard $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a. Avec Maxima étudier les rangs de f,f^{2}, ..., jusqu'à être sûr que ces valeurs sont stationnaires

b. (raisonnement) Montrer que les images de ces applications linéaires sont incluses les unes dans les autres

c. (raisonnement) Montrer que les noyaux forment une suite de sous-espaces vectoriels inclus les uns dans les autres.

9. Problèmes de révision

Ce premier problème a pour objectif de montrer que les connaissances du cours permettent parfois d'éviter de longs calculs.

Exercice 15.

Soit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base standard $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$ définie par les données suivantes:

$f(\varepsilon_1)=\varepsilon_2$,$f(\varepsilon_2)=\varepsilon_1+\varepsilon_3$, $f(\varepsilon_3)=\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $f(\varepsilon_4)=\varepsilon_3$.

a. Déterminer la matrice standard de f , que l'on désignera par M.

b. Déterminer le déterminant de M.

c. Déterminer (si possible sans calcul) le noyau de M .

d. Montrer (si possible sans nouveau calcul) que les vecteurs colonnes de M sont linéairement indépendants.

e. Montrer (si possible sans calcul) que les vecteurs $v_1=\varepsilon_2$, $v_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3$, $v_3=\varepsilon_2+\varepsilon_4$, $v_4=\varepsilon_3$ forment une base de $\mathbb{R}^4$ que l'on désignera par $\mathcal{B}'$.

f. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

g. Exprimer $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ en fonction de v_1,v_2,v_3,v_4.

h. En déduire $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

i. Déterminer si M est inversible, et si oui déterminer (si possible sans calcul) M^{-1}.

j. Soit b=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, justifier l'existence (ou la non-existence) d'un vecteur X de $\mathbb{R}^4$ tel que MX=b.

k. Si X existe, le déterminer avec un minimum de calculs.

Solution.

a. La matrice standard de f est celle dont les colonnes contiennent les images des vecteurs de la base standard

donc M=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Nous allons développer det(M) suivant la première colonne (car il n ' y a qu'un terme non nul):

det(M)=1(-1)$^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; on continue suivant la première ligne $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; d'où det(M)=(-1)$\times(-1) = 1$.

c. Dans ce cas M est inversible, donc injective, d'où Ker(M)=$\{X, \mathrm{MX} = (0)\}$ ne contient qu'un élément le vecteur nul.

d. Pour savoir si les vecteurs colonnes de M, que je désignerai par M_1,M$_2$,M_3,M$_4$, sont liées ou pas on considère des scalaires (a,b,c,d) tels que aM$_1 + b$M$_2$+cM_3+dM$_4$=(0). Or aM$_1 + b$M$_2$+cM_3+dM$_4$=M$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$; donc nus avons supposé que M$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, mais comme M est injective il en découle que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où ces vecteurs colonnes sont libres.

e. Les vecteurs $v_1 = \varepsilon_2$, v$_2$=ε_1+ ε_3, v$_3$=ε_2+ε_4, $v_4 = \varepsilon_3$ sont justement les vecteurs colonnes de M, nous venons de montrer qu'ils sont libres, il s'agit de quatre vecteurs libres dans $\mathbb{R}^4$, qui est de dimension 4, donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$.

f. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ est la matrice dont les colonnes représentent dans la base $\mathcal{B}$ les vecteurs de la base $\mathcal{B}'$, donc c'est exactement la matrice M.

g. Nous savons que $v_1 = \varepsilon_2$, v$_2$=ε_1+ ε_3, v$_3$=ε_2+ε_4, $v_4 = \varepsilon_3$, ce qui nous donne déjà $\varepsilon_2 = v_1$ et ε_3=v_4; pour les deux autres il suffit d'éliminer ε_3 entre les deux égalités : v$_2$=ε_1+ ε_3 et ε_3=v_4, d'où $\varepsilon_1 = v_2$-v_4 et, de même, $\varepsilon_4 = -v_1 + v_3$.

h. Pour construire $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ il suffit de savoir exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}'$, c'est juste ce que nous venons de faire:

$\varepsilon_1 = v_2$-v_4, $\varepsilon_2 = v_1$, ε_3=v_4, $\varepsilon_4 = -v_1 + v_3$; donc nous connaissons les colonnes de $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$: donc $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

i. Nous savons, depuis le c que M est inversible (sinon elle est inversible car c'est une matrice de changement de base); et nous savons aussi(cf cours) que $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$=$\Big($ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$')$^{-1}$, et $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$=M; donc $M^{-1} = \Big($ $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$')$^{-1}$=$P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque: sinon il fallait poser $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \end{pmatrix}$ et résoudre ce système pour en déduire M^{-1}.

j. Comme M est inversible MX=b est équivalent à X=M^{-1}b.

k. Donc X=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 1 \\ 4 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 16.

Toutes les matrices considérées sont dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 20. *Une matrice M=(a_{ij})$\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite magique lorsque les huit sommes suivantes sont égales:*

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} \\ a_{11}+a_{21}+a_{31} \\ a_{12}+a_{22}+a_{32} \\ a_{13}+a_{23}+a_{33} \\ a_{11}+a_{22}+a_{33} \\ a_{31}+a_{22}+a_{13} \end{array}\right. \textit{sont égales.}$$

Une matrice M=(a_{ij})$\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est symétrique lorsque $M = {}^tM$ et antisymétrique lorsque $M = -{}^tM$.

On définit les trois matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = {}^t A$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Sont-elles magiques ? symétriques ? antisymétriques ?

2. Soit M=(a_{ij})$\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ montrer que $M' = \frac{M+{}^tM}{2}$ et $M'' = \frac{M-{}^tM}{2}$; les utiliser pour établir que toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique; montrer que cette décomposition est unique.

solution:

i. on remarque que M' est symétrique, car égale à sa transposée et M" antisymétrique car opposée à sa transposée.

ii. l'unicité ? Si M=S+A, où S est symétrique et A antisymétrique, alors ${}^tM$=S-A, d'où 2S=M+${}^tM$ et 2A=M-${}^tM$ donc S=M' et A=M", ce qui établit l'unictié

3. Soit $\mathcal{MAG}$ l'ensemble des matrices magiques, montrer que

i) $\mathcal{MAG}$ est un espace vectoriel

voir caractérisation des sous ev

ii) la transposée d'une matrice magique est une matrice magique

voir def des matrices magiques et faire un schéma pour se convaincre

iii) si $M \in \mathcal{MAG}$ il en est de même pour M' et M" (définies au dessus).

découle du i)

4. Montrer que les matrices qui sont à la fois magiques et antisymétriques forment un espace vectoriel de dimension 1 dont vous déterminerez une base, que l'on désignera par $\mathcal{A}$.

Soit M magique et antisymétrique elle a nécessairement l'air suivant :$\begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ a & 0 & -a \\ -a & a & 0 \end{pmatrix}$=a$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, d'où on prend $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Montrer que les matrices qui sont à la fois magiques et symétriques et dont la trace est nulle forment un espace vectoriel de dimension 1 dont vous déterminerez une base que l'on désignera par $\mathcal{S}$.

Soit M magique et symétrique et de trace nulle, elle a nécessairement l'air suivant :$\begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ b & 2a+2b & -2a-3b \\ -a-b & a & -3a-2b \end{pmatrix}$, ce qui vérifie 6 conditions et il faut en plus que -6a-6b=0, -3a-3b=0, d'où il faut b=-a; c'est à dire $\begin{pmatrix} a & -a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}$= $a\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; on posera $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Soit une matrice M, magique et symétrique, dont la trace est égale à t, montrer qu'elle est la somme d'un multiple de $\mathcal{S}$ et d'un multiple de C.

M=(M-tC/3)+tC/3 et (M-tC/3) vérifie les hypothèses du 5 donc c'est un multiple de $\mathcal{S}$.

7. En déduire une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{MAG}$ et sa dimension.

synthèse du 2,3,4 et du 6

Si M est magique , elle est la somme d'une symétrique M' et d'une antisymétrique M" (2), celles-ci sont magiques (3), la première est une combinaison linéaire de S et C, la seconde est un multiple de $\mathcal{A}$, donc M est une combinaison linéaire de ces trois matrices; donc elles forment une famille génératrice de $\mathcal{MAG}$.

Soient (a,c,s) telles que aC+cC+sS=(0) alors (0) est la somme d'une symétrique aC+sS et d'une antitymétrique a$\mathcal{A}$; or (0)=(0)+(0), et la décomposition entre symétrique et antisymétrique est unique donc aA=(0) et cC+sS=(0), d'où a=0

pour le reste on a cC+sS=$\begin{pmatrix} c & c & c \\ c & c & c \\ c & c & c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} s & -s & 0 \\ -s & 0 & s \\ 0 & s & -s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c+s & c-s & c \\ c-s & c & c+s \\ c & c+s & c-s \end{pmatrix}$, si cette matrice est nulle, c est nul, et alors s aussi

nous avons donc une base de $\mathcal{MAG}$: $\mathcal{A}$, C, S.

et donc sa dimension :3.

8. Montrer que (A,B,C) forment une base $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{MAG}$; comme la dimension de $\mathcal{MAG}$ est 3, il suffit de montrer que cette famille est génératrice, et pour cela qu'elle engendre A, B, C:

Or

$\mathcal{A} = (1/2)A - (1/2)B + 0C$

$\mathcal{S} = (-1/2)A + (-1/2)B + 0C$

$C = 1C$

9. Déterminer les deux matrices de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ est son inverse $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Algèbre linéaire d'un point de vue algorithmique

chap.VII MATRICES DIAGONALISABLES ET APPLICATIONS

Remarque 1. Multiplier entre elles deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ exige n^3 multiplications

Multiplier entre elles deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ demande à peu près la moitié

Multiplier entre elles deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se contente de n multiplications

Conclusion:

Il vaut mieux avoir à mutiplier des matrices diagonales que des matrices qui ne le sont pas.

OUI, mais

Si j'étudie une application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$, elle est représentée par sa matrice standard A

que faire si A n'est diagonale ?

?????????

IL FAUT TRAVAILLER DANS UNE AUTRE BASE

Nous savons que

si f est représentée dans la base standard $\mathcal{B}$ par A

elle sera représentée dans la base $\mathcal{B}'$ par $(P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'})^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

Mais comment savoir si il existe une base $\mathcal{B}'$

dans laquelle f sera représentée par une matrice diagonale ?

et si oui comment la trouver ?

Nous avons vu que

lorsque la matrice M représente dans la base $\mathcal{B}' = (\varepsilon'1, \varepsilon'2, ..., \varepsilon'n)$ une application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$

les colonnes de la matrice M décrivent les images $f(\varepsilon'1)$, $f(\varepsilon'2)$, ..., $f(\varepsilon'n)$

donc

si la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (\varepsilon'1,\ \varepsilon'2,\ ....,\ \varepsilon'n)$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} d1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & d2 & . & .... & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ ... & ... & ... & .... & 0 \\ 0 & 0 & ... & ... & \text{dn} \end{pmatrix}$

cela veut dire que $f(\varepsilon'1)$=$d_1\varepsilon'1$, $f(\varepsilon'2) = d_2\varepsilon'2, ..., f(\varepsilon'n) = d_n\varepsilon'n$

D'où notre tâche

i) chercher des vecteurs v tels que f(v)= un multiple de v

VECTEURS PROPRES DE f

ii) chercher si on peut fabriquer une base formée de tels vecteurs.

1. Vecteurs propres et valeurs propres

Définition 2. *Vecteur propre, valeur propre d'une matrice carrée*

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$

On dit qu'un vecteur colonne $X \neq \mathbf{(0)}$ *est un vecteur propre pour* A *lorsqu'il existe* $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ *tel que* $AX = \lambda X$.

On dit alors que λ *une valeur propre de* A *et que* X *est un vecteur propre associé à la valeur propre* λ.

Exercice 1. Soit A=$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}$

a. Déterminer pour quelles valeurs de a, b et c les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres pour A.

b. Déterminer les valeurs propres associées.

Solution.

a. Il suffit de calculer les images de ces vecteurs

$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a+1 \\ 1+b+1 \\ 1+c+1 \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est propre si et seulement si il est colinéaire à son image, cad si et seulement si a=b=c;

$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est propre et associé à la valeur propre 0.

$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 1-b \\ 1-c \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est propre si et seulement 1-c=0 et 1-a=-(1-b)

En conclusion il faut et il suffit que c=1 et a=b=c=1

b. Auquel cas les valeurs propres sont, dans l'ordre, 0,0,0

Proposition 3.

λ *une valeur propre de* A *si et seulement si* $det(\lambda I_n - A) = 0$.

Définition 4. *Le polynôme caractéristique de la matrice A*

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ *on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme* $P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

Il est de degré n, son terme de plus degré est λ^n*, son terme constant est* $(-1)^n \det(A)$.

Théorème 5. *Les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique de A.*

(donc la matrice A a un « au plus » n valeurs propres distinctes).

Exercice 2. Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que 1 est valeur propre de B.

b. Déterminer le polynôme caractéristique de B.

c. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de B.

Solution.

a. Observons la matrice I-B=$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, comme ses deux premières lignes sont colinéaires son déterminant est nul.

b. Le polynôme caractéristique de B est $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda-1 \\ -1 & 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda & \lambda-1 \\ 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & \lambda-1 \\ -1 & \lambda-5 \end{vmatrix} =$ $(\lambda-3)(\lambda^2-6\lambda+1) + 2(2\lambda-6) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 23\lambda - 15$

(on vérifie que 1 est bien racine)

c. Factorisons par $\lambda - 1$ (puisque 1 est racine du polynôme caractéristique) : $\lambda^3 - 9\lambda^2 + 23\lambda - 15 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)$, d'où les valeurs propres.

Théorème 6.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments de sa diagonale.

Théorème 7. *Les vecteurs propres associés à une valeur propre* λ

Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$ *et* λ *une valeur propre de la matrice A*

Les vecteurs propres asociés à λ *sont* ***les vecteurs non nuls*** *de* $Ker(\lambda I - A)$.

On appelle sous-espace propre associé à λ *le noyau* $Ker(\lambda I - A)$.

On trouve les vecteurs propres associés à λ en résolvant le système $(\lambda I - A)X = 0$.

Remarque 8.

Soit A$\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

Exercice 3. Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; déterminer les valeurs propres de C et les sous-espaces propres associés.

Solution.

$\lambda I - C = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$, donc $\det(\lambda I - C) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda^2 - 2\lambda) = (\lambda-3)\lambda(\lambda-2)$, donc trois valeurs propres 0,2,3.

Ker(-A)=Vect($\vec{e1}$+$\vec{e2}$); Ker(3I-A)=vect($\vec{e1}$-2$\vec{e2}$-3$\vec{e3}$); Ker(2I-A)=vect($\vec{e1}$-$\vec{e2}$).

2. Diagonalisation

Définition 9. *Diagonalisabilité d'une matrice carrée*

Soit $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, on dit qu'elle est diagonalisable lorsqu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour A.

Théorème 10. *Diagonalisation d'une matrice diagonalisable*

Soit $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, une matrice diagonalisable, et soit la matrice $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ dont les colonnes représentent une base formée de vecteurs propres de A, alors $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots. & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$, où les λ_i sont les valeurs propres associées, dans cet ordre, aux vecteurs formant la base de vecteurs propres.

Proposition 11. *(1ère) Application de la diagonalisation*

Soit A une matrice diagonalisable et P,D comme au-dessus, alors pour tout entier naturel k

$A^k = \mathrm{PD}^k P^{-1}$.

Exercice 4. Soit la matrice C de l'exercice précédent.

a. Montrer que si on prend dans chaque sous-espace propre un vecteur non nul on obtient une base formée de vecteurs propres.

b. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que P^{-1}AP=D.

c. Déterminer P^{-1}.

d. Déterminer la valeur de A^n.

Solution.

a. Soit la famille $(\vec{e1} + \vec{e2}, \vec{e1} - 2\overrightarrow{e2 - 3e3}, \vec{e1} - \vec{e2})$; elle forme une base car $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$.

b. Appelons $\mathcal{B}'$ la base $(\vec{e1} + \vec{e2}, \vec{e1} - 2\overrightarrow{e2 - 3e3}, \vec{e1} - \vec{e2})$ et $\mathcal{B} = (\vec{e1}, \vec{e2}, \vec{e3})$ la base standard, alors $P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et

$P_{B,B'}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}_{B,B'}$ sera la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c. Le calcul de $P_{B,B'}^{-1}$ donne $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

d. $P_{B,B'}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}_{B,B'}=\mathrm{D} \Longrightarrow \forall n, \quad P_{B,B'}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}_{B,B'}=\mathrm{D}^n \Longrightarrow \forall n, \quad \mathrm{A}^n=\mathrm{P}_{B,B'}\mathrm{D}^n P_{B,B'}^{-1} = \mathrm{P}_{B,B'}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P_{B,B'}^{-1}$

3. Méthode pour diagonaliser une matrice carrée

Théorème 12. *(admis)*

Soit $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$, $\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ les racines distinctes de son polynôme caractéristique, pour chaque λ_i on désignera par E_i le sous-espace propre associé à λ_i.

La concaténation de bases des différents E_i fournit une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 13. *Pour diagonaliser une matrice carrée $A\in\mathcal{M}_{\mathrm{nn}}(\mathbb{R})$*

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. Déterminer les racines réelles de A: $\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$

3. Pour chaque λ_i calculer la dimension de $Ker(\lambda_i I - A)$; si la somme des dimensions est strictement inférieure à n, il n'y a pas diagonalisabilité, si elle est égale à n, passer à 4.

4. Déterminer une base pour chaque $Ker(\lambda_i I - A)$, concaténer ces bases en une base $\boldsymbol{B'}$ de $\mathbb{R}^n$ et construire la matrice P, dont les colonnes sont les vecteurs de $\boldsymbol{B'}$.

Alors $P^{-1}AP=D$ est la diagonalisée de A.

Exercice 5. Soit la matrice $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer si elle est diagonalisable

b. Si oui déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonalisable D telles que $D=P^{-1}\mathrm{MP}$.

4. Applications: (un peu comme PageRank de Google)

4.1 Premier cas

Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.

4.1.1 Diagonalisation éventuelle (calculs par Maxima)

1. Calculer le polynôme caractéristique de P en essayant avant tout de l'obtenir sous forme factorisée.

$$\begin{vmatrix} \lambda-1/3 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & \lambda-1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & \lambda & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & -1/3 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ \lambda-1 & \lambda-1/3 & -1/3 & -1/3 \\ \lambda-1 & -1/3 & \lambda & -1/3 \\ \lambda-1 & -1/3 & -1/3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & \lambda-1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1 & -1/3 & \lambda & -1/3 \\ 1 & -1/3 & -1/3 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & \lambda-1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & \lambda+1/3 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1/3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & \lambda+1/3 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda+1/3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1/3)\begin{vmatrix} \lambda-1/3 & 0 \\ -1/3 & \lambda+1/3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1/3)(\lambda-1/3)(\lambda+1/3)^2.$$

2. On résoud les systèmes

$(A+1/3I)X=(0)$; base de l'ensemble des solutions $-\varepsilon 1/2-\varepsilon 2/2+\varepsilon 4, -\varepsilon 1/2-\varepsilon 2/2+\varepsilon 3$

$(A-1/3I)X=(0)$; base de l'ensemble des solutions $-\varepsilon 1+\varepsilon 2$

$(A-I)X=(0)$; base de l'ensemble des solutions $\varepsilon 1/2+\varepsilon 2+\varepsilon 3+\varepsilon 4$

4=2+1+1 donc diagonalisabilité

3. D'où à l'aide de la formule de changement de base

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où $$\text{A}=\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

4. Par suite $$A^n=\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\text{X}(0)=\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ne vous laissez pas impressionner par ces nombres et calculez combien de multiplications vous auriez dû faire pour obtenir P^n sinon:

$P^2=P$, $P^3=P^2*P$, $P^4=P^3*P$, ..., $P^n=P^{n-1}*P$

n-1 fois 4*4*4= 64(n-1)

alors qu'ici 16 !!!!!

6. Souvent on s'intéresse à ce qui se passe « au bout d'un temps très long », ce que les Mathématiciens (ou plutôt les Informaticiens) appelleraient l'infini

Lorsque n tend vers l'infini, $\begin{pmatrix} (-1/3)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tend vers $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d'où A^n tend vers $\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$

4.2 Deuxième cas

On suppose que la matrice P est $\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.2.1 Diagonalisation éventuelle (calculs idem)

1. Le polynôme caractéristique est $(\lambda\text{-}1/2)^2(\lambda\text{-}1)^3$

2. La résolution des systèmes linéaires donne comme base de l'espace propre pour 1/2: $-\varepsilon 2+\varepsilon 3$, $-\varepsilon 1+\varepsilon 2$

et comme base de l'espace propre associé à 1: $\varepsilon 5, \varepsilon 3+\varepsilon 4, \varepsilon 1+\varepsilon 2$

2+3=5 donc diagonalisabilité

3. D'où par application de la formule de changement de base pour les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \mathrm{A} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. D'où $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Donc $\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Lorsque n tend vers l'infini

A^n tend vers $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

4.3 Diagonalisation éventuelle (idem calculs)

On suppose que $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Le polynôme caractéristique est $(\lambda-1)(\lambda+1)\lambda^2$.

Trois sous-espaces propres

(A+I)X=(0) donne comme vecteur propre $-\varepsilon 1-\varepsilon 2+\varepsilon 3+\varepsilon 4$

AX=(0) donne comme vecteurs propres $-\varepsilon 3+\varepsilon 4$, $-\varepsilon 1+\varepsilon 2$

(A-I)X=(0) donne comme vecteur propre $\varepsilon 1+\varepsilon 2+\varepsilon 3+\varepsilon 4$

2+1+1=4 donc diagonalisabilité

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; donc pour tout n $A^n = Q\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{Q}^{-1}$, où $\mathrm{Q}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ici la suite A^n n'a pas de limite et prend alternativement les valeurs $\begin{pmatrix} (-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit la matrice A=$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

a. Déterminer les réesl x tels que rang(A-xI)<3 (on remarquera que toutes les colonnes de la matrice A-xI ont la même somme).

b. Pour chacun des réels trouvés au-dessus déterminer une base de Ker(A-xI).

c. Montrer que la concaténation de ces bases est une base $\mathcal{B}'$=(v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$.

d. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathrm{BB}'}$, où B désigne la base standard $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$

e. En vous servant de la formule de changement de base montrer que $?P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = AP_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $??P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = AP_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $???P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = AP_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, où les ? représentent des réels que vous trouverez.

f. Montrer que $P_{\mathrm{BB}'}^{-1}AP_{\mathrm{BB}'}$ est une matrice diagonale que l'on notera D.

g. En déduire un moyen de calculer (plus facilement) A^{1000}.

Solution.

a. On sait que rang(A-xI)<3 $\Longleftrightarrow$det $(A\text{-x}I) = 0$; $\begin{vmatrix} \text{1-x} & 5 & 5 \\ 2 & \text{-2-x} & \text{-2} \\ 3 & 3 & \text{3-x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{6-x} & \text{6-x} & \text{6-x} \\ 2 & \text{-2-x} & \text{-2} \\ 3 & 3 & \text{3-x} \end{vmatrix}$=(6-x)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \text{-2-x} & \text{-2} \\ 3 & 3 & \text{3-x} \end{vmatrix}$ = (6-x)$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \text{-4-x} & \text{-4} \\ 3 & 0 & \text{-x} \end{vmatrix}$=(6-x)(1)$\begin{vmatrix} \text{-4-x} & \text{-4} \\ 0 & \text{-x} \end{vmatrix}$=(6-x)x(4+x); d'où A-xI est de rang inférieur à 3 si et seulement si x=0, x=6 ou x=-4.

b1. Ker(A) ? Il suffit de regarder les deux dernières colonnes de A , on en déduit que ε_2-ε_3 appartient au noyau de A. D'autre part pour connaître « tout » Ker(A) on résoud AX=(0), cad sous forme matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -12 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & -12 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -12 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où AX=(0)$\Longleftrightarrow x_1 = 0, x_2 = \text{-x}_3$, donc Ker(A)={$x_3$(0,-1,1), $x_3 \in \mathbb{R}$} = Vect(0, -1, 1) = Vect(ε_3-ε_2).

b2. Ker(A-6I) ?

Ce qui nous conduit à poser le système de matrice augmentée $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & -8 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; d'où Ker(A-6I)=Vect(1,0,1)=Vect($\varepsilon_1 + \varepsilon_3$).

b3. Ker(A+4I) ?

Ce qui nous conduit à poser le système de matrice augmentée $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Ker(A+4I)=Vect(1,-1,0)=Vect(ε_1-ε_2).

c. Pour découvrir si la famille ε_3-$\varepsilon_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3, \varepsilon_1$-$\varepsilon_2$ est libre considérons (a, b, c) tq a(ε_3-ε_2)+b($\varepsilon_1 + \varepsilon_3$)+c($\varepsilon_1$-$\varepsilon_2$)=0

d'où (b+c)ε_1-(a+c)ε_2+(a+b)ε_3=0, et comme ε_1,ε_2,ε_3 est libre on en déduit $\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}$; résolvons ce système $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; il y aura 3 « un » directeurs docnsolution unique et ce sera 0,0,0, donc cette famille est libre; elle possède 3 vecteurs (= dimension de l'espace c'est donc une base de R^3.

d. par def $\mathrm{P}_{\mathrm{BB}'}$, la matrice de passage de B à B' est la matrice dont les colonnes décrivent les vecteurs de la NOUVELLE BASE B' relativement à l'ANCIENNE BASE B

cad

$\mathrm{P}_{\mathrm{BB}'}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

e. D'après le formule de changement de base $P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ décrit les coordonnées , dans B, du premier vecteur de la base B', celui qui engendre Ker(A), donc son image par A est 0 fois lui même, cad $\mathrm{A}P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même $P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ décrit les coordonnées , dans B, du deuxième vecteur de la base B', celui qui engendre Ker(A-6I), donc son image par A est 6 fois lui-même, cad $\mathrm{A}\mathrm{P}_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=6P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et de même $\mathrm{A}P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=-4P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

f. D'où $\mathrm{A}P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\mathrm{A}P_{\mathrm{BB}'}=P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, et comme $P_{\mathrm{BB}'}$ est inversible ,

$P_{\mathrm{BB}'}{}^{-1}\mathrm{A}P_{\mathrm{BB}'}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, ou si on veut $P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1}_{\mathrm{BB}'}=A$.

g. D'où $A^{1000}=P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1}_{\mathrm{BB}'}......P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}P^{-1}_{\mathrm{BB}'}$, 1000 fois; et comme il y aura télescopage de $\mathrm{P}_{B\mathbb{B}'}$ et de son inverse on obtient finalement

$A^{1000}=P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^{1000} \end{pmatrix}P^{-1}_{\mathrm{BB}'}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^{1000} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, ce qui est bien plus simple.

Objectifs:

1. Comprendre ce qu'est un vecteur propre d'une matrice carrée A, savoir vérifier si un vecteur donné est (ou pas) propre.

2. Comprendre ce qu'est une valeur propre d'une matrice carrée, savoir vérifier si un réel est (ou pas) valeur propre.

3. Comprendre ce qu'est le polynôme caractéristique d'une matrice carrée et pourquoi ses racines réelles sont les valeurs propres.

4. Savoir ce que sont les sous-espaces propres, savoir en déterminer les dimensions, savoir en déterminer une base.

5. Savoir comment on construit une base de vecteurs propres pour A.

6. Comprendre l'algorithme de diagonalisation d'une matrice carrée.

7. Savoir appliquer la diagonalisation pour calculer les puissances d'une matrice diagonalisable.

8. Savoir déterminer l'expression du terme général d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

6. Archives

DE ALGEBRE LINEAIRE MAI 2014

Tous documents, machines,téléphones, interdits

On indiquera clairement les numéros des exercices qui seront rédigés séparément.

Toutes les réponses devront être justifiées, soit par un calcul, soit par un résultat du cours que l'on énoncera.

Les résultats seront encadrés.

Travaillez méthodiquement, **il n'est pas nécessaire d'avoir répondu à toutes les questions pour avoir la note maximale**.

Exercice 7. (environ 5 points)

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers lui-même de matrice standard A.

a. Calculer le déterminant de la matrice A.

b. Déterminer si f est bijective, injective.

Pour c et d aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire

c. Déterminer l'ensemble des vecteurs-colonne b tel que l'équation AX=b possède (au moins) une solution.

d. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation AX=(0).

Exercice 8. (environ 9 points)

a. Calculer A^2 -$A-2I_3$.

b. Montrer que les matrices (I_3, A, A^2) sont liées dans $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$.

c. Montrer que la matrice A^2 appartient à F=Vect(I_3, A).

d. Déterminer une base et la dimension de F.

e. Déterminer si F=$\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$.

f. Déterminer une matrice $B\in F$, telle que AB=BA=I_3 (ne nécessite pas de calculs nouveaux).

g. Montrer que la matrice $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à F.

Exercice 9. (environ 6 points)

Soit l'application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ vers lui-même de matrice standard J et on désigne par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base standard $\boldsymbol{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a. Déterminer une base $\boldsymbol{B}_1$ et la dimension de Ker(J).

b. Déterminer la dimension et une base $\boldsymbol{B}_2$ de col(J).

c. Déterminer l'ensemble $U=\{y\in\mathbb{R}^3, \exists x\in\mathbb{R}^3, y=g(x)\}$.

Exercice 10. (environ 10 points)

On pose M=A+J.

a. Déterminer les réels x tels que Ker$(M-\text{xI})\neq\{0\}$.

b. Pour chacun des x trouvés au a. déterminer une base de Ker$(M-\text{xI})$.

c. Montrer que la concaténation de ces bases fournit une base $\boldsymbol{B'}$ de $\mathbb{R}^3$.

d. Déterminer la matrice de changement de base $P_{\text{BB}'}$.

e. Déterminer la matrice $P_{\text{BB}'}^{-1}$

f. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D, que l'on déterminera, telle que $\text{DP}_{\text{BB}'}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\text{MP}_{\text{BB}'}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

g. En déduire l'expression de M^{1000} sous la forme d'un produit de 3 matrices (on détaillera ces matrices, mais on ne calculera pas le résultat).

corDE ALGEBRE LINEAIRE MAI 2014

Tous documents, machines,téléphones, interdits

On indiquera clairement les numéros des exercices qui seront rédigés séparément.

Toutes les réponses devront être justifiées, soit par un calcul, soit par un résultat du cours que l'on énoncera.

Les résultats seront encadrés.

Travaillez méthodiquement, **il n'est pas nécessaire d'avoir répondu à toutes les questions pour avoir la note maximale**.

Exercice 11. (environ 5 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ vers lui-même de matrice standard A.

a. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$ (1point)

b. Donc f est bijective. (1 point)

Pour c et d aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire

c. Donc (surjectivité) pour tout vecteur-colonne b l'équation AX=b possède (au moins) une solution. (1 point)

d. Et (injectivité) l'ensemble des solutions de l'équation AX=(0) est réduit à un élément :0. (2 points)

Exercice 12. (environ 9 points)

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a. Alors A^2 -$A - 2I_3$=0. (1 point)

b. D'où les matrices (I_3, A, A^2) sont liées dans $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$. (1 point)

c. Et la matrice A^2 appartient à F=Vect(I_3, A). (1 point)

d. Par contre (I_3, A) sont libres donc forment une base de F, qui est de dimension 2. (1 point)

e. Comme sa dimension est 2 et la dimension de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ ils ne sont pas égaux. (2 points)

f. Comme A^2 -$A = 2I_3$ alors $A(1/2A - 1/2I_3) = I_3$, donc A admet comme inverse à droite $1/2A - 1/2I_3$, et nous savons que si une matrice carrée admet une inverse à droite, celle-ci est aussi son inverse à gauche. (2 points)

g. Comme F a pour base I_3 et A il suffit pour montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à F de montrer que l'équation J=xI_3+yA n'a pas de solution:

J=xI_3+yA$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = x \\ 1 = -y \\ 1 = y \end{cases}$, qui n'a pas de solution.. (2 points)

Exercice 13. (environ 6 points)

Soit l'application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ vers lui-même de matrice standard J et on désigne par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base standard $\boldsymbol{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a. Déterminer une base $\boldsymbol{B}_1$ et la dimension de Ker(J):

Pour déterminer Ker(J) on résoud le système J$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui est équivalent à x+y+z=0 , d'où Ker(J)={(-y-z,y,z)} = {y(-1,1,0) + z(-1,0,1)} = Vect(-$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$,-$\varepsilon_1 + \varepsilon_3$), qui sont linéairement indépendants donc forment une base de Ker(J), dont la dimension est alors 2. (2 points)

b. Déterminer la dimension et une base $\boldsymbol{B}_2$ de col(J).

d'après le théorème du rang la dimension de col(J) est 3-2=1; et col(J) est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. (2 points)

c. Déterminer l'ensemble $U = \{y \in \mathbb{R}^3, \exists x \in \mathbb{R}^3, y = f(x)\}$; il s'agit des vecteurs colonnes qui appartiennent à col(J) donc de Vect($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$). (2 points)

Exercice 14. (environ 10 points)

On pose M=A+J.

a. M=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc Ker$(M - xI) \neq \{0\} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1\text{-x} & 0 & 2 \\ 0 & 1\text{-}x & 0 \\ 2 & 0 & 1\text{-x} \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow$ (1-x)^3-4(1-x)=0$\Longleftrightarrow$(1-x)(-1-x)(3-x) = 0 $\Longleftrightarrow$ $x \in \{1,+1,3\}$ (2 points)

b. Ker$(M + I)$: on résoud $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; on trouve Vect($\varepsilon_1$-$\varepsilon_3$)

Ker(M-I): on résoud $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; on trouve Vect($\varepsilon_2$)

Ker(M-$3I$): on résoud $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; on trouve Vect($\varepsilon_1$+$\varepsilon_3$) (2 points)

c. Montrer que la concaténation de ces bases fournit une base $\boldsymbol{B'}$ de $\mathbb{R}^3$: par exemple on calcule le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (développement suivant 2 ème ligne) : 2, donc cette famille est libre, vu son cardinal c'est une base $\boldsymbol{B'}$ de $\mathbb{R}^3$. (2 points)

d. La matrice de changement de base $P_{\mathrm{BB}'}$ est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1 point)

e. D'où son inverse $P_{\mathrm{BB}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (1 point)

f. Comme dans l'exercice vu en TD la formule de changement de base appliquée pour exprimer chacun des vecteurs de B', nous donne

$P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{-1M}P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{1M}P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{3M}P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et en concaténant les trois colonnes $P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{M}P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où $P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P_{\mathrm{BB}'}{}^{-1} = M$ (2 points)

g. D'où $\mathrm{M}^{1000} = P_{\mathrm{BB}'}\begin{pmatrix} (-1)^{1000} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{1000} \end{pmatrix}P_{\mathrm{BB}'}{}^{-1}$. (1 point)

Rattrapage d'Algèbre linéaire

Tous documents, machines ou téléphones interdits

Exercice 15.

Soient les matrices A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, I=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer $A^2 - 2A - 3I$. (1pt)

b. Montre que A^2 appartient à F=Vect(I,A). (1 pt)

c. Déterminer une base de l'espace vectoriel F. (1 pt)

d. Montrer que toutes les matrices appartenant à F sont symétriques. (2 pts)

e. Montrer qu'il y a des matrices symétriques qui n'appartiennent pas à F. (2 pts)

f. Déterminer si A^3 appartient à F=Vect(I,A). (1 pt)

g. Calculer le déterminant de A. (2 pts)

h. Déterminer si A est inversible, et si oui, déterminer son inverse. (1 pt)

i. Déterminer les valeurs des réels x pour lesquels A+xI n'est pas inversible (2 pts)

Exercice 16. Soit la matrice M=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$, de matrice standard M (*c'est à dire*: *représentée dans la base canonique par M*)

On notera $(\varepsilon 1, \varepsilon 2, \varepsilon 3, \varepsilon 4)$ la base standard de $\mathbb{R}^4$ (*les élèves de L2 diront peut-être base canonique*)

a. M appartient-elle à F ? (1 pt)

b. Résoudre le système d'équations linéaires MX$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pts)

c. Déterminer le noyau de M (*de f*) et une base de celui-ci. (2 pts)

d. Déterminer la dimension de l'espace engendré par les colonnes de M et une base de col(M) (*c'est à dire : Im(f)*). (2 pts)

e. Déterminer, si possible sans calcul, la valeur du déterminant de M. (2 pts)

f. Soit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$, de matrice standard M; en vous aidant éventuellement de la base que vous avez obtenue déterminer au plus vite parmi les vecteurs suivants

$Y_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $Y_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$, $Y_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $Y_4=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ ceux qui ont (au moins) un antécédent par f. (2 pts)

g. On désigne par $\mathcal{B}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ la base standard (*c'est à dire: la base canonique*) et on considère la famille constituée (dans cet ordre) par la base définie au c. concaténée avec celle définie au d.; montrer qu'elle forme une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$. (1 pt)

h. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. (1 pt)

i. Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du vecteur qui s'écrit (1,1,1,1) dans la base $\mathcal{B}'$. (2 pts)

j. Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ 'du vecteur qui s'écrit (1,1,1,1) dans la base $\mathcal{B}$. (2 pts)

corRattrapage d'Algèbre linéaire

Exercice 19 corrigé

Soient les matrices A=$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$, I=$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

a. Calculer $A^2-2A-3I$=0. (1pt)

b. Donc A^2 appartient à F=Vect(I,A). (1 pt)

c. On vérifie vite que (A,I) est libre, comme elle engendre F c'en est une base. (1 pt)

d. A et I sont symétriques; soit M=aA+bI, alors sa transposée est a^{t}A+bI=aA+bI=M donc toutes les matrices appartenant à F sont symétriques. (2 pts)

e. L'ensemble S des matrices symétriques à 4 lignes et colonnes est un ev de dimension 10, or F est inclus dans S (cf d) mais est de dimension 2, donc F est inclus dans S mais pas égal.

f. Déterminer si A^3 appartient à F=Vect(I,A). (1 pt):

$A^2=2A+3I$ donc $A^3=2A^2+3A=2(2A+3I)+3A=5A+6I\in F$.

g. Calculer le déterminant de A. (2 pts)

$$\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\3&0&1&1\\3&1&0&1\\3&1&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=3\times1\times(-1)^2\begin{vmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=-3.$$

h. Déterminer si A est inversible, et si oui, déterminer son inverse. (1 pt) d'après a. $A^2-2A=3I$ donc $A(1/3A-2/3I)=I$ d'où A est inversible et son inverse est $(1/3A-2/3I)$.

i. Déterminer les valeurs des réels x pour lesquels A+xI n'est pas inversible (2 pts)

A+xI n'est pas inversible si et seulement si son déterminant est nul;

$$\begin{vmatrix}x&1&1&1\\1&x&1&1\\1&1&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3+x&1&1&1\\3+x&x&0&1\\3+x&1&x&1\\3+x&1&1&x\end{vmatrix}=(3+x)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&x&1&1\\1&1&x&1\\1&1&1&x\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-1&0&0\\0&0&x-1&0\\0&0&0&x-1\end{vmatrix}=(3+x)\times(-1)^2\begin{vmatrix}x-1&0&0\\0&x-1&0\\0&0&x-1\end{vmatrix}=(3+x)(x-1)^3.$$ Donc les réels demandés sont -3 et 1.

Corrgié de l'exercice 20

Soit la matrice M=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$, de matrice standard M (*c'est à dire*: *représentée dans la base canonique par M*)

a. M appartient-elle à F ? (1 pt) Non car elle n'est pas symétrique.

b. Résoudre le système d'équations linéaires $\text{MX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. (2 pts).

La matrice augmentée du système est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ que nous allons réduire $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où les solutions $\{(x4, 0, 0, x4), x4 \in \mathbb{R}\}$

c. Déterminer le noyau de M (*de f*) et une base de celui-ci. (2 pts)

Donc le noyau est Vect$(\varepsilon 1 + \varepsilon 4)$

d. Déterminer la dimension de l'espace engendré par les colonnes de M et une base de col(M) (*c'est à dire : Im(f)*). (2 pts)

D'après le théorème du rang la dimension de col(M) est 3=4-1; de plus col(M) est engendré par les colonnes, comme les colonnes 1 et 4 sont colinéaires col(M) est engendré par les colonnes 1,2,3; comme il est de dimension 3 cela en est une base: col(M) a pour base $\varepsilon 1 + \varepsilon 2 + \varepsilon 3 + \varepsilon 4$, -$\varepsilon 1$,-$\varepsilon 2$ ou ce qui est plus léger $\varepsilon 1 + \varepsilon 2 + \varepsilon 3 + \varepsilon 4$, $\varepsilon 1, \varepsilon 2$.

e. Déterminer, si possible sans calcul, la valeur du déterminant de M. (2 pts) le noyau est non nul, donc M n'est pas injective, donc det(M)=0.

f. Soit l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$, de matrice standard M; en vous aidant éventuellement de la base que vous avez obtenue déterminer au plus vite parmi les vecteurs suivants

$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ceux qui ont (au moins) un antécédent par f. (2 pts).

$Y_1 = f(\varepsilon_1)$, $Y_4 = f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

Par contre pour savoir si Y_2 a un antécédent il faut essayer de résoudre le système MX=Y_2, de matrice enrichie

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ que nous allons réduire $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; la dernière ligne montre que le système est inconsistant donc Y_2 n'a pas d'antécédent; de même pour Y_3:

il faut essayer de résoudre le système MX=Y_3, de matrice enrichie

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ que nous allons réduire $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; la dernière ligne montre aussi un système inconsistant.

g. On désigne par $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ la base standard (*c'est à dire: la base canonique*) et on considère la famille constituée (dans cet ordre) par la base définie au c. concaténée avec celle définie au d.; montrer qu'elle forme une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^4$. (1 pt)

Il s'agit de (v1,v2,v3,v4)=($\varepsilon 1 + \varepsilon 4$,$\varepsilon 1 + \varepsilon 2 + \varepsilon 3 + \varepsilon 4$, $\varepsilon 1$, $\varepsilon 2$); c'est une famille de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 ce sera une base si et seulement si elle est libre.

Etudions pour cela la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, son déterminant est égal à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times (-1)^4 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$; donc ces quatre vecteurs forment une base nommée $\mathcal{B}'$

h. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, notée $\mathrm{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. (1 pt) c'est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i. Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ du vecteur qui s'écrit (1,1,1,1) dans la base $\mathcal{B}'$. (2 pts)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

j. Déterminer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ 'du vecteur qui s'écrit (1,1,1,1) dans la base $\mathcal{B}$. (2 pts)

Ici il faut la matrice inverse ou bien remarquer qu'il s'agit du vecteur $\varepsilon 1 + \varepsilon 2 + \varepsilon 3 + \varepsilon 4$ qui s'écrit v2 donc ses coordonnées s=dans la base B' sont (0,1,0,0).