EFREI -L1 et PL1 mars 2012

ALGEBRE LINEAIRE – DE n°1
Sans document ni calculatrice.

Questions de cours :

A quelles conditions une partie F d'un ensemble E est-elle un sous-espace vectoriel de E ?
Enoncer une condition pour qu'une famille de vecteurs soit liée.
Définir un endomorphisme et un automorphisme.
Définir le noyau et l'image d'une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F et énoncer le théorème du rang pour cette application.
Définir une matrice symétrique et une matrice antisymétrique.
Soit deux matrices A et B ; quels sont la transposée et l'inverse de leur produit ? Développer $(A+B)^2$.
Définir le rang d'une famille de vecteurs, le rang d'une application, le rang d'une matrice.
Soit A la matrice associée à une application linéaire f de E dans F, espaces vectoriels de bases respectives BE et BF. Quel est le vecteur dont les coordonnées dans ces bases forment le j-ième vecteur-colonne de A ?

Exercice n°1 : On considère dans R^4 les 4 vecteurs $\vec{a} = (1 ; 1 ; 1 ; 1)$, $\vec{b} = (1 ; 0 ; -1 ; 1)$, $\vec{c} = (0; 1 ; 0 ; -1)$, $\vec{d} = (2 ; 4 ; 2 ; 0)$. Soient F l'espace vectoriel engendré par la famille $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ et G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{\vec{c}, \vec{d}\}$. Quelles sont les dimensions et bases de F, G, F+G, $F \cap G$; trouver une relation linéaire entre ces 4 vecteurs. Donner les équations de F+G et $F \cap G$ dans R^4.

Exercice n°2 : Soit φ un endomorphisme de R^4 défini par :
φ(x ; y ; z ; t) = (x+y ; x-y ; x-z+t ; 3y-z+t).Trouver une base et la dimension du noyau de φ. Quel est le rang de φ ? Donner l'équation (ou les équations) et une base de l'image de φ .Cette application est-elle injective? Est-elle surjective? Est-ce un automorphisme ? Quelle est la matrice associée à φ dans la base canonique de R^4 ? Quelles sont les images, par φ, des vecteurs de cette base ?

Exercice 3 : On considère les matrices à coefficients réels A, B, C, D définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer successivement: 2.A ; A^2 ; A +I , où I est la matrice unité de taille 3; A + B ; ${}^tA$; A.B ; B.A ; A.C ; A.D ; C.D ; D.C ; D.A ; A. ${}^tD$

Triplets de Pythagore:

On recherche une famille d'entiers naturels x_i , y_i et z_i formant un « triplet de Pythagore » vérifiant l'équation de Pythagore : $x_i^2 + y_i^2 = z_i^2$.On considère les matrices :

$$V=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } W=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

. On recherche une famille $\mathcal{F}$ de matrice colonne V_i dont les coefficients x_i , y_i et z_i vérifient l'équation de Pythagore.

Calculer f(V) = U.M.V où f est une application de R^3 dans R et U la transposée de V. Montrer que f(HV) = f(V). En déduire que si $V \in \mathcal{F}$, alors $H^n.V \in \mathcal{F}$, $\forall n \in N^*$.Calculer $H^n.W$ pour n=1,2 et 3. En déduire que l'on dispose ainsi d'une famille $\mathcal{F}$ de triplets de Pythagore.