Cours de Fonctions et Variations I
Lionel Pournin - EFREI
TD n°2 : **Suites et récurrence**

<u>Exercice 1</u> : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n+1$.

<u>Exercice 2</u> : Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n^2$.

<u>Exercice 3</u> : Montrer par récurrence les égalités suivantes :

i. $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$,
ii. $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
iii. $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

<u>Exercice 4</u> : Montrer par récurrence la proposition « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - (-1)^n$ est un multiple de 11 ».

<u>Exercice 5</u> : Montrer par récurrence la proposition « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3 ».

<u>Exercice 6</u> : Considérons la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1. \end{cases}$$

1) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2,
2) Montrer que la suite (u_n) est croissante,
3) En utilisant 1) et 2), montrer que (u_n) converge.

<u>Exercice 7</u> : Considérons la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}. \end{cases}$$

1) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2,
2) Montrer que la suite (u_n) est croissante,
3) En utilisant 1) et 2), montrer que (u_n) converge.

<u>Exercice 8</u> : Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \leq v_0, \\ u_{n+1} = (2u_n + v_n)/3, \\ v_{n+1} = (u_n + 2v_n)/3, \end{cases}$$

1) Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique,
2) Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ converge et donner sa limite,
3) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
4) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5) Montrer que les deux suites $(u_n + v_n)$ est constante.
6) En déduire la limite commune des deux suites (u_n) et (v_n).

<u>Exercice 9</u> : Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = (u_n + v_n)/2, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2, \\ u_{n+1} = (u_{n+1} + v_n)/2. \end{cases}$$

1) Montrer qu'il existe un réel r tel que pour tout n, $v_{n+1} - u_{n+1} = r(v_n - u_n)$,
2) Montrer que pour tout n, $u_n < v_n$,
3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

<u>Exercice 10</u> : Soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r^0 + r^1 + r^2 + ... + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}.$$

<u>Exercice 11</u> : Soit $x \in]-1, +\infty[$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.