[redacted] $\boxed{\text{Ex } 1}$

[redacted]

(1) Espace vectoriel : $A = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \ x+y+z+t=0\}$

Pour $A = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $x+y+z+t=0$

$u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad v\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \\ \alpha z + \beta z' \\ \alpha t + \beta t' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \alpha(x+y+z+t) + \beta(x'+y'+z'+t')$

(2) Base :

$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \end{cases} \qquad \left\{ x = -y-z-t \right. \qquad \begin{pmatrix} -y-z-t \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

La base : $A = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Dimension 3

Ex 2

1) $A = J - 4I$

2) $J = A + 4I$

3) $J^2 = 3J$

4) $A^2 + 5A + 4I = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad 5A = \begin{pmatrix} -15 & 5 & 5 \\ 5 & -15 & 5 \\ 5 & 5 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix} \qquad 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 5 & 5 \\ 5 & -15 & 5 \\ 5 & 5 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5)

$$V1 = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$V_3 = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex 4

① $M(a,b) = aI + bJ$

$I \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E = \mathrm{Vect}(I, J)$. Par suite E est un SEV de $M_3(\mathbb{R})$

② La famille (I, J) est libre, c'est donc une base de E et $\dim = 2$

Ex 5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

↳ Multiplié par quelque chose si $\neq$ de A^2 = pas libre

$\boxed{\text{Exc 6}}$

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et sa matrice associée $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\qquad x \to f(x)$

(1) 2 méthodes possibles

* 1ère méthode des naïfs

$X \in \operatorname{Im} f \iff \exists\, Y \in \mathbb{R}^3,\ AY = X$

$\iff \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = x_1 \\ y_1 = x_2 \\ y_1 = x_3 \end{cases}$

$\iff \exists (\lambda_1 ; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

$X = \lambda_1 (1;0;0) + \lambda_2 (0;1;1)$

Base de $\operatorname{Im} f$: $((1;0;0) ; (0;1;1))$

dimension 2

*) 2ème méthode : La puissance de l'algèbre linéaire

Soit $e_1 = (1;0;0)$ $e_2 = (0;1;0)$ $e_3 = (0;0;1)$

$(e_1 ; e_2 ; e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$;

$f(e_2) = (1;0;0)$

$f(e_3) = (1;0;0)$

$(f(e_1) ; f(e_2) ; f(e_3))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. On peut donc en extraire une base car cette famille est liée, d'où la base $((1;0;0) ; (0;1;1))$. $\dim \operatorname{Im} f = 2$

② f n'est pas bijective car la dimension de $\mathrm{Im} f \neq 3$

$\exists\, x \neq 0$ tel que $AX = 0$

ex : $X = (0; -1, 1)$