Rapport du TAI de mathématiques

Calcul matriciel et infographie

Quentin FREGER
Adrien MAHIEUX
Guillaume LEROUX
Antony KEM

L1 promo 2011
Groupe D

28/05/2007

Table des matières

Introduction

Le calcul matriciel découle de l’étude des matrices (La théorie des matrices), qui à ses début était considérée comme une branche secondaire de l’algèbre et a évoluée jusqu’à obtenir une place très importante dans des sujets relatifs à la théorie des graphes, à l'algèbre, à la combinatoire et aux statistiques.

Il est utilisé aujourd’hui e infographie pour tout ce qui concerne le déplacement d’objet dans l’espace 2D et 3D en effet on a pu voir que le calcul simplifiait grandement les calculs de transformation géométrique.

I Les transformations dans l'espace R^2

1. Les rotations

Démonstration de la matrice de rotation :

Soit le point P le point de coordonnée cartésienne (x,y) d'où z=p $e^{i\alpha}$ avec x=p cos Ө et

y=p sin Ө.

On cherche son image par la rotation d'angle Ө et de centre 0.

Les coordonnées de son image seront donc le point M de coordonnée cartésienne (X,Y) d'où **Z=p $e^{i(\alpha+\theta)}$.**

Exprimons X et Y en fonction de x et de y :

Z=X+iY= p((cos Ө+α)+isin(Ө+α)

D'où :

X=p cos α cos Ө-psin αsin Ө =xcos Ө-ysin Ө

Y=p sin α cos Ө-p sin Ө cos α =xsin Ө +ycos Ө

Revenons à nos matrices

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

X=xa_{11}+ya_{12}

Y=xa_{21}+ya_{22}

d'où par identification :

a_{11}=cos Ө ;a_{12}=-sin Ө

a_{21}=sin Ө ; a_{22}=cos Ө

D'ou la matrice de rotation:

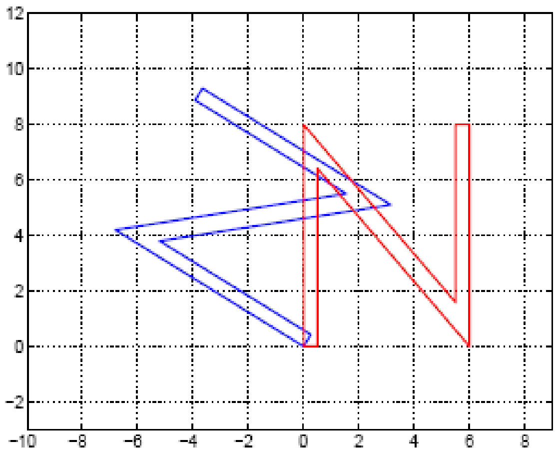
$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

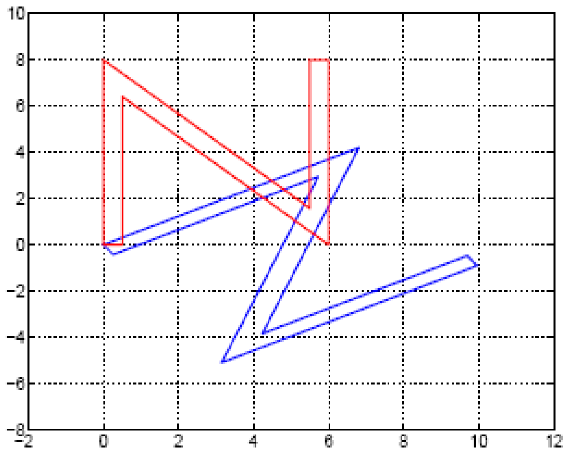
Déterminant de la matrice :

Δ=cos Ө *cos Ө+sin Ө* sin Ө=cos² Ө+sin² Ө=1

Inverse de la matrice :

Visualisation graphique :





A gauche : rotation avec Ө >0.

A droite : rotation avec Ө<0.

1.2 Les symétries

Soit un point P de coordonnée (x,y),on cherche son symétrique par rapport à l'axe des abscisses le point P' :

Comme le point P' est le symétrique de P par rapport à l'axe des abscisses il a pour coordonnée

(x,-y)

D'où :

Si on revient au calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

x=xb_{11}+yb_{12}

-y= xb_{21}+yb_{22}

D'où :

b_{11}=1 ; b_{12}=0 ;

b_{21}=0 ; b_{22}=-1

D’où la matrice de symétrie par rapport à l’axe des abscisses :

G=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Déterminant de la matrice :

Δ=-1

Inverse de la matrice :

Démonstration de la matrice de symétrie par rapport à l’axe des ordonnées :

Soit un point P de coordonnée (x,y),on cherche son symétrique par rapport à l’axe des abscisses le point P’ :

Comme le point P’ est le symétrique de P par rapport à l’axe des abscisses il a pour coordonnée

(-x,y)

D’où :

Si on revient au calcul matriciel :

$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

-x=xb_{11}+yb_{12}

y= xb_{21}+yb_{22}

D’où :

b_{11}=-1 ; b_{12}=0 ;

b_{21}=0 ; b_{22}=1 ;

D’où la matrice de symétrie par rapport à l’axe des ordonnées :

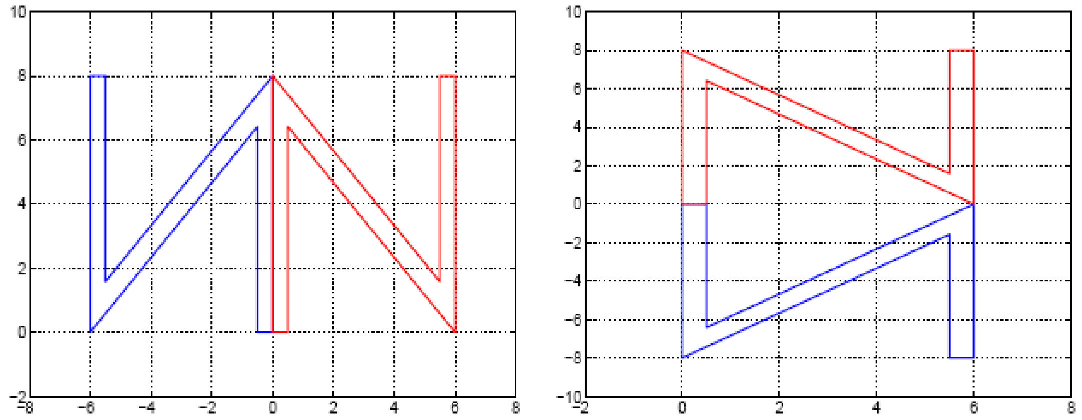
F=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determinant de la matrice :

Δ=-1

Inverse de la matrice :

Visualisation graphique :



1.3 La translation

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad ==> \quad \begin{pmatrix} x_0 + k \\ y_0 + h \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 + k \\ y_0 + h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$x_0 + k = x_0 b_{11} + y_0 b_{12}$$

$$y_0 + h = x_0 b_{21} + y_0 b_{22}$$

Donc impossible de résoudre l’équation.

La translation n’est donc pas une transformation linéaire en coordonnée classique.

D’où l’utilisation des coordonnées homogènes.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{y_0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ==> \quad \begin{pmatrix} x_0 + k \\ y_0 + h \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrice exprimée en coordonnée homogène pour la translation :

Démonstration de la translation :

$$\begin{pmatrix} x_0 + k \\ y_0 + h \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_0} \\ \boldsymbol{y_0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_0 + k = a_{11}\boldsymbol{x_0} + a_{12}\boldsymbol{y_0} + a_{13}$

$y_0 + h = a_{21}\boldsymbol{x_0} + a_{22}\boldsymbol{y_0} + a_{23}$

$1 = a_{31}\boldsymbol{x_0} + a_{32}\boldsymbol{y_0} + a_{33}$

D'où :

a_{11}=1 ; a_{12}=0 ; a_{13}=K ;

a_{21}=0 ; a_{22}=1 ; a_{23}=H ;

a_{31}=0 ; a_{32}=0 ; a_{33}=1 ;

D'où la matrice de translation :

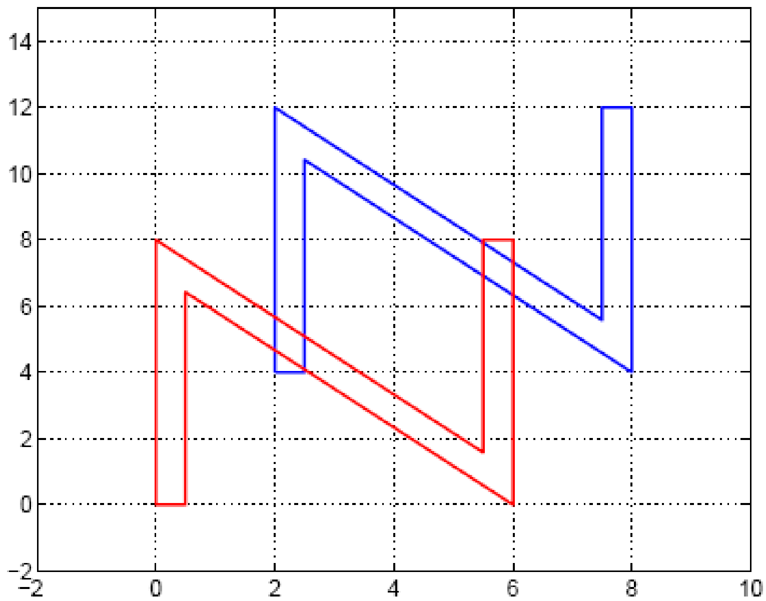
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminant de la matrice :

Δ=1

Inverse d'une matrice :

Visualisation graphique :



1.4 Les matrices en coordonnées homogènes

Soit un point quelconque p de coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

On lui associe un point P’ image de P par rapport à une transformation du plan :

P’= $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit la matrice A la matrice de la transformation :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

X'=$a_{11}\boldsymbol{x}$ +$a_{12}\boldsymbol{y}$ +a_{13}

Y'=$a_{21}\boldsymbol{x}$ +$a_{22}\boldsymbol{y}$ +a_{23}

1=$a_{31}\boldsymbol{x}$ +$a_{32}\boldsymbol{y}$ +a_{33}

a_{31}=0 ; a_{32}=0 ; a_{33}=1

Comme nous sommes dans R² les matrice de transformation en coordonnées cartésiennes sont des matrices 2*2 .On peut en déduire que seula_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} auront une valeur. Donc a_{13}=0, a_{23}=0.

Donc les transformations en coordonnées homogènes peuvent s'écrire

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aveca_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} les arguments de la matrice de transformation en coordonnées cartésiennes.

Matrice de rotation en coordonnées homogènes :

$$\begin{pmatrix} cos\Theta & -sin\Theta & 0 \\ sin\Theta & cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de symétrie en coordonnées homogènes :

Symétrie par rapport à l'axe des abscisses :

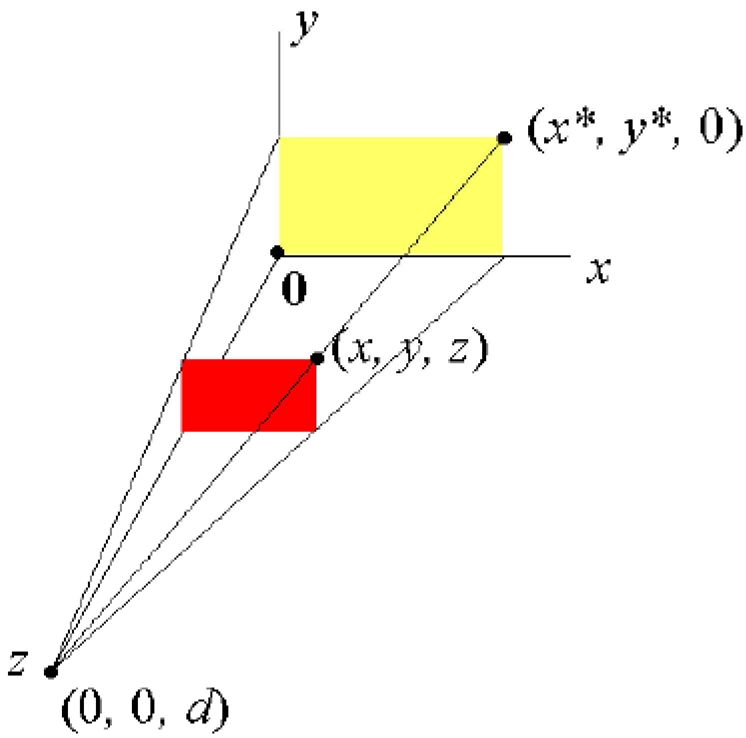
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Symétrie par rapport à l’axe des ordonnées :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Les transformations dans l'espace R^3

2.1 Projection en perspectives :



Soit A le point d'observation et le plan de projection le plan formé par l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Soit le point G de coordonnées cartésiennes(x,y,z) appartenant à l'objet.

Soit le point D de coordonnées cartésiennes (x*,y*,0) appartenant au plan de projection :

$$x^* = \frac{x}{1 - z/d} \qquad y^* = \frac{y}{1 - z/d}$$

En coordonnées homogènes :

$$G = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} x/(1-\frac{z}{d}) \\ y/(1-\frac{z}{d}) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On cherche une matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} x/(1-\frac{z}{d}) \\ y/(1-\frac{z}{d}) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Une matrice comme celle-ci n'existe pas.

Comme nous sommes avec des coordonnées homogènes les matrices suivantes sont équivalentes :

$$\begin{pmatrix} x/(1-\frac{z}{d}) \\ y/(1-\frac{z}{d}) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1-\frac{z}{d} \end{pmatrix}$$

On cherche une matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1-\frac{z}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

X=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}

y=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}

0=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}

$1-\frac{z}{d}$=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}

Par identification :

a_{11}=1 ; a_{12}=0 ; a_{13}=0 ; a_{14}=0 ;

a_{21}=0 ; a_{22}=1 ; a_{23}=0 ; a_{24}=0 ;

a_{31}=0 ; a_{32}=0 ; a_{33}=0 ; a_{34}=0 ;

a_{41}=0 ; a_{42}=0 ; a_{43}=-1/d ; a_{44}=1 ;

D'où la matrice :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminant de la matrice :

Δ=0

Inverse de la matrice :

Comme cette matrice a un déterminant nulle elle ne possède pas de matrice inverse.

2.2 La rotation

La rotation est une transformation visant à faire pivoter un point ou un groupe de points autour d'un axe. Il y en a trois, il y a donc trois matrices différentes pour ces trois rotations différentes.

Téta est exprimé en radians. Il est mesuré dans l'axe inverse des aiguilles d'une montre.

Rotation autour de l'axe x d'angle Θ :

$$[x' y' z' 1] = [x\ y\ z\ 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit P= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ on veut obtenir $\begin{pmatrix} x \\ y\cos\Theta - z\sin\Theta \\ y\sin\Theta + z\cos\Theta \\ w \end{pmatrix}$

On cherche une matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y\cos\Theta - z\sin\Theta \\ y\sin\Theta + z\cos\Theta \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34} \\ a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

D'où :

X=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}

$y\cos\Theta - z\sin\Theta$ =a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}

$y\sin\Theta + z\cos\Theta$ =a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}

w=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}

a_{11}=1 ; a_{12}=0 ; a_{13}=0 ; a_{14}=0 ;

a_{21}=0 ; a_{22}=cosΘ ; a_{23}=-sinΘ ; a_{24}=0 ;

a_{31}=0 ; a_{32}=sinΘ ; a_{33}=cosΘ; a_{34}=0 ;

a_{41}=0 ; a_{42}=0 ; a_{43}=0 ; a_{44}=0;

Ce qui nous donne la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\Theta & -sin\Theta & 0 \\ 0 & sin\Theta & cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminant de cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\Theta & -sin\Theta & 0 \\ 0 & sin\Theta & cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1^{1+1} 1 \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3} \quad .$$

$$1 \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Matrice Inverse :

Soit | Mx la matrice rotation suivant Ox

| Min la mineur de Mx

| det (Mx) le déterminant de Mx det (Mx) = 1

| com Mx la co-matrice

| ^{t} com Mx la transposée

| Mx^{-1} l'inverse de la matrice Mx

$$\text{Min} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Com Mx} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$$^{T}\text{com Mx} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$$Mx^{-1} = {}^{t}\text{com Mx} = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Oy :

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>DETERMINANT :</u>

$$\begin{pmatrix} cos\Theta 0 - sin\Theta 0 \\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ sin\Theta 0 \; cos\Theta \; 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \end{pmatrix} = -1^{4+4} 1 \begin{pmatrix} cos\theta & 0 & -sin\Theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\Theta & 0 & cos\Theta \end{pmatrix} = (-1)^{2+2}.$$

$$1 \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Inverse :

Soit | My la matrice rotation suivant Oy

| Min la mineur de My

| det (My) le déterminant de My det (My) = 1

| com My la co-matrice

| ^{t} com My la transposée

| My $^{-1}$ l'inverse de la matrice My

$$\text{Min}=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{com My}=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^t\text{com My}=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$My^{-1} = {}^{t}com\ My = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Oz :

$$\begin{bmatrix} x' y' z' 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Déterminant :

$$\begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta 0 0 \\ -\sin\Theta \cos\Theta 0 0 \\ 0 & 0 \quad 1 0 \\ 0 & 0 \quad 0 1 \end{pmatrix} = -1^{4+4} 1 \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\Theta & 0 \\ -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3}.$$

$$1 \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Inverse

Soit | Mz la matrice rotation suivant Oz

| Min la mineur de Mz

| det (Mz) le déterminant de Mz

| com Mz la co-matrice

| ^{t} com Mz la transposée

| Mz^{-1} l'inverse de la matrice Mz

$$\text{Min}=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin() & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{com Mz}=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$${}^t\text{com Mz}=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Mz}^{-1}={}^t\text{com Mz}=\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \text{ car det(Mz)=1}$$

2.3 La symétrie

Symétrie par rapport à l'axe Ox :

Soit $P=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ on veut obtenir $\begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \\ w \end{pmatrix}$

On cherche une matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

D'où :

X=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}

$-y$=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}

z=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}

w=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}

a_{11}=1 ; a_{12}=0 ; a_{13}=0 ; a_{14}=0 ;

a_{21}=0 ; a_{22}=-1 ; a_{23}=0; a_{24}=0 ;

a_{31}=0 ; a_{32}=0 ; a_{33}=1; a_{34}=0 ;

a_{41}=0 ; a_{42}=0 ; a_{43}=0 ; a_{44}=1;

Ce qui nous donne la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Symétrie selon l'axe Oy :

Soit P=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ on veut obtenir $\begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$

On cherche une matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

D'où :

-x=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}

y=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}

z=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}

w=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}

a_{11}=-1 ; a_{12}=0 ; a_{13}=0 ; a_{14}=0 ;

a_{21}=0 ; a_{22}=1 ; a_{23}=0; a_{24}=0 ;

a_{31}=0 ; a_{32}=0 ; a_{33}=1; a_{34}=0 ;

a_{41}=0 ; a_{42}=0 ; a_{43}=0 ; a_{44}=1;

Ce qui nous donne la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -1000 \\ 0\ 100 \\ 0\ 010 \\ 0\ 001 \end{pmatrix}$$

Symétrie selon l'axe des Oz :

Soit P=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ on veut obtenir $\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \\ w \end{pmatrix}$

On cherche une matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

D'où :

-X=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}

$-y$=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}

z=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}

w=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}

a_{11}=-1 ; a_{12}=0 ; a_{13}=0 ; a_{14}=0 ;

a_{21}=0 ; a_{22}=-1 ; a_{23}=0; a_{24}=0 ;

a_{31}=0 ; a_{32}=0 ; a_{33}=1; a_{34}=0 ;

a_{41}=0 ; a_{42}=0 ; a_{43}=0 ; a_{44}=1;

Ce qui nous donne la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 00 \\ 0 & -100 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 01 \end{pmatrix}$$

2.4 La translation

Soit P=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ on veut obtenir son image par la translation de vecteur A

$$\begin{pmatrix} h \\ k \\ l \\ w \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x+h \\ y+k \\ z+l \\ w \end{pmatrix}$$

On cherche une matrice A telle que :

$$\begin{pmatrix} x+h \\ y+k \\ z+l \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

D'où :

X+h=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}

$y+k$=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}

$z+l$=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}

w=a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}

a_{11}=1 ; a_{12}=0 ; a_{13}=0 ; a_{14}=h ;

a_{21}=0 ; a_{22}=1 ; a_{23}=0; a_{24}=k ;

a_{31}=0 ; a_{32}=0 ; a_{33}=1; a_{34}=l;

a_{41}=0 ; a_{42}=0 ; a_{43}=0 ; a_{44}=1;

Ce qui nous donne la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 100h \\ 010k \\ 001\,l \\ 0001 \end{pmatrix}$$

Déterminant :

$$\begin{pmatrix} 100h \\ 010k \\ 001\,l \\ 0001 \end{pmatrix} = -1^{1+1}.\,1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}.\,1 \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Inverse:

$$Mt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & Tx \\ 0 & 1 & 0 & Ty \\ 0 & 0 & 1 & Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Com = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Tx & -Ty & -Tz & 1 \end{pmatrix}$$

$$
{}^{t}Com = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -Tx \\ 0 & 1 & 0 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 & -Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$Mt^{-1} = 1/\det(Mt) * {}^{t}Com$ or $\det(Mt) = 1$ donc:

$$
Mt^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -Tx \\ 0 & 1 & 0 & -Ty \\ 0 & 0 & 1 & -Tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Conclusion

Nous avons pu voir que l'outil matriciel était un outil très puissant qu'il permettait d'effectuer toutes les transformations géométriques. Ainsi le calcul matriciel est à la base de presque tous les programmes utilisés par nos ordinateurs pour les affichages graphiques. Avec le programme que nous avons réalisé nous avons pu mettre en œuvre nos connaissances sur les matrices et sur la mise en place de programme.