Corrigé de l'épreuve d'analyse et probabilités
Concours Externe d'Agrégation Mathématiques 2014
abdelbaki.attioui@gmail.com

I. Transformation intégrale d'Abel

A- Transformée d'Abel dans $C^0([0,1])$ et dans $C^1([0,1])$

1.(a) Soit $x \in [0,1[$, pour tout $y > x$, $\displaystyle\int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}} = 2(\sqrt{1-x} - \sqrt{y-x})$. Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}}$ est convergente et $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t-x}} = 2\sqrt{1-x}$.

(b) Soit $f \in C^0([0,1])$, pour tout $t \in]x,1]$, $\dfrac{|f(t)|}{\sqrt{t-x}} \leqslant \dfrac{\| f \|_\infty}{\sqrt{t-x}}$. Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt$ est convergente et

$$\left|\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt\right| \leqslant \int_x^1 \frac{|f(t)|}{\sqrt{t-x}}dt \leqslant 2 \| f \|_\infty \sqrt{1-x}$$

Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt = 0$.

2. Soit $x \in [0,1[$, dans l'intégrale on effectue le changement de variable $t = x + (1-x)u$, alors

$$Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}dt = \int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{(1-x)u}}(1-x)du = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}du$$

Dans toute la suite, on pose: $Bf(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}du$, pour tout $x \in [0,1[$.

3. Soit $f \in C^0([0,1])$. D'après 1.(b), Af est continue en 1. Par ailleurs, l'application $(x,u) \mapsto \dfrac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}$ est de classe C^0 sur $[0,1[\times]0,1]$ et dominée par l'application $u \mapsto \dfrac{\| f \|_\infty}{\sqrt{u}}$ sur $]0,1]$ dont l'intégrale est convergente et elle vaut $2 \| f \|_\infty$. Donc Bf est continue sur $[0,1[$. Ainsi, $Af \in C^0([0,1])$ et il est immédiat que A est un endomorphisme de $C^0([0,1])$. D'après 2., pour tout $x \in [0,1]$,

$$|Af(x)| \leqslant \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}du \leqslant \sqrt{1-x} \| f \|_\infty \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{1-x} \| f \|_\infty \leqslant 2 \| f \|_\infty$$

Alors A est un opérateur de $C^0([0,1])$ et $|||A||| \leqslant 2$. En fait $|||A||| = 2$ car si f est la constante 1, $Af(x) = 2\sqrt{1-x}$ pour tout $x \in [0,1]$ et $\| Af \|_\infty = 2$.

4. On suppose que $f(1) \neq 0$.

(a) Pour tout $u \in]0,1]$, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}} = \frac{f(1)}{\sqrt{u}}$ et de la même domination que dans I.A.3., le théorème de convergence dominée assure que $\displaystyle\lim_{x\to 1} Bf(x) = 2f(1)$. Donc, $Af(x) \sim 2f(1)\sqrt{1-x}$ au voisinage de 1.

(b) D'après ce qui précède, au voisinage de 1,

$$\frac{Af(1) - Af(x)}{1-x} = \frac{-Af(x)}{1-x} \sim \frac{-2f(1)}{\sqrt{1-x}}$$

Donc, Af n'est pas dérivable en 1.

5. On suppose que $f \in C^1([0,1])$.

(a) D'après I.A.2 et comme l'application $x \mapsto \sqrt{1-x}$ est dérivable sur $[0,1[$, il suffit de montrer que Bf l'est sur $[0,1[$. L'application $(x,u) \mapsto \dfrac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}$ est de classe C^1 sur $[0,1[\times]0,1]$ et pour $x \in [0,1[$ et $u \in]0,1]$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}\right)\right| = \left|\frac{(1-u)f'(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}\right| \leqslant \frac{(1-u) \| f' \|_\infty}{\sqrt{u}}$$

Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-u}{\sqrt{u}}du = 4/3$. Alors d'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, la fonction Bf est de classe C^1 sur $[0,1[$ et $(Bf)'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)f'(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}du$.

(b) On suppose que $f(1)=0$. D'après ce qui précède, Af est continue sur $[0,1]$, de classe C^1 sur $[0,1[$. D'abord, Af est dérivable en 1. En effet, Soit $\varepsilon > 0$, il existe un réel η, $1 > \eta > 0$ tel que $|f(t)-(t-1)f'(1)| < (1-t)\varepsilon$ pour $0 \leqslant 1-t \leqslant \eta$. Soit $0 < 1-x < \eta$, pour tout $t \in [x,1]$, $0 \leqslant 1-t \leqslant 1-x < \eta$ alors pour tout $t \in [x,1]$, $(1-t)(-f'(1)-\varepsilon) < f(t) < (1-t)(-f'(1)+\varepsilon)$. Par suite,

$$\int_x^1 \frac{(1-t)(-f'(1)-\varepsilon)}{\sqrt{t-x}}dt < Af(x) < \int_x^1 \frac{(1-t)(-f'(1)+\varepsilon)}{\sqrt{t-x}}dt$$

Or

$$\int_x^1 \frac{1-t}{\sqrt{t-x}}dt = -\int_x^1 \frac{t-x}{\sqrt{t-x}}dt + \int_x^1 \frac{1-x}{\sqrt{t-x}}dt = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} + 2(1-x)\sqrt{1-x} = \frac{4}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$$

D'où

$$\frac{4}{3}(-f'(1)-\varepsilon)(1-x)\sqrt{1-x} < Af(x) < \frac{4}{3}(-f'(1)+\varepsilon)(1-x)\sqrt{1-x}$$

Donc, Af est dérivable en 1 et $(Af)'(1) = 0$. On a pour $0 < 1-x < \eta$,

$$\frac{4}{3}(-f'(1)-\varepsilon)(1-x) < Bf(x) < \frac{4}{3}(-f'(1)+\varepsilon)(1-x)$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}Bf(x) = 0$. Puisque, pour tout $x \in [0,1[$, $(Af)'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}Bf(x) + \sqrt{1-x}(Bf)'(x)$ et $(Bf)'$ est continue sur $[0,1]$ par I.5.(a) alors $\displaystyle\lim_{x\to 1}(Af)'(x) = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}Bf(x) = 0$. Donc Af est de classe C^1 sur $[0,1]$.

B- La formule d'inversion

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. En effectuant le changement de variable: $t = a + u(b-a)$ on obtient:

$$\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}$$

D'autre part,

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \int_0^1 \frac{2du}{\sqrt{1-(1-2u)^2}} = [-\arcsin(1-2u)]_0^1 = \pi$$

2. Il est clair que V est un endomorphisme de $C^0([0,1])$ mieux encore on a : $ImV \subset C^1([0,1])$. Par définition, $\| Vf \|_\infty \leqslant \| f \|_\infty$, pour tout $f \in C^0([0,1])$. Alors V est un opérateur de $C^0([0,1])$ et $|||V||| \leqslant 1$. En prenant f la constante 1, $Vf(x) = 1-x$ pour tout $x \in [0,1]$ alors $\| Vf \|_\infty = 1$. Donc, $|||V||| = 1$.

3. Soit $f \in C^0([0,1])$, $A(Af)(1) = 0 = Vf(1)$. Soit $x \in [0,1[$, soit χ_x la fonction définie $[0,1]$ par: $\chi_x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t-x}}$ si $t \in]x,1]$ et nulle ailleurs. On a alors,

$$A(Af)(x) = \int_0^1 \chi_x(t)Af(t)dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_x(t)\chi_t(s)f(s)ds\right)dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_x(t)\chi_t(s)dt\right)f(s)ds$$

Mais, $\displaystyle\int_0^1 \chi_x(t)\chi_t(s)dt = \int_x^1 \frac{\chi_t(s)}{\sqrt{t-x}}dt = \int_x^s \frac{dt}{\sqrt{(t-x)(s-t)}} = \pi$ si $s > x$ et $\displaystyle\int_x^1 \frac{\chi_t(s)}{\sqrt{t-x}}dt = 0$ si $s < x$. Alors $A(Af)(x) = \pi \displaystyle\int_x^1 f(s)ds = \pi Vf(x)$ d'où le résultat.

4. Soit $f \in C^0([0,1])$ tel que $Af = 0$ alors d'après I.B.3, $Vf = 0$. Par suite, pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_x^1 f(t)dt = 0$. On en déduit alors , en dérivant, que f est nulle sur $[0,1]$. Donc l'opérateur A est injectif sur $C^0([0,1])$.

(5.)(a). Par définition, $Im(V) \subset C^1([0,1]) \cap Ker(\varphi)$ où φ est la forme linéaire de $C^0([0,1])$ définie par $\varphi(g) = g(1)$. Inversement, soit $g \in C^1([0,1])$ et $g(1) = 0$ alors $V(-g') = g$. Donc, $Im(V) = C^1([0,1]) \cap Ker(\varphi)$.

(b) Soit $g \in A^{-1}\left(C^1([0,1])\right)$, alors $Ag \in C^1([0,1]) \cap Ker(\varphi)$ car $Ag(1) = 0$. En d'autres termes, $Ag \in Im(V)$. Il exite $h \in C^0([0,1])$ tel que $Ag = Vh = \frac{1}{\pi}A(Ah)$ et comme A est injectif, $g = A(\frac{1}{\pi}h) \in Im(A)$. Inversement, soit $f \in C^0([0,1])$, $A(Af) = \pi V f \in C^1([0,1])$ alors $Af \in A^{-1}\left(C^1([0,1])\right)$. Donc, $Im(A) = A^{-1}\left(C^1([0,1])\right)$.

(c) Soit $g \in C^1([0,1])$ avec $g(1) = 0$. D'après I.A.5, $Ag \in C^1([0,1])$ alors $g \in A^{-1}\left(C^1([0,1])\right) = Im(A)$.

6. Soit $g \in Im(A)$, alors $Ag \in C^1([0,1])$ et $Ag(1) = 0$. Dans $C^0([0,1])$, l'équation $Af = g$ est équivalente à $\pi V f = A(Af) = Ag$ par injectivité de A. D'après I.B.5, $f = -\frac{1}{\pi}(Ag)'$ qui est unique aussi par injectivité de A.

C- Un semi-groupe d'opérateurs

1. Soit $\alpha > 0$.

(a) Soit $f \in C^0([0,1])$. Soit $x \in [0,1[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt$ est convergente (même absolument). En effet,

$$\int_x^1 (t-x)^{\alpha-1}|f(t)|\,dt \leqslant \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1}dt \parallel f \parallel_\infty = \frac{1}{\alpha}(1-x)^\alpha \parallel f \parallel_\infty \qquad (*)$$

Donc, en posant $V^\alpha f(1) = 0$ et $V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt$ pour $x \in [0,1[$ la fonction $V^\alpha f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est bien définie .

(b) D'après l'inégalité (*) on a d'une part $\lim\limits_{x\to 1} V^\alpha f(x) = 0$ alors $V^\alpha f \in C^0([0,1])$ par suite V^α est un endomorphisme de $C^0([0,1])$. D'autre part, $\parallel V^\alpha f \parallel_\infty \leqslant \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \parallel f \parallel_\infty$ alors V^α est un opérateur de $C^0([0,1])$ et $|||V^\alpha||| \leqslant \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}$.

2. Soient $\alpha, \beta > 0$ et $f \in C^0([0,1])$, $V^\alpha(V^\beta f)(1) = V^{\alpha+\beta} f(1) = 0$. Soit $x \in [0,1[$, soit χ_α la fonction définie sur $[x,1]^2$ par: $\chi_\alpha(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}$ si $t > s$ et nulle ailleurs. On a alors,

$$\begin{aligned}
V^\alpha(V^\beta f)(x) &= \int_x^1 \chi_\alpha(t,x) V^\beta f(t)dt = \int_x^1 \left(\int_x^1 \chi_\alpha(t,x)\chi_\beta(s,t)f(s)ds\right)dt \\
&= \int_x^1 \left(\int_x^1 \chi_\alpha(t,x)\chi_\beta(s,t)dt\right) f(s)ds \quad \text{par Fubini} \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^1 \left(\int_x^s (t-x)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}dt\right) f(s)ds \quad \text{car si } s < t, \quad \chi_\beta(s,t) = 0 \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_x^1 \left(\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du\right)(s-x)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds \quad \text{poser} \quad t = x + u(s-x) \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_x^1 (s-x)^{\alpha+\beta-1} f(s)ds \quad \text{voir introduction} \\
&= V^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}$$

3. L'opérateur V introduit en I.B.2. n'est autre que $V = V^1$. Alors, en appliquant la relation obtenue en I.C.2 et une récurrence sur n, entier $\geqslant 2$, $V^n = V^{n-1} \circ V^1 = V \circ \cdots \circ V$ (composée n fois).

4. L'opérateur A introduit en I.A.2. n'est autre que $A = \Gamma(\frac{1}{2})V^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}V^{\frac{1}{2}}$ voir l'introduction.

II. La transformée d'Abel et les espaces L^p

1. Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\parallel h \parallel_1 = 1$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, +\infty[$.

(a) Si $p = 1$, on a même égalité par Fubini-Tonelli. Supposons $p > 1$, soit $q = \dfrac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué, d'après l'inégalité de Hölder, on a pour presque tout x

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |f(t)h(x-t)|\,dt &= \int_{\mathbb{R}} \left(|f(t)|\,|h(x-t)|^{\frac{1}{p}}\right)|h(x-t)|^{\frac{1}{q}}\,dt \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\,|h(x-t)|\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x-t)|\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\,|h(x-t)|\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \parallel h \parallel_1^{\frac{1}{q}} \quad \text{par invariance d'une translation} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\,|h(x-t)|\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{car} \quad \parallel h \parallel_1 = 1
\end{aligned}$$

D'où le résultat par intégration.

(b) Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. On peut supposer $\| g \|_1 \neq 0$ sinon g sera nulle presque partout ainsi que le produit de convolution. On pose $h = \frac{1}{\|g\|_1} g$ alors $\| h \|_1 = 1$ et d'après ce qui précède pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $|(f * h)(x)|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, |h(x-t)| \, dt$. Alors $|(f * g)(x)|^p = \| g \|_1^p \, |(f * h)(x)|^p \leqslant \| g \|_1^p \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, |h(x-t)| \, dt$. Par suite

$$\begin{aligned}
\| f * g \|_p^p &\leqslant \| g \|_1^p \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, |h(x-t)| \, dt \right) dx \\
&= \| g \|_1^p \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, |h(x-t)| \, dx \right) dt \quad \text{par Fubini} \\
&= \| g \|_1^p \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \, dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |h(x-t)| \, dx \right) \\
&= \| g \|_1^p \| f \|_p^p
\end{aligned}$$

Donc $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ et $\| f * g \|_p \leqslant \| f \|_p \| g \|_1$.

2. Soit $f \in C^0([0,1])$. soit $x \in [0,1[$,

$$(E(f) * r)(x) = \int_{\mathbb{R}} E(f)(t) r(x-t) dt = \int_0^1 f(t) r(x-t) dt = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt = Af(x)$$

$$(E(f) * r)(1) = \int_{\mathbb{R}} E(f)(t) r(1-t) dt = \int_0^1 f(t) r(1-t) dt = 0 = Af(1)$$

D'où le résultat .

3.(a) L'espace $C^0([0,1])$ est un sous espace dense dans l'espace de Banach $L^1([0,1])$ muni de sa norme $\| \,.\, \|_1$. Par ailleurs, les opérateurs A et V de $C^0([0,1])$ sont aussi continues en munissant l'espace $C^0([0,1])$ de la norme $\| \,.\, \|_1$. En effet, pour tout $f \in C^0([0,1])$,

$$\| Af \|_1 = \| E(f) * r \|_1 \leqslant \| E(f) \|_1 \| r \|_1 = 2 \| f \|_1 \qquad \text{et} \qquad \| Vf \|_1 \leqslant \| f \|_1 \tag{$**$}$$

D'après un théorème de prolongement par densité, les applications A et V se prolongent en des opérateurs de $L^1([0,1])$ en consevant leurs normes d'opérateurs.

(b) Soit $f \in L^1([0,1])$. On pose $F(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$. D'après le théorème de Lusin, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in C^0([0,1])$ tel que $\| f - g \|_1 < \varepsilon$. Alors,

$$\| Af - F \|_1 \leqslant \| Af - Ag \|_1 + \| Ag - F \|_1 \leqslant 2 \| f - g \|_1 + \| (E(g) - E(f)) * r \|_1 \leqslant 4\varepsilon$$

Donc $\| Af - F \|_1 = 0$, en d'autres termes $Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$, pour presque tout $x \in [0,1]$. En procèdant de la même manière, on montre que $Vf(x) = \int_x^1 f(t) dt$, pour presque tout $x \in [0,1]$.

4.(a) Soit $f \in Ker(V)$ alors pour tout $x \in [0,1]$, $Vf(x) = \int_x^1 f(t) dt = 0$. par suite, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\int_a^b E(f)(t) dt = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in [0,1]$,

$$(E(f) * \varphi_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}} E(f)(t) \varphi_\varepsilon(t-x) dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\frac{\varepsilon}{2}}^{x+\frac{\varepsilon}{2}} E(f)(t) dt = 0$$

(b) D'après ce qui précède, si $f \in Ker(V)$ alors $(E(f) * \varphi_\varepsilon)(x) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et $x \in [0,1]$. Mais, il est bien connu que $\lim_{\varepsilon \to 0} \| E(f) * \varphi_\varepsilon - E(f) \|_p = 0$. Alors $\| E(f) \|_p = 0$. Par conséquent, f est nulle dans $L^p([0,1])$. Donc, V est injectif et puisque l'égalité $A \circ A = \pi V$ dans $C^0([0,1])$ s'étend à $L^p([0,1])$ alors A est aussi injectif comme opérateur de $L^p([0,1])$.

(c) Si l'opérateur A, de $L^p([0,1])$, est surjectif il en est de même que l'opérateur V , de $L^p([0,1])$. Mais l'équation, $Vf = 1_{[0,1]}$ n'a pas de solution dans $L^p([0,1])$. En effet, sinon on aura, d'après II.3.(b), presque pour tout $x \in [0,1]$,

$Vf(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)dt = 1$. Ceci est impossible, donc l'opérateur A n'est pas surjectif.

5. On suppose $p > 2$ et soit $q = \dfrac{p}{p-1}$ l'exopsant conjugué.

(a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $r(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} 1_{]-1,0[}$, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |r(x)|^q dx = \int_{-1}^0 |x|^{-q/2} dx = \int_0^1 x^{-q/2} dx$ qui est une intégrale de Riemann convergente car $q < 2$. Donc $r \in L^q(\mathbb{R})$ et $\| r \|_q = \left(\dfrac{2}{2-q}\right)^{\frac{1}{q}}$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. D'après un théorème de densité et comme $r \in L^q(\mathbb{R})$ d'après II.5.(a), et $supp(r) \subset [-1, 0]$, il existe une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ à support compact, $supp(g) \subset [-1, 0]$, telle que $\| r - g \|_q < \varepsilon$. La fonction g est alors uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe un réel η, $1 > \eta > 0$ tel que $|x - y| < \eta$ implique $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\| \tau_x r - \tau_y r \|_q &\leqslant \| \tau_x r - \tau_x g \|_q + \| \tau_x g - \tau_y g \|_q + \| \tau_y g - \tau_y r \|_q \\
&= 2 \| r - g \|_q + \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x - y + u) - g(u)|^q du\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{poser} \quad u = y - t \\
&= 2 \| r - g \|_q + \left(\int_{-2}^1 |g(x - y + u) - g(u)|^q du\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{des que} \quad |x - y| < 1 \\
&< \left(2 + 3^{\frac{1}{q}}\right)\varepsilon \quad \text{des que} \quad |x - y| < \eta
\end{aligned}$$

D'où la continuité (uniforme) de la fonction $x \to \tau_x r$ de $\mathbb{R}$ dans $L^q(\mathbb{R})$.

(c) Soit $f \in L^p([0, 1])$, pour tout $x, y \in [0, 1]$, on peut écrire

$$Af(x) - Af(y) = \int_{\mathbb{R}} E(f)(t)(r(x - t) - r(y - t))dt = \int_{\mathbb{R}} E(f)(t)(\tau_x r - \tau_x r)(t)dt$$

Par l'inégalité de Hölder, $|Af(x) - Af(y)| \leqslant \| f \|_p \| \tau_x r - \tau_y r \|_q$. On en déduit que $Af \in \mathbb{C}^0([0, 1])$ en utilisant II.5.(b). En outre, pour tout $x \in [0, 1]$, $|Af(x)| \leqslant \| f \|_p \| \tau_x r \|_q = \| f \|_p \| r \|_q$. Donc, $\| Af \|_\infty \leqslant \| f \|_p \| r \|_q$. Il suit que l'opérateur A est continu de $L^p([0, 1])$ dans $\mathbb{C}^0([0, 1])$ et $|||A||| \leqslant \| r \|_q$.

(d) D'après ce qui précède, pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $f \in B_p$, $|Af(x)| \leqslant \| f \|_p \| r \|_q \leqslant \| r \|_q$. Donc, pour tout $x \in [0, 1]$, $A(B_p)(x)$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$. Par ailleurs, $|Af(x) - Af(y)| \leqslant \| \tau_x r - \tau_y r \|_q$, pour tout $x, y \in [0, 1]$ et $f \in B_p$. Donc, la famille $A(B_p)$ est uniformément équicontinue par II.5.(b). On conclut par le théorème d'Ascoli que $A(B_p)$ est une partie relativement compacte de l'espace $\mathbb{C}^0([0, 1])$.

6. On suppose $1 \leqslant p \leqslant 2$.

(a) Soit $\lambda > 0$. Pour vérifier l'appartenance ou non de f_λ à $L^p([0, 1])$, on se ramène à une intégrale de Bertrand en posant $u = \frac{1}{t}$,

$$\| f_\lambda \|_p^p = \int_0^{1/2} (t(-\ln t)^\lambda)^{-p/2} dt = \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^{2-p/2}(\ln u)^{p\lambda/2}}$$

Donc, si $1 \leqslant p < 2$, $f_\lambda \in L^p([0, 1])\ \forall\ \lambda > 0$ et si $p = 2$, $f_\lambda \in L^2([0, 1])$ si et seulement si $\lambda > 1$.

(b) On suppose $2 > \lambda > 0$. D'après ce qui précède, on supposera $2 > \lambda > 1$ si $p = 2$. On a alors $f_\lambda \in L^p([0, 1])$. Pour tout n entier assez grand, il existe une fonction continue g_n sur $[0, 1]$ coïncidant avec f_λ sur $[1/n, 1/2 - 1/n]$ et à support contenu dans $[1/n, 1/2]$ (pour l' existence d'une telle fonction on concidèrera une suite régularisante). Pour tout $x \in [0, 1]$, $f_\lambda(x) \geqslant g_n(x) \geqslant 0$. Par ailleurs, la suite $(g_n)_{n>2}$ converge simplement vers f_λ sur $[0, 1]$. Alors, pour tout $x \in]0, 1[$, $Af_\lambda(x) \geqslant \limsup\limits_n Ag_n(x)$ par le lemme de Fatou. D'autre part, pour tout $x \in]0, 1/n[$,

$$Ag_n(x) = \int_x^1 \frac{g_n(t)}{\sqrt{t - x}} dt \geqslant \int_{1/n}^{1/2-1/n} \frac{f_\lambda(t)}{\sqrt{t}} dt \geqslant \int_{1/n}^{1/2-1/n} t^{-1}(-\ln t)^{-\lambda/2} dt$$

Comme $0 < \lambda < 2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/2} t^{-1}(-\ln t)^{-\lambda/2} dt$ est divergente. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} Af_\lambda(x) = +\infty$.

(c) D'après ce qui précède, si $1 < \lambda < 2$, $f_\lambda \in L^2([0, 1])$ et Af_λ n'est pas continue sur $[0, 1]$ car $\lim\limits_{x\to 0} Af_\lambda(x) = +\infty$.

7. Quasi-nilpotence de A et de V comme éléments de l'algèbre de Banach $\mathcal{L}\left(L^1([0, 1])\right)$.

(a) D'après I.C.1.(b), pour $f \in L^1([0,1])$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $V^{n+1}f(x) = \frac{1}{n!}\displaystyle\int_x^1 (t-x)^n f(t)dt$ presque pour tout $x \in [0,1]$. Soit $\chi_{n,x}$ la fonction définit $[0,1]$ par: $\chi_{n,x}(t) = \frac{1}{n!}(t-x)^n$ si $t \in]x,1]$ et nulle ailleurs. On a alors,

$$\begin{aligned}
\| V^{n+1}f \|_1 &= \int_0^1 \left|V^{n+1}f(x)\right| dx \\
&\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 \chi_{n,x}(t)dx\right)|f(t)|dt \quad \text{par Fubini} \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^1 \left(\int_x^1 (t-x)^n dt\right)|f(t)|dt \\
&= \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\int_0^1 |f(t)|dt \\
&= \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} \| f \|_1 \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \| f \|_1
\end{aligned}$$

Ainsi, $|||V^{n+1}||| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n!)^{-1/n} = 0$ (car $e^n > n^n/n!$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|||V^n|||^{1/n} = 0$.

(b) D'après I.C.4, on a vu que sur $C^0([0,1])$, $A = \sqrt{\pi}V^{1/2}$. Cette égalité s'étend à $L^1([0,1])$ par densité. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{2n} = (A\circ A)^n = \pi^n V^n$. Il suit que $|||A^{2n}|||^{1/2n} = \sqrt{\pi|||V^n|||^{1/n}} \to 0$. D'autre part, $A^{2n+1} = A \circ A^{2n}$. Alors, $|||A^{2n+1}|||^{1/(2n+1)} \leqslant |||A|||^{1/(2n+1)}|||A^{2n}|||^{1/(2n+1)} \to 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}|||A^n|||^{1/n} = 0$.

8. Dans l'algèbre de Banach des opérateurs de $L^1([0,1])$, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{t^n}X^n$ est convergente pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ où X est l'un des opérateurs A et V. En effet, Pour tout réel $t \neq 0$, $|||X^n|||^{1/n} \leqslant \dfrac{|t|}{2}$ à partir d'un certain rang N, d'après II.7. Donc, pour tout $n \geqslant N$, $|||\dfrac{(-1)^n}{t^n}X^n||| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. On pose alors, pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t^n}A^n \quad \text{et} \quad v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t^n}V^n$$

On vérifie aisement que $(I + \frac{1}{t}A)\circ a(t) = I$ et $(I + \frac{1}{t}V)\circ v(t) = I$. D'où

$$(tI+A)^{-1} = \frac{1}{t}a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t^{n+1}}A^n \quad \text{et} \quad (tI+V)^{-1} = \frac{1}{t}v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{t^{n+1}}V^n$$

.

III. Sphères aléatoires

1. La variable aléatoire R suit une loi de densité $f \in L^1([0,1])$ et la variable aléatoire H suit une loi uniforme sur $[0,1]$, alors sa densité est donnée par : $f_H = 1_{[0,1]}$. Les variables aléatoires R et H sont indépendantes, alors la loi du couple (R,H) suit la loi de densité $f_{(R,H)}(r,h) = f(r)f_H(h) = f(r)$, pour tout $(r,h) \in [0,1]^2$.

2. Par convention (voir l'introduction de III.), $P(X=0) = P(H \geqslant R)$. Alors, si $D = \{(r,h) \in [0,1]^2 : h \geqslant r\}$, on a:

$$P(X=0) = \int\int_D f_{(R,H)}(r,h)drdh = \int_0^1\int_0^h f(r)drdh = 1 - \int_0^1 hf(h)dh = 1 - E(R)$$

par intégration par parties où $E(R)$ est l'espérance de R.

3. Soit $x \in [0,1]$, l'évènement $\{X > x\}$ se réalise lorsque $R^2 - H^2 > x^2$. Alors, si $D = \{(r,h) \in [0,1]^2 : r^2 - h^2 > x^2\}$,

$$P(X > x) = \int\int_D f_{(R,H)}(r,h)drdh = \int_x^1\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(r)dhdr = \int_x^1 \sqrt{r^2-x^2}f(r)dr$$

4. Soit $h \in L^1([0,1])$,

$$\| \tilde{h} \|_1 = \int_0^1 \left|\tilde{h}(x)\right| dx = \int_0^1 \frac{|h(\sqrt{x})|}{2\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \left|h(\sqrt{x})\right| d(\sqrt{x}) = \| h \|_1$$

Donc l'application $h \mapsto \tilde{h}$ est un isomorphisme isométrique de $L^1([0,1])$.

5. .

(a) Pour presque tout $u \in]0,1]$ et tout $r \in [u,1]$, $\dfrac{u}{\sqrt{r+u}} \leqslant 1$. Par suite,

$$|\psi(u)| \leqslant u\int_u^1 \frac{|f(r)|dr}{\sqrt{r^2-u^2}} \leqslant \int_u^1 \frac{|f(r)|dr}{\sqrt{r-u}} = A|f|(u)$$

Alors, $\| \psi \|_1 \leqslant \| A|f| \|_1 \leqslant 2 \| f \|_1$. Donc, $\psi \in L^1([0,1])$.

(b) Soit $x \in [0,1]$, on considère la fonction définie sur $[x,1]^2$: $\chi(r,u) = \frac{1}{\sqrt{r^2-u^2}}$ si $r > u$ et nulle ailleurs.

$$\begin{aligned}
P(X > x) &= \int_x^1 \sqrt{r^2-x^2} f(r)dr \quad \text{d'après III.3} \\
&= \int_x^1 \left(\int_x^r \frac{u}{\sqrt{r^2-u^2}}du\right) f(r)dr \quad \text{par l'indication donnée} \\
&= \int_x^1 \left(\int_x^1 \frac{u\chi(r,u)f(r)}{\sqrt{r^2-u^2}}dr\right) du \quad \text{par Fubini} \\
&= \int_x^1 \left(\int_u^1 \frac{uf(r)}{\sqrt{r^2-u^2}}dr\right) du \quad \text{car si} \quad x < r < u, \quad \chi(r,u) = 0 \\
&= \int_x^1 \psi(u)du
\end{aligned}$$

(c) L'égalité de III.5.(b) s'étend par linéarité et convergence monotonne à tout borelien $B \subset]0,1]$:

$$P(X \in B) = \int_0^1 1_B(u)\psi(u)du = \int_B \psi(u)du$$

D'autre part, si B est un borelien de $[0,1]$ contenant 0, alors

$$P(X \in B) = P(X=0) + P(X \in B \setminus \{0\}) = P(X=0) + \int_{B\setminus\{0\}} \psi(u)du = P(X=0) + \int_B \psi(u)du$$

Donc la loi de X est la mesure $P_X = P(X=0)\delta_0 + \psi(u)du$.

6. Soit $u \in]0,1]$,

$$\begin{aligned}
2\tilde{\psi}(u) &= \frac{\psi(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} \\
&= \int_{\sqrt{u}}^1 \frac{f(r)}{\sqrt{r^2-u}}dr \\
&= \int_u^1 \frac{f(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}\sqrt{t-u}}dt \quad \text{poser} \quad r = \sqrt{t} \\
&= \int_u^1 \frac{\tilde{f}(t)}{\sqrt{t-u}}dt = A\tilde{f}(u)
\end{aligned}$$

7. Par les égalités II.4.(b) et III.6, $V\tilde{f} = \dfrac{2}{\pi}A\tilde{\psi}$. Alors pour presque tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_{x^2}^1 \tilde{f}(t)dt = \frac{2}{\pi}A\tilde{\psi}(x^2)$. En posant, $u = \sqrt{t}$, $\displaystyle\int_{x^2}^1 \tilde{f}(t)dt = \int_x^1 f(u)du$. Comme la variable aléatoire R suit la loi de densité f, alors $P(R > x) = \displaystyle\int_x^1 f(u)du = \frac{2}{\pi}A\tilde{\psi}(x^2)$.

8. Soit $\varepsilon > 0$. La v.a. H suit la loi uniforme sur $[0, 1+\varepsilon]$, alors sa densité est donnée par : $f_H = \frac{1}{1+\varepsilon}1_{[0,1+\varepsilon]}$. Les variables aléatoires R et H sont indépendantes, alors la loi du couple (R,H) suit la loi de densité $f_{(R,H)}(r,h) = f(r)f_H(h) = \frac{1}{1+\varepsilon}f(r)$, pour tout $(r,h) \in [0,1] \times [0,1+\varepsilon]$. Ainsi, comme précédemment, pour tout $x \in [0,1]$,

$$P(X > x) = P(R^2 - (H-\varepsilon)^2 > x^2) = \frac{1}{1+\varepsilon}\int_x^1 (\sqrt{r^2-x^2}+\varepsilon)f(r)dr = \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\int_x^1 \sqrt{r^2-x^2}f(r)dr + \varepsilon\int_x^1 f(r)dr\right)$$

Par la même manière que III.7, La loi de X est la mesure P_X sur $[0,1]$:

$$P_X = P(X=0)\delta_0 + \frac{1}{1+\varepsilon}\left(\psi(u)du + \varepsilon f(u)du\right) = P(X=0)\delta_0 + \phi(u)du \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{1}{1+\varepsilon}(\psi + \varepsilon f)$$

Par linéarité, $2(1+\varepsilon)\tilde{\phi} = 2\tilde{\psi} + 2\varepsilon\tilde{f} = A\tilde{f} + 2\varepsilon\tilde{f} = (2\varepsilon I + A)\tilde{f}$

IV. Problèmes bien et mal posés

1. Soit $h \in L^1([0,1])$ et $g = Ah$.

(a) On a vu que A est un opérateur de $L^1([0,1])$ injectif et non surjectif. En revanche, A^{-1} est une application linaire non continue sur $Im(A)$. Sinon, il existe $c >$ tel que pour tout $f \in L^1([0,1])$, $\| f \|_1 \leqslant c \| Af \|_1$. Pour $n > 0$, on pose $f_n = 1_{[0,1/n]}$. Pour tout $x \in]0,1]$ et tout $n > 1/x$, $Af_n(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{f_n(t)}{\sqrt{t-x}} dt = 0$. Alors,

$$\| Af_n \|_1 = \int_0^{1/n} Af_n(x)dx = \int_0^{1/n}\int_x^{1/n} \frac{1}{\sqrt{t-x}} dtdx = 2\int_0^{1/n}\sqrt{\frac{1}{n} - x}dx = \frac{4}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$$

Donc, $\| f_n \|_1 \leqslant c \| Af_n \|_1$ pour tout $n > 0$ implique $\frac{1}{n} \leqslant \dfrac{4c}{3n^{3/2}}$, pour tout $n > 0$ d'où une contadiction.

(b) Soit $t \in \mathbb{R}^*$, d'après II.8, l'opérateur $tI + A$ est bijectif et $(tI+V)^{-1}$ est continu d'après le théorème de Banach. Alors, le problème $(tI + A)f = g$ est bien posé. L'unique solution est $f_t = (tI + A)^{-1}g$.

2. Pour $h \in L^1([0,1])$ et $s > 0$. Soit $f_{s,V}$ l'unique solution du problème $(sI + V)f_{s,V} = Vh$.

(a) On pose $y = Vf_{s,V}$. On a alors $y = V(sI+V)^{-1}Vh = V^2(g)$ où $g = (sI+V)^{-1}h$ car V et $(sI+V)^{-1}$ commutent d'après II.8, par linéarité et continuité. D'après le théorème fondamental de l'analyse et puisque $g \in L^1([0,1])$, Vg est continue sur $[0,1]$. On en déduit que $y = V^2g = V(Vg)$ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et $y' = -Vg = -f_{s,V}$. Alors y vérifie l'équation différentielle $y - sy' = Vh$ et $y(1) = 0$ dont la solution est donnée par $y = \dfrac{e^{x/s}}{s}\displaystyle\int_x^1 e^{-t/s}Vh(t)dt$ que l'on peut écrire $y = E(Vh) * k_s$ ou encore $Vf_{s,V} = E(Vh) * k_s$.

(b) Pour tout $x \in [0,1]$, $(E(h) * k_s)(x) = \frac{1}{s}\displaystyle\int_0^1 h(t)k\left(\frac{x-t}{s}\right)dt = \frac{1}{s}\int_x^1 h(t)e^{\frac{x-t}{s}}dt = \frac{e^{\frac{x}{s}}}{s}\int_x^1 h(t)e^{\frac{-t}{s}}dt$. Alors

$$\begin{aligned}
V(E(h)*k_s)(x) &= \int_x^1 \frac{e^{\frac{u}{s}}}{s}\int_u^1 h(t)e^{\frac{-t}{s}}dtdu \\
&= \left[e^{\frac{u}{s}}\int_u^1 h(t)e^{\frac{-t}{s}}dt\right]_x^1 + \int_x^1 h(u)du \\
&= -e^{\frac{x}{s}}\int_x^1 h(t)e^{\frac{-t}{s}}dt + Vh(x) \\
&= -s(E(h)*k_s)(x) + Vh(x)
\end{aligned}$$

Donc, $(sI + V)(E(h) * k_s) = Vh$. Par unicité, $E(h) * k_s = f_{s,V}$ dans $L^1([0,1])$.

3. Soit $h \in L^1([0,1])$ et $s > 0$.

(a) D'après IV.2.(b), $E(h) * k_s = f_{s,V} = (sI + V)^{-1}Vh$, alors

$$\| (sI+V)^{-1}Vh \|_1 = \| E(h)*k_s \|_1 \leqslant \| E(h) \|_1 \| k_s \|_1 = \| k_s \|_1 \| h \|_1$$

Par ailleurs, $\| k_s \|_1 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} k\left(\frac{t}{s}\right)d\left(\frac{t}{s}\right) = \int_{\mathbb{R}} k(x)dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx = 1$. Donc, $|||(sI+V)^{-1}V||| \leqslant 1$.

(b) On a : $I = (sI+V)^{-1}(sI+V) = s(sI+V)^{-1} + (sI+V)^{-1}V$ alors $s|||(sI+V)^{-1}||| \leqslant 1 + |||(sI+V)^{-1}V||| \leqslant 2$. D'où $|||(sI+V)^{-1}||| \leqslant \dfrac{2}{s}$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$, d'après II.5.(b), il exite $\alpha > 0$ tel que $|t| < \alpha$ implique $\| \tau_0 E(h) - \tau_t E(h) \|_1 < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\| h - f_{s,V} \|_1 &= \| h - E(h)*k_s \|_1 \quad \text{d'après IV.3.(c)} \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left|E(h)(x) - \left(\int_{\mathbb{R}} E(h)(x-t)k_s(t)dt\right)\right|dx \quad \text{car} \quad E(h)*k_s = k_s*E(h) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} k_s(t)\left(\int_{\mathbb{R}}|E(h)(x) - E(h)(x-t)|\,dx\right)dt \quad \text{par Fubini et} \quad \int_{\mathbb{R}} k_s(t)dt = 1 \\
&= \int_{\mathbb{R}} \| \tau_0 E(h) - \tau_{-t}E(h) \|_1 \, k_s(t)dt \quad \text{II.5.(b)} \\
&\leqslant \varepsilon + 2\| h \|_1 \int_{|t|>\alpha} k_s(t)dt \leqslant (1 + 2\| h \|_1)\varepsilon \quad \text{pour un} \quad \alpha > 0 \quad \text{assez petit et} \quad 0 < s < \alpha
\end{aligned}$$

4. Soit x, t deux réels > 0, et $\alpha \in]0,1[$. On considère la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $F(z) = \dfrac{1}{(z+t^2)(z+x)}$

L'intégrale en question de la forme $\int_0^\infty s^\alpha F(s)ds$ avec F est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ sauf aux points $-t^2$ et $-x$ qui sont des pôles réels négatifs. 0 est un point de branchement pour la fonction puissance. On coupe le long du demi axe des réels positifs. Soit alors γ le lacet, juxtaposition des 4 chemins suivants : le cercle $C_R : \theta \to Re^{i\theta}$ avec $R > \max(t^2, x)$, le cercle $C_r : \theta \to re^{i\theta}$ avec $0 < r < \min(t^2, x)$, le segment $[R, r]$ sur le bord inférieure de la coupure et le segment $[r, R]$ sur le le bord supérieure de la coupure. D'après le théorème des résidus,

$$\int_\gamma z^\alpha F(z)dz = 2i\pi(Res(-t^2) + Res(-x))$$

Comme $\lim\limits_{[z|\to+\infty} |z^{1+\alpha}F(z)| = 0$ et $\lim\limits_{[z|\to 0} |z^{1+\alpha}F(z)| = 0$ alors, par le lemme de Jordan,

$$(1 - e^{2i\alpha\pi}) \int_0^\infty s^\alpha F(s)ds = 2i\pi(Res(-t^2) + Res(-x))$$

$Res(-x) = \lim\limits_{z\to -x} \dfrac{z^\alpha}{z+t^2} = \dfrac{(e^{i\pi}x)^\alpha}{t^2 - x}$. De même, $Res(-t^2) = \lim\limits_{z\to -t^2} \dfrac{z^\alpha}{z+x} = \dfrac{(e^{i\pi}t^2)^\alpha}{x - t^2}$. Donc,

$$\int_0^\infty s^\alpha F(s)ds = \frac{-2i\pi e^{i\alpha\pi}}{1 - e^{2i\alpha\pi}} \frac{t^{2\alpha} - x^\alpha}{t^2 - x} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{t^{2\alpha} - x^\alpha}{t^2 - x}$$

5. Soit $t > 0$,

$$\begin{aligned}
|||(tI+A)^{-1}||| &= |||(tI + \sqrt{\pi}V^{1/2})^{-1}||| \quad \text{car} \quad A = \sqrt{\pi}V^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} |||(\frac{t}{\sqrt{\pi}} I + V^{1/2})^{-1}||| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}|||(sI+V)^{-1}|||}{s + t^2/\pi} ds \quad \text{par le calcul fonctionnel holomorphe} \\
&\leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{s(\pi s + t^2)} ds \quad \text{d'après IV.3.(b)} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\pi s}}{\pi s(\pi s + t^2)} d(\pi s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{s(s+t^2)} ds \\
&= \frac{2}{\pi} \lim_{x\to 0^+} \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{(s+x)(s+t^2)} ds \quad \text{par le théorème de convergence dominée} \\
&= \frac{2}{t} \quad \text{par l'égalité IV.4.(3)}
\end{aligned}$$

6. et 7. Soit $h \in L^1([0,1])$. Pour tout $t > 0$, l'équation $(tI + A)f_t = g$ est équivalente à $f_t = (tI + A)^{-1}Ah$.

$$\begin{aligned}
(tI+A)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} A^n \quad \text{D'après II.8.} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{t^{2n+1}} A^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{t^{2n+2}} A^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi^n}{t^{2n+1}} V^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi^n}{t^{2n+2}} AV^n \quad \text{car} \quad A^2 = \pi V \\
&= \frac{t}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(t^2/\pi)^{n+1}} V^n - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(t^2/\pi)^{n+1}} AV^n \\
&= \frac{t}{\pi} \left(\frac{t^2}{\pi} I - V\right)^{-1} - \frac{1}{\pi} A \left(\frac{t^2}{\pi} I - V\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Alors, $f_t = (tI+A)^{-1}Ah = \dfrac{t}{\pi}\left(\dfrac{t^2}{\pi}I - V\right)^{-1} Ah - \left(\dfrac{t^2}{\pi}I - V\right)^{-1} Vh = \dfrac{t}{\pi}\left(\dfrac{t^2}{\pi}I - V\right)^{-1} Ah + f_{\frac{t^2}{\pi}, -V}$. L'opérateur $-V$ a les mêmes propriétés que V. On en déduit que $\lim\limits_{t\to 0^+} f_t = \lim\limits_{t\to 0^+} f_{\frac{t^2}{\pi}, -V} = h$.