Fonctions et Variations - Notes de cours

Lionel Pournin

19 octobre 2012

Chapitre 1

Fondements

Ce chapitre présente les notions fondamentales nécessaires au développement d'un cours de mathématiques de première année universitaire. Il y sera question des nombres réels et de leur utilisation.

1.1 Nombres

On distingue plusieurs types de nombres. Les nombres entiers non-négatifs (0, 1, 2, 3, ...) sont appelés des *entiers naturels*. Il y a une infinité d'entiers naturels. L'ensemble de ces entiers est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$

Dans cette définition, les accolades { et } signifient que les nombres 0, 1, 2, 3, ... *appartiennent* à l'*ensemble* $\mathbb{N}$. En d'autres mots, on peut imaginer que $\mathbb{N}$ est un "sac" contenant tous les nombres entiers.

Si x et y sont deux nombres entiers naturels, on sait définir leur somme $x+y$, leur différence $x-y$, leur produit $x \times y$ (aussi noté $x.y$ où simplement xy), et si y n'est pas égal à 0, on sait définir la fraction x/y. Par exemple si $x = 2$ et $y = 3$:

$$2 + 3 = 5\,;\ 2 - 3 = -1\,;\ 2 \times 3 = 6\,;\ 2/3 = 0,6666666...$$

La différence $2 - 3$ n'est pas un entier naturel, puisque c'est un nombre négatif. L'ensemble $\mathbb{N}$ ne contient donc pas tous les nombres. Cela conduit à définir l'ensemble $\mathbb{Z}$ de tous les entiers positifs et négatifs. On appelle cet ensemble l'ensemble des *entiers relatifs* :

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$

On remarque également que $2/3$ n'est pas un entier : il n'appartient ni à $\mathbb{N}$, ni à $\mathbb{Z}$. C'est-une fraction (dont le numérateur est 2 et le dénominateur est 3). Par conséquent, $\mathbb{Z}$ ne contient pas tous les nombres lui non plus. Les fractions dont le numérateur et le dénominateur sont entiers sont appelés des *nombres rationnels*. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. Les nombres entiers sont aussi des nombres rationnels, puisqu'ils peuvent être obtenus comme des fractions dont le dénominateur est égal à 1.

Dans l'antiquité, les Grecs croyaient que tous les nombres étaient des nombres rationnels jusqu'à ce qu'ils découvrent un argument simple [1] leur permettant de prouver que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. De tels nombres sont appelés irrationnels. De nombreux autres nombres irrationnels ont été découverts :

i. π ($\approx 3,14157$), la circonférence d'un cercle de diamètre 1,
ii. e ($\approx 2,718$), la base de l'exponentielle,
iii. $\sqrt{n}$ quand l'entier n n'est pas le carré d'un entier naturel (par exemple $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$...).

En d'autres mots, l'ensemble $\mathbb{Q}$ peut être complété en en y ajoutant les nombres irrationnels. L'ensemble obtenu est appelé l'ensemble des *nombres réels* et est noté $\mathbb{R}$. L'ensemble des nombres réels peut être représenté géométriquement comme une droite *continue*.

1.2 Variables, paramètres, inconnues

En mathématiques, il est très courant de remplacer un nombre par une lettre. Ceci permet d'utiliser un nombre sans en spécifier la valeur. Un autre avantage de cette pratique est qu'elle permet d'exprimer des propriétés portant sur plusieurs nombres. Considérons par exemple la propriété suivante :

« Tous les entiers naturels admettent une racine carrée réelle. »

Rappelons que les entiers négatifs n'admettent pas de racine carré réelle. La propriété ci-dessus peut aussi être écrite de la manière suivante :

« Si a est un entier naturel, alors a admet une racine carrée réelle. »

Dans cette reformulation, a peut-être n'importe quel entier naturel. En d'autre mots, a est un entier naturel dont on ne précise pas la valeur. Bien-sûr, dans le cas de cette propriété simple, la deuxième formulation n'est pas plus pratique à utiliser que la première.

Supposons maintenant que x est un nombre réel tel que $x + 1 = 0$. Ce genre de formulation permet de définir un nombre, ou un ensemble de nombres, sans en donner explicitement la valeur. Cela est très pratique, parce que justement on ne sait pas toujours les valeurs possibles de x. Dans cet exemple, x est bien-sûr égal à -1, mais une solution facile n'est pas toujours immédiatement accessible !

Quand un nombre est remplacé par une lettre, cette lettre est une *variable* ou un *paramètre*. Les lettres x, y, z sont habituellement utilisées pour dénoter des variables, tandis que les paramètres sont plutôt dénotés a, b, c, ... ou par des lettres grecques. Ces habitudes ne sont pas des règles absolues mais elles sont bien pratiques pour fixer les idées lorsque l'on effectue un calcul. Quand une lettre est utilisée pour dénoter un nombre dont on ne connait pas la valeur mais qui est défini implicitement (par exemple par une équation) comme dans le deuxième exemple, cette lettre est appelée une *inconnue*.

Considérons un autre exemple. Soient a, b deux nombres réels. Si on cherche à trouver un troisième nombre réel x tel que $ax + b = 0$, alors a et b sont les paramètres du problème et x en est l'inconnue. Ce genre de formulations peut être utilisé dans le cas de problèmes beaucoup plus compliqués.

1. Cet argument est exposé dans la section 1.7

1.3 Opérations

Les quatre opérations $+$, $-$, $\times$ et / peuvent bien sûr être utilisées dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. L'objectif de cette section est de décrire les propriétés de ces opérations pour pouvoir les utiliser efficacement dans un calcul.

1.3.1 L'addition, la multiplication et l'utilisation des parenthèses

Les règles d'utilisation de l'addition et de la multiplication peuvent être réduites aux quatre propriétés suivantes :

Axiome 1 (commutativité)**.** *Le réultat d'une addition où d'une multiplication ne dépend pas de l'ordre des termes. Par exemple* $3 + 4 = 4 + 3$ *et* $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Axiome 2 (associativité)**.** *Le réultat d'une suite d'additions où d'une suite de multiplications ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les opérations. Par exemple, sommer* 3 *avec* 4*, puis ajouter* 2*, ou sommer* 2 *avec* 3*, puis ajouter* 4 *sont deux suites d'opérations qui donnent le même résultat :*

$$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$$

La même règle s'applique à la multiplication, par exemple : $2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$.

Axiome 3 (existence d'un élément neutre)**.** *L'addition et la multiplication disposent chacune d'un élément neutre, c'est-à-dire d'un nombre qui n'a pas d'influence quand on effectue l'opération. L'élément neutre de l'addition est* 0 *car un nombre n'est jamais modifié si on lui ajoute* 0 *:* $a + 0 = a$*. L'élément neutre de la multiplication est* 1 *car un nombre n'est jamais modifié si on le multiplie par* 1 *:* $a \times 1 = a$*. On dit en outre que* 0 *est l'élément absorbant (pour la multiplication), car son produit avec n'importe quel nombre est* 0.

Axiome 4 (distributivité de la multiplication sur l'addition)**.** *Contrairement aux trois autres propriétés, la distributivité ne concerne pas d'addition et la multiplication de manière indépendante. C'est plutôt d'une propriété de la multiplication par rapport à l'addition. On dit que multiplication est distributive sur l'addition. Cette propriété donne la possiblité de développer le produit d'un nombre et d'une somme de deux nombres (ou de faire la factorisation inverse) :*

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

Ces quatre propriétés sont essentielles. On les utilise dans presque tous les calculs, la plupart du temps sans y penser. Bien-sûr, il serait fastidieux, et très ennuyeux de déterminer la succession de ces règles qu'on applique pendant un calcul. L'important est donc de savoir utiliser ces règles, mais pour être sûr de ne pas se tromper, il est nécessaire de les connaitre et de savoir les énoncer.

On peut voir quand dans les énoncés de l'associativité et de la distributivité, l'utilisation des parenthèses est nécéssaire. Dans une expression comportant plusieurs opérations, les parenthèses donner l'ordre dans lequel ces opérations doivent être effectués. Par exemple dans l'expression :

$$4 \times (8 + 1),$$

on doit d'abord effectuer l'opération qui est à l'intérieur des parenthèses, c'est-à dire la somme $8{+}1$, et on multiplie ensuite le résultat de cette addition par 4. L'expression $(4{\times}8){+}1$ dans laquelle les parenthèses sont placées autrement n'aura pas la même valeur parce que la multiplication est effectuée avant l'addition. Dans certains cas, l'ordre dans lequel les opérations doivent être effectuées n'est pas unique. Dans l'expression :

$$(4+2)\times(7-5),$$

il est possible d'effectuer d'abord la somme $4 + 2$, puis la différence $7 - 5$, puis enfin le produit, mais on obtiendra le même résultat en effectuant d'abord la différence, puis la somme et finalement le produit :

$$\begin{aligned}(4+2)\times(7-5) &= 6\times(7-5)\\ &= 6\times 2\\ &= 12\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(4+2)\times(7-5) &= (4+2)\times 2,\\ &= 6\times 2,\\ &= 12.\end{aligned}$$

En général, dans une expression, on ne peut pas effectuer la somme ou le produit de deux valeurs si l'une ou l'autre des ces valeurs n'a pas été calculée. Considérons par exemple l'expression suivante :

$$(3+5\times(4-2))\times(5-1). \tag{1.1}$$

Il n'est pas possible d'effectuer en premier le produit $5\times(4-2)$, parce que le deuxième terme de ce produit (c'est-à-dire $4-2$) n'a pas encore été calculé et qu'on ne connait donc pas encore sa valeur. On en déduit que la soustraction $4-2$ doit être effectuée avant ce produit, c'est d'ailleurs pour signifier cela que $4-2$ a été mis entre parenthèses. De même, le produit de $3+5\times(4-2)$ et de $5-1$ ne peut pas être effectué avant que les valeurs de $3+5\times(4-2)$ et de $5-1$ n'aient été calculées ; on remarque de nouveau que ces deux termes sont mis entre parenthèses dans l'expression (1.1).

Finalement, remarquons que quand une expression comporte beaucoup de parenthèses, elle est parfois difficile à lire et à manipuler. Pour gagner en clarté, il arrive qu'on utilise des crochets « [» et «] », ou bien des accolades « { » et « } » à la place des parenthèses.

1.3.2 L'opposé, la soustraction et l'utilisation des signes

L'utilisation des signes et la soustraction sont basées sur l'existence d'un opposé pour chaque nombre réel.

Définition 1 (opposé). *L'opposé d'un nombre réel a est le produit de a et de -1. L'opposé de a est dénoté $-a$:*

$$-a = -1\times a. \tag{1.2}$$

Définir l'opposé ne suffit pas, il faut aussi définir la manière dont on l'utilise :

Axiome 5 (opposé). *La somme d'un nombre réel a avec son opposé vaut toujours 0 :*

$$a + (-a) = 0. \tag{1.3}$$

Inversement, si la somme de a avec un nombre b est égale à 0, alors $b = -a$.

On en déduit qu'un nombre est toujours égal à l'opposé de son opposé (on dit que l'opposé est une opération involutive, ou que c'est une involution) :

Proposition 1. *Pour tout nombre réel a,*

$$-(-a) = a. \tag{1.4}$$

Il est possible de montrer que le carré de -1 est 1 en utilisant uniquement l'équation (1.4) et la définition de l'opposé, c'est-à-dire l'équation (1.2) :

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & -(-1) & \text{En remplaçant } a \text{ par } 1 \text{ dans } (1.4). \\ & = & (-1) \times (-1) & \text{En remplaçant } a \text{ par } -1 \text{ dans } (1.2). \end{array}$$

La soustraction peut en fait se réduire à une addition puisqu'elle consiste à sommer un nombre avec l'opposé d'un deuxième :

Définition 2 (soustraction)**.** *Si a et b sont deux nombres réels, soustraire b à a revient à sommer a et l'opposé de b :*

$$a - b = a + (-b). \tag{1.5}$$

Pour cette raison, les théories classiques ne prennent pas la peine de définir explicitement la soustraction, puisqu'en fait elle n'est qu'une addition particulière. La remarque sera faite plus loin au sujet de la division. Les propriétés énoncées jusqu'ici permettent de démontrer que la multiplication est distributive sur la soustraction, c'est-à-dire l'égalité $a \times (b-c) = a \times b - a \times c$. En effet, cette égalité peut être établie en en utilisant uniquement les quatre propriétés de l'addition et de la multiplication, ainsi que les définitions de l'opposé (equation (1.2)) et de la soustraction (equation (1.5)) :

$$\begin{array}{rcll} a \times (b-c) & = & a \times (b + (-c)) & \text{Par définition de la soustraction} \\ & = & a \times (b + (-1 \times c)) & \text{Par définition de l'opposé} \\ & = & a \times b + a \times (-1 \times c) & \text{Distributivité de la multiplication sur l'addition} \\ & = & a \times b + (a \times -1) \times c & \text{Associativité de la multiplication} \\ & = & a \times b + (-1 \times a) \times c & \text{Commutativité de la multiplication} \\ & = & a \times b + (-1) \times (a \times c) & \text{Associativité de la multiplication} \\ & = & a \times b + (-a \times c) & \text{Par définition de l'opposé} \\ & = & a \times b - a \times c & \text{Par définition de la soustraction} \end{array}$$

Ce raisonnement peut paraitre fastidieux, mais en contrepartie il est (très) détaillé et précis : chaque étape présente une opération élémentaire justifiée par des règles déjà énoncées (et qu'on a posées comme vraies). Ainsi cette suite d'arguments peut être appelée une preuve (ou démonstration). La section 1.7 est dédiée à cette notion.

Les quatre propriétés de l'addition et de la multiplication données précédemment, et la définition de la soustraction ne permettent pas de mener à bien tous les calculs. Il reste en effet à définir la division.

1.3.3 La division et le calcul avec des fractions

La définition et l'utilisation de l'inverse rappelle celles de l'opposé mais dans le cas de la multiplication.

Définition 3 (inverse)**.** *L'inverse d'un nombre réel non-nul a est la fraction dont le dénominateur est ce nombre et dont le numérateur est 1, c'est-à-dire $1/a$.*

Comme pour l'opposé, un axiome particulier doit être énoncé pour expliquer comment l'inverse s'utilise :

Axiome 6 (inverse)**.** *Le produit d'un nombre non-nul avec son inverse est toujours égal à 1 :*

$$a \times \frac{1}{a} = 1. \tag{1.6}$$

Inversement, si le produit de deux nombres est égal à 1, alors ils sont l'inverse l'un de l'autre (on remarque qu'ils sont nécéssairement non-nuls dans ce cas).

Par conséquent, un nombre réel non-nul est toujours égal à l'inverse de son inverse (comme l'opposé, l'inverse est une opération involutive) :

Proposition 2. *Pour tout nombre réel a,*

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a \tag{1.7}$$

Nous allons maintenant définir la division. Cette opération peut être réduite à une multiplication puisqu'elle consiste à multiplier par l'inverse d'un nombre non-nul :

Définition 4 (division)**.** *Si a et b sont deux nombres réel et si b est non nul alors diviser a par b revient à multiplier a par l'inverse de b :*

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}. \tag{1.8}$$

Puisque la soustraction peut être ramenée à une addition (d'après (1.5)) et la division à une multiplication (d'après (1.8)), les théories classiques considèrent seulement deux opérations : l'addition et la multiplication. En pratique, la soustraction et la division sont nécessaire pour pouvoir venir à bout d'un calcul. Il faut noter que la division est souvent la plus difficile à utiliser des quatre opérations. Ces observations restent donc théoriques et ne justifient pas d'abandonner la soustraction et la division lorsqu'on fait un calcul !

Avec la définition de la division, les quatre propriétés de l'addition et de la multiplication données ci-dessus constituent les bases du calcul. Il faut noter qu'en théorie, l'opposé et l'inverse d'un nombre peuvent être définis de manière légèrement différente que dans ce texte, mais tout à fait équivalentes dans le cas des nombres réels et complexes.

Il s'agit maintenant de rappeler les règles de calcul avec les fractions. Toutes ces règles peuvent être retrouvées en utilisant les propriétés énoncées plus haut, mais pour être efficace il faut éviter d'avoir à les retrouver au milieu d'un calcul ! Ces règles sont donc à connaitre au point de pouvoir les appliquer sans y penser. Pour commencer, le produit de deux fractions est la fraction dont le numérateur est le produit des numérateurs et dont le dénominateur est le produit des dénominateurs :

$$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}. \tag{1.9}$$

Si, dans cette égalité d vaut 1, alors on obtient la propriété suivante : un terme multiplicatif au numérateur d'une fraction peut être factorisé :

$$\frac{a \times b}{c} = a \times \frac{b}{c}.$$

La somme de deux fractions est une fraction dont le dénominateur est le produit des dénominateurs et dont le numérateur est le produit en croix des quatre termes :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Si les deux numérateurs sont compliqués, cette règle peut être fastidieuse à appliquer :

$$\frac{1}{5002} + \frac{1}{10004} = \frac{1 \times 10004 + 3 \times 5002}{5002 \times 10004} = \frac{25010}{50040008}.$$

Il est cependant parfois possible de simplifier le calcul quand les deux dénominateurs possèdent un facteur multiplicatif commun. Si ces deux dénominateurs sont des nombres entiers, ce facteur multiplicatif commun peut-être leur PGCD (c'est-à-dire leur Plus Grand Commun Diviseur, qui peut être calculé en appliquant l'algorithme d'Euclide). Quand les deux dénominateurs possèdent un facteur multiplicatif commun, il est utile de factoriser par ce facteur avant pour simplifier le calcul. Dans l'exemple ci-dessus, on remarque que les deux dénominateurs sont des facteurs de 5002 ($5002 = 1 \times 5002$ et $10004 = 2 \times 5002$). Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{5002} + \frac{1}{10004} &= \frac{1}{5002} + \frac{1 \times 1}{2 \times 5002} \\ &= 1 \times \frac{1}{5002} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5002} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{5002} \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{1}{5002} = \frac{3}{10004}. \end{aligned}$$

En général, si les deux dénominateurs sont le produit d'un nombre e avec un autre nombre, la règle d'addition des fractions s'énonce donc de la manière suivante :

$$\frac{a}{e \times b} + \frac{c}{e \times d} = \frac{1}{e} \times \left(\frac{ad + bc}{bd}\right).$$

Comme il a déjà été mentionné, un nombre non-nul est toujours égal à l'inverse de son inverse. Il en découle qu'une fraction dont le numérateur est une fraction se simplifie de la manière suivante :

$$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}. \tag{1.10}$$

On remarque que cette simplification consiste à faire monter le terme c au numérateur. Si une fraction admet une fraction au numérateur, la simplification est différente :

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \tag{1.11}$$

Cette fois, c'est le terme b qui passe au dénominateur. L'opposé d'une fraction peut être obtenu en multipliant le numérateur ou le dénominateur de cette fraction par -1 :

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}.$$

Avant de passer à la suite, nous allons démontrer l'égalité (1.10) en utilisant seulement la définition de la division, les propriétés de la multiplication et l'équation (1.9) :

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{\frac{b}{c}} &= a \times \frac{1}{\frac{b}{c}} && \text{Définition de la division (équation (1.8)).} \\
&= a \times \frac{1}{b \times \frac{1}{c}} && \text{Définition de la division.} \\
&= a \times \frac{1 \times 1}{b \times \frac{1}{c}} && \text{L'élément neutre de la multiplication est 1.} \\
&= a \times \left(\frac{1}{b} \times \frac{1}{\frac{1}{c}} \right) && \text{Produit de deux fractions (équation (1.9)).} \\
&= a \times \left(\frac{1}{b} \times c \right) && \text{L'inverse est une opération involutive (équation (1.7)).} \\
&= a \times \left(c \times \frac{1}{b} \right) && \text{Commutativité de la multiplication.} \\
&= (a \times c) \times \frac{1}{b} && \text{Associativité de la multiplication.} \\
&= \frac{ac}{b} && \text{Définition de la division.}
\end{aligned}
$$

1.3.4 Exercices

Exercice 1. Monter que, si a et b sont deux nombres réels, alors $(-a) \times b = a \times (-b)$. Pour cela vous utiliserez uniquement la definition de l'opposé, la commutativité et l'associativité.

Exercice 2. Monter que, si a et b sont deux nombres réels non nuls, alors :

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}.$$

Pour cela vous utiliserez l'axiome de l'inverse, l'associativité et la commutativité. Déduisez-en l'équation (1.9), en utilisant uniquement les trois mêmes axiomes.

Exercice 3. Monter que la division est distributive sur l'addition et sur la soustraction en utilisant uniquement les sept propriétés suivantes : la définition de la soustraction, la définition de la division, la définition de l'opposé, la définition de l'inverse, la commutativité de la multiplication, l'associativité de la multiplication, la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exercice 4. Effectuer les calculs suivants, en faisant les opérations une par une dans un ordre compatible avec le placement des parenthèses :

i. $(3 + 2) \times (8 - 1)$,

ii. $(5 + 2 \times (6 - 3)) \times (7 - 4)$,

iii. $((1 - 3) \times 6 + (2 - 7) \times (6 - 3)) \times \left(\frac{7 - 4 \times (6 - 2)}{3} \right)$,

iv. $\dfrac{9 \times (5 + 3 \times (\frac{6+2\times2}{5})) + 1}{(2 + 9 - 3 \times 2)^2} + \dfrac{\sqrt{6^2 - 5^2}}{(256 - 15 \times 17) \times 2}$.

Exercice 5. On considère trois nombres a et b. Développer l'expression $(a+b)\times(2\times a+b)$ en précisant à chaque étape la règle utilisée.

Exercice 6. On considère trois nombres a, b et c. Développer l'expression $(a+b+c)\times(a+b-c)$ en précisant à chaque étape la règle utilisée.

Exercice 7. Ecrire l'expression $1/(a/(b/(c/(d/(e/(f/g))))))$ comme une fraction dans laquelle a, b, c, d, e, f et g sont multipliés les uns par les autres au numérateur ou au dénominateur.

Exercice 8. Ecrivez les sommes et les différences suivantes comme des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont entiers :

i. $\frac{77}{84}-\frac{176}{165}$,

ii. $\frac{91}{416}+\frac{35}{336}$,

iii. $\frac{55}{132}+\frac{35}{90}-\frac{66}{36}$,

iv. $\frac{56}{48}+\frac{21}{28}-\frac{52}{117}$,

v. $\frac{16}{60}-\frac{49}{63}+\frac{104}{65}$,

vi. $\frac{45}{70}-\frac{20}{16}-\frac{18}{48}$,

vii. $\frac{115}{25}-4$,

viii. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{24}$.

Exercice 9. D'après la définition de l'inverse énoncée au début de la section 1.3.3, *si le produit de deux nombres est égal à* 1 *alors ces deux nombres sont l'inverse l'un de l'autre.* En utilisant uniquement cette propriété, l'équation (1.6) et les propriétés de la multiplication, démontrer l'égalité suivante :

$$\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{1}{a\times b}. \tag{1.12}$$

Obtenir l'égalité (1.9) énoncée dans la section 1.3.3 en utilisant uniquement l'équation (1.12), la définition de la division et les propriétés de la multiplication.

Exercice 10. Démontrer l'équation (1.11) de la section 1.3.3 en utilisant uniquement la définition de la division et la propriété (1.9).

1.4 Premières généralisations

Les opérations définies dans la section précédentes peuvent être généralisées. Ces généralisations permettent de calculer plus vite et de prendre du recul sur certaines expressions mathématiques. Cette section présente certaines de ces généralisations.

1.4.1 Puissances et racines

La puissance consiste à multiplier un nombre par lui-même un certain nombre de fois.

Définition 5 (puissance)**.** *Si n est un entier naturel, la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre réel a est obtenue en multipliant ce nombre par lui-même $n-1$ fois. Cette puissance est notée a^n et l'entier n est appelé exposant :*

$$a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a\times a}_{n-1\ \text{multiplications}}. \tag{1.13}$$

Le carré d'un nombre, qui est la puissance la plus naturelle, est obtenue en multipliant ce nombre par lui-même. Le carré d'un nombre a est noté a^2 :

$$a^2 = a \times a.$$

Par exemple $2^2 = 2 \times 2 = 4$; $3^2 = 3 \times 3 = 9$, etc... Le carré admet de nombreuses propriétés importantes. Par exemple, le carré de tout nombre réel est un nombre non-négatif. Une autre propriété importante, dont la démonstration est laissée au lecteur est que le carré de tout nombre réel ou complexe est égal au carré de son opposé :

$$(-a)^2 = a^2.$$

Le cube d'un nombre est le produit de ce nombre avec son carré. Autrement dit, le cube d'un nombre est ce nombre multiplié deux fois par lui-même :

$$a^3 = a \times a^2 = a \times a \times a.$$

Si $n = 1$, le membre de droite de l'équation (1.13) contient une seule fois a et aucune multiplication. Autrement dit :

$$a^1 = a. \tag{1.14}$$

Plus haut, le cube d'un nombre a été calculé en fonction de son carré. Il est possible de généraliser cela à la puissance $\text{n}^{\text{ième}}$ en isolant un des termes dans le membre de droite de l'équation (1.13) :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a \times a}_{n-1 \text{ multiplications}} = a \times \underbrace{(a \times a \times a \times ... \times a \times a)}_{n-2 \text{ multiplications}} = a \times a^{n-1}.$$

Notons que l'égalité (1.13) semble au premier abord ne pouvoir être écrite que pour $n \geq 1$. En effet, si n est égal à 0, alors « $n - 1$ multiplications » signifie « -1 multiplication », ce qui parait ne pas avoir de sens. Cependant, on peut traduire intuitivement « -1 multiplication » par l'inverse d'une multiplication, c'est-à-dire une division. En suivant ce raisonnement un peu audacieux, l'équation (1.13) devient, pour un nombre a non-nul :

$$a^0 = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a \times a}_{-1 \text{ multiplication}} = a/a = 1. \tag{1.15}$$

Il est donc habituel de prendre comme convention que $a^0 = 1$ pour tout nombre a non-nul. On dit aussi que 0^0 n'est pas défini, puisque si on remplaçait a par 0 dans (1.15), on obtiendrait que 0^0 est égal à $0/0$ qui est indéfini.

En poussant un peu ce raisonnement, si on traduit « $-n$ multiplications » par « n divisions », alors en remplaçant n par $-n$ dans l'équation (1.13), on obtient pour un nombre réel a non-nul :

$$\begin{aligned}
a^{-n} &= \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a \times a}_{-n-1 \text{ multiplications}} \\
&= \underbrace{((((a/a)/a)/...)/a)/a}_{n+1 \text{ divisions}}. && \text{En traduisant « } -n-1 \text{ multiplications »} \\
& && \text{par « } n+1 \text{ divisions »} \\
&= \underbrace{(((1/a)/...)/a)/a}_{n \text{ divisions}}. && \text{Car } a/a = 1 \text{ d'après les équations (1.6) et (1.8)} \\
&= \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times ... \times a \times a}_{n-1 \text{ multiplications}}}. && \text{En utilisant } n-1 \text{ fois la propriété (1.11)}
\end{aligned}$$

D'après la définition de la puissance, le dénominateur de cette dernière fraction est précisément a^n. On obtient donc la définition de la puissance négative d'un nombre :

Définition 6 (puissance)**.** *Si n est un entier négatif et a un nombre réel non-nul, la puissance $n^{\text{ième}}$ de a est l'inverse de a^{-n} :*

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}. \tag{1.16}$$

Nous avons donc défini la puissance a^n pour tout nombre a et pour tout entier relatif n (sauf quand a et n sont simultanément nuls). Il est en fait possible de généraliser encore la notion de puissance aux valeurs non-entières de l'exposant. Le cas le plus simple est celui de l'exposant $1/2$, qui est en fait la racine carrée, c'est-à-dire :

$$\sqrt{a} = a^{1/2}.$$

On peut en fait définir la racine carrée d'un nombre (non-négatif) a comme *le nombre non-négatif dont le carré est a*. Il en découle en particulier que tout nombre (non-négatif) est à la fois le carré de sa racine carrée et la racine carrée de son carré :

$$a = (\sqrt{a})^2 = \sqrt{(a^2)},$$

En d'autre mots, calculer la racine carré d'un nombre et calcuer son carré sont deux opérations inverses l'une de l'autres. De même, la racine cubique d'un nombre non-négatif est égale à sa puissance $1/3$:

$$\sqrt[3]{a} = a^{1/3},$$

et tout nombre (non-négatif) est à la fois le cube de sa racine cubique et la racine cubique de son cube :

$$a = (\sqrt[3]{a})^3 = \sqrt[3]{(a^3)},$$

En général, pour un entier naturel non-nul n et un nombre réel non-négatif a, on peut définir la racine $\text{n}^{\text{ième}}$ de a de la manière suivante :

Définition 7 (racine $\text{n}^{\text{ième}}$)**.** *Si n est un entier naturel positif a est un nombre réel non-négatif, la racine $n^{\text{ième}}$ de a, notée $\sqrt[n]{a}$, est le nombre réel dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est égale à a. La racine $n^{\text{ième}}$ de a est aussi la puissance de a dont l'exposant est $1/n$:*

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}. \tag{1.17}$$

Là aussi, tout nombre réel non-négatif a est à la fois la puissance $\text{n}^{\text{ième}}$ de sa racine $\text{n}^{\text{ième}}$ et la racine $\text{n}^{\text{ième}}$ de sa puissance $\text{n}^{\text{ième}}$. Autrement dit, calculer la puissance $\text{n}^{\text{ième}}$ d'un nombre et calculer sa racine $\text{n}^{\text{ième}}$ sont deux opérations inverses l'une de l'autre :

Proposition 3. *Pour tout entier naturel positif n et tout nombre réel non-négatif a,*

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{(a^n)}, \tag{1.18}$$

Jusqu'ici, la puissance d'un nombre réel non-négatif a été étendue au cas où l'exposant est l'inverse d'un entier positif. Il est en fait possible de définir la puissance d'un nombre réel non-négatif dans le cas général où l'exposant est un nombre réel quelconque (sauf évidemment 0^0 qui ne peut être défini). Nous allons maintenant exposer les règles de calcul avec les puissances. Ces règles sont très générales s'appliquent pour n'importe quel exposant réel. Pour commencer, si x est un nombre réel positif,

$$0^x = 0.$$

Si a, x et y sont trois nombres réels et que a est positif, on a :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}. \tag{1.19}$$

On dit parfois que la puissance transforme le produit en somme, puisque le membre de gauche de l'égalité (1.19) est le produit de a^x et de a^y et que dans le membre de droite de cette même égalité, l'exposant est la somme de x et de y. Mais attention : la somme $x+y$ est un exposant, contrairement au produit $a^x \times a^y$! Si maintenant, a et b sont deux nombres réels positifs et si x est un nombre réel quelconque (c'est-à-dire que x peut être positif, négatif, ou encore nul), on a :

$$(a \times b)^x = a^x \times b^x. \tag{1.20}$$

Si on choisit $b = a$ dans l'égalité (1.20), on obtient : $(a^2)^x = (a^x)^2$. En fait cette propriété est vraie si on remplace 2 par n'importe quel nombre réel x. En d'autres termes, on peut calculer la puissance de la puissance d'un nombre en utilisant la propriété suivante :

$$(a^x)^y = a^{x \times y}. \tag{1.21}$$

Il est possible de retrouver les égalités (1.18) à partir de la propriété (1.21) :

$$\begin{array}{rcll} a & = & a^1 & \text{Définition de la puissance 1 (équation (1.14)).} \\ & = & a^{(n \times \frac{1}{n})} & \text{Définition de l'inverse d'un nombre (équation (1.6))} \\ & = & (a^n)^{\frac{1}{n}} & \text{Propriété (1.21)} \\ & = & \sqrt[n]{(a^n)} & \text{Définition de la racine n}^{\text{ième}} \text{ (équation (1.17))} \end{array}$$

On peut remarquer que cette suite d'arguments ne prouve qu'une seule des deux égalités (1.18). La démonstration de la deuxième égalité est laissée au lecteur.

Les puissances entières de tout nombre a réel ou complexe, c'est-à-dire les nombres a^n quand n est un entier relatif, ont été définies par les équations (1.13) si n est non-négatif et (1.16) si n est négatif (à l'exception bien sûr de 0^0 qui n'est pas défini). Avant de passer à la suite, il est intéressant de noter que les puissances non-entières de a (c'est-à-dire a^x quand x n'est pas un entier relatif) n'ont été définies que quand a est un nombre réel non-négatif. Ceci ne veut pas dire que les puissances non-entières des nombres négatifs ou complexes non-réels n'existent pas.

Comme déja mentionné, on peut parler d'une racine carrée de -1, qui est le nombre imaginaire i. En général, la définition de la puissance non-entière d'un nombres négatif ou un un nombre complexe non-réels est délicate car plusieurs nombres (réels ou complexes) distincts correspondent à une telle puissance. En outre, ce cours se concentre sur le sujet de l'analyse réelle, et par conséquent, cette définition n'est pas nécéssaire ici.

1.4.2 Les indices et les signes $\sum$ et $\prod$

Certains calculs demandent l'utilisation de centaines, de milliers, ou de millions de paramètres ou de variables. Dans ce cas, il est impossible de noter chaque variable, ou à chaque paramètre avec une lettre de l'alphabet (même les alphabets grec et hébreu, très utilisés en mathématiques, ne suffiraient pas et de loin !). Une manière de s'en sortir est d'utiliser des indices. Prenons l'exemple des 10 nombres suivants :

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024.$$

Bien sûr, il n'y a ici « que » 10 nombres, et on pourrait, sans manquer de lettres, les appeler successivement a, b, c, d, ..., j pour les besoins d'un calcul. Il y a pourtant une autre possibilité qui est plus avantageuse à plusieurs titres : on n'utilise qu'une seule lettre (par exemple a) que l'on indice par 1, 2, 3, etc... C'est-à-dire qu'on appelerait notre premier nombre a_1, notre deuxième nombre a_2, et ainsi de suite (on parle d'écriture indicielle) :

$$\begin{array}{lllll} a_1 = 2\,; & a_2 = 4\,; & a_3 = 8\,; & a_4 = 16\,; & a_5 = 32\,; \\ a_6 = 64\,; & a_7 = 128\,; & a_8 = 256\,; & a_9 = 512\,; & a_{10} = 1024. \end{array}$$

Le premier avantage de cette manière de faire a déjà été mentionné : on ne risque pas de manquer de lettres pour « nommer » nos nombres successifs puisque nous pouvons avoir autant d'indices que nécéssaire ! Il y a beaucoup d'autres avantages. Par exemple, en indiçant nos nombres, on leur a du même coup donné un ordre : l'équation $a_8 = 256$ peut alors se traduire par la phrase « le huitième nombre (ou le huitième terme, ou encore le huitième « a ») vaut 256 ». On remarque dans le cas particulier de cette suite de nombres que 256 est la huitième puissance de 2 : $256 = 2^8$. En fait ce constat peut être fait pour chacun de nos nombres, puisqu'ils sont tous des puissances de 2 :

$$\begin{array}{lllll} a_1 = 2^1\,; & a_2 = 2^2\,; & a_3 = 2^3\,; & a_4 = 2^4\,; & a_5 = 2^5\,; \\ a_6 = 2^6\,; & a_7 = 2^7\,; & a_8 = 2^8\,; & a_9 = 2^9\,; & a_{10} = 2^{10}. \end{array} \tag{1.22}$$

L'indice utilisé pour chaque nombre est précisément la puissance à laquelle 2 doit être élevé pour obtenir ce nombre. Ainsi, au lieu d'écrire 10 égalités différentes pour définir nos 10 nombres, il suffit d'en écrire une seule, qui dépend seulement de l'indice, que nous pouvons appeler i, c'est-à-dire que pour toutes les valeurs de l'indice i entre 1 à 10 (compris),

$$a_i = 2^i. \tag{1.23}$$

On peut vérifier qu'en remplaçant i par n'importe quel nombre entre 1 et 10 dans l'égalité (1.23), on obtient bien une des dix équations (1.22). En outre, un autre avantage de l'utilisation des indices apparait ici clairement : l'écriture (1.23) est largement plus compacte que l'écriture (1.22), alors que nous n'avons que 10 valeurs à définir. On peut donc imaginer le gain de temps, de place et de clarté dans le cas de milliers de paramètres ! Il faut noter tout de même que l'écriture (1.23) n'est possible que parce qu'au départ, les nombres choisis étaient précisément dix puissances de 2 consécutives, ordonnées de la plus petite à la plus grande. Si nos dix nombres avaient été choisis au hasard, une formule comme (1.23) n'aurait eu que peu d'intérêt et aurait probablement été très compliquée.

L'utilisation d'indices permet aussi de simplifier l'écriture des calculs par l'intermédiaire des signes $\sum$ et $\prod$. Ces deux symboles, utiles dans de nombreux calculs, signifient respectivement « somme » et « produit ». On peut d'ailleurs remarquer que le premier de ces deux signes est le « S » de l'alphabet grec et que le deuxième en est le « P ». Ces symboles ne définissent pas de nouvelles opérations, mais sont utilisés pour simplifier l'écriture de certains calculs : le signe $\sum$ permet d'écrire de manière compacte une grande quantité d'additions et le signe $\prod$ permet d'écrire de manière compacte une grande quantité de multiplications. Imaginons par exemple qu'on appelle S la somme de nos 10 nombres :

$$S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024. \tag{1.24}$$

Cette somme peut être écrite facilement parce qu'il ne s'agit que de dix nombres, mais si il fallait sommer un milliard de puissance consécutives de 2, elle serait impossible à écrire de cette manière (il faudrait utiliser plusieurs livres !). Dans ce cas, l'utilisation des indices se révèle cruciale. En utilisant l'écriture indicielle de nos nombres, l'équation (1.24) devient :

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}. \tag{1.25}$$

Avec cette nouvelle écriture, nous n'avons pas vraiment obtenu de simplification puisqu'il faut encore écrire les dix paramètres (a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}) et neuf signes +. Nous avons gagné tout de même en clarté puisqu'on peut voir que S est simplement la somme des nombres a_i pour toutes les valeurs de i allant de 1 à 10. En fait le signe $\sum$ n'est qu'un résumé de cette phrase. Il s'utilise de la manière suivante :

$$S = \sum_{i=1}^{10} a_i. \tag{1.26}$$

Dans cette équation, le signe $\sum$ est suivi de a_i, ce qui veut dire qu'on va faire la somme de plusieurs a_i. Mais lesquels ? La réponse à cette question se trouve en dessous du signe $\sum$ et au dessus de lui dans l'équation (1.26). En dessous de ce signe, on peut en effet lire $i = 1$ et au dessus on peut lire 10. Ce qui signifie que l'on va sommer les a_i pour toutes les valeurs entières de l'indice i entre 1 (inclus) et 10 (inclus). C'est-à-dire que les écritures (1.25) et (1.26) son équivalente, à la différence que dans le cas de (1.25), tous les termes à sommer sont explicitement mentionné alors que l'écriture (1.26), beaucoup plus compacte (et donc d'une certaine manière plus simple !), ne mentionne que la forme indicielle des nombres à sommer (les a_i), et pour quelles valeurs de l'indice i il faut les sommer (tous les i entiers de 1 à 10). La somme de a_3, a_4 et a_5 (c'est-à dire $8 + 16 + 32$) peut donc par exemple s'écrire en de la manière suivante :

$$8 + 16 + 32 = a_3 + a_4 + a_5 = \sum_{i=3}^{5} a_i.$$

Bien-sûr cette dernière somme ne comporte que trois termes, et gagne donc peu à être écrite avec le signe $\sum$. Cependant, si on imagine que les a_i ont été définis pour toutes les valeurs de l'indice i de 1 à un milliard (c'est-à-dire 1 000 000 000 ou encore 10^9), on peut alors écrire la somme de toutes les puissances entières de 2 de la puissance 1 à la puissance un milliard, c'est-à-dire :

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{1\,000\,000\,000} = \sum_{i=1}^{10^9} a_i.$$

Le signe $\prod$ s'utilise de la même manière que le signe $\sum$, à la différence qu'il permet d'écrire des multiplications, et non pas des additions. Si P est le produit des nombres a_1, a_2, a_3, ..., a_{10}, on a donc :

$$P = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 \times a_7 \times a_8 \times a_9 \times a_{10} = \prod_{i=1}^{10} a_i. \tag{1.27}$$

De la méme manière qu'avec le signe $\sum$, les valeurs de l'indice i pour lesquels il faut multiplier les nombres a_i sont précisés en dessous et au dessus du signe $\prod$. Dans l'expression (1.27), la multiplication se fait pour toutes les valeurs entières de l'indice i de 1 jusqu'à 10. Le produit de a_3, a_4 et a_5 s'écrit donc :

$$8 \times 16 \times 32 = a_3 \times a_4 \times a_5 = \prod_{i=3}^{5} a_i,$$

et le produit de toutes les puissances entières de 2 de la puissance 1 à la puissance un milliard s'écrit :

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times ... \times 2^{1\,000\,000\,000} = \prod_{i=1}^{10^9} a_i.$$

Il est possible d'utiliser directement la formule des nombres à sommer au lieu de leurs écritures indicielles. Dans notre exemple, cela revient à écrire 2^i au lieu de a_i. La somme S des nombres a_i quand l'indice i va de 1 à 10 s'écrit donc :

$$S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = \sum_{i=1}^{10} 2^i,$$

et le produit des ces mêmes nombres s'écrit :

$$P = 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times 2^4 \times 2^5 \times 2^6 \times 2^7 \times 2^8 \times 2^9 \times 2^{10} = \prod_{i=1}^{10} 2^i.$$

Un exemple particulièrement important en mathématiques est celui de la factorielle : la factorielle d'un nombre entier naturel n est le produit des n premiers entiers. On note cette factorielle $n!$:

$$\begin{array}{lcllcl}
1! & = & 1 & & & \\
2! & = & 2 \times 1 & & = & 2 \\
3! & = & 3 \times 2 \times 1 & & = & 6 \\
4! & = & 4 \times 3 \times 2 \times 1 & & = & 24 \\
5! & = & 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 & & = & 120 \\
6! & = & 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 & & = & 720 \\
7! & = & 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 & & = & 5040 \\
8! & = & 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 & & = & 40320 \\
9! & = & 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 & & = & 362880
\end{array}$$

La factorielle $n!$ peut s'écrire de manière simple en utilisant le signe $\prod$. Il s'agit là de faire le produit des n premiers entiers, c'est-à-dire de l'indice lui-même, puisque cet indice parcourt justement une liste de nombres entiers successifs dont on peut préciser le premier nombre et le dernier nombre :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n = \prod_{i=1}^{n} i.$$

1.4.3 Identités remarquables

Les identités remarquables sont des égalités entre deux expressions différentes de la même quantité. Le terme identité est en effet synonyme d'égalité, ou d'équation. On qualifie ces identités de remarquables parce que les deux expressions de chaque côté du signe = sont simples et que le passage de l'une à l'autre ne parait pas immédiatement évident (même si ce passage devient assez clair quand on en a l'habitude). Connaitre ce type d'égalités a plusieurs avantages. Bien-sûr cela permet de calculer plus rapidement que si on ne les connait pas, mais cela permet aussi d'obtenir des points de repères quand on reconnait ce genre d'expression au cours d'un calcul. Toutes ces égalités sont donc à connaitre, et à savoir appliquer de manière automatique et quand cela est nécessaire. Les trois identités remarquables du second degré sont :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\\ (a-b)(a+b) = a^2 - b^2.\end{aligned}$$

Voici comment on peut retrouver la deuxième de ces égalités à partir de la première :

$(a-b)^2$	$=$	$(a+(-b))^2$	Définition de la soustraction (équation (1.5)).
	$=$	$a^2 + 2 \times a \times (-b) + (-b)^2$	Première identité remarquable dans laquelle b a été remplacé par $-b$.
	$=$	$a^2 - 2 \times a \times b + (-b)^2$	Définitions de l'opposé et de la soustraction, commutativité et associativité de la multiplication.
	$=$	$a^2 - 2 \times a \times b + b^2$	Le carré d'un nombre est égal au carré de son opposé.

En fait, cette succession d'arguments n'est pas tout-à-fait complète : la troisième étape est en fait constituée de plusieurs arguments (définitions de l'opposé et de la soustraction et commutativité et associativité de la multiplication). Au lieu d'appliquer un argument à la fois, on en a appliqué plusieurs, c'est-à-dire qu'on a utilisé le raccourci de calcul : $2 \times a \times (-b) = -2 \times a \times b$. Faire le détail est pourtant nécéssaire quand on ne sait pas utiliser ce genre de raccourci de calcul ! Le développement complet est assez fastidieux, comme on peut le voir ci-dessous :

$(a-b)^2$	$=$	$(a+(-b))^2$	Définition de la soustraction (équation (1.5)).
	$=$	$a^2+2\times(a\times(-b))+(-b)^2$	Première identité remarquable dans laquelle b a été remplacé par $-b$.
	$=$	$a^2+2\times(a\times(-1\times b))+(-b)^2$	Définition de l'opposé (équation (1.2)).
	$=$	$a^2+2\times((a\times -1)\times b)+(-b)^2$	Associativité de la multiplication.
	$=$	$a^2+(2\times(a\times -1))\times b+(-b)^2$	Associativité de la multiplication.
	$=$	$a^2+(2\times(-1\times a))\times b+(-b)^2$	Commutativité de la multiplication.
	$=$	$a^2+((2\times -1)\times a)\times b+(-b)^2$	Associativité de la multiplication.
	$=$	$a^2+((-1\times 2)\times a)\times b+(-b)^2$	Commutativité de la multiplication.
	$=$	$a^2+(-1\times(2\times a))\times b+(-b)^2$	Associativité de la multiplication.
	$=$	$a^2+(-1)\times((2\times a)\times b)+(-b)^2$	Associativité de la multiplication.
	$=$	$a^2+(-1)\times(2\times(a\times b))+(-b)^2$	Associativité de la multiplication.
	$=$	$a^2+(-(2\times(a\times b)))+(-b)^2$	Définition de l'opposé.
	$=$	$a^2-(2\times(a\times b)))+(-b)^2$	Définition de la soustraction.
	$=$	$a^2-(2\times(a\times b)))+b^2$	Le carré d'un nombre est égal au carré de son opposé.
	$=$	$a^2-2ab+b^2$	En écrivant le double produit de manière compacte.

Il existe de nombreuses autres identités remarquables, dont certaines seront étudiées dans les exercices ci-dessous.

1.4.4 Exercices

Exercice 11. Montrer que si a est un nombre réel non-négatif, et si n est un entier naturel positif, alors :

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{(a^n)}.$$

Pour cela, vous utiliserez la définition de la racine $\mathrm{n}^{\text{ième}}$.

Exercice 12. Calculer les nombres suivants sans utiliser de calculatrice :

$$a = \frac{36^2}{3^4},\ b = \frac{2^3\times 3^2}{18\times 4},\ c = 2^{2^2},\ d = 13^{13^{13}} \times 13^{-13^{13}},\ e = \frac{17^{467}}{\frac{1}{17^{-467}}}.$$

Exercice 13. Calculer les nombres suivants sans utiliser de calculatrice :

$$a = \sqrt[3]{\frac{3^9}{27}},\ b = (2^3\times 3^2\times 18)^{\frac{1}{4}},\ c = \left(2^{\frac{1}{7}}\right)^7,\ d = \left(13^{13}\right)^{\frac{1}{13}},\ e = \left(\left(17^{15}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Exercice 14. On appelle R le produit des puissances entières de 2 de la puissance 1 à la puissance un milliard :

$$R = 2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times ... \times 2^{1\,000\,000\,000}.$$

Ecrire R en utilisant le symbole $\prod$. En utilisant la propriété (1.19), écrire R comme une puissance de 2 en exprimant l'exposant à l'aide du symbole $\sum$.

Exercice 15. On considère un entier naturel n. Calculer le nombre suivant :

$$\frac{(n!)^2}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} i^2}.$$

Exercice 16. Montrer que le carré d'un nombre est toujours égal au carré de son opposé en utilisant seulement les propriétés de la multiplication, la définition de la puissance (équation (1.13)), la définition de l'opposé et l'involutivité de l'opposé (c'est-à-dire l'équation (1.4)).

Exercice 17. Développer l'expression suivante en utilisant quand vous le pouvez des identités remarquables :

$$(2x - 3)^2 + (x + 5)(3 - x).$$

Exercice 18. *Identités de Legendre.* Développer, puis simplifier les expressions suivantes en utilisant quand vous le pouvez des identités remarquables :

i. $(a + b)^2 + (a - b)^2$,
ii. $(a + b)^2 - (a - b)^2$,
iii. $(a + b)^4 - (a - b)^4$.

Exercice 19. *Identité d'Argand.* Développer, puis simplifier l'expression suivante en utilisant quand vous le pouvez des identités remarquables :

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Exercice 20. *Identités de Gauss.* Développer, puis simplifier les deux expressions suivantes en utilisant quand vous le pouvez des identités remarquables :

i. $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$,
ii. $\frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2]$.

Que remarquez-vous ?

Exercice 21. *Identité de Sophie Germain.* Développer, puis simplifier l'expression suivante en utilisant quand vous le pouvez des identités remarquables :

$$((x + y)^2 + y^2)((x - y)^2 + y^2).$$

Exercice 22. Simplifier les fractions suivante :

i. $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$,
ii. $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$,
iii. $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$,
iv. $\frac{a^3 + b^3}{a + b}$,

1.5 Équations et inéquations

Les équations et inéquations sont des objets mathématiques très importants. À la différence des nombres, ils ont une valeur affirmative, c'est-à-dire que quand on écrit une équation ou une inéquation, on affirme qu'une certaine égalité ou qu'une certaine inégalité est vraie.

1.5.1 Équations

Une équation est une égalité entre deux objets mathématiques. Par exemple, si a et b sont deux nombres, alors l'équation :

$$a = b,$$

signifie que a et b ont la même valeur. En d'autres mots, cette égalité affirme que les deux lettres a et b sont utilisées pour dénoter le même nombre. En effet, le premier usage des équation est d'énoncer l'égalité de deux expressions d'un même nombre. Par exemple, $1+3$ et $2+2$ sont deux manières différentes d'exprimer le nombre 4, donc :

$$1 + 3 = 2 + 2.$$

Dans une équation, l'expression qui est à gauche du signe $=$ est appelée « membre de gauche de l'équation » et l'expression qui est à droite du signe $=$ est appelée « membre de droite de l'équation ». Un autre usage des équations, est la définition implicite d'un nombre. Par exemple, je peut considérer le nombre x défini par l'équation :

$$2x = 3. \tag{1.28}$$

La question que pose cette équation est alors : quelle est la valeur de x pour laquelle cette équation est vraie ? Pour trouver cette valeur de x, il suffit de résoudre l'équation en question. Bien-sûr la réponse est dans ce cas $x = 3/2$. On dit alors que $3/2$ est solution de l'équation (1.28). Considérons maintenant le nombre x défini par l'équation :

$$x^2 - 1 = 0. \tag{1.29}$$

Cette fois, il nous faut être très prudent : en fait, parler *du* nombre x défini par cette équation est un abus de langage puisqu'il y a plusieurs nombres pour lesquels l'équation (1.29) est vraie : $x = -1$ et $x = 1$. En d'autres mots -1 et 1 sont tous deux solutions de l'équation (1.29). Voilà maintenant un exemple plus compliqué :

$$x^3 - 384x^2 + 49151x - 2097024 = 0. \tag{1.30}$$

Trouver les solutions de cette équation, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles cette équation est vraie, est plus compliqué. Ici, dire que l'équation (1.30) est une définition implicite de x prend tout son sens. En effet, obtenir explicitement les valeurs de x définies par cette équation n'est pas chose immédiate. On dit aussi que x est *l'inconnue* de cette équation. Une équation peut avoir plusieurs inconnues :

$$-2x + y = 1. \tag{1.31}$$

Une solution de l'équation (1.31) est une paire constituée de deux nombres x et y pour lesquels l'équation est vérifiée. Par exemple, la paire $(1, 3)$ est solution de l'équation (1.31) puisque en remplaçant x par 1 et y par 3 dans le membre de gauche de cette équation, on obtient 1. Par contre la paire $(3,1)$ n'est pas solution de cette équation puisque en remplaçant x par 3 et y par 1 dans le membre de gauche de cette équation, on obtient -5, qui n'est pas égal à 1. En fait, l'ensemble des solutions de l'équation (1.31) peut êre representé dans le plan : il s'agit de la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Pour travailler avec les équations, les deux premières règles suivantes sont essentielles :

i. On peut ajouter (ou retrancher) la même quantité simultanément aux deux membres d'une équation, autrement dit, si $a = b$ alors $a + c = b + c$ et $a - c = b - c$.
ii. On peut multiplier la même quantité simultanément aux deux membres d'une équation, autrement dit, si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$.

Puisque la division consiste à multiplier par l'inverse d'un nombre, la règle ii. permet également de diviser une équation par un nombre non-nul : si $a = b$ et si c est un nombre non nul alors $a/c = b/c$.

1.5.2 Inéquations

Bien que cette section se concentre presque uniquement sur le cas des nombres, les égalités peuvent être écrites entre deux objets mathématiques plus généraux, qui ne sont pas forcément des nombres. Deux droites géométriques, ou deux fonctions peuvent par exemple être égales. Les inéquations, elles, ne peuvent être écrites qu'entre des objets qui sont ordonnés les uns par rapport aux autres. Les nombres réels sont, bien-sûr ordonnés. En effet, si on dispose de deux nombres réels, l'un de ces deux nombres est nécessairement inférieur ou égal à l'autre. Les nombres complexes, en général ne sont pas naturellement ordonnés.

Si a et b sont deux nombres réels, l'inéquation $a \leq b$ affirme que a est inférieur ou égal à b. En d'autres mots, a n'est pas supérieur à b. Pour énoncer que a est inférieur à b mais qu'il ne lui est pas égal, on écrit $a < b$. On dit alors que a est strictement inférieur à b. Ces notations peuvent aussi être utilisées pour énoncer qu'un nombre est supérieur ou égal à un autre, ou qu'il lui est strictement supérieur :

signe	utilisation	signification
$\leq$	$a \leq b$	a est inférieur ou égal à b
$<$	$a < b$	a est strictement inférieur à b
$\geq$	$a \geq b$	a est supérieur ou égal à b
$>$	$a > b$	a est strictement supérieur à b

Comme dans le cas des équations, il y a des règles qui permettent de travailler avec les inéquations. Les règles énoncées ci-dessous ressemblent aux règles déjà formulées pour les équations, à une différence très impostante près : si on multiplie une inéquation par un nombre négatif, l'inéquation change de sens !

iii. On peut ajouter (ou retrancher) la même quantité simultanément aux deux membres d'une inéquation. Cette règle est valable pour des inégalités larges ou strictes et quelque soit le sens de l'inéquation. Par exemple, si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et $a - c \leq b - c$.
iv. On peut multiplier les deux membres d'une inéquation par un méme nombre *positif* ou nul. Cette règle est valable pour des inégalités larges ou strictes et quelque soit le sens de l'inéquation. Par exemple, si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $a \times c \leq b \times c$.
v. On peut multiplier les deux membres d'une inéquation par un méme nombre négatif à condition de *changer le sens de l'inégalité*. Cette règle est valable pour des inégalités larges

ou strictes et quelque soit le sens de l'inéquation. Par exemple, si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $a \times c \geq b \times c$.

1.5.3 Systèmes d'équations

Un système d'équations est un ensemble de plusieurs équations rassemblées par une accolade. Un système d'équation affirme que toutes les équations écrites sont vraies. Une solution d'un tel système est donc un nombre, ou plusieurs nombres (selon que ce système comporte une ou plusieurs inconnues) telles que toutes les équations du système sont vérifiées. Considérons par exemple le système suivant qui comporte deux équations et deux inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 3, \\ 6x + 10y & = & 12. \end{array} \right. \tag{1.32}$$

La paire $(0, 1)$ est solution de la première équation mais pas de la deuxième. Par conséquent, $(0, 1)$ n'est pas une solution du système. Inversement, la paire $(2, 0)$ est solution de la deuxième équation mais pas de la première et n'est donc pas une solution du système. La paire $(-3, 3)$ est solution de ce système puisqu'elle est solution de la première et de la deuxième équation. Ici $(-3, 3)$ est en fait l'unique solution du système (1.32). Il est cependant possible, et même fréquent qu'un système d'équations ait plusieurs solutions.

Pour travailler avec un système d'équations, il faut savoir utiliser les propriétés i. et ii. énoncées ci-dessous, ainsi que la propriété suivante :

vi. Dans un système d'équations, on peut ajouter (ou retrancher) une équation à une autre sans changer l'ensemble des solutions.

Par exemple, l'ensemble des solutions du système (1.32) ne change pas si on ajoute la première équation à la deuxième, ce qui produit le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y & = & 3, \\ 8x + 13y & = & 15. \end{array} \right. \tag{1.33}$$

Les systèmes (1.32) et (1.33) ont donc le même ensemble de solutions. Toutes ces propriétés permettent une méthode systématique pour résoudre certains systèmes d'équations, dits linéaires. Cette méthode est la méthode du pivot de Gauss. Un monome linéaire est le produit d'un nombre a (ou paramètre) avec une variable x (ou inconnue), c'est-à-dire une expression du type ax. Une équation linéaire est une équation dont le membre de gauche est une somme de monômes linéaires et dont le membre de droite est un nombre ou un paramètre. Par exemple, les équations (1.28) et (1.29) sont linéaires. En général une équation linéaire à n inconnues s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b.$$

Dans cette équation, les inconnues sont x_1, x_2, ..., x_n. Un système linéaire est un système d'équations linéaires. Par exemple, les systèmes (1.32) et (1.33) sont linéaires. Considérons le système d'équations linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & - & z & = & 6, \\ 2x & + & 4y & + & 3z & = & 19, \\ 3x & + & 5y & - & 2z & = & 7. \end{array} \right. \tag{1.34}$$

Dans cette écriture, les monomes correspondant à chaque inconnue ont été alignés verticalement en trois colonnes : la première colonne correspond à l'inconnue x, la deuxième colonne correspond à l'inconnue y et la troisième correspond à l'inconnue z. La méthode de Gauss consiste à faire disparaitre dans chaque colonne, tous les monômes sauf un. Pour cela, il suffit d'utiliser les règles ii. et vi. conjointement. Par exemple, pour faire disparaitre le monôme $2x$ dans la première colonne, il suffit de retrancher 2 fois la première ligne à la deuxième. On obtient alors, selon les règles ii. et vi. un système linéaire qui a le même ensemble de solutions que le système (1.34) :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & - & z & = & 6, \\ & - & 4y & + & 5z & = & 7, \\ 3x & + & 5y & - & 2z & = & 7. \end{array}\right.$$

Il est possible ensuite de faire disparaitre le monome $3x$ de la première colonne en retranchant 3 fois la première ligne à la troisième. On obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & - & z & = & 6, \\ & - & 4y & + & 5z & = & 7, \\ & - & 7y & + & z & = & -11. \end{array}\right.$$

Maintenant qu'il ne reste qu'un seul monôme dans la première colonne, la méthode consiste à faire disparaître tous les monômes, sauf un dans une autre colonne. Afin que les monômes qui ont été élininés de la première colonne ne réapparaissent pas, il est nécessaire de ne pas ajouter ou retrancher la première ligne à d'autres lignes. Ajoutons la troisième ligne à la première et retranchons 5 fois la troisième ligne à la deuxième :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & & & = & -5, \\ & & 31y & & & = & 62, \\ & - & 7y & + & z & = & -11. \end{array}\right.$$

Il reste à supprimer tous les monômes de la dexième colonne, sauf un. Afin, que les monômes supprimés de la première et de la troisième colonne ne réapparaissent pas, il est nécessaire de ne pas ajouter ou retrancher la première ligne, ni la troisième ligne à d'autres lignes. Divisons d'abord la deuxième ligne par 31. D'après la règle ii. cela ne change pas l'ensemble des solutions du système. Ajoutons ensuite 3 fois cette deuxième ligne à la première et 7 fois cette deuxième ligne à la troisième :

$$\left\{\begin{array}{ccccl} x & & & = & 1, \\ & y & & = & 2, \\ & & z & = & 3. \end{array}\right.$$

L'unique solution du système (1.34) se lit ici directement : c'est le triplet $(1, 2, 3)$.

1.5.4 Exercices

Exercice 23. Résoudre les équations suivantes :

i. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$,
ii. $x - 5\sqrt{x} - 36 = 0$,
iii. $x^3 + 2x^2 - 3x - (x+1)(x^2 - 1) = 0$.

Exercice 24. Résoudre les inéquations suivantes :

i. $5x^2 + 12x \leq -6$,
ii. $x^2 - 100x + 1000 \leq 100$,
iii. $-2x^2 + 32x - 128 \leq 0$,
iv. $128x^2 + 92x \leq 3$,
v. $-5x^2 - x + 6 \leq 0$.

Exercice 25. Résoudre les inéquations suivantes :

i. $2x + 3 \leq 5x + 7$,
ii. $-x + 7 \leq 3x - 2$,
iii. $-5x - 3 \leq -8x + 10$.

Exercice 26. Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

$$\text{i. } \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 7 & \leq & 6x + 5, \\ 4x - 11 & \leq & 4 + x. \end{array} \right. \quad \text{ii. } \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & > & 8, \\ 2x - y & \leq & x + y + 2. \end{array} \right. \quad \text{iii. } \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & > & -x + y + 5, \\ x - 2y & > & y + 6. \end{array} \right.$$

Exercice 27. On cherche à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 5, \\ x^2 & + & y^2 & = & 13. \end{array} \right.$$

a) Ce système d'équations est-il linéaire ? Pourquoi ?
b) On considère une solution (x, y) de ce système. Déterminer une équation du second degré vérifiée par l'inconnue x.
c) Résoudre cette équation et déterminer toutes les solutions du système.

Exercice 28. On considère les trois systèmes d'équations suivants :

$$\text{i. } \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - y & = & 1, \\ xy & = & 0. \end{array} \right. \quad \text{ii. } \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 8, \\ x^2 + y^2 & = & 50. \end{array} \right. \quad \text{iii. } \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - xy + y^2 & = & 8, \\ x + y & = & -2. \end{array} \right.$$

a) Ces systèmes sont-ils linéaires ? Pourquoi ?
b) Résoudre ces trois systèmes d'équations.

Exercice 29. Trouver deux nombres entiers dont la moyenne vaut 82 et le produit 5280.

Exercice 30. Dans un troupeau composé de chameaux et de dromadaires, il y a 39 têtes et 51 bosses. Quelle est la composition du troupeau ? *Indication : la chameau a deux bosses.*

Exercice 31. Résoudre les systèmes 3×3 suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$\text{i. } \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & - & z & = & 11, \\ 2x & - & 5y & - & 2z & = & 3, \\ -5x & - & y & + & 2z & = & -33. \end{array} \right. \quad \text{ii. } \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4, \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 9, \\ x & - & y & + & 2z & = & 3. \end{array} \right.$$

$$\text{iii. } \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -4, \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 11, \\ -x & - & 3y & + & 2z & = & -1. \end{array} \right. \quad \text{iv. } \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 8, \\ 8x & + & 4y & + & 2z & = & 4, \\ 27x & + & 9y & + & 3z & = & 0. \end{array} \right.$$

Exercice 32. Résoudre les systèmes 4×4 suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

i. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 6, \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & -3, \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 3. \end{array}\right.$$

ii. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 21, \\ 2x_1 & + & 8x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & = & 52, \\ 3x_1 & + & 10x_2 & + & 8x_3 & + & 8x_4 & = & 79, \\ 4x_1 & + & 12x_2 & + & 10x_3 & + & 6x_4 & = & 82. \end{array}\right.$$

Exercice 33. Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

i. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & -15, \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & -35, \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & = & 57, \\ -3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 18. \end{array}\right.$$

ii. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 0, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 12, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & + & 6x_6 & = & -6, \\ x_1 & + & x_2 & & & & & & & - & x_6 & = & 3, \\ & & & & x_3 & + & x_4 & - & x_5 & & & = & -3, \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & - & 2x_6 & = & 8. \end{array}\right.$$

Exercice 34. Résoudre les systèmes suivants en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

i. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 7z & = & -1, \\ 2x & - & y & + & 5z & = & -5, \\ -x & - & 3y & + & 9z & = & -5. \end{array}\right.$$

ii. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & -5, \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -4, \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 3x_4 & = & 7, \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -1. \end{array}\right.$$

iii. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2, \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 4, \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -4. \end{array}\right.$$

1.6 Trigonométrie

En mathématiques les angles sont mesurés plus la plupart du temps en *radians*.

1.6.1 Le sinus, le cosinus et la tangente

Proposition 4. *Pour tout nombre réel x et tout entier relatif k,*

i. $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$,
ii. $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.

Proposition 5. *Pour tout nombre réel x,*
i. $\cos(-x) = \cos(x)$,
ii. $\sin(-x) = -\sin(x)$,
iii. $\cos(\pi/2 + x) = -\sin(x)$,
iv. $\sin(\pi/2 + x) = \cos(x)$,
v. $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$,
vi. $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$.

Proposition 6 (formules d'addition)**.** *Pour tout nombre réel x,*
i. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
ii. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$,
iii. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$,
iv. $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

1.6.2 Exercices

Exercice 35. Calculer la valeur exacte de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.

Exercice 36. Soit x un nombre réel quelconque. Simplifier les expressions suivantes :
i. $\cos(-\pi - x)$,
ii. $\sin(x - \pi/2)$,
v. $\cos^2(-x) + \sin^2(\pi - x)$.

Exercice 37. Calculer $\tan(x)$ pour $x = 5\pi/6$, $x = 3\pi/4$, et $x = \pi/12$.

Exercice 38. Soit x un réel dans l'intervalle $[\pi/2, \pi]$. On suppose de plus que $\sin(x) = -\sqrt{3}/2$. Calculer x, $\cos(x)$ et $\tan(x)$.

Exercice 39. Calculer les valeurs exactes de $\cos(\pi/8)$ et de $\sin(\pi/8)$.

Exercice 40. Résoudre les équations suivantes :
i. $\cos(x) = -1/2$,
ii. $\sin(x) = -\sqrt{3}/2$.

Exercice 41. On considère deux nombres réels a et b.

a) Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ em fonction de $\cos(a + b)$ et de $\cos(a - b)$.
b) En effectuant un changement de variable, démontrer que pour tous nombres réels p et q,

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

c) En déduire les solutions de l'équation $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

Exercice 42. Résoudre les équations suivantes :

i. $\cos(2x) = \cos^2(x)$,
ii. $12\cos^2(x) - 8\sin^2(x) = 2$,
iii. $4\cos^2(x) + 8\sin(x) = -1$,
iv. $\tan^2(x) = 1$,
iv. $\tan(x)\cos(x) = 2$.

Exercice 43. On considère un nombre réel a. Démontrer les égalités suivantes :

i. $1+\cos(2a) = 2\cos^2(a)$,
ii. $1-\cos(2a) = 2\sin^2(a)$,
iii. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$,
iv. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$,
v. $\cos^4(a) - \sin^4(a) = \cos(2a)$,
vi. $\tan(2a) = 2\tan(a)/(1-\tan^2(a))$,
vii. $\tan(x)\cos(x) = 2$.

Exercice 44. On considère deux nombres réels a et b. Simplifier les fractions suivantes :

$$\text{i. } \frac{\cos(a)-\cos(3a)}{\sin(3a)-\sin(a)}\text{ ; ii. } \frac{\cos(2a)-\cos(4a)}{\sin(4a)-\sin(2a)}\text{ ; iii. } \frac{\sin(a)+\sin(b)}{\cos(a)+\cos(b)}\text{ ; iv. } \frac{\cos(3b)-\cos(4a+3b)}{\sin(4a+3b)+\sin(3b)}.$$

Exercice 45. On considère deux nombres réels a et b. Simplifier les fractions suivantes :

$$\text{i. } \frac{\sin(2a)+\sin(5a)-\sin(a)}{\cos(2a)+\cos(5a)+\cos(a)}\text{ ; ii. } \frac{\cos(2a)\cos(a)-\sin(4a)\sin(a)}{\cos(3a)\cos(2a)}.$$

Exercice 46. Trouver la valeur exacte des nombres suivants sans utiliser la calculatrice :
i. $\cos(11\pi/12)\cos(5\pi/12)$,
ii. $\cos(4\pi/9)+\cos(2\pi/9)-\cos(\pi/9)$,

1.7 La notion de preuve

L'objectif de cette section est de présenter la notion de preuve sans faire appel à des notations techniques. En effet, pour écirire une preuve il est préférable de maitriser le langage symbolique qui sera présenté en section 1.8, mais pas strictement nécessaire : des preuves ont été écrite depuis l'antiquité sans utiliser ce langage. Il s'agit donc ici de décrire le principe sans s'encombrer de notations.

Considérons une affirmation mathématique, c'est-à-dire une phrase affirmative qui énonce une certaine propriété d'un objet mathématique (nombre, fonction, ...). Ce genre de phrase est appelé « proposition » ou « assertion ». En voici un exemple :

$$\sqrt{2} \text{ n'est pas un nombre rationnel.} \tag{1.35}$$

Cette proposition affirme que $\sqrt{2}$ n'appartient pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, ou en d'autres termes que $\sqrt{2}$ ne peut pas être écrit comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont tous les deux entiers. A ce moment dans le déroulement de ce cours, on ne peut pas affirmer qu'on connait la preuve de ce fait. Bien sûr, la proposition (1.35) a déjà été énoncée et affirmée comme vraie dans la section précédente. En d'autre mots, on sait que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel *parce qu'on nous l'a dit*. Cependant, nous ne saurions pas (encore) expliquer *pourquoi* cette assertion est vraie.

Une preuve, ou démonstration, est une succession d'arguments (parfois un argument suffit) qui explique pourquoi une assertion mathématique est vraie. Il faut bien préciser ici que pour qu'une suite d'arguments constitue en effet une preuve, il faut que chacun de ces arguments soit irréfutable ! Cela pose ici une question essentielle :

Comment être sûr qu'un argument donné est irréfutable ?

Dans le cadre des mathématiques, il est admis que les arguments (ou assertions, ou encore propositions) qui sont irréfutables seront de deux type. Le premier type d'arguments arréfutables sont appelés *axiomes*. Ceux-là sont irréfutables parce qu'on le décide. Dire qu'on décide de l'irréfutabilité d'une proposition peut sembler arbitraire. En fait les axiomes ne sont pas arbitrairement choisis, mais choisis pour êtres compatibles avec le raisonnement logique et la construction des objets mathématiques. L'ensemble d'axiomes le plus utilisé en mathématique a été formulé au début du vingtième siècle : il s'agit des axiomes de Zermelo-Fraenkels. Les propositions irréfutables qui ne sont pas des axiomes doivent être démontrées, c'est-à-dire obtienues en utilisant une suite d'arguments irréfutables. Cette deuxième classe de propositions vraies constitue le champ de recherche des mathématiciens.

Pour fixer les idées, nous allons commencer par étudier une preuve très simple. Pour commencer, nous allons exposer cette preuve. Ensuite nous analyseront cette preuve en déteminant les arguments utilisés et en discutant leur nature. Nous allons démontrer que le nombre $0,999999...$ qui admet une infinité de décimales, toutes égales à 9 est en fait égal à 1 :

Théorème 1. *Soit a le nombre* $0.999999...$. *Si a admet une infinité de décimales, toutes égales à* 9 *alors $a = 1$.*

Démonstration. Puisque a admet une infinité de décimales, toutes égales à 9 alors :

$$10 \times a = 9 + a. \tag{1.36}$$

Par conséquent, $9 \times a = 9$ et donc $a = 1$. □

Tous les arguments utilisés dans cette preuve ont déjà été énoncés dans les sections précédentes.

Après cette preuve simple, nous allons passer à la preuve que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Cette preuve sera faite en trois parties. Nous allons d'abord démontrer un *lemme*, c'est-à-dire un petit théorème prélimitaire. Souvent les lemmes regroupent des petits morecaux de preuve qui sont utilisés plusieurs fois dans le déroulement d'une démonstration plus élaborée.

Lemme 1. *Soit a un nombre entier relatif. Si a^2 est pair alors a est pair.*

Démonstration. Supposons que a est impair. Alors on peut trouver un nombre entier b tel que $a = 2b + 1$. Dans ce cas :

$$a^2 = (2b + 1)^2 = 4b^2 + 4b + 1. \tag{1.37}$$

Puisque b est un nombre entier, alors $4b^2 + 4b$ est un nombre entier pair. Par conséquent, $4b^2 + 4b + 1$ est impair. D'après (1.37), ceci prouve que a^2 est impair. On a donc prouvé par l'absurde que si a^2 est pair alors a est pair. □

Nous allons maintenant utiliser ce lemme pour prouver le théorème principal. Ce théorème comme nous allons le voir ne donne pas encore directement le résultat que nous cherchons à obtenir (c'est-à-dire que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel). Ce théorème est en fait un résultat plus général qui sera ensuite spécialisé (c'est-à-dire utilisé dans un contexte moins général) pour obtenir l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Théorème 2. *Soient a un entier relatif et b un entier positif. Si $\sqrt{2}$ est égal à a/b alors a et b sont tous les deux pairs.*

Démonstration. Supposons que $\sqrt{2}$ est égal à la fraction dont le numérateur est l'entier relatif a et dont le dénominateur est l'entier positif b :

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

En élevant cette égalité au carré et en multipliant le résultat par b^2, on obtient :

$$2b^2 = a^2. \tag{1.38}$$

Cette équation affirme que a^2 est un multiple de 2, c'est-à-dire que a^2 est pair. D'après le lemme 1, a est donc lui-aussi un nombre pair. Il existe donc un nombre entier c tel que $a = 2c$. En injectant cette expression de a dans l'équation (1.38), on obtient $2b^2 = 4c^2$, puis en simplifiant par 2 :

$$b^2 = 2c^2.$$

Par conséquent, b^2 est pair. D'après le lemme 1, b est alors lui-aussi pair. □

L'irrationalité de $\sqrt{2}$ va maintenant être obtenue comme un corollaire (c'est-à-dire comme une conséquence) du théorème précédent :

Corollaire 1. $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Démonstration. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'il est égal à une fraction dont le numérateur a est un entier relatif et dont le dénominateur b est un entier positif. Si a et b sont tous les deux pairs, on peut simplifier la fraction et se ramener à deux entiers a et b plus petits. En simplifiant par 2 autant que possible, on peut donc se ramèner au cas où a et b ne sont pas tous les deux pairs. Cette conclusion est contredite par le théorème 2. Par conséquent $\sqrt{2}$ ne peut pas être rationnel. □

Comme il a été suggéré plus haut, les démontrations s'attachent à établir des propositions mathématiques irréfutables. En fait, les mots que nous utilisons, en français ou dans d'autres langues, sont la plupart du temps trop approximatif pour pouvoir capturer le sens exact de telles propositions. Pour pouvoir rendre les démonstrations mathématiques plus précises, les mathématiciens ont inventé un langage dont la particularité est que tout ce qui est écrit dans ce langage est aussi précis que l'esprit peut le concevoir. Dans la prochaine section, nous allons décrire sommairement ce langage qui sera utile à de nombreuses occasions pour écrire certaines propositions mathématiques, quand un grand niveau de précision sera nécessaire.

1.8 Pour aller plus loin

Dans cette section, nous allons décrire de manière la plus simple possible le langage formel utilisé en mathématiques. Comme illustration, nous réecrirons, en utilisant ce langage des propriétés déjà énoncées dans ce chapitre. Cette formulation utilise la notion d'ensemble. On considére en effet que tout les objets mathématiques sont des ensembles. En d'autre mots, tout objet mathématique est une collection d'objets mathématiques (qui sont eux-même des collections d'objets mathématiques, etc...). Et oui, on peut considérer que tout nombre est un ensemble ! Cette manière de formaliser les mathématiques a été développée par Georg Cantor à la fin du dix-neuvième siècle, et constitue depuis un fondement solide des mathématiques.

Pour écrire les mathématiques, il nous suffit donc de pouvoir travailler avec les ensembles. La première manière de définir un ensemble consiste à écrire la liste des objets qui lui appartiennent séparés par des virgules et limités de part et d'autre par les signes { et } :

$$E = \{\text{liste des éléments de l'ensemble } E \text{ séparés par des virgules}\}.$$

Ce type de définition d'un ensemble s'appelle une définition *en extension* parce qu'on y donne la liste extensive des éléments de l'ensemble. Pour définir en extension l'ensemble A qui contient les nombres 1, 2 et 3, il suffit d'écrire :

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

On dit qu'un objet qui appartient à un ensemble est un *élément* de cet ensemble. Pour écrire de manière formelle qu'un objet x appartient à un ensemble A, on utilise le signe $\in$ de la manière suivante :

$$x \in A.$$

La négation de cette proposition s'écrit $x \notin A$ et signifie que x n'appartient pas à A. Ceci nous permet d'écrire formellement la proposition (1.35) :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Si A et B sont deux ensembles et si tous les éléments de A sont aussi des éléments de B, on dit

La définition par extension d'un ensemble admet des limites. Il est par exemple impossible de définir l'ensemble des entiers naturels pairs en extension car il y en a un nombre infini, et qu'il n'est donc pas possible d'en écrire la liste. Dans ce cas, on peut utiliser l'autre manière de définir un ensemble, qui consiste à donner la ou les propriétés qui discriminent les éléments de cet ensembles des autres objets mathématiques. On dit de ce genre de définition que c'est une définition *en compréhension*. La définition en compréhension d'un ensemble décrit cet ensemble comme un sous-ensemble, c'est-à-dire comme une partie d'un autre ensemble. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels peut être décrit comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire précisément comme l'ensemble des nombres réels qui sont non-négatifs et qui sont entiers. Cette phrase est une définition en compréhension de $\mathbb{N}$, qui se traduit formellement de la manière suivante :

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ et } x \text{ est un entier}\}.$$

Il nous faut tout d'abord pouvoir signifier l'appartenance, en utilisant le signe $\in$. Si A est un ensmble et x un des objets mathématiques contenus dans A, on dit que x *appartient* à A, ou que x est un *élément* de A, et on écrit :

$$x \in A.$$

Il s'agit d'une proposition qui affirme de x appartient à A. La négation de cette proposition s'écrit $x \notin A$ et signifie que x n'appartient pas à A. Ceci nous permet d'écrire formellement la proposition (1.35) :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

1.8.1 Exercices

Exercice 47. Chacun des ensembles suivants est-il écrit en extension ou en compréhension ?

i. $\{0, \sqrt{2}, \mathbb{Q}\}$,
ii. $\{x \in \mathbb{C} : |x| \leq 1\}$,
iii. $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$,
iv. $\{\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$,
v. $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{x \in \mathbb{Z} : x < 0\}\}$,

Exercice 48. Précisez le cardinal de chacun des ensembles suivants, et écrivez les en extension lorsqu'ils sont donnés en compréhension :

i. $\{0, \sqrt{2}, \mathbb{Q}\}$,
ii. $\{x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} : x^2 = 4\}$,
iii. $\{x \in \mathbb{N} : x < 10\}$,
iv. $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
v. $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}\}$,

Exercice 49. On considère les nombres 0, π et x_1. Est-ce que ces nombres appartiennent aux ensembles suivants ? Pourquoi ?

$$A = \{0, 1\}\,;\; B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}\,;\; C = \{x_1, x_2, x_3\}\,;\; D = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Exercice 50. On considère les nombres 0, $\sqrt{2}$, $4/3$ et i. Est-ce que ces nombres appartiennent aux ensembles suivants ? Pourquoi ?

$$A = \mathbb{N}\,;\; B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,;\; C = \{0, 1, i, 4/3\} \setminus \mathbb{R}\,;\; D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}.$$

Exercice 51. Représenter les éléments des l'ensembles suivants comme des points du plan :

$$A = \{(0, 0), (-1, 0), (1, 0), (0, -1), (-1 - 1)\}\,;\; B = \{1, 2, 4\} \times \{1, 3, 4\}\,;\; C = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2.$$

Exercice 52. Écrire les ensembles suivants en compréhension :

$$A =]-\pi, \pi[\,;\; B =]-1, 1[\cup \{0\}\,;\; C =]-1, 1[^2.$$

Exercice 53. Écrire les ensembles suivants comme des intervalles ou comme des réunions d'intervalles :

$$A =]-2, 2[\cap [0, 3[\,;\; B = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[\,;\; C = \mathbb{R} \setminus [0, +\infty[\,;\; D =]-\infty, 1] \cap [-1, +\infty[.$$

Chapitre 2

Fonctions

2.1 Relations

2.2 Injection, surjection, bijection

2.3 Notations usuelles

2.4 Opérations sur les fonctions

2.4.1 Exercices

Exercice 54. Dessiner chacune des relations suivantes comme un graphe, et la définir en précisant à quels éléments de A correspondent chaque élément de B :

i. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ et $B = \{0, 1\}$. Un élément de A est en relation avec 0 quand il est pair, et en relation avec 1 quand il est impair.
ii. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$, Un élément a de A est en relation avec un élément b de B quand $a \leq b + 1$.
iii. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Un élément a de A est en relation avec un élément b de B quand $a \leq b \leq a + 1$.

Exercice 55. Pour chaque relation définie dans l'exercice précédent, déterminer le sous-ensemble de $A \times B$ défini par cette relation, et dessinez-le dans le plan.

Exercice 56. Écrire en compréhension ou en extension le sous-ensemble de $A \times B$ correspondant à chacune des relations suivantes. Dans chaque cas, s'agit-il d'une fonction de A dans B ou d'une application de A dans B ? Pourquoi ?

i. $A = \mathbb{N}$ et $B = A$. Un élément a de A est en relation avec un élément b de B quand $a = b/2$.
ii. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$, Un élément a de A est en relation avec un élément b de B quand $a = b + 1$.
iii. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Un élément a de A est en relation avec un élément b de B quand $a + b$ est pair.

iv. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Un élément a de A est en relation avec un élément b de B quand $a + b = 6$.
v. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$, Un élément a de A est en relation avec un élément b de B quand $a^2 = b$.
vi. $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$, Un élément a de A est en relation avec un élément b de B quand $a \times b = 1$.

Exercice 57. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 58. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1 + x^2)$.
i. f est-elle injective ? surjective ?
ii. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
iii. Montrer que la fonction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ telle que $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 59. On considère un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ et la fonction $f : A \to f(A)$ définie par $f(x) = e^{ix}$. Trouver A pour que f soit une bijection. Représenter $f(A)$ dans ce cas.

Exercice 60. Soit f la fonction de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. Donner la notation complète de f. Quels sont les antécédents de 2, 3 et de 4 par f ? f est-elle bijective ?

Exercice 61. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
i. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$,
ii. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n + 1$,
iii. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$,
iv. $k : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$,

Exercice 62. Soit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. Déterminer les ensembles $A = f(\mathbb{Z})$, $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?

Exercice 63. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(x, y) = (x, xy - y^3),$$

Donner la notation complète de f. Quels sont les antécédents de $(1, 0)$, $(2, 0)$ et de $(2, 1)$ par f ? f est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 64. Soient E, F et G trois ensembles f une application de E dans F et g une application de E dans G. On considère l'application h de E dans $F \times G$ définie par :

$$h(x) = (f(x), g(x)).$$

1) Montrer que si f ou g est injective alors h est injective.
2) Si f et g sont surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 65. Soient E, F et G trois ensembles f une application de E dans F et g une application de F dans G. Montrer que :
i. Si $g \circ f$ est injective alors f est injective,
ii. Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
iii. Si $g \circ f$ est injective et f surjective alors g est injective,
iv. Si $g \circ f$ est surjective et g injective alors f est surjective.

Exercice 66. Soient p et q deux réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + px + q$. Montrer que f est surjective. A quelle condition est-elle injective ?

Exercice 67. On considère la fonction f de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ définie par $f(n,p)=2^n(2p+1)$. Donner la notation complète et le domaine de définition de f. Quels sont les antécédents de 28, 47, 64 et de 34 par f ? Montrer que f est bijective.

Exercice 68. En fonction du paramètre réel a, la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=(ax+3y,12x+ay),$$

est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 69. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ telle que $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$. donner la notation complète de f. Quels sont les antécédents de 1, 2, 3 et de 4 par f ? Montrer que f est une bijection.

Exercice 70. On considère la fonction f de $[0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$ telle que $f(x)=-x+\sqrt[3]{x^3+1}$. donner la notation complète de f. Quels sont les antécédents de 1, 2 et de 3 par f ? f est-elle surjective ?

Exercice 71. On considère la fonction f de $[2,+\infty[$ dans $[-1,+\infty[$ telle que $f(x)=x^2-4x+3$. donner la notation complète de f. Quels sont les antécédents de 0, 1 et de 2 par f ? f est-elle bijective ?

Exercice 72. Pour chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, donner la notation complète et le domaine de définition :
i. $f(x)=x^2+1$,
ii. $g(x)=1/(x^2-x-2)$,
iii. $h(x)=1/(x+1)$.
Quels sont les antécédents de 1, de 2 et de 3 par f, par g, par $f\circ g$ et par $g\circ f$?

Exercice 73. Soient u et v les fonctions de $]2,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définies par $u(x)=x^2+x$ et $v(x)=x/(x-2)$.
1) Expliciter $v\circ u$ et $u\circ v$ et donner leurs notations complètes,
2) Resoudre les équations $v\circ u(x)=0$ et $u\circ v(x)=0$.

Exercice 74. Pour chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, donner la notation complète et le domaine de définition :
i. $f(x)=\cos(x)$,
ii. $g(x)=(1+x)/2$,
iii. $h(x)=2x$.
Expliciter $g\circ f\circ h$ et donner sa notation complète. Est-ce que $g\circ f\circ h$ est égal à f^2 ?

Exercice 75. Pour chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, donner la notation complète et le domaine de définition :
i. $f(x)=\sin(x)$,
ii. $g(x)=\cos(x)$.
On considère la fonction $h=g^2-f^2$. Résoudre l'équation $h(x)=0$.

Exercice 76. Pour chacune des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, donner la notation complète et le domaine de définition :
i. $f(x)=\tan(x)$,
ii. $g(x)=2x/(1-x^2)$,
Expliciter $g\circ f$ et donner sa notation complète. Trouver les antécédents de 0 par $g\circ f$.

Exercice 77. Dans chacun des cas suivants, tracer le graphe de la fonction, quand il s'agit d'une fonction :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} x^2 & \text{si} & x < 0, \\ x+1 & \text{si} & x > 0. \end{array} \right. \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} x^3 & \text{si} & x \leq 0, \\ (2-x)^2 & \text{si} & x \geq -1. \end{array} \right. \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}, \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} x/2 & \text{si} & x \text{ est pair}, \\ 0 & \text{si} & x \text{ est impair}. \end{array} \right. \end{array} \qquad i : \begin{array}{ccl} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[, \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & E(x) \text{ est pair}, \\ 1 & \text{si} & E(x) \text{ est impair}. \end{array} \right. \end{array}$$

$$j : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{N}, \\ x & \mapsto & E(x). \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccl} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[, \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{lll} x/3 & \text{si} & x \leq 3, \\ -x+4 & \text{si} & 3 < x \leq 4, \\ 0 & \text{si} & 4 < x, \end{array} \right. \end{array}$$

Exercice 78. Pour chacune des permutations σ suivantes, calculer σ^{-1} et σ^n pour tout entier positif n :

i. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 1 & 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

ii. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

iii. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

iv. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 79. Trouver toutes les permutations τ qui commutent avec chacune des permutations suivantes :

i. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

ii. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

iii. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice 80. Soit ρ la relation définie entre les éléments de $\mathbb{N}$ par :

$$x\rho y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : y = x^n.$$

La relation ρ est-elle une relation d'ordre ? Est-ce une équivalence ?

Exercice 81. Soit ρ la relation définie entre les éléments de $]0,+\infty[$ par :

$$a\rho b \Leftrightarrow a\ln(b) = b\ln(a).$$

Est-ce une relation d'équivalence ? (On pourra étudier la fonction $f(x) = \ln(x)/x$). Déterminer les cardinaux des classes d'équivalence de cette relation.

Exercice 82. Considérons la relation « divise » dans $\mathbb{N}$ notée $|$ et définie par :

$$a|b \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{N} : b = \lambda a.$$

Montrer que $|$ est une relation d'ordre. Quels sont, pour cette relation, les éléments maximaux et minimaux (si ils existent) dans les ensembles suivants : $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\star$, $\mathbb{N}^\star \setminus \{1\}$.

Exercice 83. Soient les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ définies dans $\mathbb{N}^2$ par :

$$(x,y)\mathcal{R}_1(x',y') \Leftrightarrow x+y' = x'+y,$$
$$(x,y)\mathcal{R}_2(x',y') \Leftrightarrow x.y' = x'.y.$$

Montrer que ce sont des relations d'équivalence.

2.5 Types de fonctions

2.5.1 Permutations

2.5.2 Suites

2.5.3 Fonctions usuelles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

2.5.4 Exercices

Exercice 84. Les suites suivantes sont-elles croissantes, décroissantes, strictement croissantes, strictement décroissantes, minorées, majorées, bornées ?

i. $u_n = n$,
ii. $u_n = 2^n$,
iii. $u_n = \sin(n)$,
iv. $u_n = \frac{1}{n}\cos(n)$,
v. $u_n = n\sin(n)$,
vi. $u_n = an$, où a est un réel quelconque,
vii. $u_n = a^n$, où a est un réel quelconque.

2.6 Limite d'une suite

Chapitre 3

Continuité et dérivation

3.1 Notions de topologie

3.2 Limites et continuité

3.3 Dérivation

3.4 Cas des fonctions usuelles