Algebre Linéaire

Chap I : Espaces vectoriels
Chap II : Applications linéaires
Chap III : Matrices
Chap IV : Déterminant
Chap V : Systèmes Linéaires
Chap VI : Réduction des endomorphismes

Chapitre 1 : Espaces vectoriels

1.1) Définitions

Soit un corps K commutatif ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, F_2)

Soit un espace vectoriel $E = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}, \cdots\}$ sur le corps K
ou K-espace vectoriel ou K-ev

↳ ssi $(E, +)$ est un groupe abélien

- $\forall(\vec{a}, \vec{b}) \in E^2 \quad \vec{a} + \vec{b} \in E$
- associative $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $\exists$ neutre $\vec{0_E}$
- $\forall \vec{x} \in E$, $\exists$ symétrique de $\vec{x}$ noté $-\vec{x}$
  $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0} = (-\vec{x}) + \vec{x}$
- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- $\exists \cdot$ tq $\forall \lambda \in K$ (λ est scalaire) $\lambda \cdot \vec{x} \in E$
  $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$
  $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$
  $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u})$
  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

quelques propriétés :

- → Si K' est un sous-corps de K alors tout K-ev est aussi un K'-ev
- → bien distinguer 0 et $\vec{0}$
  mais $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ $\forall \vec{u} \in E$
- → $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$
- → $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

1.2) Exemples d'espaces vectoriels

$\mathbb{R}^2 = \{ \vec{OM}, M \in$ plan O_x et $O_y \}$
$\mathbb{R} = \{ \vec{OM}, M \in$ axe $O_x \}$

$\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ sont des $\mathbb{R}$-ev

→ $\mathbb{S} = \{ (u_n) \}$ est un $\mathbb{R}$-ev
avec $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
$\alpha \cdot (u_n) = (\alpha \cdot u_n)$
$\vec{O_S} = (0)$

→ $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev

→ $K[X]$ et K-ev

1.3) Famille et dépendance

- $\mathcal{F} = \{ \vec{u_1}, \dots, \vec{u_p} \}$ famille de vecteurs de E

- On dit que $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ ou C.L. de $\mathcal{F}$ ssi $\exists a_i \in K$ tq $\vec{u} = \sum_{i=1}^{i=p} a_i \cdot \vec{u_i}$

→ • On dit que $\mathcal{F}$ est libre ou que les $\vec{u_i}$ sont indépendants
ssi $\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \cdot \vec{u_i} = \vec{0} \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i$

• Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre elle est liée ou ses vecteurs sont linéairement dépendants

→ Supposons $\exists \alpha_i$ non tous nuls tq $\sum \alpha_i \cdot \vec{u_i} = \vec{0}$
hyp $\alpha_p \neq 0$

$$\alpha_1 \cdot \vec{u_1} + \dots + \alpha_{p-1} \cdot \vec{u_{p-1}} + \alpha_p \cdot \vec{u_p} = \vec{0}$$
$$\vec{u_p} = \frac{-\alpha_1}{\alpha_p} \vec{u_1} + \dots - \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p} \vec{u_{p-1}}$$

$\vec{u_p}$ est C.L. des $(\vec{u_1}, \dots, \vec{u_{p-1}})$

↳ Si $\mathcal{F}$ est liée alors un de ses vecteurs est C.L. des autres

<u>csq</u> 1 : toute surfamille liée est : liée
2 : toute sousfamille liée est : bof
3 : toute sous-famille d'une famille libre est : libre
4 : toute surfamille ——— : bof
5 : toute famille contenant $\vec{0}$ est : liée

1.4) Sous-espaces vectoriels

1.4.1) Définitions

Soit E K-ev

• On dit que F, partie de E, est sev de E
ssi F est aussi un K-ev pour les mêmes lois que E

→ F est sev de E ssi :
E est K-ev
$F \subset E$
$F \neq 0$
⟶ F est stable $\iff \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2$
$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \in F$

→ F sev de E $\Rightarrow$ $\vec{O_E} \in F$

et

→ $\vec{O_E} \notin F$ $\Rightarrow$ F n'est pas sev de E

et

→ F sev de E $\Rightarrow$ $\vec{O_F} = \vec{O_E}$

1.4.2) Intersection de sev

Soient F et G deux sev de E
alors $F \cap G$ est aussi sev de E
car : E est K-ev
$F \cap G \subset E$
$F \cap G \neq \emptyset$ car $\vec{O_E} \in F$ et $\vec{O_E} \in G$
$F \cap G$ est stable

rac.

1.4.3) Somme de sev

F et G sev de E
$F \cup G$ n'est pas (en général) un sev de E

ex : $\mathbb{R}^2 = \{O_x, O_y\}$ (O_x) est un sev de $\mathbb{R}^2$
(O_y) est un sev de $\mathbb{R}^2$
$\vec{u} \in (O_x)$ $\vec{v} \in (O_y)$
$\vec{u} \notin (O_x) \cup (O_y)$

F+ G est la somme de F et G est $\{$C.L. $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G\}$
$= \{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \forall(\alpha, \beta) \in K^2\}$

→ F+G est sev de E
car $\{$E est un K-ev ; $F+G \in E$; $F+G \neq 0$ et F+G stable$\}$

• Si $F \cap G = \{\overrightarrow{0_E}\}$ on dit que $F+G$ est une somme directe
on note $F \oplus G$

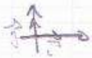
$\mathbb{R}^3 = \{O_x\} \oplus \{O_y, O_z\}$
$\mathbb{R}^2 = \{O_x\} \oplus \{O_y\}$

1.5) Générateurs ; base ; coordonnées

E K-ev $\mathcal{F} = \{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\}$ $u_i \in E$

→ L'ensemble des C.L. de $\mathcal{F}$ est un sev de E
noté $F = \text{Vect}\,\mathcal{F} = < \mathcal{F} >$
("sous espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$")
$\mathcal{F}$ est génératrice de F

→ • On dit que la famille $\mathcal{B}$ est base de E ssi
$\mathcal{B}$ est libre et génératrice de E

• La dimension de E est dim E = card (base de E)
ex: dim $\mathbb{R}^2 = 2$  $(\vec{i}, \vec{j})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \dots, \vec{b_n}\}$ base de E dim E = n
alors $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \cdot \vec{b_i} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

et $\forall \vec{u} \in E$, $\exists x_i$ tq $\vec{u} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \vec{b_i}$
x_i sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$
Elles sont uniques.

1.6) Espace vectoriel de dimension finie

Soit E K-ev $B = \{ \vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n} \}$ base de E

$\dim E = \text{card } B = n$

→ Théorème de la base incomplète

$\mathcal{F} = \{ \vec{u_1}, \dots, \vec{u_p} \}$ p vecteurs libres $p \leq n$

On peut compléter $\mathcal{F}$ par $(n-p)$ vecteurs "bien choisis" appartenant à B pour former une nouvelle base de E.

csq 1 : toute famille libre de n vecteurs est une base de E.

csq 2 : toute famille libre de $p < n$ vecteurs n'est pas génératrice de E.

csq 3 : toute base a exactement n vecteurs.

↳ par convention $\{\vec{0}\} = 0$

csq 4 : toute famille libre a au plus n vecteurs.

csq 5 : toute famille de plus de n vecteurs est liée

→ <u>Th</u> : Une famille $\mathcal{F}$ est base de E ssi elle vérifie deux de ces 3 définitions :

- être libre
- être génératrice
- card $\mathcal{F}$ = dim E

↳ elle vérifie alors la troisième.

1.7) Sev en dimension finie

E K-ev $\dim E = n$
F sev de E

<u>Rmq</u> Si 2 sev ont la même base, ils sont identiques

→ F sev de E ⟹ $\dim F \leqslant \dim E$
→ Si F sev de E et $\dim F = \dim E$ alors $F = E$
→ $\forall \vec{u} \in F$ sev de E, avec $\dim F = p \leqslant n = \dim E$, les n coordonnées de $\vec{u}$ dans F sont des C.L. des p coordonnées de $\vec{u}$ dans F

<u>ex:</u> $E = \mathbb{R}^3$ $F = \langle \vec{u_1} ; \vec{u_2} \rangle$ avec $\vec{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

→ $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ est base de F, car ils engendrent F et car $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$ sont libres

↳ car $\alpha \vec{u_1} + \beta \vec{u_2} = \vec{0} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

rac rac.

donc $\dim F = 2$.

$$\forall \vec{u} \in F \quad \vec{u} = \alpha \vec{u_1} + \beta \vec{u_2} = \underbrace{(x, y, z)}_{\text{dans la base de E}}$$

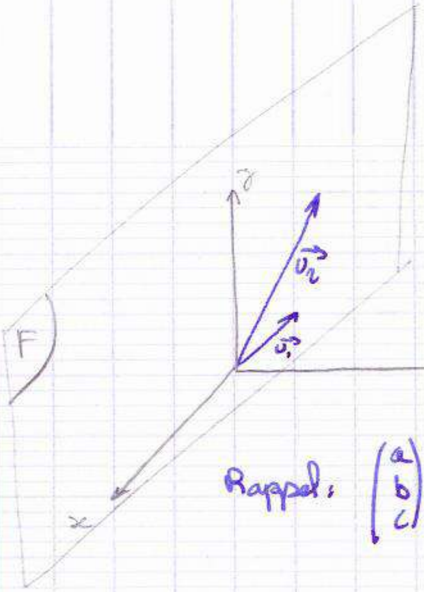
d'où $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + 2\beta \end{cases}$ d'où $\alpha = x + \beta$ et $\begin{cases} y = x + 2\beta \\ z = x + 3\beta \end{cases}$

$\beta = \frac{-x + y}{2}$ et $z = x + 3\left(\frac{-x+y}{2}\right)$

soit $2z = 2x - 3x + 3y \Leftrightarrow \boxed{x - 3y + 2z = 0}$

équation de F

Vérif: sur $\vec{u_1}$: $1 - 3 + 2 = 0$
sur $\vec{u_2}$: $-1 - 3 + 4 = 0$ } ouf !



$\vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est normal au plan F

donc $F = \{\vec{OM} \perp \vec{n}\}$

$\Leftrightarrow \vec{OM} \cdot \vec{n} = 0$

$x(1) + y(-3) + z(2) = 0$

$x - 3y + 2z = 0$

Rappel : $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}bc' - b'c\\c'a - ca'\\ab' - a'b\end{pmatrix}$

1.8) Rang d'une famille

E espace vectoriel de dim n.

$\mathfrak{F} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_p}\}$ $\quad F = \text{Vect } \mathfrak{F} = \langle \mathfrak{F} \rangle$

- Le rang de $\mathfrak{F}$ est la dimension de Vect $\mathfrak{F}$

noté $\text{rg } \mathfrak{F} = r$ $\quad \underline{\text{rg } \mathfrak{F} \leqslant \inf(n, p)}$

$r < p \quad r \leqslant n$

→ Si $\mathfrak{F}$ est libre $\text{rg } \mathfrak{F} = \text{card } \mathfrak{F}$

→ <u>Pivot de Gauss</u>

→ On ne change pas le rang d'une famille en :
  - ajoutant à un de ses vecteurs une C.L. des autres
  - intervertissant 2 de ses vecteurs
  - multipliant un vecteur par une constante non nulle.
  - intervertissant l'ordre des coordonnées de tous ses vecteurs

ex: dans $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{F} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}\}$

$$rg\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} & \vec{e_4}\end{array}\\ \begin{pmatrix}① & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow[\text{rang}]{\hat{m}} \begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}-\vec{e_1} & \vec{e_4}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & ① & -2 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc} & & C_3+2C_2 & C_4-C_2\\ \left|\begin{matrix}1\\2\\0\\3\end{matrix}\right. & \begin{matrix}0\\1\\2\\-1\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\③\\-3\end{matrix} & \left.\begin{matrix}0\\0\\-1\\1\end{matrix}\right)\end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cccc} & & & C_4'+\frac{C_3'}{3}\\ \underbrace{\left(\begin{matrix}1\\2\\0\\3\end{matrix}\;\begin{matrix}0\\1\\2\\-1\end{matrix}\;\begin{matrix}0\\0\\3\\-3\end{matrix}\right.}_{\text{libres}} & & & \left.\begin{matrix}0\\0\\0\\0\end{matrix}\right)\end{array}$$

- nb vecteurs non nuls $= 3 = \dim \langle \mathcal{F} \rangle$
- $\exists$ (card $\mathcal{F}$ − rg $\mathcal{F}$) relation linéaire entre les vecteurs de $\mathcal{F}$.

$$\vec{0} = C_4' + \frac{C_3'}{3} = C_4 - C_2 + \frac{C_3+2C_2}{3} = -\frac{C_2}{3} + \frac{C_3}{3} + C_4$$
$$= -\frac{\vec{e_2}}{3} + \frac{\vec{e_3}-\vec{e_1}}{3} + \vec{e_4}$$

d'où $\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3} - 3\vec{e_4} = \vec{0}$

Vérif: $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-3\\-3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ ☺

– Les vecteurs non nuls en fin de pivot sont une base de F

On en déduit aussi l'équation de F:
car $\forall\ \vec{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in F$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\3\\-3\end{pmatrix}$$

d'où $x = \alpha$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = \alpha\\ y = 2\alpha + \beta\\ z = 2\beta + 3\gamma\\ t = 3\alpha - \beta - 3\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x + y = \beta\\ z = 2\beta + 3\gamma\\ -3x + t = -\beta - 3\gamma\end{cases}$$

$\beta = -2x + y$

d'où $3\gamma = 4x - 2y + z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x - 2y + z = 3\gamma\\ -3x - 2x + y + t = -3\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \text{et } -5x + y + t = -4x + 2y - z$$

soit $\underline{x + y - z - t = 0}$

équation de F

1.9) Dimension de sev

E de dimension n

F et G sev de E de dim p et q

$F \cap G$ de dimension s

$s \leqslant \inf(p, q) \leqslant n$ $\quad p \leqslant n$

$\quad q \leqslant n$

→ $\underline{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G}$

"Th des 4 dimensions"

1.10) Résolution des récurrences

Soit une suite $(u_n) \in \mathbb{S}$, qui est un $\mathbb{R}$-ev

avec $\begin{cases} u_n = a\, u_{n-1} + b\, u_{n-2} \\ \text{et } u_0 \text{ et } u_1 \text{ connus} \end{cases}$ (1) "double récurrence"

Soit $F = \{\text{solutions de } (1)\}$ F est un sev de $\mathbb{S}$ de dim 2

car $\mathbb{S}$ est $\mathbb{R}$-ev $\quad F \neq \emptyset$ car $\{0\} \in F$

$F \subset \mathbb{S}$ $\quad$ F est stable $(u_n) \in F$ $(v_n) \in F$

$\alpha(u_n) + \beta(v_n) \in F$

ra

1.10) Récurrence

(1) $u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}$, a et b $\in \mathbb{R}$

$n \geq 2$ u_0 et u_1 fixés

$F = \{ (u_n) \text{ solution de } (1) \}$ est $\mathbb{R}$-ev, sev de S

→ $\dim F = 2$

soit $(u_n) \in F$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$

soit $(v_n) \in F$ avec $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$

soit $(w_n) \in F$ avec w_0 et w_1 connus

on peut écrire : $\begin{cases} w_0 = w_1 u_0 + w_0 v_0 \\ w_1 = w_1 u_1 + w_0 v_1 \end{cases}$

Hyp: H_n : $w_n = w_1 u_n + w_0 v_n$

↳ H_0 est vrai, H_1 est vrai

Supposons H_n vrai jusqu'au rang n

alors : $w_{n+1} = a w_n + b w_{n-1}$ (d'après (1))

$$w_{n+1} = a (w_1 u_n + w_0 v_n) + b (w_1 n_{-1} + w_0 v_{n-1})$$

$$= w_1 (a u_n + b u_{n-1}) + w_0 (a v_n + a v_{n-1})$$

$$= w_1 u_{n+1} + w_0 v_{n+1}$$

H_{n+1} est donc vrai. L'Hyp H_n est héréditaire vraie en $n = 0$ et $n = 1$, donc toujours vraie

$\{u_n ; v_n\}$ est génératrice de F

Mq (u_n) et (v_n) sont libres

$\lambda (u_n) + \mu (v_n) = (0)$

$n = 0$ $\lambda u_0 + \mu v_0 = 0$ donc $\mu = 0$

$n = 1$ $\lambda u_1 + \mu v_1 = 0$ donc $\lambda = 0$

→ $\dim F = 2$ ☺

→ Cherchons une "belle" base de F

Posons $u_n = r^n$ $\quad r \in \mathbb{R}^*$

l'équation (1) devient $r^n = ar^{n-1} + br^{n-2}$

d'où $r^2 = ar + b$

soit $r^2 - ar - b = 0$ (Equation caractéristique associée à (1))

* 1er cas : E.C. a 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2

Les suites (r_1^n) et (r_2^n) $\in F$

Elles sont libres car

$$\lambda(r_1^n) + \mu(r_2^n) = (0) \text{ d'où : } \left.\begin{matrix} n=0 & \lambda+\mu=0 \\ n=1 & \lambda r_1+\mu r_2=0 \end{matrix}\right\}$$

c.à.d $\begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda(r_1 - r_2) = 0 \end{cases}$ donc $\lambda = \mu = 0$

rec

→ Résumé : $u_n = a u_{n-1} + b u_{n-2}$

u_0 et u_1 fixés

EC : $r^2 - ar - b = 0$

1er cas : 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2

$u_n = A r_1^n + B r_2^n$

2ième cas : 1 racine double r. $\quad$ A et B calculés par les C.I.

$u_n = (A + nB) r^n$

3ème cas : 2 racines complexes

$u_n = \rho^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)$

* 2ème cas : E.C. a une racine double $r \in \mathbb{R}$

alors $\Delta = a^2 - 4b = 0$ → $r = \frac{a}{2}$

soit $(u_n) = (r^n)$ $\quad (v_n) = (n r^n)$

$$\left.\begin{matrix} \lambda(u_n) + \mu(v_n) = (0) & \\ n=0 \quad \lambda u_0 + 0 = 0 & \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases} \\ n=1 \quad \lambda r + \mu r = 0 & \end{matrix}\right\} (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont libres}$$

et $(v_n) \in F$

car $\delta = v_m - a v_{m-1} - b v_{m-2} = m r^m - a(m-1) r^{m-1} - b(m-2) r^{m-2}$

$= m(\underbrace{r^m - a r^{m-1} - b r^{m-2}}) + a r^{m-1} + 2b r^{m-2}$

$= r^{m-2} (ar + 2b)^{=0} = r^{m-2} \left(\frac{a^2}{2} + 2b \right) = r^{m-2} \left(\frac{a^2 + 4b}{2} \right) = 0$

* 3ème cas : 2 racines complexes r_1 et r_2, conjuguées

donc $r_1 = \rho . e^{i\theta}$ $r_2 = \rho e^{-i\theta}$

$u_m = \alpha r_1^m + \beta r_2^m = \overline{u}_m = \overline{\alpha} r_2^m + \overline{\beta} r_1^m$

$\hookrightarrow$ donc $\overline{\alpha} = \beta$. Posons $\alpha = k e^{i\varphi}$

$u_m = k e^{i\varphi} \rho^m e^{im\theta} + k e^{-i\varphi} \rho^m e^{-im\theta}$

$= k\rho^m \left[e^{i(m\theta + \varphi)} + e^{-i(m\theta + \varphi)} \right] = k\rho^m \cdot 2 \cos(m\theta + \varphi)$

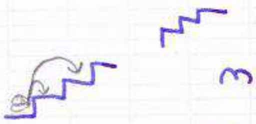
$= K\rho^m \cos(m\theta + \varphi)$ où K et φ déterminés par les C.I.

$u_m = K\rho^m (\cos m\theta \cos\varphi - \sin m\theta \sin\varphi)$

$= \rho^m (\underbrace{K\cos\varphi}_{A} \cos m\theta \underbrace{- K \sin\varphi}_{B} \sin m\theta)$

$= \rho^m (A \cos m\theta + B \sin m\theta)$

Exemple 1 :



m marches

$u_m =$ "nombre de chemins pour aller en haut"

$u_0 = 1$
$u_1 = 1$
$u_2 = 2$
$u_3 = 3$
$u_4 = 5$

$u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$

"Suite de Fibonacci"

Posons $u_m = r^m$ $r^m = r^{m-1} + r^{m-2}$

$\hookrightarrow r^2 = r + 1$, d'où $\boxed{r^2 - r - 1 = 0}$ E.C.

$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ "nb d'or" ☺

$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Donc $u_n = A r_1^{\,n} + B r_2^{\,n} = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$\left.\begin{array}{l} n=0 = 1 = A + B \\ n=1 = 1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{array}\right\} B = 1-A$$

et $1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-A)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$2 = A\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{5}-1\right) + 1-\sqrt{5}$$

$1+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\,A$ $\quad A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ $\quad B = 1-\frac{(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

$$u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

quand n est "assez grand":

$u_n \sim \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{\sqrt{5}\,2^{n+1}}$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

Exemple 2: $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$ $\quad v_0 = v_1 = 1$

(double récurrence)

Posons $v_n = r^n$

$$r^{n+2} = 4r^{n+1} - 4r^n$$

$$r^2 = 4r - 4$$

D'où $r^2 - 4r + 4 = 0$ $\quad$ E.C. : $r = 2$ (racine double)

$v_n = (A + nB)2^n$ avec:

$n = 0$: $v_0 = 1 = A$

$n = 1$: $v_1 = 1 = (A+B)2$

D'où $A = 1$ et $B = -1/2$

$$\boxed{v_n = \left(1 - \frac{n}{2}\right)2^n}$$ Bô

car $\delta = v_n - a v_{n-1} - b v_{n-2} = n r^n - a(n-1) r^{n-1} - b(n-2) r^{n-2}$

$= n\,(\underline{r^n - a r^{n-1} - b r^{n-2}}) + a r^{n-1} + 2b r^{n-2}$

$= r^{n-2}(ar + 2b)^{=0} = r^{n-2}\left(\frac{a^2}{2} + 2b\right) = r^{n-2}\left(\frac{a^2+4b}{2}\right) = 0$

* $3^{\text{ème}}$ cas : 2 racines complexes r_1 et r_2, conjuguées

donc $r_1 = \rho . e^{i\theta}$ $\quad r_2 = \rho e^{-i\theta}$

$u_n = \alpha r_1^n + \bar{\beta} r_2^n = \bar{u}_n = \bar{\alpha} r_2^n + \bar{\beta} r_1^n$

↳ donc $\bar{\alpha} = \beta$. Posons $\alpha = k e^{i\varphi}$

$u_n = k e^{i\varphi} \rho^n e^{in\theta} + k e^{-i\varphi} \rho^n e^{-in\theta}$

$= k\rho^n \left[e^{i(n\theta+\varphi)} + e^{-i(n\theta+\varphi)} \right] = k\rho^n \cdot 2\cos(n\theta+\varphi)$

$= K\rho^n \cos(n\theta+\varphi)$ où K et φ déterminés par les C.I.

$u_n = K\rho^n(\cos n\theta \cos\varphi - \sin n\theta \sin\varphi)$

$= \rho^n(\underbrace{K\cos\varphi}_{A} \cos n\theta \underbrace{- K\sin\varphi}_{B} \sin n\theta)$

$= \rho^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta)$

$=\!=$

Exemple 1 :

n marches

u_n = "nombre de chemins pour aller en haut"

$u_0 = 1$

$u_1 = 1$

$u_2 = 2$

$u_3 = 3$

$u_4 = 5$

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

"Suite de Fibonacci"

Posons $u_n = r^n$ $\qquad r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$

↳ $r^2 = r + 1$, d'où $\boxed{r^2 - r - 1 = 0}$ E.C.

Exemple 3 : $w_{n+2} + 2w_{n+1} + 4w_n = 0$ $\quad w_0 = 1$, $w_1 = 2$

Posons $w_n = r^n$ $\quad r^{n+2} + 2r^{n+1} + 4r^n = 0$

E.C. : $r^2 + 2r + 4 = 0$ $\quad (\Delta = -12)$

On a donc $r = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}$ $\quad r_1 = -i + i\sqrt{3}$

$\rho = |r_1| = \sqrt{1+3} = 2$

càd : $r_1 = 2\left(\frac{-1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{\frac{i2\pi}{3}}$

D'où $w_n = 2^n\left(A\cos\frac{n2\pi}{3} + B\sin\frac{n2\pi}{3}\right)$

$w_0 = A = 1$ et $w_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \rightarrow B = \sqrt{3}$

On a donc : $\boxed{w_n = 2^n\left(\cos\frac{n2\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{n2\pi}{3}\right)}$

→ Généralisation :

On peut résoudre les p-uples récurrences :

$$u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \dots + a_p u_n$$

★ encore ⊕ bô :

Équation différentielle du $2^{ème}$ ordre homogène et linéaire.

(1)' $y'' + py' + qy = 0$ $\quad p, q \in \mathbb{R}$

Les solutions de (1)' forment un espace vectoriel de dim 2.

Posons $y = e^{rx}$

- → 2 racines distinctes r_1 et r_2 → $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$
- → 1 racine double r → $y = (Ax + B)e^{rx}$
- → 2 racines complexes $u \pm iv$ → $y = e^{ux}(A\cos Vx + B\sin Vx)$