GAUTIER
Arthur
L1CPI1
2013

20

$\frac{27}{30}$

GAUTIER
Arthur
L_1
Groupe A

Le 06/05/14

1

Algèbre Linéaire

$L_2 := L_2 + L_3$

a) $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (1)

$= 1 \times (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-1)\times(-1) - ((-1)\times(1))$

$= 2.$

b) Comme $\det(A) \neq 0$, A est inversible et comme f est une application de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même, alors, f est injective, surjective et donc bijective. (1)

c) Comme f est bijective, tous les vecteurs b appartenant à $\mathbb{R}^3$ admettent une et une seule solution dans l'équation $AX = b$, solution qui vaut : $X = A^{-1} b$ (1)
Donc, l'ensemble des vecteurs colonnes b tel que

$AX = b$ admettant au moins une solution est $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 \right\}$

d) Comme A est inversible, l'équation $AX = 0$ admet une unique solution, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2

II)

a) $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^2 - A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1

b) Posons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$.

$\lambda_1 I_3 + \lambda_2 A + \lambda_3 A^2 = 0$

1

$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \iff \lambda_1 = -2\lambda_3. \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \iff -\lambda_2 = \lambda_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \iff \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases}$

Comme ce système admet d'autres solutions que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ dans $M_{33}(\mathbb{R})$, (I_3, A, A^2) sont liées dans $M_{33}(\mathbb{R})$.

c) Comme $A^2 = 2I_3 + A$, $Vect(I_3, A)$ engendre A^2. Donc, A^2 appartient à F.

1

d) Il est dit que $F = Vect(I_3, A)$. Donc F est engendré par deux éléments, I_3 et A. Donc F est de dimension 2

Vérifions si ces deux éléments forment une famille libre.
Posons $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2$
$\lambda_1 I_3 + \lambda_2 A = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Donc, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Donc I_3 et A forment une base de F, car F est de dimension 2 et que I_3 et A forment une famille libre à deux éléments

1

e) F est un sous-espace vectoriel de $M_{33}(\mathbb{R})$. Or, $M_{33}(\mathbb{R})$ est de dimension ~~3~~ et F de dimension 2. Donc, $F \neq M_{33}(\mathbb{R})$.

1

f) $A^2 - A - 2I_3 = 0$
$A^2 - A = 2I_3$
$A(A - I) = 2I_3$
$A(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I) = I_3$

$\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I = A^{-1} = B$

1

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g) $J \in F$ si et seulement si J est combinaison linéaire de I_3 et de A.
Donc, s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls tel que :

$$\lambda_1 J + \lambda_2 I_3 + \lambda_3 A = 0.$$

$$\left.\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases}\right\} \text{Possible seulement si } \lambda_1 = \lambda_3 = 0$$ @

Donc, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc J, I_3 et A forment une famille libre. Donc $J \notin F$.

IV)

a) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(J)$, c'est l'ensemble des solutions du système $JX = 0$
Posons la matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

GAUTIER
Arthur
L_1
Groupe A

Le 06/05/1?

2

Algèbre linéaire

Th)

a) $\begin{pmatrix} 1&1&1&0 \\ 1&1&1&0 \\ 1&1&1&0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1&1&1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

Ker $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 - x_3$.
x_2 libre
x_3 libre

$\mathrm{Ker}(S) = \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3), x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2\}$ 0
$= \mathrm{Vect}(-2, 1, \cancel{1}) = B_1$

Ker(S) a deux éléments libres, il est donc de dimension 2.

b) D'après le théorème du rang,

$\mathrm{null}(A) + \mathrm{rg}(A) = p$
$2 + \mathrm{rg}(A) = 3$
$\mathrm{rg}(A) = 1.$

0

$\mathrm{col}(A) = \{E_1\}$
$= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = B_2$

c) $U = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 , \exists x \in \mathbb{R}^3 , y = f(x) \right\}$

La matrice standard de f est $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On cherche l'ensemble des vecteurs colonnes X de la forme $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, tel que $A \times X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, alors : $A \times X = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

$U = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} , x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 \right\}$ ø

Au cas où

$U = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 , \exists x \in \mathbb{R}^3 , y = g(x) \right\}$

La matrice standard de g est $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On cherche l'ensemble des vecteurs colonnes X de la forme $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, tel que $A X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

2

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, alors : $A X = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} , x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

IV)

$$M = A + J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $\mathrm{Ker}(M - xI) \neq \{0\} \iff \det(M - xI) \neq 0.$

$$\det(M - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 2 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\left((1-x)^2 - 4\right)$$

$$= (1-x)\left((1-x+2)(1-x-2)\right)$$

$$= (1-x)(3-x)(-1-x)$$

2

$\det(M - xI) \neq 0$ pour $x = 1$, $x = 3$ et $x = -1$.

b) $\mathrm{Ker}(M - I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ x_2 \text{ libre} \end{cases}$$

$\mathrm{Ker}(M - I) = \{(0, x_2, 0),\ x_2 \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{Vect}(0, 1, 0) = B_1$

$\mathrm{Ker}(M + I) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$ $\quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0 \iff x_1 = -x_3 \\ 2x_2 = 0 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$

$Ker(M+I) = \{(-x_3, 0, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$

$= Vect(-1, 0, 1) = B_2$

$Ker(M-3I) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -2x_1 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_3 \\ -2x_2 = 0 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$

$Ker(M-3I) = \{(x_3, 0, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$

$= Vect(1, 0, 1) = B_3$

2

c) $B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Montrons que B_1, B_2, B_3 forment une famille libre.
Posons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que:

$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3 = 0$

1

$\begin{cases} -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_3. \end{cases}$

Donc B_1, B_2, B_3 forment une famille libre. Comme cette famille a 3 éléments, elle forme une base de $\mathbb{R}^3$:

$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

GAUTIER
Arthur
L_1
Groupe A

Le 06/05/14

3

Algèbre Linéaire

IV)

d) $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1

e) $(P_{BB'})^{-1} \times P_{BB'} = I_3$.

Posons $(P_{BB'})^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -d + g = 1 \Leftrightarrow g = 1 + d = \frac{1}{2} \\ -e + h = 0 \Rightarrow e = h \\ -f + i = 0 \Leftrightarrow -2f + 1 = 0 \Leftrightarrow f = \frac{1}{2} \\ a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \\ d + g = 0 \Leftrightarrow 2d + 1 = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{1}{2} \\ e + h = 0 \Rightarrow e = -h \Leftrightarrow e = h = 0 \\ f + i = 1 \Leftrightarrow i = 1 - f = \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où, $\left(P_{BB'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$P_{BB'} \times \left(P_{BB'}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(P_{BB'}\right)^{-1} \times P_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 2

f) Ainsi, $MP_{BB'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = P_{BB'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$MP_{BB'} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3P_{BB'} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2

$MP_{BB'} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -P_{BB'} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, on a $MP_{BB'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D} P_{BB'} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

g) Donc, $M \times P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P_{BB'}$

$\left(P_{BB'}\right)^{-1} \times M \times P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ~~2~~ 1

$M = \left(P_{BB'}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P_{BB'}$

Donc, $M^{1000} = \left(P_{BB'}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P_{BB'} \times \left(P_{BB'}\right)^{-1} + \dots + P_{BB'}$

Par télescopage de $P_{BB'}$, on obtient :

$$M^{1000} = \left(P_{BB'}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{BB'}$$

$$M^{1000} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{1000} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fin