EFREI -L1 mai 2012

ALGEBRE LINEAIRE – Corrigé succinct DE n°2

Un point de plus pour le premier étudiant qui me signale une erreur dans le corrigé

Questions de cours : voir cours.

Exercice n°1 :

A=-3 ; B= -7-2x ; C=x-38 ; D = -4x+2

Exercice n°2 :

$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -2 & 9 & -5 \\ 4 & -14 & 8 \end{pmatrix}$; $A+I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $A + {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

$\text{Min } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; $\text{com } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$; trace (A)= -3 ; det (A)= 2 ;

inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -5 & -4 \end{pmatrix} /2$.

Exercice n° 3 :

Ce système a n=3 équations et p=3 inconnues ; calcul du rang r : le déterminant du système est D = m^3-3m+2=((m-1)^2).(m+2) .

<u>Cas général</u> : m différent de 1 et de -2, le système est de Cramer, alors :

$x = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m\text{^}2 & 1 & m \end{pmatrix}$ /D = (1-m)(m-1)(1+m)/D = -(m+1)/(m+2)

$y = \det \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m\text{^}2 & m \end{pmatrix}$ /D = ((m-1)^2)/D = 1/(m+2)

$z = \det \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m\text{^}2 \end{pmatrix}$ /D = (m-1)^2.(m+1)^2/D = ((m+1)^2)/(m+2)

<u>Cas particulier n°1</u> : m=1 ; le système devient

x+y+z=1 ; x+y+z=1 ; x+y+z=1 , système manifestement de rang 1, avec 2 bordants nuls, équivalent à : x=1-y-z , pour tous y et z réels.

<u>Cas particulier n°2</u> : m=-2 ; le système devient

-2x+y+z=1 ; x-2y+z=-2 ; x+y-2z=4 , dont le rang est 2, les deux premières équations sont principales avec x et y inconnues principales ; il existe un bordant $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est 9 non nul ; le système n'a pas de solutions.

Exercice n°4 :

P(λ) = det (M-λI) = det$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ = -λ^3 + 3λ +2 = (-λ+2).(λ+1)^2 ; les valeurs propres sont -1 (double) et 2.

L'espace propre associé à -1 a pour équations x+y+z=0 ; x+y+z=0 ; x+y+z=0 ; système de rang 1 ; cet espace est de dimension 2 ; ; on peut prendre comme vecteur propre e-1 = (1 ; 1 ; -2) ; et e'-1 =(1 ;-2 ; 1)

L'espace propre associé à 2 a pour équations -2x+y+z=0 ; x-2y+z=0 ; x+y-2z=0, système de rang 2, cet espace est de dimension 1 ; on peut prendre e2= (1 ; 1 ; 1).

La matrice de changement de base est alors P =$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; on calcule ses mineurs, cofacteurs et déterminant pour trouver son inverse : inv(P) = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ /3 .On vérifie que le produit D = inv(P). M.P est une matrice diagonale égale à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; alors

M^n= P. D^n .inv(P)=1/3 . $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)\hat{}n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)\hat{}n & 0 \\ 0 & 0 & (2)\hat{}n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$=1/3$\begin{pmatrix} an & bn & bn \\ bn & an & bn \\ bn & bn & an \end{pmatrix}$avec *an*=2(-1)^n+2^n et *bn*=-(-1)^n+2^n, formule que l'on vérifie pour n=0 puis n=1, voire n=2.

P(M)= -M^3+3M+I ; on calcule M^2=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$puis M^3=$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

ce qui donne P(M)= matrice nulle !! (c'est le théorème de Cayley-Hamilton). On constate ainsi que

M^0=α0.M+β0.I avec α0=0 et β0=1

M^1= α1.M+β1.I avec α1=1 et β1=0

M^2= α2.M+β2.I avec α2=1 et β2=2

On pose l'hypothèse Hn : M^n= αn.M+βn.I ; cette hypothèse est vraie pour n=0,1 et2 ; on la suppose vraie au rang n . Alors M^(n+1)= M^n .M=(αn.M+βn.I).M = αn.M^2+βn.M= αn.(M+2I)+βn.M=(αn+βn)M+2αnI

L'hypothèse est héréditaire avec : α(n+1)= αn+βn et β(n+1)=2αn, donc toujours vraie.

On élimine β, pour trouver α(n+2)=α(n+1)+2αn ; double récurrence : joie ! L'équation caractéristique associée est r^2-r-2=0, dont les racines sont -1 et 2 (tiens, ce sont les valeurs propres trouvées précédemment..).

Donc αn est de la forme A(-1)^n +B(2^n) ; on calcule pour n= 0 et n=1 ; d'où A= 1/3 et B=-1/3.

De βn= α(n+1)-αn, on tire βn=(2.(-1)^n+2^n)/3 ; et on remplace dans M^n= αn.M+βn.I , et on retrouve l'expression calculée ci-dessus M^n par la première méthode **(☺).**

Un peu long peut-être ? mais ce DE résume bien, je crois, l'essentiel à mémoriser du cours d'algèbre linéaire. Il n'est pas nécessaire d'avoir tout traité pour avoir une bonne note ! Bonne poursuite d'études, merci pour cette agréable année passée ensemble.. Jacques Gualino