DIALLO
Alpha Oumar

PL1
2013

15,

DE algèbre linéaire 2013-2014

Vous confondez trop souvent les vecteurs et les nombres !

1) Résoudre $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$.

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \Rightarrow x=y \\ -2x+2y=0 \Rightarrow x=y \end{cases}$$ 2

L'ensemble des solutions $S=\{(y,y)\ /\ y\in\mathbb{R}\}$

2) Déduisons de 1) une base de F :

$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \text{Vect } A=\begin{pmatrix}y\\y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 2

donc la base est : $y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

3) dimF vaut 1 2

---

4) $V_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $V_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $V_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$, montrons que pour tout vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, il existe trois réels α,β,γ tels que : $\alpha V_1+\beta V_2+\gamma V_3=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha+\beta&=x &\Rightarrow\quad \alpha&=x-y \\ \beta&=y & \beta&=y \\ \alpha-\gamma&=z &\Rightarrow\quad \gamma&=\alpha-z=x-y-z \end{aligned}$$ 3

5) On peut conclure que (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ B car les vecteurs $\alpha V_1, \beta V_2$ et γV_3 représentent une famille libre et génératrice.

6) La matrice de passage P_{SB} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \\ x - z \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x = -y \\ x = z \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -y+y \\ y \\ z-z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B$$

$$P_{SB} = S \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

7) Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x + 2y + z = 0$ et deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

1 Calculons les coordonnées $\alpha u_1 + \beta u_2$:

$$\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 + \beta x_2 + \beta y_2 + \beta z_2$$

$$= \alpha(\underbrace{x_1 + y_1 + z_1}_{u}) + \beta(\underbrace{x_2 + y_2 + z_2}_{v})$$

u et v sont de la forme $x + y + z = 0$ et $\forall (u, v) \in E$ ou $\mathbb{R}^3$ $(u + v) \in E$ (addition interne).

Aussi $\forall k \in \mathbb{R}$, $ku \in \mathbb{R}^3$ donc $\in E$.

nous pouvons en déduire donc que $\forall (u, v) \in E$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$, $\alpha u + \beta v \in E$.

8) E défini par l'équation $x + 2y + z = 0$ est un sous-espace vectoriel : car $\forall (E, E') \in \mathbb{R}^3$

$$\cancel{E + E'} = \underbrace{x + 2y + z}_{E} + \underbrace{x' + 2y' + z'}_{E'} = (x + x') + (2y + 2y') + (z + z')$$

NON

$E + E' \in \mathbb{R}^3$.

~~Aussi, le vecteur nul : $E \times 0 = (x + 2y + z) \times 0 = 0 = E_0$.~~

$\forall k \in \mathbb{R}$, $(k \times E) \in \mathbb{R}$; $k \times E = k(x + 2y + z)$
$= kx + k2y + kz$. NON !
$E \in \mathbb{R}^3$.

9) Une base de E : 1

$x + 2y + z = 0 \Rightarrow x = -2y - z$

$$\begin{pmatrix} x \\ 2y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - z \\ 2y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10) Dim de E vaut 2. 1

---

11) Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base standard de $\mathbb{R}^3$ et l'application linéaire de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :
$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$; $f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$; $f(\varepsilon_3) =$
$f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Ecrivons la matrice de f

La matrice standard de f :

$$F = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{array} & \end{array}$$

2

12) Pour montrer que f est bijective, calculons son déterminant :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \cancel{l_3 - l} \\ \\ l_3 - 2l_1 \end{array} \Big($$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{l_3 - 2l_1}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- $\det f = (-1)^2 \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 1 \times (-3-2) = -5 \neq 0$
- donc f est bijective et inversible car son déterminant est différent de 0.

1 (-1 pour la notation fausse)