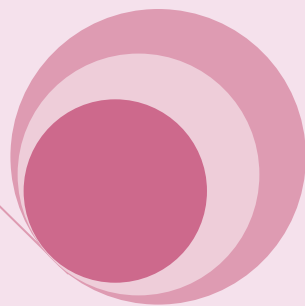
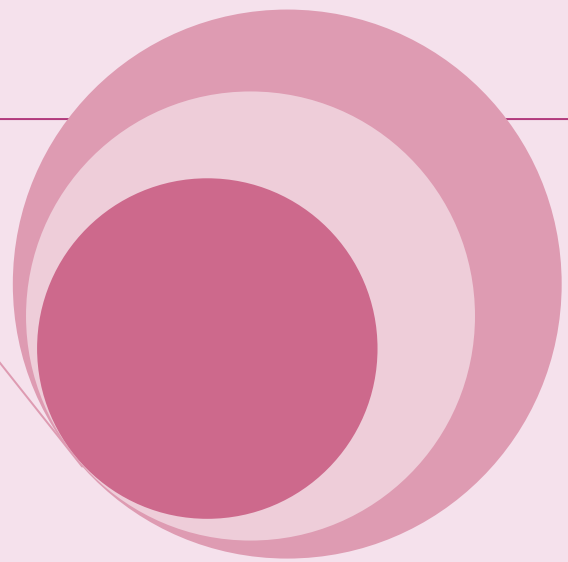
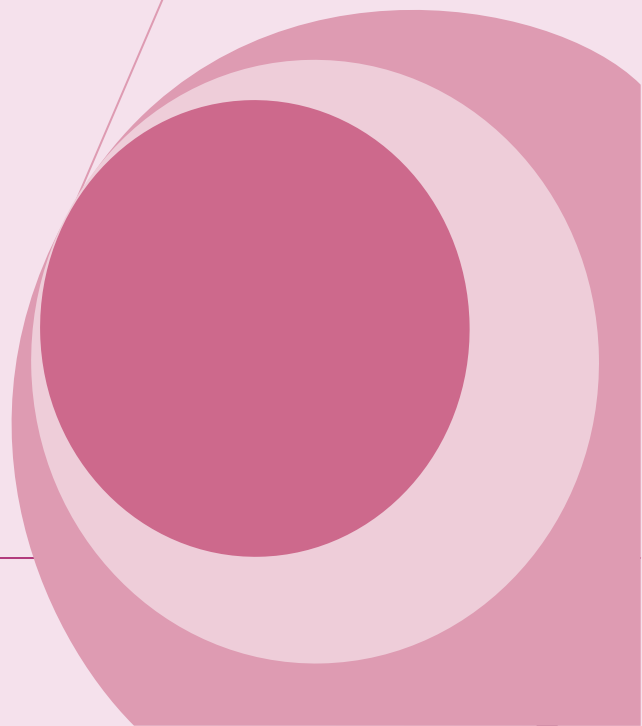


Puissance de matrices



Puissance de matrices



Thomas Abbas, Pierre de Paulou Massat,
Stéphane Guren, Lionel Mangué

Le calcul de puissances de matrices est un exercice classique proche de la diagonalisation. Des résultats généraux en facilitent l'approche. Parmi les applications on trouve l'étude de la dynamique de certaines populations.

Pourquoi calculer les puissances d'une matrice ? Bien souvent, il s'agit d'étudier leur limite. Le problème est lié à l'étude de l'évolution de populations comme nous le voyons plus loin. Pour l'instant intéressons nous à ce problème par curiosité intellectuelle. Une matrice carrée complexe A d'ordre p étant donnée, nous nous proposons de calculer ses puissances successives.

Considérons alors les valeurs situées sur la diagonale de la matrice diagonalisable A de taille k : les valeurs propre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_k$.

Par récurrence nous montrons alors que $A^n = PD^n P^{-1}$ pour tout entier n .

$$A = PD P^{-1}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= P D P^{-1} \times P D P^{-1} \\ &= P D (P P^{-1}) \times D P^{-1} \\ &= P D (I) \times D P^{-1} \\ &= P D^2 P^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= P D^2 P^{-1} \times P D P^{-1} \\ &= P D^2 (P P^{-1}) \times D P^{-1} \\ &= P D^2 (I) \times D P^{-1} \\ &= P D^3 P^{-1} \end{aligned}$$

Nous supposons donc que pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$A^t = P D^t P^{-1}$$

$$\begin{aligned} A^{t+1} &= A^t \times A \\ &= P D^t P^{-1} \times P D P^{-1} \\ &= P D^t (P P^{-1}) D P^{-1} \\ &= P D^t I D P^{-1} \\ &= P D^{t+1} P^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent A^{t+1} est vraie pour tout $t \in \mathbb{N}$.

Donc A^n est vraie aussi pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous pouvons remarquer que si A est diagonalisable les valeurs situées hors de la diagonale principale de la matrice D étant nulles, alors le calcul de puissance de matrice se fera seulement par rapport à sa diagonale et non en considérant toutes les valeurs de la matrice A .

Qu'est ce qu'une matrice diagonale ?

Une matrice diagonale est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls.

Mais alors qu'est ce qu'une matrice diagonalisable ?

Une matrice diagonalisable est une matrice carrée d'ordre n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans un corps commutatif K si elle est semblable à une matrice diagonale c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = P D P^{-1}$.

Exemple :

$$P^{-1}PA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Grace à ce cas nous pouvons remarquer que les matrices A et D peuvent être inversées. Par conséquent nous pouvons dire les matrices A et D sont semblables mais du fait que leurs bases sont différentes, les matrices A et D ne sont pas identiques.

La matrice D_n est diagonale. Ses éléments sont les puissances nièmes des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité, ce que l'on peut écrire :

$$D^n = \lambda_1^n I_p + \lambda_2^n I_p \dots \lambda_n^n I_p$$

Avec des matrices carré qui sont les matrices I_i sauf dans la coordonnée (i,i) où la matrice prend la valeur 1.

Exemple :

Considérons la matrice suivante $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Nous remarquons que cette matrice est diagonale D d'ordre 2. Donc nous avons pour une puissance de 2 :

$$D^2 = 2^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 3^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\ D^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons que:

$$A^n = P D^n P^{-1} = P \lambda_1^n I_p + \lambda_2^n I_p \dots \lambda_k^n I_p P^{-1}$$

Or n'oublions pas que :

$$M_i = P I_i P^{-1}$$

Cela veut dire que :

$$A^n = \lambda_1^n M_p + \lambda_2^n M_p + \dots + \lambda_k^n M_p$$

Où M_i sont les matrices carrées non nulles que nous pouvons calculer à partir de P et de son inverse, méthode que nous éviterons, vu les calculs qu'elle implique.

CALCULER LES COEFFICIENTS

Il est préférable d'écrire les égalités obtenues pour n variant de 0 à k-1. Nous obtenons ainsi un système d'équation à k inconnues qu'il est possible de résoudre effectivement si k est petit. Une autre méthode consiste à remarquer que, par combinaisons linéaire de ces égalités, si le degré du polynôme f est inférieur à n, alors f est de la forme :

$$f(x) = \sum_{i=0}^t \alpha_i x^i$$

Si nous remplaçons x par A nous obtenons :

$$f(A) = \sum_{i=0}^t \alpha_i A^i = \sum_{i=0}^t \alpha_i \sum_{j=0}^k \lambda_j^i M_j \\ = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^t \alpha_i \lambda_j^i M_j \\ = \sum_{j=0}^k f(\lambda_j) M_j$$

Par conséquent :

$$f(A) = f\lambda_1 M_1 + f\lambda_2 M_2 + \dots + f\lambda_k M_k$$

Il suffit alors de choisir f s'annulant en tous les points λ_i sauf en un seul pour déterminer les matrices M_i . Plus précisément, on introduit les polynômes interpolateur de Lagrange.

Rappel :

En analyse numérique, les polynômes de Lagrange, du nom de Joseph Louis Lagrange, permettent d'interpoler une série de points par un polynôme qui passe exactement par ces points appelés aussi nœuds.

$$F_1 x = \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

Nous pouvons remarquer ces valeurs :

$$\begin{aligned} f_i \lambda_j &= 0 \\ f_i \lambda_i &= 1 \end{aligned}$$

Mis en application :

$$f_1 x = \frac{x - \lambda_2 \ x - \lambda_3 \ \times \dots \times (x - \lambda_k)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \times \dots \times (\lambda_1 - \lambda_k)}$$

$$f_2 x = \frac{x - \lambda_1 \ x - \lambda_3 \ \times \dots \times (x - \lambda_k)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) \times \dots \times (\lambda_2 - \lambda_k)}$$

Maintenant nous allons simplifier le cas de notre matrice A avec $\forall i \in N^*$:

$$f_i(A) = f_i \lambda_1 M_1 + f_i \lambda_2 M_2 + \dots + f_i \lambda_k M_k$$

Or nous savons que $f_i \lambda_j = 0$.
Donc:

$$f_i A = f_i \lambda_i M_i$$

Comme $f_i \lambda_i = 1$ alors nous obtenons :

$$f_i A = M_i$$

$$\text{D'où la formule : } A^n = \lambda_1^n f_1 A + \lambda_2^n f_2 A + \dots + \lambda_k^n f_k A$$

Cette dernière méthode est satisfaisante intellectuellement mais conduit à des calculs pénibles.

C'est-à-dire qu'il serait compliquée et en même temps risqué de résoudre un système d'équations résultant de l'égalité d'une matrice, préalablement calculée à partir de la formule précédente, comprenant plusieurs expressions qui, selon la taille de la matrice de départ, peuvent devenir extrêmement lourde, mais aussi d'une la matrice de départ, qui enrichi les informations d'égalités lorsqu'elle est mis à des puissances quelconques.

Remarque : nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'alourdir notre tâche car elle mis à une puissance $n+1$ nos calculs n'en deviendrons que lourds.

Mieux vaut dans la pratique s'en tenir à la résolution d'un système (cf. encadré Exemple de calcul) .

De ce fait nous passerons d'un exemple à une mis en application.

CALCULER LES LIMITES

Dans ce cadre général, la suite A^n tend vers la matrice nulle si tous les λ_i^n tendent vers 0, c'est-à-dire, si et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

C'est-à-dire que les valeurs propres de A seront de module strictement inférieur à 1, cela veut dire que:

$$\lambda_i = \frac{1}{k_i}$$

$$\text{D'où } \lambda_{in} = \frac{1}{k_i^n} \text{ avec } k_i > 1$$

Par conséquent nous pouvons en déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{in} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_i^n} = 0$$

Si nous considérons la matrice diagonale A comme telle:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{k_p} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons en déduire l'expression:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ce résultat est conservé si A n'est pas diagonalisable. La suite A_n a une limite non nulle si 1 est valeur propre et toutes les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1.

Précédemment, nous avons démontré que si toutes les valeurs propres de A alors son module sera strictement inférieur à 1, la suite A_n tend vers la matrice nulle, or dans le cas présent nous considérons qu'il existe au moins

une valeur propre de valeur 1 la matrice diagonalisable A.

Cela veut dire qu'il n'y a aucune méthode pour que la suite A_n diverge ou tend vers la matrice nulle car les éléments de cette matrice possédant des puissances nièmes des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité. Si nous la faisons tendre vers l'infini nous obtiendrons une matrice quasi nul composée de 0 partout sauf sur sa diagonal ou de trouvera au moins un 1.

Nous allons prendre la matrice diagonale B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{k_p} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc en déduire que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Si nous notons $\lambda_1=0$, la matrice limite est alors M_1 .

Cela veut dire que nous obtenons avec la matrice diagonale A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_k M_k) = M_1$$

Car $\forall i \in 2, \dots, k \quad |\lambda_i| < 1$

Retour aux sources :

Revenons en à la définition d'un polynôme caractéristique. Il est associé à toutes matrices et possède des propriétés intéressantes comme ses valeurs propres, son déterminant et sa trace.

Si M est une matrice diagonale ou plus généralement une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de M , $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec leurs ordres de multiplicité sont les coefficients diagonaux de M et nous pouvons définir le polynôme caractéristique comme étant $(x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k}$

Nous pouvons exprimer ça de manière plus rigoureuse. Soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans un anneau commutatif. Le polynôme caractéristique de M , noté $p_M(X)$, est le polynôme défini par $P_M(x) = \det(xI_n - M)$

Comme pour tout polynôme :

$$f : f(A) = f(1) M_1 + f(\lambda_2) M_2 + \dots + f(\lambda_k) M_k$$

Il suffit de considérer le quotient du polynôme caractéristique par $(x-1)^m$ ou m est la multiplicité de la valeur propre 1, pour obtenir :

$$M_1 = f(A) / f(1)$$

Soit, on considère le polynôme P par :

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_k)^{m_k}$$

D'où le polynôme f :

$$f(X) = (X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_k)^{m_k}$$

On peut remarquer que si on a :

- $f(A) = A - \lambda_2 m_2 \dots A - \lambda_k m_k$
- $f(1) = (1 - \lambda_2)^{m_2} \dots (1 - \lambda_k)^{m_k}$

Alors :

$$\begin{aligned} & f(A) / f(1) \\ &= \frac{(A - \lambda_k)^{m_k} \dots (A - \lambda_k)^{m_k}}{(A - \lambda_k)^{m_k} \dots (A - \lambda_k)^{m_k}} \end{aligned}$$

On peut tout de suite remarquer que d'après la formule d'interpolation Lagrangienne, on a :

$$\frac{(A - \lambda_k)^{m_k} \dots (A - \lambda_k)^{m_k}}{(A - \lambda_k)^{m_k} \dots (A - \lambda_k)^{m_k}} = M_1$$

Soit :

$$f(A) / f(1) = M_1$$

Le résultat n'est pas conservé si A n'est pas diagonalisable comme le montre l'exemple de la matrice non diagonalisable suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prouvons par récurrence que

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{R}$$

Initialisation :

Prouvons que la propriété est vraie pour $n = 0$.

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Hérédité :

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier $k \in \mathbb{R}$, montrons que la propriété est vraie pour le rang suivant $k+1$

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k \\ A^{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 0$ et étant héréditaire, on en déduit

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{R}$$

An n'ayant pas de limite finie, nous avons donc démontré que le résultat n'est pas conservé si une matrice n'est pas diagonalisable.

EXEMPLE DE CALCUL

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre non-nul.

Comme dit précédemment dans le retour aux sources, le polynôme caractéristique renferme beaucoup d'informations sur ceux-ci comme ses valeurs propres, son déterminant et sa trace(somme des éléments diagonaux d'une matrice carrée). Nous allons donc calculer ce polynôme.

Nous savons déjà que :

$$P_M(x) = \det(xI_n - M)$$

est le déterminant du polynôme caractéristique de la matrice.

$$\begin{aligned} xI_3 - A &= x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -a & -a^2 \\ -1/a & 0 & -a \\ -1/a^2 & -1/a & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} xI_3 - A &= \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -a & -a^2 \\ -1/a & 0 & -a \\ -1/a^2 & -1/a & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement :

$$xI_3 - A = \begin{pmatrix} x & -a & -a^2 \\ -1/a & x & -a \\ -1/a^2 & -1/a & x \end{pmatrix}$$

A présent nous devons, selon la formule, retrouver par des calculs le déterminant de cette matrice obtenue, nous pourrons alors en déduire le polynôme caractéristique de celle-ci

Retour aux sources :

Comment calcule-t-on du déterminant d'une matrice 3,3 ? Rien de plus simple!

Considérons :

$$M_{3,3} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = m_{11} \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{12} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{13} \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix}$$

Reprenons nos calculs ... Nous avons donc, en faisant correspondre notre matrice de départ et le rappel énoncé ci-dessus :

$$\det(xI_3 - A) = (x) \begin{vmatrix} x & -a \\ -1/a & x \end{vmatrix} - (-a) \begin{vmatrix} -1/a & -a \\ -1/a^2 & x \end{vmatrix} + (-a^2) \begin{vmatrix} -1/a & x \\ -1/a^2 & -1/a \end{vmatrix}$$

$$\det(xI_3 - A) = x \begin{vmatrix} x & -a \\ -1/a & x \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} -1/a & -a \\ -1/a^2 & x \end{vmatrix} - a^2 \begin{vmatrix} -1/a & x \\ -1/a^2 & -1/a \end{vmatrix}$$

$$\det(xI_3 - A) = x(x^2 - 1) + a \left(-\frac{x}{a} - \frac{1}{a} \right) - a^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{x}{a^2} \right)$$

$$\det(xI_3 - A) = x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$$

Soit

$$-x^3 + 3x + 2 = -(x + 1)^2(x - 2)$$

La matrice a donc une valeur propre double (-1) et une valeur propre simple (2).

Le rang d'une matrice A (rg A) est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

La matrice A+I est de rang 1 puisque ses lignes sont toutes proportionnelles au vecteur (1 a a²) donc l'espace propre

EVOLUTION DE POPULATION

Ce type de résultat est utile dans les questions d'évolution de population. Les cas réel étant longs à exposer, prenons Dans un pays imaginaire, l'armée comporte 113 100 personnes réparties dans cinq grades notés U, V, W, X et Z.

associé à la *valeur propre double* est de dimension 2.

Ceci implique que A est *diagonalisable*.

D'après ce qui précède, il existe deux matrices M₁ et M₂ telles que :

$$A^n = (-1)^n M_1 + 2^n M_2.$$

Ces deux matrices sont solutions du système :

$$\text{Avec } n = 0 \Rightarrow M_1 + M_2 = I$$

$$\text{Et avec } n = 1 \Rightarrow -M_1 + 2M_2 = A$$

On trouve M₂ en ajoutant les deux équations, M₁ s'en déduit immédiatement :

$$M_1 = \frac{2I - A}{3} \text{ et } M_2 = \frac{I + A}{3}$$

Puisque Aⁿ = (-1)ⁿ M₁ + 2ⁿ M₂

On remplace avec

$$M_1 = \frac{2I - A}{3} \text{ et } M_2 = \frac{I + A}{3}$$

Soit

$$A^n = (-1)^n \frac{2I - A}{3} + 2^n \frac{I + A}{3}$$

$$A^n = \frac{[(-1)^n 2I] - [(-1)^n A]}{3} + \frac{(2^n * I) + (2^n A)}{3}$$

$$A^n = \frac{(-1)^n 2}{3} * I - \frac{(-1)^n}{3} * A + \frac{2^n}{3} * I + \frac{2^n}{3} * A$$

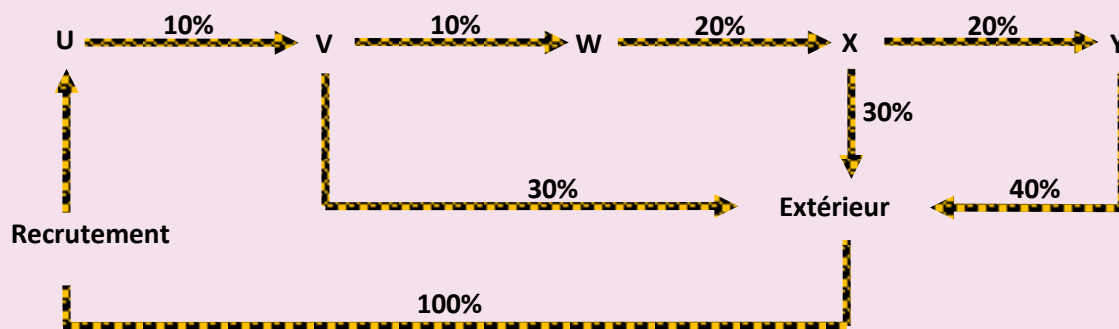
$$A^n = \left(\frac{(-1)^n 2}{3} + \frac{2^n}{3} \right) * I - \left(\frac{(-1)^n}{3} - \frac{2^n}{3} \right) * A$$

$$\text{On obtient : } A^n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} * I + \frac{2^n - 2(-1)^n}{3} * A$$

un cas fictif concernant les effectifs d'une entreprise. On peut imaginer le même type de problèmes si on étudie des populations animales.

L'évolution des effectifs de chaque grade se fait selon le schéma suivant, ou le

recrutement est égal aux départs vers l'extérieur :



Evolution des carrières de l'armée, le recrutement est égal aux départs vers l'extérieur.

On note Z_n la matrice colonne constituée par les effectifs de ces cinq grades. L'évolution des carrières est résumée par l'égalité matricielle : $Z_{n+1} = A Z_n$.

On considère donc que :

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \\ W' \\ X' \\ Y' \end{pmatrix}_{Z_{n+1}} = A \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ X \\ Y \end{pmatrix}_{Z_n}$$

Mettons en relation en s'appuyant sur le schéma :

$$\begin{cases} U' = 90\% * U + 30\% * X + 30\% * V + 40\% * Y \\ V' = 10\% * U + 60\% * V \\ W' = 10\% * V + 80\% * W \\ X' = 20\% * W + 50\% * X \\ Y' = 20\% * X + 60\% * Y \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} U' = 0,9 U + 0,3 X + 0,3 V + 0,4 Y \\ V' = 0,1 U + 0,6 V \\ W' = 0,1 V + 0,8 W \\ X' = 0,2 W + 0,5 X \\ Y' = 0,2 X + 0,6 Y \end{cases}$$

On en déduit la matrice carrée d'ordre 5 $A_{5,5}$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Par récurrence on en déduit que :
 $Z_n = A^n Z_0$ pour tout n .
 L'évolution des effectifs dépend donc de la suite matricielle A^n .

on déduit que puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre, 1 est valeur propre de A .

L'espace propre associé est le noyau de la matrice :

$$\begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 & 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & -0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & -0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & -0,4 \end{pmatrix}$$

ETUDE D'UNE MATRICE

Chaque colonne de A a pour somme 1, ce qui correspond à la stabilité des effectifs.

Cette propriété implique que I est valeur propre de la transposée de A , (Pour $A \in M_{n,m}(K)$, sa matrice transposée notée ${}^tA \in M_{m,n}(K)$ est obtenue en inversant les lignes et les colonnes de la matrice initiale A) le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 étant un vecteur propre associé.

Précision :

$$M = (m_{ij}) \in M_n(R)$$

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} = 1 \quad \forall j$$

La transposée de cette matrice vaudra :

$${}^tM = m_{ji}$$

$${}^tM \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n m_{j1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n m_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc un vecteur propre de tM associé à la valeur propre 1.

On confirme donc que, une matrice M ayant même polynôme caractéristique que sa transposée tM ,

Puissance de matrices

[Tapez le sous-titre du document]

Dc [Sélectionnez la date] rash

Tentons de calculer le rang de cette matrice :

En supposant que E est de dimension finie, le théorème du rang énonce que :

$$\text{rg } f + \dim \text{Ker } f = \dim E$$

$$\text{rg } (f) + \dim \text{Ker } (f) = \dim E$$

Dans notre cas, $f = A - I$ et $E = 5$

$$\text{rg } (A - I) + \dim[\text{Ker}(A - I)] = 5$$

Pour la matrice $F(A-I)$, [...] Son rang est égal à 4 [...]

$$5 = 4 + \dim(\text{Ker}(A - I))$$

On en déduit que :

$$\dim(\text{Ker}(A - I)) = \boxed{1}$$

[...] donc l'espace propre associé est de dimension 1, il s'agit d'une droite vectorielle. Les quatre dernières lignes fournissent un vecteur propre simple :

$$U = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul effectif du polynôme caractéristique montre qu'il y a quatre autres zéros simples, de module strictement inférieur à 1 (voir l'encadré Calcul d'un polynôme caractéristique).

La théorie précédente est donc applicable: la suite A_n a une limite non nulle. Inutile de la calculer pour en déduire la limite de la population Z_n . Nous savons qu'elle existe et cela suffit ! Nous allons voir pourquoi.

CONSÉQUENCE D'UNE EXISTENCE

Notons L la limite de la suite Z_n . Par continuité, comme $Z_{n+1} = A Z_n$, L vérifie la relation :

$$L = AL,$$

c'est-à-dire que L est un vecteur propre de A associé à 1.

Comme nous venons de le démontrer, on peut alors dire qu'il s'agit d'une droite vectorielle et, comme il existe un scalaire k vérifiant $U = k\vec{L}$, L'espace propre en question étant de dimension 1, les deux vecteurs U et L sont colinéaires.

Pour calculer ce coefficient, remarquons que l'effectif de l'armée est constamment égal à 113 100. Comme celui de U est égal à 58, a est le quotient de ces deux nombres, soit $\frac{113100}{58} = 1950$.

La limite de l'effectif est donc :

$$L = \begin{pmatrix} 40 * 1950 \\ 10 * 1950 \\ 5 * 1950 \\ 2 * 1950 \\ 1 * 1950 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78\,000 \\ 19\,500 \\ 9\,750 \\ 3\,950 \\ 1\,950 \end{pmatrix}$$

Ce type de raisonnement se retrouve dans certaines études de dynamiques des populations, ou la transition entre une étape à la suivante peut être représentée matriciellement.

CALCUL DU POLYNOME CARACTERISTIQUE

Le polynôme caractéristique de A est égal à :

$$x^5 - 3,4 x^4 + 4,54 x^3 - 2,979 x^2 + 0,9612 x - 0,1222$$

Par défaut de temps, nous ne traiterons pas le développement du polynôme caractéristiques. En effet, il conviendrait de se servir de la méthode de Ferrarri afin d'obtenir la factorisation suivante :

$$(x - 1)(x^2 - 0,954628688 x + 0,2308430252)(x^2 - 1,445371312 x + 0,5293640556)$$

Puissance de matrices

[Tapez le sous-titre du document]

Dc [Sélectionnez la date] rash

La précision sur les coefficients (10^{-10}) suffit pour assurer que le polynôme caractéristique a 5 zéros simple. De plus, les deux trinômes du second degré ci-dessus ont des racines complexes dont le carré des modules sont 0,2308430252 et 0,5293640556. Les valeurs propres autres que 1 sont donc toutes de module strictement inférieur à 1.