Algèbre DE n° 2

Exercice n° 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

mineurs ?, cofacteurs, et le déterminant de A et inverse.

Les mineurs de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{matrix}$$

$A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

$\det A = 2 + 18 - 9 - 8$

Pour une matrice de taille n,

$\det A = 3$

il y a n mineur.

$m_1 = 1 = a_{11}$

$m_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$m_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (dev 1ère colonne) ou dev 1ère ligne : $1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

$= 2 - 8 + 9 = 3$

$m_3 = +1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$m_3 = 2 + 10 - 9 = 3$

$(-1)^{i+j}$ (i → ligne, j → colonne)

$$\begin{vmatrix} +x & -y & +3 \\ -w & +v & -y \\ +u & -s & +T \end{vmatrix}$$

$(-1)^{2+1}$, $(-1)^{3+1}$, $(-1)^{3+2}$

Cramer : On prend une col. ou une ligne au choix.

ex :

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -(-4) \times \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 4\left[2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}\right]$

$= 4[38 - 10]$

$= 4 \times 28$

Exercice n°2 : Résolution de systèmes linéaires

$$\left.\begin{aligned} x + y + mz &= m \\ x + my - z &= 1 \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\} (S)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (-m+1) - (-1+1) + m(1-m)$$

$$\Delta = -m^2 + 1 = (1-m)(1+m)$$

$\Delta = 0$ pour $m = 1$ ou $m = -1$

$\Delta \neq 0$ pour $\forall m \in \mathbb{R} - \{-1 ; +1\}$

$\underline{1^{er}\text{ cas}}$ Si $m \in \mathbb{R} - \{-1 ; +1\} \Rightarrow \Delta \neq 0$

Donc le système (S) admet une unique solution $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$x = \frac{\Delta_{\boxed{x}}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} m \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ m \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} m \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \end{vmatrix}}{1 - m^2} = \frac{(-m^2 - 1 + m) - (m^2 - 1 - m)}{1 - m^2}$$

$$x = \frac{-2m^2 + 2m}{1 - m^2} = \frac{+2m(-m+1)}{\underset{1-m}{(\cancel{-m+1})}\,\underset{1+m}{(\cancel{m+1})}}$$

$$\boxed{x = \frac{2m}{(m+1)}}$$

$$\boxed{y = 0}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-m^2+1} = \frac{(-1 - m + m) - (m - 1 - m)}{-m^2 + 1} = \frac{-1+1}{-m^2+1} = 0$$

Cofacteurs ou co coefficient C_{ij} ou Co

$$A^{-1} \text{ (l'inverse de A)} = \frac{1}{\det A} \, {}^{t}com(A)$$

Pour que l'inverse de A existe:

- Il faut une matrice
- Il faut un déterminant $\neq 0$

$$\text{Comatrice } (A) = com(A)$$
$$= C_{ij}$$

$$Com(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

$C_{11} = 2$ $\quad C_{12} = -4$ $\quad C_{13} = 3$

$C_{21} = +5$ $\quad C_{22} = -7$ $\quad C_{23} = +3$

$C_{31} = -3$ $\quad C_{32} = +6$ $\quad C_{33} = -3$

$$Com\,A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ +5 & -7 & +3 \\ -3 & +6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$^{t}Com\,A = \begin{pmatrix} 2 & +5 & -3 \\ -4 & -7 & +6 \\ 3 & +3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & +5 & -3 \\ -4 & -7 & +6 \\ 3 & +3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & +\frac{5}{3} & -1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & +2 \\ 1 & +1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 \end{pmatrix}$$

→ 3ème de A^{-1}

→ 2ème colonne de A

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2+1} = \frac{(m+1+m)-(m^2+1+1)}{-m^2+1} = \frac{-m^2+2m-1}{-m^2+1}$$

$$z = \frac{-(m-1)^2}{(1-m)(1+m)} = \frac{m-1}{m+1}$$

$$\boxed{z = \frac{m-1}{m+1}}$$

Si $m \in \mathbb{R} - \{-1, +1\}$

$\exists!$ solution du système (S) :

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{2m}{m+1} ; 0 ; \frac{m-1}{m+1}\right)}$$

2ème cas : Si $m = 1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 1 & (1) \\ x+y-z = 1 & (2) \\ x+y-z = 1 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 1 \\ x+y-z = 1 \end{cases}$$

$(2) = (3) \Rightarrow$ 2 équations semblables.

$z = 0$

On obtient $\begin{cases} \boxed{x+y=1} \\ x+y=1 \end{cases}$ -> 2 inconnues pour 1 seule solut° donc admet une infinité de solution

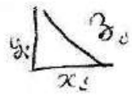
S admet une infinité de solutions sous la forme $(x, 1-x, 0)$ $\forall x$

3ème cas : Si $m = -1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z = -1 & (1) \\ x+y-z = 1 & (2) \\ x+y-z = 1 & (3) \end{cases}$$

Avec (1) et (3), c'est impossible, Alors le système (S) n'admet pas de solutions.

Problème :

$x_i, y_i, z_i \in \mathbb{N}$ triplet de Pythagore 

$x_i \leq y_i$

$\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\vec{V_i} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$F = \text{Vect}(\vec{V_i}, \vec{V_i} \in \mathbb{N}^3)$ tq $\vec{V_i}$ vérifie Pythagore

Q1)

$x_i \leq y_i \leq z_i$

$\boxed{x_i \leq y_i}$ (donné dans l'énnoncé)

$\Downarrow$

$x_i^2 \leq y_i^2$

$x_i^2 \leq y_i^2 + x_i^2 = z_i^2$

$x_i^2 \leq z_i^2 \implies \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{z_i^2}$

$\boxed{x_i \leq z_i}$ $\sqrt{a^2} = |a| = a$

$y_i^2 \leq x_i^2 + y_i^2 = z_i^2 \implies y_i^2 \leq z_i^2$

$\Rightarrow \boxed{y_i \leq z_i}$

$\boxed{x_i \leq y_i \leq z_i}$

Supposons que : $x_i = y_i$

$$x_i^2 = y_i^2$$

OR $x_i^2 + y_i^2 = z_i^2$

$$x_i^2 + x_i^2 = z_i^2$$

$$2x_i^2 = z_i^2$$

$$\Downarrow$$

$$x_i^2 = \frac{1}{2} z_i^2 \qquad \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}$$

$$\Downarrow$$

$$x_i = \frac{\sqrt{2}}{2} z_i \qquad \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(énoncé) $x_i \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q} \\ \\ z_i \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \text{ici } x_i \in \mathbb{Q} \Rightarrow \text{Contradiction}$$

Donc $x_i \neq y_i$

Donc $\boxed{x_i < y_i \leq z_i}$

Q 2)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f(\vec{V}) = {}^t\vec{V} \cdot M \cdot \vec{V}$$

$$f(\vec{V}) = \underset{(1,3)}{(x \ y \ z)} \cdot \underset{(3,3)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{(3,1)}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

$$(1,1) \in \mathbb{R}$$

Donc un triangle rectangle isocele ne peut-être formé de nombres entiers mais de reels.

$$f(\vec{V}) = (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \boxed{x^2 + y^2 - z^2}$$

Q3) $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$f(H\vec{v}) \stackrel{?}{=} f(\vec{v})$$

$$\underbrace{H\vec{v}}_{\vec{w}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{(3,3)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(3,1)} = \begin{pmatrix} 2x+y+2z \\ x+2y+2z \\ 2x+2y+3z \end{pmatrix}_{(3,1)} \in \mathbb{R}^3$$

$$f(H\vec{v}) = f(\vec{w}) = {}^t\vec{w} \cdot M \cdot \vec{w}$$

$$f(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 2x+y+2z & x+2y+2z & 2x+2y+3z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3,3} \cdot \begin{pmatrix} 2x+y+2z \\ x+2y+2z \\ 2x+2y+3z \end{pmatrix}_{(3,1)}$$

$$f(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 2x+y+2z & x+2y+2z & -2x-2y-3z \end{pmatrix}_{1,3} \cdot \begin{pmatrix} 2x+y+2z \\ x+2y+2z \\ 2x+2y+3z \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{w}) = ((2x+y)+2z)^2 + ((x+2y)+2z)^2 - ((2x+2y)+3z)^2$$

$$= (2x+y)^2 + 4z^2 + 4z(2x+y) + (x+2y)^2 + 4z^2 + 4z(x+2y) - \left[(2x+2y)^2 + 9z^2 + 6z(2x+2y)\right]$$

$$f(\vec{w}) = 4x^2 + y^2 + 4xy + 4z^2 + 8xz + 4yz + x^2 + 4y^2 + 4xy + 4z^2 + 4xz + 8yz - 4x^2 - 4y^2 - 8xy - 9z^2 - 12xz - 12yz$$

$$f(\vec{w}) = \boxed{f(H\vec{v}) = x^2 + y^2 - z^2 = f(\vec{v})}$$

Si $\vec{V} \in \mathcal{F}$ $\qquad H^n = H \cdot H^{n-1}$

$H^n \vec{V} \in \mathcal{F}$ $\qquad = \underbrace{H \cdot H \cdot H \cdots H}_{n \text{ fois}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Si $\vec{V} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{F} \iff x^2 + y^2 = z^2$

$\iff x^2 + y^2 - z^2 = 0$

$\iff f(\vec{V}) = 0$

$\mathcal{F} \subset \operatorname{Ker}(f)$

<u>Démonstration par récurrence:</u>

* <u>Initialisation</u>

$n = 1 \qquad H^n\vec{V} = H\vec{V} \to f(H\vec{V}) = f(\vec{V}) = 0$

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$

$H\vec{V} = \mathcal{F}$

* <u>On suppose que $H^n V \in \mathcal{F}$ et montrons que $H^{n+1}\vec{V} \in \mathcal{F}$</u>

$H^{n+1}\vec{V} = H(\underbrace{H^n \cdot \vec{V}}_{\in \mathcal{F}}) = H \underset{\in \mathcal{F}}{\vec{S}}$ avec $\vec{S} = H^n\vec{V} \in \mathcal{F}$

$\hookrightarrow f(\vec{S}) = 0$

$f(H\vec{S}) = f(\vec{S}) = 0$

$H^{n+1}\vec{V} = H\vec{S} \in \mathcal{F}$

<u>Q 4.)</u> $\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3,3} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3,1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 29 \end{pmatrix}$

$\vec{V}_0 \in \mathcal{F} \quad (0^2 + 1^2 = 1^2)$

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 \iff \vec{V}_1 \in \mathcal{F}$

$20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841 = 29^2 \iff \vec{V}_2 \in \mathcal{F}$

Q 5) $\vec{V_0} \to \vec{V_1} = H\vec{V_0} \rightsquigarrow \vec{V_2} = H\vec{V_1} \rightsquigarrow \vec{V_3} = H\vec{V_2}$ ----

$\vec{V}_{1020} = H\vec{V}_{1019}$ $\qquad$ $\vec{V}_{n+1} = H\vec{V_n}$

$\boxed{\text{suite géométrique: } V_{n+1} = RV_n = R^n V_0}$

$V_n = H^n \vec{V_0}$

Diagonalisation de H

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(H - \lambda I)$$

$$= \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 2 \\ 2 & (3-\lambda) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & (3-\lambda) \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ (2-\lambda) & 2 \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda + 1$$

$$P(\lambda) = -(\lambda - 1)\underbrace{[-\lambda^2 + 6\lambda - 1]}_{\Delta = 32 > 0}$$

$$\begin{array}{l|l} -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 7\lambda + 1 & \lambda - 1 \\ \hline -(-\lambda^3 + \lambda^2) & -\lambda^2 + 6\lambda - 1 \\ 6\lambda^2 - 7\lambda + 1 & \\ -\ 6\lambda^2 - 6\lambda & \\ -\lambda + 1 & \\ -(-\lambda + 1) = 0 & \end{array}$$

matrice de taille n a n valeurs propres distincte.

les valeurs propres = racines poly caractéristique de $(H - \lambda I)$

$$H = P^{-1} D P$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \vec{V_1} & \vec{V_2} & \vec{V_3} \end{pmatrix}$$

$$H^n = P^{-1} \times D^n \times P$$