EFREI – L1 *novembre 2007*

DEVOIR ECRIT n°1

La calculatrice est interdite.

Seul le formulaire fourni avec le sujet est autorisé.

Le sujet comporte une partie à rendre après l'avoir complétée avec la copie et quatre exercices à rédiger sur une feuille séparée.

EXERCICE N°1 : (6 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$.
2. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$.
3. En déduire l'étude locale en 0 de la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. On précisera la limite en 0, une équation de la tangente éventuelle en 0 et sa position par rapport à la courbe de h.

EXERCICE N°2 : (2 points)

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\arctan x$.

EXERCICE N°3 : (4 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan x$.
2. On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\tan x - x}{x^3} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

   Étudier la continuité de la fonction f sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

EXERCICE N°4 : (4 points)

Étudier les branches infinies de la fonction f définie par $f(x) = x\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$ (limite, asymptote éventuelle et position relative par rapport à l'asymptote).

Feuille à rendre avec la copie

NOM : ABBAS Thomas *GROUPE :* A

0

EXERCICE N°5 : (4 points)

Vous répondrez aux questions suivantes en inscrivant le résultat sans justification dans la case appropriée.

1. Développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x)=\dfrac{1+3x^2}{4+x}$	$f(x)=$
2. Développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{2\sin x}$	$f(x)=$

FORMULAIRE D'ANALYSE

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Tous les développements limités figurant ici sont au voisinage de 0. La fonction ε *vérifie donc* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

- $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots\ldots+(-1)^n x^n+x^n\varepsilon(x)$
- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)$
- $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots-(-1)^n\dfrac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)$
- $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$
- $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$
- $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n}\varepsilon(x)$

Corrigé du DE N°1

Exercice n°1 :

1. $f(x)=(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$, $f(x)=1-x+\frac{3}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$

2. $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x)$ $\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x)$ $g(x)=-\frac{x}{2}+x^2\varepsilon(x)$

3. $h(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)$ $\lim_{x\to 0}h(x)=1$ *tangente :* $y=1-\frac{x}{2}$ *courbe de f au dessus de tangente*

Exercice n°2 :

$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ $\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^2\varepsilon(x)$ $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$ $=x-\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$

Exercice n°3 :

1. $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ $=\dfrac{x-\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)}{1-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon(x)}$ $=x+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$

2. *f est continue sur* $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *comme quotient* $f(x)=\frac{1}{3}+x^2\varepsilon(x)$ $\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{3}=f(0)$ *f continue en 0*

Exercice n°4 :

$f(x)=xe^{x\ln(\cos\frac{1}{x})}$ *Soit* $X=\frac{1}{x}$, *si* x *tend vers* ∞, X *tend vers 0* $f(x)=\frac{1}{X}e^{\frac{\ln(\cos X)}{X}}$ $\frac{\ln(\cos X)}{X}=-\frac{X}{2}+X^2\varepsilon(X)$

$f(x)=\frac{1}{X}-\frac{1}{2}+\frac{X}{8}+X\varepsilon(X)$ $=x-\frac{1}{2}+\frac{1}{8x}+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ *asymptote :* $y=x-\frac{1}{2}$ *courbe au dessus*

Exercice n°5 :

1. $f(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{16}x+\frac{49}{64}x^2-\frac{49}{256}x^3+x^3\varepsilon(x)$

2. $f(x)=x+x^2\varepsilon(x)$

ABBAS
Thomas
L1

27/11/07

Fonctions et Variations

$\frac{07}{20}$

Exercice 1, 5

1) $DL_2(0)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$; trouvons l'équivalent de $\sqrt{1+2x}$;

$\sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}}$. Grâce aux développements limités usuels on a :

$(1+X)^{\frac{1}{2}}$ (on pose $X = 2x$)

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cancel{x} + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\cancel{x}^2 + \cancel{x}^2\varepsilon(x)$ puis on remplace :

?/ $(1+2x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} + \frac{-(1/4)}{2}\times(2x)^2 = 1 + x - \frac{1}{\cancel{8}_2}\cancel{4}x^2 + \dots\varepsilon(x)$

on a donc :

ici ce sont des DL.

$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon(x)$ ~~Le quotient de deux équivalents étant accepté, on peut écrire :~~

$DL_2(0)\ f(x) = \frac{1}{1+x-\frac{1}{2}x^2}$ On pose $Y = x - \frac{1}{2}x^2$. On a donc :

$f(x) = \frac{1}{1+Y}$. Grâce aux développements limités usuels, on a :

$\frac{1}{1+Y} = 1 - X + X^2 + \cancel{x}^2\varepsilon(x)$ On remplace :

$$\frac{1}{1+x-\frac{1}{2}x^2} = 1 - (x - \frac{1}{2}x^2) + (x - \frac{1}{2}x^2)^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + [x^2 + 2x(-\frac{1}{2}x^2) + (-\frac{1}{2}x^2)^2] + x^2\varepsilon(x)$$

$$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 - \cancel{x^3} + \cancel{\frac{x^4}{4}} + x^2\varepsilon(x)$$

inclus dans $\varepsilon(x)$

On a donc finalement :

$DL_2(0)\ f(x) = \boxed{1 - x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)}$

2) $DL_2(0)$ $g(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x}$; trouvons les équivalents :

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x)$; on cherche à avoir $\ln(1+x)$.

On peut alors noter : $\ln\left[1-\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right] = \ln(1+X)$

où $X = -\frac{x^2}{2}$ (le $x^2\varepsilon(x)$ sera inclus dans le $\varepsilon(x)$ final)

Selon les développements limités usuels :

$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + X^2\varepsilon(X)$, on remplace X par $\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

$\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} - \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

1/ $\ln\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{x^4}{8}} + x^2\varepsilon(x)$. Nous avons maintenant $\ln(\cos x)$

Nous cherchons $\frac{\ln(\cos x)}{x}$. Nous pouvons écrire $\ln(\cos x) \times \frac{1}{x}$

Il faut remplacer $\frac{1}{x}$ par $\frac{1}{1+Y}$ pour pouvoir utiliser les D.L. usuels.

$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(-1+x)}$ où $Y = -1+x$. On a donc grâce aux formules :

ne tend pas vers 0 qd $x \to 0$!

~~$\frac{1}{1+Y} = 1 - Y + Y^2 + Y^2\varepsilon(x)$ On remplace :~~

~~$\frac{1}{1+(-1+x)} = 1-(-1+x) + (-1+x)^2 + x^2\varepsilon(x)$~~

~~$= 2 - x + (1-2x+x^2) + x^2\varepsilon(x)$~~

~~$= 2 - x + 1 - 2x + x^2 + x^2\varepsilon(x) = 3 - 3x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$~~

~~On peut en conclure que $\boxed{\frac{\ln(\cos x)}{x} = 3 - 3x + x^2 + x^2\varepsilon(x)}$~~

~~le développement limité en 0 à l'ordre 2 est :~~ 3

3) $h(x) = f(x) - g(x)$ donc :

$h(x) = \left(1 - x + \frac{3}{2}x^2\right) + \left(3 - 3x + x^2\right) + x^2\varepsilon(x)$

2/ $h(x) = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + 3 - 3x + x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$h(x) = 4 - 4x + \frac{5}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

cohérent

On en déduit que $\lim_{x \to 0} (h(x)) = 4$

l'équation de la tangente de la courbe de la fonction h en 0 est de type $ax+b$.

Ici, on constate que son équation vaut : $T = -4x + 4$, | ce n'est pas une équation

On remarque que le coefficient du reste de l'équation de la courbe est positif. On en conclue que la courbe est au dessus de la droite T.

Exercice 2 ①

$DL_3(0)$ $f(x) = \arctan x$ on peut noter $f(x) = (\tan x)^{-1}$ ou $\tan^{-1} x$

Tentons de résoudre $\tan x$: grâce aux DL usuels on a :

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ le quotient de deux équivalents étant correct on peut dire, grâce aux DL usuels que :

$$\tan x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} + x^3 \varepsilon(x)$$

Remarque : On prend ici un degré superieur à l'ordre 3 puisqu'il peut y avoir une division de degrés : il nous faut une plus grande précision. Les coefficients superieurs à l'ordre 3 seront inclus dans $\varepsilon(x)$ à la fin du développement.

$$\tan x = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}} + x^3 \varepsilon(x)$$

$$\tan x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right) \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}} + x^3 \varepsilon(x)$$

Afin d'avoir une équivalent usuel, on note $\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) = X$

on a donc $\dfrac{1}{1+X}$

$\dfrac{1}{1+X} = 1 - X + X\,\varepsilon(X)$ (Remarque : on s'arrête à l'ordre 1)

Puis on remplace X : $\dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + x^4 \varepsilon(x)$

On a finalement :

$$\tan x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + x^4 \varepsilon(x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \cancel{\frac{x^7}{124}} + \frac{x^5}{120} + \cancel{\frac{x^7}{240}} - \dots + x^9 \varepsilon(x)$$

on fait le choix de ne garder que jusqu'à l'ordre 5 :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} - \frac{13x^5}{120} + x^5 \varepsilon(x)$$

$\boxed{DL_3(0) f(x) = \tan x = x + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)}$ Ceci correspond au résultat de la question 1 de l'exercice 3.

on cherche $(\tan x)^{-1}$ ou $\arctan x$

avec $\tan x = x + \frac{x^3}{3} - \frac{13x^5}{120} + x^3 \varepsilon(x)$

On cherche à avoir $(1+Y)^{-1}$ pour $\left(x + \frac{x^3}{3} - \frac{13x^5}{120}\right)^{-1}$

on peut donc noter $Y = \left(-1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{13x^5}{120}\right)$

On a donc : $(1+Y)^{-1} = 1 + (-1)Y + Y^3 \varepsilon(Y)$

on remplace : $(\tan x)^{-1} = 1 - \left(-1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{13x^5}{120}\right) + x^3 \varepsilon(x)$

$$(\tan x)^{-1} = 1 + 1 - x - \frac{x^3}{3} + \cancel{\frac{13x^5}{120}} + x^3 \varepsilon(x)$$

$DL_3(0)$ $\arctan x = \boxed{(\tan x)^{-1} = 2 - x - \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)}$

confusion inverse (d'un x^{-1})
et réciproque (d'1 f^{-1})

Si $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f^{-1}(x) = x^2 \neq \frac{1}{\sqrt{x}}$

② **Exercice 3**