
Développements limités usuels en 0

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + O(x^{n+1})$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + O(x^{n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} x^n + O(x^{n+1})$$

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{Argth} x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{Argsh} x = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + O(x^9)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + O(x^9)$$

Développements en série entière usuels

$$e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} x^n \quad a \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad x \in]-1; 1[$$

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} x^n \quad (a \in \mathbb{C}^*) \quad x \in]-|a|; |a|[$$

$$\frac{1}{(a-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}} x^n \quad (a \in \mathbb{C}^*) \quad x \in]-|a|; |a|[$$

$$\frac{1}{(a-x)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+k-1}^{k-1}}{a^{n+k}} x^n \quad (a \in \mathbb{C}^*) \quad x \in]-|a|; |a|[$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n \quad x \in [-1; 1[$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad x \in]-1; 1]$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} x^n \quad x \in]-1; 1[$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} x^n \quad x \in]-1; 1[$$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad x \in [-1; 1]$$

$$\operatorname{Argth} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad x \in]-1; 1[$$

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in]-1; 1[$$

$$\operatorname{Argsh} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad x \in]-1; 1[$$

Dérivées usuelles

Fonction		Dérivée	Dérivabilité
x^n	$n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	\mathbb{R}^*
x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	\mathbb{R}_+^*
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha x}$	\mathbb{R}
a^x	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$a^x \ln a$	\mathbb{R}
$\ln x $		$\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*
$\log_a x$	$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{1}{x \ln a}$	\mathbb{R}^*
$\cos x$		$-\sin x$	\mathbb{R}
$\sin x$		$\cos x$	\mathbb{R}
$\tan x$		$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\cotan x$		$-1 - \cotan^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$	
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	\mathbb{R}
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	\mathbb{R}
$\operatorname{th} x$		$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	\mathbb{R}
$\operatorname{coth} x$		$1 - \operatorname{coth}^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	\mathbb{R}^*
$\operatorname{Arcsin} x$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1 ; 1 [$
$\operatorname{Arccos} x$		$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$] -1 ; 1 [$
$\operatorname{Arctan} x$		$\frac{1}{1+x^2}$	\mathbb{R}
$\operatorname{Argsh} x$		$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	\mathbb{R}
$\operatorname{Argch} x$		$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$] 1 ; +\infty [$
$\operatorname{Argth} x$		$\frac{1}{1-x^2}$	$] -1 ; 1 [$

Primitives usuelles

I Polynômes et fractions simples

Fonction	Primitive	Intervalles
$(x - x_0)^n \quad \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{array}$	$\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n + 1}$	$n \in \mathbb{N} : x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{-1\}) :$ $x \in] -\infty ; x_0 [,] x_0 ; +\infty [$
$(x - x_0)^\alpha \quad \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\} \end{array}$	$\frac{(x - x_0)^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$	$] x_0 ; +\infty [$
$(x - z_0)^n \quad \begin{array}{l} z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \end{array}$	$\frac{(x - z_0)^{n+1}}{n + 1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x - a} \quad a \in \mathbb{R}$	$\ln x - a $	$] -\infty ; a [,] a ; +\infty [$
$\frac{1}{x - (a + ib)} \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{2} \ln [(x - a)^2 + b^2]$ $+ i \operatorname{Arctan} \frac{x - a}{b}$	\mathbb{R}

II Fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\ln x$	$x(\ln x - 1)$	$] 0 ; +\infty [$
$e^{\alpha x} \quad \alpha \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$	\mathbb{R}
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi [$
$\cotan x$	$\ln \sin x $	$] k\pi ; (k + 1)\pi [$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	\mathbb{R}
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	\mathbb{R}
$\operatorname{th} x$	$\ln(\operatorname{ch} x)$	\mathbb{R}
$\operatorname{coth} x$	$\ln \operatorname{sh} x $	$] -\infty ; 0 [,] 0 ; +\infty [$

III Puissances et inverses de fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\sin^2 x$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$	\mathbb{R}
$\cos^2 x$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$	\mathbb{R}
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$\cotan^2 x$	$-\cotan x - x$	$] k\pi ; (k+1)\pi [$
$\operatorname{sh}^2 x$	$\frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{x}{2}$	\mathbb{R}
$\operatorname{ch}^2 x$	$\frac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \frac{x}{2}$	\mathbb{R}
$\operatorname{th}^2 x$	$x - \operatorname{th} x$	\mathbb{R}
$\coth^2 x$	$x - \coth x$	$] -\infty ; 0 [,] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left \tan \frac{x}{2} \right $	$] k\pi ; (k+1)\pi [$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln \left \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right $	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$\frac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln \left \operatorname{th} \frac{x}{2} \right $	$] -\infty ; 0 [,] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2 \operatorname{Arctan} e^x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cotan^2 x$	$-\cotan x$	$] k\pi ; (k+1)\pi [$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \coth^2 x - 1$	$-\coth x$	$] -\infty ; 0 [,] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sin^4 x}$	$-\cotan x - \frac{\cotan^3 x}{3}$	$] k\pi ; (k+1)\pi [$
$\frac{1}{\cos^4 x}$	$\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}$	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$

IV Fonctions dérivées de fonctions réciproques

Fonction	Primitive	Intervalles
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{Arctan } x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{a^2+x^2} \quad a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{1}{a} \text{Arctan } \frac{x}{a}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} \text{Argth } x \\ \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right \end{cases}$	$\begin{cases}]-1; 1[\\]-\infty; -1[, \\]-1; 1[,]1; +\infty[\end{cases}$
$\frac{1}{a^2-x^2} \quad a \in \mathbb{R}^*$	$\begin{cases} \frac{1}{a} \text{Argth } \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right \end{cases}$	$\begin{cases}]- a ; a [\\]-\infty; - a [, \\]- a ; a [,] a ; +\infty[\end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{Arcsin } x$	$] -1; 1 [$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad a \in \mathbb{R}^*$	$\text{Arcsin } \frac{x}{ a }$	$] - a ; a [$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\text{Argsh } x = \ln (x + \sqrt{x^2+1})$	\mathbb{R}
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} \text{Argch } x \\ -\text{Argch } (-x) \\ \ln x + \sqrt{x^2-1} \end{cases}$	$\begin{cases}]1; +\infty[\\]-\infty; -1[\\]-\infty; -1[\text{ ou }]1; +\infty[\end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \quad a \in \mathbb{R}^*$	$\ln x + \sqrt{x^2+a} $	$\begin{cases} a > 0 : \mathbb{R} \\ a < 0 : \\ \quad]-\infty; -\sqrt{-a}[\\ \quad \text{ou }]\sqrt{a}; +\infty[\end{cases}$
$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2} \text{Arctan } x + \frac{x}{2(x^2+1)}$	\mathbb{R}
$\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2} \text{Arctan } x - \frac{x}{2(x^2+1)}$	\mathbb{R}

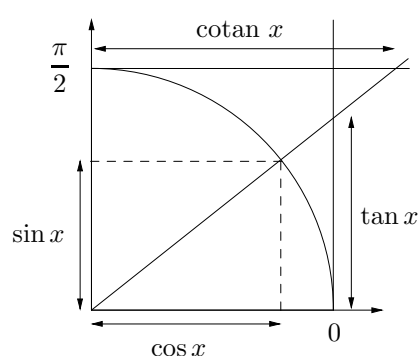
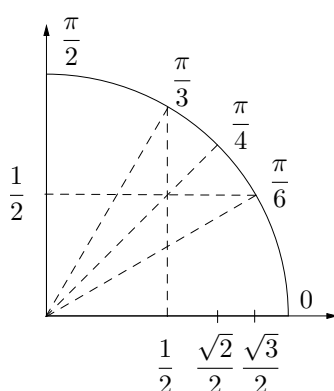
Trigonométrie

I Fonctions circulaires

1 Premières propriétés

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cotan x$
Ensemble de définition	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Période	2π	2π	π	π
Parité	impaire	paire	impaire	impaire
$f(\pi - x)$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\cotan x$
$f(\pi + x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\cotan x$
$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos x$	$\sin x$	$\cotan x$	$\tan x$
$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cotan x$	$-\tan x$
Ensemble de dérivabilité	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{-1 - \cotan^2 x}{\sin^2 x}$

2 Valeurs remarquables



	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\cotan x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

II Fonctions réciproques des fonctions circulaires

1 Définition

Les périodicités et les symétries des fonctions trigonométriques introduisent une difficulté pour résoudre les équations du type $\sin x = \lambda$. Par exemple, $\pi/6$, $5\pi/6$ et $\pi/6 + 4\pi$ ont tous la même image par la fonction sinus. Les « fonctions circulaires réciproques » Arcsin, Arccos, Arctan et Arccot ne sont pas de vraies réciproques, puisque les fonctions de départ ne sont pas des bijections ; ajoutons qu'elles ne sont *pas* périodiques. Il faut les combiner avec la périodicité et, pour sinus et cosinus, avec les symétries par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses respectivement.

- Si $\sin x = \lambda \in [-1; 1]$, alors $x = \text{Arcsin } \lambda \pmod{2\pi}$
ou $x = \pi - \text{Arcsin } \lambda \pmod{2\pi}$
- Si $\cos x = \lambda \in [-1; 1]$, alors $x = \text{Arccos } \lambda \pmod{2\pi}$
ou $x = -\text{Arccos } \lambda \pmod{2\pi}$
- Si $\tan x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arctan } \lambda \pmod{\pi}$
- Si $\cotan x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arccot } \lambda \pmod{\pi}$

Le problème réciproque est, lui, sans difficulté : si $x = \text{Arcsin } \lambda$, alors $\sin x = \lambda$.

2 Propriétés

	$\text{Arcsin } x$	$\text{Arccos } x$	$\text{Arctan } x$	$\text{Arccot } x$
Ensemble de définition	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Ensemble image	$[-\pi/2; \pi/2]$	$[0; \pi]$	$] -\pi/2; \pi/2 [$	$] 0; \pi [$
Période	aucune	aucune	aucune	aucune
Parité	impaire	aucune	impaire	aucune
Ensemble de dérivabilité	$] -1; 1 [$	$] -1; 1 [$	\mathbb{R}	\mathbb{R}
Dérivée	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-1}{1+x^2}$

3 Relations

$$\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \pi/2$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi \quad \text{où} \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \geq 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \leq 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arccot} x = \pi/2$$

$$\operatorname{Arccot} x = \begin{cases} \operatorname{Arctan} 1/x & \text{si } x > 0 \\ \pi + \operatorname{Arctan} 1/x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} 1/x = \operatorname{sign}(x) \times \pi/2$$

III Formules

1 Corollaires du théorème de Pythagore

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

2 Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad \tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

3 Arc double, arc moitié

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \qquad \tan x = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$$

En notant $t = \tan \frac{x}{2}$ comme dans les règles de Bioche, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

4 Formule de Moivre

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos na + i \sin na$$

d'où

$$\begin{aligned} \cos 3a &= \cos^3 a - 3 \cos a \sin^2 a \\ &= 4 \cos^3 a - 3 \cos a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3a &= 3 \cos^2 a \sin a - \sin^3 a \\ &= 3 \sin a - 4 \sin^3 a \end{aligned}$$

$$\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$$

5 Arcs en progression arithmétique

$$\sum_{k=0}^n \sin kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \qquad \sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

IV Trigonométrie hyperbolique

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a \qquad \operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \qquad \operatorname{th} p + \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p+q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}$$

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a \qquad \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \qquad \operatorname{th} p - \operatorname{th} q = \frac{\operatorname{sh}(p-q)}{\operatorname{ch} p \operatorname{ch} q}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \\ &= 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 \\ &= 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x \end{aligned} \qquad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + 1} = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\operatorname{sh} 2x}$$

En notant $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$, on a :

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$(\operatorname{ch} a + \operatorname{sh} a)^n = \operatorname{ch} na + \operatorname{sh} na$$

d'où

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 3a &= \operatorname{ch}^3 a + 3 \operatorname{ch} a \operatorname{sh}^2 a \\ &= 4 \operatorname{ch}^3 a - 3 \operatorname{ch} a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 3a &= 3 \operatorname{ch}^2 a \operatorname{sh} a + \operatorname{sh}^3 a \\ &= 4 \operatorname{sh}^3 a + 3 \operatorname{sh} a \end{aligned}$$

$$\operatorname{th} 3a = \frac{3 \operatorname{th} a + \operatorname{th}^3 a}{1 + 3 \operatorname{th}^2 a}$$