EFREI -L1 mars 2012

ALGEBRE LINEAIRE – DE n°1 - Corrigé succinct -

Questions de cours : 19 points

A quelles conditions une partie F d'un ensemble E est-elle un sous-espace vectoriel de E ?
Enoncer une condition pour qu'une famille de vecteurs soit liée.
Définir un endomorphisme et un automorphisme.
Définir le noyau et l'image d'une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F et énoncer le théorème du rang pour cette application.
Définir une matrice symétrique et une matrice antisymétrique.
Soit deux matrices A et B ; quels sont la transposée et l'inverse de leur produit ? Développer $(A+B)^2$.
Définir le rang d'une famille de vecteurs, le rang d'une application, le rang d'une matrice.
Soit A la matrice associée à une application linéaire f de E dans F, espaces vectoriels de bases respectives BE et BF. Quel est le vecteur dont les coordonnées dans ces bases forment le j-ième vecteur-colonne de A ?

Exercice n°1 : 30 points *On considère dans R^4 les 4 vecteurs $\vec{a}$ = (1 ; 1 ; 1 ; 1), $\vec{b}$ = (1 ; 0 ; -1 ; 1), $\vec{c}$ = (0; 1 ; 0 ; -1), $\vec{d}$ = (2 ; 4 ; 2 ; 0). Soient F l'espace vectoriel engendré par la famille { $\vec{a}$, $\vec{b}$ } et G l'espace vectoriel engendré par la famille { $\vec{c}$, $\vec{d}$ }. Quelles sont les dimensions et bases de F, G, F+G, $F\cap G$; trouver une relation linéaire entre ces 4 vecteurs. Donner les équations de F+G et $F\cap G$ dans R^4 .*

F est engendré par deux vecteurs non colinéaires, qui sont donc libres et forment sa base, F est donc de dimension 2 ; de même pour G . (on peut aussi faire le pivot de Gauss pour F et G) . Le pivot de Gauss appliqué à F+G aboutit à 3 vecteurs non nuls qui sont la base de F+G , qui est donc de dimension 3, et un vecteur nul, qui nous donne la relation entre les 4 vecteurs 2a+2c-d=0. F+G a donc une équation dans R^4 . On écrit que tout vecteur (x,y,z,t) est une combinaison linéaire des 3 vecteurs de base trouvés ; on élimine les coefficients de cette combinaison pour aboutir à l'équation demandée : 3x-2y+z-2t=0. La relation entre les vecteurs nous donne 2a=-2c+d appartient à la fois à F et G, donc à $F\cap G$. Or, d'après le théorème des 4 dimensions, $F\cap G$ est dimension 1 et a donc 3 équations dans R^4 . 2a, ou plus simplement a est donc base de $F\cap G$, qui a donc par exemple comme équations y=x ; z=x ; t=x .

Exercice n°2 : 26 points *Soit φ un endomorphisme de R^4 défini par : φ(x ; y ; z ; t) = (x+y ; x-y ; x-z+t ; 3y-z+t).Trouver une base et la dimension du noyau de φ. Quel est le rang de φ ? Donner l'équation (ou les équations) et une base de l'image de φ .Cette application est-elle injective? Est-elle surjective? Est-ce un automorphisme ? Quelle est la matrice associée à φ dans la base canonique de R^4 ? Quelles sont les images, par φ, des vecteurs de cette base ?*

Le noyau vérifie les 4 équations x+y=0 ; x-y=0 ; x-z+t=0 ; 3y-z+t=0 ; d'où x=0 ; y=0 et z=t. Donc Kerφ={(0 ;0 ;z ;z)}={z(0 ;0 ;1 ;1)}. Le vecteur qui apparait est base de Ker φ, qui est donc de dimension 1. φ n'est donc pas injective, ni bijective ; ce n'est pas un automorphisme. D'après le théorème du rang, le rang de φ est 3. L'application n'est pas surjective. L'image de φ a donc une équation dans R^4 . On pose X=x+y ; Y=x-y ;Z=x-z+t ; T=3y-z+t et on élimine x,y,z et t pour trouver l'équation de Im φ : X-2Y+Z-T=0.

La matrice associée à φ dans les bases canoniques de R^4 est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; les images par φ des 4 vecteurs de la base canonique sont les 4 vecteurs-colonnes de cette matrice.

<u>Exercice 3 : 14 points</u> *On considère les matrices à coefficients réels A, B, C, D définies par*

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer successivement: $2.A$; A^2 ; $A+I$, où I est la matrice unité de taille 3; $A + B$; ${}^tA$; $A.B$; $B.A$; $A.C$; $A.D$; $C.D$; $D.C$; $D.A$; $A.{}^tD$

2A= $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & 6 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ -4 & 9 & -13 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$; A +I = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; A+B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;
${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; A.B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 9 \\ -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$; B.A = $\begin{pmatrix} -1 & 5 & -6 \\ 3 & -5 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; A.C= impossible ; A.D= impossible ; C.D= $\begin{pmatrix} 4 & 20 & -4 \\ 7 & 11 & 2 \end{pmatrix}$; D.C= impossible ; D.A= $\begin{pmatrix} 4 & -10 & 14 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; A. ${}^tD = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>Triplets de Pythagore: 13 points</u>

On recherche une famille d'entiers naturels x_i , y_i et z_i formant un « triplet de Pythagore » vérifiant l'équation de Pythagore : $x_i^2 + y_i^2 = z_i^2$ .On considère les matrices :

$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *On recherche une famille $\mathcal{F}$ de matrice colonne V_i dont les coefficients x_i , y_i et z_i vérifient l'équation de Pythagore.*

Calculer f(V) = U.M.V où f est une application de R^3 dans R et U la transposée de V. Montrer que f(HV) = f(V). En déduire que si $V \in \mathcal{F}$, alors $H^n.V \in \mathcal{F}$, $\forall n \in N^*$.Calculer $H^n.W$ pour n=1,2 et 3. En déduire que l'on dispose ainsi d'une famille $\mathcal{F}$ de triplets de Pythagore.

f(V)=(x y z).M.V= $x^2 + y^2 - z^2$; donc f(V)=0 si $V \in \mathcal{F}$. Alors
f(HV) = ^{t}(HV).M.(HV)= ^{t}(V). ^{t}(H).M.H.V ; on calcule ^{t}(H).M.H qui redonne M. Donc f(HV)=f(V) !! et par récurrence immédiate, f(H^n.V)=f(V) ; donc si $V \in \mathcal{F}$, alors $H^n.V \in \mathcal{F}$, $\forall n \in N^*$. On a donc à partir de W une famille de triplets de Pythagore :

W= $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; HW= $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; H^2W=H.HW= $\begin{pmatrix} 20 \\ 21 \\ 29 \end{pmatrix}$; H^3W=H. H^2 W= $\begin{pmatrix} 119 \\ 120 \\ 169 \end{pmatrix}$, etc.