Calcul Matriciel et Infographie

FABRE Maxime

LEPOT Florian

SALIB Jeremy

URBANEJA Dorian

FABRE Maxime
LEPOT Florian
SALIB Jeremy
URBANEJA Dorian

Calcul Matriciel et Infographie

Table des matières

Introduction

Dans l'optique du TAI d'algèbre linéaire nous avons eu à étudier l'application du calcul matriciel à la représentation des transformations géométriques appliquées à un point puis à un ensemble de points représentant un objet dans l'espace, en l'occurrence une « maison ».

Pour ce faire nous avons établi un certain nombre de matrices associées aux transformations géométriques les plus nombreuses possibles : rotations, symétries, projections, translation, homothéties, cisaillements... Puis à calculer pour chacune l'inverse et le déterminant. Afin de trouver ces deux éléments nous sommes passés par le calcul de la matrice mineure puis de la co-matrice pour obtenir ensuite assez aisément le déterminant de chaque matrice ainsi que l'inverse.

Tous ces calculs ayant étés fait dans l'optique d'un programme pour lequel on applique les différentes transformations à une « maison » dans un espace tridimensionnel.

I. Les rotations

A. Autour d'un axe

Pour toutes les rotations suivantes, on part d'un point de départ P(x, y, z) auquel on appliquera les matrices données ci-après.

1. Autour de l'axe Ox

Cette matrice permet d'effectuer une rotation du point autour de l'axe Ox (1, 0, 0). Etant donné que c'est une rotation autour de Ox, seules les valeurs des coordonnées y et z du point vont changer.

On a la matrice suivante :

Matrice
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On cherche maintenant la minimale de cette matrice. Pour cela, on calcule le déterminant en développant en fonction de la ligne et de la colonne. Nous avons représenté ceci sous forme de tableau. Un récapitulatif de la matrice obtenue sera fait ensuite.

$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$	$\begin{pmatrix} 0 & -sin\theta & 0 \\ 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos\theta$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin\theta$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & sin\theta & cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ cos\theta & -sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\sin\theta$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos\theta$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -sin\theta & 0 \\ 0 & cos\theta & 0 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & 0 \\ 0 & sin\theta & 0 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} = 1$

On calcule ensuite la co-matrice en changeant le signe de la minimale comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

Matrice	Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|M| = 1*1 + 0*0 + 0*0 + 0*0 = 1$$

2. Autour de l'axe Oy

Basée sur le même principe que la matrice précédente, celle-ci permet d'effectuer une rotation d'un point autour de l'axe Oy (0, 1, 0).

De la première, on en déduit que seules les valeurs des coordonnées x et z du point vont changer. On a la matrice suivante :

Matrice
$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On cherche maintenant la minimale de cette matrice, selon la même méthode que ci-dessus.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos\theta$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin\theta$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin\theta$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = 0$
$\begin{pmatrix} 0 & -\sin\theta & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin\theta$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} = 0$

Matrice	Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|M| = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

3. Autour de l'axe Oz

Pour cette dernière rotation autour d'un axe Oz (0, 0, 1), ce sont les valeurs des coordonnées x et y du point qui vont changer. On a la matrice suivante :

Matrice
$\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos\theta} & \boldsymbol{-sin\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{sin\theta} & \boldsymbol{cos\,\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Pour cette matrice, le principe est le même, on utilise la même méthode que ci-dessus pour obtenir la minimale.

Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos\theta} & \boldsymbol{sin\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-sin\theta} & \boldsymbol{cos\,\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos\theta} & \boldsymbol{-sin\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{sin\theta} & \boldsymbol{cos\,\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \boldsymbol{cos\theta} & \boldsymbol{sin\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-sin\theta} & \boldsymbol{cos\,\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$$|M| = cos^2\,\theta + sin^2\,\theta = 1$$

4. N'importe quel axe passant par l'origine

Pour la symétrie par rapport à n'importe quel axe passant par l'origine, on multiplie les 3 matrices précédentes entre elles :

- **On multiplie Rx et Ry**

$$\begin{pmatrix} cos\,\theta & 0 & -sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\theta & -sin\,\theta & 0 \\ 0 & sin\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos\,\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ sin^2\theta & cos\,\theta & -sin\,\theta cos\theta & 0 \\ -sin\theta cos\theta & sin\,\theta & cos^2\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **On multiplie RxRy par Rz**

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 & 0 \\ sin\theta & cos\,\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ \sin^2\theta & \cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta & \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ \sin^2\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta & -\sin^3\cos^2\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta\cos^2 + \sin^2\theta & -\sin^2\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient finalement la matrice suivante qui est bien la matrice permettant de faire une rotation autour de n'importe quel axe passant par l'origine (0, 0, 0) :

$$\begin{pmatrix} cos^2\theta & 0 & sin\theta & 0 \\ sin^2\theta cos\theta + sin\theta cos\theta & -sin^3cos^2\theta & 0 & 0 \\ -sin\theta cos^2 + sin^2\theta & -sin^2\theta cos\theta + cos\theta sin\theta & cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Rotation par rapport à n'importe quel axe

Pour la rotation par rapport à n'importe quel axe, on commence par ramener l'axe sur l'origine avec une translation, on applique ensuite la symétrie ci-dessus et enfin on fait la translation inverse.

On multiplie donc la translation inverse par la symétrie, et le résultat obtenu par la translation, on obtient alors :

Matrice
$\begin{pmatrix} xx(1-\cos(\theta))+\cos(\theta) & xy(1-\cos(\theta))-z\sin(\theta) & xz(1-\cos(\theta))+y\sin(\theta) & 0 \\ yx(1-\cos(\theta))+z\sin(\theta) & yy(1-\cos(\theta))+\cos(\theta) & yz(1-\cos(\theta))+x\sin(\theta) & 0 \\ xz(1-\cos(\theta))+y\sin(\theta) & yz(1-\cos(\theta))+x\sin(\theta) & zz(1-\cos(\theta))+\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

II. Les symétries

A. Par rapport à un axe

Pour ces symétries, on appliquera les matrices trouvées sur un point de départ P(x, y, z).

Pour trouver les matrices de symétrie par rapport à des axes, nous avons repris celles des rotations en remplaçant θ par un angle. En effet, on sait qu'une symétrie est une rotation d'angle π.

Cela nous permet de gagner beaucoup de temps, notamment dans le calcul de la matrice en elle-même, mais également pour le calcul du déterminant, nous le verrons par la suite.

1. Par rapport à l'axe Ox

On part donc de la matrice de rotation autour de l'axe Ox, dans laquelle on remplace θ par π.

Matrice Rotation	Matrice Symétrie
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lorsque nous avons calculé le déterminant de la rotation autour de l'axe Ox, nous avons trouvé 1. On en conclue donc que le déterminant ne dépend pas de θ. Comme dit au-dessus, une symétrie étant une rotation d'angle π, on peut affirmer, sans aucun calcul, que le déterminant de cette matrice de transformation est 1.

Nous allons toutefois procéder aux calculs comme précédemment par acquis de conscience.

Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|M| = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

On peut noter qu'on trouve matrice originale égale à la minimale, à la co-matrice et à la matrice inverse.

2. Par rapport à l'axe Oy

On part cette fois-ci de la matrice de rotation autour de l'axe Oy, dans laquelle on remplace, une nouvelle fois, θ par π.

Matrice Rotation	Matrice Symétrie
$\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Encore une fois, et pour la même raison que pour la symétrie par rapport à l'axe Ox, nous savons que le déterminant est 1. Nous calculons une nouvelle fois la minimale et la co-matrice, par principe.

Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|M| = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

Comme pour la matrice précédente, M = Sym(M) = Co(M) = M^{-1}

3. Par rapport à l'axe Oz

Pour ce dernier cas de symétrie autour d'un axe originel, Oz, on agit selon le même schéma.

Matrice Rotation	Matrice Symétrie
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Encore une fois, et pour la même raison que pour les 2 précédentes symétries, nous savons que le déterminant est 1.

Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|M| = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

Comme pour les matrices précédentes, M = Sym(M) = Co(M) = M^{-1}

4. Par rapport à n'importe quel axe passant par l'origine

Pour ce cas-là, on part de la matrice qui permet la rotation d'angle thêta, autour d'un axe quelconque (x, y, z), et on remplace thêta par π, une nouvelle fois, on obtient cette matrice :

Matrice
$\begin{pmatrix} 2x^2-1 & 2xy & 2xz & 0 \\ 2xy & 2y^2-1 & 2yz & 0 \\ 2xz & 2yz & 2z^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. Par rapport à un point

Pour les symétries suivantes, on prendra P (x, y, z) comme point de symétrie.

1. Par rapport à l'origine (0, 0, 0)

Lors d'une symétrie par rapport à l'origine, on prend l'opposé de chaque coordonnée. En appliquant ceci dans une matrice, on obtient :

Matrice
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule ensuite la minimale, on en déduit la co-matrice et pour finir on obtient la matrice inverse :

Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|M| = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

2. Par rapport à n'importe quel point (x, y, z)

Pour cette symétrie, il faut d'abord faire une translation pour ramener le point P sur l'origine. On fait ensuite la symétrie trouvée ci-dessus et on finit par faire la translation inverse pour ramener le point au bon emplacement.

Comme pour la rotation, on doit d'abord commencer par multiplier la translation inverse par la symétrie et finir par multiplier le résultat par la translation.

On obtient alors :

Matrice
$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2x \\ 0 & -1 & 0 & 2y \\ 0 & 0 & -1 & 2z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On calcule ensuite la minimale, on en déduit la co-matrice et pour finir on obtient la matrice inverse :

Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|M| = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$$

III. La translation

Lors d'une translation T(a, b, c), on modifie les valeurs des coordonnées x, y et z de telle sorte que :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

On obtient alors la matrice suivante :

Matrice
$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

On calcule la minimale, la co-matrice, et on finit naturellement par la matrice inverse.

Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-b} & \boldsymbol{c} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{-c} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{-c} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$$|M| = 1 * 0 + 0 * 0 + 0 * 0 + 0 * 0 = 1$$

IV. L'homothétie

Lors d'une homothétie, on modifie les valeurs des coordonnées x, y et z de telle sorte que x' = kx, y' = ky et z' = kz :

Matrice
$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

On calcule alors la minimale, la co-matrice, et on finit naturellement par la matrice inverse.

Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}^3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mathbf{1}/\boldsymbol{k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}/\boldsymbol{k} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}/\boldsymbol{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$$|M| = \mathrm{k}^3$$

V. La projection

Pour cette transformation, on part d'une rotation en fonction de x, en fonction de y, puis une translation.

$\mathbf{M = Rx.Ry.T}$
$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\cos y} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\sin y} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sin x \sin y} & \boldsymbol{\cos x} & \boldsymbol{-\sin x \cos y} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{-\cos x \sin y} & \boldsymbol{\sin x} & \boldsymbol{\cos x \cos y} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{-Pox} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{-Poy} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{-Poz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \cos y & 0 & \sin y & -Pox\ cosy - Poz \sin y \\ \sin x \sin y & \cos x & -\sin x \cos y & -Pox\ sinx\ siny - Poy\ cosx + Poz\ sinx\ cosy \\ -\cos x \sin y & \sin x & \cos x \cos y & Pox\ cosx\ siny - Poy\ sinx - Poz\ cosx\ cosy \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $\vec{N} = \begin{pmatrix} Nx \\ Ny \\ Nz \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur normé dirigé par Po vers Pv.

On a donc $\vec{N} = \begin{pmatrix} cosx\ siny \\ -sinx \\ -cosxcosy \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{M = Rx.Ry.T}$
$\begin{pmatrix} \boldsymbol{-aNz} & \mathbf{0} & \boldsymbol{aNx} & \boldsymbol{a(PoxNz - PozNx)} \\ \boldsymbol{-aNxNy} & \boldsymbol{\frac{1}{a}} & \boldsymbol{-aNyNz} & \boldsymbol{aNy(PoxNx + PozNz) - \frac{Poy}{a}} \\ \boldsymbol{-Nx} & \boldsymbol{-Ny} & \boldsymbol{-Nz} & \boldsymbol{PoxNx + PoyNz + PozNz} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

avec $a = \frac{1}{cosx}$

Soit d la **position en z du plan de projection**, on a :

$$\begin{cases} xp = \dfrac{xd}{z} \\ yp = \dfrac{yd}{z} \end{cases}$$

On prend $w = \frac{z}{d}$
On a donc :

$$\begin{cases} xp = \dfrac{x}{w} \\ yp = \dfrac{y}{w} \end{cases}$$

On cherche ensuite w. On peut le calculer grâce à la **matrice Mper** :

Mper
$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1/d} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

Lorsqu'un applique cette matrice au point

$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$, on trouve :

$P' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$.

Cela nous permet donc de mettre en place la coordonnée w.

Pour connaitre la position de projection du point P :

$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$, on le multiplie par la matrice $M' = M.Mper$.

On obtient alors :

Matrice finale de projection M'
$\begin{pmatrix} \boldsymbol{-aNz} & \mathbf{0} & \boldsymbol{aNx} & \boldsymbol{a(PoxNz - PozNx)} \\ \boldsymbol{-aNxNy} & \boldsymbol{\frac{1}{a}} & \boldsymbol{-aNyNz} & \boldsymbol{aNy(PoxNx + PozNz) - \frac{Poy}{a}} \\ \boldsymbol{-Nx} & \boldsymbol{-Ny} & \boldsymbol{-Nz} & \boldsymbol{PoxNx + PoyNz + PozNz} \\ \boldsymbol{\frac{-Nx}{d}} & \boldsymbol{\frac{-Ny}{d}} & \boldsymbol{\frac{-Nz}{d}} & \boldsymbol{\frac{PoxNx+PoyNy+PozNz}{d}} \end{pmatrix}$

VI. Le cisaillement

La matrice pour le cisaillement est identique à la matrice unitaire, sauf qu'on place un k n'importe où sauf dans la diagonale. On a par exemple :

Matrice
$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

On calcule donc la minimale, la co-matrice, et on finit naturellement par la matrice inverse.

Minimale	Co-Matrice	Matrice inverse
$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{k} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -k & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -k & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$

$$|M| \ = 1$$