[redacted]

DE d'algèbre

95 pts Bravo

$\dfrac{20}{20}$

Exercice 2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

mineur de A : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 1

cofacteur :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 1

déterminant $= 1 \times (-1)^4 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$ 1

trace : $0 + 5 - 3 = 2$ 1 1

rang : $\det A \neq 0$ donc le rang de A est 3. 1

inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times {}^t\mathrm{com}\, A = -\frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1

$$= \begin{pmatrix} 0 & -3/2 & +5/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ 1

Polynome caractéristique : $P(\lambda) = |A - \lambda I|$. 1

$$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -5 \\ 1 & 3 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$ 1

$|A-\lambda I|$ = (Malin) : $\begin{array}{c} C_1+C_2+C_3 \\ \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 5-\lambda & -5 \\ 1-\lambda & 3 & -3-\lambda \end{vmatrix} \end{array}$ oui

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & -6 \\ 0 & 3 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \times (-1)^2 \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix}$$ 1

$$= (1-\lambda)\left[(5-\lambda)(-4-\lambda) + 18\right] = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - \lambda - 2\right]$$ 1

avec $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$.

$\rightarrow P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1)$.

$= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$.

On en déduit les valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ 1

$\lambda_2 = 2$ 1

$\lambda_3 = -1$ 1

Vérif $1 + 2 - 1 = 2 = \mathrm{tr}\, A$ 1

$1 \times 2 \times (-1) = -2 = \det A$. 1 Bien

Calcul des vecteurs propres de A. 1

Espace $E_1 = \left\{ (x, y, z) \text{ tq } (A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$$(A-I) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & -5\\ 1 & 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

d'où :
$$\begin{cases}-x + z = 0\\ x + 4y - 5z = 0\\ x + 3y - 4z = 0\end{cases} \quad 1 \qquad n = 3 \quad p = 3 \quad rg < 3 \quad 1$$

$$\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix} = -4 \neq 0 \text{ donc } rg = 2. \quad 1$$

x et y : inconnues principales

1[a] et 2[e] eq : equations principales. 1

$\exists (n-r) = 1$ bordant forcément nul car 2[ème] terme est nul. 1

donc le système devient :

$$\begin{cases}-x = -z\\ x + 4y = 5z\end{cases} \qquad \text{cas de Cramer.} \qquad 1$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = -\frac{1}{4} \times \begin{vmatrix}-z & 0\\ 5z & 4\end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\left[-4z\right] = z$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{1}{4} \times \begin{vmatrix}-1 & -z\\ 1 & 5z\end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\left[-5z + z\right] = -\frac{1}{4}(-4z) = z. \quad 1$$

donc $E_1 = \{(x,y,z) \text{ tq } x = z \text{ et } y = z\}$. 1

$$= \{(x,x,x)\} = \{x\underbrace{(1,1,1)}_{\vec{e}_1}\} \quad 1 \quad 1$$

Espace $E_2 = \left\{(x,y,z) \text{ tq } (A-2I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$. 1

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -5\\ 1 & 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

d'où : $\begin{cases} -2x + z = 0 \\ x + 3y - 5z = 0 \\ x + 3y - 5z = 0 \end{cases}$ 1 $\quad n = p = 3$ $\quad rg < 3$

$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \quad rg = 2$ 1

x et y principales 1

les 2 premières eq sont principales.

$\exists (n-r) = 1$ bordant forcement nul. 1

donc système devient :

$\begin{cases} -2x = -z \\ x + 3y = 5z \end{cases}$ cas de Cramer.

$x = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} -z & 0 \\ 5z & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\left[-3z\right] = \frac{1}{2} z$ 1

$y = -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & -z \\ 1 & 5z \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\left[-10z + z\right] = \frac{9}{6} z$ 1

$E_2 = \left\{ (x, y, z) \text{ tq } x = \frac{1}{2} z \quad y = \frac{9}{6} z \right\}$ 1

$= \left\{ (x, 3x, 2x) \right\} = \left\{ x \underbrace{(1, 3, 2)}_{\vec{e_2}} \right\}$ 1

Espace $E_{-1} = \left\{ (x, y, z) \text{ tq } (A + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ 1

$(A + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + 6y - 5z = 0 \\ x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$ $\quad n = 3 \quad p = 3$ 1

$rg = 2$ car $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$ 1

1 facteur forcément nul. 1

x et y principales

2 premières eq principales 1

donc le système devient :

$$\begin{cases} x = -z \\ x + 6y = 5z \end{cases}$$ cas de Cramer.

$$x = \frac{1}{6} \times \begin{vmatrix} -z & 0 \\ 5z & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times [-6z] = -z$$ 1

$$y = \frac{1}{6} \times \begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 5z \end{vmatrix} = \frac{1}{6} [5z + z] = z$$ 1

$$E_{-1} = \{(x, y, z) \text{ tq } x = -z \text{ et } y = z\}$$ 1

$$= \{(x, -x, -x)\} = \{x \underbrace{(1, -1, -1)}_{\vec{e}_{-1}}\}$$ 1

donc les vecteurs propres de A sont :

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$ oui

Calcul de P^{-1}

mineur de P : $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$ 1

cofacteur : $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$ 1 déterminant de P =

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\1&-1&2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2&1&1\\0&-1&3\\0&-1&2\end{vmatrix} = 2\times(-1)^2\begin{vmatrix}-1&3\\-1&2\end{vmatrix}$$

$$= 2\,(1) = 2$$ 1

donc $P^{-1} = \frac{1}{2}\times\begin{pmatrix}1&-3&4\\1&1&-2\\0&2&-2\end{pmatrix}$ 1

Vérif :

$$\begin{pmatrix}1&-3&4\\1&1&-2\\0&2&-2\end{pmatrix}$$

$$P\times P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$ 1

Calcul du produit $P^{-1}AP$.

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&5&-5\\1&3&-3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\1&-1&2\end{pmatrix}$$ 1 1

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-3&4\\1&1&-2\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&4\\-1&-1&2\\0&4&-4\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}_{D}$$

le résultat est correct, on retrouve bien les valeurs propre $\{1\,;-1\,;2\}$ dans la diagonale. (diagonalisation de A) 1

. Calcul de A^n.

1

on a : $D = P^{-1}AP$.

donc $D^2 = P^{-1}AP\,P^{-1}AP = P^{-1}A^2P$

d'où $D^n = P^{-1}A^nP$

$\rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$. 1

$$D^n = \begin{pmatrix}1^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$$ 1

$$\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$P D^n P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & (-1)^n & 2^n \\ 1^n & -(-1)^n & 3\times 2^n \\ 1^n & -(-1)^n & 2\times 2^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & (-1)^n & 2^n \\ 1 & -(-1)^n & 3\times 2^n \\ 1 & -(-1)^n & 2\times 2^n \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & -3+(-1)^n+2\times 2^n & 4-2\times(-1)^n-2\times 2^n \\ 1-(-1)^n & -3-(-1)^n+6\times 2^n & 4+2\times(-1)^n-6\times 2^n \\ 1-(-1)^n & -3-(-1)^n+4\times 2^n & 4+2\times(-1)^n-4\times 2^n \end{pmatrix}}_{A^n}$$

1

B01

dans $\mathbb{R}^3$, $M_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ tel que :

$$x_{n+1} = z_n$$
$$y_{n+1} = x_n + 5y_n - 5z_n$$
$$z_{n+1} = x_n + 3y_n - 3z_n$$

$M_{n+1} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$ et $M_n \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

$$\text{donc } M_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}}_{A.} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A M_n$$

1

$$M_n = A M_{n-1} \longrightarrow M_n = A^{n-1} M_1$$

$\vdots$

$$M_2 = A M_1$$

Pour $x_1 = y_1 = z_1 = 1$.

$$x_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n-1} - 3 + (-1)^{n-1} + 2\times 2^{n-1} + 4 - 2\times(-1)^{n-1} - 2\times 2^{n-1}\right)$$

$= \cancel{2}\ 1$

$$y_n = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{n-1} - 3 - (-1)^{n-1} + 6\times 2^{n-1} + 4 + 2\times(-1)^{n-1} - 6\times 2^{n-1}\right)$$

$= \cancel{2}\ 1$

$$z_n = \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{n-1} - 3 - (-1)^{n-1} + 4\times 2^{n-1} + 4 + 2\times(-1)^{n-1} - 4\times 2^{n-1}\right)$$

$= \cancel{2}\ 1$ il y a un $\frac{1}{2}$ en facteur

"petite" erreur

1

Pour $x_1 = 1$; $y_1 = z_1 = -1$.

$x_n = 2 \quad y_n = -2 \quad z_n = -2$

il y a toujours un facteur $\frac{1}{2}$ ~~et~~, et, en plus, un facteur $(-1)^{n-1}$

valeur propre

Pour $x_1 = 1$; $y_1 = 3$; $z_1 = 2$.

$x_n = 2 \quad y_n = 6 \quad z_n = 4$. de m̂ facteur $\frac{1}{2}(2)^{n-1}$

valeur propre

On constate que pour x_1 y_1 et z_1 prenant les valeurs des vecteurs propres de A, les coordonnées au rang n ont été multipliées par 2.

+ 1

Exercice 3.

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \qquad n = 3 \quad p = 3$$

déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+m & 1 & m \\ 0 & m & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$$= (1+m) \quad (-1)^2 \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1+m)(-m+1).$$

$$= -(m+1)(m-1)$$

Si l'on est dans le cas de Cramer $m \neq 1$ et -1.

$$x = - \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(1+m)(m-1)} = \frac{2m(m-1)}{(1+m)(m-1)}$$

$$= \frac{2m}{1+m}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{(1+m)(-m+1)} = 0$$ car 2 lignes identiques.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(1+m)(-m+1)} = - \frac{(1-m)(m-1)}{(1+m)(m-1)} = - \frac{(1-m)}{(1+m)}$$

Si l'on est pas dans le cas de Cramer $m = 1$ ou -1.

Cas particulier $m = 1$. 1

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$n = 3 \quad p = 3$

$rg < 3$ 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad rg = 2.$$ 1

y et z principales 1

1^re et 2^ème eq principales.

$\delta(n - r) = 1$ bordants. 1

$$\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$ 1

Tous les bordants sont nul le système est possible. 1

et devient :

$$\begin{cases} y + z = 1 - x \\ y - z = 1 - x \end{cases}$$

Cas de cramer. 1

$$y = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1-x & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\left[-1 + x - 1 + x\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-2 + 2x\right) = -(-1 + x)$$

$$= 1 - x$$ 1

$$z = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1-x \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = 0$$ 1

donc $S = \{(x, 1-x, 0)\}$, $\forall x$

Bien

Cas particulier $m = -1$.

A

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ x - y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \quad 1 \qquad n = 3 \quad p = 3 \qquad rg < 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \text{donc } rg = 2 \quad 1$$

x et y principale ; 2 premières eq principales 1

$\exists (n-r) = 1$ bordants 1

1.

$$\beta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2) = -4 \neq 0$$

Tous les bordants ne sont pas nul, donc le système n'a pas de solution. 1

1 Bien.

Exercice I.

$D_1 = (x) \rightarrow |D_1| = x$ 1

$D_2 = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow |D_2| = x^2 - x + 1$ 1

$$D_3 = \begin{pmatrix} x & x-1 & 0 \\ 1 & x & x-1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow |D_3| = x(-1)^2 \begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & x \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= x(x^2 - x + 1) - (x-1)x.$$

$$= \underbrace{x^3 - x^2 + x - x^2 + x}_{\text{oui}} = x^3 - \cancel{x}x^2 + 2x$$

1-

$$D_n = \begin{pmatrix} x & x-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x & x-1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & x & x-1 \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$$

$\cancel{D_n = x \, |D_{n-1}|}$? ?

1