PUISSANCE DE MATRICES

Par

Adel HEDDID – Mohamed YOUSSEF – Jonathan LAWSON – Didier DUSZA – Hadi ALI

08

Par

Adel HEDDID – Mohamed YOUSSEF – Jonathan LAWSON – Didier DUSZA – Hadi ALI

Le calcul de puissances de matrices est un exercice classique proche de la diagonalisation. Des résultats généraux en facilitent l'approche. Parmi les applications on trouve l'étude de la dynamique de certaines populations.

Pourquoi calculer les puissances d'une matrice ? Bien souvent, il s'agit d'étudier leur limite. Le problème est lié à l'étude de l'évolution de populations comme nous le voyons plus loin. Pour l'instant intéressons nous à ce problème par curiosité intellectuelle. Une matrice carré complexe *A* d'ordre *p* étant donnée, nous nous proposons de calculer ses puissances successives.

Rappel :

Une matrice diagonale *est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls. Les coefficients de la diagonale peuvent être ou ne pas être nuls.*

Une matrice diagonalisable *est une matrice carré d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans un corps commutatif K si elle est semblable à une matrice diagonale c'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que* $A = PDP^{-1}$.

Considérons alors les valeurs situées sur la diagonale de la matrice diagonalisable *A* de taille *k :* les valeurs propre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_k$.

Par récurrence nous montrons alors que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier n.

Récurrence :

$$A = PDP^{-1}$$
$$A^2 = PDP^{-1} \times PDP^{-1}$$
$$= PD(PP^{-1}) \times DP^{-1}$$
$$= PD(I) \times DP^{-1}$$
$$= PD^2\,P^{-1}$$
$$A^3 = PD^2P^{-1} \times PDP^{-1}$$
$$= PD^2(PP^{-1}) \times DP^{-1}$$
$$= PD^2(I) \times DP^{-1}$$
$$= PD^3\,P^{-1}$$

On suppose que pour tout t ∈ N on a :

$$A^t = PD^tP^{-1}$$
$$A^{t+1} = A^t \times A$$
$$= PD^tP^{-1} \times PDP^{-1}$$
$$= PD^t\,(PP^{-1})\,DP^{-1}$$
$$= PD^t\,(I)\,DP^{-1}$$
$$= PD^{t+1}P^{-1}$$

Donc A^{t+1} est vraie pour tout t ∈ N.
Donc A^n est vraie aussi pour tout n ∈ N.

Il parait alors clair que le problème est simple si *A* est diagonalisable les valeurs située hors de la diagonale principale de la matrice *D* étant nulles le calcul de puissance de matrice se fera seulement par rapport a sa diagonale et non en considérant toute les valeurs de la matrice *A*.

Exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}$$

Nous pouvons remarquer dans ce cas que les matrices *A* et *D* peuvent être inversées. Notons alors que les matrices A et D sont semblables mais ne sont pas identiques : Leurs bases sont différentes.

La matrice D^n est diagonale. Ses éléments sont les puissances nièmes des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité, ce que l'on peut écrire :

$$D^n = \lambda_1^n I_p + \lambda_2^n I_p \ldots \lambda_k^n I_P$$

Ou les matrices I_i sont des matrices carré nulles partout sauf dans la 'coordonnée (i,i) de la matrice' qui prend pour valeur 1.

Exemple :

Soit une matrice diagonale D d'ordre 2 tel que D $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ donc on a pour une puissance de 2 :

$$D^2 = 2^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4^2 \end{pmatrix}.$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons :

$$A^n = P D^n P^{-1}$$
$$= P \lambda_1^n I_p + \lambda_2^n I_p \ldots \lambda_k^n I_P P^{-1}$$

On sait que :

$$M_i = P I_i P^{-1}$$

Donc :

$$A^n = \lambda_1^n M_p + \lambda_2^n M_p + \cdots + \lambda_k^n M_P$$

Ou Mi sont les matrices carrées non nulles que nous pouvons calculer à partir de P et de son inverse, méthode que nous éviterons, vu les calculs qu'elle implique.

Calculer les coefficients

Il est préférable d'écrire les égalités obtenues pour n variant de 0 à k-1. Nous obtenons ainsi un système d'équation à k inconnues qu'il est possible de résoudre effectivement si k est petit. Une autre méthode consiste à remarquer que, par combinaisons linéaire de ces égalités, si f est un polynôme de degré t≤n, alors f est de la forme :

$$f(X) = \sum_{i=0}^{t} \alpha_i X^i$$

$$f(A) = \sum_{i=0}^{t} \alpha_i A^i = \sum_{i=0}^{t} \alpha_i \sum_{j=0}^{k} \lambda_j^i M_j$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (\sum_{i=0}^{t} \alpha_k \lambda_j^i) M_j = \sum_{j=0}^{k} f(\lambda_i) M_j$$

Donc :

$$f(A) = f(\lambda_1) M_1 + f(\lambda_2) M_2 + \cdots + f(\lambda_k) M_k$$

Il suffit alors de choisir f s'annulant en tous les points λ_i sauf en un seul pour déterminer les matrices M_i . Plus précisément, on introduit les polynômes interpolateur de Lagrange.

Rappel :

En analyse numérique, les **polynômes de Lagrange**, du nom de Joseph Louis Lagrange, permettent d'interpoler une série de points par un polynôme qui passe exactement par ces points appelés aussi nœuds.

$$f_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j}$$

On remarque que : $f_i(\lambda_j) = 0$

$f_i(\lambda_i) = 1$

Exemple dans notre cas :

$$f_1(X) = \frac{(X-\lambda_2)(X-\lambda_3) \times \ldots \times (X-\lambda_k)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3) \times \ldots \times (\lambda_1 - \lambda_k)}$$

$$f_2(X) = \frac{(X-\lambda_1)(X-\lambda_3) \times \ldots \times (X-\lambda_k)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3) \times \ldots \times (\lambda_2 - \lambda_k)}$$

En considérant notre matrice A on a :
$\forall i \in \{1, \ldots, k\}$

$$f_i(A) = f_i(\lambda_1)M_1 + \cdots + f_i(\lambda_i)M_i + \cdots + f_i(\lambda_k)M_k$$

- D'après le rappel comme $f_i(\lambda_j) = 0$

$$f_i(A) = f_i(\lambda_i)M_i$$

- D'après le rappel comme $f_i(\lambda_i) = 1$, on obtient :

$$f_i(A) = M_i$$

D'où la formule :

$$A^n = \lambda_1^n f_1(A) + \lambda_2^n f_2(A) + \ldots + \lambda_k^n f_k(A)$$

Cette dernière méthode est satisfaisante intellectuellement mais conduit à des calculs pénibles. En effet cela reviendrais à résoudre un système d'équations résultant de l'égalité d'une certaine matrice (**calculée à partir de la formule précédente**) comprenant des expressions qui peuvent être selon la taille de la matrice de départ extrêmement lourde, et de la matrice de départ mis à des puissances quelconques dans le but d'enrichir des informations d'égalités (il s'agit en même temps d'alourdir notre tache puisque mis à une puissance n+1 nos calculs ne seront que de plus en plus lourds). C'est pour cela que nous nous passerons d'un exemple vu les lourds calculs que cela représente.

Mieux vaut dans la pratique s'en tenir à la résolution d'un système (cf. encadré *Exemple de calcul*)

Par

Adel HEDDID – Mohamed YOUSSEF – Jonathan LAWSON – Didier DUSZA – Hadi ALI

Calculer les limites

Dans ce cadre général, la suite A^n tend vers la matrice nulle si tous les λ_i^n tendent vers 0, c'est-à-dire, si et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inferieur à 1.

En effet si tous les λ_i^n tendent vers 0, c'est-à-dire, si et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inferieur à 1 alors nous pouvons réécrire tous les λ_i^n sous la forme :

$$\lambda_i = \frac{1}{k_i}$$

D'où $\lambda_i^n = \frac{1}{k_i^n}$ avec $k_i > 1$

On en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_i^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_i^n} = 0$$

Soit en considérant la matrice diagonale A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{k_p} \end{pmatrix}$$

On en démontre : $\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Ce résultat est conservé si A n'est pas diagonalisable.

La suite A^n a une limite non nulle si 1 est valeur propre et toutes les autres valeurs propres sont de module strictement inferieur à 1. En effet, il vient d'être démontré que si toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inferieur à 1 alors la suite A^n tend vers la matrice nulle, or dans ce cas ci on considère comme existant des valeurs propres de valeur 1 (on suppose qu'il existe au moins une valeur propre de valeur 1 dans la matrice). Il n'existe alors aucun moyen pour que la suite A^n diverge ou tend vers la matrice nulle puisque les éléments de la matrice diagonale mis à la puissance nième étant les puissances nièmes des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité, à l'infini on aura une matrice « presque nul » composée de 0 partout sauf sur sa diagonal qui comprendra au moins un 1:

Avec la matrice diagonale B suivante :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{k_p} \end{pmatrix}$$

On en déduit : $\lim_{n\to\infty} B^n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Si nous notons λ_1=0, la matrice limite est alors M_1. En reprenant les informations connues :

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \cdots + \lambda_k M_k) = M_1$$

car $\forall i \in \{2, \dots, k\} |\lambda_i| < 1$

Rappel :

En algèbre linéaire, à toute matrice carrée ou à tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est associé un polynôme appelé **polynôme caractéristique**. Il renferme d'importantes informations sur la matrice ou sur l'endomorphisme, comme ses valeurs propres, son déterminant et sa trace.

Si *M* est une matrice diagonale ou plus généralement une matrice triangulaire, alors les valeurs propres de *M*, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ avec leurs ordres de multiplicité sont les coefficients diagonaux de *M* et nous pouvons définir le polynôme caractéristique comme étant

$$(X - \lambda_1)^{m1} \ldots (X - \lambda_k)^{mk}$$

Ou plus formellement :

Soit *M* une matrice carrée d'ordre *n* à coefficients dans un anneau commutatif. Le polynôme caractéristique de *M*, noté $p_M(X)$, est le polynôme défini par

$$p_M(X) = \det(XI_n - M)$$

Comme pour tout polynôme f : $f(A) = f(1)\,M_1 + f(\lambda_2)\,M_2 + \cdots + f(\lambda_k)\,M_k$
Il suffit de considérer le quotient du polynôme caractéristique par $(x-1)^m$ ou m est la multiplicité de la valeur propre 1, pour obtenir : $M_1 = {}^{f(A)}/_{f(1)}$

Soit, on considère le polynôme P par :

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{m1}(X - \lambda_2)^{m2} \ldots (X - \lambda_k)^{mk}$$

D'où le polynôme f :

$$f(X) = (X - \lambda_2)^{m2} \ldots (X - \lambda_k)^{mk}$$

On peut remarquer que si on a:

- $f(A) = (A - \lambda_2)^{m2} \ldots (A - \lambda_k)^{mk}$
- $f(1) = (1 - \lambda_2)^{m2} \ldots (1 - \lambda_k)^{mk}$

Alors :

$$\frac{f(A)}{f(1)} = \frac{(A - \lambda_k)^{mk} \ldots (A - \lambda_k)^{mk}}{(1 - \lambda_k)^{mk} \ldots (1 - \lambda_k)^{mk}}$$

On peut tout de suite remarquer que d'après la formule d'interpolation Lagrangienne, on a

$$\frac{(A - \lambda_k)^{mk} \ldots (A - \lambda_k)^{mk}}{(1 - \lambda_k)^{mk} \ldots (1 - \lambda_k)^{mk}} = M_1$$

Soit :

$$\frac{f(A)}{f(1)} = M_1$$

Le resultat n'est pas conservé si A n'est pas diagonalisable comme le montre l'exemple de la matrice non diagonalisable suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prouvons par récurrence que

$$\boldsymbol{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \forall\, n \in R}$$

Initialisation : Prouvons que la propriété est vraie pour n=0, en effet on a bien

$$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour un certain entier k ∈ R, montrons que la propriété est vrai pour le rang suivant k+1

$$A^{k+1} = AA^k$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où $A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall\, k \in R$

Conclusion : La propriété est vraie pour n=0 et étant héréditaire, on en déduit

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \forall\, n \in R$$

A^n n'a pas de limite finie, nous avons donc démontré que le résultat n'est pas conservé si une matrice n'est pas diagonalisable.

EXEMPLE DE CALCUL

Considérons la matrice

$$A : \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$$

ou a est un paramètre non nul

Calculons son polynôme caractéristique, nous savons que :

$$p_M(X) = \det(XI_n - M)$$

$$XI_3 - A$$

$$=$$

$$X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a & -a^2 \\ -1/a & 0 & -a \\ -1/a^2 & -1/a & 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a & -a^2 \\ -1/a & 0 & -a \\ -1/a^2 & -1/a & 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} X & -a & -a^2 \\ -1/a & X & -a \\ -1/a^2 & -1/a & X \end{pmatrix}$$

Calculons à présent le déterminant de cette matrice, nous obtiendrons alors le polynôme caractéristique de la matrice A.

Par

Adel HEDDID – Mohamed YOUSSEF – Jonathan LAWSON – Didier DUSZA – Hadi ALI

Rappel :

Calcul du déterminant d'une matrice 3*3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad +$$

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

On a :

$$\det(XI_3 - A) = X\begin{vmatrix} X & -a \\ -\frac{1}{a} & X \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} -\frac{1}{a} & -a \\ -\frac{1}{a^2} & X \end{vmatrix} - a^2\begin{vmatrix} -1/a & X \\ -1/a^2 & -1/a \end{vmatrix}$$

$$= X(X^2-1) + a\left(-\frac{X}{a} - \frac{1}{a}\right) - a^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{X}{a^2}\right)$$

$$= X^3 - 3X - 2$$

Qui se factorise en $(X-2)(X+1)^2$
La matrice a donc une valeur propre double (-1) et une valeur propre simple (2).

La matrice A+I est de rang I puisque ses lignes sont toutes proportionnelles au vecteur (1 a a²) donc l'espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 2. Ceci implique que A diagonalisable. D'après ce qui précède, il existe deux matrices M1 et M2 telles que :

$$A^n = (-1)^n M_1 + 2^n M_2$$

Ces deux matrices sont solutions du système (pour n = 0 et n = 1) :

- $M_1 + M_2 = I$
- $-M_1 + 2M_2 = A$

On trouve M_2 en ajoutant les deux équations, M_1 s'en déduit immédiatement :

$$M_1 = \frac{2I-A}{3} \text{ et } M_2 = \frac{I+A}{3}$$

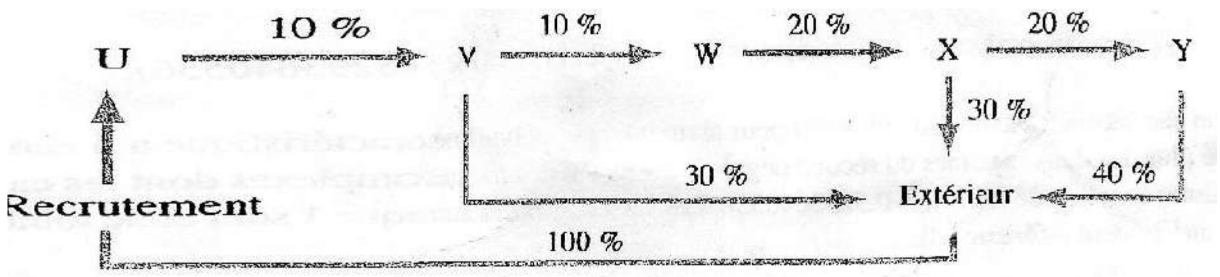
Le calcul est trivial, on obtient :

$$A^n = \frac{2^n+2(-1)^n}{3} I + \frac{2^n-2(-1)^n}{3} A$$

Evolution de population

Ce type de résultat est utile dans les questions d'évolution de population. Les cas réel étant longs à exposer, prenons un cas fictif concernant les effectifs d'une entreprise. On peut imaginer le même type de problèmes si on étudie des populations animales.

Dans un pays imaginaire, l'année comporte 113 100 personnes réparties dans cinq grades notés U, V, W, X et Z. L'évolution des effectifs de chaque grade se fait selon le schéma suivant, ou le recrutement est égal aux départs vers l'extérieur :



On note Z_n la matrice colonne constituée par les effectifs de ces cinq grades. L'évolution des carrières est résumée par l'égalité matricielle : $Z_{n+1} = AZ_n$.

On doit avoir :

$$\begin{pmatrix} U' \\ V' \\ W' \\ X' \\ Y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ X \\ Y \end{pmatrix}$$

Or on peut remarquer d'après le schéma ci-dessus :

U' = 0.9U+0.3X+0.3V+0.4Y

V' = 0.1U+0.6V

W' = 0.1V+0.8W

X' = 0.2W+0.5X

Y' = 0.2X+0.6Y

Exemple sur V :

Dans le cas d'un passage au grade suivant, sur V il reste 60% de son effectif vue que 40% seront partit au grade suivant, et 10% de l'effectif du grade U iront en V d'où :

V' = 0.1U+0.6V

On en déduit la matrice carrée A d'ordre 5 suivante :

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Par récurrence on en déduit que : $Z_n = A^n Z_0$ pour tout n. L'évolution des effectifs dépend donc de la suite matricielle A^n.

Rappel :

Dans le cadre de l'étude d'une matrice, plusieurs propriétés et définitions sont à rappeler:

La **matrice transposée** (on dit aussi la transposée) d'une matrice $A \in M_{n,m}(K)$ est la matrice notée ${}^tA \in M_{m,n}(K)$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de *A*.

Soit E un espace vectoriel sur K et u un endomorphisme de E, alors : Le vecteur x de E non nul est dit **vecteur propre** de u si et seulement s'il existe un élément λ de K tel que u(x) = λx,

Le **rang d'une matrice** A, noté rg A, est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.
On suppose *E* de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire. Alors l'image de *f* est de dimension finie et le théorème du rang nous donne :

$rg\ f + \dim Kerf$ =dim E

Etude d'une matrice

Chaque colonne de A à pour somme 1, ce qui correspond à la stabilité des effectifs. Cette propriété implique que I est valeur propre de la transposée de A, le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 étant un vecteur propre associé.

Une matrice ayant même polynôme caractéristique que sa transposée, on déduit que 1 est valeur propre de A.

En effet :

$M = (a_{ij}) \in M_n(R) \qquad \forall j \ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$

${}^tM = a_{ji} \qquad {}^tM \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^t\mathrm{M}$ associé à la valeur propre 1.

L'espace propre associé est le noyau de la matrice :

$$\begin{matrix} -0.1 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & -0.4 \end{matrix}$$

CALCUL DU RANG

Son rang est égal à 4 donc d'après le théorème du rang, on a :

$$rg\ f + \dim Ker f = dim\ \mathrm{E}$$

Avec f = A – I et E = 5, cela revient à :

$$5 = rg\ A - I + \dim(Ker(A - I))$$

$$\Leftrightarrow\ 5 = 4 + \dim(Ker(A - I))$$

$$\Leftrightarrow\ \dim(Ker(A - I)) = 1$$

L'espace propre associé à la valeur 1 est de dimension 1, c'est une droite vectorielle.

Les quatre dernières lignes fournissent un vecteur propre simple :

$$U = \begin{matrix} 40 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$$

Le calcul effectif du polynôme caractéristique montre qu'il y a quatre autres zéros simples, de module strictement inferieur à 1 *(voir l'encadré Calcul d'un polynôme caractéristique)*.

La théorie précédente est donc applicable: la suite A_n a une limite non nulle. Inutile de la calculer pour en déduire la limite de la population Z_n.

Nous savons qu'elle existe et cela suffit ! Nous allons voir pourquoi.

Conséquence d'une existence

Notons L la limite de la suite Z_n. Par continuité, comme Z_{n+1}= A Z_n, L vérifie la relation : L = AL,

C'est-à-dire que L est un vecteur propre de A associé à 1 comme démontré précédemment, c'est alors une droite vectorielle donc on n'en déduit que U est colinéaire à L

L'espace propre en question étant de dimension 1, L est colinéaire à U. Autrement dit, il existe un coefficient *a* tel que : L = *a*U.

Pour calculer ce coefficient, remarquons que l'effectif de l'armée est constamment égal à 113 100. Comme celui de U est égal à 58, *a* est le quotient de ces deux nombres, soit 1950.

La limite de l'effectif est donc :

$$L = \begin{pmatrix} 40 \times 1950 \\ 10 \times 1950 \\ 5 \times 1950 \\ 2 \times 1950 \\ 1 \times 1950 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78000 \\ 19500 \\ 9750 \\ 3900 \\ 1950 \end{pmatrix}$$

Ce type de raisonnement se retrouve dans certaines études de dynamiques des populations, ou la transition entre une étape à la suivante peut être représentée matriciellement.

CALCUL DU POLYNOME CARACTERISTIQUE

Le polynôme caractéristique de A est égal à :

CALCUL DU POLYNOME CARACTERISTIQUE

$$x^5 - 3..4x^4 + 4.54x^3 - 2.979x^2 + 0.9612x - 0.1222$$

Qui se factorise en :

$$(x-1)(x^2-0.954628688x+0.2308430252)(x^2-1.445371312x+0.5293640556)$$

La précision sur les coefficients (10^{-10}) suffit pour assurer que le polynôme caractéristique a 5 zéros simple. De plus, les deux trinômes du second degré ci-dessus ont des racines complexes dont le carrée des modules sont 0.2308430252 et 0.5293640556. Les valeurs propres autres que 1 sont donc toutes de module strictement inferieur à 1. On en conclue que d'après ce qu'il a été fait dans « *calcul de limites* » qu'il existe bien une limite à la matrice considérée.