PL1 DE algèbre linéaire 2013-2014 durée 2H.

<u>Documents non autorisés, aucun appareil électronique n'est autorisé y compris la calculatrice.</u>

1) On considère la matrice A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et l'ensemble F= $\{ X \in \mathbb{R}^2,\ AX = 0\}$, résoudre $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$.
2) Déduire de 1) une base de F.
3) Que vaut dimF?

-4) Soit la famille (v_1, v_2, v_3) dont les vecteurs sont définis par leurs coordonnées dans la base standard,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

. Montrer que pout tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, il existe trois réels α, β, γ tels que : $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, vous donnerez α, β, γ en fonction de x,y,z.

-5) D'après 4) , il est clair que (v_1, v_2, v_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Citer un résultat du cours sur les familles de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ qui permet de conclure que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ qu'on notera B.

6) En déduire la matrice de passage P_{SB} où S désigne la base standard de $\mathbb{R}^3$.

---

7) Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation x + 2y + z = 0 et deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, calculer les coordonnées de $\alpha u_1 + \beta u_2$ et montrer que $\alpha u_1 + \beta u_2 \in E$.
8) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
9) Donner une base de E.
10) Que vaut dim E?

_ 11) Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base standard de $\mathbb{R}^3$ et l'application linéaire $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$; $f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$; $f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Ecrire la matrice standard de f.
12) Montrer que f est bijective.

FIN.