LOUBONDO
NZIMBOU
Groupe A
L1

Algèbre linéaire . 20/06/2011

Examen de Validation

66 pts

20/20 Validé

Très bien

Questions de cours

* famille generatrice

* famille libre

$F = \{u_1 \dots u_p\}$

$\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \vec{u_i} = \vec{0}$ On dit alors que la famille F est libre. non

On remarque qu'on peut aussi dire que $\alpha i = \vec{0}$.

* Dimension d'un espace vectoriel E

dim E = card (Base de E) . 1

* Intersection de deux espaces vectoriels F et G

C'est un sous espace vectoriel . 1-

* Somme ~~et~~ ~~un~~ de deux espaces vectoriels

$F+G = \{ C.L \ \forall(\vec{u},\vec{v}) \in E^2, \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \}$

$= \{ \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in E \}$ 1

* Théorème des quatres dimensions

dim F+G = dim F + dim G − dim F∩G. 1

* Noyau Ker φ

$\text{Ker}\,\varphi = \{ \vec{u} \in E \ : \varphi(\vec{u}) = \vec{0}_F \}$ 1-

* <u>Image de φ $\mathrm{Im}\,\varphi$</u>

  $\mathrm{Im}\,\varphi = \{ \vec{v} \in F,\ \exists \vec{u} \in E : \varphi(\vec{u}) = \vec{v} \}$ 1

* <u>Théorème du rang</u>

  $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Rg}\,\varphi = \dim E$ 1

* Soit φ une application linéaire de E dans F telle que

  $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in E^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ X 1

  $\varphi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u}) + \beta\varphi(\vec{v})$

  1

  Si $E = F$ et si φ est bijective on parle alors d'automorphisme.

* <u>matrice antisymétrique</u> dans le cas d'une matrice carrée.

  $({}^tA) = -A$ 1

* <u>Valeur et vecteur propre.</u>

  On dit que λ est une valeur propre de A si

  1) $A(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ 1

  2) $\cancel{(\vec{u})}\ (A - \mathrm{Id}\,\lambda)(\vec{u}) = 0$

  1

  $\vec{u}$ est alors un vecteur associé à λ c'est un vecteur propre.

* <u>rang</u>.

  $\mathrm{rg}\,\varphi = \dim F$ (φ est surjective) 1^-

  $\mathrm{rg}\,\varphi$ = nombre de vecteur colonnes. X

  $\mathrm{Rg} \leq \mathrm{Inf}\,(n, p)$ /

  Rg /

* <u>Cas de Cramer</u>

  On a n equations et p inconnues.

  On est dans le cas de Cramer lorsqu'on a $n = p$ et un déterminant non nul. 1

  $X = A^{-1}B$.

EXERCICE N°2

~~$\vec{a}=(1;1;1;1)$~~ $\vec{b}(2;1;-1;0)$ ~~$\vec{c}(-2;-1;5;0)$~~

$u_{n+2}+3u_{n+1}+2u_n=0$

On pose $u_n=r^n$ 1

pour $n=0$ on a :

$r^2+3r+2=0$ 1

$\Delta=b^2-4ac$

$=(3)^2-4\times(1)\times(2)$

$=9-8$

$\Delta=1$

$\Delta>0$ donc il y a 2 racines réelles distinctes R_1 et R_2

$R_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3+1}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$ 1

$R_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-3-1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$ 1

$\boxed{R_1=-1 \quad R_2=-2}$

$\Delta>0$ on est dans le cas où :

$u_n=Ar_1^n+Br_2^n$ 1

$u_n=A(-1)^n+B(-2)^n$

On sait que $u_0=1$ et $u_1=2$, $\forall n\in\mathbb{N}$

soit

$u_0=A.(-1)^0+B(-2)^0$ 1

$=A\times1+B\times1$ 1

$\begin{cases} u_0=A+B=1 \\ u_1=-A-2B=2 \end{cases}$

$u_0=A+B \iff u_0=1$

$A+B=1$ d'où $A=1-B$

$u_1=A(-1)^1+B(-2)^1$

$=-A-2B$

$u_1=-(1-B)-2B=2$

$=-1+B-2B=2$

$u_1=-1-B=2$

d'où $\boxed{B=-3}$ 1

On a trouvé $B = -3$

or $A = 1 - B$

soit $A = 1 - (-3)$

$= 1 + 3$ 1

$\underline{A = 4}$

Bien

~~Donc $u_n = 4 \times (-1)^n +$~~

Donc $\boxed{u_n = 4 \times (-1)^n - 3(-2)^n}$ 1

EXERCICE N°5

$A = |-x|$

$\underline{|A| = -x}$ 1

$B = \begin{vmatrix} -x & 2 \\ x-1 & 3 \end{vmatrix}$

$|B| = (-x) \times 3 - [2(x-1)]$

$= -3x - (2x - 2)$

$= -3x - 2x + 2$ 1

$\underline{|B| = -5x + 2}$

$|C| = \left|\begin{array}{ccc|cc} -x & 2 & -2 & -x & 2 \\ x-1 & 3 & 2 & x-1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right.$ On utilise la règle de Sarrus.

$|C| = (-x) \times 3 \times 1) + 2 \times 2 \times (-1) + (-2) \times (x-1) \times 0 - (-2) \times 3 \times (-1) - (-x) \times 2 \times 0 - (2(x-1) \times 1)$

$= -3x - 4 + 0 - 6 - 0 - (2x - 2)$

$= -3x - 4 - 6 - 2x + 2$ 1

$\underline{|C| = -5x - 8}$

LOUBONDO
Nzimbou
Groupe A
L1

Algèbre linéaire

Examen de Validation

20/06/2011

EXERCICE n° 5 (Suite).

$$D = \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ \end{array}$$
$$D = \begin{vmatrix} -x & 2 & -2 & -2 \\ x-1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -x & 2 & -2 & x-4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3-C_4 & C_4 \end{array}$$
$$|D| = \begin{vmatrix} -x & 2 & 0 & -2 \\ x-1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -x & 2 & -x+2 & x-4 \end{vmatrix}$$

1

$$|D| = \begin{vmatrix} -x & 2 & -2 \\ x-1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1 Bien

$$= -\left(-1 \times \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 1 \times \begin{vmatrix} -x & 2 \\ x-1 & 3 \end{vmatrix}\right)(-x+2)$$

$$= -\left[\left(-1 \times (10) + 1\left[-x \times 3 - 2(x-1)\right]\right]\right](-x+2)$$

$$= -[(-1 \times 10 + 1\ (-5x+2)](-x+2)$$

$$= -(-10 - 5x + 2)(-x+2)$$

$$= -(-8 - 5x)(-x+2)$$

$$|D| = (8+5x)(-x+2)$$

1

EXERCICE N°4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que B est une matrice triangulaire non

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 1

$$A.B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A.B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $3 \times 1 + (-1) \times 1 + (-1) \times 1 = 3 - 1 - 1 = 3 - 2 = 1$
- $3 \times 1 + (-1) \times 1 + -1 \times 0 = 3 - 1 = 2$
- $0 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 1 = 0 + 2 - 1 = 1$
- $0 \times 1 + 2 \times 1 + (-1) \times 0 =$

A^2 oublié ?

$$2.A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ 1

1

$tr\, A = 3 + 2 + 1 = 6$

$\underline{tr\, A = 6}$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ 1

~~min A~~ = [illegible]

$$\text{min } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$ 1

$$\text{Com } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$ 1

$$^t\text{com } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

1

$$|A| = (-1)^6 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - (-1) \times 0 = 6$$

$|A| \neq 0$ donc il existe un inverse + 1

$$A^{-1} = \frac{^t\text{com } A}{6} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}{6} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$ 1

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 1

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I|$$ 1

1

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \times (1-\lambda)$$

$$\Leftrightarrow (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)$$ 1

$$\varphi(\lambda) = (3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda).$$

Les valeurs propres sont donc

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = 3.$

1 1 1

Verification

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1+2+3 = 6 = \mathrm{tr}\, A$ +1

$\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6 = |A|$ +1

vecteurs propres

~~$\exists\ x, y, z \in E$~~

$$E_1 \left\{ \exists x,y,z \in E^3 : \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

1

$$\begin{cases} 3x - y - z = x \\ 2y - z = y \\ z = z \end{cases}$$

1

$$\begin{cases} 3x - y - z = x \\ -z = y - 2y \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y - z = x \\ -z = -y \\ z = z \end{cases}$$

1

$$\begin{cases} 3x - y \cancel{+ z} - y = x \\ z = y \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = x \end{cases}$$

Donc $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est plus simple

LOUBONDO
Nzambou
Groupe A
L1

Algèbre linéaire

Examen de Validation

20/06/2011

EXERCICE N°4 (suite).

$$E_2 = \left\{ \exists x, y, z \in E^3 \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \lambda_2 \right.$$ 1

$$= \quad '' \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} 3x - y - z = 2x \\ 2y - z = 2y \\ z = 2z \end{cases}$$ 1

$$= \begin{cases} 3x - y - z = 2x \\ \cancel{2y} - z \quad \cancel{2y} - z = 2y - 2y \\ z = 2z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 3x - y - z = 2x \\ z = 0 \\ z = 2z \end{cases}$$ 1

D'où $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ → Je veux bien lire 1 et non -1

1-

$$= \begin{cases} 3x - y = 2x \\ z = 0 \\ z = 2z \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \\ z = 2z \end{cases}$$

$\underline{\underline{x = y}}$

$E_3 \left\{ \exists x,y,z \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right.$ 1

$\left\{ \exists x,y,z \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right.$

$$\begin{cases} 3x - y - z = 3x \\ 2y - z = 3y \\ z = 3z \end{cases}$$ 1

$$\begin{cases} 3x - y - z = 3x \\ -z = y \\ z = 3z \end{cases}$$ 1

Donc $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

Erreur dans le signe ! hélas.

Donc la matrice de passage $P = \begin{array}{c} \vec{e_1} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ 1

$* \ A^n \times X_0 = X_n$

EXERCICE N° 1 :

$\vec{a} = (1 ; 1 ; 1 ; 1)$ $\quad \vec{b} = (2 ; 1 ; -1 ; 0)$ $\quad \vec{c}\ (-2 ; -1 ; 5 ; 0)$

$\vec{d} = (2 ; 1 ; 3 ; 0)$

$$\begin{array}{cccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

début de méthode.

$$\begin{array}{cccc} \vec{a} & \vec{b_1} & \vec{c} & \vec{d} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{b_1} = \vec{b} - \vec{d}$

$$\begin{array}{cccc} \vec{a} & \vec{b_1} & \vec{c_1} & \vec{d} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_1 = \vec{c} - 2\vec{a}$

$$\begin{array}{cccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\Longrightarrow}{\text{même Rang}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; L_3 - L_2$$

$$\begin{array}{cccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \\ \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d_1} = \vec{b} - \vec{d} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\Longrightarrow}{\text{même Rang}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r = 4$ on a 4 vecteurs non nuls et comme pour une matrice carrée $(4,4)$ $Rg = n$.

pivot de Gauss non terminé

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d_1}\}$ est une base de F.

cohérent

$$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b} + (\vec{b} - d)\cancel{+c} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{d} + c$$

L'équation cengendré par cette famille ~~est~~ dans $\mathbb{R}^4$ est.

$$x + 2y + z - t = \{0, 0, -4, 0\}$$

EXERCICE N°3

Soit φ une application de E dans F

φ est injective si dim Ker $\varphi = 0$ 1

φ est surjective si Rg φ = dim F. 1