Cours de Fonctions et Variations I
Lionel Pournin - EFREI
TD n°1 : **Fonctions et suites**

Exercice 1 : Etudier, sans utiliser la dérivation, le sens de variation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

i. $f(x) = x^2$,
ii. $f(x) = x^3$,
iii. $f(x) = \sqrt{x}$,
iv. $f(x) = 3x^2 + 4x + 4$.

Exercice 2 : Trouver les solutions réelles des équations suivantes :

i. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$,
ii. $x - 5\sqrt{x} - 36 = 0$,
iii. $x^3 - 12x + 16 = 0$.

Exercice 3 : Montrer l'égalité :

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 4 : Montrer que la suite $u_n = n$ tend vers $+\infty$ en utilisant la définition formelle.

Exercice 5 : Montrer que chacune des suites suivantes admet pour limite le nombre l proposé :

i. $u_n = 1/n$ et $l = 0$,
ii. $u_n = 1 + 2/n$ et $l = 1$,
iii. $u_n = -n - 4$ et $l = -\infty$,
iv. $u_n = 2n/(n+1)$ et $l = 2$.

Exercice 6 : Montrer que chacune des suites suivantes tend vers une limite à préciser :

i. $u_n = 3/(2\sqrt{n} + 7)$,
ii. $u_n = (n-1)/(n^2+1)$,
iii. $u_n = (n^2-1)/(2n^2+n)$,
iv. $u_n = -(2n+1)/(4n+1)$,
v. $u_n = (2n+1)^2$.

Exercice 7 : Etudier d'abord la limite de la suite géométrique (u_n) puis celle de la suite (v_n) :

i. $u_n = 2^n$, $v_n = 1 + 1/(2^n)$,
ii. $u_n = (1/3)^n$, $v_n = n/4 + (1/3)^n$,
iii. $u_n = (-1/4)^n$, $v_n = 7 + 5(-1/4)^n$,
iv. $u_n = -5^n$, $v_n = 2 - 5^n$.

Exercice 8 : Une suite géométrique (u_n) est croissante et tous ses termes sont négatifs :

1) Montrer que la raison r de cette suite est telle que $0 < r < 1$,
2) On suppose que $u_1u_3 = 4/9$ et $u_1 + u_2 + u_3 = -19/9$. Calculer u_1 et b.

Exercice 9 : Déterminer quatre termes consécutifs d'une suite arithmétique sachant que leur somme est 12 et que la somme de leurs carrés est 116.

Exercice 10 : Soit (u_n) une suite géométrique de raison r. Pour quelles valeurs de r est-ce que (u_n) converge ? Quand (u_n) converge, quelle est sa limite ?

Exercice 11 : Montrer en utilisant la définition formelle de la convergence que si les suites (u_n) et (v_n) tendent vers deux réels l et m, alors $\lim u_n + v_n = l + m$.

Exercice 12 : Montrer en utilisant la définition formelle de la convergence que si les suites (u_n) et (v_n) tendent vers deux réels l et m, alors $\lim u_n.v_n = l.m$.

Exercice 13 : Montrer en utilisant la définition formelle de la convergence que si les suites (u_n) et (v_n) tendent vers deux réels l et m avec $m \neq 0$, alors $\lim u_n/v_n = l/m$.

Exercice 14 : Montrer en utilisant la définition formelle de la convergence que si la suite (u_n) converge vers un réel et que la suite (v_n) tend vers $+\infty$ alors $\lim u_n + v_n = +\infty$. En déduire que si la suite (u_n) converge vers un réel et que la suite (v_n) tend vers $-\infty$ alors $\lim u_n + v_n = -\infty$.

Exercice 15 : Montrer en utilisant la définition formelle de la convergence que si la suites (u_n) converge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ alors $\lim 1/u_n = 0$.

Exercice 16 : Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n},$$

sont adjacentes.

Exercice 17 : Les suites suivantes sont-elles adjacentes ?

i. $u_n = (2n+1)/(n+1)$ et $v_n = (2n+7)/(n+2)$,
ii. $u_n = -1/(4n+1)$ et $v_n = 3/(2n+5)$,
iii. $u_n = 3 + 1/(n+1)$ et $v_n = 3 + 1/(n^2+1)$.

Exercice 18 : Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \frac{n-1}{n+1} \text{ et } v_n = 1 + 2^{-n},$$

sont adjacentes.