Topologie Elémentaire

Licence de Mathématiques
Université Lyon 1

Dragoş Iftimie

Wikipédia : “Le mot « topologie » vient de la contraction des noms grecs topos et logos qui signifient respectivement « lieu » et « étude ». Littéralement, la topologie signifie l'« étude du lieu ». Elle s'intéresse donc à définir ce qu'est un lieu (appelé aussi « espace ») et quelles peuvent en être les propriétés. ”

Table des matières

1 Espaces métriques

Définition. *Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y, z \in X$:*

i) $(d(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ *;*

ii) $d(y,x) = d(x,y)$ *(symétrie) ;*

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire).*

Un espace métrique est un couple (X,d) où X est un ensemble et d est une distance sur X.

Voici quelques propriétés de la distance.

Proposition 1. *Une distance d sur un ensemble X vérifie :*

a) La distance est toujours positive ou nulle :

$$\forall x, y \in X, \ d(x,y) \geq 0.$$

b) "La distance entre les distances est plus petite que la distance" :

$$\forall x, y, z \in X, \ |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z).$$

Démonstration. a) En utilisant successivement i), iii) et ii) on obtient pour $x, y \in X$

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y).$$

b) En utilisant iii) on obtient pour $x, y, z \in X$: $d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$. Par symétrie et en utilisant ii), on a aussi : $d(x,y) - d(x,z) \leq d(z,y) = d(y,z)$. On en déduit $|d(x,z) - d(x,y)| \leq d(y,z)$. □

Exemples d'espaces métriques :

- La droite réelle munie de la valeur absolue : $(\mathbb{R}, d)$ où $d(x,y) = |x - y|$.
- L'espace euclidien muni de la distance euclidienne : $(\mathbb{R}^n, d_2)$ où

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Boules

Définition. *Soit (X,d) un espace métrique, soit $x \in X$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble*

$$B(x,r) = \{y \in X, \ d(x,y) < r\}$$
$$\textit{resp.} \quad B_f(x,r) = \{y \in X, \ d(x,y) \leq r\}.$$

Pour $0 < r < r'$ les inclusions $B(x,r) \subset B_f(x,r) \subset B(x,r')$ sont des conséquences directes de la définition. Dans les exemples ci-dessous on peut voir que ces inclusions sont souvent strictes mais pas toujours.

Parties bornées, fonctions bornées

Définition. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée s'il existe une boule fermée $B_f(x_0, r)$ telle que $A \subset B_f(x_0, r)$,*

$$\forall x \in A, \ d(x_0, x) \leq r.$$

Compte tenu de la remarque ci-dessus sur les inclusions des boules, il est clair que l'on peut remplacer l' adjectif "fermée" par "ouverte". De plus l'inégalité triangulaire entraîne que le caractère borné de A ne dépend pas du choix de x_0 (avec un x'_0 il suffit de remplacer r par $r' = r + d(x_0, x'_0)$).

Définition. *Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Si X est un ensemble on dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est bornée si son image $f(X)$ est bornée. On note $\mathscr{F}_b(X; Y)$ le sous-ensemble de $\mathscr{F}(X; Y)$ des fonctions bornées.*

Autres exemples d'espaces métriques. Les exemples classiques d'espaces métriques sont les espaces normés qui seront définis et étudiés plus loin. Voici maintenant deux exemples d'espaces métriques qui ne sont pas normés.

- Distance triviale : Sur un ensemble X quelconque on peut mettre la distance triviale donnée par
$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Dans ce cas on a $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} = B_f(x, \frac{1}{2}) = B(x, 1)$ tandis que $B_f(x, 1) = X$ est différent de $\{x\} = B(x, 1)$ si X a au moins 2 éléments.
- Soit (X, d) un espace métrique et une application $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante sous-additive et ne s'annulant qu'en 0 :
$$(\varphi(u) = 0) \Leftrightarrow (u = 0)$$
$$\forall u, v \in \mathbb{R}_+, \ \varphi(u) \underset{\text{croissante}}{\leq} \varphi(u + v) \underset{sous-additive}{\leq} \varphi(u) + \varphi(v)$$
Alors $\varphi \circ d$ est une distance sur X. Deux cas particuliers sont intéressants : $\varphi(u) = \min\{1, u\}$ et $\varphi(u) = \frac{u}{1+u}$. cours 1

cours 2

Distance entre deux parties, diamètre

Définition. *Soit (X, d) un espace métrique, et A, B deux parties de X on appelle distance entre A et B la quantité*
$$d(A, B) = \inf\{d(x, y), \ x \in A, y \in B\}.$$
On appelle diamètre d'une partie A de X et on note $Diam(A)$ la quantité

$$Diam(A) = \sup\{d(x, y), \ x \in A, y \in A\}.$$

Exemple. Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $d(A, B) = 0$ tandis que A peut très bien être différent de B. On peut également avoir $d(A, B) = 0$ avec A et B disjoints comme le montre l'exemple suivant : $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ et $B = \{\frac{1}{n+1}, \ n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi la distance entre les parties ne définit pas vraiment une distance sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ (ou $\mathscr{P}(X)$ en général). Il s'agit donc d'un abus de notation et il faut bien interpréter $d(A, B)$ comme l'infimum de la distance entre les points de A et de B.

On vérifie immédiatement qu'une partie A de X est bornée si et seulement si son diamètre est fini.

2 Norme, espaces vectoriels normés

Un exemple important d'espace métrique sur lequel nous reviendrons plus loin est le cas des espaces vectoriels normés.

Définition. *On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\| \ \|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$*

i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(homogénéité),*

ii) $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$,

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \| \ \|)$ où E est un espace vectoriel réel et $\| \ \|$ est une norme sur E.

La proposition suivante précise en quel sens les espaces vectoriels normés sont des espaces métriques. Il s'ensuit que toutes les propriétés des distances données plus haut ont une traduction en terme de norme dans les espaces vectoriels normés (En particulier, comme pour les distances il n'est pas nécessaire de supposer la norme positive ou nulle ; c'est une conséquence des axiomes i), ii) et iii)).

Proposition 2. *Si $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé alors la quantité $d(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E.*

Démonstration. Il est clair que les hypothèses i) avec $\lambda = 0$ et ii) pour la norme $\| \ \|$ entraîne la propriété i) de la distance d. La propriété i) avec $\lambda = -1$ pour la norme entraîne la propriété ii) pour la distance. L'inégalité triangulaire suit immédiatement. □

Exemples d'espaces normés.

a) La valeur absolue (ou le module) $| \ |$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

b) La quantité

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pour } p < +\infty \\ \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| & \text{pour } p = +\infty. \end{cases}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

c) La norme

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pour } p < +\infty \\ \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| & \text{pour } p = +\infty. \end{cases}$$

sur l'espace des suites ℓ^p :

$$\ell^p = \{x = (x_i)_{i \geq 0} \ ; \ \|x\|_p < \infty\}.$$

d) Norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{F}_b(X; \mathbb{R})$: Soit X un ensemble on munit $\mathscr{F}_b(X; \mathbb{R})$ de la norme

$$\forall f \in \mathscr{F}_b(X; \mathbb{R}), \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Il est clair que cette norme coïncide avec la norme $\| \ \|_\infty$ définie plus haut si X est fini.

Plus généralement, si X est un ensemble et si $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé, on peut définir une norme de la convergence uniforme sur $\mathscr{F}_b(X; E)$ en posant

$$\forall f \in \mathscr{F}_b(X; E), \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

e) Soit I un intervalle fermé bornée de $\mathbb{R}$. La quantité

$$C^0(I,\mathbb{R}) \ni f \mapsto \|f\|_{L^p} = \left(\int_I |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

définit une norme sur $C^0(I,\mathbb{R})$ (= l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$).

Proposition 3 (Inégalité de Minkowski)**.**

a) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ nous avons que

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

b) Soit I un intervalle fermé bornée de $\mathbb{R}$. Pour tout $f, g \in C^0(I,\mathbb{R})$ nous avons que

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}.$$

Démonstration. Voici les étapes de la preuve de la partie a).

- On montre dans un premier temps que pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}a^q.$$

  Ceci est une conséquence de la convexité de la fonction $x \to e^x$.
- Inégalité de Hölder : On montre ensuite que pour $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots b_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

  On commence par montrer cette relation dans le cas particulier où $\sum_i^n |a_i|^p = \sum_{i=1}^n |b_i|^q = 1$, puis on la déduit dans le cas général.
- En partant de $|a_i + b_i|^p \leq |a_i + b_i|^{p-1}(|a_i| + |b_i|)$, on montre enfin que pour $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

La preuve de la partie b) est similaire. □

cours 2

cours 3

3 Ensembles ouverts, fermés

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition. *On appelle* ***ouvert de*** (X, d) *toute partie O de X qui est vide ou qui vérifie*

$$\forall x \in O, \exists r > 0, \ B(x,r) \subset O.$$

On appelle ***voisinage*** *de x dans X, toute partie de X contenant un ouvert contenant x. De manière équivalente :*

$$\mathscr{V}(x) = \{V \in \mathscr{P}(X), \ \exists r > 0, \ B(x,r) \subset V\}.$$

Proposition 4. *L'ensemble des ouverts d'un espace métrique vérifie les propriétés suivantes*

(O1) *Toute réunion d'ouverts est un ouvert,*

(O2) *Une intersection* ***finie*** *d'ouverts est un ouvert,*

(O3) *X et $\emptyset$ sont des ouverts.*

Les trois propriétés ci-dessus définissent ce qu'on appelle une topologie. Les espaces topologiques généraux ne seront cependant pas étudiés dans ce cours. On se contentera des espaces normés, et dans une moindre mesure des espaces métriques.

Proposition 5. *Une boule ouverte est un ensemble ouvert.*

Démonstration. Soit $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte de (X, d). Soit $x \in B(x_0, r_0)$. On a $d(x_0, x) < r_0$ et on pose $\rho = \frac{r_0 - d(x_0,x)}{2}$. Alors la boule $B(x, \rho)$ est incluse dans $B(x_0, r_0)$. En effet pour $y \in B(x, \rho)$ on a

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + \frac{r_0 - d(x_0, x)}{2} = \frac{r_0 + d(x_0, x)}{2} < r_0.$$

□

Corollaire. *Un ouvert de (X, d) est une union quelconque de boules ouvertes.*

Démonstration. Soit O un ouvert de (X, d). Pour tout $x \in O$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset O$ (Définition 3). On en déduit $O = \cup_{x \in O} B(x, r_x)$. □

Définition. *On appelle **fermé** toute partie de X dont le complémentaire est un ouvert.*

On déduit de (O1)(O2) et (O3) par passage au complémentaire les propriétés :

Proposition 6. *La famille de tous les fermés vérifie*

(F1) *Toute intersection de fermés est un fermé.*

(F2) *Une réunion **finie** de fermés est un fermé.*

(F3) *$\emptyset$ et X sont des fermés.*

Proposition 7. *Dans un espace métrique (X, d), toute boule fermée est un fermé.*

Démonstration. Soit $B_f(x_0, r_0)$ une boule fermée de (X, d). Il s'agit de montrer que $\complement_X B_f(x_0, r_0)$ est un ouvert. Soit $x \notin B_f(x_0, r_0)$. On a $d(x_0, x) > r_0$ et on pose $\rho = \frac{d(x_0,x) - r_0}{2}$. Alors la boule $B(x, \rho)$ est incluse dans $\complement_X B_f(x_0, r_0)$. En effet pour $y \in B(x, \rho)$ on a

$$d(x_0, x) - d(x_0, y) \leq |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leq d(x, y) < \rho = \frac{d(x, x_0) - r_0}{2}$$

d'où l'on tire

$$r_0 < \frac{d(x_0, x) + r_0}{2} = d(x_0, x) - \frac{d(x_0, x) - r_0}{2} < d(x_0, y).$$

Cette dernière inégalité dit explicitement $y \in \complement_X B(x_0, r_0)$. □

Exemples.

a) Dans $\mathbb{R}$ les intervalles fermés $[a, b]$, $-\infty < a \leq b < +\infty$ sont fermés.

b) Les intervalles $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ sont aussi des fermés dans $\mathbb{R}$.

c) Les intervalles $[a, b[$ ne sont ni ouverts ni fermés.

4 Adhérence, intérieur, extérieur, frontière

Définition. *Soit A une partie de X et soit x un élément de X. On dit que*

- *x est **adhérent** à A si tout voisinage V de x dans X contient un point de A.*
- *x est un **point d'accumulation** de A si tout voisinage V de x dans X contient un point de A différent de x.*
- *x est un **point isolé** de A s'il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$.*
- *x est **intérieur** à A si A est un voisinage de x dans X, $A \in \mathscr{V}(x)$.*
- *On appelle **adhérence** de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A.*
- *On appelle **intérieur** de A, et on note $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.*
- *On appelle **frontière** de A $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A}$.*
- *L'ensemble A est dit **dense** dans X si $\overline{A} = X$.*

Proposition 8. *Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X.*

a) L'adhérence $\overline{A}$ de A est le plus petit fermé de X contenant A. L'ensemble A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

b) L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A, $\overset{\circ}{A} = \underset{O \text{ ouvert},\ O \subset A}{\cup} O$. L'ensemble A est ouvert si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.

c) On a $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. De plus $(\overset{\circ}{A}, Fr(A), \overset{\circ}{\widehat{\complement_X A}})$ forme une partition de X.

Démonstration. Partie a). On écrit la définition de $\overline{A}$ de façon ensembliste et on passe au complémentaire

$$\overline{A} = \{x \in X,\ \forall V \in \mathscr{V}(x),\ A \cap V \neq \emptyset\} = \complement_X \{x \in X,\ \exists V \in \mathscr{V}(x),\ A \cap V = \emptyset\}.$$

En utilisant la définition des voisinages, on obtient

$$\overline{A} = \complement_X \{x \in X\ \exists O \text{ ouvert},\ A \cap O = \emptyset\} = \complement_X \left(\underset{O \text{ ouvert},\ O \cap A = \emptyset}{\cup} O \right).$$

Ainsi $\overline{A} = \underset{O \text{ ouvert},\ O \cap A = \emptyset}{\cap} \complement_X O = \underset{F \text{ fermée},\ A \subset F}{\cap} F$ est le plus petit fermé contenant A.

Partie b). Il suffit d'écrire la définition de l'intérieur de façon ensembliste et d'utiliser la définition des voisinages

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A,\ A \in \mathscr{V}(x)\} = \{x \in A,\ \exists O \in \mathscr{O},\ x \in O \subset A\} = \underset{O \text{ ouvert},\ O \in A}{\cup} O.$$

Pour une partie A de X on écrit

$$\complement_X \overset{\circ}{A} = \complement_X \left(\underset{O \text{ ouvert},\ O \in A}{\cup} O \right) = \underset{O \text{ ouvert},\ O \in A}{\cap} \complement_X O = \underset{F \text{ fermé},\ \complement_X A \subset F}{\cap} F = \overline{\complement_X A}.$$

La deuxième égalité s'obtient par passage au complémentaire.

Partie c). Pour une partie A de X on a

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A} = \overline{A} \cap \complement_X \overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Ainsi $(\overset{\circ}{A}, Fr(A))$ forme une partition de $\overline{A}$ tandis que $(\overline{A}, \complement_X \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{\complement_X A}})$ est une partition de X. $\square$

Exemples.

a) Dans $\mathbb{R}$ on considère l'ensemble $A = \{\frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$. Le point $\frac{1}{2}$ est un point isolé de A, il est adhérent à A mais n'est pas point d'accumulation. Le point 0 n'appartient pas à A mais il est adhérent à A. C'est un point d'accumulation de A.

b) Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ et des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

c) Sur un ensemble X non vide muni de la distance triviale (distance discrète). On a

$$\overline{B(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\}, \quad B_f(x,1) = X, \quad \overset{\circ}{B}(x,1) = \{x\} \quad \text{et} \ Fr(B(x,1)) = \emptyset.$$

On voit en particulier que si X a au moins 2 éléments alors l'adhérence de la boule ouverte de rayon 1 n'est pas la boule fermée de rayon 1. Cela ne peut pas arriver dans un espace normé ou l'adhérence de la boule ouverte est toujours la boule fermée.

5 Limites et continuité

Définition. *Soit (X, d) un espace métrique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et soit $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x, et on note $x_n \to x$, quand n tend vers l'infini si $d(x_n, x) \to 0$ quand $n \to \infty$. De manière équivalente,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_\varepsilon, \quad d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

Remarque. *Dans $\mathbb{R}$, la convergence définie ci-dessus coïncide avec la convergence usuelle.*

Définition. *Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques et $f : X \to X'$ une application.*

- *On dit que f admet la limite b au point a, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ si $x_n \to a$ entraîne que $f(x_n) \to b$.*
- *On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*
- *On dit que f est continue (sur X) si f est continue en tout point.* cours 3

cours 4

Proposition 9. *Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques et $f : X \to X'$ une application. Alors f est continue si et seulement si l'image inverse d'un ouvert et un ouvert. Ou encore si et seulement si l'image inverse d'un fermé est un fermé.*

6 Applications linéaires continues

Proposition 10. *Soit $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E .$$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est une application linéaire continue de E dans F, il existe $\rho > 0$ tel que la boule fermée de E, $B_{f,E}(0, \rho)$, soit incluse dans $f^{-1}(B_{f,F}(0, 1))$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, le vecteur $\frac{\rho}{\|x\|_E} x$ appartient à $B_{f,E}(0, \rho)$ d'où

$$\frac{\rho}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F = \left\| f\left(\frac{\rho}{\|x\|_E} x\right)\right\|_F \leq 1.$$

Il suffit de prendre $M = \frac{1}{\rho}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si on a la constante M alors on a

$$\forall x, y \in E,\ \|f(y) - f(x)\|_F = \|f(y - x)\|_F \leq M \|y - x\|_E$$

et l'application linéaire f est Lipschitzienne. $\square$

Remarque. *Toute application linéaire continue $f : E \to F$ est Lipschitzienne.*

Exemples.

a) Si on munit $\mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$, alors la forme linéaire $f \to f(1/2)$ est continue.

b) Même exemple mais en remplaçant la norme $\|\cdot\|_\infty$ par la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$. La forme linéaire $f \to f(1/2)$ n'est pas continue.

Voici une application à l'équivalence des normes.

Définition (équivalence)**.**

- *Deux distances d, d' sur un même ensemble X sont dites métriquement équivalentes s'il existe $C, C' > 0$ tels que $Cd(x,x') \le d'(x,x') \le C'd(x,x')$ pour tout $x, x' \in X$.*
- *Deux distances d, d' sur un même ensemble X sont dites topologiquement équivalentes si les ouverts associés sont les mêmes.*
- *Deux normes $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ sur un même espace vectoriel X sont dites équivalentes s'il existe $C, C' > 0$ tels que $C\|x\| \le \|x\|' \le C'\|x\|$ pour tout $x \in X$.*

Comme pour les distances, on pourrait définir la notion de normes topologiquement équivalentes. Il se trouve que cette notion n'apporte rien de nouveau par rapport à la notion d'équivalence définie ci-dessus.

Proposition 11. *Deux normes sur un espace vectoriel E définissent les mêmes ouverts si et seulement si elles sont équivalentes.*

Démonstration. Deux normes sont topologiquement équivalentes si l'application Id est bicontinue. Mais comme Id est linéaire cela entraîne qu'elle est bilipschitzienne et donc que les normes sont équivalentes. □

Définition. *Les normes $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$ étant fixées, on note $\mathscr{L}(E;F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On appelle* ***dual topologique*** *de E et on note $E' = \mathscr{L}(E;\mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires continues sur E.*

Proposition 12. *La quantité*

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \inf\{M\ ;\ \forall x\in E, \|f(x)\|_F \le M\,\|x\|_E\}$$

est une norme sur $\mathscr{L}(E;F)$. cours 4

cours 5

On termine avec une estimation de la norme de la composée de deux applications linéaire continues.

Proposition 13. *Si $(E, \|\ \|_E)$, $(F, \|\ \|_F)$ et $(G, \|\ \|_G)$ sont trois espaces vectoriels normés alors pour $f \in \mathscr{L}(E;F)$ et $g \in \mathscr{L}(F;G)$ la composée $g\circ f$ appartient à $\mathscr{L}(E;G)$ et on a $\|g\circ f\| \le \|g\|\,\|f\|$.*

Démonstration. Il est clair que la composée $g \circ f$ est linéaire et continue. De plus pour $x \in E$ on a

$$\|g\circ f(x)\|_G = \|g\,[f(x)]\|_G \le \|g\|\,\|f(x)\|_F \le \|g\|\,\|f\|\,\|x\|_E\,,$$

d'où la majoration de la norme de $g \circ f$. □

7 Espaces complets

Jusqu'à présent on pouvait parler de la convergence d'une suite seulement quand on connaissait a priori la limite. La complétude qui est une notion métrique permet de prédire l'existence d'une limite à partir de propriétés de la suite.

Suites de Cauchy

Définition. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X,d) est* **de Cauchy** *si elle vérifie*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall m,n\geq N_\varepsilon,\ d(x_m,x_n)\leq\varepsilon.$$

Autrement dit $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(x_n,x_m)=0.$

Voici quelques propriétés des suites de Cauchy.

Proposition 14. *Une suite de Cauchy est toujours bornée.*

Démonstration. Il existe N_1 tel que : $\forall m,n\geq N_1, d(x_m,x_n)\leq 1$. En particulier on a pour $n\geq N_1$, $d(x_n,x_{N_1})\leq 1$ et en posant $M=\max_{k<N_1} d(x_k,x_{N_1})$:

$$\forall n\in\mathbb{N}, d(x_n,x_{N_1})\leq\max\{M,1\}.$$

□

L'argument suivant est très commode.

Proposition 15. *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (X,d) telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=l\in X$. Pour $\varepsilon>0$ il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ et $k_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tels que

$$\left(\forall m,n\geq N_\varepsilon,\ d(x_m,x_n)\leq\frac{\varepsilon}{2}\right)\text{et }\left(\forall k\geq k_\varepsilon,\ d(x_{n_k},l)\leq\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On prend $N'_\varepsilon=\max\{N_\varepsilon,n_{k_\varepsilon}\}$ et on a pour $n\geq N'_\varepsilon$

$$d(x_n,l)\leq d(x_n,x_{n_{k_\varepsilon}})+d(x_{n_{k_\varepsilon}},l)\leq\varepsilon.$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} x_n=l$. □

Proposition 16. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de (X,d) telle que $\lim_{n\to\infty} x_n=l\in X$. Pour $\varepsilon>0$ il existe $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que $d(x_n,l)\leq\frac{\varepsilon}{2}$ pour $n\geq N_\varepsilon$. On a alors

$$\forall m,n\geq N_\varepsilon,\ d(x_m,x_n)\leq d(x_m,l)+d(l,x_n)\leq\varepsilon$$

et la suite est de Cauchy. □

Un espace métrique complet est un espace métrique ou la réciproque est vraie.

Définition. *On dit que l'espace métrique (X,d) est* **complet** *si toute suite de Cauchy converge.*

Exemples.

a) $\mathbb{R}$ est complet. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Elle est bornée : $\forall n\in\mathbb{N},\ |x_n|\leq M$. On peut donc extraire une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}$ (puisque $[-M,M]$ est compact). Mais alors la Proposition 15 donne la convergence de toute la suite. On peut aussi faire une démonstration sans utiliser l'argument de compacité et en revenant à la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$. Il suffit pour cela de montrer que les suites $y_n=\inf_{p\geq n} x_p$ et $z_n=\sup_{p\geq n} x_p$ sont des suites adjacentes.

b) $\mathbb{R}^n$ est complet. Résulte de la complétude de $\mathbb{R}$ en raisonnant composante par composante.

c) $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. On peut approcher un irrationnel $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ par une suite de rationnels $x_n = \frac{p_n}{q_n}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc dans $\mathbb{Q}$. Elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ puisque $r \notin \mathbb{Q}$.

d) Voici maintenant un exemple d'espace normé qui n'est pas complet : $C^0([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme L^1.

Un autre exemple est donné par la proposition suivante.

Théorème 17. *Si X est un ensemble et (X', d') est un espace métrique complet, alors $\mathscr{F}_b(X; X')$ muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathscr{F}_b(X; X'), d_\infty)$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N_\varepsilon,\ \sup_{x\in X} d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon.$$

En particulier pour $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X', d') qui est complet et admet donc une limite dans X' que l'on note $f(x)$.
On a ainsi défini une fonction $f : X \to X'$. Vérifions qu'elle est bornée sur X. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $d_\infty(f_{N_1}, f_n) \leq 1$ pour tout entier $n \geq N_1$. On a alors pour $y_0 \in X'$ (on note également y_0 la fonction constante $X \to X'$ associée)

$$\forall x \in X,\ \forall n \geq N_1,\ d'(y_0, f_n(x)) \leq d'(y_0, f_{N_1}(x)) + 1 \leq d_\infty(y_0, f_{N_1}) + 1$$

et en prenant la limite $n \to \infty$ (pour $x \in X$ fixé) on obtient

$$\forall x \in X,\ d'(y_0, f(x)) \leq d_\infty(y_0, f_{N_1}) + 1$$

et $f \in \mathscr{F}_b(X; X')$.
Vérifions enfin que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathscr{F}_b(X; X')$ pour la distance de la convergence uniforme d_∞. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, on a l'inégalité $d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$. On prend la limite $m \to \infty$ à $x \in X$ fixé et on obtient

$$\forall x \in X,\ \forall n \geq N_\varepsilon,\ d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

ce qui s'écrit aussi, puisque N_ε ne dépend pas de x, $d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$. Ainsi on a $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathscr{F}_b(X; X'), d_\infty)$. □

Remarque. *La démonstration ci-dessus procède d'une méthode assez générale pour établir la complétude d'un espace métrique : 1) Identifier une limite possible pour la suite de Cauchy (souvent en utilisant un résultat de complétude connu et en faisant intervenir une distance mieux connue) ; 2) Vérifier que l'éventuelle limite est bien dans l'ensemble 3) Vérifier que la suite converge bien vers cette limite pour la distance de départ. Pour 2) et 3) il faut bien faire attention aux dépendances par rapport à ε (et $x \in X$ pour des espaces de fonctions) et travailler avec des inégalités larges (plus facile pour passer à la limite).* cours 5

cours 6

Propriétés des espaces complets

Définition. *Soit (X, d) un espace métrique. Un sous espace de (X, d) est un sous-ensemble $A \subset X$ muni de la distance d (ou plutôt de sa restriction à $A \times A$). Un sous espace A de (X, d) est dit complet lorsque (A, d) est un espace métrique complet. De manière équivalente, le sous-espace A est complet si et seulement si toute suite de Cauchy avec des éléments de A converge vers un élément de A.*

Proposition 18. *Soit (X, d) un espace métrique.*

a) Tout sous-espace complet est fermé.

b) Si (X, d) est complet, alors les sous-espaces complets sont les fermés.

c) Une intersection quelconque de sous-espaces complets est complète.

d) Une union finie de sous-espaces complets de (X, d) est complète.

e) Si (X, d) est complet et si (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides de X dont les diamètres tendent vers 0, l'intersection des (F_n) contient un point et un seul.

Démonstration. a) Soit F une partie d'un espace métrique complet (X, d).
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons F fermé. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (F, d), c'est une suite de Cauchy de (X, d). Elle admet donc une limite dans X. Mais comme F est fermé cette limite appartient à F.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons (F, d) complet. Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F admet une limite $l \in X$, alors elle est de Cauchy dans (X, d) et donc dans (F, d). Comme (F, d) est complet elle converge dans F et comme (X, d) est séparé cela entraîne $l \in F$. F est fermé.

b) L'intersection $\cap_{i\in I} F_i$ est une intersection de fermés donc un fermé de l'espace complet (F_{i_0}, d). C'est un complet.

c) Soit $(A_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ une famille finie de parties complètes de (X, d). Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (X, d), il existe $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ et une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n_k} \in A_{i_0}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (A_{i_0}, d) qui est complet. On a trouvé une sous-suite convergente et on conclut avec la Proposition 15. □

Corollaire. *Si (X, d) est un espace métrique et (X', d') est un espace métrique complet, l'espace $\mathscr{C}_b^0(X; X')$ des fonctions continues bornées de X dans X' muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathscr{C}_b^0(X; X')$ est une partie fermée de l'espace métrique complet $(\mathscr{F}_b(X; X'), d_\infty)$. □

8 Espaces de Banach

Définition. *On appelle **espace de Banach** un espace vectoriel normé complet.*

Exemples.

a) Si (X, d) est un espace métrique et $(E, \|\ \|_E)$ est un espace de Banach alors les espaces $\mathscr{F}_b(X; X')$ et $\mathscr{C}_b^0(X; X')$ munis de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E$ sont des espaces de Banach.

b) L'espace $\mathscr{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de $\|\ \|_\infty$ est un espace de Banach.

c) L'espace $\mathscr{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\ \|_1$ n'est pas un espace de Banach.

La complétude d'un espace vectoriel normé est très utile pour étudier la convergence des séries.

Définition. *Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$ on dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est **absolument convergente** (ou **normalement convergente**) si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < +\infty$.*

Dans la définition ci-dessus on ne dit pas que la série converge mais que la série des normes converge. La convergence de la série est éventuellement une conséquence du

Théorème 19. *Un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente converge dans E,*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty\right) \Rightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in E\right).$$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(E, \| \, \|_E)$ complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty$. Alors les sommes $S_N = \sum_{n\leq N} x_n$ vérifient pour $M \geq N$

$$\|S_M - S_N\|_E = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} x_n \right\|_E \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\|_E \, .$$

Ainsi, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $(E, \| \, \|)$ et donc converge.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que toute série absolument convergente converge. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(E, \| \, \|_E)$. On peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| \leq 2^{-k}$ (il suffit de prendre $n_k = N_{2^{-k}}$). On pose alors $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ est absolument convergente donc converge dans $(E, \| \, \|_E)$ par hypothèse. Or on a $x_{n_{k+1}} - x_{n_0} = \sum_{j=0}^{k} u_j$ et on en déduit que la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \| \, \|_E)$. Avec la Proposition 15 on obtient $\lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0} + \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$. □

Prolongement

Définition. *Une fonction entre deux espaces métriques $f : (X, d) \to (X', d')$ est dite uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $d(x, y) < \delta$ implique $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Théorème 20 (Théorème de prolongement)**.**

a) Soit (X, d), (X', d') deux espaces métriques, avec (X', d') complet et soit $Y \subset X$. Si une application $f : Y \to X'$ est uniformément continue et si Y est dense dans X, alors f admet un unique prolongement par continuité $\overline{f} : X \to X'$.

b) Si $(E, \| \, \|_E)$ est un espace vectoriel normé, $(F, \| \, \|_F)$ est un espace de Banach et si D est un sous-espace vectoriel dense de E, toute application linéaire continue $(D, \| \, \|_E) \to (F, \| \, \|_F)$ se prolonge en une application linéaire continue de $(E, \| \, \|_E)$ dans $(F, \| \, \|_F)$.

Démonstration. a) Il faut d'abord montrer que pour tout $x \in X$ la limite $\lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in Y}}$ existe dans X'. Comme (X, d) est un espace métrique on peut utiliser les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y telles que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \in X$. Une telle suite est nécessairement de Cauchy dans (X, d) et donc dans(Y, d). Comme f est uniformément continue, la suite image $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X', d') qui est complet. Par conséquent cette suite image $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (X', d') et ce pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y convergeant vers x. Il n'est pas difficile de s'assurer de l'indépendance de la limite par rapport au choix de la suite et de conclure que la limite $\lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in Y}} f(y)$ existe.

b) On sait que les applications linéaires continues sont nécessairement Lipschitziennes et donc uniformément continues. Il suffit donc d'appliquer la première partie du théorème. □ cours 6

cours 7

9 Rudiments de compacité

Le terme de compacité évoque une idée de petitesse. Ainsi dans un ensemble compact, il n'est pas possible de mettre une infinité de points sans qu'ils s'accumulent quelque part. On verra aussi que les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées. En fait de petitesse, les compacts sont définis par une propriété de finitude topologique. L'importance de la notion de compacité vient du fait qu'elle permet de ramener des problèmes de complexité apparemment infinie à l'étude d'un nombre fini de cas.

Définition. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie de X.*

- *On dit que A est un ensemble compact si toute suite de A admet une sous-suite convergente dans A (la limite appartient à A).*
- *On dit que A est un ensemble relativement compact si son adhérence est compacte. De manière équivalente (cf proposition ci-dessous), A est relativement compact si toute suite de A admet une sous-suite convergente (vers une limite qui n'est pas forcément dans A).*

En fait, la définition classique d'un ensemble compact fait appel à la propriété de Borel-Lebesgue qui dit que de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. Dans le cas des espaces métriques, la définition ci-dessus est équivalente et bien plus aisée à manipuler.

Proposition 21. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie de X. On a que $\overline{A}$ est compact si et seulement si toute suite de A admet une sous-suite convergente (vers une limite qui n'est pas forcément dans A).*

Voici quelques propriétés des compacts.

Proposition 22. *Soit (X, d) un espace métrique.*

a) Tout ensemble compact est borné, fermé et complet.

b) Une union finie de compacts est un compact.

c) Une intersection arbitraire de compacts est un compact.

d) Si l'espace entier X est compact, alors les parties compactes de X sont les fermés.

e) Toute suite décroissante de compacts non vides, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $K_{n+1} \subset K_n$, $K_n \neq \emptyset$, a une intersection non vide.

Exemples.

a) L'ensemble vide $\emptyset$ est compact.

b) Tout ensemble fini est compact.

c) Dans $\mathbb{R}$, les ensembles compacts sont les ensembles fermés et bornés.

d) Dans $\mathbb{Q}$, l'ensemble $\{q \in \mathbb{Q}\ ;\ 2 \leq q^2 \leq 3\}$ est fermé et borné mais non compact.

e) La sphère unité de l'espace $C\big([0,1];\mathbb{C}\big)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas compacte. (Prendre la suite $f_n(t) = e^{2i\pi nt}$)

f) Dans ℓ^2 l'ensemble $\{x = (x_n) \in \ell^2\ ;\ |x_n| \leq \frac{1}{n}\ \forall n\}$ est compact.

Fonctions continues et compacts

Théorème 23. *a) L'image d'un compact par une application continue est un ensemble compact.*

b) Toute fonction continue sur un espace compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes supérieure et inférieure.

Il est bien sûr faux de dire que l'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact. Par exemple l'image réciproque de $[0,1]$ par la projection sur l'axe des abscisses dans $\mathbb{R}^2$ est $[0,1] \times \mathbb{R}$ qui n'est pas compact. En revanche, c'est toujours un fermé. Le fait que l'image réciproque d'un compact soit un compact est une propriété que l'on rencontre ; les applications qui la vérifie sont dites propres. Nous n'utiliserons pas cette notion dans la suite.

Compact et uniforme continuité

Théorème 24. ***(Heine)*** *Toute application continue sur un compact est uniformément continue. Plus précisément, si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques avec (X, d) compact, toute application continue $f : X \to X'$ est uniformément continue.* cours 7

cours 8

10 Point fixe des applications contractantes

Théorème 25 (Picard)**.** *Soit (X,d) un espace métrique complet. Si l'application $f : X \to X$ est une application* ***contractante***

$$\exists \alpha < 1 \quad \forall x, y \in X,\ d\left(f(y), f(x)\right) \leq \alpha\ d(y,x)$$

alors elle admet un unique point fixe $x \in X$, $f(x) = x$. De plus toute suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ converge géométriquement vers x

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x) \leq d(x_0, x)\alpha^n.$$

Démonstration. 1) Unicité : Supposons que $x_1, x_2 \in x$ soient deux points fixes de f. On a alors

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq \alpha d(x_2, x_1).$$

L'inégalité $(1-\alpha)d(x_1,x_2) \leq 0$ avec $\alpha < 1$ entraîne $x_2 = x_1$.
2) Existence : On va construire x par une méthode d'approximation successive. On considère une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 \in X$. Pour $m, n \in \mathbb{N}$ on a en supposant $n \geq m$

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n} d\left(x_{k+1}, x_k\right) = \sum_{k=m}^{n-1} d\left[f^k(x_1), f^k(x_0)\right].$$

La propriété de contraction avec $\alpha < 1$ donne

$$d\left[f^k(x_1), f^k(x_0)\right] \leq \alpha d\left[f^{k-1}\left(x_1\right), f^{k-1}\left(x_0\right)\right] \leq \alpha^k d(x_1, x_0)$$

puis

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

Pour $\varepsilon > 0$, on prend $N_\varepsilon > \frac{\ln((1-\alpha)\varepsilon/d(x_0,x_1))}{\ln(\alpha)}$ et on a pour $m, n \geq \varepsilon$, $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X,d). Elle admet une limite $x \in X$ qui doit vérifier puisque f est continue $f(x) = x$.
3) Convergence géométrique : Pour une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, x) = d\left[f^n(x_0), f^n(x)\right] \leq \alpha^n d(x_0, x)$$

et la convergence vers x est géométrique de raison α. □

Exemple. Solution du système d'équations $\sin(x+y) = 3x$, $\cos(x-y) = 3y$.

Autres versions du théorème de Picard

Théorème 26 (Point fixe à paramètre)**.** *Soit (X,d) un espace métrique complet et (Y,d') un espace métrique. Si l'application $f = f(x,\lambda) : X \times Y \to X$ est une application contractante uniformément par rapport à λ :*

$$\exists \alpha < 1 \quad \forall x, y \in X, \lambda \in Y \quad d\left(f(y,\lambda), f(x,\lambda)\right) \leq \alpha\ d(y,x)$$

alors son unique point fixe x_λ, $f(x_\lambda, \lambda) = x_\lambda$ dépend continûment de λ. Plus précisément, l'application $Y \ni \lambda \mapsto x_\lambda \in X$ est continue.

Exemple. La solution du système d'équations $\sin(x+y) = 3x + 2 - 2\lambda$, $\cos(x-y) = 3y + 2\lambda - 1$ dépend continûment de λ.

Théorème 27 (Version faible du théorème de Picard)**.** *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f^N = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{N fois}$ est contractante.*

Alors f admet un unique point fixe $x \in X$ et toute suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ converge vers x. cours 8

cours 9

11 Dimension finie : équivalence des normes et compacité

Les espaces normés de dimension finie ont un certain nombre de propriétés qui les distinguent des autres espaces normés. Nous les étudions dans cette partie.

Une caractérisation utile de la compacité en dimension finie est donnée par le théorème de Bolzano-Weierstrass qui affirme que les compacts en dimension finie sont les ensembles fermés et bornés. Commençons par le cas de la dimension 1.

Théorème 28 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** *Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, est compact.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[a, b]$, on va extraire une sous-suite convergente par une méthode de dichotomie. On construit la suite de couple $((a_k, b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- On pose $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$. Si il existe un nombre infini d'indices n tels que $x_n \in [a_k, c_k]$ on prend $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$. Sinon on prend $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$.

On a formé ainsi deux suites adjacentes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Une conséquence de la propriété de la borne supérieure est que deux suites adjacentes convergent et ont même limite. Cette limite est aussi limite de la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. □

Comme on l'a déjà vu dans les exemples d'ensembles compacts, le théorème précédent implique le corollaire suivant :

Corollaire. *Dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, les ensembles compacts sont les ensembles fermés et bornés.*

Voici enfin le théorème principal de cette partie.

Théorème 29. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors*

a) Toutes les normes sont équivalentes.

b) E est complet.

c) Tout sous-espace vectoriel est fermé.

d) (Bolzano-Weierstrass) *Les ensembles compacts de E sont les ensembles fermés et bornés.*

e) Toute application linéaire à valeurs dans un autre espace normé (pas forcément de dimension finie) est continue.

Démonstration. a) On peut supposer que $E = \mathbb{R}^n$. Soit $N(x) = \|x\|$. On montre dans un premier temps que l'application N est continue de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On remarque ensuite que la sphère unité de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte, donc N est bornée sur cette sphère unité et atteint ses bornes. Cela exprime le fait que la norme N est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

b) Evident car $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

c) Evident car tout sous-espace vectoriel est de dimension finie, donc complet, donc fermé.

d) Evident par équivalence des normes car les suites convergentes, les ensembles fermés et les ensembles bornés sont les mêmes pour deux normes équivalentes. □

Exemples.

a) En dimension infinie, une application linéaire n'est pas forcément continue. Par exemple, l'opérateur de dérivation est linéaire mais non continu sur l'espace des polynômes muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

b) En dimension infinie, les ensembles fermés bornés ne sont pas forcément compacts. Par exemple, dans $C^0[0,2\pi];\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ la sphère unité n'est pas compacte (la suite $f_n(t) = e^{int}$ ne peut pas avoir de sous-suite convergente).

Proposition 30. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé (pas forcément de dimension finie). Tout sous-espace de dimension finie est fermé et complet.*

Démonstration. Tout sous-espace de dimension finie est complet par le théorème précédent. Il est aussi fermé car tout ensemble complet est fermé. □

Le théorème suivant montre la réciproque du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 31 (Riesz)**.** *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé (pas forcément de dimension finie). La boule unité fermée est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. "$\Leftarrow$" Déjà fait.
"$\Rightarrow$" On note $B = B_f(0,1)$. Si B est compacte, il existe $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in B$ tels que $B \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2})$. On note $F = \text{Vect}\,(x_i,\ 1 \le i \le n)$ l'espace vectoriel engendré par ces x_i. C'est un sous-espace de dimension finie donc un fermé de E. De plus l'inclusion précédente donne

$$B \subset F + \frac{1}{2}B \subset F + \frac{1}{2}\left(F + \frac{1}{2}B\right) = F + \frac{1}{4}B$$

et par récurrence $B \subset F + \frac{1}{2^n}B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit si $x \in B$ on peut trouver $x_n \in F$ tel que $d(x, x_n) = \|x - x_n\| \le \frac{1}{2^n}$. On a donc $d(x,F) = 0$ ce qui entraîne $x \in \overline{F}$ et, puisque F est fermé, $x \in F$. Dans ce cas E tout entier est inclus dans F qui est de dimension finie. □ cours 9

cours 10

12 Connexité, connexité par arcs

D'un point de vue intuitif, un espace connexe est un espace fait d'un seul morceau.

Définition. *Soit (X,d) un espace métrique.*

a) Une partie A de X est dite ***connexe*** *si l'implication suivante est vraie :*
$A \subset O_1 \cup O_2$ *avec* O_1 *et* O_2 *ouverts disjoints* $\Longrightarrow A \subset O_1$ *ou* $A \subset O_2$.

b) On appelle ***chemin*** *ou* ***arc*** *joignant $x \in X$ à $y \in X$ toute application continue de $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

c) On dit qu'une partie A de X est ***connexe par arcs*** *si deux points quelconques de A peuvent être reliés par un chemin.*

La notion la plus importante est celle de connexité. La connexité par arcs est secondaire, elle est simplement plus facile à montrer dans des situations pratiques et elle implique la connexité (comme on le verra plus loin). On peut donc voir la connexité par arcs comme une méthode pratique pour montrer qu'un certain ensemble est connexe. Par ailleurs, la plupart des énoncés ci-dessous concernent la connexité et non la connexité par arcs.

Remarque. *L'espace entier X est connexe si et seulement s'il n'y a pas d'ensembles ouverts et fermés à la fois, à l'exception de $\emptyset$ et X. La partie A de X est connexe si et seulement si l'espace métrique $(A, d\big|_{A\times A})$ est connexe.*

Exemples.

a) L'ensemble $\mathbb{Q}$ est inclus dans l'union des ouverts disjoints $O_1 =]-\infty, \sqrt{2}[$ et $O_2 =]\sqrt{2}, +\infty[$ sans être inclus dans l'un des deux. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.

b) Avec le même découpage on voit aussi que $[0,1] \cup [2,3]$ n'est pas connexe.

En utilisant le résultat ci-dessous, il suffisait de dire que ce ne sont pas des intervalles.

Théorème 32. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Démonstration. a) Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont nécessairement des intervalles : Soit A une partie connexe de $\mathbb{R}$. Soit $x, y \in A$ et soit $z \in \mathbb{R}$ tels que $x < z < y$. Si $z \notin A$ alors $O_1 =]-\infty, z[$ et $O_2 =]z, +\infty[$ sont deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset O_1 \cup O_2$. On a alors $A \subset O_1$ ce qui contredit $y \in A$ ou $A \subset O_2$ ce qui contredit $x \in A$. Par conséquent $z \in A$. On en déduit

$$\forall x, y \in A,\ \{z \in \mathbb{R}, \min\{x,y\} \leq z \leq \max\{x,y\}\} \subset A.$$

La partie connexe A est un intervalle.
b) Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes : Supposons que pour un intervalle I de $\mathbb{R}$ il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 de $\mathbb{R}$ tels que $I \subset O_1 \cup O_2$. Supposons $I \cap O_2 \neq \emptyset$ montrons qu'alors $I \subset O_2$ et $I \cap O_1 = \emptyset$. Soit $x \in I \cap O_2$, on considère $\omega_x = I \cap O_1 \cap]-\infty, x[$. C'est un ouvert de I.

Par l'absurde supposons ω_x non vide. Il admet alors une borne supérieure ($\mathbb{R}$ satisfait la propriété de la borne supérieure) que l'on note a. Cette borne supérieure a est inférieure ou égale à x et majore les éléments de ω_x. Comme $\omega_x \subset I$, $x \in I$ et comme I est un intervalle, on a nécessairement $a \in I$. Mais alors $a \in I \cap O_2$. En effet, dans le cas contraire les relations $a \in O_1 \cap I$ et $a \leq x$ avec $x \in O_2$ entraînent $a \in \omega_x$. Comme ω_x est un ouvert de I, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap I \subset \omega_x$. L'intervalle I contient a et $x > a + \epsilon$. Par conséquent $a + \varepsilon/2$ appartient à ω_x et cela contredit la définition de a. Maintenant, si $a \in O_2$, comme O_2 est un ouvert, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $]a-\varepsilon', a+\varepsilon'[\subset O_2$. Comme O_1 et O_2 sont disjoints, on obtient $]a-\varepsilon', a+\varepsilon'[\cap \omega_x = \emptyset$ ce qui est contraire à la définition de a. En conclusion ω_x doit être vide.

De la même manière en travaillant avec la borne inférieure, on montre que $O_1 \cap I \cap]x, +\infty[$ doit être vide. On a donc $O_1 \cap I = \emptyset$ et $I \subset O_2$. $\square$

Fonctions continues et connexité

Théorème 33 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**

a) L'image d'un connexe par une application continue est connexe.

b) Si $f \in \mathscr{C}^0(X; \mathbb{R})$ et $A \subset X$ connexe, alors $f(X)$ est un intervalle.

Démonstration. Soit (X,d) et (X', d') deux espaces métriques, (X,d) connexe et soit $f \in \mathscr{C}^0(X, X')$. Supposons que $f(X)$ ne soit pas connexe. Alors il existe deux ouverts non vides disjoints O'_1 et O'_2 tels que $f(X) \subset O'_1 \cup O'_2$ sans que $f(X)$ soit contenu dans l'un d'eux. Comme f est continue, cela entraîne que $(f^{-1}(O'_1), f^{-1}(O'_2))$ est un partition non triviale de X, ce qui contredit la connexité de X. $\square$

Le résultat suivant donne une caractérisation de la connexité en terme de continuité.

Proposition 34. *Un espace métrique (X,d) est connexe si et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0,1\}$ est constante.*

Démonstration. L'ensemble $\{0,1\}$ pris comme partie de $\mathbb{R}$ a pour distance la distance discrète.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $(X, \mathscr{T})$ est connexe et si $f : X \to \{0,1\}$ est continue alors le couple $(f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}))$ est une partition d'ouverts de X. Donc ou bien $f^{-1}(\{0\}) = X$ et $f \equiv 0$ ou bien $f^{-1}(\{1\}) = X$ et $f \equiv 1$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que toute application continue $f : X \to \{0,1\}$ est constante. Si $(A, \complement_X A)$ est une partition d'ouverts alors la fonction caractéristique 1_A est continue sur X. Par hypothèse, elle est donc constante et $A = X$ ou $A = \emptyset$. X est connexe. $\square$

Autres propriétés des connexes

Théorème 35. *Soit (X, d) un espace métrique.*

a) Toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties connexes ayant deux à deux une intersection non vide a une réunion connexe.

b) L'adhérence d'un ensemble connexe est connexe.

Démonstration. a) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes telle que pour tout $i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $A = \cup_{i \in I} A_i \subset O_1 \cup O_2$. Pour un $i_0 \in I$ fixé, A_{i_0} est connexe et inclus dans $A \subset O_1 \cup O_2$. Cela entraîne $A_{i_0} \subset O_1$ ou $A_{i_0} \subset O_2$. Si $A_{i_0} \subset O_1$, l'hypothèse $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ entraîne $A_i \cap O_1 \neq \emptyset$ tandis que la connexité de A_i donne $A_i \subset O_1$, ce pour tout $i \in I$. On en déduit $A \subset O_1$, l'autre possibilité $A_{i_0} \subset O_2$ donnant $A \subset O_2$. En conclusion, A est connexe.

b) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\overline{A}; \{0, 1\})$. Comme A est connexe et f est continue sur A on a $A \subset f^{-1}(\{0\})$ ou $A \subset f^{-1}(\{1\})$ d'après la Proposition 34. Comme $f^{-1}(\{0\})$ ou $f^{-1}(\{1\})$ sont fermés, on doit avoir $\overline{A} = f^{-1}(\{0\})$ ou $f^{-1}(\{1\})$ et f est constante. □

Remarque. *On peut affaiblir l'hypothèse sur les intersections en supposant simplement que pour un $i_0 \in I$ on a $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$.*

Proposition 36. *Un espace métrique connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Soit (X, d) un espace métrique connexe par arcs et soit $x \in X$ fixé. On peut écrire

$$X = \cup_{y \in X} \{y\} = \bigcup_{\substack{\gamma \in \mathscr{C}^0([0,1]; X) \\ \gamma(0) = x}} \gamma([0, 1]).$$

Or pour tout $\gamma \in \mathscr{C}^0([0, 1]; X)$ l'image $\gamma([0, 1])$ de l'intervalle $[0, 1]$ est connexe. Comme dans l'union ci-dessus tous les chemins considérés contiennent le point x, l'union qui vaut X est connexe. □

Exemples.

a) Dans $\mathbb{R}^n$ toutes les parties convexes sont connexes.

b) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ (avec $n > 1$) ne sont pas homéomorphes.

c) Le cercle unité S^1 de $\mathbb{C}$ n'est pas homéomorphe à un segment de $\mathbb{R}$.

Une application du théorème 35 est que pour tout point x, l'union de toutes les parties connexes de X contenant x est connexe. C'est le plus grand connexe contenant x.

Définition. *Soit (X, d) un espace métrique. Pour tout point x de X, on appelle* ***composante connexe*** *de x et on note $C(x)$ le plus grand connexe contenant x :*

$$C(x) = \bigcup_{\substack{x \in C \subset X \\ C \text{ connexe}}} C.$$

Avec cette notation il est clair que deux points x et y appartiennent à un même connexe si et seulement si $C(x) = C(y)$.

Proposition 37. *La relation "appartenir à un même connexe" qui se traduit par $C(x) = C(y)$ est un relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes de X. Ainsi les composantes connexes de X forment une partition de X.*

D'un point de vue intuitif, les composantes connexes de X sont les morceaux d'un seul tenant de X.

Exemples.

a) Les composantes connexes de $X = [0,1] \cup]2,3]$ sont $[0,1]$ et $]2,3]$.

b) L'ensemble $\mathrm{Hom}([-1,1])$ des homéomorphismes de $[-1,1]$ muni de la distance de la convergence uniforme a deux composantes connexes.

c) Les composantes connexes de $\mathbb{N}$ sont les singletons.

Proposition 38. *Les composantes connexes d'un espace métrique quelconque (X,d) sont des fermés.*

Démonstration. L'adhérence d'une composante connexe est un connexe. Comme la composante connexe est le plus grand connexe, son adhérence doit être elle-même. Donc la composante connexe est un fermé. □

Remarque. *On peut définir une relation d'équivalence "appartenir au même connexe par arcs" et définir des composantes connexes par arcs. Elles sont plus petites que les composantes connexes et ne sont pas nécessairement fermées comme le montre l'exemple ci-dessous. C'est une notion qui n'a pas beaucoup d'intérêt.*

On a vu que la connexité implique la connexité par arcs. La réciproque est fausse comme l'exemple ci-dessous le montre. Cependant, pour les ouverts dans un espace normé la réciproque est vraie comme la proposition ci-dessous le montre.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\left\{(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)),\ x > 0\right\}$ est connexe par arcs donc connexe. Son adhérence qui est

$$\{(x, \sin(1/x)),\ x > 0\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

Proposition 39. *Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé et A une partie de X. Si A est ouvert et connexe, alors A est connexe par arcs.* cours 10

cours 11

13 Exponentielle d'un endomorphisme

Dans toute cette partie $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace de Banach.

Définition. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ (une application linéaire et continue de E dans E). On définit l'exponentielle de f par*

$$e^f = \exp(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}$$

où $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n fois}$.

L'existence de l'exponentielle d'un endomorphisme est assurée par le théorème suivant.

Théorème 40. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors*

a) $\exp(f)$ est toujours bien définie (c'est-à-dire que la série qui le définit est toujours convergente) et appartient à $\mathscr{L}(E)$. De plus, $\|\exp(f)\| \leq \exp(\|f\|)$.

b) L'exponentielle est invariante par changement de base. Plus précisément, si $g \in \mathscr{L}(E)$ est bijective et si $g^{-1} \in \mathscr{L}(E)$ alors $\exp(g^{-1} f g) = \exp(f)$.

c) L'application $\mathscr{L}(E) \ni f \mapsto \exp(f) \in \mathscr{L}(E)$ est continue.

d) Si $g \in \mathscr{L}(E)$ et $f \circ g = g \circ f$ alors $\exp(f+g) = \exp(f)\exp(g)$.

e) $\exp(f)$ *est bijective d'inverse* $\exp(-f)$.

En dimension finie, chaque endomorphisme s'identifie à une matrice. L'invariance par changement de base de l'exponentielle permet ainsi de définir l'exponentielle d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$:

$$e^A = \exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Exemples.

a) Si $A^2 = A$ alors $\exp(A) = I_n + (e-1)A$.

b) Si $A = \mathrm{Diag}[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ alors $\exp(A) = \mathrm{Diag}[\exp(a_1), \exp(a_2), \ldots, \exp(a_n)]$.

c) Matrices diagonalisables.

d) Matrices nilpotentes.

e) Somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui commutent (décomposition de Dunford).

f) Pour une matrice générale, utiliser la forme de Jordan.

Voici enfin trois propriétés des exponentielles matricielles.

Proposition 41. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Nous avons que $\det(\exp(A)) = \exp(Tr(A))$.

b) Si A *est antisymétrique, alors* $\exp(A)$ *est une matrice orthogonale directe.*

c) L'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA) \in M_n(\mathbb{R})$ *est dérivable de dérivée* $A\exp(tA)$.

Application. La solution du système d'équations différentielles ordinaires $x' = Ax$, $x(t_0) = x_0$ est donnée par $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$.