

FONCTIONS ET VARIATIONS

PLAN DU COURS :

- **Chapitre 1 : Négligeabilité et équivalence**
- **Annexe 1 : Rappels sur les limites**
- **Chapitre 2 : Compléments sur la continuité et la dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle.**
- **Chapitre 3 : Étude locale et asymptotique**
- **Annexe 2 : Formulaire équivalents et DL.**
- **Chapitre 4 : Intégrale de Riemann**
- **Annexe 3 : Décomposition en éléments simples**
- **Chapitre 5 : Séries numériques**
- **Chapitre 6 : Séries entières**
- **Annexe 4 : Séries entières**

Chapitre 1 : Négligeabilité et équivalence

1. Compléments sur les limites.

1.1. Généralités sur le domaine d'application du cours

Dans l'ensemble de ce cours, nous nous plaçons dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles, définies sur des intervalles ou des unions d'intervalles. Nous désignerons par $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble des nombres réels auquel on adjoint $+\infty$ et $-\infty$. Ainsi on a l'égalité : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

1.2. Limite d'une fonction composée

Définition 1. 2. 1 : Soit f une fonction définie sur un ensemble I et à valeurs dans un ensemble J . Soit g une fonction définie sur l'ensemble J . On appelle fonction composée $g \circ f$ la fonction définie sur l'ensemble I telle que :

$$\forall x \in I, g \circ f(x) = g[f(x)].$$

On peut schématiser cette opération par le schéma suivant :

$$g \circ f : x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$$

Théorème 1. 2. 1 : Soit a, b et ℓ trois éléments quelconques de $\overline{\mathbb{R}}$. Soit f et g deux fonctions telles que f soit définie au voisinage de a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et g soit définie au voisinage de b et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \ell$. Alors on a $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$

Remarque : On peut schématiser ce théorème par : $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} \ell$

2. Négligeabilité

2.1. Définition ; premiers exemples

Définition 2. 1. 1 : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est négligeable devant g en a et on note $f = o(g)$ si il existe une fonction ε définie au voisinage de a et vérifiant $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$ telle que, au voisinage de a , $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

Par la suite, on considèrera des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exemples fondamentaux :

- En l'infini, si $n > p$, $x^p = o(x^n)$
- En 0, si $n > p$, $x^n = o(x^p)$
- En $+\infty$, $\ln x = o(x^a)$, où a désigne un réel strictement positif.
- En $+\infty$, si $a > 0$, $x^a = o(e^x)$
- $f = o(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

2.2. Propriétés.

Propriété 2. 2. 1 : Si g se s'annule pas au voisinage de a , on a l'équivalence

suivante : $f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Propriété 2. 2. 2 : Transitivité. Si en a , $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.

Application : En $+\infty$, si $a > 0$, $\ln x = o(x^a)$, et $x^a = o(e^x)$ donc $\ln x = o(e^x)$

Propriété 2. 2. 3 : Règles de calcul

- Si $f = o(g)$ et si $h = o(g)$, alors $f + h = o(g)$.
- Si $f = o(g)$ et si $h = o(k)$, alors $fh = o(gk)$
- Si $f = o(g)$ et si k est un réel, alors $kf = o(g)$
- Si $f = o(g)$, alors, pour toute fonction k définie au voisinage de a , $fk = o(gk)$.

3. Fonctions équivalentes.

3.1. Définition ; premiers exemples.

Définition 3. 1. 1 : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est équivalente à g en a et on note $f \approx_a g$ si en a , $f - g = o(g)$.

Propriété 3. 1. 1 : Si $f \approx_a g$, alors $g \approx_a f$.

Propriété 3. 1. 2 : Si $g \neq 0$ au voisinage de a , alors $f \approx_a g$ est équivalent à

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Premiers exemples fondamentaux :

- $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \approx_{+\infty} a_n x^n$
- $\sin x \approx_0 x$

- $\tan x \underset{0}{\approx} x$
- $\cos x - 1 \underset{0}{\approx} -\frac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\approx} x$
- $e^x - 1 \underset{0}{\approx} x$

3.2. Propriétés.

3.2.1. Transitivité

Propriété 3. 2. 1. 1 : Si $f \underset{a}{\approx} g$ et si $g \underset{a}{\approx} h$, alors $f \underset{a}{\approx} h$.

3.2.2. Lien avec les limites

Propriété 3. 2. 2. 1 : Si $f \underset{a}{\approx} g$, alors f et g ont même comportement en a , en particulier, f et g ont, si elles existent, même limite en a .

Propriété 3. 2. 2. 2 : Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f \underset{a}{\approx} \ell$.

Propriété 3. 2. 2. 3 : $f \underset{a}{\approx} 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est nulle au voisinage de a .

3.2.3. Opérations

Propriété 3. 2. 3. 1 : Si $f \underset{a}{\approx} g$ et si $h \underset{a}{\approx} k$, alors $fh \underset{a}{\approx} gk$.

Propriété 3. 2. 3. 2 : Si $f \underset{a}{\approx} g$ alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\approx} \frac{1}{g}$.

Propriété 3. 2. 3. 3 : Si $f \underset{a}{\approx} g$ et si $h \underset{a}{\approx} k$, alors $\frac{f}{h} \underset{a}{\approx} \frac{g}{k}$.

Remarques très importantes :

- On ne peut ni ajouter, ni soustraire d'équivalents.
- On ne peut composer des équivalents.

Chapitre 2 : Compléments sur la continuité et la dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle.

1. Continuité

1.1. Continuité en un point

Définition 1. 1. 1 : Soit a un réel quelconque et f une fonction définie au voisinage de a . On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Remarque : On peut bien sûr définir la notion de continuité à droite ou à gauche en remplaçant la notion de limite par la notion de limite à droite ou à gauche dans la définition précédente.

Théorème 1. 1. 1 : La somme, le produit, l'inverse (si la fonction ne s'annule pas en a) de fonctions continues en a sont continus en a .

Théorème 1. 1. 2 : Soit f une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue en a .

Définition 1. 1. 2 : Soit f une fonction définie au voisinage de a , a étant exclu. Si f possède une limite finie l en a , alors il existe une fonction, appelée prolongement par continuité de f en a , notée \tilde{f} , continue en a telle que pour tout $x \neq a$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ et $\tilde{f}(a) = l$.

1.2. Continuité sur un intervalle

Définition 1. 2. 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Si f est continue en tout point de I , on dit que f est continue sur I .

Les théorèmes 1. 1. 1 et 1. 1. 2, en complément des résultats concernant les fonctions de référence (polynômes, circulaires, logarithmes et exponentielles) permettent d'énoncer le

Théorème 2. 1. 1 : Les fonctions obtenues par opérations algébriques ou par composition à partir des fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition.

1.3. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle.

Théorème 1. 3. 1 : Soit f une fonction continue sur un segment $[a ; b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe deux éléments x_1 et x_2 du segment $[a ; b]$ tels que $\forall x \in [a; b], f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

Théorème 1. 3. 2 des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a et b deux éléments distincts de I . Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c élément de I tel que $f(c)=y$.

Corollaire 1. 3. 1 : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

2. Fonctions réciproques

2.1. Bijection

Définition 2. 1. 1 : Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F . On dit que f est une bijection de E sur F si tout élément de F possède un unique antécédent par f dans E , c'est-à-dire si $\forall y \in F, \exists ! x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Théorème 2. 1. 1 et définition 2. 1. 2 : Soit f une bijection de E sur F . Alors il existe une unique fonction notée f^{-1} , appelée bijection réciproque de f , définie sur F à valeurs dans E , telle que $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

2.2. Bijection continue

Théorème 2. 2. 1: Toute fonction continue sur un intervalle I , à valeurs dans un intervalle J et strictement croissante (respectivement décroissante) sur I est une bijection de I sur J . Par ailleurs, sa bijection réciproque est elle-même continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur J .

2.3. Exemples de fonctions réciproques

Nous présentons ici un certain nombre d'exemples classiques de fonctions réciproques. Leur étude sera complétée, en ce qui concerne les « nouvelles » dans la suite du cours. La démonstration de l'existence de ces fonctions, conséquence du théorème 2. 2. 1 est laissée à l'attention de l'étudiant.

2.3.1. Fonction racine n-ième

Définition 2. 3. 1 : Soit n un entier naturel non nul. La fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $x \mapsto x^n$ étant une bijection de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ , elle possède une fonction réciproque appelée fonction racine n -ième, notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Remarque : on note aussi $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

2.3.2. Fonction arctangente

Définition 2. 3. 2 : La fonction tangente étant une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur \mathbb{R} , elle possède une bijection réciproque appelée fonction arctangente, notée \arctan .

3. Dérivabilité

3.1. Dérivabilité en un point.

Définition 3. 1. 1 : Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a . On dit que f est dérivable en a si il existe un réel ℓ , appelé nombre dérivé de f en a tel que l'une des deux propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :

$$\begin{aligned} \text{➤ } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \ell \\ \text{➤ } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \ell \end{aligned}$$

Théorème 3. 1. 1 et définition 3. 1. 2 : Soit f une fonction définie au voisinage de a . Alors f est dérivable en a , de nombre dérivé ℓ si et seulement si, au voisinage de a , on a l'égalité suivante, appelée développement limite à l'ordre 1 en a de $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + \ell(x - a) + o(x - a)$$

Remarque : On peut définir de manière semblable la notion de dérivabilité à droite ou à gauche en a .

Théorème 3. 1. 2 : Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Remarque : La réciproque de ce théorème n'est pas vraie.

Théorème 3. 1. 3 : Soit f une fonction dérivable en a et de nombre dérivé ℓ . Notons C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

Alors C_f possède au point d'abscisse a une tangente de coefficient directeur ℓ .

Remarque : On définit de manière semblable la notion de demi tangente à droite ou à gauche.

De plus, dans le cas où f n'est pas dérivable en a mais où $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, C_f possède au point d'abscisse a une tangente ou une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

3.2.Dérivabilité sur un intervalle ; fonction dérivée

Définition 3. 2. 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en tout point de I . Alors on dit que f est dérivable sur I et on note f' la fonction définie sur I qui à tout élément x de I associe le nombre dérivé de f en x . Cette fonction est appelée fonction dérivée de f .

Les formules de calcul de fonctions dérivées sont supposées connues. On se bornera à donner les formules concernant les fonctions composées et les fonctions réciproques.

Théorème 3. 2. 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et soit g une fonction dérivable sur J . Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))$.

Théorème 3. 2. 2 : Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J , dérivable sur I et de dérivée ne s'annulant pas sur I . Alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

4. Théorème des accroissements finis.

Dans cette partie, nous préciserons un théorème majeur d'Analyse, source de formules extrêmement fécondes que nous verrons dans la partie suivante.

Théorème 4. 1 dit de Rolle : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un point $c \in]a ; b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Géométriquement, cela signifie qu'il existe au moins un point de la courbe de f en lequel la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses.

Théorème 4. 2 dit des accroissements finis : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$. Alors, il existe un point $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Géométriquement, cela signifie qu'il existe au moins un point de la courbe de f en lequel la tangente à la courbe est parallèle à la droite (AB), avec $A(a ; f(a))$ et $B(b ; f(b))$.

Formule des accroissements finis : En gardant les mêmes hypothèses que le théorème précédent mais en notant $a = x$, $b = x+h$ et $c = x+\theta h$, avec $0 < \theta < 1$, on obtient la formule des accroissements finis : $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$.

5. Formules de Taylor.

La formule des accroissements finis fournit une approximation d'une fonction par une fonction affine au voisinage d'un point. Dans cette partie, nous allons établir que sous réserve de conditions supplémentaires, on peut obtenir une approximation d'une fonction par un polynôme.

Théorème 5. 1 : Formule de Taylor-Lagrange : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$. On suppose en outre que f est n fois dérivable sur $[a ; b]$ et est $n+1$ fois dérivable sur $]a ; b[$. Alors, pour tout x appartenant à $[a ; b]$, il existe un point $c \in]a; x[$ tel que :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Cette formule est appelée formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a .

Formule de Taylor-Mac Laurin : En gardant les mêmes hypothèses que le théorème précédent mais en notant $c = a+\theta h$, avec $0 < \theta < 1$, on obtient la formule de Taylor- Mac Laurin :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

En modifiant légèrement les hypothèses, nous obtenons le

Théorème 5. 2 : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$. On suppose en outre que f est n fois dérivable sur $[a ; b]$ et est $n+1$ fois dérivable en a . Alors, pour tout x appartenant à $[a ; b]$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o(x-a)^n$$

Cette formule est appelée formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de a .

Chapitre 3 : Étude locale et asymptotique.

1. Développements limités.

1.1. Définition et existence

Définition 1. 1. 1 : Soit f une fonction définie sur un voisinage V_a du réel a . On dit que f possède un développement limité à l'ordre n en a , en abrégé $DL_n(f; a)$ si il existe un polynôme P_n de degré n au plus tel que si $P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$, alors, pour tout $x \in V_a$, on a : $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$.

Le polynôme P_n s'appelle la partie régulière du développement limité. On peut remarquer que $a_0 = f(a)$.

Remarque : Toute fonction polynôme possède un développement limité à n'importe quel ordre en tout point.

Théorème 1. 1. 1 : Soit f une fonction définie sur un voisinage V_a du réel a .

- Elle possède un DL à l'ordre 0 en a si et seulement si elle est continue en a .
- Elle possède un DL à l'ordre 1 en a si et seulement si elle est dérivable en a .
- Si f est n fois dérivable sur V_a , alors elle possède un DL à l'ordre n en a et on a :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n).$$

Remarque importante : Il existe des fonctions admettant un DL à l'ordre n en a sans être n fois dérivable en a .

1.2. Propriétés

- Si f possède un DL d'ordre n en a , celui-ci est unique.
- Si une fonction paire (respectivement impaire) possède un DL d'ordre n en a , sa partie régulière est paire (respectivement impaire).

- Troncature : Si f possède un DL d'ordre n en a dont la partie régulière est $P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n$, alors f possède un DL à tout ordre p inférieur ou égal à n de partie régulière est $P_p(x) = a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_p(x-a)^p$.

1.3.Exemples de développements limités.

Tous les développements limités suivants sont au voisinage de 0 et existent à n'importe quel ordre.

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
où α désigne un réel quelconque.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}) + o(x^n)$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

1.4.Détermination pratique d'un développement limité.

La formule de Taylor-Young, bien que permettant en théorie d'obtenir de nombreux développements limités, est en pratique d'un usage très malcommode. Nous utiliserons plutôt les développements limités usuels ainsi que les propriétés énoncés ci-après.

1.4.1. Opérations

Si on connaît les développements limités de deux fonctions f et g en un même point a , à deux ordres n et n' éventuellement différents, on peut obtenir les développements limités en a , à l'ordre $\min(n; n')$ de :

- $f+g$, en additionnant les parties régulières tronquées à l'ordre $\min(n; n')$.
- $f \times g$ en multipliant les parties régulières et en tronquant leur produit à l'ordre $\min(n; n')$.
- Si f est dérivable en a , f' en dérivant la partie régulière. Le développement obtenu est alors à l'ordre $n-1$.
- En intégrant la partie régulière entre a et x , on obtient le développement limité à l'ordre $n+1$ de $\int_a^x f(t)dt$.

1.4.2. Composition

Si f possède un développement limité à l'ordre n en a et si g possède un développement limité à l'ordre n en $f(a)$, alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en substituant $f(x)$ à x dans le développement de g et en tronquant à l'ordre n .

Conséquence : développement limité de l'inverse d'une fonction et d'un quotient de deux fonctions :

- Si f ne s'annule pas en a et si f possède en a un développement limité à l'ordre n du type $f(x) = f(a) + a_1(x-a) + \dots + o((x-a)^n)$, on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(a)[1 + \frac{a_1(x-a)}{f(a)} + \dots + \frac{o((x-a)^n)}{f(a)}]$ puis on peut développer la fonction $\frac{1}{f}$ en a en utilisant la composée de la fonction $x \mapsto \frac{a_1(x-a)}{f(a)} + \dots + \frac{o((x-a)^n)}{f(a)}$ et de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
- Si g ne s'annule pas en a , on peut développer $\frac{f}{g}$ en observant que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

Exemple classique : Au voisinage de 0, $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + o(x^5)$.

2. Applications.

2.1. Recherche de limites

Voir exemples

2.2. Étude locale d'une fonction

Proposition 2. 2. 1 : Si une fonction f admet en a un développement limité à l'ordre n de la forme $f(x) = f(a) + a_1(x-a) + \dots + o((x-a)^n)$, avec $n > 2$, alors on a :

- $f'(a) = a_1$
- la tangente à C_f au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + a_1(x-a)$.
- La position relative de C_f et de sa tangente au point d'abscisse a est donnée par le signe de a_2 (voir exemples).

2.3. Étude asymptotique.

Si une fonction est définie au voisinage de l'infini, si sa limite en l'infini est nulle et si il existe un entier n et une fonction h telle que $f(x) = x^n h(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$, pour étudier les branches infinies de f , on peut effectuer le

changement de variable $X = \frac{1}{x}$ et rechercher le développement limité en 0 de

la fonction g définie par $g(X) = h\left(\frac{1}{X}\right)$, puis en reportant dans $f(x)$, on obtient un développement appelé développement asymptotique de f . On peut alors étudier simplement les branches infinies de f (voir exemples).

Chapitre 4 : Intégrale de Riemann.

1. Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier

1.1.Définition

Le but de cette partie est d'associer à toute fonction en escalier un nombre appelé **intégrale de Riemann**, nombre qui pourra s'interpréter de manière simple et qui, par extension, pourra être défini pour une classe beaucoup plus large de fonctions.

Définition 1. 1. 1 :

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a;b]$, avec $a < b$, est une **fonction en escalier** si il existe une subdivision du segment $[a;b]$ notée $a_0=a < a_1 < \dots < a_n=b$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i; a_{i+1}[$, $0 \leq i \leq n-1$.

Définition 1. 1. 2 : Avec les notations précédentes, en notant pour $0 \leq i \leq n-1$ A_i la valeur de f sur l'intervalle $]a_i; a_{i+1}[$.

On appelle **intégrale au sens de Riemann** de la fonction f sur $[a;b]$ le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par : $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} A_i (a_{i+1} - a_i)$.

Propriété 1. 1. 1 : Dans le cas où f est une fonction en escalier positive sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe de f , l'axe (Ox), les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

1.2.Propriétés

Propriété 1. 2. 1 : Linéarité

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a;b]$, alors, pour tout réel λ , on a l'égalité suivante : $\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$.

Propriété 1. 2. 2 : Positivité

Soit f une fonction en escalier positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Propriété 1. 2. 3 : Croissance

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a;b]$ telles que $\forall x \in [a;b] \ f(x) \leq g(x)$. Alors on a $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Propriété 1. 2. 4 : Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ telle que il existe deux réels m et M vérifiant la relation $\forall x \in [a;b] \ m \leq f(x) \leq M$.

Alors on a : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Propriété 1. 2. 5 : Inégalité triangulaire

Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$. Alors $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Propriété 1. 2. 6 : Relation de Chasles

Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ et c un réel appartenant à $[a;b]$. On a alors l'égalité suivante : $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Propriété 1. 2. 7 : Parité

Soit f une fonction en escalier sur $[-a;a]$ où $a > 0$.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

2. Intégrabilité au sens de Riemann

2.1.Fonction intégrables

Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a;b]$.

Considérons l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$ inférieures ou égales à f .

Ces fonctions possèdent une intégrale.

On démontre que l'ensemble des valeurs de ces intégrales possède une borne supérieure notée $U(f)$.

De même, l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier supérieures ou égales à f possède une borne inférieure notée $V(f)$.

On a la définition suivante :

Définition 2. 1 : Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a;b]$. On dit que f est **intégrable au sens de Riemann** sur l'intervalle $[a;b]$ si $U(f) = V(f)$; On a alors $\int_a^b f(x)dx = U(f) = V(f)$.

2.2.Exemples de fonctions intégrables

Théorème 2. 2. 1 : Toute fonction bornée et monotone sur l'intervalle $[a;b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Théorème 2. 2. 2 : Toute fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ est intégrable au sens de Riemann.

Théorème 2. 2. 3 : Toute fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a;b]$ est intégrable au sens de Riemann.

2.3.Propriétés des fonctions intégrables et de l'intégrale

Toutes les propriétés énoncées dans la section 1. 2 restent vraies.
De plus, on peut énoncer les propriétés suivantes.

Propriété 2. 3. 1 :

La somme et le produit de fonctions bornées intégrables sur $[a;b]$ sont intégrables sur $[a;b]$.

Propriété 2. 3. 2 :

Dans le cas où f est une fonction positive sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe de f , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

3. Intégrale de Riemann d'une fonction continue

3.1.Lien entre intégrale et primitive.

Théorème 3. 1. 1: Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La fonction F définie sur l'intervalle $[a;b]$ par : $\forall x \in [a;b], F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a;b]$.

Conséquence 3. 1. 1 : Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.

Conséquence 3. 1. 2 : Si f est continue sur l'intervalle $[a;b]$ et si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

3.2.Calcul intégral

Théorème 3. 2. 1 : Formule d'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur un intervalle $[a;b]$. On a la relation suivante :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Théorème 3. 2. 2 : Formule de changement de variables

Soit φ une fonction dérivable, de dérivée continue sur $[a;b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[\varphi(a);\varphi(b)]$ (ou l'inverse si $\varphi(a) > \varphi(b)$). Alors on a la relation suivante :

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Chapitre 5 : Séries numériques

1. Généralités

1.1. Convergence d'une série

Définition 1. 1. 1 : On considère une suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$. On appelle suite des sommes partielles associées à la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par la relation suivante : $\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$.

Définition 1. 1. 2 : Si la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ converge vers un réel ℓ , on dit que la série de terme général u_n converge et à pour somme ℓ . On écrit alors $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \ell$. Sinon, on dit que la série de terme général u_n diverge.

Propriété 1. 1. 1 : Si la série de terme général $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

Propriété 1. 1. 2 : Soit deux séries de termes généraux $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$.

- Si ces deux séries convergent vers deux nombres ℓ et ℓ' , alors la série de terme général $(u_n + v_n)_{n \geq n_0}$ converge vers $\ell + \ell'$.
- Si l'une des deux converge et l'autre diverge, alors la série de terme général $(u_n + v_n)_{n \geq n_0}$ diverge.
- Si les deux séries divergent, alors on ne peut rien dire de la série de terme général $(u_n + v_n)_{n \geq n_0}$.

1.2. Absolue convergence

Définition 1. 2. 1 : On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Propriété 1. 2. 1 : Si une série est à termes de signe constant à partir d'un certain rang, alors il y a équivalence entre absolue convergence et convergence.

Propriété 1. 2. 2 : Si une série est absolument convergente, elle est convergente.

Remarque importante : La réciproque est fausse.

Définition 1. 2. 2 : Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est appelée série semi-convergente.

1.3. Exemples de séries convergentes.

1.3.1. Séries géométriques

Si $|q| < 1$, alors la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

1.3.2. Séries de Riemann

On appelle série de Riemann toute série de la forme

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ où a désigne un réel quelconque.

On a le résultat suivant : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ converge $\Leftrightarrow a > 1$

1.3.3. Séries exponentielles

$\forall a \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$

2. Séries à termes positifs

Dans cette partie, nous supposons que la suite de terme général u_n est à termes tous positifs.

Nous allons donner et établir, pour certains d'entre eux, quelques critères de convergence de la série de terme général u_n .

2.1. Critère de l'équivalence :

si $u_n \approx v_n$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ ont même nature.

2.2. Critère de comparaison :

2.2.1. si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

2.2.2. si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge.

2.2.3. si, en $+\infty$ $u_n = o(v_n)$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

2.3. Règle de Cauchy

Soit $k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Si $k < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et si $k > 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

2.4. Règle de D'Alembert :

Soit $k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $k < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et si $k > 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

Chapitre 6 : Séries entières

1. Séries entières complexes

1.1. Définition

Définition 1. 1 : On considère une suite complexe $(a_n)_{n \geq 0}$. On appelle série entière d'une variable complexe toute série formelle de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où z désigne un nombre complexe.

Remarque : Pour $z = 0$, toute série entière est convergente.

Une série entière étant une série à termes complexes, la seule notion de convergence possible est la convergence absolue. On a donc les résultats suivants ;

1.2. Convergence

Théorème 1. 2 : Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Il existe un unique R , nombre réel positif ou $+\infty$ tel que pour tout nombre complexe z , si $|z| < R$, la série entière est absolument convergente et si $|z| > R$, la série entière est divergente.

Remarque : si $R = +\infty$, alors la série entière est convergente pour tout complexe z .

La démonstration de ce théorème repose sur le résultat suivant :

Lemme 1. 2 : Si il existe un réel r tel que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ soit absolument convergente pour $z=r$, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| \leq r$, la série entière est absolument convergente.

Définition 1. 2 : Le nombre R est appelé rayon de convergence de la série entière et l'ensemble des nombres complexes vérifiant $|z| < R$ est appelé disque de convergence de la série entière.

Dans le cas où $R = +\infty$, le disque de convergence est le plan complexe en totalité ; dans le cas où $R = 0$, le disque de convergence est réduit à 0.

Si $R \neq 0$, on note $f(z)$ la somme de la série entière. f est donc une fonction d'une variable complexe définie sur le disque de convergence de la série entière.

Remarque : On ne sait rien à priori de la convergence ou non de la série entière pour les nombres complexes z tels que $|z| = R$.

1.3. Calcul du rayon de convergence

On peut énoncer, à l'aide des règles de D'Alembert et de Cauchy, deux méthodes permettant de calculer directement le rayon de convergence R d'une série entière. Cependant, ces deux méthodes ne sont pas universelles.

Règle de Cauchy : Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R .

Si on pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, alors, si $\ell = 0$, $R = +\infty$, si $\ell = +\infty$, $R = 0$ et si $0 < \ell$, $R = \frac{1}{\ell}$.

Règle de D'Alembert : Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R.

Si on pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, alors, si $\ell=0$, $R = +\infty$, si $\ell=+\infty$, $R = 0$ et si $0 < \ell$, $R = \frac{1}{\ell}$.

1.4.Exemples.

1.4.1. Série géométrique.

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

1.4.2. Série exponentielle.

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Sa somme est appelée fonction exponentielle et est notée e^z .

1.5.Opérations.

Théorème 1. 4. 1 : Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R et de somme f(z) et la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon de convergence R' et de somme g(z). La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $\inf(R ; R')$ et pour somme $f(z)+g(z)$.

2. Séries entières réelles

Dans le cas d'une série entière réelle, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est une suite de nombres réels et la variable, notée alors x est réelle. Le domaine de convergence est alors l'intervalle ouvert $] -R ; +R[$. La fonction somme f est une fonction d'une variable réelle qui possède certaines propriétés extrêmement importantes.

2.1.Propriétés de la somme d'une série entière réelle.

Dans cette partie, nous supposons que R est différent de 0.

Théorème 2. 1 : Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R et de somme f(x). Alors la fonction f est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $] -R ; +R[$ et les dérivées successives de f s'obtiennent en dérivant « terme à terme » la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Ainsi, par exemple,

la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R et pour somme $f'(x)$.

Une conséquence de ce théorème est que f possède un développement de Taylor en tout point de l'intervalle $] -R ; +R[$. Ce qui nous permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 2. 1. 1 : Avec les notations du théorème 2.1, $\forall n \in N, a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.

Une conséquence immédiate de ce théorème est le fait que si deux fonctions f et g sont somme d'une même série entières sur un voisinage de 0, alors elles sont égales.

Théorème 2. 1. 2 : Avec les notations du théorème 2. 1, on peut intégrer terme à terme une série entière réelle et on obtient

$$\forall x \in]-R; +R[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t) dt.$$

2.2.Développement en série entière d'une fonction.

Le problème abordé ici est le suivant : une fonction f étant donnée, à quelle condition possède t-elle un développement en série entière, c'est-à-dire peut-elle s'écrire comme somme d'une série entière ?

Théorème 2. 2 : Une fonction f définie sur un intervalle contenant 0 est développable en série entière si et seulement si elle est indéfiniment dérivable et si la série entière dite série de Mac Laurin $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge vers f au voisinage de 0.

Nous verrons au cours des TD des méthodes d'obtention des développements en série entière d'une fonction donnée ainsi qu'une application importante concernant la résolution d'équations différentielles.

ANNEXE 3 : Séries entières

$$\begin{aligned} \text{➤ } \sum_{n=0}^{+\infty} z^n &= \frac{1}{1-z} & R=1 \\ \text{➤ } \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} &= \frac{1}{(1-z)^2} & R=1 \\ \text{➤ } \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) z^{n-2} &= \frac{2}{(1-z)^3} & R=1 \\ \text{➤ } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} &= -\ln(1-x) & R=1 \end{aligned}$$

$$\triangleright \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$