Quelques transformations du graphe d'une fonction.

On se donne une fonction f, de graphe $\mathcal{C}_f$ et on souhaite voir comment se transforme ledit graphe quand on fait subir à f quelques misères. Plus précisément, on définit $g(x) =$ une certaine transformée à préciser de $f(x)$.

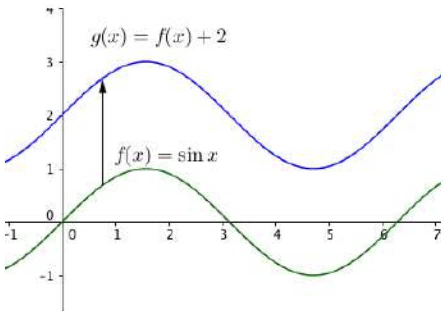
Que dire du graphe $\mathcal{C}_g$ de g au vu de celui de f ?

Dans le cas où la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, on étudiera "l'effet sur les aires", à savoir le lien entre $\int_{\mathbb{R}} f$ et $\int_{\mathbb{R}} g$.

Convenons d'appeler glissement horizontal de a la translation de vecteur $(a, 0)$, glissement vertical de a la translation de vecteur $(0, a)$. Si $a > 1$, on appellera étirement vertical de rapport a la transformation $(x, y) \longmapsto (x, ay)$. Si $0 < a < 1$, la même transformation sera nommé contraction vertical de rapport a (penser à un miroir déformant, qui vous déforme , en étirant ou en contractant, dans la hauteur. .

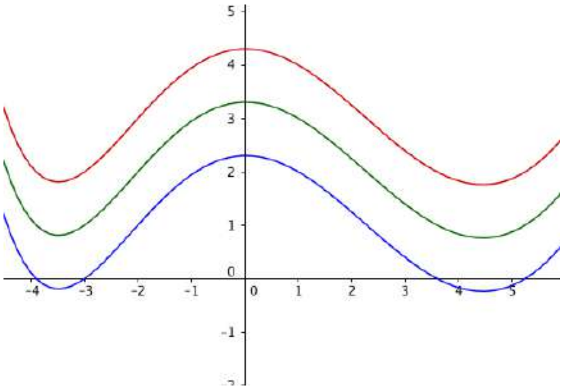
Ces dénominations ne sont pas standard, elles sont là pour donner une image concrète des phénomènes.

1. **Glissement vertical.** Soit a un réel. On pose $g(x) = f(x) + a$. Le graphe $\mathcal{C}_g$ est le translaté de $\mathcal{C}_f$ par la translation de vecteur $(0, a)$. Exemple : $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \sin(x) + 2$.

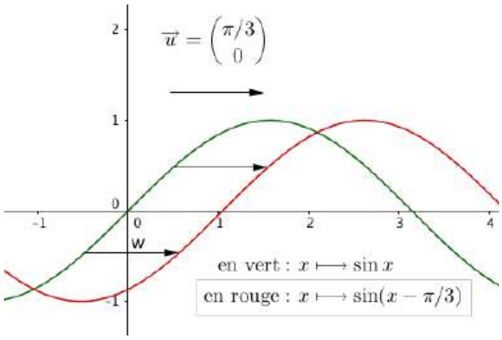
   Aires : augmentées de a : $\int_{\mathbb{R}}(f + a) = a + \int_{\mathbb{R}} f$.

2. **La saucisse.**
   Sit f une fonction. On se donne un réel $\varepsilon > 0$. Les zone des points (x, y) tels que $|y - f(x)| \leq \varepsilon/2$ a les forme d'une saucisse dont les "peaux" sont les graphes $f + \varepsilon/2$, et $f - \varepsilon/2$.



Saucisse.

3. **Glissement horizontal.** Soit a un réel. On pose $g(x) = f(x+a)$. On a donc $g(x-a) = f(x)$. Ce qui se passe en x pour f se passe en $x-a$ pour g. Le graphe de g est le translaté de celui de f par la translation du vecteur $(-a, 0)$. Exemple : $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \sin(x - \pi/3)$.



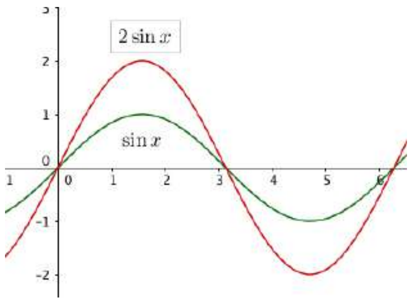
Aires : pas d'effet, autrement dit $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g$.

4. **Déformation verticale.** Soit $a > 0$. On pose $g(x) = af(x)$. L'axe des y est déformé, pas l'axe des x. On réalise la transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ ay \end{pmatrix}$$

C'est un étirement vertical de rapport a. (en termes savants, une affinité verticale de rapport a, de base l'axe des x.

Exemple : $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2\sin x$



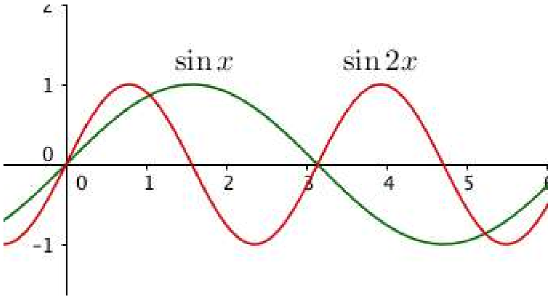
Aires : elles sont multipliées par a :

$$\int_{\mathbb{R}} g = a \int_{\mathbb{R}} f$$

5. **Déformation horizontale.**
Soit $a > 0$. On pose $g(x) = f(ax)$, c'est à dire $g(x/a) = f(x)$. Ce qui se passe pour f en x se passe pour g en x/a. L'axe des x est déformé, pas l'axe des y. On réalise la transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x/a \\ y \end{pmatrix}$$

Si $a > 1$, c'est une contraction horizontale de rapport $1/a$. En termes savants : une affinité horizontale de rapport $1/a$, de base l'axe des y. Exemple : $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sin 2x$. On obtient une nouvelle fonction de période π. On resserre donc l'accordéon.



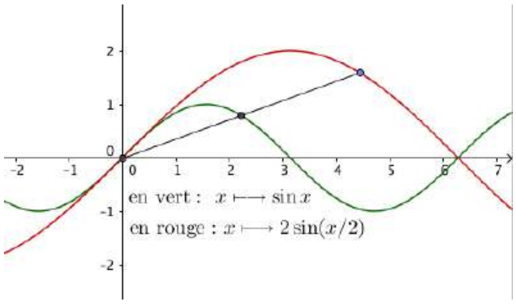
Aires : elles sont multipliées par $1/a$: $\int_{\mathbb{R}} g = \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f$.

6. **Homothétie de centre l'origine.** Soit $a > 0$. Posons $g(x) = af(x/a)$. On a donc une affinité verticale de rapport a, et une affinité horizontale de rapport a. Autrement dit, on a la transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$$

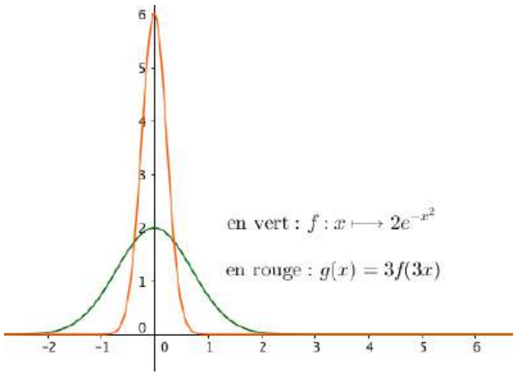
C'est l'homothétie de rapport a, et de centre l'origine.

Explication : si $a > 1$, c'est un "agrandissement photo". Si $a < 1$, c'est une "réduction" (ou tzantza chez les indiens jivaros).



Aires : elles sont multipliées par a^2. autrement dit $\int_{\mathbb{R}} af(x/a)\,dx = a^2 \int_{\mathbb{R}} f$.

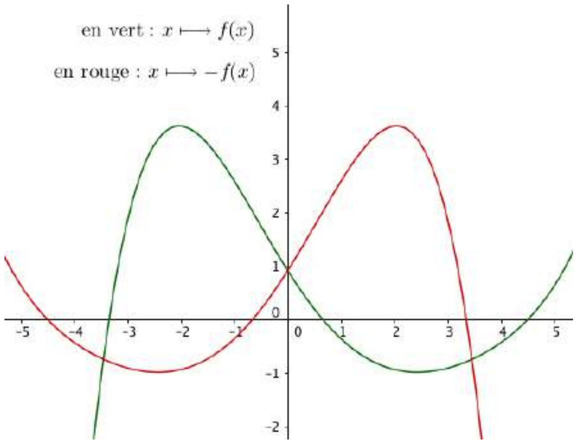
7. **Transformation "pâte à modeler".** Soit $a > 0$. On pose $g(x) = af(ax)$. Si $a > 1$ (cas le plus courant), on étire de a verticalement, et on comprime de a horizontalement. C'est ce qui se passe avec une masse de pâte à modeler, lorsque vous la concentrez vers un point central. Très utilisé par les ingénieurs en théorie des distributions.



Aires. Elles sont inchangées : posons $m = \int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g$. On concentre une masse donnée autour de l'axe des y. A la limite, quand a tend vers $+\infty$, on concentre la masse m sur le seul axe des y, et le pic de la fonction monte lui aussi à $+\infty$. on dit qu'on a une masse de Dirac m en 0.

8. **Symétrie par rapport à l'axe des y et parité.** $g(x) = f(-x)$. Les graphes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des y.

Exemple célèbre : les fonctions $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto e^{-x}$ ont de graphes symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des y.

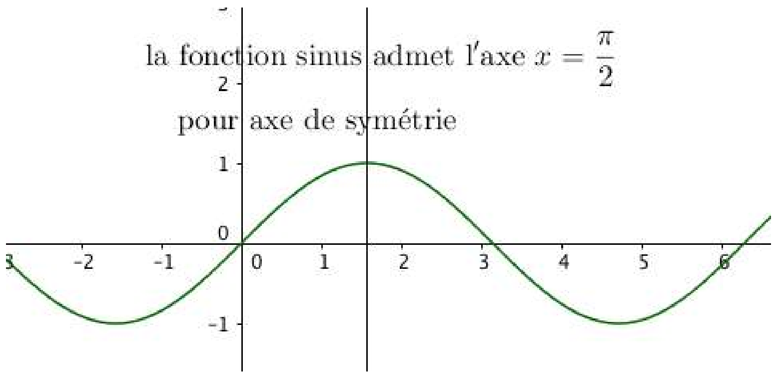


En particulier, si f est paire, c'est à dire si $f(-x) = f(x)$, alors le graphe admet l'axe des y pour axe de symétrie. C'est le cas des fonctions cosinus, valeur absolue, et toutes les fonctions polynomiales dont les monômes sont tous de degré pair (ce qui justifie la dénomination).

9. **Symétrie par rapport à l'axe $y = a$.** Posons $g(x) = f(2a - x)$. Les graphes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des $y = a$.

   En particulier, si f , vérifie $f(2a - x) = f(x)$, alors le graphe admet l'axe des $y = a$ pour axe de symétrie. Attention au facteur 2...

   Exemple : on sait que, pour tout x, on a $\sin(\pi - x) = \sin x$. Cela signifie que al fonction sinus admet l'axe $y = \pi/2$ pour axe de symétrie (elle en admet une foule d'autres...).



Remarque. De la relation

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

on déduit que les graphes des fonctions sinus et cosinus se déduisent l'un de l'autre par la symétrie d'axe $x = \frac{\pi}{4}$. Mais comme on a aussi

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

on déduit que le graphe de la fonction cosinus est le translaté de celui de la fonction sinus par la translation de vecteur $(-\pi/2, 0)$.

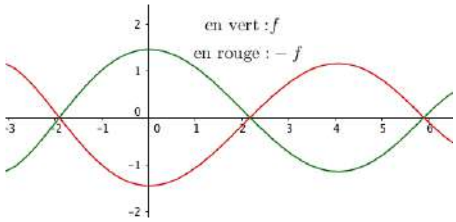
10. **Symétrie par rapport à l'origine et imparité.** Posons

$$g(x) = -f(-x)$$

Les graphes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine.

En particulier, si f est impaire, c'est à dire si $f(-x) = -f(x)$, alors le graphe admet l'origine pour centre de symétrie. C'est le cas des fonctions sinus, tangente, et toutes les fonctions polynomiales dont les monômes sont tous de degré impair (ce qui justifie la dénomination).

11. **Symétrie par rapport à l'axe des x.**
Soit f une fonction de graphe $\mathcal{C}_f$. La fonction $g = -f$ a pour graphe le symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des x.

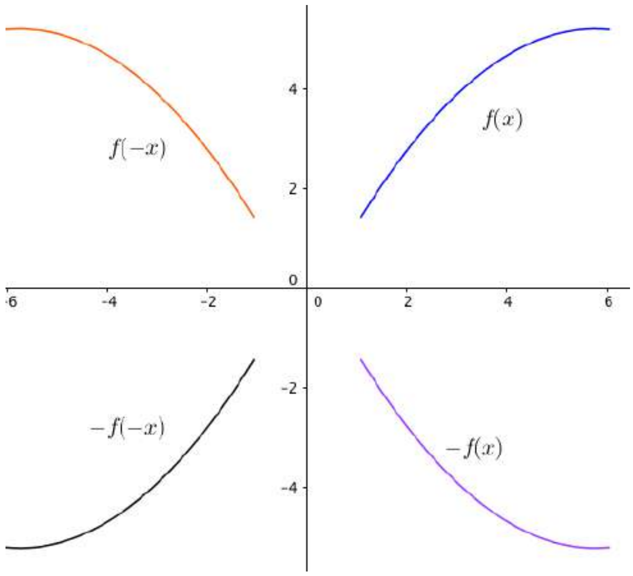


Remarque. Si on veut une fonction dont le graphe soit le symétrique de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe $y = a$, il faut poser

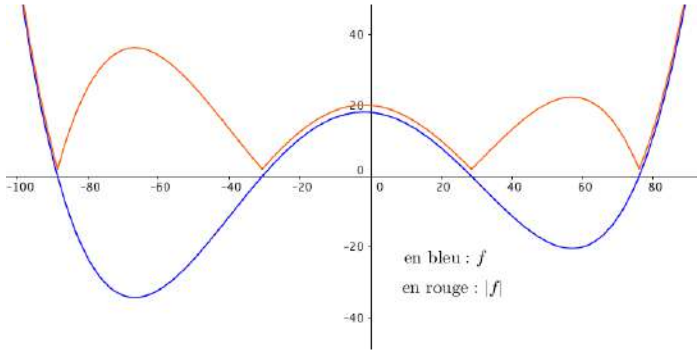
$$h = 2a - f$$

12. **Effet sur les fonction périodiques.** Soit f une fonction T-périodique. Alors, pour $\omega > 0$, et tout réel φ, les fonctions $h : x \longmapsto f(\omega x)$ et $k : x \longmapsto f(\omega x + \varphi)$ sont de période T/ω. Le graphe de h s'obtient par affinité horizontale de rapport $1/\omega$, et, pour celui de k, on fait ensuite un glissement horizontal de $-\varphi$.

    Voici une synthèse des différentes symétries vue ci-dessus :

13. **Valeur absolue.** Soit f de graphe $\mathcal{C}_f$, quel est l'aspect du graphe de $|f|$?
    La partie du graphe située dans le demi plan $y \geq 0$ est inchangée. Celle située dans le demi plan $y < 0$ est remplacée par sa symétrique par rapport à l'axe des x.



14. **Inverse** $1/f$. La construction du graphe de $1/f$ connaissant celui de f se fait grâce aux trucs que voici :

    Comme le signe de f est le même que celui de $1/f$, on commence par régionner le plan par des verticales pour avoir des zones de signe constant pour f.

    1. Supposons $f > 0$. Alors

    (a) Si $f > 1$, $0 < 1/f < 1$. Si $f = 1$, $1/f = 1$.

    (b) Si f croit, $1/f$ décroit, et vice versa.

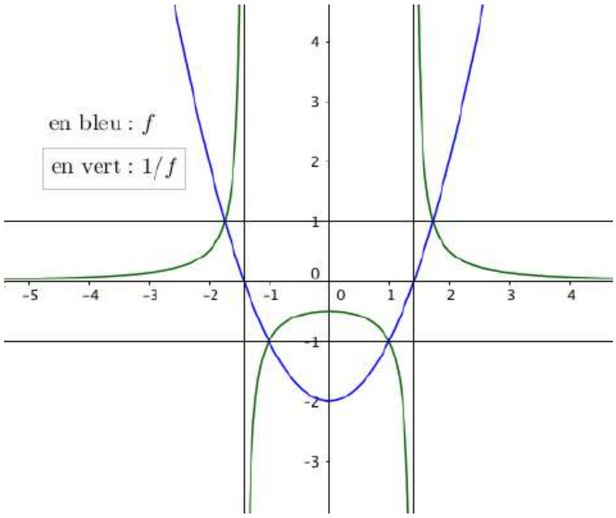
    (c) Si f a un maximum (resp un minimum) local , $1/f$ a un minimum (resp maximum).

    (d) si f tend vers 0^+, $1/f$ tend vers $+\infty$.

    (e) si f tend vers $+\infty$, $1/f$ tend vers 0^+.

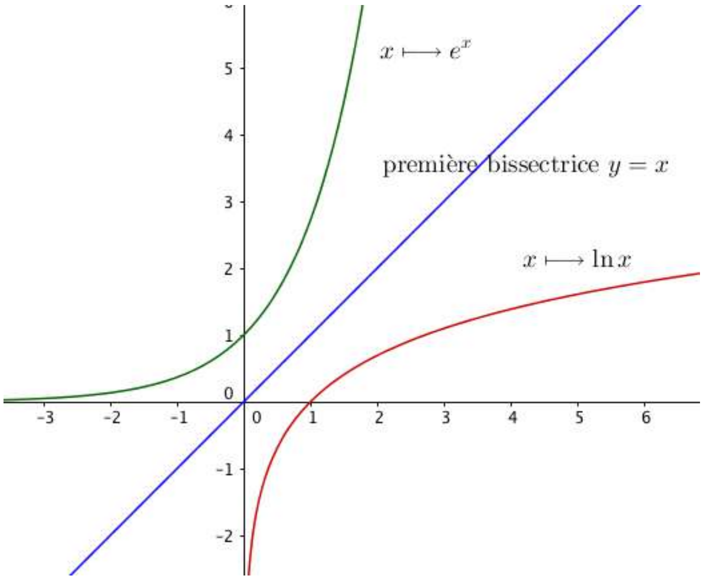
    2. Si $f < 0$, on remplace 0^+ par 0^-, $+\infty$ par $-\infty$, 1, par -1

    Exemple :



15. **Réciproque** f^{-1}. Le graphe est le symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice.

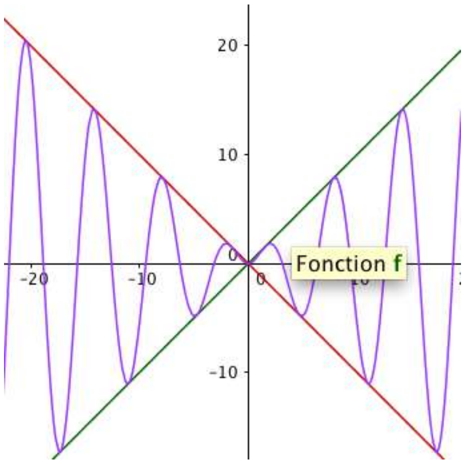
    Exemple : graphe de la fonction exp et de sa réciproque ln.



16. **Effet de la multiplication de f par la fonction sinus : les montagnes russes.**
    Soit f de graphe $\mathcal{C}_f$. Quelle allure a le graphe de $g : x \longmapsto f(x) \sin x$?

    La fonction sinus oscille de -1 à 1. Donc, le graphe de g oscille entre le graphe de f et celui de $-f$, en faisant des festons "à la sinus", ou "en montagnes russes".

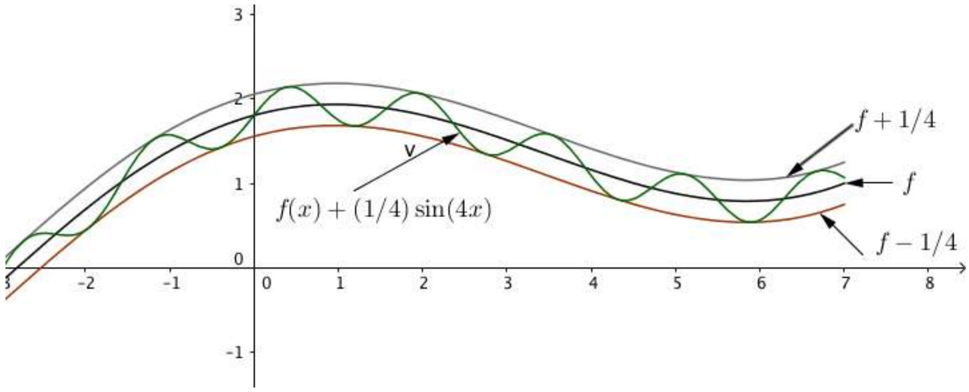
Exemple : $f(x) = x$, $g(x) = x \sin x$ (en violet sur la figure).



17. **Effet de l'addition à f d'une fonction sinus : le serpent dans une saucisse.**
Soit f de graphe $\mathcal{C}_f$. Quelle allure a le graphe de $g : x \longmapsto f(x) + (1/a)\sin(ax)$?
Prenons a "assez petit". on peut dessiner autour du graphe de f une "saucisse" dont la peau supérieure est $f + 1/a$, et la peau inférieure $f - 1/a$. La fonction $g : x \longmapsto f(x) + (1/a)\sin(ax)$ s'obtient dessinant un serpent approximativement sinusoïdal autour du graphe de f, en restant dans la saucisse. Le graphe de g touche les peaux de la saucisse lorsque le sinus vaut 1 ou -1.

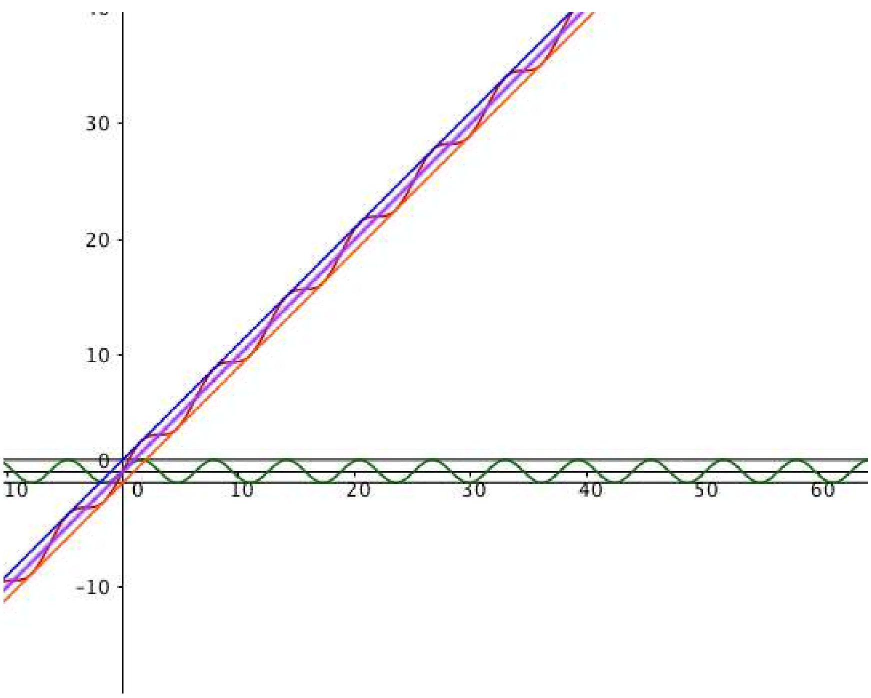
La fonction sinus oscille de -1 à 1. Donc, le graphe de g oscille entre le graphe de f et celui de $-f$, en faisant des festons "à la sinus", ou "en montagnes russes".

Exemple :



18. **Dérive linéaire.** Soit f une fonction tendant en $+\infty$ vers une limite, finie ou non.. Elle peut admet, le plus souvent une direction asymptotique (qu'on pourrait appeler un trend somme les économistes, une drift comme les matheux, ou encore une dérive linéaire). Visuellement, cela signifie que le graphe "suit" une certaine direction de droite. Cela peut se faire de tas de façons : asymptote parallèle à la direction, branche parabolique, oscillation dans une saucisse, oscillation parabolique. Supposons ici que la direction soit horizontale. Que se passe-t-il si on ajoute à f une dérive linéalre, à savoir si on pose $g(x) = f(x) + ax$? Simple : de façon un peu imprécise, le comportement le long de l'axe des x a lieu dans la direction $x \longmapsto ax$.

    Illustrons : sur la figure, on voit la fonction sinus, dans sa saucisse $|y| = 1$, et la fonction $x \longmapsto x + \sin x$ qui suit le trend $y = x$ et évolue dans la saucisse $x - 1, x + 1$.



30
20
10
0
-10
10
0
10
20
30
40
50
60