

Exercice 1 : Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^n \geq n + 1$ .

Exercice 2 : Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $2^n \geq n^2$ .

Exercice 3 : Montrer par récurrence les égalités suivantes :

- i.  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ,
- ii.  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ,
- iii.  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

Exercice 4 : Montrer par récurrence la proposition « Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $10^n - (-1)^n$  est un multiple de 11 ».

Exercice 5 : Montrer par récurrence la proposition « Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^3 - n$  est un multiple de 3 ».

Exercice 6 : Considérons la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer que la suite  $(u_n)$  est majorée par 2,
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante,
- 3) En utilisant 1) et 2), montrer que  $(u_n)$  converge.

Exercice 7 : Considérons la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}. \end{cases}$$

- 1) Montrer que la suite  $(u_n)$  est majorée par 2,
- 2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante,
- 3) En utilisant 1) et 2), montrer que  $(u_n)$  converge.

Exercice 8 : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 \leq v_0, \\ u_{n+1} = (2u_n + v_n)/3, \\ v_{n+1} = (u_n + 2v_n)/3, \end{cases}$$

- 1) Montrer que la suite  $(v_n - u_n)$  est une suite géométrique,
- 2) Montrer que la suite  $(v_n - u_n)$  converge et donner sa limite,
- 3) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante et que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

- 4) Montrer que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.
- 5) Montrer que les deux suites  $(u_n + v_n)$  est constante.
- 6) En déduire la limite commune des deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

Exercice 9 : Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = (u_n + v_n)/2, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2, \\ u_{n+1} = (u_{n+1} + v_n)/2. \end{cases}$$

- 1) Montrer qu'il existe un réel  $r$  tel que pour tout  $n$ ,  $v_{n+1} - u_{n+1} = r(v_n - u_n)$ ,
- 2) Montrer que pour tout  $n$ ,  $u_n < v_n$ ,
- 3) Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

Exercice 10 : Soit  $r \in \mathbb{R}$ . Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$r^0 + r^1 + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Exercice 11 : Soit  $x \in ]-1, +\infty[$ . Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+x)^n \geq 1 + nx$ .