***EFREI-L1*- 2011-2012**

FONCTIONS ET VARIATIONS

Cours de Hervé BERTRAND et Jean LAMAUD

PLAN DU COURS :

Chapitre 1 : Fonctions d'une variable réelle ; continuité

1. Généralités sur les fonctions ; limites

1.1. Généralités sur le domaine d'application du cours

Dans l'ensemble de ce cours, nous nous plaçons dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles, définies sur des intervalles ou des unions d'intervalles.

Nous désignerons par $\overline{\mathbb{R}}$ *l'ensemble des nombres réels auquel on adjoint* $+\infty$ et $-\infty$. *Ainsi on a l'égalité :* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

1.2. Théorèmes fondamentaux sur les limites

Nous rappelons ici quelques résultats fondamentaux sur les limites de fonctions. Il ne s'agit pas de donner une définition rigoureuse ainsi que des démonstrations concernant la notion de limite mais plutôt de mettre à la disposition de l'étudiant des outils indispensables pour la suite.

On ne revient pas ici sur les règles liant limites et opérations, ces règles étant supposées connues depuis la classe de Première.

1.2.1. Limite d'une fonction composée

Théorème 1.2.1 : *Soit a, b et* ℓ *trois éléments quelconques de* $\overline{\mathbb{R}}$*. Soit f et g deux fonctions telles que f soit définie au voisinage de a et* $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *et g soit définie au voisinage de b et* $\lim_{x \to b} g(x) = \ell$.

Alors on a $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$

Remarque : On peut schématiser ce théorème par la figure suivante : $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} \ell$

1.2.2. Théorèmes de comparaison

Théorème 1.2.2 : *Soit a un élément quelconque de* $\overline{\mathbb{R}}$*. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a.*

Si $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$ *et si pour tout x appartenant à un voisinage de a,* $g(x) \leq f(x)$*, alors* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Théorème 1.2.3 : *Soit a un élément quelconque de* $\overline{\mathbb{R}}$*. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a.*

Si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ *et si pour tout x appartenant à un voisinage de a,* $|f(x)| \leq g(x)$*, alors* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Théorème 1.2.4 : *Soit a et* ℓ *deux éléments quelconques de* $\overline{\mathbb{R}}$*. Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a.*

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \mathrm{h(x)} = \ell$ *et si pour tout x appartenant à un voisinage de a,* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$*, alors* $\lim_{x \to a} g(x) = \ell$.

Remarque : Ces trois théorèmes restent vrais dans le cas de limite à droite ou à gauche en a.

2. *Continuité*

2.1. Continuité en un point

Définition 2.1.1 : *Soit a un réel quelconque et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f est continue en a si* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarque :On peut bien sûr définir la notion de continuité à droite ou à gauche en remplaçant la notion de limite par la notion de limite à droite ou à gauche dans la définition précédente.

Théorème 2.1.1 : *La somme, le produit, l'inverse (si la fonction ne s'annule pas en a) de fonctions continues en a sont continues en a.*

Théorème 2.1.2 : *Soit f une fonction continue en a et g une fonction continue en f(a). Alors la fonction* $g \circ f$ *est continue en a.*

Définition 2.1.2 :*Soit f une fonction définie au voisinage de a, a étant exclu. Si f possède une limite finie l en a, alors il existe une fonction, appelée prolongement par continuité de f en a, notée* $\tilde{f}$ *, continue en a telle que pour tout* $x \neq a$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ *et* $\tilde{f}$ *(a)=l.*

2.2. Continuité sur un intervalle

Définition 2.2 :*Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est continue en tout point de I, on dit que f est continue sur I.*

Les théorèmes 2.1 et 2.2, en complément des résultats concernant les fonctions de référence polynômes, circulaires, logarithmes et exponentielles permettent d'énoncer le

Théorème 2.2 : *Les fonctions obtenues par opérations algébriques ou par composition à partir des fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition.*

2.3. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle.

Théorème 2.3.1 : *Soit f une fonction continue sur un segment [a ; b]. Alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe deux éléments* x_1 *et* x_2 *du segment [a ; b] tels que* $\forall x \in [a;b],\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.

Théorème 2.3.2 des valeurs intermédiaires : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a et b deux éléments distincts de I. Alors, pour tout y compris entre f(a) et f(b), il existe c élément de I tel que f(c)=y.*

Corollaire 2.3 : *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

3. *Fonctions réciproques*

3.1. Bijection

Définition 3.1.1 : *Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F. On dit que f est une bijection de E sur F si tout élément de F possède un unique antécédent par f dans E, c'est-à-dire si* $\forall y \in F, \exists! x \in E$ *tel que* $f(x) = y$.

Théorème 3.1 et définition 3.1.2 : *Soit f une bijection de E sur F. Alors il existe une unique fonction notée* f^{-1}*, appelée bijection réciproque de f, définie sur F à valeurs dans E, telle que* $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$.

3.2. Bijection continue

Théorème 3.2 : *Toute fonction continue sur un intervalle I, à valeurs dans un intervalle J et strictement croissante (respectivement décroissante) sur I est une* *bijection de I sur J. Par ailleurs, sa bijection réciproque est elle-même continue et strictement croissante (respectivement décroissante) sur J.*

3.3. Exemples de fonctions réciproques

Nous présentons ici un certain nombre d'exemples classiques de fonctions réciproques. Leur étude sera complétée, en ce qui concerne les « nouvelles » dans la suite du cours. La démonstration de l'existence de ces fonctions, conséquence du théorème 3.2 est laissée à l'attention de l'étudiant.

3.3.1. Fonction racine n-ième

Définition 3.3.1 : *Soit n un entier naturel non nul. La fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par* $x \mapsto x^n$ *étant une bijection de* $\mathbb{R}^+$ *sur* $\mathbb{R}^+$*, elle possède une fonction réciproque appelée fonction racine n-ième, notée* $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Remarque : on note aussi $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

3.3.2. Fonction arctangente

Définition 3.3.2 : *La fonction tangente étant une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$*, elle possède une bijection réciproque appelée fonction arctangente, notée arctan.*

Chapitre 2 : Fonctions d'une variable réelle ; dérivabilité

1. *Dérivabilité en un point*

1.1. Définitions et premières propriétés

Définition 1. 1. 1 : *Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que f est dérivable en a si il existe un réel ℓ, appelé nombre dérivé de f en a tel que l'une des deux propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :*

- $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$
- $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$

Théorème 1. 1. 1 et définition 1. 1. 2 : *Soit f une fonction définie au voisinage de a. Alors f est dérivable en a, de nombre dérivé ℓ si et seulement si il existe une fonction ε définie au voisinage de a et vérifiant $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que l'égalité suivante, appelée développement limité de f à l'ordre 1en a soit vérifiée au voisinage de a :*

$$f(x) = f(a) + \ell(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$$

Remarque : On peut définir de manière semblable la notion de dérivabilité à droite ou à gauche en a.

Théorème 1. 1. 2 : *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*
Remarque : La réciproque de ce théorème n'est pas vraie.

Théorème 1. 1. 3 : *Soit f une fonction dérivable en a et de nombre dérivé ℓ. Notons C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan. Alors C_f possède au point d'abscisse a une tangente de coefficient directeur ℓ.*
Remarque : On définit de manière semblable la notion de demi tangente à droite ou à gauche.

De plus, dans le cas où f n'est pas dérivable en a mais où $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$, *$C_f$ possède au point d'abscisse a une tangente ou une demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées.*

1.2. Dérivabilité et opérations

On suppose connu les théorèmes classiques vus en Première et Terminale. Nous nous contenterons ici de rappeler le théorème de dérivation des fonctions composées et de donner le théorème concernant la dérivation des fonctions réciproques.

Théorème 1. 2. 1 : *Soit f une fonction dérivable en a, de nombre dérivée ℓ et g dérivable en f(a) de nombre dérivée L. Alors la fonction $g\circ f$ est dérivable en a et son nombre dérivé en a est égal à $\ell\times L$.*

Théorème 1. 2. 2 : *Soit f une bijection dérivable en a, de nombre dérivé ℓ. Si ℓ est non nul, alors f^{-1} est dérivable en f(a) de nombre dérivé $\frac{1}{\ell}$.*

2. Dérivabilité sur un intervalle ; fonction dérivée

Définition 2.1 : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en tout point de I. Alors on dit que f est dérivable sur I et on note f' la fonction définie sur I qui à tout élément x de I associe le nombre dérivé de f en x. Cette fonction est appelée fonction dérivé de f.*

Les formules de calcul de fonctions dérivées sont supposées connues. On se bornera à donner les formules concernant les fonctions composées et les fonctions réciproques.

Théorème 2. 1 : *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et soit g une fonction dérivable sur J. Alors la fonction $g\circ f$ est dérivable sur I et $\forall x\in I, (g\circ f)'(x)=f'(x)g'\circ f(x)$.*

Théorème 2.2 : *Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J, dérivable sur I et de dérivée ne s'annulant pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur J et*

$$\forall x\in J, (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

3. Théorème des accroissements finis.

Dans cette partie, nous préciserons un théorème majeur d'Analyse, source de formules extrêmement fécondes que nous verrons dans la partie suivante.

Théorème 3. 1 dit de Rolle : *Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b], dérivable sur l'intervalle ouvert]a ; b[et telle que f(a) = f(b). Alors, il existe un point $c\in\,]a;b[$ tel que f'(c) = 0.*

Géométriquement, cela signifie qu'il existe au moins un point de la courbe de f en lequel la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des abscisses.

Théorème 3. 2 dit des accroissements finis : *Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b], dérivable sur l'intervalle ouvert]a ; b[. Alors, il existe un point $c\in\,]a;b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.*

Géométriquement, cela signifie qu'il existe au moins un point de la courbe de f en lequel la tangente à la courbe est parallèle à la droite (AB), où A(a ; f(a)) et B(b ; f(b)).

Formule des accroissements finis : *En gardant les mêmes hypothèses que le théorème précédent mais en notant a =x, b =x+h et c = x+θh, avec 0<θ<1, on obtient la formule des accroissements finis :* $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$.

4. Formules de Taylor.

La formule des accroissements finis fournit une approximation d'une fonction par une fonction affine au voisinage d'un point. Dans cette partie, nous allons établir que sous réserve de conditions supplémentaires, on peut obtenir une approximation d'une fonction par un polynôme.

Théorème 4. 1 : Formule de Taylor-Lagrange : *Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b]. On suppose en outre que f est n fois dérivable sur [a ; b] et est n+1 fois dérivable sur]a ; b[. Alors, pour tout x appartenant à [a ; b], il existe un point* $c\in\left]a;x\right[$ *tel que :*

$$\boxed{f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}$$

Cette formule est appelée formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n en a.

Formule de Taylor-Mac Laurin : *En gardant les mêmes hypothèses que le théorème précédent mais en notant c = a+θh, avec 0<θ<1, on obtient la formule de Taylor-Mac Laurin :*

$$\boxed{f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)}$$

En modifiant légèrement les hypothèses, nous obtenons le

Théorème 4. 2 : *Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b]. On suppose en outre que f est n fois dérivable sur [a ; b] et est n+1 fois dérivable en a. Alors, il existe une fonction notée ε vérifiant* $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ *telle que pour tout x appartenant à [a ; b]*

$$\boxed{f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x)}$$

Cette formule est appelée formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de a.
Nous verrons dans le chapitre suivant des applications importantes de cette formule.

Chapitre 3 : Étude locale et asymptotique.

1. *Négligeabilité*

1.1. Définition ; premiers exemples

Définition 1. 1 : *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de* $\in \overline{\mathbb{R}}$. *On dit que f est négligeable devant g en a et on note* $f = o(g)$ *si il existe une fonction* ε *définie au voisinage de a et vérifiant* $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ *telle que, au voisinage de a,* $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

Par la suite, on considèrera des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exemples fondamentaux :

- *En l'infini, si* $n>p$, $x^p=o(x^n)$
- *En* 0, *si* $n>p$, $x^n=o(x^p)$
- *En* $+\infty$, $\ln x=o(x^a)$, *où a désigne un réel strictement positif.*
- *En* $+\infty$, *si* $a>0$, $x^a=o(\mathrm{e}^x)$
- $f=o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

1.2. Propriétés.

Propriété1. 2. 1 : *Si g se s'annule pas au voisinage de a, on a l'équivalence suivante :*

$$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Propriété 1. 2. 2 : Transitivité. *Si en a,* $f=o(g)$ *et* $g=o(h)$, *alors* $f=o(h)$.

Application : *En* $+\infty$, *si* $a>0$, $\ln x=o(x^a)$, *et* $x^a=o(\mathrm{e}^x)$ *donc* $\ln x=o(\mathrm{e}^x)$

Propriété 1. 2. 3 : Règles de calcul

- *Si f=o(g) et si h=o(g), alors f+h=o(g).*
- *Si f=o(g) et si h=o(k), alors fh = o(gk)*
- *Si f=o(g) et si k est un réel, alors kf=o(g)*
- *Si f=o(g), alors, pour toute fonction k définie au voisinage de a, fk =o(gk).*

2. Fonctions équivalentes.

2.1. Définition ; premiers exemples.

Définition 2. 1 : *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est équivalente à g en a et on note* $f \underset{a}{\approx} g$ *si en a,* $f - g = o(g)$.

Propriété 2. 1. 1 : *Si* $f \underset{a}{\approx} g$ *, alors* $g \underset{a}{\approx} f$.

Propriété 2.1.2 : *Si g ≠ 0 au voisinage de a, alors* $f \underset{a}{\approx} g$ *est équivalent à* $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Premiers exemples fondamentaux :

- $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 \underset{\infty}{\approx} a_n x^n$
- $\sin x \underset{0}{\approx} x$
- $\tan x \underset{0}{\approx} x$
- $\cos x - 1 \underset{0}{\approx} -\frac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\approx} x$
- $e^x - 1 \underset{0}{\approx} x$

2.2. Propriétés.

2.2.1. Transitivité

Propriété 2. 2. 1 : *Si* $f \underset{a}{\approx} g$ *et si* $g \underset{a}{\approx} h$ *, alors* $f \underset{a}{\approx} h$.

2.2.2. Lien avec les limites

Propriété 2. 2. 2. 1 : *Si* $f \underset{a}{\approx} g$ *, alors f et g ont même comportement en a, en particulier, f et g ont, si elles existent, même limite en a.*

Propriété 2. 2. 2. 2 : *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell, \ \ell \in \mathbb{R}^*$*, alors* $f \underset{a}{\approx} \ell$.

2.2.3. Opérations

Propriété 2. 2. 3. 1 : *Si* $f \underset{a}{\approx} g$ *et si* $h \underset{a}{\approx} k$ *, alors* $fh \underset{a}{\approx} gk$.

Propriété 2. 2. 3. 2 : *Si* $f \underset{a}{\approx} g$ *alors* $\frac{1}{f} \underset{a}{\approx} \frac{1}{g}$.

Propriété 2. 2. 3. 3 : *Si* $f \underset{a}{\approx} g$ *et si* $h \underset{a}{\approx} k$, *alors* $\frac{f}{h} \underset{a}{\approx} \frac{g}{k}$.

Remarques très importantes :

- *On ne peut ni ajouter, ni soustraire d'équivalents.*
- *On ne peut composer des équivalents.*

3. Développements limités.

3.1. Définition et existence

Définition 3. 1. 1 : *Soit f une fonction définie sur un voisinage V_a du réel a.*

On dit que f possède un développement limité à l'ordre n en a, en abrégé DL_n (f ; a) si il existe un polynôme P_n de degré n au plus tel que si $P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n$, *alors, pour tout* $x \in V_a$, *on a :*

$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$.

Le polynôme P_n s'appelle la partie régulière du développement limité. On peut remarquer que $a_0=f(a)$.

Remarque : *Toute fonction polynôme possède un développement limité à n'importe quel ordre en tout point.*

Théorème 3. 1. 1 : *Soit f une fonction définie sur un voisinage V_a du réel a.*

- *Elle possède un DL à l'ordre 0 en a si et seulement si elle est continue en a.*
- *Elle possède un DL à l'ordre 1 en a si et seulement si elle est dérivable en a.*
- *Si f est n fois dérivable sur V_a, alors elle possède un DL à l'ordre n en a et on a*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o((x-a)^n).$$

Remarque importante : *Il existe des fonctions admettant un DL à l'ordre n en a sans être n fois dérivable en a.*

3.2. Propriétés

- *Si f possède un DL d'ordre n en a, celui-ci est unique.*

- *Si une fonction paire (respectivement impaire) possède un Dl d'ordre n en a, sa partie régulière est paire (respectivement impaire).*
- *Troncature : Si f possède un DL d'ordre n en a dont la partie régulière est* $P_n(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n$, *alors f possède un DL à tout ordre p inférieur ou égal à n de partie régulière est* $P_p(x)=a_0+a_1(x-a)+...+a_p(x-a)^p$.

3.3. Exemples de développements limités.

Tous les développements limités suivants sont au voisinage de 0 et existent à n'importe quel ordre.

- $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-......+(-1)^n x^n+o(x^n)$
- $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+......+x^n+o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$ *où* α *désigne un réel quelconque.*
- $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-...-(-1)^n\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$
- $\ln(1-x)=-(x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...+\dfrac{x^n}{n})+o(x^n)$
- $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$
- $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$
- $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$

3.4. Détermination pratique d'un développement limité.

La formule de Taylor-Young, bien que permettant en théorie d'obtenir de nombreux développements limités, est en pratique d'un usage très malcommode. Nous utiliserons plutôt les développements limités usuels ainsi que les propriétés énoncés ci-après.

3.4.1. Opérations

Si on connaît les développements limités de deux fonctions f et g en un même point a, à deux ordres n et n' éventuellement différents, on peut obtenir les développements limités en a, à l'ordre min(n ; n') de :

- *f+g, en additionnant les parties régulières tronquées à l'ordre min(n ; n').*
- $f \times g$ *en multipliant les parties régulières et en tronquant leur produit à l'ordre min(n ; n').*
- *Si f est dérivable en a, f' en dérivant la partie régulière. Le développement obtenu est alors à l'ordre n – 1.*
- *En intégrant la partie régulière entre a et x, on obtient le développement limité à l'ordre n+1 de* $\int_a^x f(t)dt$.

3.4.2. Composition

Si f possède un développement limité à l'ordre n en a et si g possède un développement limité à l'ordre n en f(a), alors $g \circ f$ *possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en substituant f(x) à x dans le développement de g et en tronquant à l'ordre n.*

Conséquence : développement limité de l'inverse d'une fonction et d'un quotient de deux fonctions.

- *Si f ne s'annule pas en a et si f possède en a un développement limité à l'ordre n du type* $f(x) = f(a) + a_1(x-a) + ... + o((x-a)^n)$, *on peut écrire f(x) sous la forme* $f(a)[1 + \frac{a_1(x-a)}{f(a)} + ... + \frac{o((x-a)^n)}{f(a)}]$ *puis on peut développer la fonction* $\frac{1}{f}$ *en a en utilisant la composée de la fonction* $x \mapsto \frac{a_1(x-a)}{f(a)} + ... + \frac{o((x-a)^n)}{f(a)}$ *et de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.
- *Si g ne s'annule pas en a, on peut développer* $\frac{f}{g}$ *en observant que* $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

Exemple classique *: montrer que, au voisinage de* 0, $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} + o(x^5)$.

4. Applications.

4.1. Recherche de limites

Voir exemples

4.2. Étude locale d'une fonction

Proposition 4. 1 : *Si une fonction f admet en a un développement limité à l'ordre n de la forme* $f(x) = f(a) + a_1(x-a) + ... + o((x-a)^n)$*, avec n>2, alors on a :*

- $f'(a)=a_1$
- *la tangente à* C_f *au point d'abscisse a à pour équation* $y = f(a) + a_1(x-a)$.
- *La position relative de* C_f *et de sa tangente au point d'abscisse a est donnée par le signe de* a_2 *(voir exemples).*

4.3. Étude asymptotique.

Si une fonction est définie au voisinage de l'infini, si sa limite en l'infini est nulle et si il existe un entier n et une fonction h telle que $f(x) = x^n h(x)$ *avec* $\lim_{x \to \infty} h(x) = 0$*, pour étudier les branches infinies de f, on peut effectuer le changement de variable* $X = \frac{1}{x}$ *et rechercher le développement limité en 0 de la fonction g définie par* $g(X) = h(\frac{1}{x})$*, puis en reportant dans f(x), on obtient un développement appelé développement asymptotique de f. On peut alors étudier simplement les branches infinies de f (voir exemples).*

ANNEXE 1 : Formulaire d'analyse

ÉQUIVALENTS USUELS

- $\sin x \underset{0}{\approx} x$
- $\tan x \underset{0}{\approx} x$
- $\cos x - 1 \underset{0}{\approx} -\dfrac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\approx} x$
- $e^x - 1 \underset{0}{\approx} x$
- $(1+x)^\alpha \underset{0}{\approx} 1 + \alpha x$
- $\ln x \underset{1}{\approx} x - 1$

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Tous les développements limités figurant ici sont au voisinage de 0.

- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots - (-1)^n \dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\ln(1-x) = -(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n}) + o(x^n)$
- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

Chapitre 4 : Intégrale de Riemann.

1. *Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier*

1.1. Définition

Le but de cette partie est d'associer à toute fonction en escalier un nombre appelé **intégrale de Riemann** *, nombre qui pourra s'interpréter de manière simple et qui , par extension, pourra être défini pour une classe beaucoup plus large de fonctions.*

Définition 1. 1. 1 :

On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a;b]$, avec a < b, est une ***fonction en escalier*** *si il existe une subdivision du segment $[a;b]$ notée $a_0=a < a_1 < \ldots < a_n=b$ telle que f soit constante sur chaque intervalle $]a_i\,;a_{i+1}[$, $0 \le i \le n-1$.*

Définition 1. 1. 2 : *Avec les notations précédentes, en notant pour $0 \le i \le n-1$ A_i la valeur de f sur l'intervalle $]a_i\,;a_{i+1}[$.*

On appelle ***intégrale au sens de Riemann*** *de la fonction f sur $[a;b]$ le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par : $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(a_{i+1} - a_i)$.*

Propriété 1. 1 :

Dans le cas où f est une fonction en escalier positive sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe de f, l'axe (Ox), les droites d'équations x =a et x =b.

1.2. Propriétés

Propriété 1. 2. 1 : Linéarité

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a;b]$, alors, pour tout réel λ, on a l'égalité suivante : $\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$.

Propriété 1. 2. 2 : Positivité

Soit f une fonction en escalier positive sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Propriété 1. 2. 3 : Croissance

Soit f et g deux fonctions en escalier sur $[a;b]$, telle que $\forall x \in [a;b]$ $f(x) \le g(x)$. Alors on a $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Propriété 1. 2. 4 : Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ *telle que il existe deux réels m et M vérifiant la relation* $\forall x \in [a;b]\ m \leq f(x) \leq M$*.Alors on a :* $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Propriété 1. 2. 5 : Inégalité triangulaire

Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$*. Alors* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Propriété 1. 2. 6 : Relation de Chasles

Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ *et c un réel appartenant à* $[a;b]$*. On a alors l'égalité suivante :* $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Propriété 1. 2. 7 : Parité

Soit f une fonction en escalier sur $[-a;a]$ *où a>0.*

- *Si f est paire, alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- *Si f est impaire, alors* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

2. *Intégrabilité au sens de Riemann*

2.1. Fonction intégrables

Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a;b]$*.*
Considérons l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a;b]$ *inférieures ou égales à f.*
Ces fonctions possèdent une intégrale.
On démontre que l'ensemble des valeurs de ces intégrales possède une borne supérieure notée U(f).
De même, l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier supérieures ou égales à f possède une borne inférieure notée V(f).

On a la définition suivante :
Définition 2. 1 : *Soit f une fonction bornée sur l'intervalle* $[a;b]$*. On dit que f est* **intégrable au sens de Riemann** *sur l'intervalle* $[a;b]$ *si U(f) = V(f) ; On a alors* $\int_a^b f(x)dx$ *= U(f) = V(f).*

2.2. Exemples de fonctions intégrables

Théorème 2. 2. 1 : *Toute fonction bornée et monotone sur l'intervalle* $[a;b]$ *est intégrable au sens de Riemann.*

Théorème 2. 2. 2 : *Toute fonction continue sur l'intervalle* $[a;b]$ *est intégrable au sens de Riemann.*

Théorème 2. 2. 3 : *Toute fonction continue par morceaux sur l'intervalle* $[a;b]$ *est intégrable au sens de Riemann.*

2.3. Propriétés des fonctions intégrables et de l'intégrale

Toutes les propriétés énoncées dans la section 1. 2 restent vraies.
De plus, on peut énoncer les propriétés suivantes.

Propriété 2. 3. 1 :
La somme et le produit de fonctions bornées intégrables sur $[a;b]$ *sont intégrables sur* $[a;b]$.

Propriété 2. 3. 2 :
Dans le cas où f est une fonction positive sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)dx$ *est l'aire, en unité d'aire, du domaine du plan limité par la courbe de f, l'axe (Ox) et les droites d'équations x =a et x =b.*

3. *Intégrale de Riemann d'une fonction continue*

3.1. Lien entre intégrale et primitive.

Théorème 3. 1: *Soit f une fonction continue sur un intervalle* $[a;b]$. *La fonction F définie sur l'intervalle* $[a;b]$ *par :* $\forall x \in [a;b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *est une primitive de f sur* $[a;b]$.

Conséquence 3. 1. 1 : *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.*

Conséquence 3. 1. 2 : *Si f est continue sur l'intervalle* $[a;b]$ *et si F est une primitive de f sur* $[a;b]$, *alors* $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

3.2. Calcul intégral

Théorème 3. 2. 1 : Formule d'intégration par parties
Soit u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur un intervalle $[a;b]$. *On a la relation suivante :* $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

Théorème 3. 2. 2 : Formule de changement de variables
Soit φ *une fonction dérivable, de dérivée continue sur* $[a;b]$ *et f une fonction continue sur l'intervalle* $[\varphi(a);\varphi(b)]$ *(ou l'inverse si* $\varphi(a)>\varphi(b)$*). Alors on a la relation suivante :*

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

ANNEXE 2 : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

Le but de cette annexe est de présenter une technique algébrique permettant de transformer des fractions rationnelles en somme de fractions appelées « éléments simples », ceci afin de faciliter la résolution de certains problèmes comme le calcul intégral, l'étude des séries numériques....

On rappelle la définition d'une fraction rationnelle : il s'agit du quotient de deux polynômes.

1ère étape : *Si le numérateur est d'un degré supérieur ou égal au dénominateur, on effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Ainsi, toute fraction rationnelle peut s'écrire sous la forme de la somme d'un polynôme, éventuellement nul et d'une fraction rationnelle de la forme* $\frac{N}{D}$ *avec d°N < d°D.*

2ème étape : *On factorise dans* $\mathbb{R}$ *le dénominateur. D'après la théorie des polynômes dans* $\mathbb{R}$*, tout polynôme peut se factoriser en produit de polynômes du premier degré ou du second degré sans racine réelle (c'est-à-dire à discriminant strictement négatif).*

La forme de cette factorisation va fournir la forme de la décomposition.

A noter que le numérateur ne joue aucun rôle quant à la détermination de la forme de la décomposition.

3ème étape : *On réalise la décomposition.*

Pour cela, il convient de distinguer deux types d'éléments simples :

- *Les éléments simples de première espèce : ce sont des fractions du type* $\frac{A}{(x-a)^n}$ *où a et A sont des nombres réels et où n est un entier naturel non nul.*
- *Les éléments simples de seconde espèce : ce sont des fractions du type* $\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$ *où A, B, a et b sont des réels, a et b vérifiant la relation* $a^2-4b<0$ *et où n est un entier naturel non nul.*

La forme de la décomposition dépend de la factorisation du dénominateur. Chaque facteur du dénominateur génère des éléments simples correspondant à sa forme :

- *Si un facteur est du type* $(x-a)^{\alpha}$*, la décomposition de la fraction comprend des sommes d'éléments simples de première espèce, l'exposant n prenant toutes les valeurs entières entre* 1 *et α.*
- *Si un facteur est du type* $(x+ax+b)^{\beta}$*, la décomposition de la fraction comprend des sommes d'éléments simples de seconde espèce, l'exposant n prenant toutes les valeurs entières entre* 1 *et β.*

Exemples de formes de décomposition :

$$\frac{3x+2}{(x-5)(x+2)^2}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

$$\frac{x^2+3x-4}{(x-1)(x^2+x+1)(x^2+2x+5)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+2x+5}+\frac{Fx+G}{(x^2+2x+5)^2}$$

Pratique de la décomposition :

Après avoir factorisé le dénominateur et ainsi déterminé la forme de la décomposition, il convient de déterminer les valeurs numériques des coefficients indéterminés A, B, C...

- *Première méthode : on réduit au même dénominateur la forme développée et on identifie les coefficients. Ainsi on se ramène à la résolution d'un système.*
- *Deuxième méthode : on donne à la variable x autant de valeurs numériques que nécessaire afin d'obtenir un système d'équations d'inconnues A, B, C....*

Ces deux méthodes sont toujours utilisables ; cependant, dans le cas de décomposition avec un nombre important d'éléments simples, elles deviennent très vite très « lourdes » !!!

C'est pourquoi il est nécessaire de connaître quelques méthodes très spécifiques qui, si elles ne permettent pas toujours de déterminer tous les coefficients, permettent d'en déterminer très simplement un certain nombre, ce qui allège la pratique de l'une des deux premières méthodes.

Ces méthodes, non exhaustives, sont présentées à travers un exemple.

Exemple pratique de décomposition en éléments simples :

Soit la fraction rationnelle $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^2(x^2+1)}$.

On écrit la forme de la décomposition : $f(x)=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{Dx+E}{x^2+1}$. (1)

- *Pour déterminer A, on multiplie les deux membres de l'égalité* (1) *par x. On obtient alors* $\dfrac{x^3+1}{(x-1)^2(x^2+1)} = A + \dfrac{Bx}{x-1} + \dfrac{Cx}{(x-1)^2} + \dfrac{Dx^2+Ex}{x^2+1}$. *On remplace alors x par la valeur* 0. *Ainsi, on obtient A*=1.
- *Pour déterminer C, on multiplie les deux termes de l'égalité* (1) *par* $(x-1)^2$. *On obtient alors* $\dfrac{x^3+1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A(x-1)^2}{x} + B(x-1) + C + \dfrac{(Dx+E)(x-1)^2}{x^2+1}$. *On remplace alors x par la valeur* 1. *Ainsi on obtient C*=1.
- *On peut également multiplier les deux membres de l'égalité* (1) *par x et faire ensuite tendre x vers* $+\infty$ *ou* $-\infty$. *On obtient alors l'égalité :* $0 = A + B + D$ *ce qui nous donne une équation simple.*
- *On peut également utiliser une méthode semblable à la première en utilisant les racines complexes de* x^2+1.
- *Il reste donc 3 coefficients indéterminés et on dispose d'une équation. On peut alors donner à x deux valeurs très simples afin d'obtenir deux autres équations, par exemple x* = 1 *et x* = -1. *On obtient ainsi le système suivant :*

$$\begin{cases} A=1 \\ C=1 \\ A+B+D=0 \\ \dfrac{A}{2}+B+C+\dfrac{2D+E}{5}=\dfrac{9}{5} \\ -A-\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{4}+\dfrac{-D+E}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=1 \\ B+D=-1 \\ B+\dfrac{2}{5}D+\dfrac{1}{5}E=\dfrac{3}{10} \\ -\dfrac{1}{2}(B+D)+\dfrac{1}{2}E=\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=1 \\ E=\dfrac{1}{2} \\ B+D=-1 \\ B+\dfrac{2}{5}D=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=1 \\ E=\dfrac{1}{2} \\ D=-2 \\ B=1 \end{cases}$$

On obtient ainsi l'égalité : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{-2x+\dfrac{1}{2}}{x^2+1}$.

Chapitre 5 : Séries numériques

1. *Généralités*

1.1. Convergence d'une série

Définition 1. 1. 1 : *On considère une suite numérique* $(u_n)_{n\geq n_0}$. *On appelle suite des sommes partielles associées à la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *la suite* $(S_n)_{n\geq n_0}$ *définie par la relation suivante :* $\forall n \geq n_0, \mathrm{S_n} = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$.

Définition 1. 1. 2 : *Si la suite* $(S_n)_{n\geq n_0}$ *converge vers un réel* ℓ*, on dit que la série de terme général* u_n *converge et à pour somme* ℓ. *On écrit alors* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \ell$. *Sinon, on dit que la série de terme général* u_n *diverge.*

Propriété 1. 1. 1 : *Si la série de terme général* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *converge, alors la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *converge vers 0.*

Propriété 1. 1. 2 : *Soit deux séries de termes généraux* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$.

- *Si ces deux séries convergent vers deux nombres* ℓ *et* ℓ'*, alors la série de terme général* $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ *converge vers* $\ell+\ell'$.
- *Si l'une des deux converge et l'autre diverge, alors la série de terme général* $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ *diverge.*
- *Si les deux séries divergent, alors on ne peut rien dire de la série de terme général* $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$.

1.2. Absolue convergence

Définition 1. 2. 1 : *On dit que la série de terme général* u_n *est absolument convergente si la série de terme général* $|u_n|$ *converge.*

Propriété 1. 2. 1 : *Si une série est à termes de signe constant à partir d'un certain rang, alors il y a équivalence entre absolue convergence et convergence.*

Propriété 1. 2. 2 : *Si une série est absolument convergente, elle est convergente.*

Remarque importante : La réciproque est fausse.

Définition 1. 2. 2 : *Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est appelée série semi-convergente.*

1.3. Exemples de séries convergentes.

1.3.1. Séries géométriques

Si $|q| < 1$, alors la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

1.3.2. Séries de Riemann

On appelle série de Riemann toute série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ où a désigne un réel quelconque.

On a le résultat suivant : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$ converge $\Leftrightarrow a > 1$

1.3.3. Séries exponentielles

$\forall a \in R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$

2. *Séries à termes positifs*

Dans cette partie, nous supposerons que la suite de terme général u_n est à termes tous positifs.

Nous allons donner et établir, pour certains d'entre eux, quelques critères de convergence de la série de terme général u_n.

2.1. Critère de l'équivalence :

si $u_n \approx v_n$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ ont même nature.

2.2. Critère de comparaison :

2.2.1. si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

2.2.2. si, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge.

2.2.3. si, en $+\infty$ $u_n = o(v_n)$ et si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

2.3. Règle de Cauchy

Soit $k = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$. Si $k < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et si $k > 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

2.4. Règle de D'Alembert :

Soit $k = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si $k < 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et si $k > 1$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

Chapitre 6 : Séries entières

1. *Séries entières complexes*

1.1. Définition

Définition 1. 1. 1 : *On considère une suite complexe* $(a_n)_{n\geq 0}$. *On appelle série entière d'une variable complexe toute série formelle de la forme* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *où z désigne un nombre complexe.*

Remarque : Pour z = 0, toute série entière est convergente.

Une série entière étant une série à termes complexes, la seule notion de convergence possible est la convergence absolue. On a donc les résultats suivants ;

1.2. Convergence

Théorème 1. 2 : *Soit la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. *Il existe un unique R, nombre réel positif ou+∞ tel que pour tout nombre complexe z, si* $|z| < R,$ *la série entière est absolument convergente et si* $|z| > R,$ *la série entière est divergente.*

Remarque : si R =+∞, alors la série entière est convergente pour tout complexe z.

La démonstration de ce théorème repose sur le résultat suivant :

Lemme 1. 2 : *Si il existe un réel r tel que la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *soit absolument convergente pour z=r, alors pour tout nombre complexe z tel que* $|z| \leq r$, *la série entière est absolument convergente.*

Définition 1. 2 : *Le nombre R est appelé rayon de convergence de la série entière et l'ensemble des nombres complexes vérifiant* $|z| < R$ *est appelé disque de convergence de la série entière.*

Dans le cas où R =+∞, le disque de convergence est le plan complexe en totalité ; dans le cas où R =0, le disque de convergence est réduit à 0.

Si R ≠0, on note f(z) la somme de la série entière. f est donc une fonction d'une variable complexe définie sur le disque de convergence de la série entière.

Remarque : On ne sait rien à priori de la convergence ou non de la série entière pour les nombres complexes z tels que $|z| = R$.

1.3. Calcul du rayon de convergence

On peut énoncer, à l'aide des règles de D'Alembert et de Cauchy, deux méthodes permettant de calculer directement le rayon de convergence R d'une série entière. Cependant, ces deux méthodes ne sont pas universelles.

***Règle de Cauchy :** Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R.*

Si on pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, alors, si ℓ=0, R =+∞, si ℓ=+∞, R = 0 et si 0<ℓ, $R = \frac{1}{\ell}$.

***Règle de D'Alembert :** Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R.*

Si on pose $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, alors, si ℓ=0, R =+∞, si ℓ=+∞, R = 0 et si 0<ℓ, $R = \frac{1}{\ell}$.

1.4. Exemples.

1.4.1. Série géométrique.

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour somme $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

1.4.2. Série exponentielle.

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence +∞. Sa somme est appelée fonction exponentielle et est notée e^z.

1.5. Opérations.

***Théorème 1. 4. 1 :** Soit la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R et de somme f(z) et la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ de rayon de convergence R' et de somme g(z).*

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence inf(R ;R') et pour somme f(z)+g(z).

2. *Séries entières réelles*

Dans le cas d'une série entière réelle, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est une suite de nombres réels et la variable, notée alors x est réelle. Le domaine de convergence est alors l'intervalle ouvert

]-*R* ; +*R*[. *La fonction somme f est une fonction d'une variable réelle qui possède certaines propriétés extrêmement importantes.*

2.1. Propriétés de la somme d'une série entière réelle.

Dans cette partie, nous supposerons que R est différent de 0.

Théorème 2. 1 : *Soit la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *de rayon de convergence R et de somme f(x). Alors la fonction f est indéfiniment dérivable sur l'intervalle*]-R ; +R[*et les dérivées successives de f s'obtiennent en dérivant « terme à terme » la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *. Ainsi, par exemple, la série entière* $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ *a pour rayon de convergence R et pour somme f'(x).*

Une conséquence de ce théorème est que f possède un développement de Taylor en tout point de l'intervalle]-R ; +R[. *Ce qui nous permet d'obtenir le résultat suivant.*

Théorème 2. 1. 1 : *Avec les notations du théorème 2.1,* $\forall n \in N, a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$*.*

Une conséquence immédiate de ce théorème est le fait que si deux fonctions f et g sont somme d'une même série entières sur un voisinage de 0, alors elles sont égales.

Théorème 2. 1. 2 : *Avec les notations du théorème 2. 1, on peut intégrer terme à terme une série entière réelle et on obtient* $\forall x \in \left]-R;+R\right[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

2.2. Développement en série entière d'une fonction.

Le problème abordé ici est le suivant : une fonction f étant donnée, à quelle condition possède t-elle un développement en série entière, c'est-à-dire peut-elle s'écrire comme somme d'une série entière ?

Théorème 2. 2 : *Une fonction f définie sur un intervalle contenant 0 est développable en série entière si et seulement si elle est indéfiniment dérivable et si la série entière dite série de Mac Laurin* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ *converge vers f au voisinage de 0.*

Nous verrons au cours des TD des méthodes d'obtention des développements en série entière d'une fonction donnée ainsi qu'une application importante concernant la résolution d'équations différentielles.

ANNEXE 3 : Séries entières

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ $\qquad R=1$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$ $\qquad R=1$
- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$ $\qquad R=1$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$ $\qquad R=1$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$ $\qquad R=+\infty$