

Algèbre linéaire d'un point de vue algorithmique

chap.VI ESPACES EUCLIDIENS ET APPLICATIONS

1 Définitions de base

En vrac: vecteurs dans le plan ou l'espace, module d'un vecteur, support d'un vecteur, vecteurs de même direction, vecteurs de même sens, vecteurs équivalents, somme de vecteurs (la règle du parallélogramme), produit d'un vecteur par un scalaire.

Système de coordonnées, coordonnées d'un vecteur dans un système de coordonnées $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$;
 $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Proposition 1. *Propriétés du calcul vectoriel*

Soient (u,v,w) des vecteurs et (k,l) des scalaires

$$u+v=v+u$$

$$u+0=0+u$$

$$u+(-u)=(-u)+u=0$$

$$k(u+v)=ku+kv$$

$$(k+l)u=ku+lu$$

$$k(lu)=(kl)u.$$

Définition 2. *Produit scalaire*

Soient deux vecteurs u et v dans le plan ou l'espace leur produit scalaire est un scalaire, qui se calcule comme suit:

i) dans le plan si $u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$

ii) dans l'espace si $u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ et $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

Proposition 3. *Propriétés du produit scalaire*

1. Soient trois vecteurs u , v et w dans le plan ou l'espace

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$\langle u, u \rangle \geq 0$$

$$\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$$

$$\langle u, u \rangle = \|u\|^2.$$

2. Soit θ l'angle formé par les deux vecteurs u et v

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos(\theta)$$

d'où : si u et v sont **non nuls**

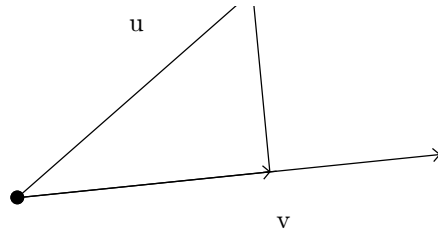
u et v sont orthogonaux si et seulement si $\langle u, v \rangle = 0$ (on notera cela $u \perp v$).

Exercice 1.

Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, déterminer l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v .

Soit $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, déterminer l'ensemble des vecteurs orthogonaux à v et à w .

2. Projection orthogonale



Définition 4. La projection orthogonale du vecteur u sur le vecteur v (non nul!)

On note $\text{proj}_v(u)$ le projeté orthogonal de u sur v ; on le calcule comme suit: $\text{proj}_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$.

Il a la propriété: $u - \text{proj}_v(u)$ est orthogonal à v .

Exercice 2. Dans \mathbb{R}^3 on considère le vecteur $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la projection orthogonale de $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ sur v .

b. Déterminer la projection orthogonale de $u' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ sur v .

c. Déterminer l'ensemble des vecteurs z tels que $\text{proj}_v(u) = \text{proj}_v(z)$.

3. Produit vectoriel (seulement dans l'espace \mathbb{R}^3)

Définition 5. Soient u et v deux vecteurs de l'espace

On désignera par $u \wedge v$ (en anglais parfois $u \times v$) le vecteur $\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} u & v & u \wedge v \\ u_1 & v_1 & \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \\ u_2 & v_2 & \begin{vmatrix} u_3 & v_3 \\ u_1 & v_1 \end{vmatrix} \\ u_3 & v_3 & \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \\ u_1 & v_1 & \end{array}$$

; on peut résumer ce calcul comme suit

Proposition 6. *Propriétés du produit vectoriel*

Soient u, v et w trois vecteurs de l'espace, k un réel

0. $u \wedge v = -v \wedge u$
1. $u \wedge v$ est orthogonal à u
2. $u \wedge v$ est orthogonal à v
3. $\|u \wedge v\|^2 + \langle u, v \rangle^2 = \|u\|^2 \|v\|^2$
4. $\langle u, v \rangle \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$ (double produit vectoriel).
5. $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$
6. $k(u \wedge v) = (ku) \wedge v = u \wedge (kv)$
7. $u \wedge 0 = 0 \wedge u = 0$

Théorème 7. *Produit vectoriel et colinéarité*

Soient u et v deux vecteurs non nuls de l'espace,

u et v colinéaires $\iff u \wedge v = 0$.

Exercice 3. Soit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et l'application $f_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\forall w \in \mathbb{R}^3, f_v(w) = v \wedge w$.

- a. Montrer que f_v est une application linéaire de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.
- b. Déterminer son noyau et son rang.
- c. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3, \exists w \in \mathbb{R}^3, x = f_v(w) \iff x \perp v$.

4. Droites et plans dans l'espace \mathbb{R}^3

Proposition 8. *Equation du plan passant par un point P_0 et ayant le vecteur n comme vecteur normal.*

Exercice 4. Dans \mathbb{R}^3 déterminer l'équation du plan passant par $A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et ayant comme vecteur normal le vecteur $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Proposition 9. *Paramétrisation de la droite passant par un point P_0 et dirigée par le vecteur n*

Exercice 5. Dans \mathbb{R}^3 déterminer une paramétrisation de la droite passant par $A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. Le produit scalaire dans \mathbb{R}^n

Définition 10. *Le produit scalaire de vecteurs de \mathbb{R}^n*

Soient deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ on définit leur produit scalaire par $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$.

Théorème 11. *Propriétés du produit scalaire*

Soient trois vecteurs $(u, v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et un scalaire $k \in \mathbb{R}$

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3. $\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$
5. $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$.

Définition 12. *Norme (euclidienne) et distance sur \mathbb{R}^n*

Soit un vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$, on définit sa norme $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$.

Soient deux points $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$, on définit leur distance $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$.

Théorème 13. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soient deux vecteur $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

Théorème 14. *Propriétés de la norme euclidienne et de la distance*

Soient trois vecteur (u, v, w) et un scalaire k

1. $\|u\| \geq 0$.
2. $\|u\| = 0 \iff u = 0$
3. $\|ku\| = |k| \|u\|$
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire)
- 1'. $d(u, v) \geq 0$.
- 2'. $d(u, v) = 0 \iff u = v$.
- 3' $d(u, v) = d(v, u)$
- 4' $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (inégalité du triangle)

Définition 15.

On dit que deux vecteurs u et v sont orthogonaux lorsque

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Théorème 16. *de Pythagore*

Soient deux vecteurs orthogonaux u et v , alors $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Théorème 17. *La projection orthogonale d'un vecteur u sur le vecteur v (non nul).*

On note $\text{proj}_v(u)$ le projeté orthogonal de u sur v ; on le calcule comme suit: $\text{proj}_v(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} v$.

Il a la propriété: $u - \text{proj}_v(u)$ est orthogonal à v .

6. Représentation matricielle du produit scalaire de \mathbb{R}^n

On considérera un vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$ comme une matrice à n lignes et 1 colonne; le produit scalaire de deux vecteurs est alors le produit de deux matrices, une matrice-ligne et une matrice colonne:

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} = {}^t u v = {}^t v u.$$

Proposition 18. Soient $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, {}^t A v \rangle.$$

Remarque 19. Traduction des systèmes d'équations linéaires en termes de produit scalaire

$$AX = b \iff \begin{pmatrix} \langle L_1, X \rangle \\ \dots \\ \langle L_n, X \rangle \end{pmatrix} = b.$$

7. Orthogonalité (suite)

Définition 20. *L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel*

Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n on désigne par W^\perp l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de W ; c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , appelé l'« orthogonal » de W .

Théorème 21. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ le noyau de A est l'orthogonal de l'espace des lignes de A .

Exercice 6. Dans \mathbb{R}^p on considère une famille libre (v_1, \dots, v_n) telle que pour chaque i $v_i = \begin{pmatrix} v_{i1} \\ v_{i2} \\ \dots \\ v_{ip} \end{pmatrix}$ et

$$F = \text{Vect}((v_1, \dots, v_n)).$$

a. Déterminer au plus vite la dimension de F .

b. Ecrire le système que doivent vérifier les vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$ pour appartenir à F^\perp .

c. Déterminer la dimension de l'ensemble des solutions de ce système.

d. En déduire la dimension de F^\perp .

Théorème 22.

Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n alors

1. $W \cap W^\perp = \{0\}$.
2. Si on concatène une base de W et une base de W^\perp on obtient une base de \mathbb{R}^n
3. Tout vecteur x de \mathbb{R}^n s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur x_W de W et d'un vecteur x_W^\perp de W^\perp .

Exercice 7. Dans \mathbb{R}^4 on considère la famille libre (v_1, v_2) telle que $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

- a. Déterminer au plus vite la dimension de F et une base de F .
- b. Après avoir écrit le système que doivent vérifier les vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ pour appartenir à F^\perp .
- c. Déterminer une base de F^\perp
- d. Vérifier que la concaténation de cette base de F et de cette base de F^\perp est une base de \mathbb{R}^4 .

Définition 23. La projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel W

Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Si x est un vecteur de \mathbb{R}^n , et si $x = x_W + x_W^\perp$ où $x_W \in W$, $x_W^\perp \in W^\perp$, x_W est appelé le projeté orthogonal de x sur W .

Proposition 24. La distance d'un vecteur x au sous-espace W

Par application du théorème de Pythagore $\|x - x_W\| = \min \{\|x - y\|, y \in W\}$, c'est la raison pour laquelle cette norme est appelée la distance de x au sous-espace W .

Proposition 25. Méthode de détermination de la projection orthogonale d'un vecteur sur W

Soit W un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , (v_1, \dots, v_q) une base de W , et x un vecteur de \mathbb{R}^n et x_W sa

projection orthogonale sur W , alors x_W est la seule solution à
$$\begin{cases} x_W \in W \\ \langle v_1, x - x_W \rangle = 0 \\ \langle v_2, x - x_W \rangle = 0 \\ \dots \\ \langle v_q, x - x_W \rangle = 0 \end{cases}.$$

En posant $x_W = x_1 v_1 + \dots + x_q v_q$ on obtient le système
$$\begin{cases} \langle v_1, v_1 \rangle x_1 + \langle v_1, v_2 \rangle x_2 + \dots + \langle v_1, v_q \rangle x_q = \langle v_1, x \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle x_1 + \langle v_2, v_2 \rangle x_2 + \dots + \langle v_2, v_q \rangle x_q = \langle v_2, x \rangle \\ \dots \\ \langle v_q, v_1 \rangle x_1 + \langle v_q, v_2 \rangle x_2 + \dots + \langle v_q, v_q \rangle x_q = \langle v_q, x \rangle \end{cases}.$$

Exercice 8. Dans \mathbb{R}^4 on considère $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$, où $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Déterminer la projection orthogonale de x sur F .

{

Définition 26. famille orthogonale, orthonormale de vecteurs de \mathbb{R}^n

Une famille (v_1, \dots, v_t) de vecteurs de \mathbb{R}^n est dite orthogonale lorsque $\forall i \in \{1, \dots, t\}, \forall j \neq i, \langle v_i, v_j \rangle = 0$.

Elle sera dite orthonormée lorsque

i) elle est orthogonale

ii) $\forall i \in \{1, \dots, t\}, \|v_i\| = 1$.

On appellera base orthonormée toute base qui est orthonormée (surprenant ?).

Théorème 27. Coordonnées dans une base orthonormée

Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et une base orthonormée (v_1, \dots, v_t) de V , alors

quel que soit $u \in V$, $u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_t \rangle v_t$.

Théorème 28. La projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel dont on connaît par chance une base orthonormée

Soit V un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et une base orthonormée (v_1, \dots, v_t) de V , alors

quel que soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle x, v_t \rangle v_t$ est la projection orthogonale de x sur V .

Théorème 29. (Gram-Schmidt)

Tout sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n possède une base orthonormée.

}

8. Une superbe application: la résolution au sens des moindres carrés de l'équation $AX=b$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et un vecteur colonne $b \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et on suppose que l'équation $AX=b$ ne possède pas de solution.

On appellera solution au sens des moindres carrés tout vecteur colonne X_0 tel que $\|AX_0 - b\| = \min \{\|AX - b\|, X \in \mathbb{R}^p\}$; on sait que ce sera le cas lorsque $AX_0 = \text{proj}_{\text{col}(A)}(b)$.

Théorème 30. Caractérisation des solutions au sens des moindres carrés

X_0 est une solution au sens des moindres carrés si et seulement si ${}^t A A X_0 = {}^t A b$.

Si les colonnes de A sont indépendantes la solution au sens des moindres carrés est unique et vaut

$X_0 = ({}^t A A)^{-1} {}^t A b$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer la solution au sens des moindres carrés de l'équation $AX=b$.

Objectifs:

1. Savoir calculer le produit scalaire de deux vecteurs dans le plan et l'espace.
2. Savoir trouver la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre.
3. Savoir déterminer l'équation d'un plan dans l'espace (à partir d'un point et d'un vecteur normal).
4. Savoir déterminer une paramétrisation d'une droite dans l'espace (à partir d'un point et d'un vecteur directeur)
5. Savoir calculer la distance d'un point à un plan.

6. Savoir calculer le produit scalaire de deux vecteurs dans \mathbb{R}^n .
7. Connaître et savoir utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
8. Savoir trouver la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre dans \mathbb{R}^n .
9. Savoir déterminer l'orthogonal d'un sous-espace de \mathbb{R}^n .
10. Savoir déterminer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace de \mathbb{R}^n .
11. Savoir déterminer une (la) solution d'un système d'équations linéaires au sens des moindres carrés.

9. Activité informatique Matlab

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et le système $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Expliquer pourquoi il ne possède pas de solution.
2. Déterminer informatiquement sa solution au sens des moindres carrés.