TD : Voix et Image

TD n°1 : Vibrations et ondes

Exercice 1 :

Question 1 :

Bilan des forces :

Il y a le poids $\vec{P} = mg \times \vec{z}$ qui tire donc vers le bas,.

La force de rappel du ressort $\vec{Fr} = -k\left(z - l_0\right) \times \vec{z}$ qui tire vers le haut.

A l'équilibre : $z = l_1$, donc $\vec{P} = \vec{Fr} = \vec{0}$

Projection selon (O, z) : $mg - k\left(l_1 - l_0\right) = 0$

Donne $k\left(l_1 - l_0\right) = mg$

Donc $l_1 = l_0 + \dfrac{mg}{k}$

Remarque : $\dfrac{mg}{k} = \dfrac{N}{N.m^{-1}} = m$

Application numérique :

$l_0 = 0{,}1m$

$m = 1g = 10^{-3}kg$

$g = 10m.s^{-2}$

$k = 0{,}5N.m^{-1}$

Donc : $l_1 = 0{,}1 + \dfrac{10^{-3} \times 10}{0{,}5} = 0{,}12m$

Question 2 :

Principe fondamental de la dynamique :

$\vec{Fr} + \vec{P} = m\vec{a}$

Rappel : Position = $z(t)$

Vitesse = $v(t) = \int z(t) = \dot{z}$

Accélération = $a(t) = \int v(t) = \ddot{z}$

Projection sur (O, z) : $m\ddot{z}(t) = mg - k\left(z(t) - l_0\right)$

Il faut étudier le déplacement de m par rapport à la position d'équilibre.

On pose : $z(t) = l_1 + \underbrace{z_e(t)}_{\substack{oscillations \\ autour\ de\ la \\ position\, de\, l_1}}$

Alors $\dot{z}(t) = 0 + \dot{z}_e(t)$

Et $\ddot{z}(t) = \ddot{z}_e(t)$

Dans (E) : $m\ddot{z}_e(t) = mg - k\left(l_1 + z_e(t) - l_0\right)$

$$= mg - k\left(k + \frac{mg}{k} + z_e(t) - l_0\right)$$

$$= mg - k\frac{mg}{k} - kz_e(t)$$

$$m\ddot{z}_e(t) = -kz_e(t)$$

Donc l'équation différentiel du mouvement est : $m\ddot{z}_e(t) + kz_e(t) = 0$

(E) est une équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants.

Question 3 :

La solution générale de (E) s'écrit :

$z_e(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où A et B sont des constantes.. Avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

La fréquence et la pulsation sont liées par $\omega = 2\pi f$

Donc $f = \frac{\omega}{2\pi}$ donne $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Application numérique :

$k = 0,5 N.m^{-1}$

$m = 10^{-3kg}$

Donc $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0,5}{10^{-3}}} = 3,56 Hz$

Donc $T = \frac{1}{3,56} = 0,28 s$

Exercice 3 :

Question 1 :

A $t = 0s$, le haut de la corde est à 20cm.
A $t = 0,5s$, le haut de la corde est à 40cm.

$$v = \frac{d}{t} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4 m.s^{-1}$$

Question 2 :

Phase 1 : L'onde n'est pas encore arrivée : $t : 0 \to t_1$
Le point A se trouve à $0,4m$ de la corde à $t = 0$ donc :

$$t_1 = \frac{d_1}{v} = \frac{0,4}{0,4} = 1s$$

Ainsi pour $t \in [0; t_1]$, $u(x_a, t) = 0$

$$v_1 = \frac{u}{t} = 0 cm.s^{-1}$$

Phase 2 : Le point A descend : $t : t_1 \rightarrow t_2$

Durant cette phase, u va varier de 0 à -1.

$$t_2 = \frac{d_2}{v} = \frac{0,5}{0,4} = 1,25s$$

$$v_2 = \frac{u}{t} = -\frac{1}{0,25} = -4cm.s^{-1}$$

Phase 3 : Le point A remonte : $t : t_2 \rightarrow t_3$

Durant cette phase, u va varier de -1 à 2

$$t_3 = \frac{d_3}{v} = \frac{0,6}{0,4} = 1,5s$$

$$v_3 = \frac{u}{t} = \frac{3}{0,25} = 12cm.s^{-1}$$

Phase 4 : Le point descend $t : t_3 \rightarrow t_4$

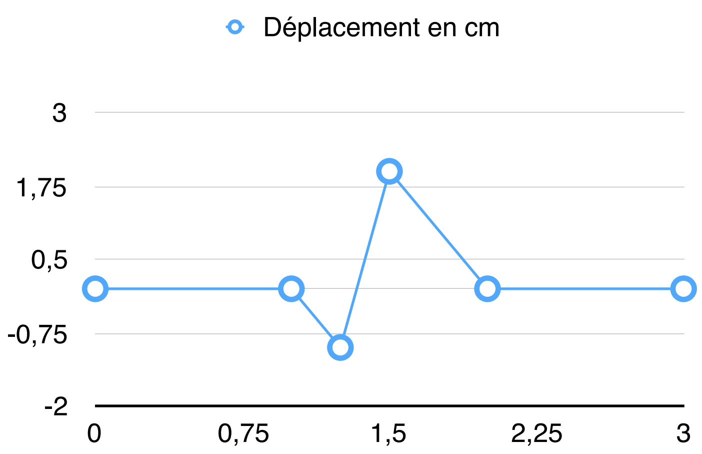
Durant cette phase, u va varier de 2 à 0.

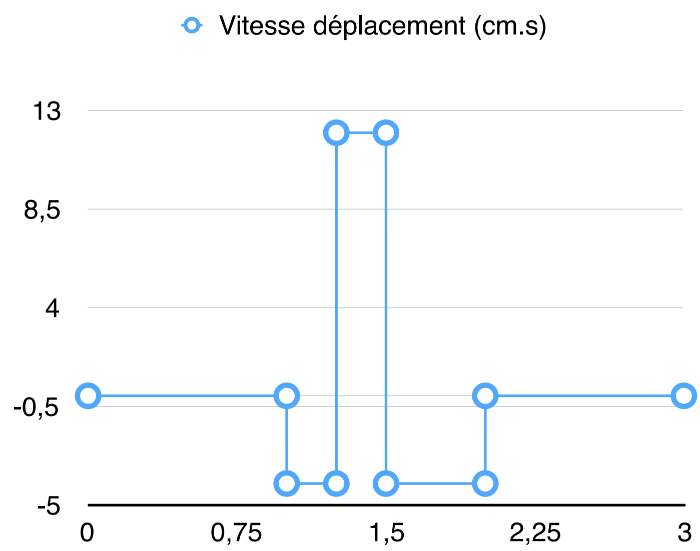
$$t_4 = \frac{d_4}{v} = \frac{0,8}{0,4} = 2s$$

$$v_4 = \frac{u}{t} = -\frac{2}{0,5} = -4cm.s^{-1}$$

Phase 5 : L'onde est passée : $t : t_4 \rightarrow \infty$

Durant cette phase, u va être égal à 0.





Exercice 4 :

Propagation dans le sens des x croissant.
Vitesse de propagation v

A $t = 0s : u(x,0) = Ae^{-\alpha x^2}$

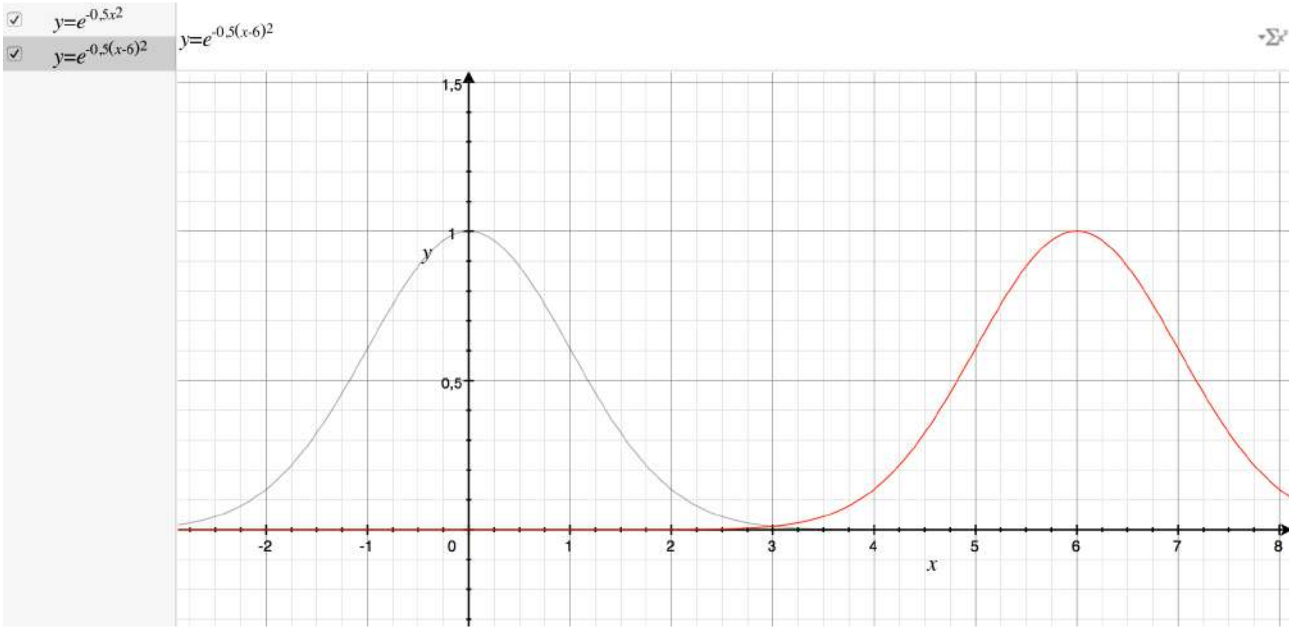
Pour une onde progressive plane : $f(x,t) = f(x - ct)$ où $c = v$

On remplace x par $x - vt$.

Donc $u(x,t) = Ae^{-\alpha(x-vt)^2} = 1e^{-0,5(x-0,2t)^2}$

$t = 0 \quad u(x,0) = e^{-20x^2}$

$t = 0,3 \; u(x,0,3) = e^{-0,5(x-6)^2}$



TD 2 : Onde acoustique

Exercice 5 :

Question 1 :

Rappel de cours : Relation de dispersion : $\omega = kc$ ou $\lambda = ct$ avec $\omega = 2\pi f$ $k : vecteur\ d'onde$

Données : $\begin{cases} f = 40kHz = 40\times10^{3}Hz \\ c = 340m.s^{-1} \end{cases}$

$$\begin{aligned}\lambda &= c\times t \\ &= \frac{c}{f} \\ &= \frac{340}{40\times10^{3}} \\ &= 8{,}5\times10^{-3}m\end{aligned}$$

Question 2 :

$$T = \frac{1}{f}$$

Donc $T = \dfrac{1}{40\times10^{3}} = 0{,}25\times10^{-4}s$

Distance parcouru pendant une période :
$d = T\times c$

$d = 0{,}25\times10^{-4}\times340 = 8{,}5\times10^{-3}$

On retrouve la longueur d'onde, en effet, λ est la distance parcouru par l'onde pendant une période de temps.

Question 3 :

Domaine de fréquence audible : $20Hz$ à $20kHz$
Donc avec une fréquence de $15kHz$, on est dans le domaine audible (aigu).
La vitesse de propagation ne change pas.

Exercice 6 :

Question 1 :

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$\lambda_{\min} = \frac{340}{20\times10^{4}} = 17\times10^{-3}m = 1{,}7cm$$

$$\lambda_{\min} = \frac{340}{20} = 17m$$

Question 2 :

Soit p , le nombre de demi-tons qui séparent le La_3 de la note n .

$$
\begin{aligned}
19\ 900 = 440 \times 2^{\frac{p}{12}} \quad & \Leftrightarrow \frac{19900}{440} = 2^{\frac{p}{12}} \\
& \Leftrightarrow 45,2 = \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{p}{12}} \\
& \Leftrightarrow 49,75 = e^{\frac{p\ln 2}{12}} \\
& \Leftrightarrow \ln 45,2 = \frac{p\ln 2}{12} \\
& \Leftrightarrow p = \frac{12\ln 45,2}{\ln 2} \\
& \Leftrightarrow p = 66 = 12 \times 5 + 6
\end{aligned}
$$

Il faut donc faire 5 octaves et 6 demis tons.

Conclusion : Le $\mathrm{Re}_{\#9}$ a pour fréquence $19\ 900\,Hz$

Exercice 7 :

Question 1 :

$R_1 = 5m$

Donc $I_1 = \dfrac{P_{source}}{4\pi r_1^{\,2}}$

$R_2 = 45m$

Donc $I_2 = \dfrac{P_{source}}{4\pi r_2^{\,2}}$

Calculons la différence de niveau :

$$
\begin{aligned}
L_2 - L_1 &= 10\log\frac{I_2}{I_0} - 10\log\frac{I_1}{I_0} \\
&= 10\log\left(\frac{I_2}{I_0} \times \frac{I_0}{I_1}\right) \\
&= 10\log\frac{I_2}{I_1} \\
&= 10\log\left(\frac{P_{source}}{4\pi r_2^{\,2}} \times \frac{4\pi r_1^{\,2}}{P_{source}}\right) \\
&= 10\log\frac{r_1^{\,2}}{r_2^{\,2}} \\
&= 20\log\frac{r_1}{r_2} \\
&= -19,1\,dB
\end{aligned}
$$

Il y a donc une différence de $19,1\,dB$ entre L_1 et L_2

Question 2 :

Partie a :

On recherche me niveau sonore pour 50 personnes (L_{50})

Données : $L_{10} = 60dB$

$I_{50} = 5 \times I_{10}$

$P_0 = 2 \times 10^{-5} Pa$

$I_0 = 10^{-12} W.m^{-2}$

Formules : $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

$L = 20\log\left(\frac{Peff}{P_0}\right)$

Partie b :

On utilise la deuxième formule :

$$L_{50} = 10\log\left(\frac{I_{50}}{I_0}\right)$$

$$L_{50} = 10\log\left(\frac{5I_{10}}{I_0}\right)$$

$$L_{50} = 10\log\left(\frac{I_{10}}{I_0}\right) + 10\log(5)$$

$$L_{50} = L_{10} + 10\log(5)$$

$$L_{50} = 60 + 6{,}9 \simeq 67$$

Dans la salle de conférence :

$$L_{conf\,50} = L_{50} - 20$$
$$= 47dB$$

Partie c :

D'après la partie b, pour n personnes, le niveau acoustique dans la salle de cocktail est :

$$L_n = L_{10} + 10\log\left(\frac{I_n}{I_{10}}\right)$$

Et $\frac{I_n}{I_{10}} = \frac{n}{10}$

Donc $L_n = L_{10} + 10\log\left(\frac{n}{10}\right)$

Alors la salle de conférence le niveau acoustique est :

$$L_{conf} = L_{10} - 20 + 10\log\left(\frac{n}{10}\right)$$

On veut vérifier la condition $L_{conf} \leq 55$, c'est à dire :

$$60 - 20 + 10\log\left(\frac{n}{10}\right) \leq 55$$

$$10\log\left(\frac{n}{10}\right) \leq 15$$

$$\log\left(\frac{n}{10}\right) \leq 1{,}5$$

$$\log(n) - \log(10) \leq 1{,}5$$

$$\log(n) \leq 2{,}5$$

$$n \leq 10^{2{,}5}$$

$$n \leq 316$$

TD 3 : Décomposition harmonique

Exercice 8 :

Question 2 :

Partie 1 :

Amplitude $A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}$
On donne la fonction périodique de T (voir poly)

Propriété : Si f est une fonction paire, alors $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$
Si f est une fonction impaire, alors $a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

Ici, la fonction étudié est impaire donc les a_n sont nuls. Il reste à calculer les b_n :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{\underbrace{f(t)}_{impaire}\underbrace{\sin(n\omega t)}_{impaire}dt}_{paire} \text{ (avec } \omega = 2\pi \quad f = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \times 2 \times \int_0^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{=1}\sin(n\omega t)$$

$$= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 1 \times \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

$$= \frac{4}{T}\left[-\frac{T}{2n\pi}\cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{4}{T}\frac{T}{2n\pi}\left[\cos\left(\frac{2n\pi}{T}\times\frac{T}{2}\right) - \cos(0)\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1 - \cos(n\pi)\right]_0^{\frac{T}{2}}$$

Rappel : $\cos(n\pi) = \begin{cases} +1 \; pour \; n \; paire \\ -1 \; pour \; n \; impaire \end{cases}$

Donc $b_n = \begin{cases} 0 \; si \; n \; est \; paire \\ \dfrac{4}{n\pi} si \; n \; est \; impaire \end{cases}$

Ainsi :

$b_1 = \dfrac{4}{\pi}$ $\qquad b_3 = \dfrac{4}{3\pi}$ $\qquad b_5 = \dfrac{4}{5\pi}$

$b_2 = 0$ $\qquad b_4 = 0$

Amplitudes : $A_n = \sqrt{a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}}$

Ici $a_n = 0$

Donc $A_n = |b_n|$

On peut donc tracer le spectre d'amplitude de cette fonction en mettant en ordonné l'amplitude et en abscisse la fréquence $\left(f_1, 2f_1..nf_1\right)$

Partie 2 :

On défini la fonction g par $g(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

La série de Fournier de cette fonction est déjà écrite avec :

$a_0 = 0$

$a_1 = 1$

$a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$

$b_n = 0$

Son spectre ne contient que le fondamental.
En amplitude, $A_1 = 1$ (tous les autres sont nuls)
Il n'y a pas d'harmoniques.

TD 4 : Phénomène ondulatoires

Exercice 10 :

Question 1 :

$y(t)$ est le déplacement au point de réception pour la fréquence :

$y_1(t) = A\sin(2\pi f_1 t + \varphi_1)$ et $y_2(t) = A\sin(2\pi f_2 t)$

Donc $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

$$= A\sin(2\pi f_1 t) + A(2\pi f_2 t)$$

Question 2 :

$$\begin{aligned} y(t) &= A\sin(2\pi f_1 t) + A(2\pi f_2 t) \\ &= A \times 2\sin\frac{2\pi f_1 t + 2\pi f_2 t}{2}\cos\frac{2\pi f_1 t - 2\pi f_2 t}{2} \\ &= A \times 2\sin(\pi f_1 t + \pi f_2 t)\cos(\pi f_1 t - \pi f_2 t) \\ &= A \times 2\sin\left(\pi t(f_1 + f_2)\right)\cos\left(\pi t(f_1 - f_2)\right) \end{aligned}$$

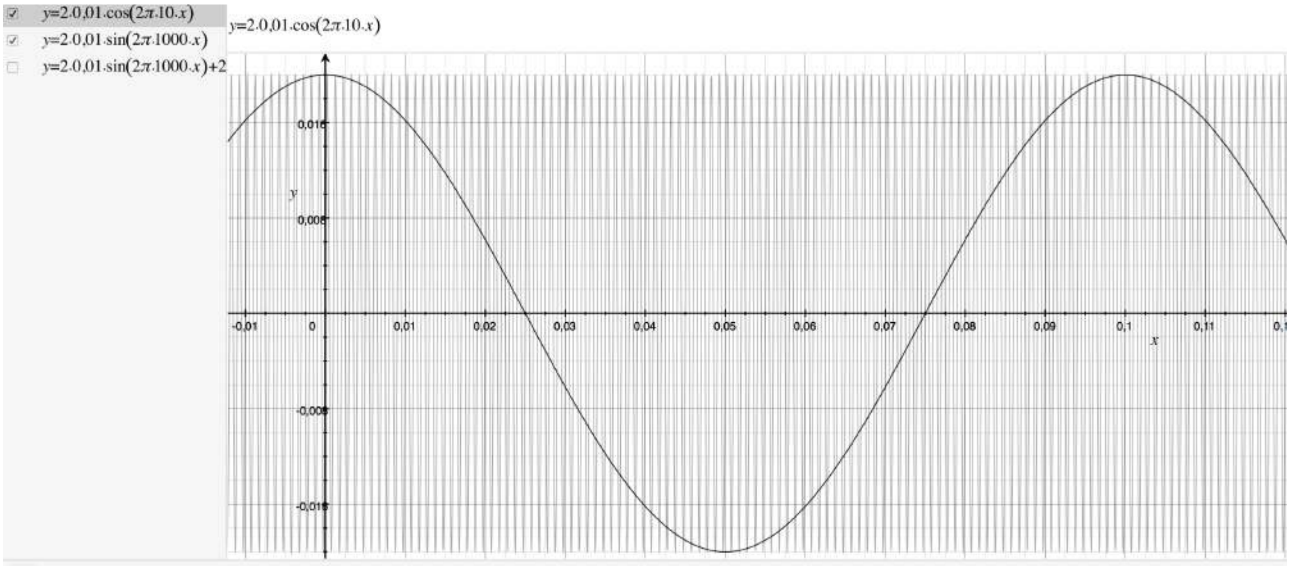
On a obtenu 2 fréquences :

La moyenne des fréquences $\frac{f_1 + f_2}{2} = 1000\,Hz$ est audible

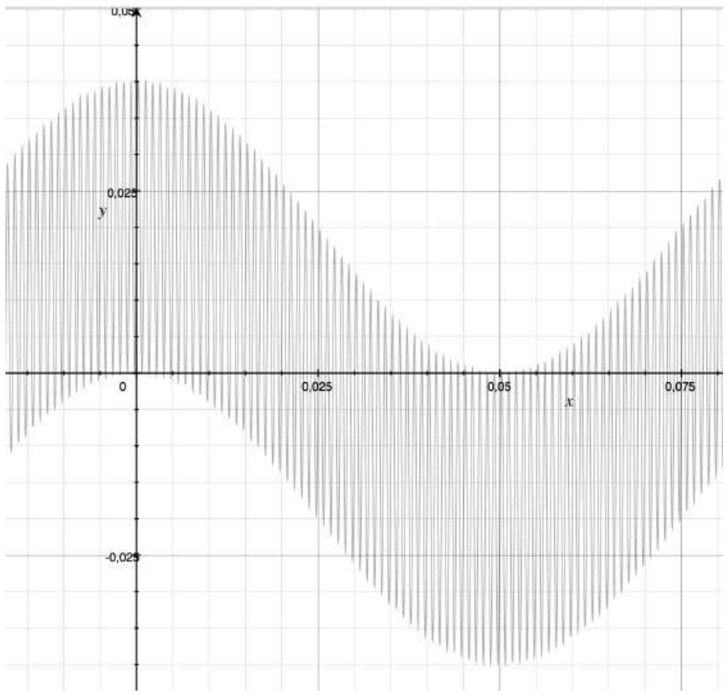
La demie différence $\frac{f_1 - f_2}{2} = -10\,Hz$ est inaudible

Donc $y(2) = 2A\sin(2\pi t \times 1000)\cos(2\pi t \times -10)$

Question 3 :



Donc l'allure générale de la courbe est :



On perçoit donc un son avec une fréquence de $1000\,Hz$, dont l'amplitude varie avec une fréquence d $10\,Hz$: C'est le phénomène de battement acoustique.

Question 4 :

Avec 30 violons, on perçoit de multiples battements acoustiques.

Exercice 11 :

T : Période d'émission
T' : Période de réception
c : Vitesse du son
v : Vitesse du mobile
T sépare l'émission en 2 max.

Question 1 :

Question a :

$$t_1' = t_1 + \frac{d_1}{c}$$

$$t_2' = t_2 + \frac{d_2}{c}$$

$$t_2' = t_1 + T + \frac{d_1 - vT}{c}$$

Enfin, la période de réception :

$$\begin{aligned} T' &= t_2' - t_1' \\ &= t_1 + T + \frac{d_1 - vT}{c} - \left(t_1 + \frac{d_1}{c}\right) \\ &= T - \frac{vT}{c} \\ &= \left(1 - \frac{v}{c}\right)T \end{aligned}$$

$T' < T$, donc $f' > f$, le son reçu est plus aigu.

Question b :

Ce qui change : $d_2 = d_1 + vT$

$$T' = \left(1 + \frac{v}{c}\right)T$$

$T' > T$, donc $f' < f$, le son reçu est plus grave.

Exercice 12 :

Question 1 :

$$\frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}\begin{cases} = T\ ? \\ = R? \end{cases}$$

Dans le cas $Z_1 = Z_2$ $\begin{cases} T = 1 \\ R = 0 \end{cases}$

Et $\frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} = 1$

Donc $T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}$

Question 2 :

Rappel : $R = 1 - T$

Donc $R = \frac{(Z_1-Z_2)^2}{(Z_1+Z_2)^2}$

Question 3 :

Indication : $Z = \rho c$

Exercice 13 :

Question 1 :

Vitesse de propagation : $c = \sqrt{\frac{1}{\chi\rho}}$

Dans la graisse : $C_g = \sqrt{\frac{1}{1{,}11\times 10^{-9}\times 0{,}9\times 10^{3}}} = 1000 m.s^{-1}$

Dans le rein : $C_r = \sqrt{\frac{1}{4{,}44\times 10^{-10}\times 10^{3}}} = 1500 m.s^{-1}$

Dans le calcul : $C_c = \sqrt{\frac{1}{2\times 10^{-11}\times 10^{3}}} = 5000 m.s^{-1}$

Question 2 :

Vérifier que $Z_g = 0{,}9\times 10^{6}\, kg.m^{-2}.s^{-1}$

$Z_r = 1{,}5\times 10^{6}\, kg.m^{-2}.s^{-1}$

$Z_c = 10\times 10^{6}\, kg.m^{-2}.s^{-1}$

TD 5 : Couleur et images

Exercice 14 :

Question a :

Jaune = rouge + vert

Question b :

Magenta = rouge + bleu

Exercice 15 :

Question 1 :

Données : $\begin{cases} P = 2{,}5mW = 2{,}5 \times 10^{-3} W \\ r = 0{,}4mm = 0{,}4 \times 10^{-3} m \end{cases}$

Puissance surfacique : $J = \dfrac{P}{S} \left(en\ W.m^{-2}\right)$

$$J = \frac{P}{\pi r^2}$$

$$J = \frac{2{,}5 \times 10^{-3}}{\pi \times \left(0{,}4 \times 10^{-3}\right)^2} = 5000 W.m^{-2}$$

Question 2 :

Pour le soleil : $J = 1000 W.m^{-2}$

Pour le laser : $J = 5000 W.m^{-2}$

Donc la puissance surfacique du LASER est 5 fois plus élevé que celle du soleil.

Exercice 16 :

Données $\begin{cases} P = 50mW = 50\times10^{-3}W \\ \lambda = 600nm = 600\times10^{-9}m \\ R = 100m \\ d = 3mm = 3\times10^{-3}m \end{cases}$

Question 1 :

$P = J_{100}S$

Donc $J_{100} = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2}$

$$\begin{aligned} P_{oeil} &= J_{100}S_{oeil} \\ &= J_{100}\times\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \\ &= \frac{P}{4\pi R^2}\times\frac{\pi d^2}{4} \\ &= \frac{P\cancel{\pi}d^2}{16\cancel{\pi}R^2} \\ &= \frac{\left(3\times10^{-3}\right)^2\times50\times10^{-3}}{16\times100^2} = 2{,}8\times10^{-12}W \end{aligned}$$

Question 2 :

$E = hf$

$E = \frac{hc}{\lambda}$

$h = 6{,}62\times10^{-34}J.s$

$f : fréquence(Hz) = \upsilon$

$c = 3\times10^8 m.s^{-1}$

On cherche le nombre de photons par seconde $n\left(en\ s^{-1}\right)$ reçu :

$P = nE \Leftrightarrow n = \frac{P}{E}$

$n = P\frac{\lambda}{hc}$

$$\begin{aligned} n &= 2{,}8\times10^{-12}\frac{600\times10^{-9}}{6{,}62\times10^{-34}\times3\times10^8} \\ &= \frac{2{,}8\times6}{6{,}62\times3}10^7 = 8{,}46\times10^6\ photon/s \end{aligned}$$

Exercice 17 :

Données : $\begin{cases} r = 1cm \\ L = 60cm \\ P = 1,2kW \end{cases}$

Question 1 :

Rappel : La loi de Stefan-Boltzma, est $\underbrace{M_0(T)}_{\substack{Puissance \\ rayonnée \\ (W.m^{-2})}} = \sigma T^4 (corps\ noir)$

$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}$

Or, $M_0(T) = J = \dfrac{P}{S_{cylindre}}$

$= \dfrac{P}{2\pi rL}$

Donc : $\sigma T^4 = \dfrac{P}{2\pi rL}$

$T^4 = \dfrac{P}{\sigma 2\pi rL}$

$T = \sqrt[4]{\dfrac{P}{\sigma 2\pi rL}}$

$T = \sqrt[4]{\dfrac{1,2 \times 10^3}{2 \times 5,67 \times 10^{-8} \times \pi \times 10^{-2} \times 0,6}}$

$T = 866K$

Question 2 :

Rappel : Loi de Wien : $\lambda_{max} T = 2,98 \times 10^{-3} Km$

Donc : $\lambda_{max} = \dfrac{2,98 \times 10^{-3}}{T} = 3,35 \times 10^{-6} m$