EFREI –L1 et PL1 **2011**
ALGEBRE LINEAIRE – Examen de Validation
Sans documents ni calculatrice ni téléphone.

Questions de cours

-Définir une famille génératrice d'un espace vectoriel.
-Définir une famille libre dans un espace vectoriel.
- Définir la dimension d'un espace vectoriel. Définir l'intersection et la somme de deux espaces vectoriels.
-Enoncer le théorème des « quatre dimensions » relatifs aux sous-espaces vectoriels.
-Définir le noyau et l'image d'une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.
-Enoncer le « théorème du rang » relatif aux applications linéaires.
- Définir un automorphisme.
-Définir une matrice antisymétrique
-Définir une valeur propre et un vecteur propre pour une matrice A.
-Définir le rang d'une famille de vecteurs, le rang d'une application linéaire, le rang d'une matrice, le rang d'un système linéaire.
Définir le cas de Cramer pour un système d'équations linéaires.

Exercice n°1

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère la famille $\mathfrak{F} = \{ \vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d} \}$ avec $\vec{a} = (1;1;1;1), \vec{b} = (2;1;-1;0), \vec{c} = (-2;-1;5;0)$ et $\vec{d} = (2\,;1\,;3\,;0)$. Quel est le rang de la famille $\mathfrak{F}$. Donner une relation linéaire entre les vecteurs de cette famille. Quelle est l'équation dans $\mathbf{R}^4$ de l'espace vectoriel engendré par cette famille?

Exercice n°2

On considère la suite (u_n) régie par l'équation :
$u_{n+2} + 3u_{n+1} + 2\,u_n = 0$, avec $u_0=1$ et $u_1 = 2$, $\forall n \in N$.
Calculer u_n en fonction de n.

Exercice n° 3

Soit φ un endomorphisme de R^4 défini par φ(x ; y ; z ; t) = (x+y ; x-y ; 2x-y-z+t ; 3y-z+t)
Donner les dimensions, bases et équations de l'image et du noyau de φ. Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?
Quelle est sa matrice associée dans la base canonique de R^4 ?

Exercice n°4

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Calculer : A+B, A.B, 2.A, A^2. Calculer la trace de A, sa transposée, ses mineurs, ses cofacteurs et son déterminant. Quelle est la matrice inverse de A ? Calculer le polynôme caractéristique, les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Calculer en fonction de n entier naturel la matrice A^n

Exercice n°5

Calculer en fonction de la variable réelle x les déterminants suivants :

$A = \left|-x\right|$; $B=\begin{vmatrix}-x & 2\\ x-1 & 3\end{vmatrix}$; $C=\begin{vmatrix}-x & 2 & -2\\ x-1 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}$ et $D=\begin{vmatrix}-x & 2 & -2 & -2\\ x-1 & 3 & 2 & 2\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ -x & 2 & -2 & x-4\end{vmatrix}$.

Bon stage, bonnes vacances et belle poursuite d'études. Jacques Gualino.