CONTRÔLE ÉCRIT N°2 – FONCTIONS ET VARIATIONS

La calculatrice est interdite.
Les documents sont interdits.

EXERCICE N°1 :
1. Rappeler la règle de Cauchy pour les séries numériques à termes positifs.
2. En déduire la démonstration de la règle de Cauchy pour les séries entières de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

EXERCICE N°2 :
Calculer l'intégrale suivante : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\cos(3t)\,dt$

EXERCICE N°3 :
1. Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{dt}{t^2(t+1)}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$.

EXERCICE N°4 :
Etudier la nature des séries de terme général u_n suivantes :

$a)\ u_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2}$

$b)\ u_n = (n+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right) - e^{\frac{1}{n}}$

EXERCICE N°5 :
Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :
1. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+4}{n} x^n$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n-5)3^n}{n!} z^n$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n z^{4n+1}$

EXERCICE N°6 :
On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 + \arctan(x^2)$
1. Déterminer $f'(x)$.
2. En déduire le développement en série entière de $f'(x)$ et son rayon de convergence.
3. En déduire le développement en série entière de $f(x)$ et son rayon de convergence.