1

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ $\lim_{-\infty} e^x = 0$

$\lim_{0} \ln x = -\infty$ $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{+\infty} \ln x = +\infty$

développement limité $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{0} \frac{\sin x}{x} = \\ \lim_{0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{\infty} \frac{e^n}{n} \\ \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n} \end{array} \right\}$ Suites

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \\ \lim_{n \to \infty} n(e^{1/n} - 1) \end{array} \right\}$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \\ \lim_{n \to \infty} n \ln(1 + \frac{1}{n}) \end{array} \right\}$

$\underset{\sin}{\mathbb{R}}, \underset{\cos}{\mathbb{R}}, {}_{\tan}$ arcsin, arccos, arctan

$\sin(x + 2\pi)$

arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$

②

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\tan(-x) = -\tan x$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

Bien connaître les hypothèses:

- Théorème de Rolle
- Formule des accroissements finis → Version avec 2 fonctions → 1 fonction → fonctions à valeurs vectorielles
- Règle de l'Hôpital
- Formule de Taylor

Tableau des dérivées

x^a	$a x^{a-1}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$(\ln a)\, a^x$		
e^u	$u' e^u$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$1/x$		
$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$		
$\cos x$	$-\sin x$	uv	$u'v + uv'$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{u}{v}$	$\frac{vu' - v'u}{v^2}$
		$\lambda u + \mu v$	$\lambda u' + \mu v'$

③

$\frac{1}{y^2+1}$ $\ln$ $+\infty$

Equas diff

- Ordre 1 autonome $y' = \varphi(y)$
- cas des variables séparées $y' = \varphi(y) f(x)$
- Méthode de variation de la constante $y' = \varphi(y) f(x) + g(x)$

Ordre n linéaire à coefficients
- homogène
- avec second membre (chercher une solution particulière)

$y' + y^2 + 1 = 0$

$y' = -y^2 - 1$ • pas de solution constante

$$\bullet \int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{-y^2-1} = t$$

$$\Longleftrightarrow -\int_{y(t)}^{y_0} \frac{dy}{-y^2-1} = t \Longleftrightarrow \int_{y(t)}^{y_0} \frac{dy}{y^2+1} = t$$

$$\Longleftrightarrow \arctan(y_0) - \arctan(y(t)) = t$$

Si $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} = -\tan(-K)$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \tan K$

$K = \frac{\pi}{4}$

$$\Longleftrightarrow y(t) = \tan(\arctan(y_0) - t) = -\tan(t - K)$$

$K = \arctan y_0 = \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4)

$y' = 16 - y^2$

$-4 < y < 4$
alors $y' > 0$
y croissante
pas de solution constante car
$y \neq 4$ et -4)

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{dy}{16-y^2} = t$$

$$16 - y^2 = (4-y)(4+y)$$

$$\frac{1}{16-y^2} = \frac{A}{y-4} + \frac{B}{y+4} = \frac{A(y+4) + B(y-4)}{y^2-16}$$

$$= \frac{(A+B)y + 4(A-B)}{y^2-16}$$

$$\frac{1}{16-y^2} = \frac{-(A+B)y - 4(A-B)}{16-y^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -4(A-B)=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{8} \\ B = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{16-y^2} = \int \left(-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{y-4}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{y+4}\right)\right) dy$$

$$= -\frac{1}{8}\ln|y-4| + \frac{1}{8}\ln(y+4) + \frac{1}{8}\ln|y_0-4| - \frac{1}{8}(y_0+4)$$

$$= t$$

5

$$\ln \frac{y+4}{|y-4|} = \ln \frac{y_0+4}{|y_0-4|} + 8t$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+4}{|y-4|} = e^{8(t-K)}$$

une constante

$$\Leftrightarrow \frac{4+y}{4-y} = e^{8(t-K)}$$

$$\Leftrightarrow -1 + \frac{8}{4-y} = e^{8(t-K)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4-y} = \frac{e^{8(t-K)}+1}{8}$$

$$\Leftrightarrow y - 4 = \frac{-8}{e^{8(t-K)}+1} \Leftrightarrow \boxed{y = 4 - \frac{8}{e^{8(t-K)}+1}}$$

$$\frac{ay+b}{cy+d} = A + \frac{B}{cy+d}$$

$$= \frac{A(cy+d)+B}{cy+d}$$

$$\begin{cases} Ad + B = b \\ Ac = a \end{cases} \quad \begin{cases} B = b - \frac{ad}{c} \\ A = \frac{a}{c} \end{cases}$$

$$\frac{ay+b}{cy+d} = \frac{a}{c} + \frac{\left(b - \frac{ad}{c}\right)}{cy+d}$$

6

$x'' + x' + x = 4\cos(2t)$

equation homogène

$x'' + x' + x = 0$

$X^2 + X + 1$ racines $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$(a+ib)t \quad (a-ib)t \qquad \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = a \pm ib$

$x = c_1 e + c_2 e$

$= e^{at}(A\cos(bt) + B\sin(Bt)$

[...]