COMBETTE
Elise

PIL 2013

16,93

DE Fonctions et variations 13/05/14.

Exercice 3

On calcule l'intégrale $\int_0^{\pi/4} t^2 \cos 2t \, dt$ en procédant à une intégration par parties :

$$\int_0^{\pi/4} u(x)\, v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} u'(x)\, v(x)\, dx.$$

Ici $u(t) = t^2$ et donc $u'(t) = 2t$, et $v'(t) = \cos 2t$ d'où $v(t) = \frac{1}{2} \sin 2t$. On en déduit :

$$\int_0^{\pi/4} t^2 \cos 2t \, dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \sin 2t\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} t \cancel{\sin 2t}\ \cos 2t \, dt$$

2nde intégration par partie avec $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin 2t$.

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \times 1 - \left(\underbrace{\left[-\frac{1}{2} t \cos 2t\right]_0^{\pi/4}}_{=0} - \int_0^{\pi/4} -\frac{1}{2} \cos 2t \, dt\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{32} + \left[-\frac{1}{4} \sin 2t\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{4}$$

Exercice 2

On souhaite étudier la fonction $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

* f est définie si et seulement si $(x-1)^2 \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq 1$. Donc f est définie sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, autrement dit $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. f est continue sur son ensemble de définition, c'est-à-dire sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

* On cherche le développement limité de f en 0.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = x^3 \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x-1} = x^3 \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$

donc $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = (1+x+x^2)(1+x+x^2) + o(x^2)$

$= 1+x+x^2+x+x^2+x^2+o(x^2) = 1+2x+3x^2+o(x^2)$.

On en déduit $f(x) = x^3(1+2x+3x^2) + o(x^2) = 0$, ainsi qu'une tangente $y=0$ en 0. A gauche de la droite $x=0$, $x^3(1+2x+3x^2) < 0$ donc f se situe sous la tangente, et à droite de $x=0$ on a $x^3(1+2x+3x^2) > 0$ donc f se situe au-dessus de la tangente.

* la seule asymptote verticale de f est $x=1$, puisque f n'est pas définie en ce point

* $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

d'après le théorème des limites des fonctions rationnelles l'infini, et de même

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

* on étudie les variations en étudiant sa dérivée:

$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4}$.

f' est du signe de son numérateur puisque son dénominateur est strictement positif sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1) = 0 \iff x^2(x-1)(3(x-1)-2x) = 0$

Donc d'après le théorème du produit nul, on a $\boxed{x=0}$ ou $3(x-1)-2x=0$,

c'est-à-dire $3x-3-2x=0 \iff \boxed{x=3}$: f' s'annule en 3 et en 0.

On en déduit le tableau de variations de f:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		+	0		+				
$x-1$				−	0		+		
$x-3$					−		0	+	
$f'(x)$		+	0	+	‖	−	0	+	

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

f admet un point d'inflexion en $x=0$ puisque sa dérivée s'annule en ce point. Elle croissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]3;+\infty[$ $(f(x)>0)$ et décroissante sur $]1;3[$ $(f'(x)<0)$.

f s'annule en 0, et elle est croissante sur $]-\infty,1[$ et continue donc elle est négative sur $]-\infty,0[$ et positive sur $]0;1[$.

Sur $]1;+\infty[$ on voit qu'elle est comprise entre $+\infty$ et $\frac{27}{4}$ donc elle est positive sur cet intervalle : $f(x)>0$ sur $]0;1[$ et sur $]1;+\infty[$ et $f(x)<0$ sur $]-\infty,0[$.

* On cherche le développement limité de f en $-\infty$ et en $+\infty$. On pose $X=\frac{1}{x}$.

$$f(x)=\frac{\frac{1}{X^3}}{\left(\frac{1}{X}-1\right)^2}=\frac{\frac{1}{X^3}}{\frac{(1-X)^2}{X^2}}=\frac{1}{X^3}\times\frac{X^2}{(1-X)^2}=\frac{1}{X}\times\frac{1}{1-X}\times\frac{1}{1-X}$$

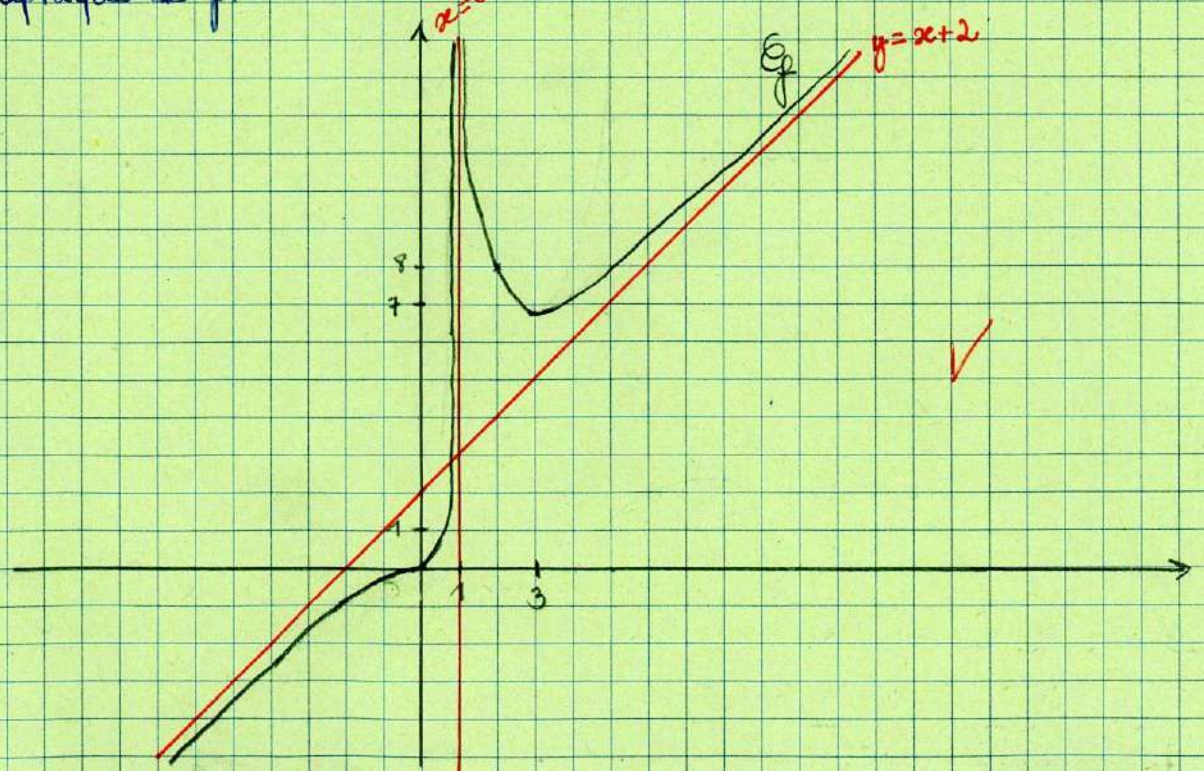
$$\left(\frac{1}{1-X}\right)^2=1+2X+3X^2+o(X^2).\ \text{donc}\ f(x)=\frac{1}{X}\left(1+2X+3X^2+o(X^2)\right)$$

$$=\frac{1}{X}+2+3X+o(X)$$

$$=x+2+\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit une asymptote en $+\infty$ et $-\infty$ de f qui est $y=x+2$. En $-\infty$, $\frac{3}{x}<0$ donc f se situe sous l'asymptote, et en $+\infty$ $\frac{3}{x}>0$ donc f se situe au-dessus de l'asymptote.

* On trace le graphique de f.



Exercice 1

On résoud l'équation différentielle $x(1+\ln^2 x)y'(x) + 2\ln x\, y(x) = 1$ sur $]0,+\infty[$, en posant l'équation homogène:

(H): $x(1+\ln^2 x)\, y_0'(x) = -2\ln x\, y_0(x)$.

$$\Leftrightarrow \frac{y_0'(x)}{y_0(x)} = \frac{-2\ln x}{x(1+\ln^2 x)} \Leftrightarrow \ln|y_0| = \int \frac{-2\ln x}{x(1+\ln^2 x)}$$

On intègre $\dfrac{-2\ln x}{x(1+\ln^2 x)} = \dfrac{-2\ln x}{x+x\ln^2 x}$:

bonne direction, mais rien n'est vraiment fait