

## DEVOIR ÉCRIT n°2

*La calculatrice est interdite. Seul le formulaire fourni avec le sujet est autorisé.*

## EXERCICE N°1 : (4 points)

1. Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $\frac{x^2}{x^2-9} = a + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x+3}$ .
2. En déduire  $\int_1^2 \frac{t^2}{t^2-9} dt$ .
3. Calculer  $\int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x-8} dx$       *On pourra effectuer le changement de variable suivant :  $t = \sqrt{x+1}$ .*

## EXERCICE N°2 : (2 points)

Calculer  $\int \arctan x dx$ .

## EXERCICE N°3 : (4 points)

1. Déterminer le développement asymptotique à l'ordre 2 en  $+\infty$  de  $f(x) = (x+1)\sin\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x}$ .
2. En déduire un équivalent en  $+\infty$  de  $u_n = (n+1)\sin\frac{1}{n} - \frac{n+1}{n}$ .
3. Étudier alors la nature de la série de terme général  $(u_n)$ .

## EXERCICE N°4 : (4 points)

Montrer que la série de terme général  $(u_n)$  suivante est convergente et calculer sa somme :  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

## EXERCICE N°5 : (6 points)

Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

1.  $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n^2 - 5n + 2)x^n$
2.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n!} z^{2n}$

## DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

Tous les développements limités figurant ici sont au voisinage de 0. La fonction  $\varepsilon$  vérifie  $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$ .

➤  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$

## SERIES ENTIERES

➤  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

$R=1$

➤  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

$R=+\infty$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{m}}$$