I 1 2 II 1 2 III 1 2 3 IV 1 2 3 '

1 1 vu

15,98

COMBETTE
Elise

PIL
2013

Vendredi 11 Avril

Fonctions et variations

Exercice 1 Limites

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2+3x}$ Le calcul direct donne une indétermination du type "$\frac{0}{0}$", on utilise la formule de l'Hôpital :

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ lorsque $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$. On a donc

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2+3x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2x+3}$

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$
$\lim_{x \to 0} 2x+3 = 3$
Par quotient $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2+3x} = \boxed{\frac{1}{3}}$ ✓

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos 2x - 1}{x^3+5x^2}$ On sait que $-1 \leq \cos X \leq 1$ donc :

$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \iff -2 \leq \cos 2x - 1 \leq 0$ et $\lim_{x \to +\infty} x^3+5x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^3$ puisque la limite en $+\infty$ d'un polynôme est égale à la limite en $+\infty$ de son monôme de plus haut degré, d'où $\lim_{x \to +\infty} x^3+5x^2 = +\infty$, d'où par quotient :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos 2x - 1}{x^3+5x^2} = 0$ ✓

Exercice 2 Dérivées

1. $f(x) = \tan \frac{1-x}{1+x}$ est définie si et seulement si $1+x \neq 0 \iff x \neq -1$ c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$f(x) = \frac{\sin \frac{1-x}{1+x}}{\cos \frac{1-x}{1+x}}$, donc $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ avec :

$u(x) = \sin \frac{1-x}{1+x}$ et $v(x) = \cos \frac{1-x}{1+x}$

$u'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \cos \frac{1-x}{1+x}$ $\quad v'(x) = -\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' \sin \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x+1-x}{(1+x)^2} \sin \frac{1-x}{1+x}$

$= \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \cos \frac{1-x}{1+x}$ $\quad = \frac{2}{(1+x)^2} \sin \frac{1-x}{1+x}$.

$= \frac{-2}{(1+x)^2} \cos \frac{1-x}{1+x}$

Donc $f'(x) = \dfrac{-\frac{2}{(1+x)^2}\cos^2\frac{1-x}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2}\sin^2\frac{1-x}{1+x}}{\cos^2 \frac{1-x}{1+x}} = -\frac{2}{(1+x)^2}\left(1+\tan^2\frac{1-x}{1+x}\right)$ ✓, définie également sur ~~$\mathbb{R}\setminus\{-1\}$~~

non, il y a d'autres pts interdits

2. $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

a) $f'(x) = (\arctan x)' + \left(\arctan \frac{1}{x}\right)'$.

$\arctan x = \tan^{-1} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ donc $(\arctan x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$

puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

$\left(\arctan \frac{1}{x}\right)' = -\left(\frac{1}{x}\right)'\left(\frac{1}{\sin^2\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{1}{x}}$

non

Donc $f'(x) = \frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{1}{x}} - \frac{1}{\sin^2 x}$

b)

Exercice 3 Prolongement par continuité

1. Pour qu'on puisse prolonger une fonction f non définie en un point $x = a$ par continuité, il faut que celle-ci ait une limite en a afin d'obtenir $g(x)$ telle que pour $x \neq a$ $g(x) = f(x)$ et pour $x = a$ $g(x) = \lim_{x \to a} f(x)$.

2.

Exercice 4 Développements limités

1. On veut calculer $DL_3(0)$ de $f(x) = e^x \cos x$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Donc $f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$

$$= 1 + x + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

✓

2. On veut calculer $DL_3(1)$ de $f(x) = \sqrt{x}$. On pose $y = x - 1$.

$$f(x) = \sqrt{y+1} = (1+y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}y^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}y^3 + o(y^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{16}y^3 + o(y^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

✓

3. $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x - 1}$. On pose $y = \frac{1}{x}$.

$$f(x) = \frac{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - 3}{\frac{1}{y} - 1} = \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y} - 3\right) \cdot \frac{-1}{1 - \frac{1}{y}}$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{y}} = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

?