Sans document ni calculatrice

Questions de cours

Qu'est-ce qu'une matrice triangulaire ? Quel est son déterminant ?
Quelles sont la transposée et l'inverse du produit de matrices A.B ?
Développer $(A+B)^2$
Définir le rang d'une matrice ; définir le rang d'un système linéaire.
Définir le cas de Cramer, pour un système linéaire.
Définir une valeur propre et son espace propre associé pour une matrice A.
Quelles sont les relations entre les valeurs propres, la trace et le déterminant d'une matrice ?

Exercice n°1

Calculer les déterminants suivants :

$$A = \begin{vmatrix} -6 \end{vmatrix} \; ; \; B = \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} \; ; \; C = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \; ; \; D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Exercice n°2 :

Quel est le rang du système de 3 équations à 3 inconnues x, y et z, où a et b sont deux paramètres réels:

$x + y - z = 1$
$ax - 3y + z = 2$
$5x - 5y + z = b$

Résoudre ce système dans le cas général sous forme de déterminants, que vous calculerez explicitement si vous avez le temps. Résoudre le système dans le ou les cas particuliers selon les valeurs de a et b.

Exercice n°3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer la trace, les mineurs, les cofacteurs, le déterminant et la transposée de A; calculer la matrice inverse de A par la méthode de l'inversion progressive puis à l'aide de la comatrice de A. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Exercice n°4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; calculer la trace, le déterminant, le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A. Quelle est la matrice associée au même endomorphisme dans une base formée de vecteurs propres de A. En déduire l'expression de $A^n, \forall n \in N.$

Montrer que $\forall n \in N, \exists \alpha_n$ *et* β_n, *rationnels, tels que* $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$, où $I=A^0$ est la matrice unité. Calculer α_n *et* β_n en fonction de n. En déduire encore l'expression de $A^n, \forall n \in N.$

On considère le système de deux équations suivant, avec x_0 et y_0 fixés :

$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n \end{cases}$. Calculer x_n *et* $y_n, \forall n \in N.$

Commenter les cas particuliers $x_0=y_0=1$ et $x_0=-y_0=1$

Bonne poursuite d'études et merci pour votre participation en L1 et PL1 ☺
Jacques Gualino