TAI avril 2014

Exercice 1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer si elle est inversible.

b. Si A est inversible déterminer son inverse.

c. Si A n'est pas inversible, déterminer une matrice B, non nulle, appartenant à $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que AB=(0).

d. Est-ce que l'application linéaire f, de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$, dont la matrice standard est A, est une surjection de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}^3$? Justifier.

e. Déterminer une base et la dimension de Ker(A).

f. Déterminer la dimension et une base de col(A).

g. On concatène cette base de Ker(A) et cette base de col(A); vérifier si cela donne une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer si elle est inversible.

b. On pose $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; calculer MV.

c. Déterminer le noyau de M et une base de Ker(M).

d. Déterminer la dimension de l'espace des colonnes de M et une base de celui-ci.

e. Montrer que la concaténation de cette base de Ker(M) et de cette base de col(M) crée une base de $\mathbb{R}^4$; on la désignera par B' et on désigne la base standard de $\mathbb{R}^4$ par B.

f. Déterminer la matrice $P_{\mathbb{B}B'}$.

Exercice 3. Soit l'ensemble E des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 3; on admettra que c'est un espace vectoriel de dimension 4 et qu'il possède comme base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

a. Montrer que les polynômes $Q_0(X) = (X-1)(X-2)(X-3)$, $Q_1(X) = X(X-2)(X-3)$, $Q_2(X) = X(X-1)(X-3)$, $Q_3(X) = X(X-1)(X-2)$ forment une base de E que l'on désignera par B'.

b. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathrm{BB}'}$.

c. On considère considère désormais E avec la base B', exprimer Q(0),Q(1),Q(2),Q(3) en fonction des coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3 d'un polynôme Q(X) dans cette base.

d. On définit l'application linéaire f de E vers $\mathbb{R}^3$ pour tout polynôme Q par f(Q)=$\begin{pmatrix} Q(1) \\ Q(2) \\ Q(3) \end{pmatrix}$; déterminer une base et la dimension de l'espace vectoriel $\left\{ P(X) \in E, f(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

e. Montrer que f est une surjection de E sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. On désigne par N la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer si N est inversible.

b. Si N est inversible, déterminer son inverse.

c. Montrer que l'application linéaire f $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$, dont la matrice standard est N, est une bijection.

d. Déterminer les solutions du système d'équations NX=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e. Déterminer le noyau de N-2I et le noyau de N+2I (bases et dimensions).

f. Montrer si on concatène des bases de chacun de ces noyaux on obtient une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5. On désigne par U la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer si U est inversible.

b. Si U n'est pas inversible déterminer son noyau et une base de celui-ci.

c. Déterminer une base de l'espace des colonnes de U.

d. Montrer que la réunion des deux bases trouvées (dans l'ordre suivant: d'abord la base trouvée pour Ker(U), puis celle trouvée pour col(U)) est une base B' de $\mathbb{R}^4$.

e. Déterminer la matrice de passage de la base standard B de $\mathbb{R}^4$ à la base B'.

f. Un vecteur v de $\mathbb{R}^4$ a pour coordonnées dans la base standard $(1,1,1,1)$ déterminer ses coordonnées dans la base B'.

Exercice 6. On désigne par V la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le noyau de V et l'espace des colonnes de V.

b. Montrer que Ker(V) est inclus dans col(V); sont-ils égaux ?

c. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0 \; V^n = (\ 0\ )$.

d. Déterminer la dimension du sous-espace suivant de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: Vect($I_4$,V,V^2, V^3, V^4).

e. Montrer que $J = -I_4 + V$ est inversible et déterminer son inverse.

f. Déterminer l'ensemble des vecteurs colonnes X$\in\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ tels que VX=X.

Exercice 7. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ et sa base standard $\mathcal{B} = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \varepsilon_4)$ et les vecteurs $v_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4, v_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$.

a. Déterminer si la famille (v_1, v_2) est libre.

b. Déterminer le rang de la matrice A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. Montrer que Ker(A^2)=Ker(A) et déterminer leur dimension commune..

d. Déterminer les dimensions de col(A) et de col(A^2) et montrer que ces deux sous-espaces vectoriels sont égaux.

e. On considère les vecteurs $v_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, v_4 = \varepsilon_2 - + \varepsilon_4$; montrer que (v_1, v_2, v_3, v_4) est une base de $\mathbb{R}^4$ que l'on désignera par $\mathcal{B}'$.

f. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$.

Exercice 8. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^4$, de matrice standard W=$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & -2 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer Ker(W) , sa dimension et une base.

b. Déterminer l'espace des colonnes col(W) et une base.

c. On désigne par F l'ensemble des y$\in\mathbb{R}^4$ pour lesquels l'équation f(x)=y possède des solutions; montrer que F est un espace vectoriel dont on déterminera une base.

d. Montrer que quel que soit y$\in F$ l'ensemble des solutions de l'équation f(x)=y possède PLUS qu'une solution.

e. On considère l'application g de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ définie par $M \longmapsto$ WM; on admet qu'elle est linéaire et on désigne par $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ la base standard de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que si $v = v_1\varepsilon_1 + v_2\varepsilon_2 + v_3\varepsilon_3$ appartient à Ker(g) alors, pour tout (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{av}_1 & \mathrm{bv}_1 & \mathrm{cv}_1 \\ \mathrm{av}_2 & \mathrm{bv}_2 & \mathrm{cv}_2 \\ \mathrm{av}_3 & \mathrm{bv}_3 & \mathrm{cv3} \end{pmatrix}$ appartient à Ker(g).

f. Montrer que Ker(g) est un espace vectoriel de dimension 3.

Exercice 9. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$, de matrice standard Z=$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a.. Déterminer une base et la dimension de Ker(Z).

b. Déterminer la dimension et une base de l'espace des colonnes col(Z).

c. Montrer que Ker(Z^2)=Ker(Z).

d. Montrer que col(Z^2)=col(Z).

e. Déterminer si les matrices I,Z,Z^2 sont liées.

f. Montrer que si n est impair Z^n est liée à Z et si n est pair Z^n est liée à Z^2.

Exercice 10. Soit la matrice A=$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2.

b. On désigne par E l'ensemble des matrices de la forme x$I_4 +$ yA; montrer que E un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

c. Déterminer si I+A, I-A, sont inversibles.

d. Montrer que si $x^2 \neq y^2$ xI+yA est inversible.

e. Montrer que l'ensemble F=$\{V \in \mathbb{R}^4$, AV$= V\}$ est un sous-espace vectoriel dont on déterminera une base et la dimension.

f. Montrer que l'ensemble G=$\{V \in \mathbb{R}^4$, AV$=$-$V\}$ est un sous-espace vectoriel dont on déterminera une base et la dimension.

g. Montrer que tout vecteur W de $\mathbb{R}^4$ s'écrit comme une somme V_1+V_2 où $V_1 \in F$,$V_2 \in G$.

Exercice 11. Soit B=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une base et la dimension de Ker(B).

b. Déterminer la dimension et une base de l'espace des colonnes col(B).

c. Montrer que Ker(B^2)=Ker(B).

d. Montrer que col(B^2)=col(B)

e. Déterminer si les matrices I,B,B^2 sont liées.

f. Montrer que si n est impair B^n est liée à B et si n est pair B^n est liée à B^2

Exercice 12. Soit C=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer si C est inversible.

b. Déterminer des matrices élémentaires dont le produit est égal à C.

c. Déterminer la dimension et une base de l'espace des colonnes col(C).

d. Montrer que les matrices I_4, C, C^2, C^3, C^4 sont liées.

e. Quelle est la dimension du plus petit espace vectoriel qui contienne toutes les puissances de C?

Exercice 13. Soit M=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer si M est inversible.

b. Déterminer des matrices élémentaires dont le produit est égal à M.

c. Déterminer la dimension et une base de l'espace des colonnes col(M).

d. Montrer que les matrices I_4, M, M^2 sont liées.

e. Quelle est la dimension du plus petit sous-espace vectoriel qui contienne toutes les puissssances de M ?

Exercice 14. Soit E=R_3[X], l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, qui possède la base $B = (1, X, X^2, X^3)$

a. Montrer que les polynômes X^3, $X^2(X-1)$, $X(X-1)^2$, $(X-1)^3$ forment une base de E, que l'on désignera par B'.

b. Déterminer la matrice de passage $P_{\mathrm{BB}'}$ ainsi que le matrice de passage $P_{B'B}$.

c. On s'intéresse aux polynômes qui ont exactement les mêmes coodonnées dans la base B et dans la base B'; en étudiant la matrice $P_{\mathrm{BB}'}-I_4$, déterminer ces polynômes.

d. On considère l'application f de R_3[X] vers lui-même qui, à tout polynôme P(X) associe le reste de sa division euclidienne par X^2-X; montrer que f est une application linéaire, déterminer son noyau et une base $\mathcal{C}$ de celui-ci.

e. Montrer que quel que soit le polynôme R(X) de degré inférieur ou égal à 1 il existe (au moins) un polynôme P(X) de R_3[X] tel que R(X)=f(P(X)).

f. Déterminer une base $\mathcal{C}'$ de E qui contienne $\mathcal{C}$.

Exercice 15. On considère une suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0=1, U_1=2, U_2=-1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, U_{n+3}=-2U_{n+2}+U_{n+1}+2U_n \end{cases}$.

a. On pose pour chaque n $V_n=\begin{pmatrix} U_{n+2} \\ U_{n+1} \\ U_n \end{pmatrix}$, déterminer une matrice A telle que $\forall n\in\mathbb{N}, V_{n+1}=\mathrm{A}V_n$.

b. En vous inspirant d'exercices traités en classe déterminer les réels x tels que det(A-xI)=0, puis pour chacun de ces réels le noyau, une base et la dimension de Ker(A-xI).

c. Montrer que la concaténation de ces bases fournit une base B' de $\mathbb{R}^3$.

d. On appelle B la base standard de $\mathbb{R}^3$, déterminer $P_{\mathrm{BB}'}$.

e. Montrer en vous inspirant d'exercices traités en classe que $P_{\mathrm{BB}'}^{-1}\mathrm{A}P_{\mathrm{BB}'}$ est une matrice diagonale, que l'on pourra désigner par D.

f. Déterminer en vous inspirant d'exercices traités en classe la valeur de V_{20}, puis de U_{20}.

Exercice 16. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ vers $\mathbb{R}^5$, de matrice standard A.

a. Déterminer Ker(A^3), une base et sa dimension.

b. Déterminer col(A^3), une base et sa dimension.

c. Montrer que l'intersection de Ker(A^3) et de col(A^3) est égale à $\{0\}$.

d. Montrer que la concaténation de cette base de Ker(A^3) et de cette base de col(A^3) fournit une base B' de $\mathbb{R}^5$.

e. En vous aidant de la base de col(A^3) montrer que le seul vecteur $v\in\mathrm{col}(\mathrm{A}^3)$ tel que f(v)=0 est 0.

f. En vous aidant de la base de col(A^3) montrer que $\forall w\in\mathrm{col}(\mathrm{A}^3)\ \exists!v\in\mathrm{col}(\mathrm{A}^3)$tel que f(v)=w.

.

Exercice 17. On considère une suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} U_0=1, U_1=2, U_2=-1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, U_{n+3}=U_{n+2}+4U_{n+1}-4U_n \end{cases}$.

a. On pose pour chaque n $V_n=\begin{pmatrix} U_{n+2} \\ U_{n+1} \\ U_n \end{pmatrix}$, déterminer une matrice A telle que $\forall n\in\mathbb{N}, V_{n+1}=\mathrm{A}V_n$.

b. En vous inspirant d'exercices traités en classe déterminer les réels x tels que det(A-xI)=0, puis pour chacun de ces réels le noyau, une base et la dimension de Ker(A-xI).

c. Montrer que la concaténation de ces bases fournit une base B' de $\mathbb{R}^3$.

d. On appelle B la base standard de $\mathbb{R}^3$, déterminer $P_{\mathrm{BB}'}$.

e. Montrer en vous inspirant d'exercices traités en classe que $P_{\mathrm{BB}'}^{-1}\mathrm{A}P_{\mathrm{BB}'}$ est une matrice diagonale, que l'on pourra désigner par D.

f. Déterminer en vous inspirant d'exercices traités en classe la valeur de V_{15}, puis de U_{15}

Exercice 18. Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ vers $\mathbb{R}^5$, de matrice standard A.

a. Déterminer Ker(A^3), une base et sa dimension.

b. Déterminer col(A^3), une base et sa dimension.

c. Montrer que l'intersection de Ker(A^3) et de col(A^3) est égale à $\{0\}$.

d. Montrer que la concaténation de cette base de Ker(A^3) et de cette base de col(A^3) fournit une base B' de $\mathbb{R}^5$.

e. En vous aidant de la base de col(A^3) montrer que le seul vecteur $v \in$ col(A^3) tel que f(v)=0 est 0.

f. En vous aidant de la base de col(A^3) montrer que $\forall w \in$ col(A^3) $\exists ! v \in$ col(A^3)tel que f(v)=w.

Exercice 19. Soit la matrice A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; on désigne par $\mathcal{B}$ la base standard de $\mathbb{R}^5$.

a. Montrer que A est inversible.

b. Trouver un entier $p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, A^p = A$; déterminer t=min$\{p \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}, A^p = A\}$.

c. Déterminer le noyau de A-I, une base et la dimension de celui-ci.

d. Déterminer le noyau de A+I, une base et la dimension de celui-ci.

e. Montrer que la concaténation de ces deux bases fournit une famille libre, est-ce une base de $\mathbb{R}^5$?

f. Décomposer A en la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique T; déterminer parmi S et T celle qui a le plus grand rang.

Exercice 20. Soit la matrice S=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; on désigne par $\mathcal{B}$ la base standard de $\mathbb{R}^5$.

a. Calculer S^2, S^3; déterminer si I_5, S, S^2, S^3 sont liées.

b. Déterminer les réels x tels que det(S-xI_5)=0.

c. Déterminer le rang de A, la dimension de Ker(A) et une base de celui-ci.

d. Déterminer une base de col(A).

e. Montrer que la concaténation de ces deux bases fournit une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^5$.

f. Déterminer la matrice de passage $P_{B'B}$.