

**Exercice 1** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$  par l'expression :  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$ .

1. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
2. Dresser le tableau de variation de  $f$ .
3. Déterminer l'équation de la tangente  $T_0$  au point d'abscisse 0.
4. Tracer  $T_0$  et  $\mathcal{C}_f$ .

**Exercice 2** On considère la fonction  $x \mapsto E(x)$ , appelée fonction "partie entière" et qui, à tout  $x$  réel, associe le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ . Par exemple,  $E(3,6) = 3$  et  $E(-1,78) = -2$ . Tracer sa courbe représentative sur l'intervalle  $] -4; 4]$ . La fonction partie entière est-elle continue ?

**Exercice 3** On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction  $f$ .

Quel est le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = 2$ . (on justifiera le résultat).

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$f$	$+\infty$	$-5$	1

**Exercice 4** Démontrer que l'équation  $x^3 + 3x = 5$  admet une unique solution sur  $\mathbb{R}$ .

Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de cette solution.

**Exercice 5** On considère la fonction  $h$  définie sur  $] -1; +\infty[$  par  $h(x) = 2x - 3 + \sqrt{x+1}$ .

1. Donner le tableau de variations de  $h$ .
2. En déduire que l'équation  $\sqrt{x+1} = 3 - 2x$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[-1; +\infty[$ .
3. Donner une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.

**Exercice 6** Soit la fonction  $f$  définie par l'expression  $f(x) = x^2 + 3x - 1$ .

Montrer que  $f$  est dérivable en  $x = 2$  et en déduire  $f'(2)$ .

Déterminer directement la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ , et retrouver le résultat précédent.

**Exercice 7** Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $h(x) = \sqrt{x}$ .

Montrer que la fonction  $h$  n'est pas dérivable en 0. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

**Exercice 8** Montrer que la fonction  $k : x \mapsto \frac{x\sqrt{x}}{1+x}$  est dérivable en 0. Que vaut  $k'(0)$  ?

**Exercice 9** Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

- $f_1 : x \mapsto x^{23} - \frac{12x^{11}}{5} + 3,5x^7 - \frac{1}{x}$
- $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x+2}$
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{x+3}$
- $f_4 : x \mapsto \frac{x^3 + 3x + 1}{2x^2 + 4x + 8}$
- $f_5 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x - 10}$
- $f_6(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 5}$
- $f_7(x) = x^2 \cos(x)$
- $f_8(x) = \cos(2x + 3)$
- $f_9(x) = (2x^2 + 3x - 2)^7$
- $f_{10}(x) = \sqrt{4 - x^2}$
- $f_{11}(x) = -4x + 6x\sqrt{x}$
- $f_{12}(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$
- $f_{13}(x) = \left(\frac{3x - 4}{x - 1}\right)^3$
- $f_{14}(x) = \sqrt{3x^2 - \frac{1}{9x}}$
- $f_{15}(x) = \sqrt{2 + \cos^2(2x + 1)}$

**Exercice 10** Déterminer les extrema éventuels de  $f : x \mapsto x + \frac{2}{x}$ .

Vérifier que ces points sont bien des extrema, et préciser s'il s'agit de minima ou de maxima.

**Exercice 11**  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$ . Montrer que  $-6$  est un minorant de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 12**  $f_m$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  par :  $f_m(x) = \frac{x^2 + mx}{x^2 - 1}$ , où  $m$  est un réel.  
Pour quelles valeurs de  $m$ ,  $f_m$  n'admet-elle ni maximum ni minimum ?

**Exercice 13**  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  et  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  par  $g(x) = 9 + \frac{12}{x - 3}$ .

1. a) Etudier les variations de  $g$  et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.  
b) Dans un même repère, tracer les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .  
c) Indiquer, par lecture graphique, le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation  $f(x) = g(x)$ .
2.  $h$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$  par :  $h(x) = (x - 3)[f(x) - g(x)]$ .  
a) Etudier les limites de  $h$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .  
b) Etudier les variations de  $h$  et dresser son tableau de variations.  
c) En déduire que l'équation  $f(x) = g(x)$  admet trois solutions.  
d) Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-1}$  de chaque solution.

**Exercice 14** On note  $(E)$  l'équation  $x^3 - 15x - 4 = 0$  et  $(I)$  l'inéquation  $x^3 - 15x - 4 > 0$ .

### 1. Résolution graphique

- a) Montrer que l'équation  $(E)$  est équivalente à l'équation  $x^2 - 15 = \frac{4}{x}$ .
- b) Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions  $x \mapsto x^2 - 15$  et  $x \mapsto \frac{4}{x}$ .
- c) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation  $(E)$ .  
Une des solutions est un nombre entier, quelle est sa valeur ?  
Encadrer chacune des autres solutions  $\alpha$  et  $\beta$  (avec  $\alpha < \beta$ ) par deux entiers consécutifs.
- d) Démontrer que l'inéquation  $(I)$  s'écrit sur  $]0; +\infty[$ ,  $x^2 - 15 > \frac{4}{x}$ , et sur  $] - \infty; 0[$ ,  $x^2 - 15 < \frac{4}{x}$ .

**2. Etude d'une fonction**  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 15x - 4$ .  $\mathcal{C}_f$  est sa courbe représentative.

- a) Justifier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- b) Etudier les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- c) Déterminer les variations de  $f$  et dresser son tableau de variations. Tracer l'allure de  $\mathcal{C}_f$ .
- e) Démontrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement trois solutions dans  $\mathbb{R}$ .
- f) Donner un encadrement à  $10^{-2}$  près de chacune des solutions.
- g) Etudier le signe de la fonction  $f$ . En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation  $(I)$ .

### 3. Méthode algébrique

- a) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout réel  $x$ ,  $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(ax^2 + bx + c)$ .
- b) Résoudre alors  $(E)$  et  $(I)$ .

**Exercice 15**  $f$  est la fonction polynôme définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x$ .

1. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , puis sa dérivée seconde  $f''$ .
2. a) Déterminer les variations de la fonction  $f'$ , et dresser le tableau de variation de  $f'$ .  
b) Prouver que l'équation  $f'(x) = 0$  admet une solution unique  $c$  et que cette solution appartient à l'intervalle  $] - \infty; -1]$ . Donner un encadrement de  $c$  d'amplitude  $10^{-2}$ .
3. a) Déterminer le signe de la fonction  $f'$ , puis dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .  
b) Montrer que  $f(c) = \frac{3c(4 - c)}{4}$ .  
c) Déterminer le nombre de racines du polynôme  $f$ .