TD chapitre 1 :

Exercice 12 :

Question 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Question 2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 :

Question 1 :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 7x_3 = 0 \end{cases} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -6 & 0 \\ 7 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -27 & 0 \\ 0 & 4 & -54 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -27 & 0 \\ 0 & 4 & -54 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 13 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad S = \{(0,0,0)\}$$

Question 2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -8 & -31 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2, x_5 sont directeurs, et x_3, x_4 sont libres.

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + 8x_4 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \qquad S = \{(2x_3 + 8x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4, 0); (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\}$$

Question 3 :

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & 7 & 0 \\ 4 & -9 & 8 & 0 \\ -9 & 18 & -19 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 7 & 0 \\ 4 & -9 & 8 & 0 \\ -9 & 18 & -19 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & 0 \\ 0 & 27 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad S = \{(0,0,0)\}$$

Exercice 14 :

Il faut faire apparaitre une ligne du type $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 2 & -1 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 7 & -5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 7 & -11 & 13 & -19 & 4 \\ 0 & 8 & -4 & 14 & -20 & 8 \\ 0 & -11 & 13 & -20 & 29 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 7 & -11 & 13 & -19 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -11 & 13 & -20 & 29 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -60 & 6 & -12 & -24 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 90 & -9 & 18 & 38 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -60 & 6 & -12 & -24 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

On obtient alors $0+0+0+0+0 = \dfrac{76}{3}$, ce qui est impossible. Le système n'a donc pas de solutions.

Exercice 15 :

A la fin, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1-a \\ 0 & 2 & 4 & 3a-4 \\ 0 & 0 & 0 & -a+5 \end{pmatrix}$

Donc si $a \neq 5 \quad S = \emptyset$

Sinon,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = -4 \\ x_2 + 2x_3 = \dfrac{11}{2} \end{cases} = \begin{cases} x_1 = -4 + x_3 \\ x_2 = \dfrac{11}{2} - 2x_3 \end{cases} \qquad S = \left\{ \left(-4 + x_3, \frac{11}{2} - 2x_3, x_3 \right) \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

TD Chapitre 2 :

Exercice 8 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 :

$C = AB$

a) $C_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{j1}$

Or quelque soit j, $b_{j1} = 0$. Donc $C_{i1} = 0$

b) Par raisonnement analogue, $C_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

Or quelque soit j, $b_{jk} = 0$. Donc $C_{ik} = 0$

c) Il suffit que la ligne première ligne de A soit nulle pour que la première ligne de C soit nulle.
Cette condition n'est pas nécéssaire.

Exercice 11 :

D'après l'exercice 9, pour tout $A \in M_4(R)$, la deuxième colonne de AN est nulle.

Soit M l'inverse de N : $MN = I_4$ et la deuxième colonne de I_4 serait nulle, ce qui est absurde !

Exercice 12 :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice $Q^2 = 2I_4$, on peut en déduire que la matrice Q est inversible et son inverse est $\frac{1}{2}Q$

Exercice 13 :

Question 1 :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}4&4&4&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\\4&4&4&4\end{pmatrix}=4A$$

$$A^3=(4A)A=4A^2=16A\begin{pmatrix}16&16&16&16\\16&16&16&16\\16&16&16&16\\16&16&16&16\end{pmatrix}$$

Question 2 :

On peut donc conjecturer que $A^k=4^{k-1}A$

Démonstration par récurrence :

Condition initial : Pour $k=1$, $A^1=A$

Hérédité : On suppose la propriété vrai au rang n : $A^k=4^{k-1}A$
Vérifions que la propriété est vrai au rang $n+1$

$$\begin{aligned}A^k\times A&=4^{k-1}\times A^2\\&=4^{k-1}\times 4A\\&=4^k\times A\end{aligned}$$

Conclusion : La propriété est vraie au rang $n+1$, donc la propriété est vrai.

Question 3 :

Si A^{-1} existe, $A^2A^{-1}=4A\times A^{-1}$ or, $A^2A^{-1}=A$
D'où $A=4I$, se qui est absurde !

Exercice 24 :

Système associé, calculer la réduite de Gauss de :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & a \\ 3 & 3 & 4 & 5 & b \\ 4 & 4 & 4 & 5 & c \\ 5 & 5 & 5 & 5 & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & a-b \\ -1 & -1 & 0 & 0 & b-c \\ -1 & -1 & -1 & 0 & c-d \\ 5 & 5 & 5 & 5 & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -a+b \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -b+c \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -c+d \\ 5 & 5 & 5 & 5 & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -a+b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-2b+c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b-2c+d \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c-\frac{4d}{5} \end{pmatrix}$$

D'où $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

Exercice 27 :

$$T = \begin{pmatrix} p & 3 & 4 & 5 \\ 0 & q & 4 & 5 \\ 0 & 0 & r & 5 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

Question a :

Grâce au théorème du carré, on sait que A inversible est équivalent par ligne à I_n.

Si A est équivalent à I_n, la forme échelonnée est du type $\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ La matrice échelonnée équivalente à T est de cette forme si et seulement si p,q,r,s sont non nuls puisqu'il faut effectuer $\frac{1}{p}l_1, \frac{1}{q}l_2, \frac{1}{r}l_3, \frac{1}{s}l_4$ pour l'obtenir.

Question b :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{p} & \frac{4}{p} & \frac{5}{p} & \frac{x}{p} \\ 0 & 1 & \frac{4}{q} & \frac{5}{q} & \frac{y}{q} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{r} & \frac{z}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{s} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4(q-3)}{pq} & \frac{5(q-3)}{pq} & \frac{x}{p}-\frac{xy}{pq} \\ 0 & 1 & \frac{4}{q} & \frac{5}{q} & \frac{y}{q} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{r} & \frac{z}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{s} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5(q-3)(r-4)}{pqr} & \frac{x}{p}-\frac{xy}{pq}-\frac{4(q-3)z}{pqr} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5(r-4)}{qr} & \frac{y}{q}-\frac{4z}{qr} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{r} & \frac{z}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{s} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5(q-3)(r-4)}{pqr} & \frac{x}{p}-\frac{xy}{pq}-\frac{4(q-3)z}{pqr}-\frac{5(q-3)(r-4)t}{pqrs} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5(r-4)}{qr} & \frac{y}{q}-\frac{4z}{qr}-\frac{5(r-4)t}{qrs} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{r} & \frac{z}{r}-\frac{5t}{rs} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{t}{s} \end{pmatrix}$$

On peut donc en déduire l'inverse :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{3}{pq} & -\frac{4(q-3)}{pqr} & -\frac{5(q-3)(4-r)}{pqrs} \\ 0 & \frac{1}{q} & -\frac{4}{qr} & \frac{5(4-r)}{qrs} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & -\frac{5}{rs} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{j} \end{pmatrix}$$

Question c :

D'après le chapitre 2, théorème 37, on sait qu'une matrice triangulaire est inversible si les termes de la diagonale sont tous non nuls.

On peut aussi dire :
On transpose pour obtenir une matrice triangulaire supérieur, et grâce à la question a, on conclus qu'elle est inversible.

TD n°3 : Les déterminants

Exercice 8 :

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

On a échangé 4 fois les lignes, donc $\det(M)=(-1)^4\det I_5=1$

Idem pour N : $\det(N)=(-1)^4\underbrace{\det(-I_5)}_{(-1)^5\det(I_5)=-1}=-1$

Exercice 9 :

Question a :

Chaque ligne (respectivement colonne) est multiplié par -1.

Donc $\det(-A)=(-1)^n\det A$

Question b :

Idem, $\det(kA)=k^n\det(A)$

Exercice 10 :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&111\\2&3&4&5&121\\3&4&5&6&132\\4&5&6&7&157\\5&6&7&8&158\end{pmatrix}$$

Question a :

$$A^t=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&6\\3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\\111&121&132&157&158\end{pmatrix}$$

Question b :

$$A^t\sim\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&1&1&1&1\\3&4&5&6&7\\1&1&1&1&1\\111&121&132&157&158\end{pmatrix}&\begin{array}{c}\\l_2-l_1\\\\l_4-l_3\\\\\end{array}\end{array}$$

Question c :

2 lignes sont proportionnels. $Det(A)=0$, la matrice n'est pas inversible.

Exercice 11 :

$$Det(AB)=\det(A)\times\det(B)$$
$$\det(A)\times\det(B)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A)=0 \quad ou \quad \det(B)=0$$

Exercice 12 :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Le déterminant est le produit des termes de la diagonale : Donc $Det(A)=20$

Exercice 13 :

$$\det({}^{t}AA)=\det({}^{t}A)\times\det(A)=\det(A)^2$$

Exercice 14 :

$$\det(A)=\det(M^{-1})\times\det(B)\times\det(M)=\underbrace{\det(M^{-1})\det(M)}_{1}\det(B)=\det(B)$$

Exercice 17 :

Faux, contrexemple : $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Det(A)=\det(B)=0 \quad \det(A+B)=1$$

Exercice 18 :

Pour C, on va développer la ligne 1.

Donc $\det(C)=(-1)^{1+5}5\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=5!=120$

Pour D, on va développer selon la colonne 5.

Donc $\det(D)=(-1)^{1+5}3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5,6 & 5 & 0 \\ 87 & 120 & 65 & 4 \end{vmatrix}=5!=120$

Exercice 19 :

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(A_4) = 1$$

On conjecture que si n est paire, $|A_n| = 1$, et si n est impaire, $|A_n| = 0$
On le démontre par récurrence.

Exercice 20 :

$\det(A) \neq 0$ donc A est inversible..

Et $A^{-1} = (\det A)^{-1} \times {}^t \underbrace{c(A)}_{co-matrice}$

TD 4 : Espace R^n et Applications linéaires

Exercice 9 :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Exercice 10 :

Une application est linéaire si et seulement si tous les y_i sont des combinaisons linéaires des x_i

Toutes les applications sont linéaires sauf la h car il y a un sinus.

Exercice 11 :

$$M_{m\circ n}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}_{m}\times\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}}_{n}=\begin{pmatrix}2&0&0&-2\\2&0&0&-2\\2&0&0&-2\\2&0&0&-2\end{pmatrix}$$

$$M_{k\circ n}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}}_{k}\times\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}}_{n}+\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\3&-1&-1&-1\\1&1&1&-3\end{pmatrix}$$

$$m_{m\circ k}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}}_{m}\times\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}}_{k}=\begin{pmatrix}3&3&3&3\\3&3&3&3\\3&3&3&3\\3&3&3&3\end{pmatrix}$$

Exercice 12 :

$f:\mathbb{R}^4\rightarrow\mathbb{R}^4$ est linéaire, on connait l 'image de la base standard donc on peut écrire la matrice :

$$\begin{array}{cccc} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & f(\varepsilon_4) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\2&2&0&-2\\3&3&1&-3\\-1&1&0&-1\end{pmatrix}=M$$

$\det(M)=0$ donc M est ni injective, ni surjective, ni bijective.

Exercice 13 :

Caractéristique d'une application linéaire :

$f(x+y)=f(x)+f(y)$

$f(kx)=k\times f(x)$

Question a :

On sait que f est une application linéaire, et on cherche x et y avec $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$.

$f(x)=f(y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)-f(y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x-y)=0$

On a trouvé $z=x-y$ tel que $f(z)=0$

Question b :

Si une f est une application de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donc :

Non injectif $\Leftrightarrow$ non surjectif $\Leftrightarrow$ non bijectif

Ici, f n'est pas injectif, donc f n'est pas surjectif

Question c :

Soit $(c,x_0)\in(\mathbb{R}^4)^2$ tel que $f(x_0)=c$

$f(x_0+z)=f(x_0)+f(z)=c+0$

Question d :

La question c montre que $\{x_0+z\ ;\ f(z)=0\}\underbrace{\subset}_{inclus\ dans}\{x\in\mathbb{R}^4\ ;\ f(x)=c\}$

Montrons que $\{x\in\mathbb{R}^4\ ;\ f(x)=c\}\subset\{x_0+z\ ;\ z\in Ker\ f\}$

Soit x tel que $f(x)=c$, $x=x_0+(x-x_0)$ avec $(x-x_0)\in Ker\ f$ car

$f(x-x_0)=f(x)-f(x_0)=c-c=0$

Les 2 ensembles sont égaux.

Remarque : Regardons la situation sans l'hypothèse non injective :

Soit $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ et $y_0\in\mathbb{R}^n$

On considère le système $f(x)=y_0$ et $x_0\in\mathbb{R}^p$ tel que $f(x_0)=y_0$

Soit l'ensemble des solutions du système.

Il est clair que $\{x_0+v\ ;\ v\in Ker\ f\}\subset\varphi$

Soit $x\in\varphi$, $x=x_0+(x-x_0)$ montrons que $x-x_0\in Ker\ f$

$f(x-x_0)=f(x)-f(x_0)=y_0-y_0=0$

Donc $\varphi\subset\{x_0+v\ ;\ v\in Ker\ f\}$

Exercice 14 :

Question a :

L'application n'est pas injective car $l_2 = l_4$

Ou alors $f(\varepsilon_2) = -f(\varepsilon_4) \quad \Leftrightarrow \quad f(\varepsilon_2 + \varepsilon_4) = 0$

Or, $\varepsilon_2 + \varepsilon_4 \neq 0$ donc $Ker\ f \neq \{0\}$. Donc f non injective.

Question b :

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ non injective $\Leftrightarrow$ non surjective

Question c :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

x_3 et x_4 sont libres

$x_1 = -4x_3$

$x_2 = x_4$

$x_3 = x_3$

$x_4 = x_3$

$Ker\ f = \{(-4x_3 ; x_4 ; x_3 ; x_4), (x_3 ; x_4) \in \mathbb{R}^2\}$

Question d :

Montrer que $Ker\ f$ est un sous ensemble de E.

$0 \in Ker\ f$ Soit $(v_1 ; v_2) \in (Ker\ f)^2$, $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$

Soit $v_1 \in Ker\ f$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) = 0$

Question e :

On applique l'exercice 13 :

On voit sur la matrice que $f(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est :

$\{\varepsilon_1 + v ; v \in Ker\ f\} = \{(1 - 4x_3 ; x_4 ; x_3 ; x_4), (x_3 ; x_4) \in \mathbb{R}^2\}$

Question f :

On résout $f(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On utilise Gauss est on trouve $\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix}1\\1\\1\\0\end{matrix}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ incompatible car $S \in \not\emptyset$

Question g :

Image f est un sous espace vectoriel de F

$0 \in$ images f car $f(0) = 0$

Soit $(y_1 ; y_2) \in (images\ f)^2$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = y_1 + y_2 \in$ Images f

Soient $y_1 \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) = y_1$

$f(\alpha x_1) = \alpha f(x_1)$ donc $\alpha y_1 \in$ Images f

TD 5 : Espace vectoriel, bases et dimensions

Exercice 14 :

Tout ensemble de matrice est un espace vectoriel. $M_{3,4}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

On cherche donc à prouver que K est un sous-espace vectoriel de M .

$0_{M_4(\mathbb{R})} \in K$

Soient B et B' dans K , alors $A(B+B') = AB + AB' = 0 + 0$

SoiENT, $B \in K$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $A(\alpha B) = A\alpha B = 0$

Exercice 14 :

La famille est libre si et seulement si le déterminant n'est pas nul. Et si elle est libre, elle est génératrice.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ici, on voit que $c_1 = c_3 + c_4$. Il y a donc une colonne nulle, le déterminant sera donc nulle. Donc, la famille n'est pas libre dans $\mathbb{R}^4$

Exercice 16 :

Faire avec le déterminant (voir DM n°2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 :

Famille libre : $\lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + ... + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$

C'est vrai en particulier pour un p-uplet de coefficients de la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + ... + \lambda_{p-1} v_{p-1} + 0 v_p = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{p-1} = 0$ et $v_1, v_2, v_3, ..., v_{p-1}$ est libre

Exercice 18 :

Soit $v \in \mathbb{R}^n$, $(v_1, ..., v_p)$ est génératrice donc $\exists(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_p v_p$ mais

$v_p = \omega - (\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{p-1} v_{p-1})$

Donc $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{p-1} v_{p-1} (\omega - (\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{p-1} v_{p-1}))$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire dans $v_1, ..., v_{p-2}, \omega$ qui forment donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 20 :

Question a :

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$,$(x_1,x_2,x_3,x_4) \to x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4$

$E = Ker\ f$ est un sous ensemble vectoriel de $\mathbb{R}^4$ (voir TD précédent)

Question b :

La matrice standard de f est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

La matrice augmenté du système homogène est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

x_1 variable directrice, les autres sont libres.

$x_1 = -2x_2 - x_3 - 4x_4$

Donc :

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ (solution !) s'écrit $\begin{pmatrix} -2x_2 - x_3 - 4x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

L''écriture de la solution de $AX = 0$ $\left(A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right)$ donné une base de

$Ker\ f \times B = \{-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2, -\varepsilon_1 + \varepsilon_3, -4\varepsilon_1 + \varepsilon_4\}$

Exercice 21 :

Question a :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = vect\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = vect(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

Question b :

$\{AM = 0, M \in M_{3,2}(\mathbb{R})\} = G$

$M = \begin{pmatrix} AX & AY \end{pmatrix}$ avec X et Y vecteurs colonnes

$AM = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} AX & AY \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow AX = 0\ ET\ AY = 0$

$$AX = 0 \Leftrightarrow X \in \left\{ x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$AY = 0 \Leftrightarrow Y \in \left\{ y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M=\begin{pmatrix}0&0\\x&y\\x&y\end{pmatrix}=x\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix}}_{M_1}=y\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}}_{M_2}$$

Montrons, en revenant à la définition que la famille (M_1,M_2) est libre.

$$\alpha M_1+\beta M_2=\begin{pmatrix}0&0\\\alpha&\beta\\\alpha&\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha=\beta=0$$

(M_1,M_2) est donc une base de G. Donc la dimension de G est 2.

Exercice 22 :

Question 2 :

$$P_{BB'}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$$

Question 3 :

$$v_B=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\\3\end{pmatrix}$$

TD 6 : Noyau et image d'une application linéaire

Exercice 10 :

Question a :

Le déterminant de A est nul car il y a une ligne vide.

Question b :

$f_a : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ et $\det A = 0$. Donc f_A n'est ni injective ni surjective.

Question c :

On résout $AX = 0$: $x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = x_6,\ x_4 = -x_6,\ x_5 = x_6$

$Ker\ f_A \left\{ (0,0,x_6,-x_6,x_6,x_6)\, x_6 \in \mathbb{R} \right\}$

Question d :

Théorème du rang, $rg\ f_A = \dim \operatorname{Im} f_A = 6 - 1 = 5$ (Il y a cinq 1 directeurs)

Base de l'image : $\begin{matrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) & f(\varepsilon_4) & f(\varepsilon_5) \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \varepsilon_5 & \varepsilon_6 \end{matrix}$

Question e :

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Question f :

2 lignes nulles. Donc $\det G = 0$

Question g :

Noyau $x_1 = 0,\ x_2 = x_5 - x_6,\ x_3 = -x_5 + 2x_6,\ x_4 = x_5 - 2x_6$

$Ker\, G = vect\big((0,1,-1,1,1,0),(0,-1,2,-2,0,1)\big)$

Question h :

L'image est de dimension $6 - 2 = 4$ et engendrée par les 4 premières colonnes qui forment une famille libre, $\operatorname{Im} f_A = vect(\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6)$

Question i :

$$H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Question j :

$$\operatorname{Im} H = vect\left(\varepsilon_4,\varepsilon_5,\varepsilon_6\right)$$

$$Ker\, H = vect\left((1,-1,1,1,0,0),(1,2,-2,0,1,0),(2,-3,4,0,0,1)\right)$$

Exercice 11 :

Question a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{6}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = 1$$

Question b :

$$P_{BB'}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Question c :

$$v_{B'} = P_{B'B} v_B = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Question d :

$$v_B = P_{BB'} V_{B'} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 :

Question 1 :

$rgA = 2$ donc $\dim Ker\ f_A = 2$

$f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) = 0 = f(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \in Ker\, f$

$f(\varepsilon_1) - f(\varepsilon_4) = 0 = f(\varepsilon_1 - \varepsilon_4) \qquad \varepsilon_1 - \varepsilon_4 \in Ker\, f$

Base du noyau $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \varepsilon_1 - \varepsilon_4)$

Question 3 :

On prend 2 colonnes indépendantes

Base de $\mathrm{Im}\, f : (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4, \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$

On met les vecteurs cote à cote et on calcule le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$