Cours d'algèbre linéaire

Khaoula Ben Abdeljelil

Table des matières

Table des matières i

1 POLYNOMES **1**

1.1 Algèbre des polynômes 1

1.1.1 Définition 1

1.1.2 Opérations sur $\mathbf{K}[X]$ 1

1.2 Division des polynômes 2

1.2.1 Divisions suivant les puissances décroissantes 2

1.2.2 Algorithme d'Euclide, PGCD 3

1.2.3 Divisions suivant les puissances croissantes 4

1.3 Racines d'un polynôme 4

1.4 Factorisation 5

1.4.1 Factorisation dans $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ 5

1.4.2 Factorisation dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ 5

1.4.3 Ordre de multiplicité 5

1.5 Feuille d'exercices- Polynomes 7

2 Espace vectoriel **9**

2.1 Introduction au groupe 9

2.2 Espace vectoriel 11

2.3 Sous-espace vectoriel 12

2.3.1 Définition 12

2.3.2 Combinaisons linéaires 13

2.3.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel 13

2.4 Feuille d'exercices-Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels 15

2.5 Applications linéaires 16

2.5.1 Définitions 16

2.5.2 Applications linéaires particulières 16

2.5.3 Noyau et image d'une application linéaire 17

2.6 Famille de vecteurs 18

2.6.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs 18

2.6.2 Famille génératrice 19

2.6.3 Famille libre, famille liée 19

2.6.4 Base d'un espace vectoriel 21

2.6.5 Composante dans une base 21

2.7 Feuille d'exercices sur les applications linéaires, Famille libre, liée et base 22

2.7.1 Applications linéaires 22
2.7.2 Image et noyau d'un endomorphisme 22
2.7.3 Sous-espace engendré par une famille finie 23
2.7.4 Famille libre 23
2.7.5 Obtention de base 23

3 Matrices **25**
3.1 Opérations sur les matrices 25
3.1.1 Définition 25
3.1.2 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, .)$ est un **K**-espace vectoriel 27
3.1.3 Sous-espaces des matrices diagonales et triangulaires 29
3.1.4 Propriétés du produit matriciel 30
3.2 Représentations matricielles 32
3.2.1 Matrice colonne des composantes d'un vecteur 32
3.2.2 Matrice des composantes d'une famille de vecteurs 33
3.2.3 Matrice d'une application linéaire 34
3.2.4 Matrice d'un endomorphisme 35
3.2.5 Image d'un vecteur 36
3.2.6 Isomorphisme de représentation matricielle 37
3.2.7 Composition d'une application linéaire 37
3.2.8 Isomorphisme et matrice inversible 37
3.3 Formule de changement de base 37
3.3.1 Matrice de passage 37
3.3.2 Nouvelle composante de vecteur 38
3.3.3 Nouvelle représenatation d'une application linéaire 38
3.4 Rang d'une matrice 39
3.4.1 Definition 39
3.4.2 Propriétés du rang d'une matrice 39
3.5 Série d'exercices 41

4 Systèmes Linéaires, Méthode du Pivot de Gauss **47**
4.1 Transformations des matrices 47
4.2 Réduction des matrices ; Méthode du Pivot Gauss 47
4.3 Recherche de l'inverse d'une matrice carrée 47
4.4 Systèmes linéaires 47
4.5 Exercices 48

5 Réduction des Matrices Carrées **49**
5.1 Valeurs propres, Vecteurs propres 49
5.2 Diagonalisation d'un endomorphisme 50
5.3 Diagonalisation d'une matrice carrée 50
5.4 Séries d'exercices 51

Chapitre 1

POLYNOMES

1.1 Algèbre des polynômes

1.1.1 Définition

Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 1.1. *Un polynôme à coefficient dans* $\mathbf{K}$ *est un élément de la forme*

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i,$$

où $n \in \mathbf{N}$ *et les coefficients* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *sont des élements de* $\mathbf{K}$. *Le symbole* X *est appelé l'indéterminée (on pose* $X^0 = 1$*). On note*

$$\mathbf{K}[X] = \{ \textit{ polynômes à coefficients dans } \mathbf{K}\}.$$

On identifie $\mathbf{K}$ à un sous ensemble de $\mathbf{K}[X]$.

Exemple 1.2. *(1)* $P_1(X) = X^3 + 4X - 8$ *et* $P_2(X) = 5$ *sont deux polynômes.*

(2) $F(X) = X^4 + \sqrt{7X} + 11$ *et* $G(X) = \frac{X^3 - X + 1}{X + 13}$ *ne sont pas de polynômes.*

1.1.2 Opérations sur $\mathbf{K}[X]$

Sur $\mathbf{K}[X]$ on définit les lois suivantes, si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m$, on pose alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} (P+Q)(X) = \sum_{k=0}^{max(n,m)} (a_k + b_k) X^k \\ \\ \lambda P(X) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k \\ \\ (PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ tel que } c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \end{array}}$$

Avec la généralisation $a_k = 0 \;\; \forall k \geq n+1, b_k = 0 \;\; \forall k \geq m+1$.
$\mathbf{K}[X]$ est stable pour ces lois, on dit que c'est une algèbre (et on peut vérifier aussi qu'elle est commutative).

Degré d'un polynôme

Définition 1.3. *Soit P un polynôme non nul, on appelle degré de P, le plus grand indice de ses coefficients non nuls, et on le note* $\deg P$. *Ainsi* $\deg P = n \Longleftrightarrow P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ *avec* $a_n \neq 0$, a_n *s'appelle coefficient dominant de* P. *Par convention* $\deg 0 = -\infty$.

Remarque 1.4.

$$P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \Longleftrightarrow \deg P \leq n$$

Théorème 1.5.

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q).$$

Avec l'égalité dans le cas où $\deg P \neq \deg Q$ *ou bien* $\deg P = \deg Q$ *et* $a_{\deg P} \neq -b_{\deg Q}$.

Théorème 1.6.

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q.$$

En particulier si λ, *constante non nulle alors :*

$$\deg \lambda P = \deg P.$$

Exemple 1.7. $\deg P_1 = 3, \deg P_2 = 0,$ $\deg P_1.P_1 = 9$.

Proposition 1.8. $\mathbf{K}[X]$ *est intègre :*

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{K}[X] \times \mathbf{K}[X], P.Q = 0 \Rightarrow P = 0 ou Q = 0.$$

Preuve:
Si $P.Q = 0$, alors $-\infty = \deg(P + Q) = \deg(P) + \deg(Q)$. Donc $\deg(P) = -\infty$ ou $\deg(Q) = -\infty$. $\square$

Proposition 1.9. *Un polynôme P est inversible (c'est à dire qu'il existe un polynôme Q tel que $P.Q = 0$) si et seulement si P est un polynôme constant non nul.*

1.2 Division des polynômes

1.2.1 Divisions suivant les puissances décroissantes

Définition 1.10. *Soit A, B deux polynômes non nuls, on dit que B divise A dans* $\mathbf{K}[X]$, *ou que A est un multiple de B, si et seulement si $\exists Q \in$* $\mathbf{K}[X]$ *tel que $B = AQ$. On note B/A. On dit qu'un diviseur de P est trivial s'il est de la forme λP ou bien λ avec λ un scalaire non nul.*

Définition 1.11. *On dit qu'un polynôme P est irréductible si* $\deg P \geq 1$ *et tous les diviseurs de P sont triviaux. Autrement dit, si un polynôme A divise P, alors* $A = \lambda \in \mathbf{K}$, *soit* $A = \lambda P, \quad \lambda \in \mathbf{K}$.

Théorème 1.12. *$\forall (A, B) \in \mathbf{K}[X]$ tel que $B \neq 0$, $\exists!(Q, R) \in \mathbf{K}[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg R < degB$. Q s'appelle le quotient de la division euclidienne de A par B et R son reste.*

Preuve:

- **Existence :** Fixons $B = b_0 + b_1X + \cdots + b_pX^p \in \mathbf{K}[X]$. Le raisonnement se fait alors par récurrence sur le degré du polynôme A. L'hypothèse de récurrence au rang n, $\mathcal{P}(n)$ est :

  $$\forall A \in \mathbf{K}[X] \mid \deg(A) \leq n, \exists (Q, R) \in \mathbf{K}[X] \mid A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$

  On remarque si $n < p$, alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $A = B.0 + A$.
  Soit $n \geq p$ et supposons l'hypothèse de récurrence vraie pour tout k inférieur ou égal à $n - 1$ et montrons qu'alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Le polynôme A s'écrit $a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, où $a_n \neq 0$
  Considérons alors le polynôme $C = A - \frac{a_n}{b_p}X^{n-p}B$. Le degré de C est inférieur ou égal à $n - 1$. Par hypothèse de récurrence on sait alors qu'il existe un couple de polynômes (Q, R) tel que : $C = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
  Il s'en suit que $A = B(Q + \frac{a_n}{b_p}X^{n-p}) + R$, avec $\deg(R) < \deg(B)$.
- **Unicité** (Exercice)

$\square$

Exemple 1.13. *(1)* $2X^3 + 5X^2 + 7X + 8 = (X^2 + X + 2)(2X + 3) + 2.$

(2) $4X^4 + 3X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(4X^2 - 4X + 3) + (X - 2)$

Remarque 1.14. *B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.*

1.2.2 Algorithme d'Euclide, PGCD

Soit A, B deux polynômes non nuls, on effectue les divisions euclidiennes successives des quotients par leurs restes, jusqu'a arriver à un reste nul, alors le dernier reste non nul est un diviseur commun de A et B de degré minimal, ce reste une fois normalisé (lorsque le coefficient du degré de polynôme vaut 1 [1]), s'appelle le *PGCD* de A et B et se note $A \wedge B$.

Exemple 1.15. *PGCD* $(X^3 + 3X^2 + 3X + 1, X^3 + 2X^2 + 2X + 1) = X + 1$

Définition 1.16. *Deux polynômes sont dits premiers entre eux si leur PGCD vaut* 1.

Remarque 1.17.
- *le PGCD ne change pas si on multiple l'un des polynômes par une constante.*

1. On peut toujours normaliser un polynôme. Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n, a_n \neq 0$ le normalisateur de P est $\frac{1}{a_n}P$

– *Si P est un polynôme irréductible et Q est un polynôme quelconque, alors $P \wedge Q = 1$ ou P, en particulier deux polynômes irréductibles distincts sont toujours premiers entre eux.*

Théorème 1.18. (Bizout). *Soient A et B deux polynômes non nuls et $C = A \wedge B$. Alors il existe deux polynômes U et V tel que $C = UA + VB$.*

Corollaire 1.19. *Deux polynômes A et B sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe qeux polynômes U et V tel que $AU + BV = 1$.*

1.2.3 Divisions suivant les puissances croissantes

Théorème 1.20. (Division suivant les puissances croissantes à l'ordre k) *Soient A et B deux polynômes avec b_0 (le terme de degré 0 de B) non nul et $k \in \mathbf{N}$. Alors il existe deux polynômes R et Q uniques tels que $A = QB + X^{k+1}R$ et* $\deg(Q) \leq k$.

Par exemple : $52X+3X^2-X^3 = (1+2X-X^3)(2X-X^2+3X^2+X^4)+X^5(-4-X)$.

1.3 Racines d'un polynôme

Définition 1.21. *A chaque polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbf{K}[X]$, on associe la fonction*

$$\begin{array}{cccc} \widehat{P} & : & \mathbf{K} & \rightarrow & \mathbf{K} \\ & & x & \mapsto & a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n \end{array}$$

appellée fonction polynomiale de P et on dit que $a \in \mathbf{K}$ est une racine de P si et seulement si $\widehat{P}(a) = 0$, dans la suite on notera $P(a)$ au lieu de $\widehat{P}(a)$.

Proposition 1.22. *Soient $P \in \mathbf{K}[X]$ et $a \in \mathbf{K}$: a est une racine de P si et seulement $X - a$ divise P.*

Preuve:
Effectuons la division euclidienne de P par $X - a$: $P = (X - a)Q + R$ où le $\deg R < \deg(X - a)$. Le polynôme R est donc soit le polynôme nul soit le polynôme constant. L'évaluation en a indique que : $R = R(a) = P(a) = 0$. On déduit la proposition. □

Conséquences
- Un polynôme, non nul de degré $n \in \mathbf{N}$ admet au maximum n racines.
- Tout polynômes qui admet un nombre de racines supérieur strictement à son degré est nul, en particulier tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.

1.4 Factorisation

1.4.1 Factorisation dans $\mathbf{K} = \mathbf{C}$

Théorème 1.23. (de d'Alembert-Gauss) *Tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ admet une racine.*

Corollaire 1.24. *Les polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont exactement de degré 1. En particulier, dans $\mathbf{C}[X]$ tout polynôme P de degré $n \geq 1$ se factorise sous la forme suivante :*

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - a_i),$$

avec $\lambda \in \mathbf{C}$ et $\forall k \in \{1, \dots, n\}, a_k \in \mathbf{C}$.

Par exemple, $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ et $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$.

1.4.2 Factorisation dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$

Proposition 1.25. *Soit a une racine d'un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$. Alors $\bar{a}$ est aussi une racine de P.*

Preuve:
Si $P \in \mathbf{R}[X]$ et si $a \in \mathbf{C}$, alors $P(\bar{a}) = \overline{P(a)}$ et par conséquent si $a \in \mathbf{C}$ est un racine de P alors $\bar{a}$ est une racine de P. □

Théorème 1.26. *Dans $\mathbf{R}[X]$, tout polynômes de degré $n \geq 1$ se factorise sous la forme :*

$$P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{m}(X - a_k) \prod_{l=1}^{p}(X^2 + \alpha_l X + \beta_l),$$

avec $\lambda \in \mathbf{R}$, $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ $a_k \in \mathbf{R}$ et $\forall l \in \{1, \dots, p\}$ $\alpha_l^2 - 4\beta_l < 0$, $m + 2p = n$.

Preuve:
Le résultat est evident pour un polynôme de degré 0 ou 1. Si $\deg P \geq 2$, on applique l'algorithme suivant :
Si P admet une racine réelle a, alors il existe un polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$
Sinon (théorème de d'Alembert-Gauss) P admet une racine complexe $a \in \mathbf{C}$. Par conséquent $\bar{a}$ est aussi une racine de P. Donc $P = (X^2 - 2\Re(a)X + |a|^2)Q$, où $Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\Delta = -4\,\mathrm{Im}(a)^2 < 0$.
□

On remarquera que $X^2 + 1$ et $X^2 + X + 1$ sont irréductible dans $\mathbf{R}[X]$ mais pas dans $\mathbf{C}[X]$ et sur $\mathbf{R}[X]$ le polynôme $P = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$ n'est pas irréductible et qu'il ne possède pas de racines.

1.4.3 Ordre de multiplicité

Définition 1.27. *Si $a \in \mathbf{K}$ est une racine du polynôme $P \in \mathbf{K}[X]$, le plus grand entier $m \geq 1$ tel que $(X - a)^m$ divise P est appelé* ordre de multiplicité *de la racine a.*

Proposition 1.28. *Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$. Si P admet r racines 2 à 2 distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_r$ dans $\mathbf{K}$, d'ordre de multiplicité $m_1, m_2, \ldots, m_r$ alors $m_1 + m_2 + \cdots + m_r \leq n$.*

Par exemple, dans $\mathbf{R}[X]$, le polynôme $P = (X^2+3)(X-1)^2(X+2)$ est de degré 5 et possède une racine simple et une racine double $(1 + 2 = 3 \leq 5)$. Dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme P possède 4 racines trois simples et un double et $P = (X + i\sqrt{3})(X - i\sqrt{3})(X-1)^2(X+2)$.

Définition 1.29. *Un polynôme non constant est dit* sindé *si la somme des ordres de multiplicité de ses racines est égale au degré de ce polynôme.*

1.5 Feuille d'exercices- Polynomes

Questions de cours

(1) Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$, abec $B \neq 0$. Ecrire la division euclidienne de A par B.

(2) Que veut dire l'expression "a est une racine d'ordre 3 de P" ?

(3) Donner l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et $\mathbf{R}[X]$.

(4) Le polynôme $X^4 + X^2 + 1$ est-il irréductible ?

Arithmétique des polynômes

Exercice 1 : Dans les cas suivants, effectuer la division euclidienne de A par B :

1. $A(X) = X^3 + 4X^2 + 6X + 4$ et $B(X) = X^2 + 1$

2. $A(X) = X^5 + X^4 + 5X^3 + 6X^2 + 7X + 2$ et $B(X) = X^4 + 2X^3 + X + 2$

Exercice 2. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidinne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^2 - 4X + 3$ et $B = X^3 + X^2 - 2$.
2. $A = X^5 + 1$ et $B = X + 1$.
3. $A = 3X^7 - 2X^5 + X^3 - 4$ et $B = 2X^2 - X + 3$.

Exercice 3. Montrer les divisibilités suivantes et déterminer les quotients correspondant :

(1) $X - 1 \mid X^3 - 2X^2 + 3X - 2$

(2) $X - 2 \mid X^3 - 3X^2 + 3X - 2$

(3) $X + 1 \mid X^3 + 3X^2 - 2$.

Exercice 4. En réalisant une division euclidienne, former une condition nécessaire et suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ pour que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 5. Soit $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ tel que $a \neq b$ et $P \in \mathbf{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 6. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de A et B, avec

(1) $n = 2$ et $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$, $B = X^2 + X + 1$.

(2) $n = 3$ et $A = 4(X + 1)$, $B = (X + 1)^2 + 1$.

(3) $n = 4$, $A = 2 + 2X - X^2 + X^4$, $B = 1 + X + X^2$.

Exercice 7. Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$:

(1) Suivant les puissances décroissantes.

(2) A l'ordre 4 (c'est à dire tel que le reste soit divisible par X^5) suivant les puissances croissantes.

Exercice 8. Trouver le *pgcd* de P et Q dans les cas suivants :

(1) $P = X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $Q = X^3 + X^2 - X - 1$.

(2) $P = X^4 - 10X^2 + 1$ et $Q = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.

(3) $P = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $Q = X^4 + 2X^3 + X + 2$

Exercice 9**.** Montrer que les polynômes P et Q suivants sont premiers entre eux. Trouver U et $V \in \mathbf{K}[X]$ tel que $UP + VQ = 1$.

(1) $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^2 + X + 1$.

(2) $P = X^3 + X^2 + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Racines d'un polynôme

Exercice 10**.** Soit p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Déterminer les racines et les pôles de $F = \frac{X^p-1}{X^q-1}$ en précisant les multiplicités respectives.

Factorisation de polynômes

Exercice 11**.** Factoriser dans $\mathbf{C}[X]$ puis dans $\mathbf{R}[X]$ les polynômes suivants :

(1) $X^4 - 1$

(2) $X^5 - 1$

(3) $(X^2 - X + 1)^2 + 1$.

Exercice 12**.** Factoriser dans $\mathbb{R}\,[X]$ les polynômes suivants :

(1) $X^4 + X^2 + 1$

(2) $X^4 + X^2 - 6$

(3) $X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 13**.** Former la décomposition primaire dans $\mathbf{R}[X]$ de $P = X^{2n+1} - 1$ (avec $n \in \mathbf{N}$).

sectionAlgèbre des polynômes

Chapitre 2

Espace vectoriel

2.1 Introduction au groupe

Définition 2.1. *Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application de $E \times E$ dans E.*

Exemple 2.2. *(1) L'addition ou la multiplication sont des lois de composition internes sur* $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

(2) la soustraction définit une loi de composition interne sur $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, *ou* $\mathbf{C}$ *mais sur* $\mathbf{N}$.

(3) Le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbf{R}^d$ *n'est pas une loi de composition interne si* $d \geq 2$.

(4) On note $\mathcal{F}(E,E)$ l'ensemble des applications de E dans E, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E,E) \times \mathcal{F}(E,E) & \to & \mathcal{F}(E,E) \\ (f,g) & \mapsto & f \circ g \end{array}$$

($f \circ g$ est défini par $\forall x \in E$, $f \circ g(x) = f(g(x))$) est une loi de composition interne.

Définition 2.3. *Un groupe est la donnée d'un ensemble G et d'une loi de composition interne notée $*$ suivante :*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x * y \end{array}$$

telle que $(G, *)$ vérifie les trois propriétés suivantes :

(1) (Elément neutre) Il existe $e \in G$ tel que $\forall x \in G$, $e * x = x * e = x$.

(2) (Associativité) Pour tout $x, , y, z \in G$, $(x * y) * z = x * (y * z)$.

(3) (Elément inverse) Pour tout $x \in G$, il existe $x' \in G$ tel que $x * x' = x' * x = e$.

Si de plus, $\forall x, y \in G$, on a $x * y = y * x$,on dit que $*$ est commutative et $(G, *)$ est un groupe commutatif ou abélien.

Remarque 2.4. *On emploie aussi parfois le terme de symétrique au lieu de l'inverse.*

Exemple 2.5. *(1)* $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ *et* $\mathbf{C}$ *sont des groupes abéliens :* 0 *est l'élément neutre, l'inverse de* x *est* $-x$. *Notons que* $(\mathbf{N}, +)$ *n'est pas un groupe car la condition* (3) *de la définition 2.3 n'est pas vérifié.*

(2) $Q^*, \mathbf{R}^*, \mathbf{C}^*$ *munis de la multiplication sont des groupes :* 1 *est l'élément neutre. Il en est de même pour* $\mathbf{T}$, *l'ensemble des nombres complexe de module* 1. *Si* x *est réel, alors l'inverse de* x *est* $\frac{1}{x}$. *Tout élément de* $\mathbf{C}^*$ *possède un inverse pour la loi* $\times$ *:*

$$\forall z \in \mathbf{C}^*, \exists z' \in \mathbf{C}^* \mid z \times z' = z' \times z = 1$$

(Si $z = x + iy$ *alors* $z' = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z} = z^{-1}$*).*

(3) Soit E *un ensemble et soit* $\mathcal{S}(E)$ *l'ensemble des bijections de* E *sur* E, *soit* $\circ$ *la loi de composition interne définie par la composition de deux bijections. Montrer à titre d'exercice que* $(\mathcal{S}(E), \circ)$ *est un groupe et qu'il est non abélien et* E *a au moins trois éléments.*
En particulier, pour $n \in \mathbf{N}$, *soit* $E = \{1, \ldots, n\}$. *Alors* $\mathcal{S}(E)$ *est noté* S_n. S_n *est un groupe de cardinal* $n!$. *On l'appelle le groupe des permutations sur* n *éléments.*

Proposition 2.6. *(1) L'élément neutre est unique.*

(2) L'inverse x' *d'un élément* $x \in G$ *est unique.*

(3) L'inverse de l'inverese de $x \in G$ *est* x, *i.e* $(x')' = x$.

(4) Pour tout $x, y \in G$, $(x * y)' = y' * x'$.

(5) Pour tout $x, y, z \in G$, *si* $x * y = x * z$ *alors* $y = z$.

Preuve:

(1) Soient $e', e \in G$ deux éléments neutres de G. En appliquant la propriété d'un élément neutre à e et e', on obtient :

$$\begin{cases} e' * e = e * e' = e, \\ e * e' = e' * e = e'. \end{cases}$$

Par conséquant $e = e'$.

(2) Soit $x'' \in G$ tel que $x'' * x = x * x'' = e$. on a alors $x" * x * x' = x'$ ce qui implique que $x'' = x'$ (puisque $x * x' = e$).

(3) Soit $(x')'$ l'inverse de l'inverse de x', on a $(x')' * x' = e$. Puisque $x * x' = e$ et d'aprés la deuxième propriété de cette proposition, on a $x = (x')'$.

(4) On a

$$(x * y) * (y' * x') = x * y * y' * x' = x * x' = e$$

donc $(x * y)' = y' * x'$.

(5) On a

$$x' * (x * y) = x' * (x * z) \Longrightarrow (x * x') * y = (x * x') * z \Longrightarrow y = z.$$

□

Notation : Soit $(G, *)$ un groupe, on note souvent xy au lieu de $x * y$, 1 au lieu de e et x^{-1} l'inverse de x, pour tout $x \in G$.

2.2 Espace vectoriel

L'ensemble $\mathbf{K}$ désigne toujours $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Définition 2.7. *On appelle* $\mathbf{K}$-espace vectoriel *(ou* espace vectoriel seu $\mathbf{K}$*) tout ensemble non vide E muni d'une loi de comoposition interne notée* $+$

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

telles que :
(1) $(E, +)$ *est un groupe abélien.*
(2) $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\forall x \in E$, *on a* $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
(3) $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall x, y \in E$, *on a* $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
(4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x \in E$, *on a* $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
(5) $\forall x \in E$, *on a* $1x = x$.

Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés vecteurs *; et les éléments de* $\mathbf{K}$ *sont appelés* scalaires.

Lorsqu'il n'y a pas de confusion, on dira espace vectoriel au lieu de $\mathbf{K}$ espace vectoriel.

Exemple 2.8. *(1) L'ensemble des vecteurs du plan est un espace vectoriel.*
(2) $\mathbf{K}$ *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel.*
(3) Soient E un $\mathbf{K}$ *espace vectoriel et X un ensemble non vide quelconque. Considérons $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des applications de X dans E. Pour $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit $f + g$, $\lambda f \in \mathcal{F}(X, E)$ par :*

$$\forall x \in X, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda f)(x) := \lambda(f(x))$$

alors $\mathcal{F}(X, E)$ muni de ces lois est un $\mathbf{K}$ *espace vectoriel.*
(4) Sur $\mathbf{R}^2$*, on définit les deux lois suivantes : pour $(x, y), (x', y') \in \mathbf{R}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,*

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y') \text{ et } \lambda(x, y) := (\lambda x, \lambda y)$$

alors $\mathbf{R}^2$ *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel.*
(5) Plus généralement : Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n espaces vectoriels, alors l'espace produit $E := E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ est un espace vectoriel pour les lois suivantes : Pour tous $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, on définit

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\ &\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

(6) L'ensemble $\mathbf{P}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n additionné du polynôme nul est un espace vectoriel.

Proposition 2.9. *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et pour tout $x, y \in E$, on a :*
(1) $\lambda x = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ *ou* $x = 0$.
(2) $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.
(3) $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$.
(4) $(-\lambda)(-x) = \lambda x$.

2.3 Sous-espace vectoriel

Dans toute la suite l'ensemble E désignera un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$.

2.3.1 Définition

Définition 2.10. *Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F possède les propriétés suivantes :*

(1) $0 \in F$ *;*

(2) $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$. *Autrement dit F est stable par l'addition ;*

(3) $\forall x \in F$ *et* $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \lambda x \in F$. *Autrement dit, F est stable par la multiplication par scalaire.*

Remarque 2.11. *Tout sous-espace vectoriel de E, est un espace vectoriel pour les lois induites par E.*

Exemple 2.12. *(1) Si E est un espace vectoriel, alors $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriel de E.*

(2) Si $E = \mathbf{R}^2$, alors $F = \{(x, 0); x \in \mathbf{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E. De même, si $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, alors $F\{(\lambda x_0, \lambda y_0); \lambda \in \mathbf{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(3) L'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 0\}$ est un sous-esapce vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

(4) $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. En effet $\mathbf{R}_n$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de vecteur nul $0 = (0, \ldots, 0)$. $H \subset \mathbf{R}_n$ et $0 = (0, \ldots, 0) \in H$ car $0 + \cdots + 0 = 0$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ et $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in H$. On a $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n)$. Or $(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) + \mu(y_1 + \cdots + y_n) = 0$ car $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n = 0$ puisque $x, y \in H$ donc $\lambda x + \mu y \in H$.

Corollaire 2.13. *Soit E un espace vectoriel et F un sous-ensemble de E ($F \subset E$). Si F vérifie les propriétés* (1) *et* (2) *suivantes alors F est un sous-espace vectoriel de E :*

(1) F est non vide (F contient l'élément neutre de E).

(2) $\forall (x, y) \in F \times F, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, *alors* $\lambda x + \mu y \in F$.

Exemple 2.14. *Les parties suivantes ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$:*

- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\}$ *car ne contient par le vecteur nul ;*
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0\}$ *car non stable par addition ;*
- $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y \in \mathbf{Z}\}$ *car non stable par produit extérieur.*

Proposition 2.15. *Soient E un espace vectoriel et $E_1, \ldots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E, alors l'intersection $F = \bigcap_{k=1}^{n} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Preuve:

Pour tout i, on a $0 \in E_i$, donc $0 \in F$. Soient $x, y \in F$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ alors pour tout i, on a $\lambda x + \mu y \in E_i$ donc $\lambda x + \mu y$ est dans l'intersection de tout les E_i. □

Remarque 2.16. *La réunion de deux sous-espace vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel. En effet, si* $E = \mathbf{R}^2$*, les sous-ensembles* $E_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0\}$ *et* $E_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x - y = 0\}$ *sont deux sous-espaces vectoriels de* $\mathbf{R}^2$ *mais* $E_1 \cup E_2$ *n'est pas un sous-espace vectoriel (par exemple, soient* $x, y \in \mathbf{R}^*$*, on a* $(x, -x) \in E_1$ *et* $(y, y) \in E_2$ *mais* $(x, -x) + (y, y)$ *n'appartient ni à* E_1 *ni à* E_2*).*

2.3.2 Combinaisons linéaires

Soit $\{x_1, \ldots, x_p\}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme $a_1x_1 + \ldots a_px_p = \sum_{k=1}^{p} a_kx_k$, où les $a_k \in \mathbf{R}$ est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs $x_k, k = 1 \ldots, p$.

Remarque 2.17. *On peut généraliser cette notion à une famille infinie de vecteurs, mais dans ce cas il faut que la suite des scalaires soit à support fini.*

2.3.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie d'un espace vectoriel

Soit A un sous-ensemble non-vide de l'espace vectoriel E. On note $\mathrm{vect}(A)$, l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. On a donc

$$\mathrm{vect}(A) = \{\textstyle\sum_{a \in A} \lambda_a a \mid (\lambda a) \text{ est une famille de scalaires à support fini}\}.$$

Donc un élément x de E appartient à $\mathrm{vect}(A)$, si et seulement si, il existe $x_1, \ldots, x_n \in A$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tels que : $x = \lambda_1x_1 + \cdots + \lambda_nx_n$.

Théorème 2.18. *Soit* A *une partie d'un espace vectoriel* E*.* $\mathrm{vect}(A)$ *est l'unique sous-espace vectoriel de* E *vérifiant :*

(1) $A \subset \mathrm{vect}(A)$*,*

(2) $\mathrm{vect}(A)$ *est inclus dans tout sous-espaces vectoriels contenant* A*.*

Le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(A)$ *se comprend comme étant le plus petit sous-espace vectoriel contenant* A*, on l'appelle espace vectoriel engendré par* A*.*

Corollaire 2.19. $\mathrm{vect}(A)$ *est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriel de* E *contenant* A*.*

Corollaire 2.20. A *est un sous-espace vectoriel, si et seulement si,* $\mathrm{vect}(A) = A$*.*

Exemple 2.21. *(1)* $\mathrm{vect}\{$*ensemble vide*$\} = \{0\}$ *car l'espace nul est le plus petit sous-espace vectoriel de* E*.*

(2) $\mathrm{vect}(E) = E$ *car* $\mathrm{vect}E$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant* E*.*

(3) Soit $A = \{u\}$*. Montrons que* $\mathrm{vect}\{u\} = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u$*.*
Puisque $u \in A \subset \mathrm{vect}(A)$ *et puisque* $\mathrm{vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel on a* $\lambda u \in \mathrm{vect}(A)$*, pour tout* $\lambda \in \mathbf{K}$*. Ainsi* $\mathbf{K}u \subset \mathrm{vect}\{u\}$*. Par double inclusion on obtient* $\mathbf{K}u = \mathrm{vect}\{u\}$*.*

(4) Soit $A = \{u, v\}$*. Par double inclusion, on montre comme ci-desus que* $\mathrm{vect}\{u, v\} = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u + \mathbf{K}v$*.*

Proposition 2.22. *Si A et B deux parties de E alors* $A \subset B \Longrightarrow \mathrm{vect}(B) \subset \mathrm{vect}(A)$.

Preuve:
Supposons que $A \subset B$. On a alors $A \subset \mathrm{vect}(B)$ or $\mathrm{vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel donc $\mathrm{vect}(A) \subset \mathrm{vect}(B)$. $\square$

Proposition 2.23. *Si A et B sont deux parties de E alors* $\mathrm{vect}(A \cup B) = \mathrm{vect}(A) + \mathrm{vect}(B)$.

Exemple 2.24. *Pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E.* $\mathrm{vect}(F \cup G) = F + G$. *Ainsi $F + G$ apparait comme étant le plus patit sous-espace vectoriel contenant F et G.*

2.4 Feuille d'exercices-Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
On munit le produit cartésien $E\times E$ de l'addition usuelle : $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ et de la multiplication externe $*$ par les complexes définie par : $(a+i.b)*(x,y)=(a.x-b.y,a.y+b.x)$.
Montrer que $E\times E$ est alors un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.
Celui-ci est appelé complexifié de E.
Exercice 2. Soit $\mathbf{R}_+^*$ muni de la loi interne définie par $a\oplus b=a.b, \forall a,b\in\mathbf{R}_+^*$ et de la loi externe $\otimes$ telle que : $\lambda\otimes a=a^\lambda, \forall a\in\mathbf{R}_+^*, \forall\lambda\in R$.
Montrer que $(\mathbf{R}_+^*,\oplus,\otimes)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.
Exercice 3. Sur $\mathbf{R}^2$, on définit les deux lois suivantes : pour tous $(x,y),(x',y')\in\mathbf{R}^2$ et $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, on pose

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \qquad \text{et} \qquad \lambda\star(x,y)=(\lambda x,0).$$

Le triplet $(\mathbf{R}^2,+,\star)$ est-il un espace vectorielsur $\mathbf{R}$?
Exercice 4. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$?

(a) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\leqslant y\}$;

(b) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid xy=0\}$;

(c) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x=y\}$;

(d) $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x+y=1\}$.

Exercice 5. Soient $F=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ et $G=\{(a-b,a+b,a-3b) \mid a,b\in\mathbf{R}\}$.

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.

(b) Déterminer $F\cap G$.

Exercice 6. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$?

(a) $\{(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$;

(b) $\{(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$;

(c) $\{(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\}$;

(d) $\{(u_n)\in\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\}$.

Exercice 7. Soient $u_1,\dots,u_n$ des vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que l'ensemble $F=\{\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_nu_n \mid \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbf{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de $E=\text{vect}(u_1,\dots,u_n)$.
Exercice 8. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F\cap G=F+G\Leftrightarrow F=G$.
Exercice 9. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E, si et seulement si, $F\subset G$ ou $G\subset F$.
Exercice 10. Comparer $\text{vect}(A\cap B)$ et $\text{vect}(A)\cap\text{vect}(B)$.
Exercice 11. Soient A et B deux parties d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que $\text{vect}(A\cup B)=\text{vect}(A)+\text{vect}(B)$.

2.5 Applications linéaires

2.5.1 Définitions

Définition 2.25. *Soient $(E, +, .)$ et $(F, .+)$ deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. On dit que $f : E \to F$ est linéaire (ou est un morphisme d'espace vectoriel) si :*
(1) $\forall x, y \in E$, on a $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
(2) $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall x \in E$, on a $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Proposition 2.26. [Caractérisation usuelle des applications linéaires] : *Soit $f : E \to F$. L'application f est linéaire, si et seulement si , $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$, $\forall x, y \in E$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.*

Exemple 2.27. *Soit $f : E \to F$ définie par $f : x \mapsto 0_F$. L'application f est linéaire.*

Proposition 2.28. *Soient $E, E_1, \dots E_n$, $(n \in \mathbf{N}^*)$ des κ espaces vectoriels. L'application*

$$\begin{array}{rcccc} f & : & E & \to & E_1 \times \cdots \times E_n \\ & & x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_n(x)). \end{array}$$

f est linéaire de E dans $E_1 \times \cdots \times E_n$, si et seulement si, $f_1, \dots, f_n$ sont des applications linéaires de respectivement de E dans $E_1, \dots,$ de E dans E_n.

Exemple 2.29. *Montrons que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y, 2y)$ est une application linéaire. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, et $a = (x, y), b = (x', y') \in \mathbf{R}^2$,*

$$\begin{aligned} f(\lambda a + \mu b) &= f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\ &= (\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y', \lambda x + \mu x' - \lambda y + \mu y', 2\lambda y + 2\mu y') \\ &= \lambda(x + y, x - y, 2y) + \mu(x' + y', x' - y', 2y') \\ &= \lambda f(a) + \mu f(b). \end{aligned}$$

Proposition 2.30. *Soient $(E, +, .)$, $(F, +, .)$, $(G, +, .)$ des $\mathbf{K}$- espaces vectoriels.*
(1) Si l'application $f : E \to F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$;
(2) Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires alors $g \circ f : E \to G$ est linéaire.
(3) Si $e_1, \dots e_n$ sont des vecteurs de E alors $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, $f(\sum_{k=1}^n a_k e_k) = \sum_{k=1}^n a_k f(e_k)$.

2.5.2 Applications linéaires particulières

Formes linéaires

Définition 2.31. *On appelle forme linéaire sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, toute application linéaire de E dans $\mathbf{K}$. On note E^*, au lieu de $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$, l'ensemble des formes linéaires sur E.*

Exemple 2.32. *Pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{K}$ fixé, l'application $f : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ définie par $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ est une forme linéaire sur $\mathbf{K}^n$. En effet, c'est une application de $\mathbf{K}^n$ vers $\mathbf{K}$ et c'est aussi une application linéaire car on vérifie aisement que $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}, \forall x, y \in \mathbf{K}^n$, on a $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.*

Endomorphisme

Définition 2.33. *On appelle endomorphisme de E, toute applicatin linéaire de E dans lui même. On note $\mathcal{L}(E)$, au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$, l'ensemble des endomorphismes de E.*

Exemple 2.34. *L'application identité $Id_E : E \to E$ est un endomorphisme de E.*

Proposition 2.35. *Si f et g deux endomorphismes de E, alors $f \circ g$ est aussi un endomorphisme de E.*

Isomorphisme

Définition 2.36. *On appelle isomorphisme d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E vers un $\mathbf{K}$-espace vectoriel F toute application linéaire bijective de E vers F. On note* $\mathrm{Iso}(E,F)$ *l'ensemble des isomorphismes de E dans F.*

Exemple 2.37. *L'application $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$ définie par $f(a,b) = a + ib$ est un isomorphisme de $\mathcal{R}$-espace vectoriel. En effet, cette application est $\mathbf{R}$-linéaire et bijective.*

Proposition 2.38. *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des isomorphismes alors la composée $g \circ f : f \to G$ est un isomorphisme.*

Proposition 2.39. *Si $f : E \to F$ est un isomorphisme alors son application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme.*

Exemple 2.40. *L'application $g : \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2$ définie par $g : z \mapsto (\Re(z), \mathrm{Im}(z))$ est l'isomorphisme réciproque de l'application $f : (a,b) \in \mathbf{R}^2 \mapsto a + ib \in \mathbf{C}$.*

Automorphisme

Définition 2.41. *On appelle automorphisme de E, toute application linéaire bijective de E. On note* $\mathrm{Gl}(E)$ *l'ensemble d'automorphisme de E.*

Proposition 2.42. *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des automorphismes alors la composée $g \circ f : f \to G$ est un automorphisme.*

Proposition 2.43. *Si $f : E \to F$ est un automorphisme alors son application réciproque $f^{-1} : F \to E$ est un automorphisme.*

2.5.3 Noyau et image d'une application linéaire

Théorème 2.44. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Si V est une sous-espace vectoriel de E alors $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.*
Si W est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 2.45. *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

(1) On appelle image de f *l'espace* $\mathrm{Im}\, f = f(E)$.

(2) On appelle noyau de f *l'espace* $\ker f = f^{-1}(\{0\})$.

Proposition 2.46. *(1)* $\operatorname{Im} f$ *est un sous-espace vectoriel de* F.

(2) $\ker f$ *est un sous-espace vectoriel de* E.

Remarque 2.47. *(1) Pour déterminer l'image d'une application linéaire* f*, on détermine les valeurs prises par* f*, i.e., les* $y \in F$ *tels qu'il existe* $x \in E$ *pour lequel* $y = f(x)$.

(2) Pour déterminer le noyau d'une application linéaire f*, on résout l'equation* $f(x) = 0_F$ *d'inconnue* $x \in E$.

Exemple 2.48. *Déterminons le noyau et l'image de l'aaplication linéaire* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *définie par* $f : (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$*. Soit* $a = (x, y) \in \mathbf{R}^2$*. .....* $\ker f = \{x, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$
$\operatorname{Im} f = \{(x, -x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

Théorème 2.49. *Si* $f : E \to F$ *est une application linéaire alors*

(1) f *est surjective, si et seulement si,* $\operatorname{Im} f = F$

(2) f *est injective, si et seulement si,* $\ker f = \{0_E\}$.

Preuve:

□

2.6 Famille de vecteurs

2.6.1 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ une famille finie de vecteurs de E.

Définition 2.50. *On appelle combinaison linéaire des vecteurs de la famille* $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \le i \le n}$ *tout vecteurs* x *de* E *pouvant s'écrire* $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ *avec* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *des scalaires de* $\mathbf{K}$ *bien choisis.*

Définition 2.51. *On appelle espace vectoriel engendré par la famille* $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \le i \le n}$*, le sous-espace vectoriel engendré par la partie* $\{e_1, \dots, e_n\}$*. On le note* $\operatorname{vect} \mathcal{F}, \operatorname{vect}(e_i)_{1 \le i \le n}$ *ou* $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$.

Exemple 2.52. *Le sous-espace vectoriel engendré par la famille vide est l'espace nul* $\{0\}$.

Théorème 2.53. *Si* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une famille de vecteurs de* E *alors* $\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n)$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs* $e_1, \dots, e_n$*, c'est-à-dire :*

$$\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_n) = \{\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}\}.$$

Exemple 2.54. *(1) Cas* $n = 1$, $\mathfrak{X}(u) = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u$.

(2) Cas $n = 2$, $\mathfrak{X}(u, v) = \{\lambda u + \mu v \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\} = \mathbf{K}u + \mathbf{K}v$.

(3) Dans $\mathbf{R}^3$*, considérons* $u = (1, 1, 1), v = (0, -1, 2)$.
$\operatorname{vect}(u, v) = \{(\lambda, \lambda + \mu, 2\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbf{K}\}$.

Remarque 2.55. *Il est efficace d'établir qu'une partie est un sous-espace vectoriel en observant que celle-ci est engendrés par une famille de vecteurs.*

Exemple 2.56. *(1) Dans $\mathbf{R}^3$, considérons $P = \{(a+b, a-b, 2b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$. Puisque $P = \mathrm{vect}(u, v)$, avec $u = (1,1,0)$ et $v = (1,-1,2)$, P est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.*

(2) Dans $\mathbf{R}^3$, considérons $P = \{(x,y,z) \mid x+y-z=0\}$. Puisque $x+y-z=0 \leftrightarrow z = x+y$, on a $P = \mathrm{vect}((1,0,1),(0,1,1))$. ainsi P est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

2.6.2 Famille génératrice

Définition 2.57. *On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E est génératrice de E, si tout vecteur x de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \mid x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Remarque 2.58. *La famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E, si et seulement si, $\mathrm{vect}(\mathcal{F}) = E$.*

Exemple 2.59. *(1) Dans $E = \mathbf{R}^n$, on pose $e_i = (0, \ldots, 1, 0 \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ où 1 se situe en ième position. La famille $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de $\mathbf{R}^n$. En effet $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, on peut écrire $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.*

(2) Dans $E = \mathbf{R}$, la famille (1) est génératrice. En effet, $x \in \mathbf{R}$, $x = x.1$.

(3) Dans $E = \mathbf{C}$ vu comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel, la famille $\mathcal{F} = (1, i)$ est génératrice. En effet, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on peut écrire $z = a.1 + b.i$, avec $a = \Re(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Proposition 2.60. *Si $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ est une famille génératrice et si $e_{n+1} \in \mathfrak{X}(e_1, \ldots, e_n)$ alors la sous-famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est génératrice.*

2.6.3 Famille libre, famille liée

Définition 2.61. *Un vecteur u est dit colinéaire à un vecteur v de E s'il existe $\alpha \in \mathbf{K}$ tel que $u = \alpha v$. Deux vecteurs u et v sont dits colinéaires si l'un des deux est colinéaire à l'autre.*

Attension

u est colinéaire à v n'équivaut pas à v est colinéaire à v. En effet, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteurs mais tout vecetuers n'est pas colinéaire au vecetur nul.

Définition 2.62. *(1) On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E est libre si elle vérifie $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e = 0 \rightarrow \lambda_1 = \ldots \lambda_n = 0$. On dit que les vecetur s $e_1, \ldots, e_n$ sont linéairement indépendants*

(2) On dit que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée si elle n'est pas libre ce qui signifie $\exists \lambda_1, \lambda_n \in \mathbf{K}$, $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_n e_n = 0$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Une égalité $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls est appelée relation linéaire sur les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$.

Exemple 2.63. *Soit $u \in E$, étudions la liberté de la famille (u). Si $u \neq 0$ alors $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\lambda u = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Par suite, la famille (u) est libre.*
Si $u = 0$ alors on peut écrire $\lambda u = 0$ avec $\lambda = 1 \neq 0$. Par suite, la famillle (0) est liée.

Proposition 2.64. *Soient $n \geq 2$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On a équivalence entre :*

(i) $(e_1, \dots, e_n)$ est liée ;

(ii) L'un des vecteurs $e_1, \dots, e_n$ est combinaison linéaire des autres.

Exemple 2.65. *(1) Soient $u, u \in E$.*
(u, v) est liée, si et seulement si, $(\exists \alpha \in \mathbf{K}, u = \alpha v)$ ou $(\exists \beta \in \mathbf{K}, v = \beta u)$. Ansi, la famille (u, v) est liée, si et seulement si, u et v sont colinéaires.

(2) Dans $E = \mathbf{R}^3$, considérons les vecteurs $u = (1, 2, 1), v = (1, -1, 1), w = (1, 1, 0)$ et la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$. Etudions la liberté de la famille $\mathcal{F}$. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \begin{cases} \Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Aprés résolution du système, on obtient $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$, la famille $\mathcal{F}$ est donc libre.

(3) Dans $E = \mathbf{R}^3$, considérons les vecteurs $u = (1, -1, 0), v = (2, -1, 1), w = (0, 1, 1)$ et la famille $\mathcal{F} = (u, v, w)$. Etudions la liberté de la famille $\mathcal{F}$.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Aprés rsolution du système, on obtient $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \gamma = -\beta. \end{cases}$
On en déduit que la famille $\mathcal{F}$ est liée car on a notament la relation linéaire $-2u + v - w = 0$.

(4) Dans $E = \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, considérons les fonctions $f : x \mapsto 1, g : x \mapsto cosx, h : x \mapsto sinx$ et montrons que la famille (f, g, h) est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ Supposons $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\alpha + \beta cosx + \gamma sinx = 0$. Pour $x = 0$, on obtient l'équation $\alpha + \beta = 0(1)$. Pour $x = \Pi/2$, on obtient l'équation $\alpha + \gamma = 0(2)$. Pour $x = \Pi$, on obtient l'équation $\alpha_\beta = 0(3)$. On a (1) et (3) donnent $\alpha = \beta = 0$ et par (2) on obtient $\gamma = 0$. Finalement la famille (f, g, h) est libre.

Remarque 2.66. *(1) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

(2) Toute sur-famille d'une famille liée, en particulier toute famille contenant le vecteur nul est liée.

(3) Une sur-famille d'une famille libre n'est pas nécessairement libre.

Proposition 2.67. *Si* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une famille libre et si* $e_{n+1} \notin \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_n)$ *alors la sur-famille* $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ *est libre.*

2.6.4 Base d'un espace vectoriel

Définition 2.68. *On dit qu'une famille* $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n} = (e_1, \dots, e_n)$ *de vecteurs de* E *est une base de* E *si celle-ci est libre et génératrice.*

Exemple 2.69. *(1) Dans* $E = \mathbf{K}^n$, *on pose* $e_i = (1, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{K}^n$ *où* 1 *se situe en ième position. On a déja vu que* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *est génératrice de* $\mathbf{K}^n$ *; montrons qu'elle est libre. Soient* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$. *Supposons que* $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$. *On a* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ *et donc* $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. *Finalement , la famille* $\mathcal{B}$ *est libre et génératrice de* $\mathbf{K}^n$, *c'est une base de* $\mathbf{K}^n$.

(2) Considérons la famille $(1, i)$ *déléments du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$. *On a déja vu que cette famille est génratrice ; montrons qu'elle est libre. Soient* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. *Supposons que* $\lambda.1 + \mu.i = 0$. *En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient* $\lambda = \mu = 0$. *Finalement, la base* $\mathcal{B}$ *est libre est génératrice du* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$, *c'est une base de* $\mathbf{C}$.

Remarque 2.70. *La famille* $(1, i)$ *est liée dans le* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$. *Elle n'est pas donc une base du* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$.

2.6.5 Composante dans une base

Théorème 2.71. *Si* $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est une base d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de* E *alors* $\forall x \in E, \exists !(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_n e_n$.

Définition 2.72. *Avec les notations ci-dessous, les scalaires* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *sont appelés les composants de* x *dans la base* $\mathcal{B}$ *(ou encore les composantes de* x*).*

Remarque 2.73. *Les composantes d'un vecteur dépendant de la base dans laquelle on travaille.*

Exemple 2.74. *(1) Dans* $E = \mathbf{K}^n$, *considérons la base canonique* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *et le vecteur* $x = (x_1, \dots, x_n)$. *Puisque* $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, *les composantes du vecteurs* x *dans la base* $\mathcal{B}$ *sont les saclaires* $x_1, \dots, x_n$.

(2) Dans le $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{C}$, *les composantes de* $z \in \mathbf{C}$ *dans la base canonique* $(1, i)$ *sont* $\Re(z)$ *et* $\mathrm{Im}(z)$

Théorème 2.75. *Si* $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est une base de* E *alors pour tout vecteur* x *et* y *de composantes* $x_1, \dots, x_n$ *et* $y_1, \dots, y_n$ *dans* $\mathcal{B}$, *les composantes de* $x + y$ *sont* $x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n$ *et celle de* λx *sont* $\lambda x_1, \dots, \lambda x_n$. *Ainsi l'application* $x \in E \mapsto x_i \in \mathbf{K}$ *est une forme linéaire sur* E.

2.7 Feuille d'exercices sur les applications linéaires, Famille libre, liée et base

2.7.1 Applications linéaires

Exercice 1 **:** Les applications entre **R**-espace vectoriels suivantes sont-elles linéaires :

(1) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$;

(2) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$;

[3) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y, z) = xy$;

(4) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - z$;

Exercice 2 **:** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x, y) \to (x + y, x - y)$.
Montrer que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 3 **:** Soit $\Phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ définie par $\Phi(f) = f'' - 3f' + 2f = 0$.
Montrer que Φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice 4 **:** Soit E l'espace vectoriel des applications indéfinement dérivables sur **R**. Soient $\Phi : E \to E$ et $\Psi : E \to E$ les applications définies par :
$\Phi(f) = f'$ et $\Psi(f)$ est donnée par : $\forall x \in \mathbf{R}, \Psi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.

(a) Montrer que Φ et Ψ sont des endomorphismes de E.

(b) Exprimer $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.

(c) Déterminer les images et les noyaux de Φ et de Ψ.

Exercice 5 **:** Soit f l'application linéaire d'un **K**-espace vectoriel E vers un **K**-espace vectoriel F.
Montrer que pour toute partie A de E, on a $f(\text{vect}(A)) = \text{vect}(f(A))$.

Exercice 6 **:** Soie E un **K**-espace vectoriel et f un endomorphisme de E nilpotent, c'est-à-dire il existe $n \in \mathbf{N}^*$ pour lequel $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer que $\text{Id} - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.

Exercice 7 **:** Soient E et F deux **K**-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $f(A) \subset f(B) \Longleftrightarrow A + \ker f \subset B + ker f$.

2.7.2 Image et noyau d'un endomorphisme

Exercice 8 **:** Soient f et g deux endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E.
Montrer que $g \circ f = 0$, si et seulement si, $\text{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Exercice 9 **:** Soient f et g deux endomorphismes d'un **K**-espace vectoriel E.

(a) Comparer $\ker(f) \cap \ker(g)$ et $\ker(f + g)$;

(b) Comparer $\text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ et $\text{Im}(f + g)$;

(c) Comparer $\ker(f)$ et $\ker(f^2)$;

(d) Comparer $\text{Im}(f)$ et $\text{Im}(f^2)$.

Exercice 10 **:** Soit f un endomorphisme d'un **K**-espace vectoriel E. Montrer que

(a) $\text{Im}(f) \cap \ker(f) \Longleftrightarrow \ker(f) = \ker(f^2)$;

(b) $E = \text{Im}(f) + \ker(f) \Longleftrightarrow \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$.

2.7.3 Sous-espace engendré par une famille finie

Exercice 11 **:** On considère les vecteurs de $\mathbf{R}^3$ suivants $u = (1, 1, 1)$ et $v = (1, 0, -1)$.
Montrer que $\text{vect}(u, v) = \{(2\alpha, \alpha + \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$.
Exercice 12 **:** Dans $\mathbf{R}^3$, on considère $x = (1, -1, 1)$ et $y = (0, 1, a)$ où $a \in \mathbf{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $u = (1, 1, 2)$ appartiennent à $\text{vect}(x, y)$. Comparer alors $\text{vect}(x, y)$, $\text{vect}(u, x)$ et $\text{vect}(u, y)$.

2.7.4 Famille libre

Exercice 13 **:** Les familles suivantes de $\mathbf{R}^3$ sont-elles libres ?
Si ce n'ai pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

(a) (x_1, x_2) avec $x_1 = (1, 0, 1)$ et $x_2 = (1, 2, 2)$;

(b) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (1, 1, 0)$ et $x_3 = (1, 1, 1)$;

(c) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, -1)$ et $x_3 = (1, -1, -2)$;

(d) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 3)$ et $x_3 = (-1, 1, -1)$;

Exercice 14 **:** On pose f_1, f_2, f_3, f_4 les fonctions définies par : $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x \cos x$, $f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x \sin x$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.
Exercice 15 **:** Pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on pose $f_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par : $f_k(x) = e^{kx}$.
Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
Exercice 16 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soient x, y, z trois vecteurs de E tel que la famille $x, y, z)$ soit libre.
On pose : $u = y + z$, $v = z + x$ et $w = x + y$.
Montrer que la famille (u, v, w) est libre.
Exercice 17 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ une famille de vecteurs de E. Etablir :

(a) Si $(u_1, \dots, u_n)$ est libre et $u_{n+1} \notin \text{vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est libre ;

(b) Si $(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ est génératrice et $u_{n+1} in\, \text{vect}(u_1, \dots, u_n)$ alors $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice.

Exercice 18 **:** Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$.
On pose $u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ et $\forall 1 \leq i \leq n, y_i = x_i + u$.
A quelle condition sur les α_i, la famille $(y_1, \dots, y_n)$ est-elle libre ?
Exercice 19 **:** Soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto sin(x+a), x \mapsto sin(x+b), x \mapsto sin(x + c)$ sont-elles indépendantes ?

2.7.5 Obtention de base

Exercice 20 **:** On pose $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (0, 1, 1)$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbf{R}^3$.
Exercice 21 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On pose $u = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ et $v = e_2 + e_3$.

Montrer que la famille (u, v) est libre et compléter celle-ci en une base de E.

Exercice 22 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.

On pose $u = e_1 + 2e_3$ et $v = e_3 - e_1$ et $w = e_1 + 2e_2$.

Montrer que (u, v, w) est une base de E.

Exercice 23 **:** soi E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni de la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $u_i = e_1 + \ldots, e_i$.

(a) Montrer que $B' = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E ;

(b) Exprimer les composantes dans B' d'un vecteur de E en fonction de ces comoposantes dans B.

Chapitre 3

Matrices

3.1 Opérations sur les matrices

3.1.1 Définition

Définition 3.1. *Soient $n, p \in \mathbf{N}^*$. On appelle* matrice *à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$, un tableau à n lignes et p colonnes d'éléments de $\mathbf{K}$. On note une telle matrice*

$$M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

- *On dit que M est une* matrice colonne *si $p = 1$.*
- *On dit que M est une* matrice ligne *si $n = 1$.*
- *On dit que M est une* matrice carrée *si $n = p$.*

Notations :
- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$.
- Si $p = n$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et à n colonnes.
- Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite matrice carrée de taille n.
- Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, alors a_{ij} est le coefficient situé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice M.

Définition 3.2. *Soit $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée de taille n. On dit que :*

(1) M est une matrice triangulaire supérieure *(resp.* strictement supérieure*) si*

$a_{ij}=0$ *pour tout* $i>j$ *(resp.* $i\geq j$*). C'est-à-dire :*

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}, (resp. M=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}).$$

(2) M est une matrice inférieure *(resp.* strictement inférieure*) si* $a_{ij}=0$ *pour tout* $i<j$ *(resp.* $i\leq j$*). C'est-à-dire :*

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}, (resp. M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}).$$

(3) M est une matrice diagonale *si* $a_{ij}=0$ *pour tout* $i\neq j$*. C'est-à-dire :*

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(4) M est symétrique (resp. antisymétrique) si $a_{ij}=a_{ji}$ *(resp.* $a_{ij}=-a_{ji}$*) pour tout* $1\leq i,j\leq n$*. C'est-à-dire :*

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, (\ resp.\ M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}).$$

Définition 3.3. *Soit* $M=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*. On appelle* transposée *de M la matrice* ${}^tM=(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}}\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ *où* $b_{ij}=a_{ij}$*. C'est-à-dire :*

$${}^tM==\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, les n lignes de M sont les n colonnes de ${}^tM$ *et les p colonnes de M sont les p lignes de* ${}^tM$*.*

Remarque 3.4. *(1) Une matrice carrée M est symétrique, si et seulement si,* $M={}^t M$*.*

(2) Une matrice carrée M est antisymétrique, si et seulement si, $M=-{}^tM$*.*

3.1.2 $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, .)$ est un K-espace vectoriel

Opérations

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On définit la matrice $A+B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ de la façon suivante : $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Ainsi

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1P} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1P} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1P}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque 3.5. *On ne somme que des matrices de même types.*

Définition 3.6. *Soit $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On définit la matrice λA de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$. Ainsi*

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1P} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.7. *$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, .)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel d'élément nul $0 = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.*

Dimension

Définition 3.8. *Soit $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$. On appelle matrice élémentaire d'indice (i, j) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ la matrice E_{ij}, dont tous les coefficients sont nuls sauf à la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne qui vaut 1.*

Exemple 3.9. *(1) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$, les matrices élémentaires sont $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

(2) Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ les matrices élémentaires sont :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{n1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.10. *La famille $B = (E_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.*

Preuve:
$\forall X = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on a $X = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} a_{ij}E_{ij}$. Donc B est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Montrons maintenant que B est libre. Soient $\lambda_{ij} \in \mathbf{K}$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, tel que $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \lambda_{ij}E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$ et montrons que $\lambda_{ij} = 0, \forall 1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$. On a $\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \lambda_{ij}E_{ij} = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})}$ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \cdots & \lambda_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Par identification on obtient $\lambda_{ij} = 0, \forall 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$. □

Corollaire 3.11. *La dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est mp. En particulier* $\dim \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) = n^2$ *et* $\dim \mathcal{M}_{n,1}(K) = \dim \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K}) = n$.

Exemple 3.12. *(1) Soient A_1, A_2, A_3, A_4 les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ suivantes :*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrons que $B = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Nous remarquons que $\mathrm{card}(B) = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. *Donc pour que B soit une base de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ il suffi que B soit libre sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbf{R}$, tel que $\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 + \lambda_4A_4 = 0$. Montrons que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_4 = 0$. On a $\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3 + \lambda_4A_4 = 0$ est équivalent à*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & l_3 - \lambda_4 \\ \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qui est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

On déduit facilement que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

(2) Montrons que :

$$\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ 2a+b & -a+2b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbf{K}\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{\begin{pmatrix} a & -a \\ 2a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ b & 2b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbf{K}\} \\ &= \{a\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbf{K}\} \\ &= \mathrm{vect}(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}). \end{aligned}$$

Par suite $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

(3) Soit $H = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d = 0, \forall a,b,c,d \in \mathbf{K}$. Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Soit f l'application suivante

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathcal{M}_2(\kappa) &\rightarrow \mathbf{K} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto a+b+c+d. \end{aligned}$$

Il est facile à vérifier que f est une application linéaire, c'est-à-dire, pour tous $\lambda, \beta \in \mathbf{K}$, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$ on a $f(\lambda A + \beta B) = \lambda f(A) + \beta f(B)$. On a

$$\begin{aligned} \ker f &= \{M \in \mathcal{M}_2(K) \mid f(M) = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c+d = 0\} \end{aligned}$$

On remarque que $\ker f = H$ et on sait que le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel. On déduit alors que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$.

3.1.3 Sous-espaces des matrices diagonales et triangulaires

Proposition 3.13. *$\mathcal{D}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de dimension n.*

Remarque 3.14. *Une base de $\mathcal{D}_n(\mathbf{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid M = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbf{K}\}$ est $B_1 = (E_{11}, \ldots, E_{nn})$.*

Proposition 3.15. *(1) $\mathbf{T}_n^{\geq}(\mathbf{K})$ (resp. $\mathbf{T}_n^{\leq}(\mathbf{K})$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.*

(2) $\mathbf{T}_n^{>}(\mathbf{K})$ *(resp.* $\mathbf{T}_n^{<}(\mathbf{K})$*) est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ *de dimension* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Remarque 3.16. *(1)* $\mathbf{T}_n^{\geq}(\mathbf{K}) = \mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq i \leq j \leq n)$;

(2) $\mathbf{T}_n^{>}(\mathbf{K}) = \mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq i < j \leq n)$;

(3) $\mathbf{T}_n^{\leq}(\mathbf{K}) = \mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq j \leq i \leq n)$;

(4) $\mathbf{T}_n^{<}(\mathbf{K})\,\mathrm{vect}(E_{ij}, \forall 1 \leq j < i \leq n)$.

Exercice Montrer que :

(1) $\mathbf{T}_n^{\geq}(\mathbf{K}) \oplus \mathbf{T}_n^{<}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$;

(2) $\mathbf{T}_n^{\leq}(\mathbf{K}) \oplus \mathbf{T}_n^{>}(\mathbf{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

3.1.4 Propriétés du produit matriciel

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K}), B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$. On définit la matrice $C = A \times B = AB = (c_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbf{K})$, par $\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq q$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

Exemple Vérifier que pour tous $E_{ij}, E_{kl} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Attention : Pour une cette multiplication matricielle soit possible il est necessaire que le nombre de colonnes de A soit egal au nombre de ligne de B. On peut retirer type(n,p)$\times$ type(p,q)=type(n,q).

Exemple 3.17.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\times 1 + 2\times 2 & 0 + 2\times 1 & 0 + 2\times -1 \\ -1\times 1 + 1\times 2 & 0 + 1\times 1 & 0 + 1\times -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Remarque 3.18. *Si les types de* A *et* B *permettent de calculer* AB *et* BA*, alors en général on n'a pas* $AB = BA$*. Par exemple :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.19. *(1) Pour tout* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*,* $B \in \mathcal{M}p,q(\mathbf{K}), C \in \mathcal{M}_{q,m}$*, on a* $(AB)C = A(CB)$ *;*

(2) pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *et* $C \in \mathcal{M}p,q(\mathbf{K})$*, on a* $(A+B)C = AC + BC$ *;*

(3) pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *et* $B, C \in \mathcal{M}p,q(\mathbf{K})$*, on a* $A(B+C) = AB + AC$ *;*

(4) Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*,* $B \in \mathcal{M}p,q(\mathbf{K})$*, et pour tout* $\lambda \in \mathbf{K}$*, on a* $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

Remarque 3.20. *Dans l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées, la multilplications est une loi de composition interne. Elle admet comme élément neutre la matrice diagonale*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Puissance d'une matrice

Définition 3.21. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on note $A^0 = I_n, A^1 = A, A^2 = A \times A, \ldots, A^m = A \times \cdots \times A$ (m termes).*

Attension : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
$(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + Ba^2 + AB^2 + BAB + B^2$.

Matrices inversibles

Définition 3.22. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est dite inversible s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant $AB = BA = I_n$. Cette matrice B est alors unique, c'est l'inverse de A noté A^{-1}.*

Exemple 3.23. *La matrice I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.*

Proposition 3.24. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

(1) Si A et B sont inversibles alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(2) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Définition 3.25. *On note $\mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.*

Proposition 3.26. $(\mathbf{GL}(n)(\mathbf{K}), \times)$ *est un groupe appelé groupe linéaire d'ordre n.*

Exemple 3.27. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On vérifie par le calcul que $A^2 - 5A = 2I_2$. Par suite $A(\frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2) = I_2$. On conclut alors que $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{5}{2}I_2$.*

Remarque 3.28. *La somme de deux matrices inversibles n'est pas toujours une matrice inversible. Par example :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Détermination pratique de l'inverse d'une matrice carrée inversible

Lemme 3.29. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ si $AX = BX$, $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ alors $A = B$.*

Comment chercher l'inverse d'une matrice carrée $A \in \mathrm{Gl}\, n(\mathbf{K})$ **:** Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$. On introduit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. On a

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Qui est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{lll} y_1 & = & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{nn}x_n. \end{array} \right.$$

Si cela est possible, on résout ce système dont les inconnus sont $x_1, \ldots, x_n$ et on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lll} x_1 & = & b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + b_{nn}y_n. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Soit $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathbf{GL}(n)(\mathbf{K})$. Le système (3.1) est équivalent à $X = BY$. Ainsi $I_nX = BAX, \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, d'après le lemme 3.29 on a $I_n = BA$ donc $A^{-1} = B$.

Exemple 3.30. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$. *Déterminons* A^{-1} *? Soient* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$*, tel que* $Y = AX$*. On a :*

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = y_1 - x_3 \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_2 - y_3 + y_1) \\ x_1 = y_3 - y_1 + x_3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + y_3) \\ x_3 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2 - y_3) \\ x_1 = \frac{1}{2}(-y_1 + y_2 + y_3) \end{array} \right.$$

On déduit alors que $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.2 Représentations matricielles

3.2.1 Matrice colonne des composantes d'un vecteur

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n), \forall x \in E, \exists!(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{K}$, tel que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$.

Définition 3.31. *On appelle matrice des composantes dans B du vecteur x la matrice colonne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{K})$ telles que ses coefficients sont $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, qui sont les composantes de x dans la base B. On la note* $\mathrm{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}n, 1(\mathbf{K})$.

Remarque 3.32. *Puisque les composantes d'un vecteur dépend de la base choisie, il est necessaire de préciser la base.*

Exemple 3.33. *Soit le* $\mathbf{R}$ *espace vectoriel* $\mathbf{R}^n$ *muni de sa base canonique* $(e_1, \ldots, e_n)$.

On a : $\mathrm{Mat}_B(e_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots 0 \end{pmatrix}$. *Soit* $x = (1, 2, 3, \ldots, n) \in \mathbf{R}^n$, *on a* $\mathrm{Mat}_B(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

3.2.2 Matrice des composantes d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E muni d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $1 \leq i \leq p$ notons c_i la colonne des composantes dans B du vecteur x_i.

Définition 3.34. *On appelle matrice des composantes dans la base B de la famille des vecteurs $\mathcal{F}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ dont les colonnes sont $c_1, \ldots, c_p$, on la note* $\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_B(x_1, \ldots, x_p)$.

Remarque 3.35. *Si $p = 1$, on retrouve la définition de la matrice des composantes du vecteur x_1 dans la base B.*

Exemple 3.36. *(1) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni de la base $B = (v_1, \ldots, v_n)$. On a*

$$\mathrm{Mat}_B(B) = \mathrm{Mat}_B(v_1, \ldots, v_n) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Soit $E = \mathbf{K}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et soient $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, où $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (-1, 5, 6)$, $x_3 = (4, 7, 9)$, $x_4 = (4, -6, -7)$.

$$\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_B(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & -6 \\ 3 & 6 & 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit $E = \mathbf{R}_3[X]$ muni de sa base canonique $B = (1, X, X^2, X^3)$. Soient $\mathcal{F} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$, $P_0 = (1+X)^0 = 1$, $P_1 = (1+X)^1 = 1 + X$, $P_2 = (1+X)^2 =$

$1+2X+X^2, P_3=(1+X)^3=1+3X+3X^2+X^3$. *On a*

$$\mathrm{Mat}_B(\mathcal{F})=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

3.2.3 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels muni respectivement des bases $B=(e_1,\dots,e_n)$ et $C=(v_1,\dots,v_p)$.

Définition 3.37. *On appelle matrice representative dans les bases B et C d'une application linéaire $u\in\mathcal{L}(E,F)$ la matrices des composantes dans C de la famille image $(u(e_1),\dots,u(e_n))$, on la note* $\mathrm{Mat}_{B,C}u=\mathrm{Mat}_C(u(e_1),\dots,u(e_n))\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$.

Remarque 3.38. *La matrice représentative de u dépend du choix des bases B et C, il est donc necessaire de préciser ces derniers.*

Exemple 3.39. *(1) Soit u l'application linéaire suivante :*

$$\begin{array}{rccc} u & : & \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2\\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+2y-z, x-y).\end{array}$$

On muni $\mathbf{R}^3$ de la base canonique $B=(e_1,e_2,e_3)$ $(e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1))$ et soit $C=(v_1,v_2)$ la base canonique de $\mathbf{R}^2$ $(v_1=(1,0), v_2=(0,1))$. Déterminons la matrice représentative de u dans les bases B et C. On a

$$\begin{aligned} u(e_1) &= (1,1)=v_1+v_2,\\ u(e_2) &= (2,-1)=2v_1-v_2,\\ u(e_3) &= (-1,0)=-v_1+0v_2.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_C(u(B))=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}.$$

(2) Soient $a,b\in\mathbf{R}$ (fixés) et u l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rccc} u & : & \mathbf{R}_3[X] & \to & \mathbf{R}^3\\ & & P & \mapsto & (P(a),P(b),P(c)).\end{array}$$

On muni $\mathbf{R}_3[X]$ de sa base canonique $B=(P_0=1, P_1=X, P_2=X^2, P_3=X^3)$ et on muni $\mathbf{R}^3$ de sa base canonique $C=(e_1,e_2e_3)$. Déterminons la matrice représentative de u dans les bases B et C. On a

$$\begin{aligned} u(P_0) &= (1,1,1)=e_1+e_2+e_3,\\ u(P_1) &= (a,b,c)=ae_1+be_2+ce_3,\\ u(P_3) &= (a^2,b^2,c^2)=a^2e_1+b^2e_2+c^2e_3,\\ u(P_3) &= (a^3,b^3,c^3)=a^3e_1+b^3e_2+c^3e_3.\end{aligned}$$

On déduit que

$$\mathrm{Mat}_C(u(B)) = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{pmatrix}.$$

3.2.4 Matrice d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et muni de la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$.

Définition 3.40. *On appelle matrice représentative dans la base B d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ la matrice représentative dans la base B au départ et à l'arrivée de u, on la note* $\mathrm{Mat}_{B,B} u = \mathrm{Mat}_B u \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Exemple 3.41. *(1) Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $u = \mathrm{Id}_E$ l'identité de E. On a $\mathrm{Mat}_B u = I_n$.*

(2) Soit $B = (e_1, e_1, e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et soit u l'endomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rccl} u : & \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x+z, z+x, x+y). \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} u(e_1) &= (0,1,1) = e_2 + e_3, \\ u(e_2) &= (1,0,1) = e_1 + e_3, \\ u(e_3) &= (1,1,0) = e_1 + e_2. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)$, vérifions que $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$, pour cela il suffit de montrer que B' est libre, car $\mathrm{card}(B') = \dim \mathbf{R}^3 = 3$. *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, tel que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$ et montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. On a $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbf{R}^3}$ est équivalent à*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

Donc B' est libre. Déterminons $\mathrm{Mat}_{B'} u$. *On a*

$$\begin{aligned} u(v_1) &= (2,2,2) = 2v_1, \\ u(v_2) &= (1,1,2) = 2v_1 - v_2, \\ u(v_3) &= (0,1,1) = v_1 + v_3. \end{aligned}$$

Alors

$$\mathrm{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.2.5 Image d'un vecteur

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis des bases $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $C = (v_1, \ldots, v_p)$. Pour $x \in E$ et $y \in F$, par convention on note X et Y les deux colonnes de x et y dans les bases B et C.

Théorème 3.42. *Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, la matrice de u dans les bases B et C est l'unique matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ vérifiant $\forall x \in E, \forall y \in F$, $y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$.*

Exemple 3.43. *Soirt E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'une base $B = (e_1, e_2, e_3)$. Soit u un endomorphisme de E dont la matrice dans B est*

$$\mathrm{Mat}_B u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$. On peut calculer le vecteur $u(x)$ par produit matriciel.

$$\mathrm{Mat}_B u(x) = AX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

On peut alors étudier le noyau de u en réslovant l'équation matricielle $AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})}$.

$$AX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{K})} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = -x_1. \end{cases}$$

Ainsi $\ker u = \{x_1(e_1 + e_2 - e_3) \mid x_1 \in \mathbf{K}\} = \mathrm{vect}(e_1 + e_2 - e_3)$.
On peut aussi facilement déterminer l'image de u.
En effet, par le théorème du rang, on a $\mathrm{Rg}\, u = \dim E - \dim \ker u = 2$. *On peut donc déterminer une base de* $\mathrm{Im}\, u$*.en considérant deux vecteurs libres de l'image de u. Or les colonnes de A sont formées par les composantes des vecteurs $u(e_1), u(e_2)$ et $u(e_3)$, qui sont des éléments de l'image et puisque $u(e_1) = e_1 + e_2 + e_3$ et $u(e_2) = e_1 - e_2$ sont libres alors* $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(e_1), u(e_2))$.

3.2.6 Isomorphisme de représentation matricielle

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis de bases $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $C = (v_1, \dots, v_p)$.

Théorème 3.44. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{M}_{B,C} & : & \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \\ & & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{B,C} u \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels.*

Corollaire 3.45. *Soient E et F deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels de dimensions finies alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim F \times \dim F$. *En particulier,* $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$ *et* $\dim E^* = \dim \mathbf{K} \times \dim E = \dim E$.

Remarque 3.46. *Par l'isomorphisme de représentation matricielle, introduire une application linéaire u de E vers F équivaut à introduire sa représentation matricielle relative à des bases données de E et F. C'est trés souvent ainsi que sont introduit des applications linéaires en dimension finie.*

3.2.7 Composition d'une application linéaire

Soient E, F et G trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis des bases $B = (e_1, \dots, e_p)$, $C = (v_1, \dots, v_n)$ et $D = (w_1, \dots, w_m)$.

Théorème 3.47. *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, on a :* $\mathrm{Mat}_{B,D}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{C,D} v \times \mathrm{Mat}_{B,C} u$.

3.2.8 Isomorphisme et matrice inversible

Soient E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels munis dew bases $B = (e_1, \dots, e_p)$ et $C = (v_1, \dots, v_n)$.

Théorème 3.48. *Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A = \mathrm{Mat}_{B,C} u$ on a équivalence entre*

(1) u est un isomorphisme ;

(2) A est inversible.

De plus, $\mathrm{Mat}_{C,B}(u^{-1}) = A^{-1}$.

3.3 Formule de changement de base

3.3.1 Matrice de passage

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n muni de deux bases $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

Définition 3.49. *On appelle matrice de passage de la base B à la base B' la matrice* $P = \mathrm{Mat}_B(B') = \mathrm{Mat}_B(e'_1, \dots, e'_n)$.

Exemple 3.50. *soit le* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $\mathbf{R}^3$ *muni de la base canonique* $B = (e_1, e_2, e_3)$ *et de la base* $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$*, où* $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$*,* $e'_2 = e_2 - e_3$ *et* $e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3$*. La matrice de passage de la Base* B *à la base* B' *est*

$$\mathrm{Mat}_B B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.51. *Si* P *est la matrice de passage de la base* B *à la base* B' *alors* $P = \mathrm{Mat}_B(\mathrm{Id}_E(B'))$.

Attension : Ici la matrice de l'endomorphisme Id_E n'est pas l'identité car la représentation matricielle de l'identité est formée en choisissant une base à l'arrivée qui n'est a priori la même au départ.

Proposition 3.52. *Si* P *est la matrice de passage de la base* B *à la base* B' *alors* P *est inversible et* P^{-1} *est la matrice de passage* B' *à la base* B.

Exemple 3.53. *Reprenons les notations de l'exemple précident.*

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 - e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_2 - e_3 \\ e'_3 = -2e_1 + 2e_2 - e_3 \end{cases} \quad \text{et } P = \mathrm{Mat}_B B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour former la matrice de passage inverse P^{-1}*, il suffit d'exprimer les vecteurs de la base* B *en fonction de ceux de la base* B'*. A l'aide du système précédent on obtient :*

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 + e'_2 \\ e_2 = 2e'_1 + e'_2 + e'_3 \\ e_3 = 2e'_1 + e'_3 \end{cases} \quad \text{et donc } P^{-1} = \mathrm{Mat}_{B'} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Nouvelle composante de vecteur

Théorème 3.54. *Soient* B *et* B' *deux bases d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* n *si* x *est un vecteur de* E *dont on note* X *et* X' *les colonnes des composantes dans* B *et* B' *de* x *alors on a* $X = Mat_B B'X'$.

Remarque 3.55. *On retient la formule suivante* $\mathrm{Mat}_B x = \mathrm{Mat}_B B' \times \mathrm{Mat}_{B'} x$.

Corollaire 3.56. $X' = \mathrm{Mat}_{B'} BX$.

3.3.3 Nouvelle représenatation d'une application linéaire

Théorème 3.57. *Soient* B *et* B' *deux bases d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *et* C *et* C' *deux bases d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* F*. Si* f *est une application linéaire de* E *vers* F *dont on note* $A = \mathrm{Mat}_C(fB))$ *et* $A' = \mathrm{Mat}_{C'}(f(B'))$ *alors on a* $A' = Q^{-1}AP$*, où* P *est la matrice de passage de la base* B *à la base* B' *et* Q *est la matrice de passage de la base* C *à la base* C'.

Remarque 3.58. *On peut retrouver la formule du théorème 3.57 à l'aide du diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
(E,B) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_E"] & (F,C) \arrow[d, "\mathrm{Id}_F"] \\
(E,B') \arrow[r, "f"] & (F,C')
\end{tikzcd}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{C'}\,\mathrm{Id}_F(C)A = A'\mathrm{Mat}_{B'}\,\mathrm{Id}_E(B)\\
&\Leftrightarrow \quad A' = \mathrm{Mat}_{C'}\,\mathrm{Id}_f(C)A\mathrm{Mat}_B\,\mathrm{Id}_E(B')\\
&\Leftrightarrow \quad A' = Q^{-1}AP.
\end{aligned}$$

3.4 Rang d'une matrice

3.4.1 Definition

Rappel : Si $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E alors on appelle rang de la famille $\mathcal{F}$ la dimension de l'espace engendré par $\mathcal{F}$.
$\mathrm{Rg}\,\mathcal{F} = \dim \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_n)$.
Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ alors on appelle rang de l'application linéaire u la dimension de $\mathrm{Im}\,u$. C'est à dire :
$\mathrm{Rg}\,u = \dim \mathrm{Im}\,u$.
Ces deux concepts sont liés puisque si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\mathrm{Rg}\,u = \mathrm{Rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.

Définition 3.59. *Soit* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ *de colonnes* $C_1, \dots, C_p$*. On appelle rang de* A *le rang de la famille* $(C_1, \dots, C_P)$*. On note* $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(C_1, \dots, C_p)$.

Théorème 3.60. *Si* $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ *une famille de vecteurs d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* E *et si* A *est la matrice de la famille* $\mathcal{F}$ *dans une certaine bese* B *de* E *alors* $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(x_1, \dots, x_p)$.

Théorème 3.61. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbf{K}$*-espaces vectoriels. Si* $u \in \mathcal{L}(E,F)$ *et si* A *est la matrice de* u *relative à des bases* B *de* E *et* C *de* F *alors* $\mathrm{Rg}(u) = \mathrm{Rg}(A)$.

3.4.2 Propriétés du rang d'une matrice

Proposition 3.62. *Pour tout* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$*,* $\mathrm{Rg}(A) \le \min(n,p)$.

Proposition 3.63. *pour tous* $A \in n,p(\mathbf{K})$*,* $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$*, on a* $\mathrm{Rg}(AB) \le \min(\mathrm{Rg}(A), \mathrm{Rg}(B))$.
De plus

(a) Si A *est une matrice carrée inversible alors* $\mathrm{Rg}(AB) = \mathrm{Rg}(B)$ *;*

(b) Si B *est une matrice carrée inversible alors* $\mathrm{Rg}(AB) = \mathrm{Rg}(A)$.

Remarque 3.64. *On ne modifie pas le rang d'une matrice en multipliant celle-ci par une matrice inversible.*

Théorème 3.65. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On a équivalence entre :*

(i) *A est inversible ;*

(ii) $\mathrm{Rg}(A) = n$.

Remarque 3.66. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on a* $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}({}^tA)$.

3.5 Série d'exercices

Exercice 0 **:** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer A^tA ou ${}^tAA$.

(b) En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

Exercice 1 **:** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $B = A - I_3$.
Calculer B^n pour $n \in \mathbf{N}$ et en déduire l'expression de A^n.
Exercice 2 **:** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

(b) Pour $n \geqslant 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

(c) En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 3 **:** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{K})$. Observer que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$.
A quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A^{-1}.
Exercice 4 **:** Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 **:** Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

(a)
$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+y, y-2x+z). \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbf{R}^3 & \to & \mathbf{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (y+z, z+x, x+y). \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbf{R}_3[X] & \to & \mathbf{R}_3[X] \\ & & P & \mapsto & P(X+1). \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbf{R}_3[X] & \to & \mathbf{R}^4 \\ & & P & \mapsto & (P(1), P(2), P(3), P(4)). \end{array}$$

Exercice 6 **:** On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$P = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+2y-z=0\}$ et $D = \mathrm{Vect}(w)$ où $w = (1,0,-1)$.
On note $\mathcal{B} = (i,j,k)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

(a) Former la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

(b) En déduire les matrices, dans $\mathcal{B}$, de q et de s.

Exercice 7 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^\star$.
Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

(a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ forme une base de E.

(b) Déterminer les matrices de $f, f^2, \ldots, f^{n-1}$ dans cette base.

(c) En déduire que

$$\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1}).$$

Exercice 9 **:** Soit

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
On pose $\varepsilon_1=(1,1,1), \varepsilon_2=(1,-1,0), \varepsilon_3=(1,0,1)$ et $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbf{R}^3$.

(b) Ecrire la matrice de f dans cette base.

(c) Déterminer une base de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.

Exercice 10 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B}=(i,j,k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?

(b) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$.

(c) Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$?

Exercice 11 **:** Soit

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbf{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.

(a) Déterminer $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

(b) Déterminer une base adaptée à cette supplémentarité et écrire la matrice de f dans cette base.

(c) Décrire f comme composée de transformations vectorielles élémentaires.

Exercice 12 Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Soit $\mathcal{C}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1=(1,0,1), \varepsilon_2=(-1,1,0), \varepsilon_3=(1,1,1)$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est une base.

(b) Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}$.

(c) Calculer la matrice de f^n dans $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 **:** Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_1 + e_2 - e_3; \\ \varepsilon_2 &= e_1 - e_3; \\ \varepsilon_3 &= e_1 - e_2. \end{aligned}$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et former la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.

(b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

(c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?

(d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 **:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale D de coefficients diagonaux : $1, 2$ et 3.

(b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Calculer P^{-1}.

(c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?

(d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15 **:** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathbf{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathbf{C}$ soit D.

(b) Déterminer la matrice P de $\mathbf{GL}(3)(\mathbf{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

(c) Calculer pour tout $n \in \mathbf{N}$, A^n.

(d) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}, (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 0, \\ z_0 = 0, \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n), \\ y_{n+1} = x_n - z_n, \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n. \end{cases}$$

Exercice 16 **:** Calculer le rang de familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^3$:

(a) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,1,0), x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (0,1,1)$.

(b) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (2,1,1), x_2 = (1,2,1)$ et $x_3 = (1,1,2)$.

(c) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,2,1), x_2 = (1,0,3)$ et $x_3 = (1,1,2)$.

Exercice 17 **:** Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

(a) $f : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$, définie par $f(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z, x+y-z)$.

(b) $f : \mathbf{K}^3 \to \mathbf{K}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x)$.

(c) $f : \mathbf{K}^4 \to \mathbf{K}^4$ définie par $f(x,y,z,t) = (x+y-t, x+z+2t, 2x+y-z+t, -x+2y+z)$.

Exercice 18 **:** Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, on considère les vecteurs $v_1 = -e_1 - e_2 + e_3$, $v_2 = e_1 - \lambda e_2 - e_3$ et $v_3 = e_1 - e_2 - \lambda e_3$.

(a) Soit f_λ l'application linéaire de E dans E, définie par

$$f_\lambda(e_1) = v_1, \qquad f_\lambda(e_2) = v_2, \qquad f_\lambda(e_3) = v_3.$$

Déterminer la matrice A_λ de f_λ dans la base B.

(b) Déterminer suivant les valeurs de λ le rang de f_λ.

(c) Calculer, suivant les valeurs de λ, le noyau de f_λ.

(d) Montrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

(e) Monter que $A_0 = PBP^{-1}$, où

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En déduire que $f_0^3 = f_0$.

Chapitre 4

Systèmes Linéaires, Méthode du Pivot de Gauss

4.1 Transformations des matrices

4.2 Réduction des matrices ; Méthode du Pivot Gauss

4.3 Recherche de l'inverse d'une matrice carrée

4.4 Systèmes linéaires

4.5 Exercices

Exercice 1 **:** Transformer les matrices suivantes en matrices échelonnées réduites :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & m \\ -m & 1 & m \\ 1 & -m & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 **:** Calculer lorsque c'est possible l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 **:** Résoudre dans $\mathbf{R}$ les systèmes par la méthode du pivot de Gauss.

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+3y & = & 12, \\ -3x+5y & = & 1, \\ 7x-11y & = & -1, \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+3z & = & 6, \\ 3x-2y+7z & = & 14, \\ x+3y-3z & = & -4. \end{array} \right.$$

Exercice 4 **:** Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, résoudre le système (S_λ) : $\left\{ \begin{array}{l} 2x+3y+z=4, \\ -x+6y+2z=5, \\ 7x+3y+z=\lambda. \end{array} \right.$

Exercice 5 **:** Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbf{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

$$(a) \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z & = & m \\ x+my-z & = & 1 \\ x-y-z & = & 1 \end{array} \right. \quad (b) \left\{ \begin{array}{rcl} mx+y+z & = & 1 \\ x+my+z & = & m \\ x+y+mz & = & m^2 \end{array} \right. \quad (c) \left\{ \begin{array}{rcl} mx+y+z+t & = & 1 \\ x+my+z+t & = & m \\ x+y+mz+t & = & m+1. \end{array} \right.$$

Exercice 6 **:** Soit $a, b \in \mathbf{C}$. Résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by+z & = & 1 \\ x+aby+z & = & b \\ x+by+az & = & 1 \end{array} \right.$$

Chapitre 5

Réduction des Matrices Carrées

5.1 Valeurs propres, Vecteurs propres

Définition 5.1. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, f un endomorphisme de E et $\lambda \in \mathbf{K}$. S'il existe x un vecteur non nul de E tel que $f(x) = \lambda x$, on dit que :*

(1) λ est une valeur propre de f.

(2) x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Dans ce cas :

$$E_\lambda = \ker(f - \lambda id) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$$

est appellé le sous-espace propre associé à λ.

Remarque 5.2. *λ est une valeur propre de $f \Leftrightarrow \ker(f-\lambda id_E) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow \dim E \neq 0$.*

Exemple 5.3. *(1) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto 2x$. On a 2 est une valeur propre de f.*

(2) Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2, (x, y) \mapsto (x, 2y)$. On a $f(1, 0)(1, 0)$ et $f(0, 1) = 2(0, 1)$. Donc 1 et 2 sont deux valeurs propres de f et $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$) est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 (resp. 2).

Remarque 5.4. *Soient λ_1, λ_2 deux valeurs propres différentes de $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $E_{\lambda_1} capE_{\lambda_2} = \{0\}$.*

Proposition 5.5. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Si $x_1, \ldots, x_p$ sont des vecteurs propres associes aux valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.*

Corollaire 5.6. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.*

(1) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres de f distinctes deux à deux et $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont les sous-espaces propres associés, alors la somme $E_{\lambda_1} + \cdots + E_{\lambda_p}$ est directe et $\sum_{i=1}^{p} \dim E_{\lambda_i} \leq n$.

(2) f ademet au plus n valeurs propres.

5.2 Diagonalisation d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et f un endomorphisme de E. Notons $A = \mathrm{Mat}_B(f(B))$. Si A est diagonale avec $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $f(e_i) = \lambda_i e_i, \forall 1 \leq i \leq n$. Donc les valeurs popres de f sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $e_1, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres de f associés respectivement à $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Réciproquement :
Si $\forall 1 \leq i \leq n$, e_i est un vecteur propre de f associée à la valeur propre $\_i$, alors $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Définition 5.7. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On dit que f est diagonalisable s'il existe une base B de E telle que la matrice de f dans cette base est diagonale (c'est-à-dire, il existe une base de E formée par les valeurs propres de f).*

Théorème 5.8. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E, qui possède p valeurs propres distinctes. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est diagonalisable.*

(ii) $E = E_{\lambda_1} \oplus \ldots E_{\lambda_p}$.

(iii) *Il existe ue base B de E telle que $A' = \mathrm{Mat}_B f(B)$ est diagonale.*

Corollaire 5.9. *Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimensuion n et f un endomorphisme de E. Si f possède n valeurs propres distinctes alors f est diagonalisable.*

5.3 Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 5.10. *Soient A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. S'il existe $X \in \mathbf{K}^n$, (on identifie $\mathbf{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$) tel que $AX = \lambda X$ alors*

(1) *λ est une valeur propre de A.*

(2) *X est un veceteur propre de A associé à la valeur propre λ.*

Dans ce cas : $E_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \mid AX = \lambda X\}$ est l'espace propre associé à la avaleur propre λ.

Proposition 5.11. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *λ est une valeur propre de A.*

(ii) *$A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.*

(iii) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Preuve:
Nous démontrons que *(i)* implique *(ii)*. On a λ est une valeur propre de A, donc il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ. On a $AX - \lambda X = (A - \lambda I_n)X = 0$. Si on suppose que $A - \lambda I_N$ est inversible, on a $(A - \lambda I_n)^{-1}(A - \lambda I_n)(X) = 0$. Ceci implique que X est nul ce qui est absurde. $\square$

5.4 Séries d'exercices

Exercice 1 **:** Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y) = \tfrac{1}{5}(3x+4y, 4x-3y).$$

(1) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$. On la notera A.

(2) Montrer que le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?

(3) Montrer que le vecteur $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est également vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?

(4) Ecire $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en fonction de v_1 et v_2. On déduire son image par f.

(5) Montrer que la famille (v_1, v_2) est une base de $\mathbf{R}^2$.

(6) Quelle la matrice de f dans la base (v_1, v_2) ? On la notera D.

(7) Ecire P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2). Calculer P^{-1}

(8) Quelle est la relation entre P, A, P^{-1} et D.

(9) Calculer A^n, pour $n \in \mathbf{N}$. Même exercice avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$,

Exercice 2 **:** Déterminer le polynôme caracterestique des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Rechercher les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a^2 & 0 \\ -1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, (a \neq 0).$$

Exercice 4 **:** Trouver une matrice carrée inversible P telle que $b = PAP^{-1}$ soit diagonale, et écrire la matrice B obtenue, pour les matrices A suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 **:** Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

qui représente f , un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dans une base canonique.

(1) (a) Montrer que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 3$.

(b) En déduire que l'on peut diagonaliser A.

(2) (a) Déterminer une base $B' = (v_1, v_2, v_3)$ de vecteurs propres tel que la matrice de f dans la base B' soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Préciser la matrice de passage P de la base canonique B à la base B' ; quelle relation lie les matrices A, p, P^{-1} et D ?.

(3) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

(4) Après avoir donné, calculer A^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Exercice 6 **:** Soit la matrice matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer une base et la dimension de chaque sous-espace propre de A.

(2) A est diagonalisable ; justifier cette affirmation et diagonaler A.