ELEMENTS DE CORRECTION DU CONTRÔLE ÉCRIT N°2 – FONCTIONS ET VARIATIONS

EXERCICE N°1 :
VOIR COURS

EXERCICE N°2 :
Trois méthodes possibles : par double IPP, par la trigonométrie ou par linéarisation $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\cos(3t)\,dt = -\frac{2}{5}$

EXERCICE N°3 :
1. $I = \int_1^2 \frac{dt}{t^2(t+1)}. = \int_1^2 \left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dt = \left[\ln|t+1| - \frac{1}{t} - \ln|t|\right]_1^2 = \ln\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$
2. On effectue le changement de variable $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2$ et $dx = 2tdt$ On obtient alors $\int_1^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \int_1^2 \frac{2tdt}{t^2 \times t(t+1)} = 2I = 2\ln\frac{3}{4} + 1$

EXERCICE N°4 :
$a)\ u_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n^2} > 0.\ \sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+3}\right)^n = e^{n\ln\frac{n}{n+3}}.\ \frac{n}{n+3} \cong 1\ en + \infty\ donc \ln\frac{n}{n+3} \cong \frac{n}{n+3} - 1 = \frac{-3}{n+3} \cong -\frac{3}{n} en + \infty\ donc\ \ n\ln\frac{n}{n+3} \cong -3\ en + \infty\ donc\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-3} < 1\ \ donc\ STG u_n\ CV\ par\ Cauchy$

$b)\ u_n = (n+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right) - e^{\frac{1}{n}}. Posons\ X = \frac{1}{n}.\ si\ n \to +\infty, X$
$\to 0. \sin X = X - \frac{X^3}{3!} + o(X^3)\ et\ e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + o(X^3).\ u_n = \left(\frac{1}{X} + 1\right)\left(X - \frac{X^3}{6} + o(X^3)\right) - 1 - X - \frac{X^2}{2} - \frac{X^3}{6} + o(X^3) = -\frac{2X^2}{3} + o(X^2) = -\frac{2}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2})$

$La\ STG\ \frac{1}{n^2}\ \ CV\ (Riemann\ avec\ \ \propto > 1) donc\ la\ STG\ u_n\ CV$

EXERCICE N°5 :
1. $R = 1\ (évident) \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n+4}{n} x^n = \sum_{n=3}^{+\infty} x^n + 4\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 - x - x^2 + 4\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{1-x} - 4\ln(1-x) - 1 - 5x - 3x^2$
2. $R = +\infty\ (évident). \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n-5)3^n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n-5)}{n!}(3z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n-5}{n!} Z^n\ \ (avec\ Z = 3z) = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} Z^n - 5\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Z^n}{n!} = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z^n}{(n-1)!} - 5e^Z = 3Z\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{Z^p}{p!} - 5e^Z = (3Z-5)e^Z$
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n z^{4n+1} = z\sum_{n=0}^{+\infty} (4z^4)^n. Posons\ X = 4z^4. La\ série\ est\ de\ la\ forme\ \sum a_n X^n\ \ avec\ a_n = 1\ donc\ le\ rayon\ pour\ X = 1, donc\ la\ série\ converge\ si\ |X| < 1 \Leftrightarrow 4|z|^4 < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ donc\ R = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sum_{n=0}^{+\infty} 4^n z^{4n+1} = z\sum_{n=0}^{+\infty} X^n = z \times \frac{1}{1-X} = \frac{z}{1-4z^4}$