TAI algèbre linéaire L1 groupes A et B.

EX1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on considère $(x_1, \dots, x_p)$ une famillle libre de vecteurs de E, soit $y \in E$ montrer que $(x_1, \dots, x_p, y)$ est liée si seulement si $y \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

EX2

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On considère $f_1 = x^2+x-1$, $f_2 = 2x$, $f_3 = x^2+1$.

Montrer que $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3) = \mathbb{R}_2[X]$.

EX3

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs : $v_1 = (1,1,-1), v_2 = (1,2,4), v_3 = (3,-1,a), v_4 = (2,3,b)$.
Déterminer a et b tels que $\mathrm{Vect}\,(v_1, v_2) = \mathrm{Vect}\,(v_3, v_4)$.

EX4

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x , y, z) \longmapsto (x + 2y, z-x , x + 4y + z)$. Déterminer une base de Kerf et Imf.

EX5

Montrer que si (a ,b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$ alors (a + b + c, a + b, 2a + b−c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

EX6

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire u dont la matrice standard est:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

EX7

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire v dont la matrice standard est:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EX8

Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire w dont la matrice standard est:

C= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

EX9

On rappelle que $\mathbb{R}_3[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inferieur ou égal à 3.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère $f\colon \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R},\ P \longmapsto P(\alpha)$.

1) montrer que f est une application linéaire.
2) montrer qu'une famille de 3 polynômes de degré 0,1 et 2 est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$.
3) écrire Ker f en extension grâce au principe utilisé habituellement pour les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$.
4) donner une base de Ker f.

EX10

Soit $\varphi\colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X], P \longmapsto P + (X-1)P'$, où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1) montrer que φ est linéaire.
2) après avoir rappelé la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$, montrer que φ est bijectif.
3) déterminer la matrice de φ dans la base B=$(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
4) déterminer la matrice de passage P_{BB}, où B' est la base $(1, 2X, 3X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
5) en déduire la matrice de φ dans la base B'=$(1, 2X, 3X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

EX11

On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base standard de $\mathbb{R}^5$ et (f_1, f_2, f_3) la base standard de $\mathbb{R}^3$.

1) Soit $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = f_1 + 2f_2 + f_3$, $f(e_2) = f_1 + f_2 + 2f_3$, $f(e_3) = -f_1 - 3f_3$, $f(e_4) = -f_1 - 4f_2 + f_3$, $f(e_5) = f_1 + 4f_2 - f_3$ donner la matrice standard de f.
2) mettre cette matrice sous forme échelonnée réduite.
3) en déduire une base de Ker f.
4) donner une base de Im f.

EX12

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. a) Calculer A^2, A^3 puis A^n pour tout $n > 0$. b) A est-elle inversible?

EX13

Trouver, à l'aide d'un déterminant, une condition sur m pour que le système suivant admette une infinité de solutions.

$$\begin{cases} x-2y+z=mx \\ 3x-y-2z=my \\ 3x-2y-z=mz \end{cases}$$

EX14

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$.

EX15

Soit $C=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b & -a \end{pmatrix}$. Calculer le produit $C\ {}^tC$, en déduire det C.

EX16

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre $n>1$ telles que $AB-BA=B$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel p on a:

$AB^p=B^p(A+pI_n)$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

FIN.