Corrigé du DE d'algèbre linéaire $L_1$ 

QC ⑤

- Une base de E est une famille de E à la fois libre et génératrice ①
- $F \subset E$ est un sous-e.v. de E ssi : $\vec{0} \in F$ (ou $F \neq \emptyset$) et $\forall \alpha \in \mathbb{K}^2$, $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F$, $\alpha\vec{u} + \vec{v} \in F$ ①
- $P(X) = |A - XI|$ ①. $X_0$ est valeur propre de A ssi $P(X_0) = 0$ ①

L'espace propre associé à $X_0$ contient les vecteurs $\vec{V}$ non nuls vérifiant $A\vec{V} = X_0\vec{V}$ (les vecteurs propres) et le vecteur nul. ①

EX1 ④ $|z|^2 = |8 - 6i| = 10$, si $z = X + iY$ alors $z^2 = X^2 - Y^2 + 2iXY$ et l'identification (vue en cours) donne

$$\begin{cases} (\alpha)\ X^2 - Y^2 = 8 & (\alpha)+(\beta) \Leftrightarrow X^2 = 9 \\ (\beta)\ X^2 + Y^2 = 10 & (\beta)-(\alpha) \Leftrightarrow Y^2 = 1 \\ (\gamma)\ XY < 0 & ② \end{cases}$$

$XY < 0$ permet de choisir 2 couples sur les quatre couples $(X, Y)$ possibles $\mathcal{S} = \{3 - i, -3 + i\}$ ②.

EX2 ② Dans $\mathbb{R}^2$, $x + y = 0$ définit un hyperplan, c'est à dire un sous-e.v. de dimension 1. On peut aussi prendre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans A, former $\alpha\vec{u} + \vec{v}$ et vérifier que la somme de ses coordonnées est nulle. A ce stade, si l'on écrit que le vecteur vaut la somme de ses coordonnées, cela veut dire que l'on confond $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ce qui pose problème, non? ①

B n'est pas un espace vectoriel car l'addition n'est pas une loi interne à B (B n'est pas stable pour l'addition). Il suffit de prendre $P(X) = X^4 + X \in B$, $Q(X) = -X^4 + X^2 \in B$ et $P(X) + Q(X) \notin B$ car $\deg B = 2 \leq 3$. ①

EX3. ⑤ $A = -6$ ①. $B = xt - zy$ ①. $C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} l_2 + l_4$

$$C = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} 2l_1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} l'_1 + l_4$$ on développe / la deuxième colonne.

$$C = \frac{1}{2}\left(-2(-1)^6 \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = -1 \begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1\left(-1\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\right) = 6 \quad ③$$

(① pour un développement ou Sarrus sur un 3x3)

**EX4** (4) (2) pour les formules $\frac{\Delta x}{\Delta}$ etc... et (2) pour la solution

$\Delta = 4 \quad \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\Delta z}{\Delta} = 1$

**EX5** 1. (4) 2. (2) 3. (2) $|A - XI| = \begin{vmatrix} 2-X & 3 \\ 4 & 1-X \end{vmatrix} = X^2 - 3X - 10$ les racines ne sont pas évidentes (sauf $-2$) après calcul on trouve $X_{1,2} \in \{-2, 5\}$ (2). $(A - 5I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ donne $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Les solutions de ce système sont de la forme $x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où une base de $E_5$, $\mathcal{B}(E_5) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ (1). La même démarche appliquée à $E_{-2}$ donne $(A + 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \iff 4x + 3y = 0$. $\mathcal{B}(E_{-2}) = \left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ (1)

2. En fait, il y en a deux, selon l'ordre d'écriture des vecteurs propres dans la matrice de passage. Soit $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ (2)

NB : répondre à cette question ne nécessite aucun calcul !

3. Si $D$ est la matrice diagonale et $P$ la matrice de passage correspondante $A = PDP^{-1}$. Une récurrence très célèbre donne $A^n = PD^nP^{-1}$ (1) (utilisable sans démonstration), le reste est laborieux, il faut calculer $P^{-1}$ et $PD^nP^{-1}$ ce qui est long et légèrement pénible. Si $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$D^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ après calculs

$$A^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4.5^n + 3(-2)^n & 3.5^n - 3(-2)^n \\ 4.5^n - 4(-2)^n & 3.5^n + 4(-2)^n \end{pmatrix}$$

$4(-2)^n = (-1)^n 2^{n+2}$ (autre écriture possible) (1)

**EX6** (3) Dans cette question j'ai mis (1) pour la méthode si je l'ai reconnue (quel que soit le nom qui lui avait été donné). Si le résultat était juste, cela valait (2).

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 28 & 7 & -3 \\ \frac{19}{2} & \frac{5}{2} & -1 \\ -8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$