1 : Les limites

Exercice n°1 :

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4x-1}{-5x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{-5x^2}=-\frac{3}{5}$

2. $\lim_{x\to0^+}\frac{3x^2+2x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}+\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(3x-\frac{1}{x}\right)=-\infty$

3. $\lim_{x\to1^-}\frac{4x-1}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{4(1-\varepsilon)+1}{1-(1-\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{4+1}{-\varepsilon}=+\infty$

   On procède par changement de variable avec $x=1-\varepsilon$ avec $\varepsilon>0$

4. $\lim_{x\to1^+}\frac{4x+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1^+}\frac{4x+1}{(x-1)(x-2)}=-\infty$

Signe du dénominateur :

x	-∞	1		2	+∞
x-1	-	0	+	+	+
x-2	-	-	-	0	+
(x-1)(x-2)	+	0	-	0	+

5. $\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{5-4x-x^2}=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{(1-x)(5+x)}=\lim_{x\to1^+}\frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+5)}=\lim_{x\to1^+}\frac{-1}{x+5}=-\frac{1}{6}$

6. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\times\cos x-1}{x^2}$ $\quad -1\le cox\le1 \quad -3x\le3x\cos x\le3x \quad \frac{-3x-1}{x^2}\le\frac{3x\cos x-1}{x^2}\le\frac{3x-1}{x^2}$

   Or, $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x^2}=0$ et $\lim_{x\to+\infty}-\frac{3x-1}{x^2}=0$

   Donc, d'après le théorème le théorème des gendarmes, $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\times\cos x-1}{x^2}=0$.

7. $\lim_{x\to1}\ln\frac{4x+1}{1-x}$

   La limite n'existe que lorsque x<1 donc :

   $\lim_{x\to1^-}\ln\frac{4x+1}{1-x}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln\frac{4(1-\varepsilon)+1}{1-(1-\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\ln\frac{5}{\varepsilon}=+\infty$

   On procède par changement de variable avec $x=1-\varepsilon$ avec $\varepsilon>0$

8. $\lim_{x\to0}\frac{e^{-2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-2x-1}{x}=-2$

   Cours : $\lim_{u\to0}e^u=1+u$

9. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$

Exercice n°2 :

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln x}{x^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln x}{e^{x\ln x}-1}$$ Posons $u(x)=x\ln x$ $\quad \lim_{x\to 0}u(x)=0$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xu(x)}{e^{u(x)}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,\cancel{u(x)}}{\cancel{1}+\cancel{u(x)}\cancel{-1}}=\lim_{x\to 0}x=0$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\tan^2 x}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\times\cancel{x^2}}{\cancel{x}\times\frac{\cancel{x^2}}{2}}=2$$

4. $$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{(x-1)(x+1)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon(2+\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{2\varepsilon}=\frac{1}{2}$$

   On pose $x=1+\varepsilon$

5. $$\lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-1-\frac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1+x-x}{x(1+x)}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Travaux dirigés n°2

Exercice 1 :

2) La fonction est continue sur $]-\infty;-1[\cup[-1;+1]\cup]1;+\infty[$

Exercice 2 :

2) La fonction est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 3 :

Rappels :

Si $f = o(g) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Si $f \overset{a}{\approx} g \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

$$\sin x \overset{0}{\approx} x \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Soit $g(x)$, le prolongement de f par continuité :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \forall x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 :

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$$

$$e^u - 1 \overset{0}{\approx} u \qquad e^{2x} - 1 \overset{0}{\approx} 2x$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x} = 2$

Soit $g(x)$, le prolongement de f par continuité :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \forall x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

Exercice 5 :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2x}-1}{x} & \forall x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

1) La fonction est continue sur $\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}}{x} = +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0^+$$

3) $g(x) = 2xe^{2x} - e^{2x} + 1$

$g'(x) = 2e^{2x} + 2x \times 2e^{2x} - 2e^{2x}$

$g'(x) = 4xe^{2x}$

Donc, d'après un tableau de signe, g est décroissant de $-\infty$ à 0 et croissante de 0 à $+\infty$. Avec pour minimum 0 en 0.

Variations de f :

$$f'(x) = \frac{2xe^{2x} - e^{2x} + 1}{x^2}$$

Donc f' est du même signe que g . Donc f est croissant sur $\mathbb{R}^*$

Travaux dirigés n°3

Exercice 1 :

Question 3 :

$$f(x) = \tan\frac{1-x}{1+x} = \tan u(x) \quad \text{avec } u(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

$$f'(x) = u'(x) \times \tan'(u(x))$$

$$u'(x) = \frac{(1+x)-(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\tan u = 1 + \tan^2(u)$$

Donc $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x)^2} \times \left(1 + \tan^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right)$

Question 4 :

$$f(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} = \sqrt{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = 1 + \sin^2 x$$

$$f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$u'(x) = 2\sin x \cos x = \sin(2x)$$

Donc $f'(x) = \dfrac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$

Question 5 :

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\tan x}{1+\tan x}} = \sqrt{u(x)} \quad \text{avec } u(x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$$

$$u'(x) = \frac{-\left(1+\tan^2 x\right)(1+\tan x) - \left(1+\tan^2 x\right)(1-\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{2\left(1+\tan^2 x\right)}{(1+\tan x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{2\left(1+\tan^2 x\right)}{(1+\tan x)^2 \times 2\sqrt{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}}$$

Question 6 :

$$f(x)=\arctan\frac{2(1-x)}{2x-x^2}=\arctan\left(u(x)\right) \text{ avec } u(x)=\frac{2(1-x)}{2x-x^2}$$

$$u'(x)=\frac{-2(2x-x^2)-2\left(x-1\right)\left(2-2x\right)}{\left(2x-x^2\right)^2}=\frac{6x^2-12x+4}{x^4-4x^3+4x^2}$$

$$f'(x)=\arctan'\left(u(x)\right)=\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

$$=\frac{\dfrac{6x^2-12x+4}{x^4-4x^3+4x^2}}{\dfrac{2x-x^2+2-2x}{2x-x^2}}=\frac{\left(6x^2-12x+4\right)\left(2x-x^2\right)}{\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\left(-x^2+2\right)}$$

Exercice 2 :

Question 1 :

$$f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x} \qquad x>0$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 3 :

Question 1 :

$f(x)=\sqrt{\tan x}$

Dérivabilité en 1 point $x=a$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\tan x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\infty(pas\ un\ réel)$$

$f(x)$ n'est donc pas dérivable en 0.

Question 2 :

Si f^{-1} existe, il faut que f soit monotone.

$$f'(x)=\frac{\tan'(x)}{2\sqrt{\tan(x)}}=\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan(x)}}>0$$

$\Rightarrow f(x)$: Monotone croissante donc f^{-1} existe

Question 3 :

A rattraper

Exercice 4 :

Définition :

$$f(x)=\arctan\frac{1-x}{1+x}$$ Définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$

Variation :

$$f'(x)=\arctan\left(u(x)\right) \quad u(x)=\frac{1-x}{1+X}$$

$$f'(x)=u'(x)\times\arctan'(u)$$

$$f'(x)=u'(x)\times\frac{1}{1+u^2}=\frac{u'(x)}{1+u^2}$$

Or $u'(x)=\dfrac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$

$$u'(x)=\frac{-2}{(1+x)^2}$$

Donc, $f'(x)=\dfrac{-2}{(1+x^2)}\left[\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}\right]<0$

Donc f est décroissante

Limites :

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}-1+\varepsilon$$

$$x=-1+\varepsilon$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arctan\left(\frac{1-(-1+\varepsilon)}{1+(-1+\varepsilon)}\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arctan\frac{2}{\varepsilon}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-1^-}=$$

A rattraper

x	-infini		-1		+infini
f'(x)	-	-	‖	-	-
f	-π/4 ↘	-π/2	‖	π/2 ↘	-π/4

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\arctan\frac{1+x}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\arctan\left(\frac{-x}{x}\right)=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}=-\frac{\pi}{4}$$

Exercice 6 :

Question 1 :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x} \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

Rappel : $\sin u \overset{0}{\approx} u$ $\sin 2x \overset{0}{\approx} 2x$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2$: Continuité

Question 2 :

Développement limité →

$$f'(x) = g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 g''(x_0) + \ldots \frac{1}{n!}(x - x_0)^n g^n(x_0) + o(x - x_0)^n$$

Ici : $g(x) = \sin 2x$ $g(o) = 0$

$g'(x) = 2\cos \alpha x$ $g(0) = 2$

$g''(x) = -4\sin 2x$ $g''(0) = 0$

$g'''(x) = -8\cos 2x$ $g'''(0) = -8$

$$\Rightarrow g(x) = 0 \quad +2x \quad \cancel{+\frac{1}{2}x^2 \times 0} \quad +\frac{1}{6}x^3 \times (-8) \quad +o(x^3)$$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

Question 3 :

$f(x) = \dfrac{g(x)}{x} = 2 - \dfrac{4}{3}x^2 + o(x^2)$

$\Rightarrow$ *polynome dérivable*

Question 4 :

Allure de f proche de 0

D'après le développement limité : $f'(o) = 0$

$\Rightarrow$ tangente horizontale en 0

Question 5 :

3°) Les lim en $\pm\infty$ de $\frac{\sin 2x}{x}$

Théo des Gendarmes

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin 2x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim \frac{\sin 2x}{x} = 0$$

Travaux dirigés n°4

Exercice 1 :

Question 1 :

$DL_4(0)$ de $f(x)=\left(x^2+1\right)\ln\left(1+x\right)$

Au voisinage de zéro :

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)$$

Donc $f(x)=\left(1+x^2\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o\left(x^4\right)\right)$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)+x^3-\frac{x^4}{2}$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^3-\frac{3x^4}{4}+o\left(x^4\right)$$

Question 2 :

$DL_4(0)$ de $f(x)=\left(1+2x+3x^2\right)\sin\left(x^2\right)$

Au voisinage de zéro :

$$\sin\left(x^2\right)=x^2-\frac{x^6}{3!}+o\left(x^6\right)=x^2+o\left(x^6\right)$$

Donc $f(x)=\left(1+2x+3x^2\right)\left(x^2+o\left(x^4\right)\right)$

$$=x^2+2x^3+3x^4+o\left(x^4\right)$$

Question 3 :

$DL_4(0)$ de $f(x)=\cos(2x)\sqrt{1+x}$

Au voisinage de zéro :

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2!}\right)x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{3!}\right)x^3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{4!}\right)x^4+o\left(x^4\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{48}x^3+o\left(x^3\right)$$

$$\cos\left(2x\right)=1-2x^2+o\left(x^3\right)$$

Donc : $f(x)=\left[1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{48}+o\left(x^3\right)\right]\left[1-2x^2+o\left(x^3\right)\right]$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{17}{8}x^2-\underbrace{\frac{45}{48}}_{\frac{15}{16}}x^3+o\left(x^3\right)$$

Question 4 :

$DL_4(0)$ de $f(x)=e^{x\sin x}$
Au voisinage de zéro :

$$x\sin x = x^2-\frac{x^4}{3!}+o\left(x^4\right)$$

$$e^u = 1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+o\left(x^4\right)$$

$$f(x)=1+\left(x^2-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)\right)+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x^2-\frac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)\right)^3$$

Donc : $=1+x^2-\dfrac{x^4}{6}+o\left(x^4\right)+\dfrac{1}{2}\left(x^4-\dfrac{x^8}{36}++o\left(x^8\right)o\left(x^4\right)\right)$

$$=1+x^2+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)$$

Question 5 :

$DL_3(0)$ de $f(x)=\sqrt{1+\sin x}$
Posons $X=\sin x$
Donc $f(x)=\sqrt{1+X}$

$$DL_3(0)\sqrt{1+X} = 1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+\frac{1}{16}X^3+o\left(x^3\right)$$

$$X=\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$$

Donc

$$DL_3(0)f(x)=\sqrt{1+\sin x} = 1+\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right]-\frac{1}{8}\left[\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\right]+\frac{1}{16}\left[\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)^3\right]$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+o\left(x^3\right)-\frac{1}{8}x^2+\cancel{\frac{x^6}{288}}+\cancel{\frac{x^4}{24}}+\cancel{o\left(x^6\right)}+\frac{1}{16}x^3+\cancel{\frac{x^9}{3454}}-\cancel{\frac{3x^6}{96}}+\cancel{\frac{x^7}{576}}+\cancel{o\left(x^9\right)}$$

$$=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{1}{48}x^3+o\left(x^3\right)$$

Question 6 :

$DL_6(0)$ de $f(x)=\dfrac{x^2+2}{1+x^3}$

$$f(x)=\left(x^2+2\right)\left(\frac{1}{1+x^3}\right)$$

Or : $\dfrac{1}{1+X}=1-X+X^2-X^3+X^4-X^5+X^6+o\left(x^6\right)$

Donc $\dfrac{1}{1+x^3}=1-x^3+x^6+o\left(x^6\right)$

$$f(x)=\left(x^2+2\right)\left(1-x^3+x^6+o\left(x^6\right)\right)$$
$$=2-2x^3+2x^6+x^2-x^5+x^8+2o\left(x^6\right)$$
$$=2+x^2-2x^3-x^5+2x^6+o\left(x^6\right)$$

Question 7 :

$DL_4(0)$ de $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)$$

Donc $f(x)=\dfrac{x}{x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)}$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)}$$

On pose $X=-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)$

Donc $f(x)=1-X+X^2-X^3+X^4+o\left(X^4\right)$

$$=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7}{360}x^4+o\left(x^4\right)$$

Sinon, on peut faire la méthode de la simplification par décomposition en élément simple.

Question 8 :

$DL_5(0)f(x)=\dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$

$$f(x)=\frac{3\sin x}{3-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+o\left(x^6\right)}$$

$$f(x)=\frac{\sin x}{1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{72}-\dfrac{x^6}{2160}+o\left(x^6\right)}$$

On pose $X=-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{72}-\dfrac{x^6}{2160}+o\left(x^6\right)$

Donc $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+X}=\dfrac{1}{1+X}\times\sin x$ Or, $\dfrac{1}{1+X}=1-X+X^2\ldots$

Donc $f(x)=\sin x\left(1-\left(-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{72}\right)+\dfrac{x^4}{36}+o\left(x^5\right)\right)$

$$=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)\right)\times\left(1-\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{72}\right)+\frac{x^4}{36}+o\left(x^5\right)\right)$$

$$=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{72}+\frac{x^5}{36}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{36}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)$$

$$DL_5(0)f(x)=x-\frac{1}{180}x^5+o\left(x^5\right)$$

Question 9 :

$$DL_2(0)f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Or, $\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln(1+x)$

Donc : $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$$DL_2(0)\frac{1}{x}\ln(1+x)=\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$$

Donc $f(x)=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)}$

$$=e^1e^{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)}$$

On pose $X=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)$

Si $x\to 0$, alors $X\to 0$

Donc $f(x)=e^1e^X$

$$=e^1\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)^2\right)$$

$$=e^1\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\right)$$

Donc $DL_2(0)f(x)=e^1\left(1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2+o\left(x^2\right)\right)$

Exercice 3 :

Question 1 :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x^2}{x^2\sin^2 x}$$

Or, autour de 0 :

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)$$

$$\sin^2 x=x^2-2x\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)=x^2-\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)$$

Donc :

$$\sin^2 x-x^2=-\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)$$

$$x^2\sin^2 x=x^4+o\left(x^5\right)$$

Donc $f(x)=\dfrac{-\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)}{x^4+o\left(x^5\right)}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\dfrac{1}{3}$

Question 3 :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$f(x)=e^{x^2\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}$$

Posons $g(x)=x^2\ln\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

On fait donc le développement de $g(x)$ et posons :

$X=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $\qquad\qquad \ln(1+\underbrace{u}_{X-1})\overset{0}{\approx}u$

$$\Rightarrow \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)\overset{\infty}{\approx}\cos\frac{1}{x}-1$$

On a $\cos(u)\overset{\infty}{\approx}1-\dfrac{u^2}{2}$

Donc $\cos\dfrac{1}{x}\overset{\infty}{\approx}1-\dfrac{1}{2x^2}$

Donc :

$$\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)\overset{\infty}{\approx}\frac{1}{2x^2}$$

$$\Rightarrow g(x)=x^2\times\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=e^{-\frac{1}{2}}$

Exercice 4 :

Question 1 :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$$

On pose $X=\frac{1}{x}$ si $x\to\infty \quad X\to 0$

$$f(x)=x\sqrt{\frac{x}{x-1}}=x\sqrt{\frac{\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}-1}}$$

$$=\frac{1}{X}\sqrt{\frac{1}{1-X}}$$

Donc $f(x)=\frac{1}{X}(1-X)^{-\frac{1}{2}}$

En faisant un développement limité à l'ordre 2 :

$$(1-X)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\times -X\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2}X^2+o\left(x^2\right)$$

$$=1+\frac{X}{2}+\frac{3}{8}X^2+o\left(X^2\right)$$

$$=x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Donc, $f(x)$ a une asymptote oblique d'équation $y=x+\frac{1}{2}$

Question 2 :

$$f(x)=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$$

On cherche l'équation se son asymptote. Pour cela, on va utiliser le développement limité. Or, on ne sait pas faire de développement limité en infini.

On pose alors $X=\frac{1}{x}$. Si $x\to\infty \quad X\to 0$

$$e^X=1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{6}+o\left(X^3\right)$$

Donc : $\frac{1}{1+e^x}=\frac{1}{1+1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{6}+o\left(x^3\right)}$

On fait ensuite la division euclidienne pour simplifier l'expression.

On trouve $\frac{1}{1+e^X}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}X+\frac{1}{48}X^3+o\left(x^3\right)$

Donc $f(x)=x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4x}+\frac{1}{48x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

Donc $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{48x^2}+o\left(x^2\right)$

Donc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$

Donc, $f(x)$ admet une asymptote oblique d'équation $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

Calculons la position relative de par rapport à son asymptote oblique.

La courbe est au dessus de l'asymptote car $\frac{1}{48x^2}>0$

Question 3 :

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$$
$$=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x}=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$
$$=e^{\frac{1}{x}}|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}$$

Branche de $x\to\infty$

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}x\sqrt{1+\frac{2}{x}}$$

Soit $X=\frac{1}{x}$ Si $x\to\infty$ $X\to 0$

Donc $f(x)=\frac{1}{X}e^X\sqrt{1+2x}$

$$=\frac{1}{X}\left(1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{6}+o\left(X^3\right)\right)\left(1+\frac{1}{2}2X-\frac{4}{8}X^2+\frac{3}{48}8X^3+o\left(x^3\right)\right)$$
$$=\frac{1}{X}\left(1+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{6}+o\left(X^3\right)\right)\left(1+X-\frac{X^2}{2}+\frac{1}{2}X^3+o\left(x^3\right)\right)$$
$$=\frac{1}{X}\left(1+X-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{2}X^3+X+X^2-\frac{1}{2}X^3+\frac{1}{2}X^2/\frac{1}{2}X^3+\frac{1}{6}X^3+o\left(X^3\right)\right)$$
$$=\frac{1}{X}\left(1+2X+X^2+\frac{4}{6}X^3+o\left(x^3\right)\right)$$
$$=x+2+\frac{1}{x}+\frac{2}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Donc $f(x) = x+2+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ (On peut négliger le terme en x^2)

Donc $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(x+2)$

La fonction f possède donc une asymptote oblique d'équation $x+2$

Exercice 5 :

$$f(x) = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \left(1-\frac{x}{2}\right)e}{x^2}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ est une forme indéterminé

Soit $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Grace à la fonction $\ln$, on peut écrire $g(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

Or, $\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)$$

Donc $g(x) = e\left(e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}\right)$

Posons $X = -\frac{1}{2}x+^2\frac{1}{3}x^2+o(x^2)$

$$e^X = 1+X+\frac{1}{2}X^2+o(X^2)$$

$$e^x = 1+\left(-\frac{1}{2}x+^2\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x+^2\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)^2$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)+\frac{1}{8}x^2$$

Donc $g(x) = e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2+o(x^2)\right)$

Donc $f(x) = \frac{g(x)-\left(1-\frac{x}{2}\right)e}{x^2} = \frac{\frac{11}{24}e\times\cancel{x^2}+o(x^2)}{\cancel{x^2}}$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{11}{24}e$

Il y a donc un prolongement de $f(x)$ en zéro :

$$\begin{cases} \tilde{f} = \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - \left(1-\dfrac{x}{2}\right)e}{x^2} & x \neq 0 \\ \tilde{f}(0) = \dfrac{11}{24}e \end{cases}$$

Exercice 6 :

Question 1 :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Continuité :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$f(x)$ est définie en $\mathbb{R}^+$, on ne regarde que la limite en 0^+

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\to 0}\underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{\to 0} = 0$$

Donc $f(x)$ est continue sur $[0;+\infty[$

Dérivabilité :

$f(x)$ dérivable en $x = a$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = L$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x+2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = \infty$$

Question 2 :

On pose $X = \dfrac{1}{x}$ Si $x \to \infty$ n $X \to 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{X\to 0} \frac{\frac{1}{X^2}}{\frac{1}{X}+2}e^{-X} = \lim_{X\to 0} \frac{e^{-X}}{X(1+2X)} = \lim_{X\to 0} \frac{e^{-X}}{X}$$

Or : $\frac{e^{-X}}{X}=\frac{1-X+-\frac{X^2}{2}+o\left(x^2\right)}{X}=\frac{1}{X}-1+\frac{X}{2}+o(X)$

$$=x-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x-1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$=(x-1)$$

Donc $y=x-1$ est asymptote oblique de $f(x)$

Question 3 :

On a démontré que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^2e^{-\frac{1}{x}}}{x+2}\right)'=\left(\frac{u}{v}\right)'$$

$u=xe^{-\frac{1}{x}}$ $\qquad u'=2xe^{-\frac{1}{x}}+x^2\times\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

$v=x+2$ $\qquad v'=1$

Donc : $f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

$$=\frac{\left(x^2+5x+2\right)}{(x+2)^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

Pour trouver le sens de variation se f , on regarde le signe de sa dérivée.

$f'(x)=0$ si $x^2+5x+2=0$

$\Delta=17$ $\sqrt{\Delta}\approx 4$

Donc :

$$s_1=\frac{-5-4}{2}=-\frac{9}{2}$$

$$s_2=\frac{-5+4}{2}=-\frac{1}{2}$$

$f'(x)$ n'étant défini que sur $\mathbb{R}^+$, $f'(x)$ a toujours le même signe. $f'(x)$ étant positive, $f(x)$ est croissante.

TD n°5 : Intégration

Rappel :

$$\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$$
$$\left(u^{-n}\right)' = -nu'u^{-n-1}$$
$$\left(e^u\right)' = u'e^u$$
$$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$$

Exercice 1 :

Question 1 :

I$= \int_0^1 te^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 2t \times e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[e^{t^2}\right]_0^1$

NB : $\left(e^{t^2}\right)' = 2te^{t^2} \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e-1)$

Question 2 :

$$I = \int_0^1 t^2\left(t^3+2\right)^5 dt = \frac{1}{18}\int_0^1 18t^2\left(t^3+2\right)^5 dt$$

NB : $\left[\left(t^3+2\right)^6\right]' = 18t^2\left(t^3+2\right)^5$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{18}\left[\left(t^3+2\right)^6\right]_0^1 = \frac{3^6-2^6}{18}$$

Question 3 :

$$I = \int_0^1 \frac{t+1}{\left(t^2+2t+3\right)^3}dt$$

$$\left[\left(t^2+2t+3\right)^{-2}\right]' = -2\left(t^2+2t+3\right)^{-3}(2t+2)$$
$$= -4(t+1)\left(t^2+2t+3\right)^{-3}$$

$$I = -\frac{1}{4}(t+1)\left(t^2+2t+3\right)^{-3} dt$$
$$= -\frac{1}{4}\left[t^2+2t+3\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(t^2+2t+3\right)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{36}-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{48}$$

Question 4 :

$$I=\int_0^1 \sqrt{3t+1}\,dt=\int_0^1 (3t+1)^{\frac{1}{2}}dt$$

$$\left[(3t+1)^{\frac{3}{2}}\right]'=\frac{3}{2}(3t+1)^{\frac{1}{2}}\times 3=\frac{9}{2}(3t+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$I=\frac{2}{9}\int_0^1 \frac{9}{2}(3t+1)^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{2}{9}\left[(3t+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{9}\left[4^{\frac{3}{2}}-1\right]=\frac{14}{9}$$

Exercice 2 :

Question 1 :

$$f(t)=\frac{t+5}{t^2+2t-3^2}=\frac{a}{t+1}+\frac{b}{t-3}$$

$$f(-5)=\frac{a}{-4}+\frac{b}{-8}=0 \quad a=-\frac{b}{2}$$

$$f(0)=a-\frac{b}{3}=\frac{5}{-3} \qquad \Rightarrow\ 3a-b=-5\ \Leftrightarrow 3a+2a=-5$$

Donc : $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$

$$\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t-3}\right)dt=\left[-\ln|t+1|+2\ln|t-3|\right]_0^1=\ln 2-2\ln 3$$

Question 2 :

$$f(x)=\frac{4x^2+x-1}{x+1}=\frac{N(x)}{D(x)}$$

$$\deg(N)>\deg(D)\Rightarrow Division\ \ euclidienne$$

On obtient donc $f(x)=4x-3+\dfrac{2}{x+1}$

$$I=\int_1^2 4x-3+\frac{2}{x+1}dx$$

$$=\left[2x^2-3x+2\ln|x+1|\right]_1^2$$

$$=8-6+2\ln 3-2+3-2\ln 2$$

$$=3+2\ln\frac{3}{2}$$

Question 3 :

$$f(x)=\frac{4x^4+x^2-1}{x^2(x+1)}$$

Par division euclidienne, on obtient : $f(x)=4x-4+\dfrac{5x^2-1}{x^2(x+1)}$

$$g(x)=\frac{5x^2-1}{x^2(x+1)}=\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}+\frac{e}{x+1}$$

$$x^2g(x)=\frac{5x^2-1}{x+1}=cx+d+e\frac{x}{x+1}$$

Si $x=0 \Rightarrow d=-1$.

$$(x+1)g(x)=\frac{5x^2-1}{x^2}=\frac{c}{x}(x+1)+\frac{d}{x^2}(x+1)+e$$

Si $x=-1 \Rightarrow e=4$

$$x=1 \Rightarrow g(1)=\frac{4}{2}=c+d+\frac{e}{2}$$
$$=2=c-1+2$$
$$\Rightarrow c=1$$

Donc $f(x)=4x-4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{x+1}$

$$I=\int_1^2 f(x)$$
$$=\left[2x^2-4x+\ln|x|+\frac{1}{x}+4\ln|x+1|\right]_1^2$$
$$=\frac{3}{2}+\ln\frac{81}{8}$$

Question 4 :

$$f(x)=\frac{2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

$$(x-1)^2f(x)=\frac{2}{x^2+1}=a(x+1)+b+\frac{cx+d}{x^2+1}(x-1)$$

Si $x=1 \Rightarrow b=1$

$$(x^2+1)f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}=\left(\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}\right)(x^2+1)+cx+d$$

Si $x=i \Rightarrow \dfrac{2}{(i-1)^2}=ci+d$

$$=\frac{2}{\cancel{i^2+1}-2i}=ci+d$$
$$=i=ci+d$$
$$\Rightarrow c=1 \qquad d=0$$

$$f(x)=-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x}{x^2+1}$$

$$I=\int_{-1}^{0} f(x)dx=\left[-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_{-1}^{0}$$

$$=1+\ln 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$$

$$=\frac{1+\ln 2}{2}$$

Exercice 3 :

Question 1 :

$$I=\int_{0}^{1}\left(t^2+1\right)e^{-3t}\,dt$$

Intégration par partie :

$$\begin{cases} u=t^2+1 & u'=2tdt \\ v'=e^{-3t} & v=-\frac{1}{3}e^{-3t} \end{cases}$$

$$I=\left[-\frac{1}{3}\left(t^2+1\right)e^{-3t}\right]_0^1-\int_0^1\left(-\frac{2}{3}\right)t\times e^{-3t}\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}\left(t^2+1\right)e^{-3t}\right]_0^1+\frac{2}{3}\int_0^1 te^{-3t}\,dt$$

Deuxième intégration par partie :

$$\begin{cases} u=t & u'=dt \\ v'=e^{-3t} & v=-\frac{1}{3}e^{-3t} \end{cases}$$

$$I=\left[-\frac{1}{3}\left(t^2+1\right)e^{-3t}\right]_0^1+\frac{2}{3}\left(\left[-\frac{1}{3}te^{-3t}\right]_0^1+\frac{1}{3}\int_0^1 e^{-3t}\,dt\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\left(t^2+1\right)e^{-3t}-\frac{2}{9}te^{-3t}-\frac{2}{9}e^{-3t}$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}t+t^2+1\right)e^{-3t}$$

Question 2 :

$$I=\int_1^e 3t\ln t\,dt=3\int_1^e u\,dv$$

$$\begin{cases} u=\ln t & du=\frac{1}{t}dt \\ dv=t & v=\frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

$$I=3\left(\left[\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}t^2\frac{1}{t}dt\right)$$

$$I = \frac{3}{2}\left(\left[t^2 \ln t\right]_1^e - \int_1^e t\,dt\right)$$

$$I = \frac{3}{2}\left[t^2 \ln t - \frac{1}{2}t^2\right]_1^e$$

$$I = \frac{3}{2}\left[t^2\left(\ln t - \frac{1}{2}\right)\right]_1^e$$

$$I = \frac{3}{2}\left[e^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] = \frac{3}{4}\left(e^2 + 1\right)$$

Question 3 :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 \cos 2t\,dt$$

$$\begin{cases} u = t^2 & du = 2t\,dt \\ dv = \cos 2t\,dt & v = \frac{1}{2}\sin 2t \end{cases}$$

$$I = \left[\frac{1}{2}t^2 \sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \sin 2t\,dt$$

$$I' = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \sin 2t\,dt$$

$$\begin{cases} u = t & du = dt \\ dv = \sin 2t\,dt & v = -\frac{1}{2}\cos 2t \end{cases}$$

$$I' = \underbrace{\cancel{\left[-\frac{1}{2}t\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}}}_{\substack{si\,t=0\ c'est\ nul \\ si\,t=\frac{\pi}{4}\ \cos 2t=0}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cos 2t\,dt$$

$$I' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)\frac{1}{4}$$

Question 4 :

$$I = \int_0^1 \cos 2\pi t \times e^t\,dt$$

$$\begin{cases} u = \cos 2\pi t & du = -2\pi \sin t\,dt \\ dv = e^t\,dt & v = e^t \end{cases}$$

$$I=\left[\cos 2\pi t\times e^{t}\right]_{0}^{1}+\int_{0}^{1}2\pi\sin 2\pi t\times e^{t}\,dt$$

$$I'=2\pi\int_{0}^{1}\sin 2\pi e^{t}\,dt$$

$$\begin{cases} u=\sin 2\pi t & du=2\pi\cos 2\pi dt \\ dv=e^{t}dt & v=e^{t} \end{cases}$$

$$I'=2\pi\left(\cancel{\left[e^{t}\sin 2\pi t\right]_{0}^{1}}-\int_{0}^{1}2\pi\cos 2\pi t e^{t}\,dt\right)$$

$$I'=2\pi^{2}\left(-\int_{0}^{1}\cos 2\pi t\times e^{t}\,dt\right)=4\pi^{2}\times I$$

$$I=e-1-4\pi^{2}I\Rightarrow I=\frac{e-1}{1+4\pi^{2}}$$

Exercice 4 :

Question 1 :

$$I=\int_{0}^{1}\ln\left(1+t^{2}\right)dt$$

$$\begin{cases} u=\ln\left(1+t^{2}\right) & du=\dfrac{2t\,dt}{1+t^{2}} \\ dv=dt & v=t \end{cases}$$

$$I=\left[t\ln\left(1+t^{2}\right)\right]_{0}^{1}-2\int_{0}^{1}\frac{t^{2}dt}{1+t^{2}}$$

$$I=\ln 2-2\int_{0}^{1}\frac{t^{2}}{1+t^{2}}dt$$

$$I'=\int_{0}^{1}\frac{t^{2}}{1+t^{2}}dt$$

$$I'=\int_{0}^{1}\left(1-\frac{1}{t^{2}+1}dt\right)$$

$$I'=\left[t\right]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}\frac{dt}{1+t^{2}}$$

$$I=\ln 2-2+2\left[\arctan\right]_{0}^{1}$$

$$I=\ln 2-2+\frac{2\pi}{4}=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$$

Question 2 :

$$I=\int_1^e \frac{1}{t}\ln t\,dt\int_1^e u'u$$

$$u=\ln t \qquad u'=\frac{1}{t}$$

$$\left(u^n\right)'=nu^{n-1}u'$$

$$\left(u^2\right)'=2uu'$$

$$\left((\ln t)^2\right)'=2\frac{1}{t}\ln t$$

$$I=\frac{1}{2}\int_1^e 2\frac{1}{t}\ln t\,dt$$

$$I=\frac{1}{2}\left[(\ln t)2\right]_1^e$$

$$I=\frac{1}{2}$$

Question 3 :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 3t\times\cos 2t$$

Par linéarisation, on obtient : $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}\times\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\left(e^{5it}+e^{it}-e^{-it}-e^{-3it}\right)}{4i}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(\sin 5t+\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5t-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\cos 5t+\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{5}+1\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{6}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{6}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{4}{5}\right]$$

$$=\frac{3}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Question 4 :

$$f(t)=\cos 2\pi t\times\sin^2\pi$$

$$=\frac{e^{2i\pi t}+e^{-2i\pi t}}{2}\times\left(\frac{e^{i\pi t}-e^{-i\pi t}}{2i}\right)^2$$

$$=\frac{e^{2i\pi t}+e^{-2i\pi t}}{2}\times\frac{e^{2i\pi}+e^{-2i\pi}-2}{-4}$$

$$=\frac{\left(e^{2i\pi}+e^{-2i\pi}\right)\left(e^{2i\pi}+e^{-2i\pi}-2\right)}{-8}$$

$$=\frac{e^{4\pi t}+1-2e^{2i\pi t}+1+e^{-4\pi t}-2e^{-2i\pi t}}{-8}$$

$$=\frac{2\cos 4\pi t-4\cos 2\pi t+2}{-8}$$

$$=-\frac{1}{4}(\cos 4\pi t-2\cos 2\pi t+1)$$

$$=\frac{1}{4}(2\cos 2\pi-\cos 4\pi t-1)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2\sin 2\pi t}{2\pi}-\frac{\sin 4\pi t}{4\pi}-t\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\sin 2\pi t}{\pi}-\frac{\sin 4\pi t}{4\pi}-t\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{4}\left[(0-0-1)-(0-0-0)\right]$$

$$=-\frac{1}{4}$$

Question 5 :

$$I=\int_0^1 \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

Posons : $x=\tan t$

$$dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$$

$$t=\arctan x$$

Si $x=0 \quad t=0$

$$x=1 \quad t=\frac{\pi}{4}$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 t}{\left(1+\tan^2 t\right)^2}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\, dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-0\right)$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

Exercice 5 :

Question 1 :

$$I=\int_1^e \frac{\ln t}{t\left(\ln^2 t+1\right)}dt$$

On pose : $x=\ln t \qquad t=e^x \quad dt=e^x dt$

Si : $t=1 \quad x=0$

$t=e \quad x=1$

$$I=\int_0^1 \frac{x}{e^x\left(x^2+1\right)}e^x dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{\left(x^2+1\right)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+x^2\right|\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}[\ln 2]$$

Question 2 :

$$I=\int_0^1 \frac{\sqrt{t+2}}{t+1}dt$$

On pose : $x=\sqrt{t+2} \qquad t=x^2-2 \qquad dt=2x\,dx$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2-1}2x\,dx$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2-1}dx$$

Par division euclidienne :

$$I=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 1+\frac{1}{x^2-1}dx$$

$$=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 1+\frac{1}{(x-1)(x+1)}dx$$

$$=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 1+\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}dx$$

$$=2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 1+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}dx$$

$$=\left[2x+\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}=\left[2x+\ln\frac{x-1}{x+1}\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}$$

$$=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$$

Question 3 :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2} \arctan x \, dx$$

$$u = \arctan x \qquad du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = \frac{dx}{x^2} \qquad v = -\frac{1}{x}$$

$$I = \left[-\frac{1}{x} \arctan x \right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x\left(1+x^2\right)} dx}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \left[\ln x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) \right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2} + \left[0 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{4} \right]$$