EFREI -L1 ABCD 2011

ALGEBRE LINEAIRE – DE n°1
Sans document ni calculatrice

<u>Questions de cours :</u>
A quelles conditions une partie d'un ensemble E est-elle un sous-espace vectoriel de E ?
Enoncer une condition pour qu'une famille de vecteurs soit liée.
Définir un endomorphisme et un isomorphisme.
Définir le noyau et l'image d'une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. A quelles conditions portant sur les dimensions des noyau et image d'une application linéaire, celle-ci est-elle injective ? surjective ?
Définir la taille d'une matrice.
Soit A, B, C trois matrices de coefficients respectifs $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$, Donner la valeur de $c_{i,j}$, lorsque C=A.B .
Quelle est la transposée du produit de matrices A.B ?
Définir le rang d'une matrice.

<u>Exercice n°1 :</u> On considère dans R^4 les 4 vecteurs $\vec{a}$ = (1 ; -1 ; 1 ; 0), $\vec{b}$ = (1 ; 2 ; 0 ; -2), $\vec{c}$ = (2 ; 1 ; -2 ; 3), $\vec{d}$ = (4 ; -4 ; 1 ; 5). Soient F l'espace vectoriel engendré par la famille $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ et G l'espace vectoriel engendré par la famille $\{\vec{c}, \vec{d}\}$. Quelles sont les dimensions et bases de F, G, F+G, $F \cap G$; trouver une relation linéaire entre ces 4 vecteurs. Donner les équations de F+G et $F \cap G$ dans R^4.

<u>Exercice n°2 :</u> Soit φ un endomorphisme de R^4 défini par :
φ(x ; y ; z ; t) = (x-y ; x-2y-z ; -2y+z+t ; -x+2y+4z+t).Trouver une base et la dimension du noyau de φ. Quel est le rang de φ ? Donner l'équation (ou les équations) et une base de l'image de φ .Cette application est-elle injective? Est-elle surjective? Est-ce un automorphisme ? Quelle est la matrice associée à φ dans la base canonique de R^4 ? Quelles sont les images, par φ, des vecteurs de cette base ?

<u>Exercice 3 :</u>
On considère les matrices à coefficients réels A, B, C, D définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer successivement: 2.A ; A + B ; ${}^tA$; A.B ; A.C ; A.D ; C.D ; D.C ; D.A ; A. ${}^tD$
Montrer qu'il existe α_n et β_n, entiers relatifs, tels que $C^n = \alpha_n C + \beta_n I$, où I est la matrice unité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\forall n \in \mathbf{N}^*$. Calculer α_n et β_n, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

<u>Etude démographique</u>

On considère 2 pays F et A où chaque année les décès sont égaux en nombre aux naissances mais où, chaque année, un quart de la population de l'un l'année n émigre dans l'autre pays l'année (n+1), et de même pour l'autre pays. Ecrire le système séquentiel donnant les populations de ces 2 pays l'année (n+1) en fonction de leurs populations l'année n. En déduire l'équation reliant les populations de F aux années n+2, n+1 et n. On suppose que, l'année 1, F a 60 millions d'habitants et A 20 millions d'habitants. Quelles seront les populations de F et de A l'année n ? et les populations dans un nombre infini d'années ?