1

$$\bigcup_{j\in J} E_j = \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists j \in J)\ x \in]0, j[\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \mid (\exists j) \quad 0 < x < j \leq 1 <]0,1[$$

Soit $0 < x < 1$, prenons $j = 1$ $x \in E_1$ donc $x \in \bigcup_{j\in J} E_j$

Donc $]0, 1[\subset \bigcup_{j\in J} E_j$

Soit $x \in \mathbb{R}$

Montrons que $x \notin \bigcap_J E_j$

A cet effet cherchons un j tel que $x \notin E_j$

Si $x \geq 1$, $x \notin E_1$

Si $x \leq 0$, $(\forall j \in J)\ x \in]0, j[$

Si $x \in]0, 1[$, $x \notin]0, \frac{x}{2}[= E_{\frac{x}{2}}$

Propriétés :

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap X = A$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (*)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (**)$

Démonstration:

$(*)$ Soit $x \in A \cap (B \cup C)$, alors $x \in A$ et $x \in B \cup C$

- Si $x \in B$, $x \in A \cap B$ et alors $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Si $x \in C$, $x \in A \cap C$ et alors $x \in (A \cap C) \cup (A \cap B)$

Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Soit $x \in (A \cap B)$, $x \in A$ et $x \in B$ et donc $x \in B \cup C$ et $x \in A \cap (B \cup C)$, Fonct° Variat° 2 2

équivalent

équi

21/01/14 Soit $x \in (A \cap C)$, $x \in A$ et $x \in C$; d'où $x \in B \cup C$

et $x \in A \cap (B \cup C)$

Algèbre de Boole :

Théorème : Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles dénombrables

$\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ est encore dénombrable

Démonstration : Supposons que les éléments de E_n sont rangés en une suite $(u_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$

$E_n = \{ u_{n,0} ; u_{n,1} ; \dots \}$.

$$\begin{array}{cccc} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,0} & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \end{array}$$

Applicat° : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

$\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{n=2}^{\infty} E_n$

où $E_n = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+ \mid \begin{array}{l} p+q=n \\ p,q \in \mathbb{N} \\ q \neq 0 \\ p \neq 0 \end{array} \right.$ $\qquad E_5 = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} \right\}$

$\mathbb{Q}_+^* = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots \right\}$

③

Théorème : Si A dénombrable, alors l'ensemble des n-uplets à coordonnées dans A est dénombrable.

$$A^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (\forall i)\, x_i \in A\}$$

Démonstration :

$$A^2 = \{(x,y) \mid x, y \in A\}$$

$$= \bigcup_{y \in A} \{(x,y) \mid x \in A\}$$

équipotent à A donc dénombrable

dénombrable à cause du théorème

Par récurrence, supposons que A^n est dénombrable.

$$A^{n+1} = \bigcup_{y \in A} \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in A\}$$

équipotent à A^n

Donc A^{n+1} dénombrable à cause du théorème précédent

Théorème : Soit E l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$. Alors E n'est pas dénombrable.

Démonstration : par l'absurde : supposons E dénombrable. Il existe une bijection $\mathbb{N} \to E$

$n \to u_n$

$u_0 = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$

$u_1 = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, \dots$

$u_2 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

$u_3 = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots$

Soit (V_n) la suite à valeurs dans $\{0,1\}$ définie par

Fonct° Variab° 2

21/01/14 II Espace métrique

Définition: On dit qu'un ensemble E dont les éléments sont appelés «points» est espace métrique, s'il existe une application, appelée «distance»

$$d : E \times E \to [0; +\infty[$$
$$(x, y) \to d(x, y)$$

qui vérifie trois propriétés.

- $(\forall x, y \in E) \quad d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, x) = 0$ et $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$
- $(\forall x, y, z \in E) \quad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$