[redacted] DE RATTRAPAGE

FONCTIONS
ET
VARIATIONS

VALIDÉ

malgré la tentative de tricherie

Exercice n°1 :

$$f(x) = \frac{2+\sin x}{1+2x+x^2}$$

$DL_3(0)$ $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$f(x) = \frac{2+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+2x+x^2}$$

$$\begin{array}{l|l}
2 + x - \frac{x^3}{6} & 1+2x+x^2 \\ \hline
-2 - 4x - 2x^2 & 2 - 3x + 4x^2 + \frac{31}{6}x^3 + o(x^3) \\
0 \quad -3x - 2x^2 - \frac{x^3}{6} & \\
+3x + 6x^2 + 3x^3 & \\
0 \quad + 4x^2 + \frac{17}{6}x^3 & \\
-4x^2 - 8x^3 & \\
0 \quad -\frac{31}{6}x^3 &
\end{array}$$

$DL_3(0)$ de $\frac{2+\sin x}{1+2x+x^2} = 2 - 3x + 4x^2 + \frac{31}{6}x^3 + o(x^3)$

Exercice n°2 :

$$f(x) = x^2 \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

Posons $X = \frac{3}{x}$ , $x \to \infty$ , $X \to 0$

$$\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \frac{X^4}{4} + o(X^4)$$

$$\hookrightarrow \frac{3}{x} - \left(\frac{3}{x}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{x}\right)^3 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{3}{x}\right)^4 \times \frac{1}{4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$\hookrightarrow \frac{3}{x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{27}{3x^3} + \frac{81}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$f(x) = x^2 \times \left(\frac{3}{x} - \frac{9}{2x^2} + \frac{27}{3x^3} + \frac{81}{4x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$$

$$= 3x - \frac{9}{2} + \frac{27}{3x} + \frac{81}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

la limite en $+\infty$ vaut : $-\frac{9}{2}$

L'asymptote à la courbe est : $3x - \frac{9}{2}$

Et grâce à $\left(+\frac{27}{3x}\right)$, on peut dire que l'asymptote est en dessous de la courbe.

Exercice n°3 :

$$u_n = \frac{1}{n(n-1)}.$$

On va effectuer une décomposition en éléments simple pour aider à conclure sur la nature de la serie.

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n-1}$$

On multiplie par n avec $n = 0$

$$\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)} = a + \cancel{\frac{bn}{n-1}}$$ Il reste $\frac{1}{n-1} = a$ Donc $a = -1$

On multiplie par $(n-1)$ avec $n = 1$

$$\frac{(\cancel{n-1})}{n(\cancel{n-1})} = \cancel{\frac{a(n-1)}{n}} + \frac{b(\cancel{n-1})}{(\cancel{n-1})} , \quad b = \frac{1}{n} , \quad b = 1$$

On obtient $u_n = \frac{1}{n(n-1)} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$ $\quad -\frac{1}{n} \to 0$ en l'infini

$\frac{1}{n-1} \to 0$ en l'infini

$\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$

En utilisant le principe de D'Alembert :

$U_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$ , $U_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n-2)}$

$U_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ $\qquad U_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{1}{n^2} \times \dfrac{n^2}{1} = 1$ , la serie de terme général $U_n$ converge vers sa limite en 0.

2. $U_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+5}\right)^n$ .

$\lim\limits_{+\infty} U_n \simeq \left(\dfrac{2n+1}{2n+5}\right)^n \simeq \left(\dfrac{2n}{2n}\right)^n = 1^n$

Selon le Principe de Cauchy $k = \sqrt[n]{U_n}$, $k < 1$, $U_n$ Cv , $k > 1$ $U_n$ Dv

$U_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+5}\right)^n = \sqrt[n-\frac{1}{2}]{\left(\dfrac{2n+1}{2n+5}\right)}$ $\qquad \dfrac{2n+1}{2n+5}$ en $+\infty$ tend vers 1

Donc $\sqrt[n-\frac{1}{2}]{1}$ en $+\infty$ tend vers 0

Donc $k < 1$ Donc la serie de terme général $U_n$ Converge vers 1.

Exercice 4:

$\int_0^2 (3x+1)e^{-2x}\,dx$

On va faire une intégration par partie

$\int_0^2 (3x+1)e^{-2x}\,dx$

$u = 3x+1 \qquad u' = 3$

$v' = e^{-2x} \qquad v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}$

$-\dfrac{1}{2}\left[(3x+1)(e^{-2x})\right]_0^2 - \int_0^2 -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \cdot 3\,dx$

$-\dfrac{1}{2}\left[(3x+1)(e^{-2x})\right]_0^2 - 3\int_0^2 -\dfrac{1}{2}e^{-2x}\,dx = -\dfrac{1}{2}\left[(3x+1)(e^{-2x})\right]_0^2 - \dfrac{3}{4}\int_0^2 -2e^{-2x}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\left[(3x+1)(e^{-2x})\right]_0^2 - \frac{3}{4}\int_0^2 -2e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(3x+1)(e^{-2x})\right]_0^2 - \frac{3}{4}\left[e^{-2x}\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(7 \cdot e^{-4} - 1 \cdot e^{0}\right) - \frac{3}{4}\left(e^{-4} - e^{0}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(7 \cdot e^{-4} - 1\right) - \frac{3}{4}\left(e^{-4} - 1\right)$$

$$= -\frac{7}{2}e^{-4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-4} = \frac{-14-3}{4}e^{-4} + \frac{5}{4} = \frac{-17}{4}e^{-4} + \frac{5}{4}.$$

2. $\int_2^7 t\sqrt{t+2}\,dt$

On pose $\sqrt{t+2} = X$

$X = \sqrt{t+2}$

$X^2 = t+2$

$t = X^2 - 2$

$\frac{dt}{dX} = 2X$

quand $t \to 7$, $X \to 3$

quand $t \to 2$, $X \to 2$

$$\int_2^3 (X^2-2)(X)(2X)\,dX$$

$u = X$, $u' = 1$

$v' = (X^2-2)(2X)$ $v = X^2-2$

$$= \left[X(X^2-2)\right]_2^3 - \int_2^3 1\cdot(X^2-2)\,dX$$

$$= \left[X(X^2-2)\right]_2^3 - \int_2^3 X^2-2\,dx$$

$$= \left[X(X^2-2)\right]_2^3 - \int_2^3 X^2\,dX - 2\int_2^3 1\,dX$$

$$= \left[X(X^2-2)\right]_2^3 - 2\left[X\right]_2^3 - \int_2^3 X^2\,dX$$

[redacted]



1 $(3n^2+5n-1)x^n$ Serie entière de la forme $a_n z^n$

Donc en utilisant le principe d'Alembert :

$a_n = 3n^2+5n-1$ $\qquad a_n \underset{+\infty}{\sim} 3n^2$

$a_{n+1} = 3(n+1)^2 + 5n$ $\qquad a_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} 3n^2$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3n^2}{3n^2} = 1$

Donc la serie a pour limite, 1 donc le rayon de convergence vaut 1.

Calcul de la somme :

$\sum 3n^2 + 5n - 1$

$= \sum 3n^2 - 3nx^n + \sum 8nx^n - 1\sum x^n$

$= 3\sum n(n-1)x^n + 8\sum nx^n - 1\sum x^n$

$= 3x^2\sum n(n-1)x^{n-2} + 8x\sum n x^{n-1} - \sum x^n$

$= \frac{6x^2}{(1-x)^3} + \frac{8x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}$

2 $\sum_0^{+\infty} -\frac{3n}{n!} z^{2n}$ On pose $Z^n = |z^2|^n$, $\sum_0^{+\infty} -\frac{3n}{n!} Z^n$

On utilise le principe d'Alembert :

$a_n = \frac{-3n}{n!}$

$a_{n+1} = \frac{-3(n+1)}{(n+1)!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-3(n+1)}{(n+1)!} \times \frac{n!}{-3n} = \frac{\cancel{3}\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(\cancel{3}n)} = \frac{1}{n}$

Pour $n \to \infty$, $\frac{1}{n} \to 0$, Donc $l = 0$ et $R = \frac{1}{l} = +\infty$.

Le Rayon de convergence est de $+\infty$

Calcul de la somme :

$\sum_0^{+\infty} -\frac{3^n}{n!} z^n = -3\sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ $\qquad \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{1+x}$

$= -3 \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{-3}{1+x}$