COMBETTE
Elise

PIL
2013

Mardi 13 Mai

DE Algèbre linéaire

$\frac{17}{24}$

Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. On veut calculer det(A), on utilise la méthode de Sarrus:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix} = -8+1+1+2+2+2 = \boxed{0}$$

(1)

b. A est une matrice carrée, elle est donc soit bijective, soit ni injective ni bijective. On l'échelonne et on la réduit :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2

f n'est pas injective puisqu'on a une variable libre, elle n'est donc pas surjective non plus.

c. On cherche l'ensemble $\left\{ X \in \mathbb{R}^3,\ f(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. On pose la matrice augmentée du système:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2

$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ Le système est donc inconsistant, on obtient une aberration $0=3$, donc l'ensemble recherché est l'ensemble vide.

d. On cherche l'ensemble $\{X \in \mathbb{R}^3,\ f(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. De même, on pose la matrice augmentée du système :

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $\begin{cases} x_1 = x_3 + 1 \\ x_2 = x_3 + 1 \end{cases}$. L'ensemble recherché est donc $\{(x_3+1, x_3+1, x_3),\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.

2

<u>Exercice 2</u>

On a $M = A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. On veut montrer que (I_3, M, M^2) sont liées dans $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$. On calcule M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha I_3 + \beta M + \gamma M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$\begin{pmatrix} \alpha+2\gamma & \beta+\gamma & \beta+\gamma \\ \beta+\gamma & \alpha+2\gamma & \beta+\gamma \\ \beta+\gamma & \beta+\gamma & \alpha+2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc on résout le système $\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$:

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \gamma = -\beta \end{cases}$ donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$ n'est pas la seule solution, la famille est donc liée dans $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$. 1

b. On veut montrer que M^2 appartient à $F = \mathrm{Vect}(I_3, M)$, c'est-à-dire que M^2 est générée par I_3 et M. Il faut donc que $\alpha I_3 + \beta M = M^2$, soit :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est évident que $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, donc M^2 est bien générée par I_3 et M, c'est-à-dire qu'elle appartient à $F = \mathrm{Vect}(I_3, M)$. 1

c. On cherche une base de F : (I_3, M) est une famille génératrice de F et, de la même manière que la question précédente, le seul moyen que $\alpha I_3 + \beta M = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$ est que $\alpha = \beta = 0$ donc la famille est également libre, c'est une base de F, de dimension 2. 1

d. On cherche une matrice $N \in F$ telle que $NM = MN = I_3$: il s'agit de la matrice inverse de M, M^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 1 & 1 & 0 & y_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 1 & 0 & y_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 1 & -1 & y_3 - y_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & -2 & y_3 - y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}(y_3 - y_2 - y_1) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 \end{pmatrix}$$ 1

D'où $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 3

a. On cherche une base B_1 et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ X \in \mathbb{R}^4,\ f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$,

on pose

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{donc on a } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{(x_1, x_1, x_3, -x_3), (x_1, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_1(1,1,0,0) + x_3(0,0,1,-1)\} \\ &= \mathrm{Vect}(\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_3-\varepsilon_4) \end{aligned}$$

2

et $(\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_3-\varepsilon_4)$ forme une famille libre donc $B_1 = (\varepsilon_1+\varepsilon_2, \varepsilon_3-\varepsilon_4)$.

$\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$.

b. D'après le théorème du rang, $\mathrm{null}(Q) + \mathrm{rg}(Q) = p$ avec p le nombre de colonnes de la matrice standard, d'où $\mathrm{rg}(Q) = 4 - 2 = 2 = \dim(\mathrm{col}(Q))$.

Une base B_2 de $\mathrm{col}(Q)$ serait $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4)$, la première colonne de Q étant $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, la deuxième $-(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4)$, et les troisième et quatrième $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$.

2

c. La concaténation de B_1 et B_2 donne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On résout le système $AX = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & b_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & b_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{2}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}b_4 \end{array}\right)$$

2

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}b_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 + b_3 - \frac{1}{2}b_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}b_4 \end{array}\right)$$

Donc c'est une base de $\mathbb{R}^4$, la famille est génératrice de $\mathbb{R}^4$ et libre.

$B' = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ avec $w_1 = \varepsilon_1+\varepsilon_2$, $w_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $w_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$ et $w_4 = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$.

d. On cherche la matrice de changement de base $P_{BB'}$.

Combette
Elise
PIL.

Exercice 4

a. on veut montrer que l'ensemble SM des matrices supermagiques est un espace vectoriel :

- la matrice nulle est supermagique.
- Soient M_1 et M_2 deux matrices supermagiques :

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{21}' & a_{22}' & a_{23}' \\ a_{31}' & a_{32}' & a_{33}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{11}' & a_{12}+a_{12}' & a_{13}+a_{13}' \\ a_{21}+a_{21}' & a_{22}+a_{22}' & a_{23}+a_{23}' \\ a_{31}+a_{31}' & a_{32}+a_{32}' & a_{33}+a_{33}' \end{pmatrix}$$

qui est également supermagique.

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a_{11}'a_{11} + a_{21}'a_{12} + a_{31}'a_{13} & a_{12}'a_{11} + a_{22}'a_{12} + a_{32}'a_{13} & a_{13}'a_{11} + a_{23}'a_{21} + a_{33}'a_{31} \\ a_{11}'a_{21} + a_{21}'a_{22} + a_{31}'a_{23} & a_{12}'a_{21} + a_{22}'a_{22} + a_{32}'a_{23} & a_{13}'a_{12} + a_{23}'a_{22} + a_{33}'a_{32} \\ a_{11}'a_{31} + a_{21}'a_{32} + a_{31}'a_{33} & a_{12}'a_{31} + a_{22}'a_{32} + a_{32}'a_{33} & a_{13}'a_{13} + a_{23}'a_{23} + a_{33}'a_{33} \end{pmatrix}$$

qui est supermagique aussi.

1

Donc SM est un sous-espace vectoriel et donc un espace vectoriel.

b. U est supermagique (symétrique, et les sommes de ses lignes, colonnes et diagonales sont nulles) et pas V et W (V n'est pas symétrique)

1

fin