

DEVOIR ECRIT n°1

La calculatrice est interdite.

Seul le formulaire fourni avec le sujet est autorisé.

Le sujet comporte une partie à rendre après l'avoir complétée avec la copie et quatre exercices à rédiger sur une feuille séparée.

EXERCICE N°1 : (6 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$.
2. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x}$.
3. En déduire l'étude locale en 0 de la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$. On précisera la limite en 0, une équation de la tangente éventuelle en 0 et sa position par rapport à la courbe de h .

EXERCICE N°2 : (2 points)

Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\arctan x$.

EXERCICE N°3 : (4 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan x$.

2. On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\tan x - x}{x^3} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{3} & \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

EXERCICE N°4 : (4 points)

Étudier les branches infinies de la fonction f définie par $f(x) = x \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x$ (limite, asymptote éventuelle et position relative par rapport à l'asymptote).

Feuille à rendre avec la copie

NOM : LAPICHE

GROUPE : D

EXERCICE N°5 : (4 points)

Vous répondrez aux questions suivantes en inscrivant le résultat sans justification dans la case appropriée.

1. Développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \frac{1+3x^2}{4+x}$	$f(x) = \frac{1+3x^2+x^3\epsilon(0)}{1+3x+x^2\epsilon(x)}$
2. Développement limité en 0 à l'ordre 2 de $f(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2\sin x}$	$f(x) = \frac{2x+x^2\epsilon(x)}{2+x+x^2\epsilon(0)}$

FORMULAIRE D'ANALYSE**DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS**

Tous les développements limités figurant ici sont au voisinage de 0. La fonction ϵ vérifie donc $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

$$\gg \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\gg (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\gg \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots - (-1)^n \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

$$\gg e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$\gg \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

$$\gg \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \epsilon(x)$$