20,

BEYER
Charles

PL1
2013

Charles
BEYER
PL1

DE Algèbre linéaire

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathbb{R}^2, AX = 0\}$

$AX = 0$ ainsi $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

2

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x - y \\ -2x + 2y \end{pmatrix} = 0$

d'où $\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ y = x \end{cases}$

2) $F = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ or $x = y$

d'où $\Rightarrow F = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2

donc la base de F serait $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

3) La dimension de la matrice F est $\dim F = 1$. 2

Votre travail est très soigné comme toujours et je vous en félicite, cela dit vous devez vous forcer à être plus concis.

4) Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

On pose : $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta = y \\ \alpha - \gamma = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y \\ \gamma = -z + x - y \end{cases}$$

3

C'est consistant, donc il y a clairement une relation entre les trois réels α, β, γ et les variables du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$.

On peut en conclure que la famille (v_1, v_2, v_3) est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2

5) • Pour pouvoir conclure que (v_1, v_2, v_3) est une base, nous pouvons soit résoudre $\alpha v_1 + \beta v_1 + \gamma v_3 = 0$, où les résultats doivent être $\alpha = \beta = \gamma = 0$, afin de vérifier sa liberté.

• Autrement, nous pouvons dire que comme la famille (qui doit être libre) est constituée de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, qui lui-même est un espace vectoriel de dimension n. Alors nous pouvons conclure que la famille est une base.

• Ainsi, il faut montrer la liberté de la famille :

inutile car avec ~~ces~~ hypothès[es] libre $\Leftrightarrow$ gé[nératrice]

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$

$$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille est donc libre.

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

À partir de la relation précédente, comme la famille (v_1, v_2, v_3) est libre et est constituée de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, qui lui-même est un espace vectoriel de dimension 3.

$\Rightarrow$ Alors la famille (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera B.

6) On sait que $B = P \times P^{-1} \times S$ et que les matrices S et B sont du même endomorphisme (application linéaire de bases différentes).

De ce fait, la matrice P correspond aux valeurs de B dans S, c'est-à-dire :

$$P = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1

7) Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par : $x + 2y + z = 0$

et $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$\alpha v_1 + \beta v_2$

$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 \end{pmatrix}$ 1

s,
nératrice

Nous pouvons constater, que par substitution, $x = \alpha x_1 + \beta x_2$, $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, $z = \alpha z_1 + \beta z_2$.

8) Donc nous pouvons conclure que $\alpha v_1 + \beta v_2 \in E$ et que par combinaison linéaire, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1 il en manque...

9) On sait que $x + 2y + z = 0$

d'où $x = -2y - z$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} -2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2

De ce fait, la base de E est $S = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

10) Comme la base est constituée d'une combinaison linéaire de 2 éléments, on en déduit $\dim E = 2$. 1

11) Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base standard de $\mathbb{R}^3$ et $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3$, $f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

. $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(\varepsilon_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(\varepsilon_2) = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f(\varepsilon_3) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On obtient ainsi la matrice standard de f :

$$f = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & f(\varepsilon_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2

12) Nous savons que $f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

. calculons $\det f = 1 \times (-1)^{3+3} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1

$\cancel{\det f = 3} \neq 0$ donc la bijectivité est possible. non. $\det \neq 0 \Rightarrow f$ bijective

. Pour que la matrice soit bijective, il faut montrer qu'elle est surjective et injective :

On nous savons que la matrice f est une matrice carrée 3×3, non singulière car toutes les lignes et colonnes sont indépendantes. De ce fait, chaque valeur de la colonne x, sera unique à la valeur de la ligne y.

De ce fait, la matrice est injective et surjective et donc bijective.

. Autrement, on montre les solutions en $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & a-2c \\ 0 & 3 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (a-2c)+\frac{1}{3}(b-2a-c) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3}(b-2a-c) \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (a-2c)+\frac{1}{3}(b-2a-c) \\ y = \frac{1}{3}(b-2a-c) \\ z = c \end{cases}$$

Les solutions sont infinies donc f est bijective.