10-Klèmeuhrz !

Ces fiches sont des résumés de cours du plus important selon l'auteur, excepté dans les dernières feuilles,où l'on peut trouver des démonstrations ou parties de démonstrations useless dues à la fatigue de l'auteur.

En revanche, ces fiches peuvent très bien pour d'autre ne pas suffire à la compréhension et/ou la maîtrise du cours

L'utilisateur final est invité à relire en diagonal son cours après lecture des fiches pour vérifier que rien n'y manquait, quand bien même l'auteur aurrait signalé une lacune de cours à un endroit donné.

L'auteur décline toute responsabilité dans d'éventuels oublies, erreurs, crises cardiaque à la vue de l'écriture, surmenage lors d'opération de décryptage des documents, complications visuelles lors du déchiffrage, et folie passagère ou permanente en cours d'apprentissage, qui surviendraient suite à la lecture de ce document.

Blah blah, blah blah, blah blah

Paumier Edouard, Promo 2011, L1, Groupe B, jeune, beau et brillant, cherchant femme disponible,

Ch6 : Denombrement

I Cardinal

- card $A = |A|$
  card A = card B : A et B équipotents "on dit" "en pression" ~~d'équivalence~~

  $E \subset F \Rightarrow$ card $E \leq$ card $F \Rightarrow$ injection de E ds F

- E est fini ssi $\exists n \in \mathbb{N} \mid$ card $E = n$

  $\rightarrow$ Si E et F sont finis, card$(E \times F)$ = card E × card F

  $\rightarrow$ 4 cardinaux : card $(A \cup B)$ = card A + card B − card $A \cap B$

- E est dénombrable ssi card E = card $\mathbb{N} = \aleph_0$

  $\rightarrow$ card $(E^2 \times F^2) = \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$

  $\rightarrow$ $q \in \mathbb{Q}$, $q = \pm \frac{a}{b}$, $(a,b) \in \mathbb{N}^2$: card $\mathbb{Q} = \aleph_0$

  parties de E $\rightarrow$ card $\mathcal{P}(E) = 2^{\text{card}(E)}$

  $\hookrightarrow$ Cantor $\rightarrow$ card $E <$ card $\mathcal{P}(E)$

  (card $\mathbb{N} = \aleph_0$) < (card $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \aleph_1$)

  $\rightarrow$ Hyp de Cantor $\rightarrow$ card $\mathbb{R} \stackrel{?}{=} \aleph_1$

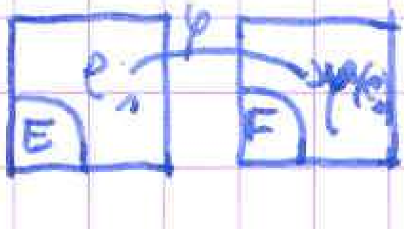
  $\rightarrow$ On ne saurra jamais si $\exists$ un ensemble de cardinal compris entre $\aleph_0$ et $\aleph_1$

Verso

II Nombre d'applications de E dans F

$$E = \{e_1 ; e_2 ; e_3 ; e_4 ; \dots ; e_n\}$$

$$F = \{f_1 ; f_2 ; f_3 ; f_4 ; \dots ; f_n\}$$



$\varphi \in \mathcal{F}(E,F)$
"ensemble des applis de E ds F"

• $\operatorname{card} \mathcal{F}(E,F) = \operatorname{card} F^{\operatorname{card} E}$ (par récurrence)

III Arrangement

$\operatorname{card} \mathcal{F}(E,F) = \operatorname{card} F^{\operatorname{card} E}$

Combien y a-t-il d'injection de E_p ds F_n avec $p \leq n$

Les p images $\varphi(e_1) \dots \varphi(e_p)$

- sont toutes distinctes
- forment une liste ordonnée et sans répétition

→ "arrangement de p éléments parmi n"

Soit A_n^p le nb de cas d'arrangement

$$A_n^p = \underbrace{\prod_{i=0}^{i=p-1} (n-i)}_{p \text{ termes décroissants}} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Cas particulier : $p = n$: bijections

$A_n^n = n!$

Sous-cas : $p = n$ ET $E = F$

→ bijection de E_n dans E_n = "permutation"

card {permutation de E_n} = $n!$

IV Combinaisons

Combinaison de p objets pris parmi n
→ liste sans répétition et sans ordre

→ à chaque combinaisons correspond p! arrangements

→ Nombre des combinaisons noté C_n^p (ou $\binom{n}{p}$)

$$p!\, C_n^p = A_n^p$$

$$\rightarrow \quad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad 0 \leq p \leq n$$

$\rightarrow C_n^{n-p} = C_n^p$ $\quad\rightarrow C_n^p = C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1}$

$\Rightarrow C_n^0 = 1 = C_n^n$ $\quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

verso

- Triangles de pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

symétrique

symétrique

- binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

$n \in \mathbb{N}$ (récurr)

- card $\mathcal{P}(E) = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p$

$= 2^n$, $n =$ card E

V Distribution multinomiale

n objets tous différents sans ordre à répartir dans k cases mettant n_1 dans la case 1, n_i dans la case i, ..., $\sum_{i=0}^{i=k} n_i = n$

- Cas particulier : $k = 2$ K = nombre de répartition

$$= C_n^{n_1} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!}$$

- Dans le cours :

Lacune dans mon cours ici!

VI Equations diophantiennes

(1) $U_1 + U_2 + \ldots + U_p = n$ $U_i \geq 0$ n est fixe

On cherche le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$

$= C_{n+p-1}^{p-1}$

(2) $U_1 + U_2 + \ldots + U_p \leq n$ $U_i \geq 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$

?→ Soit $U_{p+1} \ldots$?

Nb solutions $= C_{n+p}^{p}$

VII Numération (Systèmes de ~)

1°) Nombres entiers

$p \in \mathbb{N}$, p en base β : $p = \overline{b_{n-1} b_{n-2} \ldots b_1 b_0}^{\beta}$

$0 \leq b_i \leq \beta - 1$, $p = b_0 + b_1 \beta^1 + \ldots b_{n-1} \beta^{n-1}$

En général, $\beta \in \{2, 8, 10, 16\}$

2°) ~~Nombres~~ Nombres rationels

$$a \in \mathbb{Q},\ a = \frac{p}{q} \left(= p \cdot q^{-1}\right)\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*$$

$$\overbrace{a = \underbrace{b_{n-1}\, b_{n-2} \dots b_1 b_0}_{\text{partie entière}}, \underbrace{c_0\, c_1\, c_2 \dots c_k \dots}_{\text{partie fractionnaire}}}\ \beta$$

$$a = b_{n-1}\beta^{n-1} + b_{n-2}\beta^{n-2} + \dots + b_1\beta + b_0$$
$$+ c_0\beta^{-1} + c_1\beta^{-2} + \dots + c_k\beta^{-k-1} + \dots$$

- Dans la division de p par q, leurs reste successifs $\in \{0; \dots; b-1\}$

Donc leurs restes ~~successif~~ est périodique, de période $< \beta$,.

- ~~Si $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ restes successifs de la division de~~
$\Leftrightarrow$ développement décimal périodique ($\theta < \beta$)

- Si le développement décimal est apériodique, ~~le nombre~~ a est irrationnel, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

- Nombre algébriques : racines d'un polinôme à coeff entiers ($\sqrt{2}$: $x^2 - 2$).
- Réels non algébriques = "transcendant" : π,