

ALGEBRE LINEAIRE

Travail d'autonomie et d'initiative**Sujet : calcul matriciel**

Votre travail consistera à rédiger un cours complet avec des explications de niveau Bac+1 de calcul matriciel exposant le plus grand nombre d'opérations de calcul matriciel : addition de matrices, multiplication d'une matrice par un scalaire, transposition, multiplication de deux matrices, calcul du rang d'une matrice, inversion de matrice (par une ou plusieurs méthodes), calcul de déterminant, calcul du polynôme caractéristique d'une matrice, calcul des valeurs propres racines du polynôme caractéristique et des vecteurs propres associés, diagonalisation, puissance et exponentielle de matrice, etc..

Vous prendrez comme exemple d'application de ces opérations la matrice

$$A = \begin{pmatrix} m1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & m2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & m3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & m4 \end{pmatrix} \text{ où } m1, m2, m3 \text{ et } m4 \text{ sont les mois de naissance des membres de}$$

l'équipe de TAI, classés par ordre croissant. (Si vous n'êtes que 3, prendre $m4 = 12$)

Vous écrirez simultanément le plus possible de programmes correspondants pour des matrices carrées de taille 2, 3 ou si possible 4, en faisant appel aux opérations mathématiques de base, et non à des bibliothèques de programmes. (Remarque : pour le calcul des racines d'un polynôme caractéristique, vous pourrez vous limiter au cas de matrices symétriques et vous pourrez écrire et utiliser un programme de recherche de racines par dichotomie).

Comme exemple concret d'application de calcul matriciel, vous rechercherez et exposerez de façon résumée des algorithmes utilisés par Google pour classer les pages Web répondant à une recherche.

Puis vous ferez mieux que Google (☺) et exposerez un programme de « pagerank » basé sur le calcul matriciel suivant :

On suppose que notre web se compose de 40 pages, avec une matrice P dont la ligne i comporte en colonne j le coefficient 1 si il existe un lien de la page i vers la page j, et des zéros sinon.

On pourra dire que la popularité de la page j au rang 1 est la somme des coefficients de la colonne j de P, et que la popularité de la page j au rang n est la somme des coefficients de la colonne j de P à la puissance n (expliquez pourquoi...). Mais vous pourrez prendre une autre définition de la popularité d'une page, toujours basée sur l'utilisation des puissances de P.

On suppose que les pages sélectionnées par la recherche sont les pages $m1$, $m2+1$, $2.m3+3$ et $3.m4+3$. Vous chercherez si il existe une valeur n de la puissance de P à partir de laquelle les popularités de ces 4 pages au rang n sont classées de façon stable, et vous indiquerez alors le classement de ces pages. (Pour générer les coefficients de la matrice P de façon réaliste, je vous suggère de rédiger un message (amusant bien sûr) de 40 caractères, de mettre un caractère du message par ligne, en ajoutant au hasard des zéros entre chacun des 8 bits du code ASCII de ce caractère, de façon que la popularité au rang 1 de chaque page soit entre 2 et 8).

En complément à ce travail d'équipe, vous effectuerez chacun un calcul personnel de puissance de matrice, rendu sur feuilles manuscrites, avec tous les calculs intermédiaires avec cinq chiffres significatifs, par une ou deux méthodes, de la matrice A^n avec :

$$A = \begin{pmatrix} j+1 & m+j \\ m+j & m+2 \end{pmatrix}, \text{ où } j \text{ et } m \text{ sont votre jour et mois de naissance.}$$

Vous travaillerez par équipe formée, en principe, de 4 étudiants. Votre rapport sera remis, avec le code des programmes, et manuscrits de résolution des calculs personnels, le 9 mai 2012 à 16h00 au plus tard. (Votre rapport comprendra en deuxième page les photos des membres de l'équipe, avec leurs dates de naissance).

Une présentation orale, avec démonstration des programmes, d'une durée d'une demi-heure par équipe, aura lieu dans la semaine 21 ou 22, avec un exposé par chaque membre de l'équipe d'une partie du rapport ou des programmes dont il est plus particulièrement l'auteur.

Considérez votre équipe comme étant en concurrence avec les autres équipes de votre promotion. Ne leur indiquez pas ce que vous avez fait dans votre rapport. L'originalité de vos contributions sera fortement prise en compte.

Vous serez noté :

- pour une part collective au niveau de votre équipe, sur la qualité de la rédaction de votre rapport, sur la quantité d'opérations matricielles traitées, sur l'efficacité des programmes correspondants, sur l'efficacité de votre calcul de pagerank.
- pour une part individuelle, sur la qualité de l'exposé oral, l'exactitude et la difficulté des sujets exposés par chacun et sur votre calcul personnel de puissance de matrices.