UE 1 : Fonctions et variations

Chapitre 1 : Négligeabilité et équivalence

I) Compléments sur les limites

1) Généralités sur le domaine d'application du cours

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ;+\infty\}$, c'est la droite réelle achevée (avec l'infini inclus)

2) Limite d'une fonction composée

Définition : Soit f, une fonction définie sur un ensemble I, à valeurs dans un ensemble J. Soit g, une fonction définie sur J. On appel fonction composée $g \circ f$, la fonction définie sur I telle que pour tout x appartenant à I, $g \circ f(x) = g[f(x)]$.

Exemples :

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$, g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.

$$\left.\begin{array}{l} g \circ f : x \mapsto 3x-1 \mapsto (3x-1)^2 \\ f \circ g : x \mapsto x^2 \mapsto 3x^2 - 1 \end{array}\right\} g \circ f \neq f \circ g$$

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$

g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \ln(x)$

$g \circ f : x \mapsto 3x^2 + 1 \mapsto \ln\left(3x^2 + 1\right)$

f définie par $f(x) = \sin\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$ sur $]1, +\infty[$

$u(x) = \frac{3x+1}{x-1}$

$v(x) = \sin x$

$v \circ u : x \mapsto \frac{3x+1}{x-1} \mapsto \sin\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = f(x)$

Théorème : Soit a, b et l, 3 éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit f définie au voisinage de a. Et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Soit g définie au voisinage de b. Et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$

On a $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l$

Exemples :

On cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$

$f(x) \mapsto \frac{3x+1}{x-1} \mapsto \ln\left(\frac{3x+1}{x-1}\right)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}} = 3$

$\lim\limits_{x \to 3} \ln(x) = \ln 3$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{3x+1}{x-1}\right) = \ln(3)$

On cherche $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{3x+\sin x}{x-1}$

$\sin x$ n'a pas de limite, on procède donc par encadrement.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1\leq \sin x\leq 1$

Donc $3x-1\leq 3x+\sin x\leq 3x+1$

$$\frac{3x-1}{x-1}\leq\frac{3x+\sin x}{x-1}\leq\frac{3x+1}{x-1}$$

$$\frac{3x-1}{x-1}\leq f(x)\leq\frac{3x+1}{x-1}$$

Grâce au théorème des gendarmes

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x-1}=3\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x+1}{x-1}=3\end{aligned}\right\}\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$$

II) Négligeabilité

1) Définitions, premiers exemples

Définition : Soit f et g, 2 fonctions définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$.

On dit que la fonction f est <u>négligeable</u> devant g en a, et on note $f\underset{a}{=}\circ(g)$ (« f est un petit $\circ$ de g en a»)

si il existe une fonction ε définie au voisinage de a et vérifiant $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ telle qu'au voisinage de a,

$f(x)=\varepsilon(x)g(x)$

Exemples :

Si $n>p$ alors $x^p\underset{+\infty}{=}\circ\left(x^n\right)$

Démonstration :

$x^p=x^{p-n}\times x^n$ et $\lim_{x\to+\infty} x^{p-n}=0$ car $p-n<0$ donc $x^p\underset{+\infty}{=}\circ\left(x^n\right)$

Si $n>p$ alors $x^n\underset{0}{=}\circ\left(x^n\right)$

$x^n=x^{n-p}\times x^p$ et $\lim_{x\to 0} x^{n-p}=0$ car $n-p>0$ donc $x^n\underset{0}{=}\circ\left(x^p\right)$

2) Propriétés

Propriété 1 : Si g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf en a).

$$f\underset{a}{=}\circ(g)\Leftrightarrow\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

Propriété 2 (transitivité) : Si $f\underset{a}{=}\circ(g)$ et si $g\underset{a}{=}\circ(h)$ alors $f\underset{a}{=}\circ(h)$

Propriété 3 (règle de calcul) :

- si $f\underset{a}{=}\circ(g)$ et si $h\underset{a}{=}\circ(g)$ alors $f+h\underset{a}{=}\circ(g)$ $\qquad\circ(g)+\circ(g)=\circ(g)$
- si $f\underset{a}{=}\circ(g)$ et si $h\underset{a}{=}\circ(k)$ alors $fh\underset{a}{=}\circ(gh)$ $\qquad\circ(g)\circ(k)=\circ(gk)$
- si $f\underset{a}{=}\circ(g)$ et si $k\in\mathbb{R}$ alors $kf\underset{a}{=}\circ(g)$ $\qquad k\circ(g)=\circ(g)$ si $k\in\mathbb{R}$
- Si $f\underset{a}{=}\circ(g)$ et si k, une fonction définie au voisinage de a alors $kf\underset{a}{=}\circ(kg)$ $\qquad k\circ(g)=\circ(kg)$

Exemple :

Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x-4x^2}{x^3}$

$$\left.\begin{array}{l}\ln x \underset{+\infty}{=} \circ\left(x^3\right) \Rightarrow 3\ln x=\circ\left(x^3\right)\\ x^2 \underset{+\infty}{=} \circ\left(x^3\right) \Rightarrow -4x^2=\circ\left(x^3\right)\end{array}\right\} \Rightarrow 3\ln x-3x^2=\circ\left(x^3\right) \Rightarrow \frac{3\ln x-4x^2}{x^3}=\frac{1}{x^3}\times\circ\left(x^3\right)=\circ\frac{x^3}{x^3}=\circ(1) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x-4x^2}{x^3}=0$$

III) Fonctions équivalentes

1) Définition, exemples

Définition 1 : Soit f et g , 2 fonctions définies au voisinage de a .

On dit que la fonction f est équivalente à g en a et on note $f \underset{a}{\sim} g$ si $f-g \underset{a}{=} \circ(g)$

Propriété 1 : Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$

Propriété 2 : Si g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf en a)

alors $\boxed{f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1}$

Exemples (classique) :

- $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0x^0 \underset{+\infty}{\sim} a_nx^n$ (avec $n\in\mathbb{N}$)
- $\sin x \underset{0}{\sim} x$
- $\tan x \underset{0}{\sim} x$
- $\cos(x)-1 \underset{0}{\sim} \frac{-x^2}{2}$
- $e^x-1 \underset{0}{\sim} x$
- $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

2) Propriétés

Propriété 1 (Transitivité) : Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$

Propriété 2 : Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors si $\lim_{x\to a}f(x)$ existe, alors $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}f(x)$

Propriété 3 : Si $\lim_{x\to a}f(x)=l$, $l\in\mathbb{R}^*$ alors $f \underset{a}{\sim} l$

Propriété 4 : $f \underset{a}{\sim} 0 \Leftrightarrow f$ est nulle au voisinage de a

Remarque : La réciproque de la propriété 2, n'est pas vrai en général

3) Opération

Propriété 1 (Multiplication) : Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $fh \underset{a}{\sim} gk$

Propriété 2 (inverse) : Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$

Propriété 3 (quotient) : Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h \underset{a}{\sim} k$ alors $\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{k}$

Exemples :

— $f(x)=\dfrac{3x^3+4x-5}{7x^2-8x+1}$ en $+\infty$

On sait que $3x^3+4x-5 \underset{+\infty}{\sim} 3x^3$

$7x^2-8x+1 \underset{+\infty}{\sim} 7x^2$

Donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3x^3}{7x^2}=\dfrac{3}{7}x$

— $f(x)=\dfrac{\sin(e^x-1)}{\left(\ln(1+x)\right)^2}$ en 0

On sait que $\left.\begin{array}{l}\sin x \underset{0}{\sim} x \\ e^x-1 \underset{0}{\sim} x\end{array}\right\}\sin x\left(e^x-1\right) \underset{0}{\sim} x^2$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \}\left(\ln(1+x)\right)^2 \underset{0}{\sim} x^2$

Donc $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2}=1$

Remarques :

- On ne peut pas ajouter ou soustraire des équivalents

Exemple :

$f(x)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{4}{x}\right)-1}{\ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)}$ en $+\infty$

On sait que $\cos x-1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

On fait donc un changement de variable : $X=\dfrac{4}{x}$ $\begin{array}{l} si\; x\to+\infty \\ X\to 0\end{array}$ $\cos X-1 \underset{0}{\sim} \dfrac{X^2}{2} \Rightarrow \cos\left(\dfrac{4}{x}-1\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{16}{x^2}=-\dfrac{8}{x^2}$

On sait aussi que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

Donc si $x\to 1$ $\begin{array}{l}\ln x=\ln\left(1+(x-1)\right) \quad x-1\to 0 \\ =\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X \;\; X=x-1\end{array}$ Donc $\ln(x) \underset{1}{\sim} x-1$

On peut donc faire un changement de variable : $X=\dfrac{x+2}{x-1}$ $X=\dfrac{x+2}{x-2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x}=1$

On peut donc dire $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-\dfrac{8}{x^2}}{\dfrac{4}{x}}=-\dfrac{8}{x^2}\times\dfrac{x}{4}=-\dfrac{2}{x}$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{x}\right)=0$

Chapitre 2 : Compléments sur la continuité et la dérivabilité

I) Continuité

1) Continuité en 1 point

Définition 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$

Soit f définie au voisinage de a et en a

On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Définition 2 : Soit f définie au voisinage de a mais pas en a.

Si f possède une limite **finie** l en a

Alors, il existe une fonction appelée prolongement par continuité de f en a.

On la note $\tilde{f}$, continue en a, définie par $\begin{array}{l} \forall x \neq a \ \ \tilde{f}(x) = f(x) \\ \tilde{f}(a) = l \end{array}$

Exemple :

Soit f définie sur $[0;4[\cup]4;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \dfrac{1}{4}$

Donc $\forall x \in [0;4[\cup]4;+\infty[\ \ \tilde{f}(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

$\tilde{f}(4) = \dfrac{1}{4}$

2) Continuité sur un intervalle

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est défini en tout point de I, on dit que f est continue sur I.

Théorème 1 : Les fonctions obtenues par opérations algébriques ou par composition à partir des fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition.

3) Application de la continuité

Théorème 1 : Soit f, une fonction continue sur un segment fermé $[a;b]$.

Alors f est bornée et « atteint ses bornes » (possède un minimum et un maximum)

Corolaire : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

II) Fonction réciproques

1) Bijection

Définition 1 : Soit f, une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F. On dit que f est une bijection de E sur F si tout élément de F possède un unique antécédent par f dans E

Théorème 1 : Soit f, une bijection de E sur F. Alors, il existe une fonction unique appelé bijection réciproque de f, notée f^{-1}, fonction qui est définie sur F et qui est a velours dans E telle que

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f =$ fonction identité $\left(f(x) = x \right)$

Exemple :

$f = e^{x}$

$f^{-1} = \ln x$

$f^{-1} \circ f = e^{\ln x} = x$

$f \circ f^{-1} = \ln e^{x} = x$

Donc la fonction $\ln x$ est la fonction réciproque de la fonction e^{x}

2) Bijection continue

Théorème 1 : Toute fonction continue sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J est strictement monotone sur I est une bijection de I sur J. Par ailleurs, sa bijection réciproque est continue sur J et a même monotonie.

3) Exemple

- Fonction racine n-ième

Définition 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^{*}$, la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $x \mapsto x^{n}$ étant une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, elle possède une bijection réciproque appelée fonction racine n-ième $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

- Fonction arctangente

Définition 1 : La fonction $\tan$ étant une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, elle possède une bijection réciproque, appelée fonction arctangente, notée arctan, définie sur $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

III) Dérivabilité

1) Dérivabilité en un point

Définition 1 : Soit f, une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a, s'il existe un réel l, appelé nombre dérivé de f en a, tel que $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Théorème 1 : Soit f, définie au voisinage de a. Alors, f est dérivable en a, de nombre dérivé $l \Leftrightarrow$ au voisinage de a, $f(x) \underset{a}{=} f(a) + l(x-a) + o(x-a)$

2) Dérivabilité sur un intervalle

Théorème 1 : Soit f, une fonction dérivable sur I à valeurs dans J. Soit g, une fonction dérivable sur J. La fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et est $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g' \circ f(x)$.

Exemple :

Soit f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(3x^2+1)$

$$\begin{matrix} x\mapsto 3x^2+1 \\ x\mapsto \cos x \end{matrix} \text{ dérivable sur } \mathbb{R}$$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=6x\left(-\sin x(3x^2+1)\right)$

Théorème 2 : Soit f, une bijection de I sur J, dérivable sur I, de dérive ne s'annulant pas sur I. Alors, f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Exemple :

$f(x)=e^x$

$f'(x)=e^x$

$f^{-1}=\ln x$

Donc $\ln'(x)=\dfrac{1}{e^{\ln x}}=\dfrac{1}{x}$

IV) Théorème des accroissements finis

Théorème 1 dit de Rolle : Soit f, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a)=f(b)$. Alors il existe au moins un $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Théorème des accroissements finis : Soit f, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe un réel $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \Leftrightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

V) Formules de Taylor

Théorème 1 (Lagrange) : Soit f, continue sur $[a,b]$ et n-fois dérivable (la dérivée est dérivable…) sur $[a,b]$ et n+1-fois dérivable sur $]a,b[$.

Alors, pour tout $x\in[a,b]$, il existe $c\in]a,x[$ tel que

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Théorème 2 (Young) : Soit f, continue sur $[a,b]$, n-fois dérivable sur $[a,b]$ et n+1-fois dérivable en a.

Alors pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\dfrac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\dfrac{(x-a)^n}{n!}f^n(a)+o(x-a)^n$

(o est un terme négligeable)

Exemples :

Soit f, définie par $f(x)=e^{2x}$. On va utiliser la formule de Taylor Young en a=0, à l'ordre 3.

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+o(x^3)$$
$$=1+2x++\frac{x^2}{2}\times 4+\frac{x^2}{6}\times 8+o(x^3)$$
$$=1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+o(x^3)$$

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3}$ grâce à précédemment, on peut déterminer :

$$\frac{1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+o(x^3)-1-2x-2x^2}{x^3}\Leftrightarrow\frac{\frac{4x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}\Leftrightarrow\frac{4}{3}+o(1)$$

Chapitre 3 : Etude locale et asymptotique

I) Développements limité

1) Définition et existence

Définition 1 : Soit f, une fonction que l'on suppose définie sur un voisinage V_a du réel a. On dit que que la fonction f possède un développement limité à l'ordre n en a si il existe un polynôme P_n de degré n au plus tel que si $P_n(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+..a_n(x-a)^n$.

Alors, pour tout $x\in V_a$, $f(x)=P_n(x)+o(x-a)^n$.

$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...a_n(x-a)^n+o(x-a)^n$

$f(a)=a_0$

Exemples :

- Tout polynôme possède un développement limité à importe quel ordre, en n'importe quel point.
- Quelque soit $x\neq 1$:

$$1+x+x^2+x^3+...+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}$$
$$\Leftrightarrow\qquad \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+\frac{x^{n+1}}{x+1}$$

Or, en 0, $x^{n+1}=o(x^n)\Leftrightarrow\dfrac{x^{n+1}}{1-x}=o(x^n)$

Donc en 0 : $\dfrac{1}{1-x}=\underbrace{1+x+x^2+...+x^n+o(x^n)}_{développement\ limité\ à\ l'odre\ n\ de\ \frac{1}{1-x}\ en\ 0}$

Théorème 1 : Soit f, définie sur V_a :

- Le développement limité à l'ordre 0 de f en a existe $\Leftrightarrow f(x)=f(a)+o(1)\Leftrightarrow f$ continue en a.
- Le développement limité à l'ordre 1 de f en a existe $\Leftrightarrow f(x)=f(a)+a_1(x-a)+o(x-a)\Leftrightarrow f$ dérivable en a et $a_1=f'(a)$
- Si f n-fois dérivable sur V_a, alors le développement limité à l'ordre n de f en a existe.

2) Propriétés

- Si f possède un développement limité, celui-ci est unique.
- Si f est paire (ou impaire) et possède un développement limité, alors sa partie régulière est paire (ou impaire).

Il faut connaitre les développements limités classiques en 0 :

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(2^{n+1}\right)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

3) Détermination d'un développement limité

a) Par changement de variable

Faisons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\ln(1+4x)$

Posons $X = 4x$

Si $x \to 0$ alors $X \to 0$

Donc $\ln\left(1+X\right) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o\left(X^3\right)$

$$\ln\left(1+4x\right) = 4x - 8x + \frac{64x}{3} + o\left(x^3\right)$$

Par addition

Faisons le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sin x + e^{x^2}$

$DL_4\left(0, \sin x\right) = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)$

Posons $X = x^2$

$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + o\left(X^4\right)$

Donc $e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

Le développement limité à l'ordre 4 est donc $1+x+x^2-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)$

Par multiplication

Faisons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\left(1+3x-x^2\right)\sqrt{1+2x}$

Posons $X=2x$

$$\sqrt{1+X}=(1+X)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}X+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}X^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}X^3+o\left(X^3\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+2x}=1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)$$

Donc $f(x)=\left(1+3x-x^2\right)\left(1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o\left(x^3\right)\right)$

$$=1+x+3x+\frac{1}{2}x^2+3x^2-x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^3-x^3+o\left(x^3\right)$$

$$=1+4x+\frac{3}{2}x^2-2x^3+o\left(x^3\right)$$

Par composition

Faisons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $e^{\sin x}$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$$

Donc $f(x)=e^{x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)}$

Posons $X=x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)$

$$e^X=1+X+\frac{X^2}{2!}+\frac{X^3}{3!}+o\left(X^3\right)$$

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)$$

Par division

Faisons le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan x$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right)}$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o\left(x^5\right)\times\frac{1}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right)}$$

Posons $X=\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \times \frac{1}{1+X}$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] \times \left[1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5 + o(X^5)\right]$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] \times \left[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5)\right]$$

Donc $\tan x = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^5}{24} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120}$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

b) Par division suivant les puissances croissantes

A Travailler

Par dérivation

$$DL_5(0, \ln(1+x)) : \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

Par integration :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$DL_6\left(0, \frac{1}{1+x^2}\right) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$$

$$\int_0^x \arctan'(t)\,dt = [\arctan(t)]_0^x = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x)$$

$$= \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - t^6 + o(x^7)$$

$$\left[t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right]_0^x = o(x^7)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$$

II) Application

2) Etude locale d'une fonction

Soit f, définie par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^{2x} - 1}$

Etude locale de f en 0.

On fait le $DL_2(0, f(x))$

$DL_2\left(0, \ln(1+x)\right) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$

$DL_2\left(0, e^x\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o\left(x^2\right)$

$DL_2\left(0, e^{2x}\right) = 1 + 2x + 2x^2 + o\left(x^2\right)$

Ainsi $f(x) = \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{2x + 2x^2 + o\left(x^2\right)}$

Par division : $\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + o(x)$

Or, on obtient un développement limité à l'ordre 1 !
On doit donc un développement limité à l'ordre 3 de nos sous-fonctions :

$DL_3\left(0, \ln(1+x)\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$

$DL_3\left(0, e^{2x}\right) = 1 - 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + o\left(x^3\right)$

Par division, on obtient donc $DL_2\left(f(x)\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{7}{12}x^2 + o\left(x^2\right)$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$

Equation de la tangente en 0 : $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x$

$\frac{7}{12}x^2 > 0$, la courbe de f est situé au dessus de la tangente.

3) Etude asymptotique d'une fonction

Développement asymptotique d'une fonction :

Soit $f(x) = \left(x^2 + 3x - 2\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

A l'infini, on doit se ramener à un problème en 0.

On va donc poser $X = \frac{1}{x}$ car si $x \to \infty$ $X \to 0$

$$\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+o\left(X^2\right)$$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}+o\left(x^{-2}\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=\left(x^2+3x-2\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$=x-\frac{1}{2}+o(1)+3-\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x+\frac{5}{2}-\frac{7}{2x}+\frac{1}{x^2}+o(1)$$

$$=x+\frac{5}{2}+o(1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}=+\infty$$

Equation de l'asymptote : $y=x+\frac{5}{2}$

Exemple de développement limité en 1 :

$DL_3\left(1,e^{2x}\right)$

Posons $h=x-1$

Si $x=1 \quad h\to 0$

$e^{2x}=e^{2(h+1)}=e^{2h+2}$

$DL_3\left(0,e^{2h+2}\right)=DL_3\left(0,e^2\times e^{2h}\right)$

Posons $X=2h$ si $h\to 0\, X\to 0$

$$e^{2h}=1+2h+2h^2+\frac{4}{3}h^3+o\left(h^3\right)$$

$$e^{2x}=e^2\left(1+2(x-1)+2(x-1)^2+\frac{4}{3}(x-1)^3+o(x-1)^3\right)$$

$$=e^2+2e^2(x-1)+2e^2(x-1)^2+\frac{4}{3}e^2(x-1)^3+o(x-1)^3$$

Chapitre 4 : Intégration

III) Intégrale d'une fonction continue

1) Lien entre intégrale et primitive

Théorème 1 : Soit f, continue sur $[a,b]$.

La fonction F, définie sur $[a,b]$ par $\forall x \in [a,b]$ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a,b]$

Conséquence :

Si f est continue sur $[a,b]$ et si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

Exemples de recherches de primitives :

On notera F une primitive de f.

① $f(x)=4x^7-8x^3+3x-2$

$$F(x)=\frac{4}{8}x^8-\frac{8}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-2x+k$$

② $f(x)=x\left(3x^2+1\right)^{2015}$

On cherche à obtenir une fonction de la forme $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$

Donc $f(x)=\dfrac{1}{12096}2016\times 6x\left(3x^2+1\right)^{2015}$

Donc $F\left(x\right)=\dfrac{1}{12096}\left(3x^2+1\right)^{2016}$

③ $f(x)=\dfrac{4x^3-2x+1}{x^4-x^2+x+3}$

La fonction est de la forme $\left(\ln|u|\right)'=\dfrac{u'}{u}$

Donc $F\left(x\right)=\ln\left|x^4-x^2+x+3\right|$

④ $f(x)=\dfrac{4}{(2x+1)^3}$

On cherche a obtenir une fonction de la forme $\left(u^n\right)'=nu'u^{n-1}$

Donc $f(x)=-1\times-2\times 2(2x+1)^{-3}$

Donc $F(x)=-(2x+1)^{-2}$

$$=-\frac{1}{(2x+1)^2}$$

⑤ $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+1}{x}$

$=3x+2+\dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow F(x)=\dfrac{3}{2}x^2+2x+\ln x+k$

⑥ $f(x)=xe^{3x}$

$=\dfrac{x}{3}\times 3e^{3x}$ Impossible de mettre sous la forme $\left(e^u\right)'=u'e^u$

2) Calcul d'intégral

Théorème 1 : Formule de l'intégration par partie

Soit u et v, 2 fractions dérivables, de dérivées continues sur $\left[a,b\right]$ alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exemples :

$I=\int_0^1 xe^{3x}dx$

$\Rightarrow I=\left[\dfrac{1}{3}xe^3x\right]_0^1-\dfrac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}dx=\left[\dfrac{1}{3}xe^3x\right]_0^1-\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1$

$=\left[\dfrac{1}{3}e^{3x}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\right]_0^1=\dfrac{2}{9}e^3+\dfrac{1}{9}$

$J=\int_1^e x^2\ln(x)dx$

$\Rightarrow J=\left[\dfrac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\dfrac{1}{3}\int_1^e x^2=\left[\dfrac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_1^e$

$=\left[\dfrac{1}{3}x^3\left(\ln x-\dfrac{1}{3}\right)\right]_1^e=\dfrac{2}{9}e^3+\dfrac{1}{9}$

$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2x)\cos(3x)dx$

Plusieurs façons de procéder :

a) Utilisation de formules trigonométrique

$\sin(a)\cos(b)=\dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$

$\sin(a)\sin(b)=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)-\cos(a-b)\right)$

$\cos(a)\cos(b)=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)+\cos(a+b)\right)$

Donc $\sin(2x)\cos(3x)=\dfrac{1}{2}\left(\sin(5x)+\sin(-x)\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sin(5x)-\sin x\right)$

$\Rightarrow K=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(5x)-\sin x\right)dx=\dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{5}\cos(5x)+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{4}{5}\right)=-\dfrac{2}{5}$

b) Par linéarisation

Grâce aux formules d'Euler $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$

Donc : $\sin(2x)\cos(3x) = \dfrac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2} \times \dfrac{e^{i3x}+e^{-3x}}{2i}$

$$= \frac{e^{i5x}+e^{-ix}-e^{ix}-e^{-i5x}}{4i}$$

$$= \frac{e^{i5x}-e^{-i5x}}{4i} - \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{4i}$$

$$= \frac{2i\sin(5x)}{4i} - \frac{2i\sin x}{4i} = \frac{1}{2}\sin(5x) - \frac{1}{2}\sin x$$

Il ne reste plus qu'à intégrer…

c) Par double intégration par partie

On choisi $u(x)$ et $v(x)$:

$u(x) = \sin(2x) \qquad u'(x) = 2\cos(2x)$

$v(x) = \dfrac{1}{3}\sin(3x) \qquad v'(x) = \cos(3x)$

Donc

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(3x)\,dx = \left[\frac{1}{3}\sin(2x)\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(3x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\sin(2x)\sin(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}\cos(2x)\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{9}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(3x)\,dx$$

$$K = -\frac{2}{9} + \frac{4}{9}K \iff \frac{5}{9}K = -\frac{2}{9} \iff K = -\frac{2}{5}$$

Théorème 2 : Formule de changement de variable

Soit φ, une fonction dérivable sur $[a,b]$, de dérivée continue. Soit f, une fonction continue sur $[\varphi(a),\varphi(b)]$.

On a : $\displaystyle\int_a^b f\circ\varphi(x)\times\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$

Exemples :

$I = \displaystyle\int_0^1 \left(x^2\sqrt{x+1}\right)dx$ Posons : $t = \sqrt{x+1}$, $t^2 = \sqrt{x+1}$ $\qquad x = t^2 - 1$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t \iff dx = 2t\,dt$

$= \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \left(t^2-1\right)^2 2t\,dt$

Si $x = 0 \quad t = 1$

Si $x = 1 \quad t = \sqrt{2}$

Donc : $I=\int_{1}^{\sqrt{2}} 2t^2\left(t^2-1\right)^2 dt$

$$=\int_{1}^{\sqrt{2}} 2t^6-4t^4+2t^2dt$$

$$=\left[\frac{2}{7}t^7-\frac{4}{5}t^5+\frac{2}{3}t^3\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$J=\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

Posons : $x=\tan\theta$ donc $\theta=\arctan x$

$$\frac{dx}{d\theta}=1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow dx=\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta$$

Donc $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\left(1+\tan^2\theta\right)^2}\left(1+\tan^2\theta\right)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\, d\theta$

Or $\cos^2=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$

$$=\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2}{4}$$

$$=\frac{2\cos(2\theta)+2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\cos(2\theta)+\frac{1}{2}$$

Annexe 3 : Calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle (Décomposition en éléments simples)

Exemple 1 :

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x}dx$$

$$=\int_1^2 x+3+\frac{1}{x}dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+3x+\ln(x)\right]_1^2=\frac{9}{2}\ln 2$$

Exemple 2 :

$$I=\int_2^3 \frac{3x^3+4x-5}{x^2+x}dx$$

Par division euclidienne, on obtient :

$$I=\int_2^3 3x-3+\frac{7x-5}{x^2+x}$$

$$=\int_2^3 3x-3+\frac{7x-5}{x(x+1)}$$

$$=\int_2^3 3x-3+\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}\right)$$

$$=\int_2^3 3x-3+\left(A+\frac{Bx}{x+1}\right)=\int_2^3 3x-3+\left(\frac{A(x+1)}{x}+B\right)$$

En remplaçant x par 0 :
$A=-5$

En remplaçant x par -1 :
$B=12$

Donc $I=\int_2^3 3x-3-\frac{5}{x}+\frac{12}{x+1}$

Exemple 3 :

$$I=\int_{-2}^{-1} \frac{3}{x(x-1)^2}dx$$

(on donne toutes les valeurs possibles de la puissances au dénominateur)

$$=\int_{-2}^{-1} \frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}dx$$

On multiplie tout par x.
On fait ensuite tendre x vers 0. Ce qui permet d'éliminer le terme en B et le terme en C.
On trouve alors $A=3$

On reviens à l'expression initiale et on multiplie ensuite tout $(x-1)^2$.
On fait alors tendre x vers 1. Ce qui permet d'éliminer le terme en A et le terme en C.
On trouve alors $B=3$.
Pour terminer, il ne reste plus qu'à remplacer A et B par leurs valeurs et déterminer la valeur de C.

Donc :

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{3}{x}+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{3}{x-1}dx$$

$$=\left[3\ln|x|-\frac{3}{x-1}-3\ln|x-1|\right]_{-2}^{-1}$$

$$=\frac{3}{2}-3\ln 2-3\ln 2-1+3\ln 3=\frac{1}{2}-6\ln 2+3\ln 3$$

Exemple 4 :

$$I=\int_{1}^{2}\frac{x^4+x-1}{x^3+x}dx$$

Par division euclidienne :

$$I=\int_{1}^{2}x+\frac{x^2+x-1}{x^3+x}dx$$

Ensuite :

$$I=\int_{1}^{2}x+\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}dx$$

Par la méthode vu précédemment (on multiplie tout par x) :

$A=-1$

Puis, en réduisant au même dénominateur, on trouve $B=0$ et $C=1$

Donc :

$$I=\int_{1}^{2}x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\ln x+\arctan(x)\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\ln 2+\arctan 2-\frac{\pi}{4}$$

Exemple de décomposition :

$$I=\frac{3x^7-8x^5+x^2-1}{x(x+3)^2(x^2+4)(x^2+x+1)^2(x-5)^2}$$

On fait la décomposition den éléments simples :

$$\left(\frac{\alpha}{(x-a)^n}\rightarrow\frac{A}{(x-a)^1}+\ldots+\frac{B}{(x-a)^n}\qquad et\qquad \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^n}\rightarrow\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^1}+\ldots+\frac{Cx+D}{(x^2+ax+b)^n}\right)$$

Donc :

$$I=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-5)^2}+\frac{C}{x-5}+\frac{D}{(x+3)^2}+\frac{E}{x+3}+\frac{Fx+G}{x^2+4}+\frac{Hx+I}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Jx+K}{x^2+x+1}$$

Méthodes de calcul d'intégral (résumé) :

① On cherche une primitive simple

② Sinon, on cherche à transformer la fonction

- Fraction rationnelle → décomposition en éléments simples
- Produit de sinus et de cosinus → Linéarisation

③ L'intégration par partie

- Polynômes $\times$ exponentiel
- Polynômes $\times$ sinus/cosinus
- Polynômes $\times$ ln

④ Changement de variables

- Racines carrées
- Cas particuliers

Annexe 4 : Equations différentielles

Voir annexe

Chapitre 5 : Series numériques

I) Généralités

1) Convergence d'une série

Définition 1 : On considère une suite $(Un)_{n\geq n_0}$ On appelle suite des sommes partielle associées à la suite $(Un)_{n\geq n_0}$, la suite $(Sn)_{n\geq n_0}$ définie par :

$$\forall n \geq n_0 \qquad Sn = Un_0 + Un_1 + \ldots + Un = \sum_{k=n_0}^{n} Un_k$$

Définition 2 : Si la suite $(Sn)_{n\geq n_0}$ converge vers un réel l on dit que la série de terme général Un est convergente et a pour somme l.

On écrit alors $\sum_{k=n_0}^{+\infty} Uk = l$

Sinon, on dit que la série de terme général Un diverge.

Propriété 1 : Si la série de terme général Un converge, alors la limite $\lim_{n\to\infty} Un = 0$

Conséquence : Si $\lim_{n\to\infty} Un \neq 0$ alors série de terme générale Un diverge.

Exemples :

① Series géométriques

$q \in \mathbb{R}$ et $q \neq 1$ la suite de terme générale $\left(q^n\right)_{n\geq 0}$

$$Sn = \sum_{k=0}^{n} Uk = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

3 cas :

- $q \leq 1$, q^n n'a pas de limite, donc la suite de terme générale diverge.
- $q > 1$, $\lim_{n\to\infty} q^n = +\infty$, donc $\lim_{n\to\infty} Sn = +\infty$, la suite de terme générale diverge
- $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} Sn = \frac{1}{1-q}$, donc la série de time générale converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

② Séries « rationnelles »

Suite de terme générale Un où $Un \geq 1$ $Un = \frac{1}{n(n+1)}$

Donc $\forall n \geq 1$, $Sn = \sum_{k=1}^{n} Uk = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$$\forall n \geq 1 \; Un = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

On trouve $Un=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$$Sn=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

On pose $i=k+1$

$$Sn=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i}$$
$$=\cancel{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}}+1-\left(\cancel{\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}}+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

③ Série harmonique

Série de terme générale $\frac{1}{n}$

$\forall_{n\geq 1} Un=\frac{1}{n}\qquad Sn=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$

$$Sn-1+\frac{1}{n+1}\leq\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx\leq Sn$$

$$Sn\leq\int_{A}^{n+1}\frac{1}{x}dx+1-\frac{1}{n+1}$$

Donc : $\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx\leq Sn\leq\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx+1-\frac{1}{n+1}$

$$[\ln x]_1^{n+1}\leq Sn\leq[\ln x]_1^{n+1}+1-\frac{1}{n+1}$$

Donc : $\ln(n+1)\leq Sn\leq\ln(n+1)+1-\frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty\qquad\lim_{n\to\infty}Sn=+\infty$. La suite de terme général de $\frac{1}{n}$ diverge

1.2.Absolue convergence

Définition 1. 2. 1 : On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Propriété 1. 2. 1 : Si une série est à termes de signe constant à partir d'un certain rang, alors il y a équivalence entre absolue convergence et convergence.

Propriété 1. 2. 2 : Si une série est absolument convergente, elle est convergente. Remarque importante : La réciproque est fausse.

Définition 1. 2. 2 : Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est appelée série semi-convergente.

3) Exemples de séries classiques

1 : Les series géométriques :

Si $|q|$ <1, la série de terme général q^n converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

2 : Les séries de Riemann

On appelle série de Riemann, toute série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

On sait que la série de terme générale $\frac{1}{n^\alpha}$ converge est équivalent à $\alpha > 1$

3 : Séries exponentielles

$\forall a \in \mathbb{R}$, la série générale $\frac{a^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$

II) Séries à termes positifs

1) Critères de l'équivalence

Si $Un \underset{+\infty}{\sim} Vn$ alors la série de terme générale Un et la série de terme générale Vn ont la même nature.

Exemple : Soit la série de terme générale Un avec $Un = \frac{1}{n(n+1)}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad Un > 0$

Alors $Un \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge, donc la série dee terme générale Un converge.

2) Critères de comparaison

Si à partir d'un certain rang $Un \leq Vn$ et si la série de terme général Vn converge, alors la série de terme générale Un converge.

Exemple :

Soit la série de terme générale Un avec $Un = \frac{n + \cos n}{3n^3 + n - 1}$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \cos n \leq 1$

Donc $n + \cos n \leq n + 1$

Et $Un \leq \frac{n+1}{3n^3 + n - 1}$

Or, $\frac{n+1}{3n^3 + n - 1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3n^2}$

Donc la série de terme générale $\frac{1}{3n^2}$ converge, la série de terme générale $\frac{n+1}{3n^3+n-1}$ converge, et la série de terme générale Un converge.

3) Critère de négligeabilité

Si en $+\infty$, $Un = o(Vn)$, et si la série de terme général Vn converge, alors la série de terme général Un converge.

Exemple :

Série de terme général $\frac{ln(n)}{n^3}$

n est négligeable devant $\ln$ en $+\infty$. Donc $\ln(n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge. Donc la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^3}$ converge.

Exemple 2 :

Série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^2}$:

En$+\infty$ $\ln(n) = o(n) \Rightarrow \frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

On va donc prendre une autre puissance :

$$\ln(n) = o\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow \frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Or, la série de terme général $\frac{\ln(n)}{n^2}$ converge.

4) Utilisation des développements limités

La série de terme générale $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1$.

Posons $X = \frac{1}{n}$. Si $n \to +\infty$, $X \to 0$

$$\sin X = X - \frac{X^3}{6} + o\left(X^3\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\Rightarrow n\sin\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = 1 - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc, la série de terme général $-\dfrac{1}{6n^2}$ converge, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge.

Donc $\left(n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)$ converge.

5) Regle de Cauchy

Soit $k=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{Un}$

Si $k>1$, la série de terme général Un diverge
Si $k<1$, la série de terme général Un converge
Si $k=1$, on ne sait pas.

La série de terme général $Un=\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

$$\sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n}}=\left[\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{\frac{1}{n}}=\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[n]{\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n}}=\frac{1}{2}<1$$

6) Règle d'Alembert

Soit $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Un+1}{Un}$

Si $k>1$, la série de terme général Un diverge
Si $k<1$, la série de terme général Un converge
Si $k=1$, on ne sait pas.

Série de terme général $\dfrac{3n^2+2}{n!}\times 3^n$

$$Un\underset{+\infty}{\sim}\frac{3n^2\times 3^n}{n!}=\frac{n^2\times 3n^{n+1}}{n!}$$

$$\frac{Un+1}{Un}\underset{+\infty}{\sim}\frac{(n+1)^2\times 3^{n+2}}{(n+1)!}\times\frac{n!}{n^2\times 3^{n+1}}=\frac{(n+1)^2}{n^2}\times\frac{3^{n+2}}{3^{n+1}}\times\frac{n!}{(n+1)!}\underset{+\infty}{\sim}\frac{n^2}{n^2}\times 3\frac{1}{n+1}$$

$$\underset{+\infty}{\sim}\frac{3}{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{Un+1}{Un}=0<1$$

Donc, la série de terme général Un converge.

III) Calcul de somme

1) Séries rationnelles

Série de terme général $Un = \dfrac{3}{(n+1)(n+4)}$

$Un \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^2}$, la série de terme général $\dfrac{3}{n^2}$ converge, donc Un converge.

$$Sn = \sum_{k=0}^{n} Uk$$

$$Un = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+4} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+4}$$

$$Sn = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4}\right) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}}_{i=k+1} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+4}}_{i=k+4} = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i} - \sum_{i=4}^{n+4}\frac{1}{i}$$

$$= \sum_{i=4}^{n+1}\frac{1}{i} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\sum_{i=4}^{n+1}\frac{1}{i} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4}\right)$$

$$= 1 + + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} = \frac{11}{6}$$

Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} Sn = \dfrac{11}{6}$

2) Séries géométriques

Si $-1 < q < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

La série de terme général $Un = \left(n^2 + 3n - 5\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$$Un \underset{+\infty}{\sim} n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{Un+1}{Un} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n^2\left(\frac{2}{3}\right)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} \times \frac{2}{3}$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{Un+1}{Un} = \dfrac{2}{3} < 1$

Donc d'après la règle d'Alembert, la série de terme général Un converge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+3n-5\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n(n-1)+4n-5\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n+4\sum_{n=0}^{+\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{q}^{n-2}}_{\frac{2}{(1-q)^3}}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+4\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}n\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{q}^{n-1}}_{\frac{1}{(1-q)^2}}\times\frac{2}{3}-5\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{q}^{n}}_{\frac{1}{1-q}}$$

3) Séries exponentielles

$$\forall a\in\mathbb{R}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n!}=e^a$$

Série de terme générale $Un=\dfrac{2n^2+3n+1}{(n!)2^n}$

$$Un\underset{+\infty}{\sim}\frac{2n^2}{n!\times 2^n}=\frac{n^2}{n!\times 2^n}$$

$$\frac{Un+1}{Un}\underset{+\infty}{\sim}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!\times 2^n}\times\frac{n!\times 2^n}{n^2}\underset{+\infty}{\sim}\frac{n^2}{n^2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}=0$$

Donc d'après la règle d'Alembert, la série de terme général Un converge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}Un=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2+3n+1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n(n-1)+5n+1}{n!}$$

$$=2\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)}{n!}}_{nul\ pour\ 0\ et\ 1}\left(\frac{1}{2}\right)^n+5\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}}_{nul\ pour\ 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}$$

$$=2\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\substack{k=n-2\\ n=k+2}}+5\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\substack{k=n-1\\ n=k+1}}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} Un = 2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}}{k!} + 5\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{n!}$$

$$= 2\times\frac{1}{2}^{2}\times\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!} + 5\times\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{n!}$$

$$= e^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}} + e^{\frac{1}{2}} = 4e^{\frac{1}{2}}$$