EFREI L1 2008

ALGEBRE LINEAIRE

Travail d'autonomie et d'initiative

Sujet : Puissances de matrices

Vous trouverez ci-joint un article paru dans le numéro d'octobre-décembre 2007 de Tangente Sup – intéressante revue française de mathématiques de niveau « classes prépas ».

Vous réécrirez (en couleur noire) cet article en le simplifiant éventuellement et vous l'améliorerez en le complétant et en détaillant certains de ses aspects mathématiques. Vos adjonctions, qui devront être écrites en couleur bleue, peuvent être des définitions manquantes, des démonstrations, des calculs intermédiaires, des applications ou des exemples.

Vous travaillerez par équipe de 4 (exceptionnellement 3 si le découpage du groupe de TD en équipes de 4 n'est pas possible).
Pendant cette séance, vous prendrez connaissance de ce sujet et vous préparerez votre projet d'article. Dans les semaines qui suivent vous travaillerez plusieurs heures en équipe, ou en vous répartissant les tâches. Certaines notions indispensables à la compréhension de l'article seront exposées en cours pendant les semaines qui suivent : vous pourrez donc enrichir votre article au fur et à mesure ; certaines notions sont déjà connues et vous pouvez donc dès maintenant effectuer certains travaux de calcul ou d'explication.

En complément à ce travail d'équipe, vous effectuerez un calcul personnel de puissance de matrice, rendu sur feuilles manuscrites, avec tous les calculs intermédiaires avec trois chiffres significatifs au moins, de la matrice A^n où :

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} j_1+1 & j_2+2 \\ m_1+5 & m_2 \ +1 \end{pmatrix}$, où $j_1 j_2 m_1 m_2$ est votre jour et mois de naissance.

Vous me remettrez votre article le 23 mai, avec vos calculs personnels. Une présentation orale par équipe aura lieu du 5 au 10 juin environ. Cet exposé consistera en une présentation générale par le « chef d'équipe », que vous aurez choisi puis par un exposé par **chaque** membre de l'équipe (y compris le chef d'équipe) des adjonctions que vous aurez apportées à l'article (exposé de l'adjonction en principe par celui qui l'aura réalisée).
Considérez votre équipe comme étant en concurrence avec les autres équipes de votre promotion. Ne leur indiquez pas ce que vous avez fait. L'originalité et la difficulté de vos contributions seront fortement prises en compte.
Vous serez notés :
-pour une part collective pour votre équipe, sur la qualité de la rédaction de votre article, sur le choix des adjonctions par rapport à l'article initial, leur nombre, leurs difficultés et leurs originalités.
-pour une part individuelle, par la qualité de l'exposé oral, le respect du temps de parole, la difficulté des sujets exposés par chacun, et, pour le chef de l'équipe, par la qualité de la présentation générale.

*ci-joint un bulletin d'abonnement à Tangente Sup

par Hervé Lehning

Puissances de matrices

Le calcul de puissances de matrices est un exercice classique, proche de la diagonalisation. Des résultats généraux en facilitent l'approche. Parmi les applications, on trouve l'étude de la dynamique de certaines populations.

Pourquoi calculer les puissances d'une matrice ? Bien souvent, il s'agit d'étudier leur limite. Le problème est lié à l'étude de l'évolution de populations comme nous le voyons plus loin. Pour l'instant, intéressons nous à ce problème par pure curiosité intellectuelle. Une matrice carrée complexe A d'ordre p étant donnée, nous nous proposons de calculer ses puissances successives.

Le problème est simple si A est diagonalisable. Considérons alors ses valeurs propres comptées une seule fois chacune : $\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D, dont les éléments de la diagonale sont les valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité, telles que : $A = P\,D\,P^{-1}$. Par récurrence, nous montrons alors que : $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$ pour tout entier n.

La matrice D^n est diagonale. Ses éléments sont les puissances n-ièmes des valeurs propres comptées avec leurs ordres de multiplicité, ce que l'on peut écrire :

$$D^n = \lambda_1{}^n I_1 + \lambda_2{}^n I_2 + \ldots + \lambda_k{}^n I_k$$

où les matrices I_i sont des matrices diagonales dont les éléments non nuls sont égaux à 1. Nous en déduisons :

$$A^n = \lambda_1{}^n M_1 + \lambda_2{}^n M_2 + \ldots + \lambda_k{}^n M_k$$

où les M_i sont des matrices carrées non nulles que nous pouvons calculer à partir de P et de son inverse, méthode que nous éviterons, vu les calculs qu'elle implique.

Les puissances de matrices recèlent des secrets.

Calculer les coefficients

Il est préférable d'écrire les égalités obtenues pour n variant de 0 à $k - 1$. Nous obtenons ainsi un système de k équations à k inconnues qu'il est possible de résoudre effectivement si k est petit. Une autre méthode consiste à remarquer que, par combinaisons linéaires de ces égalités, si f est un polynôme, alors :

$$f(A) = f(\lambda_1)\,M_1 + f(\lambda_2)\,M_2 + \ldots + f(\lambda_k)\,M_k.$$

Il suffit alors de choisir f s'annulant en tous les points λ_i sauf en un seul pour déterminer les matrices M_i. Plus précisément, on introduit les polynômes interpolateurs de Lagrange :

$$f_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j},$$

on obtient : $M_i = f_i(A)$ d'où la formule :

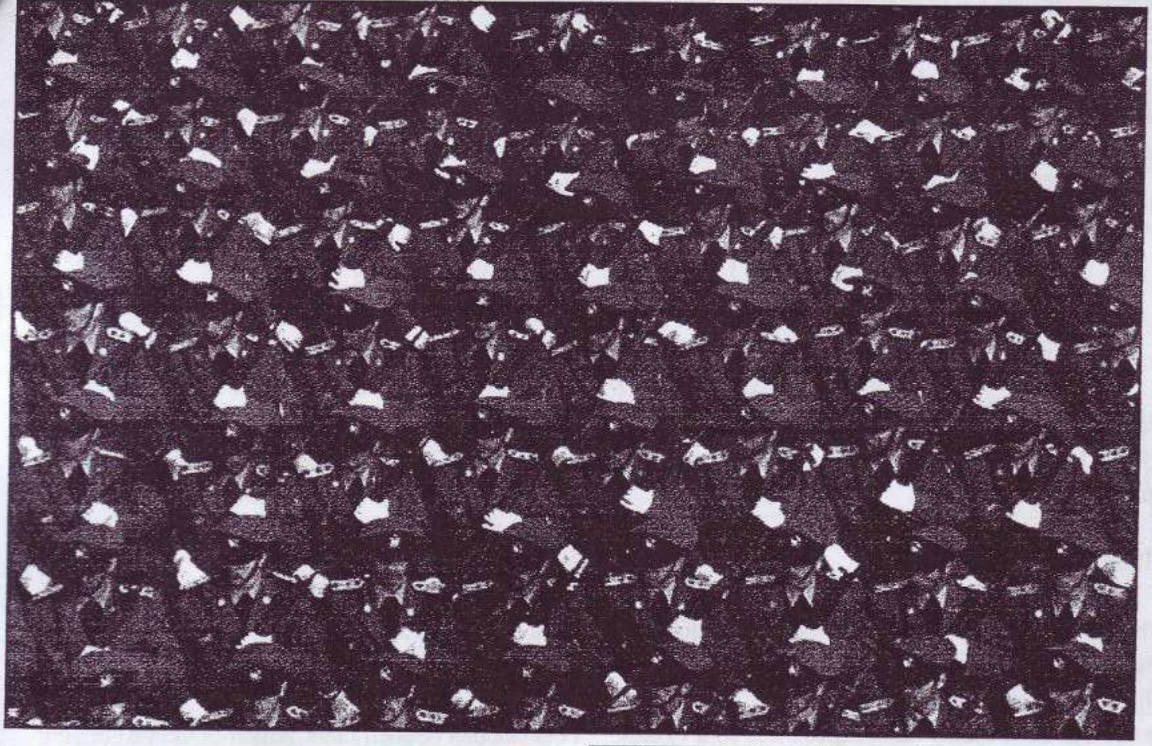
$$A^n = \lambda_1{}^n f_1(A) + \lambda_2{}^n f_2(A) + \ldots + \lambda_k{}^n f_k(A).$$

Cette dernière méthode est satisfaisante intellectuellement mais conduit à des calculs pénibles. Mieux vaut dans la pratique s'en tenir à la résolution d'un système (cf. encadré *Exemple de calcul*)).

Calculer les limites

Dans ce cadre général, la suite A^n tend vers la matrice nulle si tous les $\lambda_i{}^n$ tendent vers 0, c'est-à-dire si, et seulement si, toutes les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1. Ce résultat est conservé si A n'est pas diagonalisable.

La suite A^n a une limite non nulle si 1 est valeur propre et toutes les autres valeurs propres sont de



module strictement inférieur à 1. Si nous notons : $\lambda_1 = 1$, la matrice limite est alors M_1. Comme pour tout polynôme $f : f(A) = f(1)\,M_1 + f(\lambda_2)\,M_2 + \ldots + f(\lambda_k)\,M_k$, il suffit de considérer le quotient f du polynôme caractéristique par $(x-1)^m$ où m est la multiplicité de la valeur propre 1, pour obtenir : $M_1 = f(A)/f(1)$.
Ce résultat n'est pas conservé si A n'est pas diagonalisable comme le montre l'exemple de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puisque $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'a pas de limite.

Évolution de populations

Ce type de résultat est utile dans les questions d'évolution de populations. Les cas réels étant longs à exposer, prenons un cas fictif concernant les effectifs d'une entreprise. On peut imaginer le même type de problèmes si on étudie des populations animales.
Dans un pays imaginaire, l'armée comporte 113 100 personnes réparties dans cinq grades notés U, V, W, X et Y. L'évolution des effectifs de chaque grade se fait selon le schéma suivant, où le recrutement est égal aux départs vers l'extérieur :

Exemple de calcul

Considérons la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

où a est un paramètre non nul.
Son polynôme caractéristique est égal à :

recherche

$$-x^3 + 3x + 2 = -(x+1)^2(x-2).$$

La matrice a donc une valeur propre double (-1) et une valeur propre simple (2).
La matrice A + I est de rang 1 puisque ses lignes sont toutes proportionnelles au vecteur ligne $(1 \;\; a \;\; a^2)$ donc l'espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 2. Ceci implique que A diagonalisable.
D'après ce qui précède, il existe deux matrices M_1 et M_2 telles que :

$$A^n = (-1)^n M_1 + 2^n M_2.$$

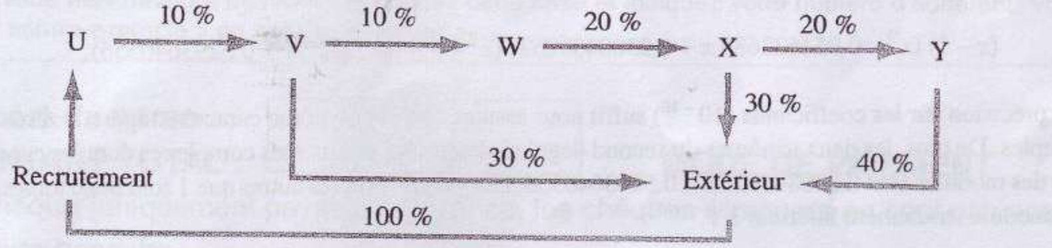
Ces deux matrices sont solutions du système :

$$M_1 + M_2 = I$$
$$-M_1 + 2M_2 = A.$$

On trouve M_2 en ajoutant les deux équations, M_1 s'en déduit immédiatement :

$$M_1 = \frac{2I - A}{3} \text{ et } M_2 = \frac{I + A}{3}.$$

On obtient : $A^n = \dfrac{2^n + 2(-1)^n}{3}\, I + \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}\, A.$



Évolution des carrières de l'armée, le recrutement est égal aux départs vers l'extérieur.

On note Z_n la matrice colonne constituée par les effectifs de ces cinq grades. L'évolution des carrières est résumée par l'égalité matricielle : $Z_{n+1} = A Z_n$ où A est la matrice carrée d'ordre 5 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 & 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on en déduit que : $Z^n = A^n Z_0$ pour tout n. L'évolution des effectifs dépend donc de la suite matricielle A^n.

Étude d'une matrice

Chaque colonne de A a pour somme 1, ce qui correspond à la stabilité des effectifs. Cette propriété implique que 1 est valeur propre de la transposée de A, le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 étant un vecteur propre associé.

Une matrice ayant même polynôme caractéristique que sa transposée, on en déduit que 1 est valeur propre de A. L'espace propre associé est le noyau de la matrice :

$$A - I = \begin{pmatrix} -0,1 & 0,3 & 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,1 & -0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & -0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & -0,4 \end{pmatrix}.$$

Son rang est égal à 4 donc l'espace propre associé est de dimension 1. Les quatre dernières lignes fournissent un vecteur propre simple :

$$U = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul effectif du polynôme caractéristique montre qu'il a quatre autres zéros simples, de module strictement inférieur à 1 (voir l'encadré *Calcul d'un polynôme caractéristique*). La théorie précédente est donc applicable : la suite A^n a une limite non nulle. Inutile de la calculer pour en déduire la limite de la population Z_n. Nous savons qu'elle existe et cela suffit ! Nous allons voir pourquoi.

Conséquence d'une existence

Notons L la limite de la suite Z_n. Par continuité, comme : $Z_{n+1} = A Z_n$, L vérifie la relation :

$$L = A L,$$

c'est-à-dire que L est un vecteur propre de A associé à 1.

L'espace propre en question étant de dimension 1, L est colinéaire à U.

Autrement dit, il existe un coefficient a tel que :

$$L = a U.$$

Pour calculer ce coefficient, remarquons que l'effectif de l'armée est constamment égal à 113 100. Comme celui de U est égal à 58, a est le quotient de ces deux nombres, soit 1 950.

La limite de l'effectif est donc :

$$L = \begin{pmatrix} 78\,000 \\ 19\,500 \\ 9\,750 \\ 3\,900 \\ 1\,950 \end{pmatrix}.$$

Ce type de raisonnement se retrouve dans certaines études de dynamiques des populations, où la transition entre une étape à la suivante peut être représentée matriciellement.

H. L.

Calcul d'un polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de A est égal à :

$$x^5 - 3,4\,x^4 + 4,54\,x^3 - 2,979\,x^2 + 0,9612\,x - 0,1222$$

qui se factorise en :

$$(x-1)\,(x^2 - 0,954628688\,x + 0,2308430252)\,(x^2 - 1,445371312\,x + 0,5293640556).$$

La précision sur les coefficients (10^{-10}) suffit pour assurer que le polynôme caractéristique a 5 zéros simples. De plus, les deux trinômes du second degré ci-dessus ont des racines complexes dont les carrés des modules sont 0,2308430252 et 0,5293640556. Les valeurs propres autres que 1 sont donc toutes de module strictement inférieur à 1.