DE Algebre Lineaire 2016

NI DOCUMENTS, NI MACHINES, NI TELEPHONES

Les 3 exercices sont totalement indépendants les uns des autres.

Toute affirmation sera justifiée par un calcul, une définition ou un théorème.

La note sera augmentée ou diminuée de 2 points suivant la rédaction.

Exercice 1. environ 10 pts

On considère les deux espaces vectoriels $\mathbb{R}^5$, avec sa base standard $B = (\varepsilon 1, \varepsilon 2, \varepsilon 3, \varepsilon 4, \varepsilon 5)$, et $\mathbb{R}^4$, avec sa base standard $C = (v1, v2, v3, v4)$ et l'application linéaire f de $\mathbb{R}^5$ vers $\mathbb{R}^4$, représentée dans ces bases par la matrice

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. f est-elle injective ?

b. Déterminer une base du noyau de f et la dimension de Ker(f).

c. Déterminer la dimension de Im(f).

d. Déterminer une base de Im(f).

e. Déterminer une solution de l'équation f(x)=$v1$; expliquer pourquoi ce n'est pas la seule (on ne demande pas de les trouver toutes).

Exercice 2. environ 12 pts

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, avec sa base standard $C = (v1, v2, v3, v4)$ et l'application linéaire g de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^4$, représentée dans cette base par la matrice

$$G=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer la matrice (relativement à la base standard) de g+2Id.

b. Montrer que les vecteurs $w1 = v1 - v2$, $w2 = v2 - v3$, $w3 = v3 - v4$ forment une base de Ker(g+2Id).

c. Déterminer la matrice (relativement à la base standard) de g-2Id.

d. Montrer que le vecteur w4=v1+v2+v3+v4 appartient à Ker(g-2Id).

e. Montrer que les vecteurs (w1,w2,w3,w4) forment une base de $\mathbb{R}^4$ que l'on désignera par C'.

f. Exprimer g(w1), g(w2), g(w3), g(w4) dans la base C'; en déduire la matrice qui représente g dans la base C'.

Exercice 3. environ 6 pts

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ et sa base standard $\mathcal{B} = (\alpha 1, \alpha 2, \alpha 3, \alpha 4, \alpha 5, \alpha 6)$; h désigne une application linéaire de $\mathbb{R}^6$ vers $\mathbb{R}^6$, non injective.

Pour tout entier positif k on désignera par h^k la composée $h \circ h \circ h .... \circ h$ (k fois)

a. Montrer que quel que soit l'entier k Ker(h^k)$\subset$Ker(h^{k+1})

b. Montrer que quel que soit l'entier k Im(h^{k+1})$\subset$Im(h^k)

c. Montrer que si pour un entier k Ker(h^k)=Ker(h^{k+1}) alors Im(h^{k+1})=Im(h^k).