Suites.

1 Définitions

1.1 Généralités

Définition 1.1. *Une suite (réelle) est une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soit* u *cette suite. On note* u_n *(plutôt que* $u(n)$ *l'image de l'entier* n *par* u.

On écrit : "la suite u", ou "la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$", ou "la suite $(u_n)_n$", ou "la suite (u_n)". L'écriture "la suite u_n" choque certains puristes (pas moi !

Définition 1.2. *La suite* u *est définie de façon explicite s'il existe une fonction* f *telle que pour tout entier* n

$$u_n = f(n)$$

La suite u *est définie par une relation de récurrence d'ordre 1 (on parle de suite récurrente d'ordre 1) si le terme* u_n *est défini à l'aide du terme qui le précède. Autrement dit, il existe une fonction* f *telle que*

$$u_n = f(u_{n-1})$$

Une telle suite n'est connue que lorqu'on a donné le terme initial u_0.

On peut généraliser à une suite récurrente d'ordre k *: On donne les* k *premiers termes, puis une relation de type*

$$u_n = f(u_{n-1}, \cdots, u_{n-k})$$

1.2 Croissance

Définition 1.3.

1. *Une suite* u *est dite* **croissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$. *On note* $u \uparrow$
2. *Une suite* u *est dite* **strictement croissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$. *On note* $u \uparrow\uparrow$
3. *Une suite* u *est dite* **décroissante** *si* $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$. *On note* $u \downarrow$
4. *Une suite* u *est dite* **strictement décroissante** *si* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$. *On note* $u \downarrow\downarrow$
5. *Une suite* u *est dite stationnaire si elle est croissante et décroissante, c'est à dire* $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$.

La croissance, la décroissance, etc peuvent n'avoir lieu qu'à partir d'un certain rang. Par exemple, on dira que la suite u *est croissante à partir d'un certain rang s'il existe un entier* n_0 *tel que :* $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$

1.3 Majoration, minoration

Définition 1.4.
1. *Une suite* u *est majorée s'il existe un réel* M *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
2. *Une suite* u *est minorée s'il existe un réel* N *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq N$.
3. *Une suite* u *est bornée si elle est majorée et minorée.*
4. *Une suite* u *est majorée en valeur absolue s'il existe un réel* M *tel que* $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. *Alors, on a* $0 \leq |u_n| \leq M$ *et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, -M \leq u_n \leq M$$

Autrement dit, une suite majorée en valeur absolue est bornée.

Définition 1.5. *Soient deux suite* u *et* v. *On suppose que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$$

On dit alors que la suite v *majore la suite* u, *et que la suite* u *minore la suite* v. *On note* $u \leq v$.

2 Limites.

Soit u une suite.

Définition 2.1.
1. *On dit que* u *tend vers 0 (quand* n *tend vers l'infini) si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n| \leq \varepsilon)$$

2. *On dit que* u *tend vers* l *(quand* n *tend vers l'infini) si la suite* $(u_n - l)_n$ *tend vers 0, à savoir :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$$

3. *On dit que* u *tend vers* $+\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq A)$$

4. *On dit que* u *tend vers* $-\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq A)$$

5. *On dit que u a une limite finie (quand n tend vers l'infini) s'il existe un réel l tel que la suite u tende vers l.*

Définition 2.2. *Une suite u est dite convergente si elle a une limite finie. Sinon, elle est dite divergente.*

Attention : une suite tendant vers l'infini est considérée comme divergente. Les deux façons de diverger sont donc

1. tendance vers $\pm\infty$
2. absence de limite, finie ou infinie.

Comment exprimer que la suite u ne tend pas vers le réel l ? comme ceci

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geq n, |u_p - l| > \varepsilon_0$$

3 Sous suites, ou suites extraites.

Définition 3.1. *Soit u une suite, et φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors, la suite v définie par*

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

est dite extraite de u ou sous suite de u.

Si une sous suite de u admet une limite (finie ou infinie), cette limite s'appelle une **valeur d'adhérence** *de la suite u.*

Les exemples les plus classiques sont

$$v_n = u_{2n}, \text{ et } w_n = u_{2n+1}$$

Théorème 3.1. *1. Si une suite a une limite, toute sous suite a la même limite.*

2. Si une suite a une sous suite de limite infinie, elle diverge.

3. Si une suite a deux valeurs d'adhérence distinctes (c'est à dire qu'elle arment deux sous suite de limite différente), elle diverge.

Exemple : La suite $u_n = (-1)^n$ diverge. En effet, la sous suite $u_{2n} = 1$ tend vers 1, et la sous suite $u_{2n+1} = -1$ tend vers -1.
La convergence d'une sous suite ne dit rien, a priori, sur la convergence de la suite. Toutefois, on a le résultat :

Théorème 3.2. *Soit u une suite, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Si v et w tendent vers la même limite l (finie ou non), alors u tend vers l.*

4 Algèbre.

Théorème 4.1. *Soient u et v deux suite ayant des limites finies respectives l et m. Alors*

1. $\lim(u+v) = \lim u + \lim v$
2. $\lim(uv) = \lim u \lim v$
3. *Si* $\lim v \neq 0$, $\lim(u/v) = \lim u / \lim v$

Théorème 4.2. *Soit u une suite.*

1. *Si u tend vers $\pm\infty$, $1/u$ tend vers $0^{\pm}$*
2. *Si u tend vers $0^{\pm}$, $1/u$ tend vers $\pm\infty$*

5 Lien avec la continuité

Théorème 5.1. *Soit u une suite de limité finie l, et f est une fonction continue en l. alors*

$$\lim_n f(u_n) = f(\lim_n u_n) = f(l)$$

6 Contagion : les gendarmes.

Théorème 6.1. *Soient u, v, w trois suites.*

1. *On suppose $w \leq u \leq v$. Si v et w tendent vers une limite l (finie ou non), alors u tend vers l.*
2. *Si $u \leq v$, et si u tend vers $+\infty$, alors vu tend vers $-\infty$.*
3. *si $|u| \leq v$, et si v tend vers 0, alors u tend vers 0.*

7 Critères de convergence.

Théorème 7.1.

1. *Une suite croissante et majorée converge.*
2. *Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$*
3. *Une suite décroissante et minorée converge.*

4. *Une suite décroissante et non minorée tend vers* $-\infty$

Commentaire : une suite monotone a donc toujours une limite, finie ou non. Si la suite est croissante, soit elle a une limite finie, soit elle tend vers $+\infty$.

Définition 7.1. suites adjacentes. *Deux suite u et v sont dites adjacentes, si*

1. *l'une croit.*
2. *l'autre décroit*
3. *La différence $v - u$ tend vers 0*

Théorème 7.2. *Soient u et v deux suite adjacentes. On suppose que u croit et que v décroit. Alors*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$
2. *Je dirais même plus :* $\forall n, p \in \mathbb{N}, u_n \leq v_p$
3. *Les deux suite u et v convergent.*
4. *Je dirais même plus : elles convergent vers la même limite.*

8 Suite récurrente d'ordre 1

On étudie la suite u donnée par u_0 et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

On suppose que f est continue d'un certain intervalle I dans lui même.

On appelle point fixe de f tout réel c de I tel que $f(c) = c$.

Théorème 8.1. *Si la suite u_n converge, ce ne peut être que vers un point fixe.*

8.1 Cas où f est croissante.

Théorème 8.2. *Si f est croissante, la suite u est* **monotone.**

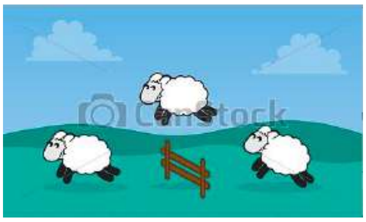
1. *Si $u_1 \geq u_0$, elle est croissante.*
2. *Si $u_1 \leq u_0$, elle est décroissante.*

Si, de plus, I est borné, la suite est bornée, donc convergente

Théorème 8.3. *Théorème du saute mouton*

Soit c_1 et c_2 deux points fixes successifs de f. Si on a $c_1, \leq u_0 \leq c_2$, alors, pour tout n, $c_1 \leq u_n \leq c_2$.

Autrement dit : pas de saute mouton au dessus d'un point fixe. La limite de la suite est le point fixe le plus proche compatible avec la croissance de f.



8.2 Cas où f est décroissante.

C'est plus compliqué. Posons $g = f \circ f$ Elle est croissante. Introduisons les sous suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

On a $v_{n+1} = g(v_n)$, et $w_{n+1} = g(w_n)$, donc

Théorème 8.4.

1. *Les deux suite v et w sont monotones, de monotonie opposée.*
2. *si $u_2 \geq u_0$, la suite u est croissante, et la suite v est décroissante.*
3. *si $u_2 \leq u_0$, la suite u est décroissante, et la suite v est croissante.*
4. *Si u et v convergent, ce ne peut être que vers un point fixe de g.*
5. *La fonction f a au plus un point fixe. Ce point fixe est aussi un point fixe de g. Si les suites v et w tendent vers le point fixe de f, la suite u tend vers ce point fixe.*

9 Comparaisons.

Définition 9.1. *Soient u et v deux suites.*

1. *On dit que v est négligeable devant u (et on note $v_n = o(u_n)$, lu petit o de u_n), s'il existe une suite ε_n de limite 0 telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \varepsilon_n u_n$$

   Si la suite v ne s'annule pas, cela équivaut à

$$\lim_n \frac{v_n}{u_n} = 0$$

2. *On dit que v est bornée devant u (et on note $v_n = O(u_n)$, lu grand O de u_n), s'il existe une suite M_n dbornée telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = M_n u_n$$

   Si la suite v ne s'annule pas, cela équivaut à $\lim_n \frac{v_n}{u_n}$ bornée.
3. *On dit que v et u sont équivalentes (on note $v_n \sim u_n$ s'il existe une suit ε_n de limite 0 telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = (1 + \varepsilon_n) u_n$$

   Si la suite v ne s'annule pas, cela équivaut à

$$\lim_n \frac{v_n}{u_n} = 1$$

Commentaires :
1. Si deux suites ont la même limite, elles sont équivalentes. Mais deux suites peuvent être équivalentes sans avoir de limite.
2. Si une suite tend vers une limite l, elle est équivalente à cette limite, **sauf si cette limite est 0 ou** $\pm\infty$.
3. Si deux fonctions vérifient en un point a

$$\lim_a f/g = 1$$

   alors, pour toute u suite tendant vers a, on a $f(u_n) \sim g(u_n)$.

Exemple.
On sait que $\lim_0 \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, donc $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$.

Soit $P(n)_n$ une suite polynomiale en n, avec $P(n) = a_n x^n + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0$. Alors

$$P(n) \sim a_n x^n$$

autrement dit, la suite P est équivalente à son terme de plus haut degré.

De même une fraction rationnelle en n est équivalente au quotient de ses termes de plus haut degré.