BLOQUET
Romain

PL1
2013

16,

1) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$ $\leftarrow +2l_1$ $\begin{cases} x - y = 0 \\ 0 \quad 0 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\{ x = y.$ 2.

2) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

3) D'après le théorème du rang $\dim F = 1$. 2 car $rg A + Ker A = n$
(On peut voir aussi que $Col_1 = - Col_2$).

$rg A + 1 = 2$
$rg A = 2 - 1$
$= 1$.

4) $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \beta = y \\ \alpha - \gamma = z \end{cases}$

On sait que $\beta = y$.
$l_1 - l_3 \Rightarrow \beta + \gamma = x - z$.
$\gamma = x - z - y$.
$l_1 - l_2 \Rightarrow \alpha = x - y$.

$\begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y \\ \gamma = x - z - y. \end{cases}$ 3

pas prouvé

5) Comme (v_1, v_2, v_3) est une famille de trois vecteurs libres et est génératrice de $\mathbb{R}^3$ alors la famille libre (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{B} = \{(v_1, v_2, v_3)\}$. (Soit n vecteur qui engendre $\mathbb{R}^n$). *1)

6) $P_{SB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 1

11). Matrice standard de $f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2

12). On pose le système $a f(\varepsilon_1) + b f(\varepsilon_2) + c f(\varepsilon_3) = 0$.

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \quad l_1 + l_2 \quad \begin{cases} a + 3c = 0 \\ b + c = 0 \\ 2a + c = 0 \quad \leftarrow -2l_1 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ b = -c \end{cases}} \qquad \begin{cases} a + 3c = 0 \\ b + c = 0 \\ -5c = 0 \end{cases}$$

d'où $c = 0$
donc $b = 0$
et $a = 0$.

$\Rightarrow a = b = c = 0$.

$a f(\varepsilon_1) + b f(\varepsilon_2) + c f(\varepsilon_3)$ n'admet que $S = \{0\}$. 2
donc f est bijective.

On aurrait put montrer que si le delta est différent de 0 alors la matrice est inversible donc f est bigective.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} -2l_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$= -3 - 2$

$= -5.$ donc Matrice inversible
donc f est bigective.

8). $\cancel{\alpha u_1 + \beta u_2 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha 2y_1 + \beta 2y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2 = 0}$.

$\cancel{\alpha (x_1 + 2y_1 + z_1) + \beta (x_2 + 2y_2 + z_2) = 0}$

~~Donc $\alpha = \beta = 0$. donc famille est libre~~
~~et stable par combinaison linéaire.~~
~~donc E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$~~

9). $\{ x + 2y + z = 0$

$\{ x = -2y - z.$ donc x est directrice.
y et z sont libres.

2

$$\begin{pmatrix} -2y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la Base de E est $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

10). La dim de E vaut 2. car E est engendré par deux Vecteurs qui forment une famille libre.

1

7). $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = 1 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 = 2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 = 1 \end{cases}$

1

*) Demonstration: Soit la famille $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ NON
Composée de n vecteurs appartenant a n.

On montre la liberté: V_1 V_2 V_3

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \dots + \alpha_n e_n = 0.$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$$

Donc la famille de n vecteur est libre et forme une base de $\mathbb{R}^n$.

0