2016

Rapport
Synthèse d'un banc de filtres numériques
Projet de Système à la fonction

LELLOUCHE LÉO ET RANDRIAMBOLOLONA CAROLINE
Mme. CONTEVILLE et M. DELAFOLIE

Note finale 18,5/20

GROUPE
Enseignement supérieur

Sommaire

Introduction

Aujourd'hui, le transport de l'information, souvent caractérisé par des ondes, est primordial afin de faire fonctionner notre société. Alors que les techniques évoluent, certains problèmes persistent : comment envoyer une information sans en perdre une partie, notamment sur des grandes distances ? Comment se débarrasser d'ondes parasites gênants le transport d'information ?

Si au premier problème, une solution pourrait être l'utilisation régulière d'amplificateurs, le deuxième peut être régler à l'aide de filtres : en effet, ils filtreraient les ondes parasites de basses fréquences ou de hautes fréquence, ne laissant passer que l'information désirée.

Au cours de ce semestre, nous avons étudié de manière théorique fonctionnement de trois types de filtres : passe-bas, passe-haut et passe-bande. Nous les avons ensuite réalisés à l'aide du logiciel Multisim.

Cependant, nous ne pouvions tester de manière concrète l'effet de ces filtres avec ce logiciel : nous avons donc réalisé une nouvelle fois ces filtres, mais sous le logiciel Matlab.

Cela nous a permis de pouvoir tester l'effet de nos filtres : en effet, en envoyant un signal à une certaine fréquence, représentant l'information désirée et les ondes parasites, nous pouvions l'entendre avant et après être filtré, et donc voir l'efficacité de nos filtres contre d'éventuelles ondes parasites lors du transport d'informations.

Cahier des charges

- ✓ Utiliser Matlab pour écrire différentes équations
- ✓ Réaliser un filtre passe-bas d'ordre 1 sous Matlab
- ✓ Réaliser un filtre passe-bas d'ordre 2 sous Matlab
- ✓ Réaliser un filtre passe-haut d'ordre 1 sous Matlab
- ✓ Réaliser un filtre passe-haut d'ordre 2 sous Matlab
- ✓ Réaliser un filtre passe-bande sous Matlab
- ✓ Obtenir différents chronogrammes et spectres
- ✓ Remplir un tableau de différentes fréquences
- ✓ Écouter différents signaux filtrés
- ✓ Filtrer un signal sinusoïdal
- ✓ Filtrer un bruit blanc uniforme
- ✓ Filtrer une impulsion

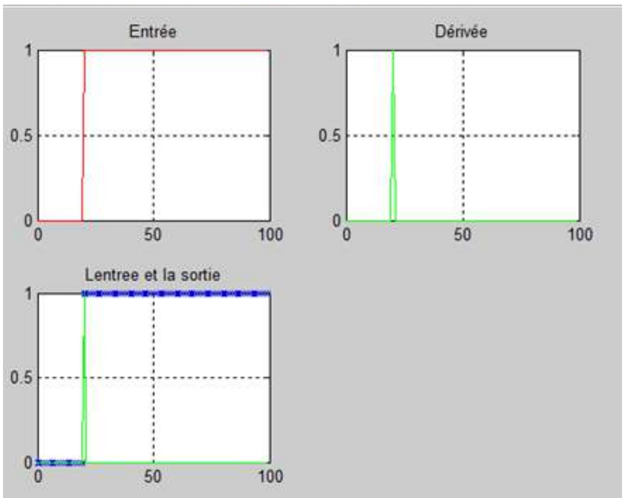
Les différents filtres

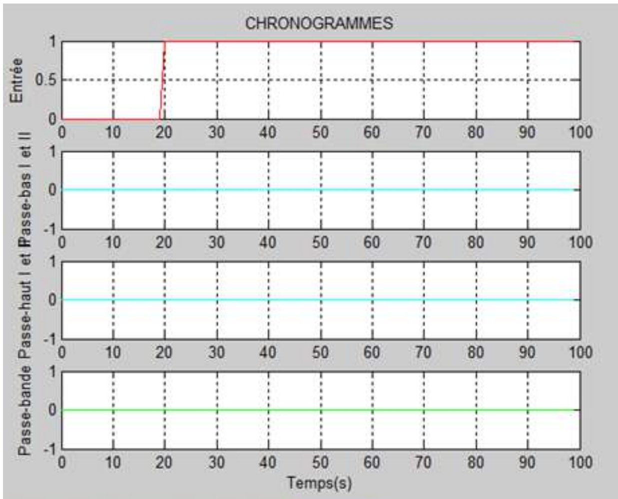
Filtres passe-bas

➢ Prérequis

Avant de pouvoir programmer les différents filtres, il est nécessaire d'avoir quelques connaissances de Matlab.

On commence d'abord par lancer le fichier L1derivativ.m, nous donnant les résultats suivants :





On remarque que la courbe « Dérivée » correspond à la sortie *s(t)* dont l'équation est la suivante :

$s(t) = k * [e(t) - e(t - 1)]$

On remarque, de plus, que si l'on change l'entrée e avec cette expression :

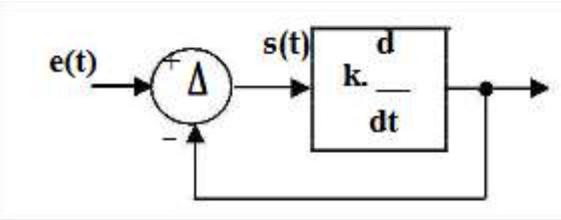
$e = [zeros(1, t_0)\ ones(1, N - t_0)]$

Les résultats ne changent pas : en effet, ce changement est équivalent à la ligne 8 du programme.

Si l'on supprime le « ; » de la ligne 2, la valeur de t_0 s'affiche dans la fenêtre de commande (Command Windows).

➢ 1er Ordre

Schéma d'un filtre passe-bas d'ordre 1 :



À l'aide du schéma ci-dessus, on trouve l'équation de la sortie $s(t)$ suivante :

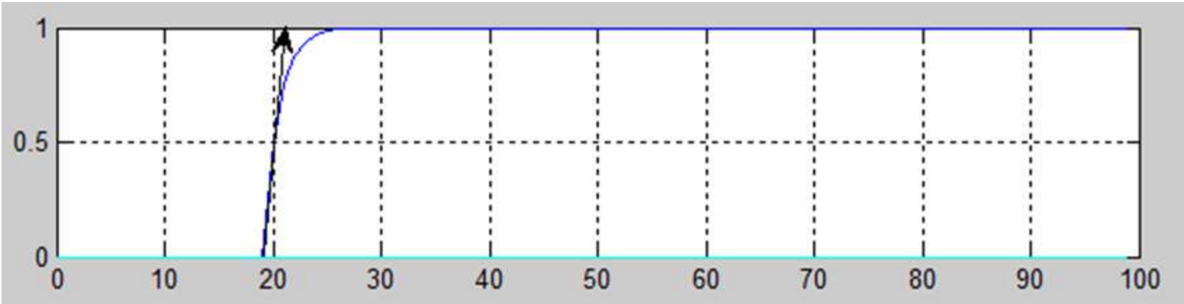
$s(t) = \frac{e(t)}{1+k} + \frac{k * s(t-1)}{1+k}$ Donc :

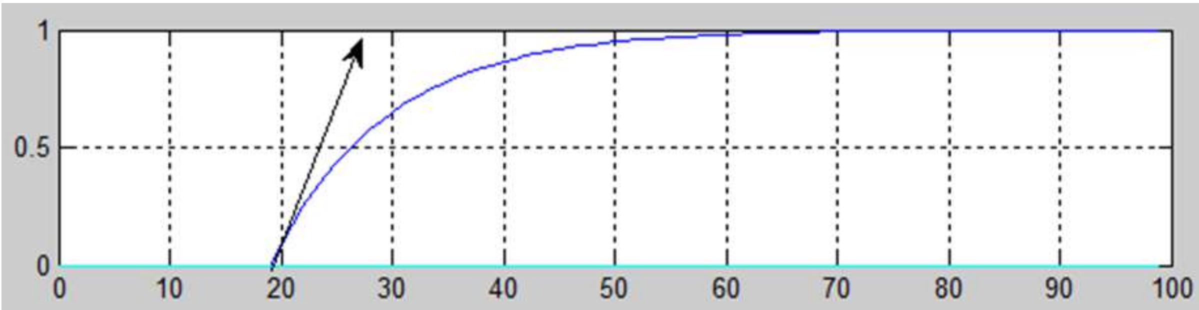
$s(t) = \frac{1}{1+k} e(t) + \frac{k}{1+k} s(t - 1)$

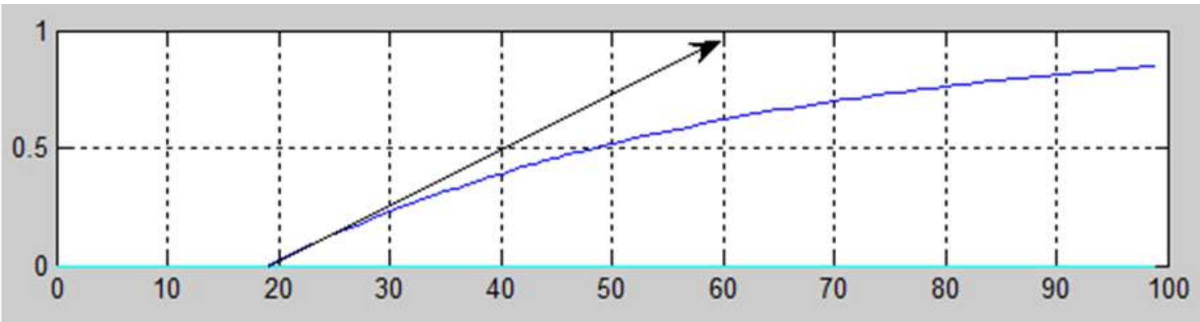
Notons $\alpha = \frac{1}{1+k}$ et $\beta = \frac{k}{1+k}$ On a bien :

$s(t) = \alpha e(t) + \beta s(t - 1)$

Une fois le filtre passe-bas programmé avec l'équation ci-dessus, nous obtenons les réponses indicielles suivantes (dans l'ordre, k = 1, k = 10, k = 42) :







k	1	10	42
Pente ≈	1/2s	1/10s	1/40s

Plus k augmente, plus la pente est douce : en effet, les plus hautes fréquences, causant de plus grandes variations, sont filtrés, et on en déduit que la fréquence de coupure diminue lorsque k augmente.

➢ 2nd Ordre

Pour réaliser un filtre passe-bas du second ordre, on calculera la dérivée seconde : il nous faudra donc 2 filtres passe-bas du premier ordre, placés en cascade, pour en avoir un du deuxième ordre :

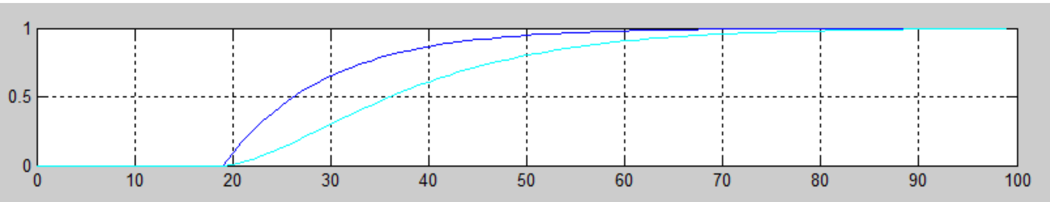
$$\frac{d''s(t)}{dt} = \frac{d\frac{ds(t)}{dt}}{dt} = \frac{dk[e(t) - e(t-1)]}{dt}$$

$$\frac{d''s(t)}{dt} = k^2[e(t) - e(t - 1) + e(t - 2)]$$

On peut aussi imaginer le schéma en cascade tel que l'entrée choisie pour le filtre de second ordre est la sortie d'un filtre de premier ordre : cela nous amène à modifier, dans l'équation *s(t)*, les e(*t*) par des *s(t)* et les *s(t)* par des *ss(t)*, la sortie du filtre de second ordre. On a donc l'équation *ss(t)* suivante :

$$ss(t) = \frac{1}{1+k} s(t) + \frac{k}{1+k} ss(t - 1)$$

Réponse indicielle des filtres passe-bas d'ordre 1 (bleu foncé) et 2 (cyan) à k = 10 :



On remarque que le filtre d'ordre 2 atténue moins les basses fréquences que le filtre d'ordre 1, c'est-à-dire ce qui était désiré.

Filtres passe-haut

➢ 1er Ordre

Sortie d'un filtre passe-haut *z(t)* :

$$z(t) = k * \frac{ds(t)}{dt}$$

$$z(t) = k * \frac{d(e(t) - z(t))}{dt}$$

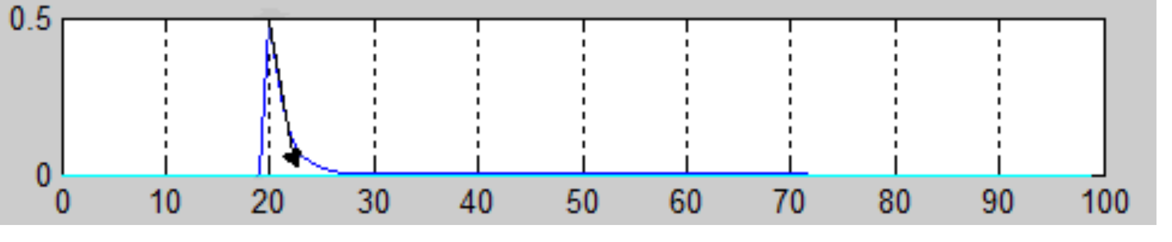
$$z(t) = k * [\frac{de(t)}{dt} - \frac{dz(t)}{dt}]$$

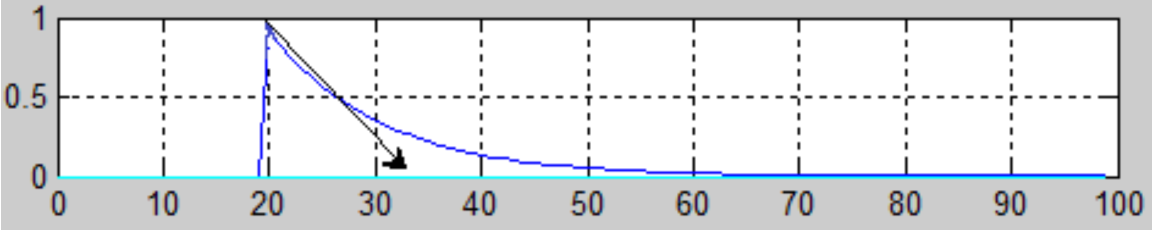
$$z(t) = k * [e(t) - e(t-1) - z(t) + z(t-1)]$$

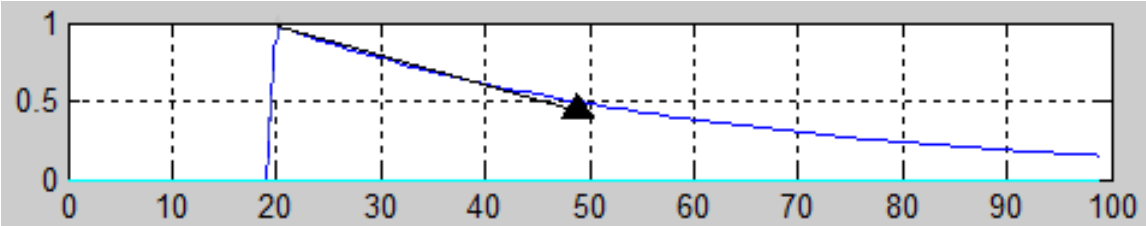
$$(k + 1) * z(t) = k.[e(t) - e(t-1) + z(t-1)]$$

$$z(t) = \frac{k}{k+1} * [e(t) - e(t-1) + z(t-1)]$$

Les différentes réponses indicielles (k = 1, k = 10, k = 42)







k	1	10	42
Pente ≈	-1/2s	-1/12s	-1/30s

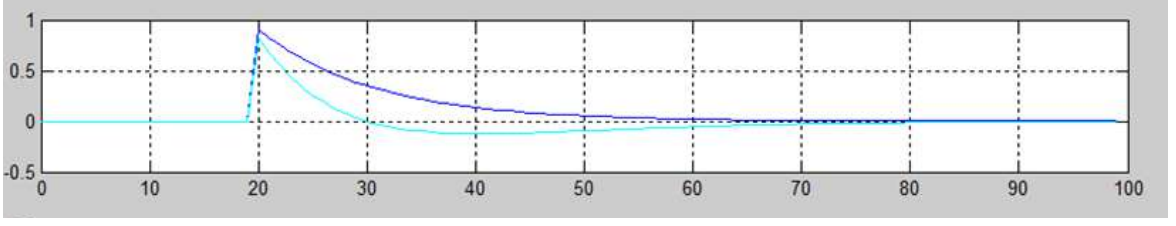
On remarque que plus k est élevé, plus la fréquence de coupure est basse et le temps de réponse grand, correspondant au moment où l'on atteint 95% de la valeur finale, qui est ici de 0.

➢ 2nd Ordre

On imagine le schéma en cascade tel que l'entrée choisie pour le filtre de second ordre est la sortie d'un filtre de premier ordre : cela nous amène à modifier, dans l'équation *s(t)*, les *e(t)* par des *z(t)* et les *z(t)* par des *zz(t)*, la sortie du filtre de second ordre. On a donc l'équation *zz(t)* suivante :

$$zz(t) = \frac{k}{k+1} * [z(t) - z(t-1) + zz(t-1)]$$

Réponse indicielle des filtres passe-haut d'ordre 1 (bleu foncé) et 2 (cyan) à k = 10 :



On remarque que le filtre d'ordre 2 atténue plus les basses fréquences que le filtre d'ordre 1, c'est-à-dire ce qui était désiré. De plus, lorsqu'il y a une forte augmentation, ici vue avant 20 secondes, les filtres passe-haut d'ordre 1 et 2 ne filtrent pas, car ce sont des variations qu'ils ne sont pas censés filtrer.

Filtre passe-bande

Schéma d'un filtre passe-bande :

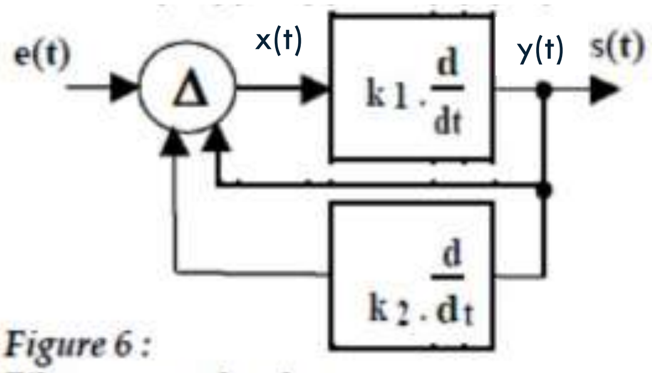


Figure 6 :
Filtrage passe-bande

À l'aide du schéma ci-dessus, on trouve les équations suivantes :
$y(t) = k_1(x(t) - x(t-1))$ et
$x(t) = e(t) - y(t) - k_2(y(t) - y(t-1))$

En remplaçant, on obtient l'équation suivante :
$y(t) = k_1\{[e(t) - y(t) - k2(y(t) - y(t-1))] - [e(t-1) - y(t-1) - k_2(y(t-1) - y(t-2))]\}$

$y(t) = k_1e(t) - k_1y(t) - k_1k_2y(t) + k_1k_2y(t-1) - k_1e(t-1) + k_1y(t-1) + k_1k_2y(t-1) - k_1k_2y(t-2)$

$(1 + k_1 + k_1k_2)y(t) = k_1e(t) - k_1e(t-1) + k_1y(t-1) + 2k_1k_2y(t-1) - k_1k_2y(t-2)$

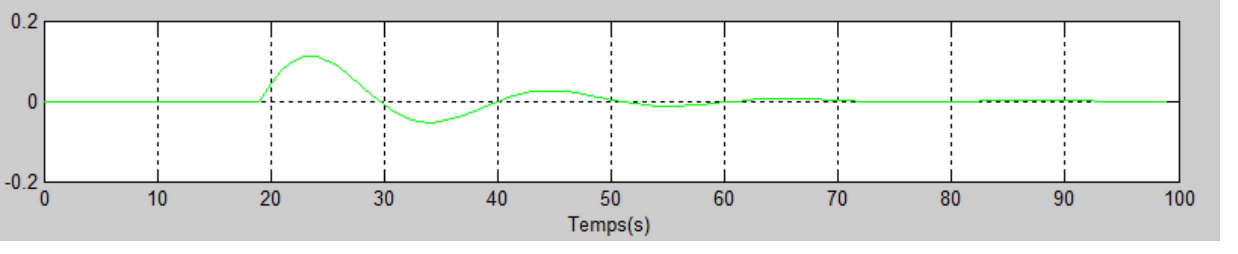
$$y(t) = \frac{k1}{1+k1+k1k2}[e(t) - e(t-1)] + \frac{k1+2k1k2}{1+k1+k1k2}y(t-1) - \frac{k1k2}{1+k1+k1k2}y(t-2)$$

On sait que l'on a : $k_1 = 0{,}5$ et $k_2 = 20$ avec

$k_1 = \frac{1}{qw0}$ et $k_2 = \frac{q}{w0}$ Donc :

$w_0 = \sqrt{1/10}$ rad.s^{-1} et $q = 20 * \sqrt{1/10}$

Réponse indicielle d'un filtre passe-bande :



On remarque que le signal est une sinusoïdale atténuée convergeant vers 0, commençant à 20 secondes, au pic de l'entrée. Sa pseudo-période semble être de 20 secondes environ.

Observation des signaux et calculs des spectres

Nous allons d'abord voir le fonctionnement des vecteurs dans Matlab. Nous avons deux vecteurs : x = [1 2 3] et y = [4 5 6]

Nous avons remarqué que :
x.*y correspond à un produit terme par terme
x*y' correspond à un produit scalaire
Attention, x*y ne correspond à rien du tout

Si z = x + yi alors on a z = [1 + 4i 2 + 5i 3 + 6i]
On a aussi conj(z) = [1 - 4i 2 - 5i 3 - 6i]

Sachant que la fréquence est de 44.1kHz, il y a 44100 échantillons par seconde, soit N = 44100

La condition de Shannon est :

$$f_{max} = \frac{fe}{2}$$

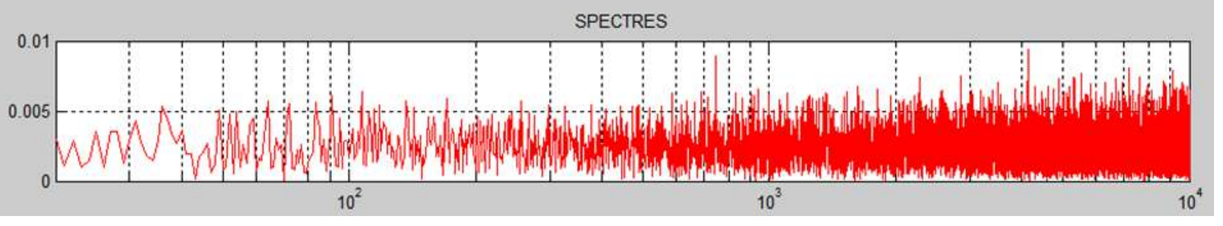
On a donc : f_{max} = 44100/2 = 22050Hz

On normalise les fréquences car les valeurs échantillonnées sur un signal quelconque sont dépendantes non seulement du signal mais aussi de la fréquence d'échantillonnage. L'ordinateur traite deux signaux dont le signal et la fréquence d'échantillonnage sont proportionnel, au même coefficient, de la même manière. On normalise donc les fréquences pour le calcul.

f(Hz)	20	40	80	100	1000	2000	4000	15000	20000	40000	50000
fB(Hz)	20	40	80	100	1000	2000	4000	15000	20000	4100	5900
fH(kHz)	44.08	44.06	44.02	44	43.1	42.1	40.1	29.1	24.1	40	38.2
Audible	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Non	Non

On remarque que lorsque l'on est dans les conditions de Shannon, soit ici de 20Hz à 20kHz (fe étant égal à 44 100),
fB(Hz) = f(Hz) et fH(Hz) ≃ fe – f(Hz)
Pour f(Hz) = 40 000, fe ≃ f(Hz) + fB(Hz)
Pour f(Hz) = 50 000, fe ≃ f(Hz) – fB(Hz)

Spectre d'un bruit blanc :



On remarque qu'à l'instar de la lumière blanche, le bruit est un signal toutes les fréquences, mais ce de manière aléatoire. Le spectre s'une impulsion est lui constant, de niveau 1.

Synthèse des filtres

On a : $\Delta w = 2.\pi.\Delta f$ Donc

$$q = \frac{w0}{\Delta w} = \frac{2\pi f0}{2\pi \Delta f}$$

$$k = \frac{1}{wc} = \frac{1}{2\pi fc}$$

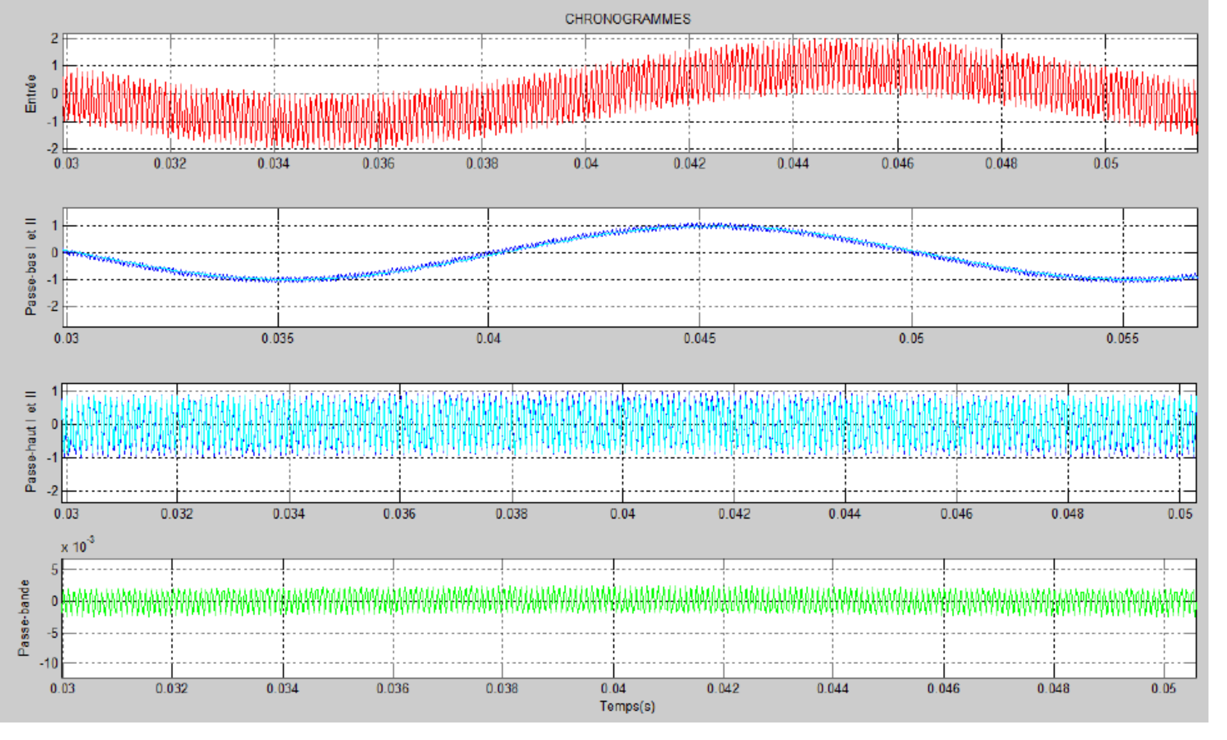
$$k_1 = \frac{\Delta\omega}{w0^2} = \frac{2\pi\Delta f}{(2\pi f0)^2}$$

$$k_2 = \frac{w0}{w0\Delta w} = \frac{1}{2\pi\Delta f}$$

L'avantage de programmer les différents filtres avec une expression ne contenant pas de sortie intermédiaire est qu'il ne faut que modifier l'entrée *e(t)* si l'on souhaite modifier le signal, sans regarder les sorties intermédiaires, celles-ci n'existant pas.

Application à des signaux audio-fréquences

Chronogrammes du signal et de différents filtres :

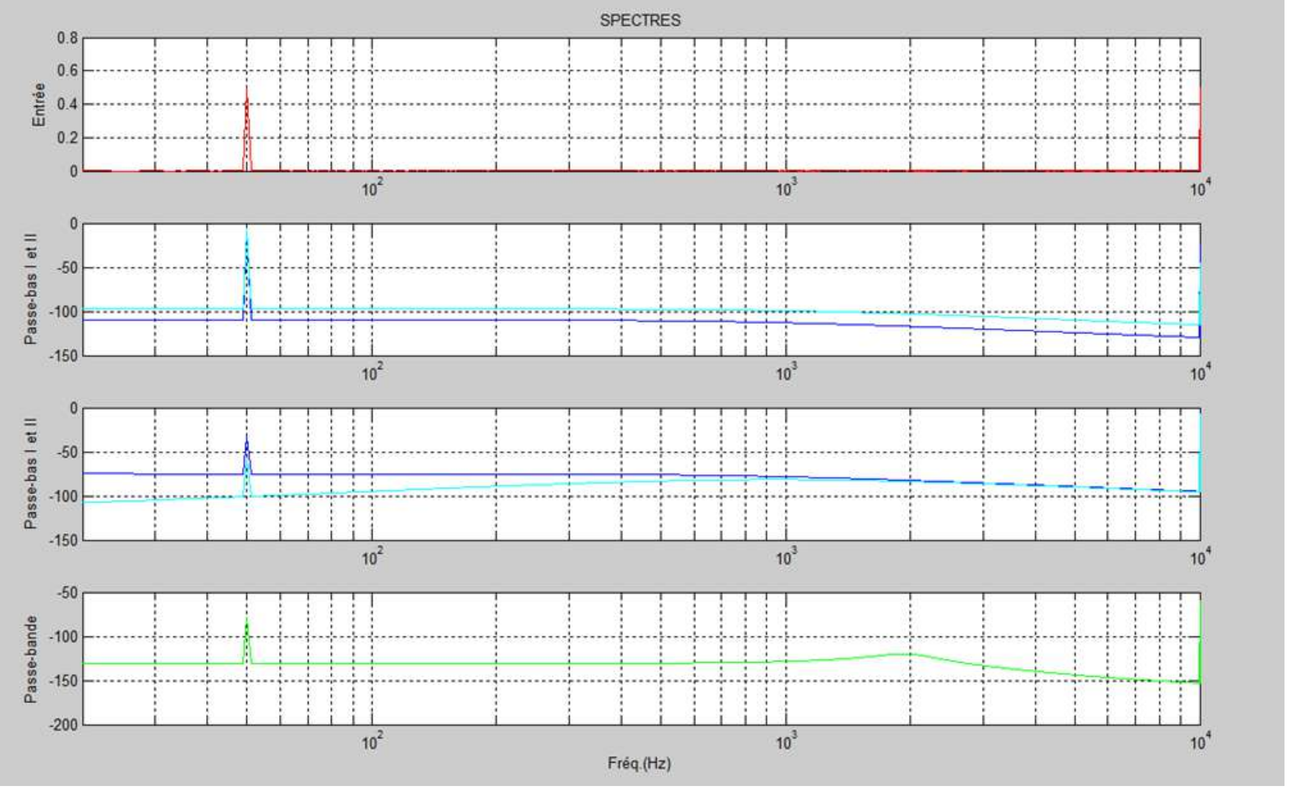


L'entrée est composée d'un motif de fréquence de 50Hz, lui-même composé de nombreux motifs de 10kHz.

Le passe-bas conserve surtout le motif de 50Hz, tandis que le passe-haut conserve surtout le motif de 10kHz.

Le passe-bande garde une partie des deux motifs.

Spectres du signal et de différents filtres :



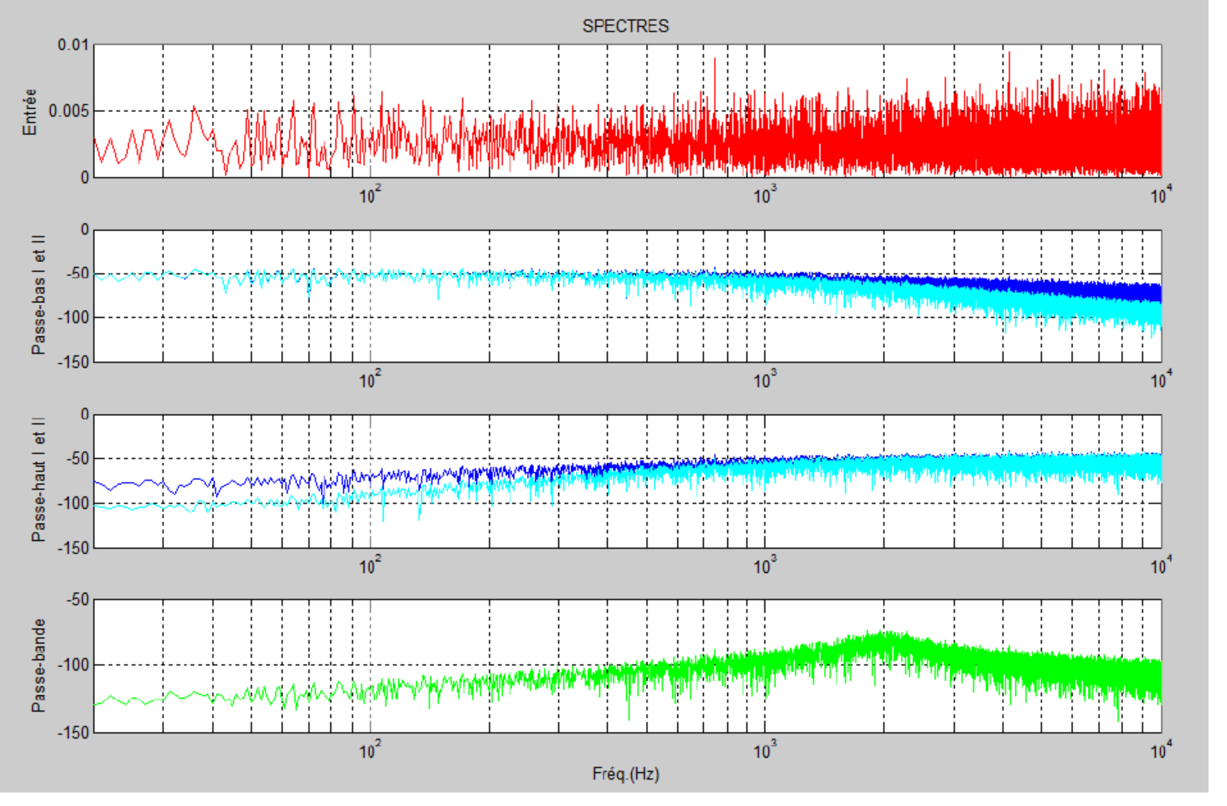
On remarque un pic à 50Hz sur l'entrée et toutes les sorties car une des fréquences du signal est de 50Hz. Cependant, on remarque qu'aucun filtre ne filtre à 100%

Les filtres passe-bas sont plus efficaces pour atténuer la fréquence de 10kHz, tandis que les filtres passe-haut atténuent mieux la fréquence de 50Hz.

Le filtre passe-bande filtre moins autour de la bande choisie, dont le centre est de 2kHz.

Lorsque l'on écoute la sortie du filtre passe-bas d'ordre 2, on entend un son assez grave, tandis que le son de la sortie du filtre passe-haut d'ordre 1 est très aigu.

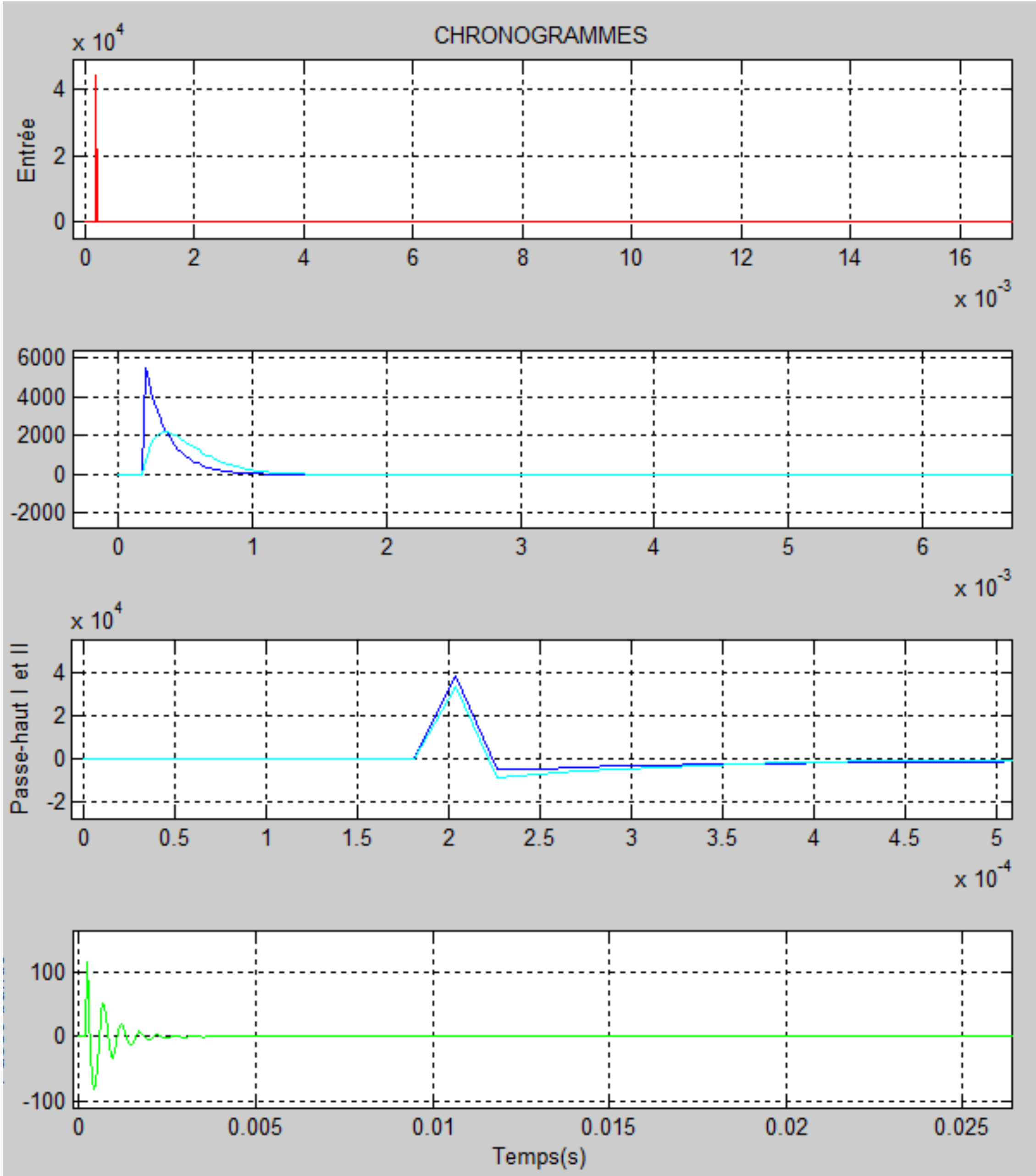
Spectres des filtres avec un bruit blanc :



On remarque que, étant donné que le bruit blanc contient toutes les fréquences, les deux filtres d'ordre deux atténuent plus qu'auparavant. Mais le filtre passe-bas atténue toujours surtout les hautes fréquences, et le filtre passe-haut, les basses fréquences.

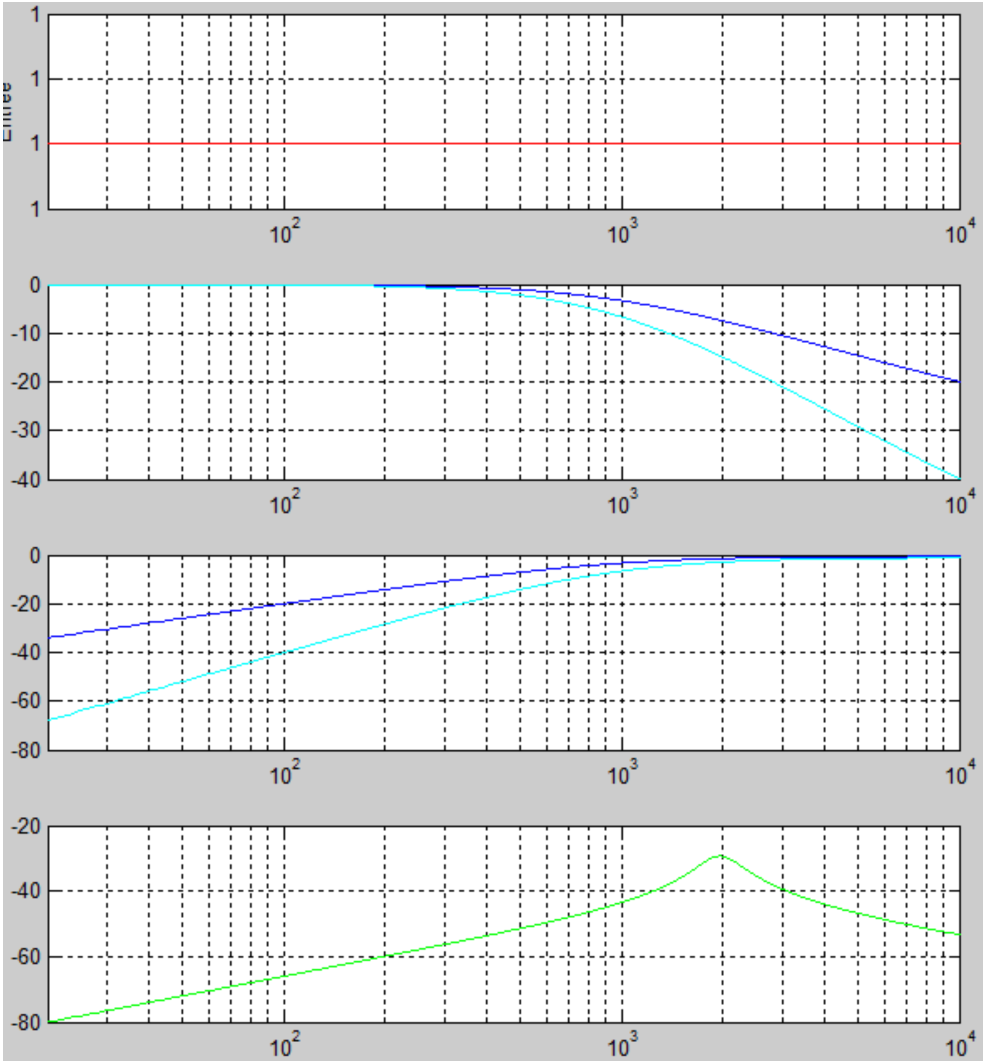
Réponse impulsionnelle

Chronogrammes des filtres avec impulsion :



Le pic présent dans le chronogramme de l'entrée correspond à l'impulsion. Les filtres passe-haut atténuent bien plus l'impulsion que les filtres passe-bas (facteur 10 entre les deux). La pseudo-période des oscillations du chronogramme du filtre passe-band est d'environ 0.0005 secondes.

Spectres de l'entrée et des filtres avec impulsion :



Le signal à l'entrée est constant, il vaut et balaye toutes les fréquences. De ce fait, les filtres balayent aussi toutes les fréquences. C'est pour cela que les spectres des différents filtres sont très proche de leur Diagramme de Bode associé.

Les fréquences de coupure se situent à + ou - 3dB des courbes, soit environ 700-800Hz pour les passe-bas, et 900 et 1kHz pour les passe-haut. La fréquence centrale du passe-bande est de 2kHz, comme nous l'avions choisie.

Conclusion

Tandis que, durant le premier semestre ainsi que le début du deuxième semestre, nous utilisions Multisim, nous avons utilisé Matlab. Cela nous as montré comment réalisé plusieurs types de filtres (passe-bas, passe-haut et passe-bande) d'ordres différents, et ce non pas avec des composants électroniques mais des expressions mathématiques.

De plus, nous avons pu tester nos filtres non pas avec un affichage de différentes courbes, mais en écoutant les signaux filtrés. Cela nous a notamment apprit l'importance des filtres passe-bas, sauvant nos oreilles, ainsi que l'horreur que sont les filtres passe-haut, ne manquant pas de nous écorcher les oreilles à la moindre occasion.

Une fois correctement maitrisés, les filtres peuvent être utilisés à des fonctions plus pratiques et utiles au public, tel que bloquer le bruit, qu'il soit aigu (haute fréquence) ou grave (basse fréquence) lors de transport d'informations.