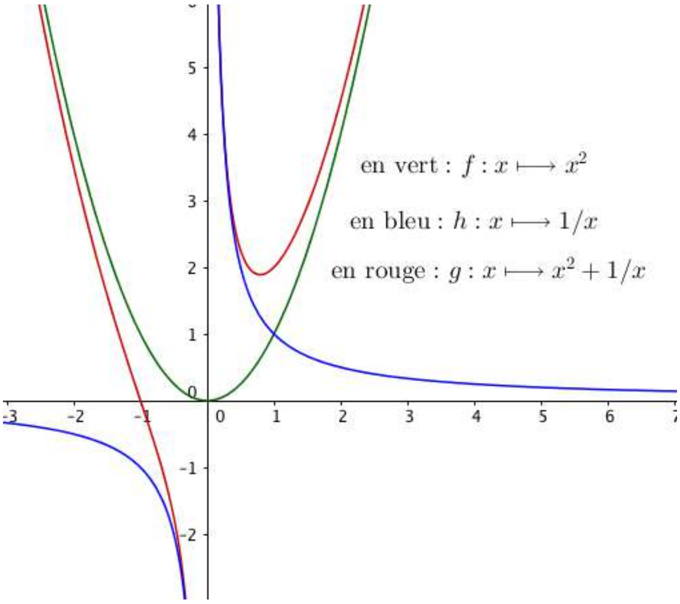
Branches infinies.

Définition 0.1. *Soient f et g deux fonctions, de graphe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. On dit que ces graphes sont asymptotes l'un à l'autre en a (a fini ou non), si*

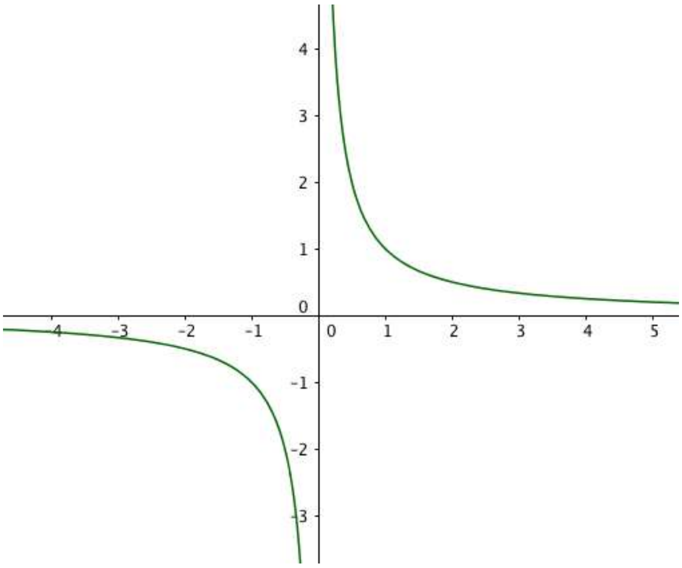
$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=0$$

Exemple : Les graphes des fonctions $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto x^2+\frac{1}{x}$ sont asymptotes l'un à l'autre en $+\infty$ et $-\infty$. En $+\infty$, le graphe de g est au dessus de celui de f. C'est le contraire en $-\infty$.

En 0, l'axe des y, le graphe de g, et celui de $h : x \longmapsto 1/x$ sont asymptotes lin à l'autre.



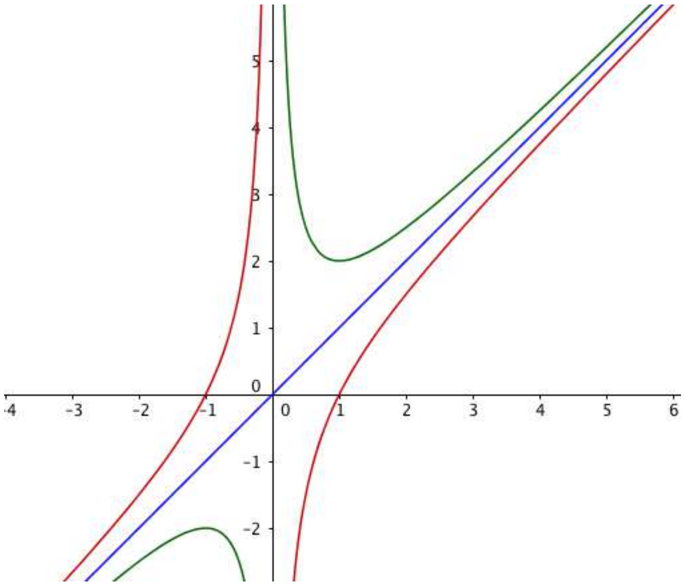
1. Asymptote horizontale : la droite $y=a$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ si
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$$
2. Asymptote verticale : la droite $x=a$ est asymptote au graphe de f en a^+ ($a\in\mathbb{R}$) si
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$$



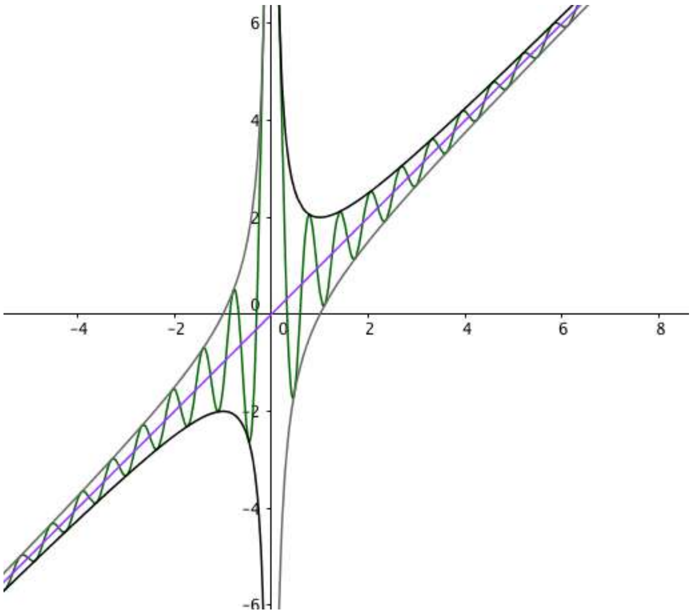
Exemple : l'hyperbole standard admet $x = 0$ comme asymptote verticale, et $y = 0$ comme asymptote horizontale.

3. Asymptote oblique. La droite $y = ax + b$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$ si
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax - b = 0$$

   Exemple : les graphes des fonctions $f : x \longmapsto x + 1/x$ en vert sur la figure) et $g : x \longmapsto x - 1/x$ (en rouge) admettent les mêmes asymptotes, $x = 0$ et $y = x$. Mais les positions par rapport aux asymptotes sont différentes. Le graphe de f est au-dessus de l'asymptote oblique en $+\infty$, et en dessous en $-\infty$. C'est l'inverse pour g.



Autre exemple : $x \longmapsto x + \frac{\sin 5x}{x}$: on voit que le graphe peut la couper une infinité de fois. LA fonction admet l'asymptote $y = x$, et oscille entre les courbes d'équation $y = x + 1/x$ et $y = x - 1/x$:



Détermination du comportement en l'infini. Directions asymptotiques et asymptotes

Soit f admettant une branche infinie en $+\infty$, c'est à dire que $\lim_{\infty} f = \infty$. On veut avoir des précisions sur l'allure du graphe en $+\infty$. Y a-t-il une "tendance" (en franglais économique, un "trend") ? Cette tendance est-elle linéaire ? Y a-t-il une droite asymptote ? une autre courbe asymptote ? Le graphe est il au dessus, au dessous de l'asymptote, ou coupe-t-il ce graphe ? Et comment, par le calcul, avoir ces informations ?

Voici quelque éléments de réponse.

On commence par calculer

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Le nombre $m = \dfrac{f(x)}{x}$ est la pente de la corde OM_x, où M_x est le "point générique" du graphe, à savoir $(x, f(x))$. On veut savoir si , quand x tend vers $+\infty$, cette droite a tendance à "se coucher", à se redresser vers la verticale, ou à partir dans une direction oblique.

Direction asymptotique (linéaire)

Soit f telle que $\lim_{\infty} f = \infty$. On suppose de plus que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

où a est un réel ou $\pm\infty$. On dit alors que f **admet une direction asymptotique**, (c'est à dire une tendance à aller "à long terme" dans une certaine direction).

1. Si $a = \pm\infty$, la direction est verticale.
2. Si $a \neq \pm\infty$, la direction est horizontale, de pente a. Cette direction est donc représentée par la droite $y = ax$

S'il y a direction asymptotique, y a-t-il asymptote ? Parfois, mais pas toujours ! Voici ce qu'on peut dire :

Situation : $\lim_{+\infty} f = +\infty$, et $\lim_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. Si $a = \pm\infty$, il n'y a pas d'asymptote. Le graphe a une allure de parabole, on parle de branche parabolique verticale (bpv).

   exemples : $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto e^x$.

2. Si $a = 0$, il n'y a pas d'asymptote. Le graphe a une allure de parabole couchée ("à la $\sqrt{x}$"), on parle de branche parabolique horizontale (bph).

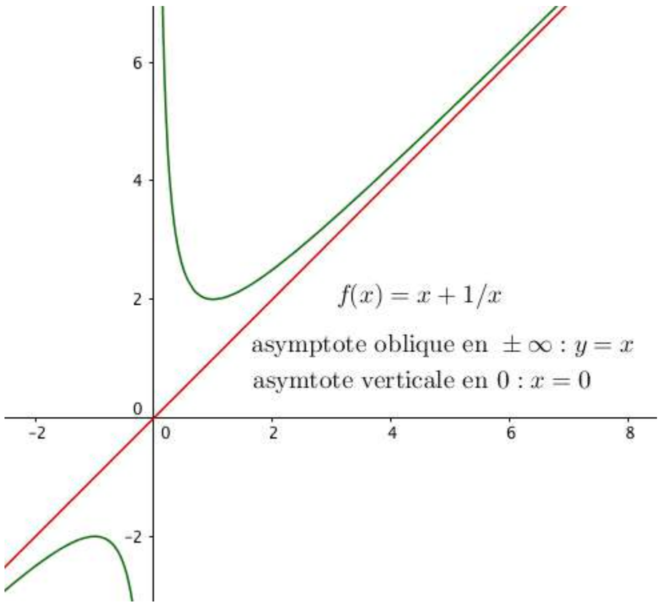
   exemples : $x \longmapsto \sqrt{x}$, $x \longmapsto \ln x$.

3. Si $a \neq 0$, et $a \neq \pm\infty$, il faut aller relus loin.

   (a) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$, alors le graphe admet la droite $y = ax + b$ pour asymptote.

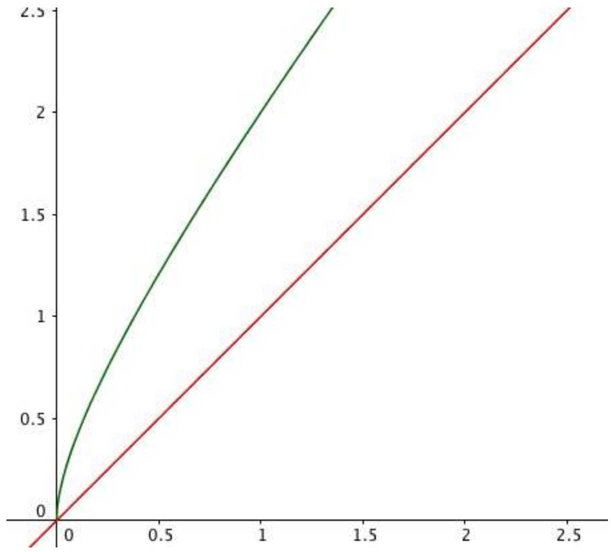
   Exemple : La fonction $f : x \longmapsto x + 1/x$. La courbe est une hyperbole. En 0^+, f tend vers $+\infty$. on a une asymptote verticale. En $+\infty$, on a l'asymptote $y = x$. Comme f s'écrit $x+$ un petit truc positif qui tend vers 0, la fonction est au dessus de l'asymptote.

   Côté négatif, tous est inversé : le graphe est sous l'asymptote oblique.



   (b) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, il n'y a pas d'asymptote, mais une branche parabolique oblique (bpo) dans la direction $y = ax$ (on a une allure de parabole penchée).

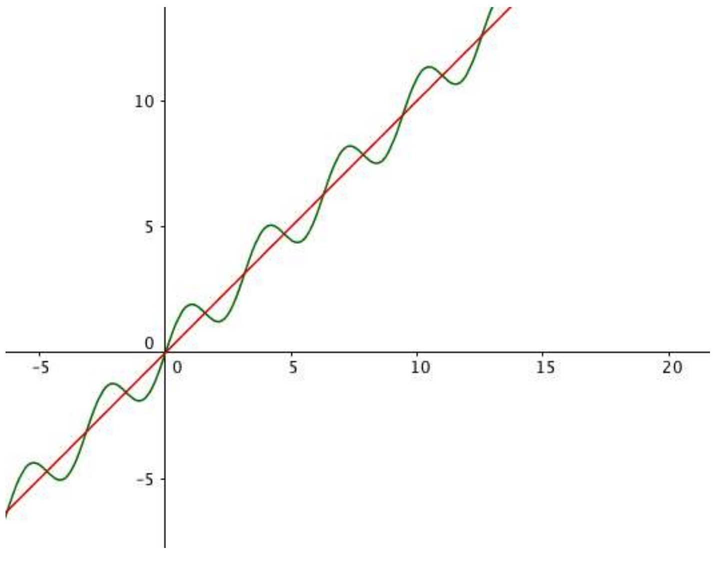
   Exemple : $x \longmapsto x + \sqrt{x}$. La direction asymptotique est $y = x$. Mais il n'y a pas d'asymptote. Le graphe est une partie de parabole "penchée".



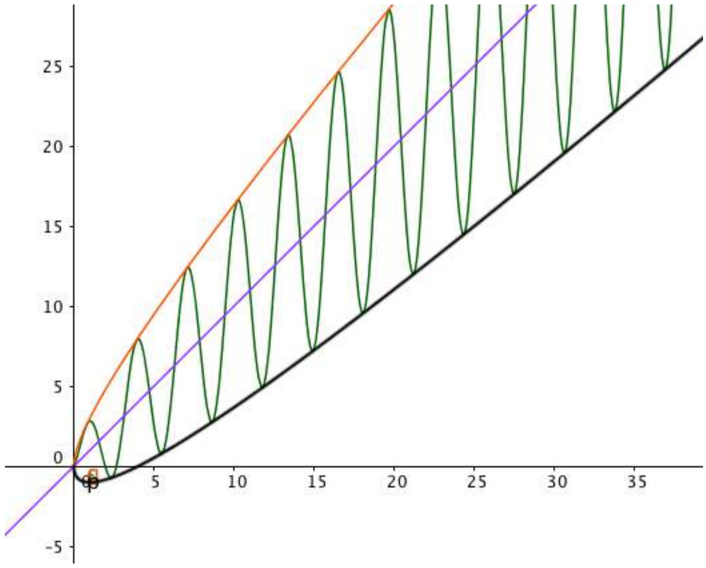
$x \longmapsto x + \sqrt{x}$

(c) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax$, n'existe pas, il y a une tendance dans la direction $y = ax$, et le graphe va dans cette direction, sans se stabiliser "près" d'une droite.

Exemples.



$x \longmapsto x + \sin 2x$. Trend $y = x$, fonction confinée dans une saucisse.



$x \longmapsto x + \sqrt{x}\sin 2x$. Trend $y = x$
fonction évoluant entre les courbes $x \longmapsto x + \sqrt{x}$ et $x \longmapsto x - \sqrt{x}$.