Algèbre linéaire

Jacques Gualino

2 avril 2011

Table des matières

1 Espaces vectoriels **2**
1.1 Définitions générales . . . 2
1.1.1 Quelques propriétés . . . 2
1.2 Exemples d'espaces vectoriels . . . 2
1.3 Famille et dépendance . . . 3
1.3.1 Définition . . . 3
1.4 Sous-espaces vectoriels . . . 3
1.4.1 Intersection de sev . . . 3
1.4.2 Somme de sev . . . 4
1.5 Générateurs ; base ; coordonnées . . . 4
1.6 Espace vectoriel de dimension finie . . . 4
1.7 Sev en dimension finie . . . 4
1.8 Rang d'une famille . . . 5
1.8.1 Pivot de Gauss . . . 5
1.9 Dimension de sev . . . 7
1.10 Résolution des récurrences . . . 7
1.11 Récurrence . . . 7

2 Application linéaire **10**
2.1 Définition générale . . . 10
2.2 Noyau et image . . . 11
2.3 Appli linéaire injective . . . 12
2.4 A.L. dans le cas fini . . . 12

3 Matrices **15**
3.1 Définition . . . 15
3.2 Quelques propriétés . . . 17
3.3 Quelques opérations . . . 17
3.4 Composition d'applications et produit de matrices . . . 18
3.5 Rang d'une matrice . . . 20
3.6 Endomorphismes . . . 20

4 Automorphisme **22**
4.1 Calcul de l'inverse de A 23
4.1.1 Identification 23
4.1.2 Résolution par système associé 23
4.1.3 Inversion progressive (malin) 24
4.2 Changement de base 24

5 Déterminants **26**
5.1 Groupe symétrique 26
5.2 Forme multilinéaire 27
5.3 Définition d'un déterminant 27
5.4 Règles de calcul 29
5.5 Calcul de A^{-1} 31

6 Résolution de systèmes linéaires **33**
6.1 Définition et résolution théorique 33
6.2 Cas de Cramer 33
6.3 Cas général 35
6.4 Systèmes homogènes 38

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions générales

Soit un corps K commutatif (en général $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{F}_2$). $E = \left\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{X_2}, ...\right\}$ est un espace vectoriel sur le corps K ou un K-espace vectoriel ou K-ev. *ssi* $(E, +)$ est un groupe abélien. - $\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in E^2 \quad \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \in E$ - associative $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right)$ - $\exists$neutre$\overrightarrow{O_E}$ - $\forall \overrightarrow{x} \in E, \exists$symétrique de $\overrightarrow{x}$ noté $\overrightarrow{x}$ $\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} = (-\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x}$ - $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$

$\exists \times : \forall \lambda \in K$ (λest « scalaire ») $\lambda \times \overrightarrow{x} \in E$ $\alpha \times (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \alpha \times \overrightarrow{u} + \alpha \times \overrightarrow{v}$ $(\alpha + \beta) \times \overrightarrow{u} = \alpha \times \overrightarrow{u} + \beta \times \overrightarrow{u}$ $(\alpha \times \beta) \times \overrightarrow{u} = \alpha \times (\beta \times \overrightarrow{u})$ $1 \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$

1.1.1 Quelques propriétés

- Si K' est un sous-corps de K alors tout K-ev est aussi un K'-ev ; - bien distinguer 0 et $\overrightarrow{0}$ mais $0 \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \quad \forall \overrightarrow{u} \in E$ car : $(0 + \alpha) \times \overrightarrow{u} = 0.\overrightarrow{u} + \alpha \times \overrightarrow{u} = \alpha \times \overrightarrow{u}$ donc $(0 \times \overrightarrow{u} + \alpha \times \overrightarrow{u}) + (-\alpha \times \overrightarrow{u}) = \alpha \times \overrightarrow{u} + (-\alpha \times \overrightarrow{u})$ $0 \times \overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ - $(-1) \times \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$ - $\alpha \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \implies \alpha = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

1.2 Exemples d'espaces vectoriels

$$\mathbb{R}^2 = \left\{\overrightarrow{OM}, M \in \text{plan}0x, Oy\right\}$$

$$\mathbb{R} = \left\{\overrightarrow{OM}, M \in \text{axe}Ox\right\}$$

$\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ sont des $\mathbb{R}$-ev

- $S = \{(U_n)\}$ est $\mathbb{R}$-ev avec $(U_n) + (V_n) = (U_n + V_n)$ $\alpha \times (U_n) = (\alpha \times U_n)$ $\overrightarrow{0_S} = (0)$
- $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev
- $K[X]$ est un K-ev

1.3 Famille et dépendance

1.3.1 Définition

- $F = \{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}\}$ **famille** de vecteurs de E - On dit que $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire de F ou C.L. de F *ssi* $\exists \alpha_i \in K : \overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \times \overrightarrow{u_i}$ - On dit que F est **libre** ou que les $\overrightarrow{u_i}$ sont **linéairement** indépendants *ssi* $\sum_{i=1}^{i=p} \alpha_i \times \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0} \implies \alpha_i = 0 \forall i$[1]. - Si F n'est pas libre, elle est liée ou ses vecteurs sont linéairement dépendants.

- Supposons $\exists \alpha_i$ non tous nuls tq $\sum \alpha_i \times \overrightarrow{u_i} = \overrightarrow{0}$ hypothèse $\alpha_p \neq 0$

$\alpha_1 \overrightarrow{u_1} + ... + \alpha_{p-1} \overrightarrow{u_{p-1}} + \alpha_p \times \overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{u_p} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_p} \overrightarrow{u_1} + ... - \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_p} \overrightarrow{u_{p-1}}$

$\overrightarrow{u_p}$ est C.L. des $(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_{p-1}})$

- Si F est liée alors un de ses vecteurs est C.L. des autres. *conséquence* toute surfamille d'une famille liée est liée toute sous-famille d'une famille liée est on ne sait pas toute sous-famille d'une famille libre toute surfamille d'une famille libre est on ne sait pas toute famille contenant $\overrightarrow{0}$ est liée

1.4 Sous-espaces vectoriels

Soit E K-ev - On dit que F, partie de E, est sev[2] de E *ssi* F est aussi un K-ev pour les mêmes lois que E- F est sev de E *ssi* E est K-ev

$F \subset E$

$F \neq \emptyset$

et F est **stable** $\iff \forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2 \quad \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v} \in F$

- F sev de $E \implies \overrightarrow{0_E} \in F$ et - $\overrightarrow{O_E} \notin F \implies F$ n'est pas sev de E et - F sev de $E \implies \overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_E}$

1.4.1 Intersection de sev

Soient F et G deux sev de E, alors $F \wedge G$ est aussi sev de E car : E est K-ev, $F \wedge G \subset E$, $F \wedge G \neq \emptyset$ car $\overrightarrow{0_E} \in F$ et $\overrightarrow{0_E} \in G$ donc $F \wedge G$ est stable rac

[1] À connaître par cœur.

[2] sous-espace vectoriel

1.4.2 Somme de sev

F et G sev de E $F \vee G$ n'est pas (en général) un sev de Eex. $\mathbb{R}^2 = \{Ox, Oy\}$ (Ox) est sev de $\mathbb{R}^2$ (Oy) est sev de $\mathbb{R}^2$ $\overrightarrow{u} \in (Ox)$ $\overrightarrow{v} \in (Oy)$ $\overrightarrow{u} \notin (Ox) \vee (Oy)$

$F{+}G$ est la **somme** de F et G est $\{$ C.L. $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G\} = \left\{\alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}, \forall (\alpha, \beta) \in K^2\right\}$ - $F + G$ est sev de E car E est K-ev ; $F + G \subset E$; $F + G \neq \emptyset$ et $F + G$ stable. - Si $F \wedge G = \left\{\overrightarrow{O_E}\right\}$ on dit que $F + G$ est une **somme directe** on note $F \oplus G$

$\mathbb{R}^3 = \{Ox\} \oplus \{Oy, Oz\}$ $\mathbb{R}^2 = \{Ox\} \oplus \{Oy\}$

1.5 Générateurs ; base ; coordonnées

E K-ev $\mathbb{F} = \{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}\}$ $\overrightarrow{u_i} \in E$- L'ensemble des C.L. de $\mathbb{F}$ est un sev de E noté $F = Vect\mathbb{F} =< \mathbb{F} >$ c'est le sev **engendré** par $\mathbb{F}$ $\mathbb{F}$ est **génératrice** de F - On dit que la famille de $\mathbb{B}$ est **base** de E *ssi* $\mathbb{B}$ est libre et génératrice de E[3] - La dimension de E est $\dim E = \operatorname{card}(\text{base de } E)$ ex. $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ schéma 1 $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$

$B = \left\{\overrightarrow{b_1}, ..., \overrightarrow{b_n}\right\}$ base de E $\dim E = n$alors $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \overrightarrow{b_i} = \overrightarrow{0} \implies \alpha_i = 0 \ \ \forall i$ et $\forall \overrightarrow{u} \in E, \exists x_i : \overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \overrightarrow{b_i}$ x_i sont les **coordonnées** de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathbb{B}$. Elles sont **uniques**.

1.6 Espace vectoriel de dimension finie

E K-ev $\mathbb{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\}$ base de E $\dim E =$ card $\mathbb{B} = n$

- Théorème de la base incomplète $\mathbb{F} = \{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}\}$ p vecteurs libres $p \leqslant n$

On peut compléter $\mathbb{F}$ par $(n - p)$ vecteurs « bien choisis » appartenant à $\mathbb{B}$ pour former une nouvelle base de E Conséquences :

- toute famille libre de n vecteurs est une base de E.
- toute famille libre de $p < n$ vecteurs n'est pas génératrice de E.
- toute base a exaxtement n vecteurs. par convention dim $\left\{\overrightarrow{0}\right\} = 0$
- toute famille libre a au plus n vecteurs.
- toute famille de plus de n vecteurs est liée.

théorème : Une famille $\mathbb{F}$ est base de E *ssi* elle vérifie 2 des 3 conditions [4] : - être libre - être génératrice - card $\mathbb{F} = \dim E$ elle vérifie alors la troisième.

1.7 Sev en dimension finie

E K-ev $\dim E = n$ F sev de E

remarque : si 2 vecteurs ont la même base, ils sont identiques.

[3]À connaître par cœur.

[4]À connaître par cœur

- F sev de $E \implies \dim F \leqslant \dim E$ - Si F sev de E et $\dim F = \dim E$ alors $F = E$ - $\forall \overrightarrow{u} \in F$ sev de E, avec $\dim F = p \leqslant n = \dim E$ les n coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans E sont des C.L. des p coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans F.

$E = \mathbb{R}^3$ $F =< \overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2} >$ avec $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ - $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ est base de F, car ils engendrent F et car $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont libres car $\alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0} \implies \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$ rac rac donc $\dim F = 2$

$\forall \overrightarrow{u} \in F$ $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{_2} = (x, y, z)$ dans la base de E d'où $\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha + 2\beta \end{cases}$

d'où $\alpha = x + \beta$ et $\begin{cases} y = x + 2\beta \\ z = x + 3\beta \end{cases}$ $\beta = \frac{-x+y}{2}$ et $z = x + 3\left(\frac{-x+y}{2}\right)$ soit $2z = 2x - 3x + 3y$ $x + 3y + 2z = 0$ Vérification sur $\overrightarrow{u_1}$ $1 - 3 + 2 = 0$ sur $\overrightarrow{u_2}$ $-1 - 3 + 4 = 0$ c'est correct ! $X + 3y - 2z = 0$ est l'équation de F

schéma 1 $\overrightarrow{u_1} \vee \overrightarrow{u_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \vee \overrightarrow{-112} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ <– n est normal au plan F

Définition produit vectoriel : $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}bc' - b'c\\ca' - c'a\\ab' - a'b\end{pmatrix}$ donc $F = \left\{\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{n}\right\} \iff \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{n} = 0$ $x(1) + y(-3) + z(2) + 0$ $x - 3y + 2z = O$

1.8 Rang d'une famille

E espace vectoriel de $\dim n$

$F = \{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_p}$ $F_moche = \text{Vect } F =< F >$ - Le rang de F est la dimension de Vect F noté rg $F = r$ $r \leqslant p$ $r \leqslant n$ rg $F \leqslant \inf(n, p)$ - Si F est libre rg $F =$ card F

1.8.1 Pivot de Gauss

- On ne change pas le rang d'une famille en : - ajoutant à 1 de ses vecteurs un C.L. des autres ; - en intervertissant deux de ses vecteurs ; - en multipliant un vecteur par une constante non nulle ; - en intervertissant l'ordre des coordonnées de tous ses vecteurs.

dans $\mathbb{R}^4 F = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{même rang que } \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 - e_1 & e_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{même rang que } \begin{array}{c} \begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 + 2c_2 & c_4 - c_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{même rang que } \begin{array}{c} \begin{matrix} c'_1 & c'_2 & c'_3 & c'_4 + \frac{c'_3}{3} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- nb vecteurs non nuls $= 3 = \dim < F >$ - $\exists$(card $F -$ rg F) relation linéaire entre les vecteurs de F $\overrightarrow{0} = c'_4 + \frac{c'_3}{3} = c_4 - c_2 + \frac{c_3+2c_2}{3} = -\frac{c_2}{3} + \frac{c_3}{3} + c_4$ $\overrightarrow{0} = -\frac{\overrightarrow{e_2}}{3} + \frac{\overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_1}}{3} + \overrightarrow{e_4}$ d'où $\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - 3\overrightarrow{e_4} = 0$ La somme est bien nulle, la vérification est bonne- Les vecteurs non nuls en fin de pivot sont un base de F

On en déduit aussi l'équation de F car

$$\text{car } \forall \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F$$

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\implies \{x = \alpha y = 2\alpha + \beta z = 2\beta + 3\gamma t = 3\alpha - \beta - 3\gamma$$

$$\text{et } \{-2x + y = \beta z = 2\beta + 3\gamma - 3x + t = -\beta + 3\gamma$$

$$\beta = -2x + y$$

$$\text{et } \{4x - 2y + z = 3\gamma - 3x - 2x + y + t = -3\gamma$$

$$\text{d'où } 3\gamma = 4x - 2y + z$$

$$\text{et } -5x + y + t = -4x + 2y - z$$

soit $x+y-z-t = 0$ eq θ de F Vérif : $\overrightarrow{e_1}$ $1+2-0-3 = 0$ $\overrightarrow{e_2}$ $0+1-2+1 = 0$ $\overrightarrow{e_3}$ $1+0+1-2 = 0$ $\overrightarrow{e_4}$ $0+1-1-0 = 0$

1.9 Dimension de sev

E de dimension n F et G sev de E de dimension p et q. $F \vee G$ de dimension s

$s \leq inf\,(p,q) \leq n \quad p \leq n \quad q \leq n$

Théorème des quatre dimensions : $\dim (F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \vee G$[5]

1.10 Résolution des récurrences

Soit $(u_n) \in S$, qui est un $\mathbb{R}$-ev avec $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ (1) (double récurrence) avec u_0 et u_1 connus

Soit $F = \{$ solutions de (1)$\}$ F est un sev de S de dimension 2

car S est un $\mathbb{R}$-ev $F \subset S$ $F \neq$ car $(0) \in F$ F est stable $(u_n) \in F$ $\alpha\,(u_n) + \beta\,(u_n) \in F$ rac

1.11 Récurrence

$$U_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \quad a \text{ et } b \in \mathbb{R} \quad n \geqslant 2 \quad u_0 \text{ et } u_1 \text{ fixes} \tag{1}$$

$$F = \{(U_n) \text{ solution de (1) }\} \text{ est } \mathbb{R} - ev \quad , sevde\mathbb{S}$$

$\rightarrow F = 2$ Soit $(U_n) \in F$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ Soit (V_n) avec $v_0 = 1$ et $v_1 = 0$ Soit $(W_n) \in F$ avec w_0 et w_1 connus On peut écrire $\left\{ \begin{array}{lcl} w_0 & = & w_1 u_0 + w_0 v_0 \\ w_1 & = & w_1 u_1 + w_0 v_1 \end{array} \right.$

Hypothèse : H_n $w_n = w_1 u_n + w_0 v_n$ H_0 est vrai H_1 est vrai Supposons H_n vrai jusqu'au rang n alors $w_{n+1} = aw_n + bw_{n-1}$ d'après (1) $w_{n+1} = a\,(w_1 u_n + w_0 v_n) + (w_1 w_{n-1} + w_0 v_{n-1}) = w_1\,(au_n + bu_{n-1}) + w_0\,(av_n + bv_{n-1})$ $w_{n+1} = w_1 u_{n+1} + w_0 v_{n+1}$ H_{n+1} est donc vrai. L'hypothèse H_n est héréditaire vraie en $n = 0$ $n = 1$ donc toujours vraie. $\{(u_n)\,,(v_n)\}$ est génératrice de F.

Mq (u_n) et (v_n) sont libres. $\lambda\,(u_n) + \mu\,(v_n) = (0)$ $n = 0$ $\lambda u_0 + \mu v_0 = 0$ donc $\mu = 0$ $\lambda\,(u_1) + \mu\,(v_1) = 0$ donc $\lambda = 0$

$$\dim F = 2$$

:)

[5] par cœur.

Cherchons une « belle » base de F

Posons $u_n = r^n \quad r \in \mathbb{R}*$ l'équation (1) devient $r^n = ar^{n-1} + br^{n-2}$ d'où $r^2 = ar + b$ Equation caractéristique associée à (1)

1er cas E.C. a 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2

Les suites (r_1^n) et $(r_2^n) \in F$

Elles sont libres car $\lambda (r_1^n) + \mu (r_2)^2 = (0)$ d'où

$$\left.\begin{array}{lll} n=0 \;\; \lambda+\mu & = & 0 \\ n=1 \;\; \lambda r_1+\mu r_2 & = & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{lll} \mu & = & -\lambda \\ \lambda (r_1-r_2) & = & 0 \end{array}$$

donc $\lambda = \mu = 0$

Résumé $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ u_0 et u_1 fixes E.C. $r^2 - ar - b + 0$ 1er cas 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2 $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$ 2e cas A et B calculés par les C.I. (conditions initiales) 1 racine double r $u_n = (A + nB) r^n$ 3e cas 2 racines complexes $\rho \exp^{\pm i\Theta}$ $u_n = \rho^n (A \cos n\Theta + B \sin n\Theta)$

2e cas E.C. a une racine double $r \in \mathbb{R}$ alors $\Delta = a^2 + 4b = 0$ $r = \frac{a}{n}$

Soit $(u_n) = (r^n)$ $(v_n) = (nr^n)$ $\left.\begin{array}{llll} \lambda (u_n) + \mu (v_n) & = & (0) & \\ n=0 \;\; \lambda + 0 & = & 0 & \lambda = 0 \\ n=1 \;\; \lambda r + \mu r & = & 0 & \mu = 0 \end{array}\right\}$ (u_n) et (v_n) sont libres

et $(v_n) \in F$ car $\delta = v_n - av_{n-1} - bv_{n-2} = nr^n - a(n-1) r^{n-1} - b(n-2) r^{n-2}$ $\delta = n \left(r^n - ar^{n-1} - br^{n-2}\right) + ar^{n-1} + 2br^{n-2}$ $\delta = r^{n-2} (ar + 2b) = r^{n-2} \left(\frac{a^2}{2} + 2b\right) = r^{n-2} \frac{(a^2+4b)}{2} = 0$

3e cas 2 racines complexes r_1 et r_2, conjuguées donc $r_1 = \rho . \exp^{i\Theta}$ $\quad r_2 = \rho \exp^{-i\Theta}$ $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n = \bar{u_n} = al\bar{p}har_2^n + \bar{\beta} r_1^n$ donc $\bar{\alpha} = \beta$ Posons $\alpha = k \exp^{i\varphi}$

$$u_n = k \exp^{i\varphi} \rho^n \exp^{in\Theta} + k \exp^{-i\varphi} \rho^n \exp^{-in\Theta}$$

$$u_n = k\rho^n \left[\exp^{i(n\Theta+\varphi)} + \exp^{-i(n\Theta+\varphi)}\right] = k\rho^n . 2 \cos (n\Theta + \varphi)$$

$$u_n = k\rho^n \cos (n\Theta + \varphi) \quad \text{où } k \text{ et } \varphi \text{ déterminés par les C.I.}$$

$$u_n = k\rho^n (\cos n\Theta \cos \varphi - \sin n\Theta \sin \varphi)$$

$$u_n = \rho^n [k \cos \varphi \cos n\Theta - k \sin \varphi \sin n\Theta]$$

$$u_n = \rho^n (A \cos n\Theta + B \sin n\Theta)$$

Exemple 1

Une petit grenouille en bas d'un escalier, qui n'est capable que de sauter 1 ou 2 marches pour arriver en haut de l'escalier. u_n = nombre de chemmins pour aller en haut $u_0 = 1$ $u_1 = 1$ $u_2 = 2$ $u_3 = 3$ $u_4 = 5$ $u_5 = 8$

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ double récurrence, joie !

Suite de Fibonacci

Posons $u_n = r^n$ $r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$ $r^2 = r + 1$ $r^2 - r - 1 = 0$ E.C. (équation caractéristique) $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nombre d'or :) $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ Donc $u_n =$

$Ar_1^n + Br_2^n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ $n=0$ $u_0 = 1 = A + B$ $n = 1$ $u_1 = 1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ $B = 1 - A$ et $1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + (1-A)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ $2 = A\left(1+\sqrt{5}+\sqrt{5}-1\right) + 1 - \sqrt{5}$ $1+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}A$ $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ $B = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

$$u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \text{ qui est entier !}$$

Exemple 2 $v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n$ $v_0 = v_1 = 1$ double récurrence ! Posons $v_n = r^n$ $r^{n+2} = 4r^{n+1} - 4r^n$ $r^2 - 4r + 4 = 0$ E.C. $r = 2$ racine double $v_n = (A + nB)\,2^n$ $n = 0$ $v_0 = 1 = A$ $n = 1$ $v_1 = 1 = (A+B)\,2$ $A = 1$ et $B = \frac{-1}{2}$

$$v_n = \left(1 - \frac{n}{2}\right)2^n \text{ Bô}$$

Exemple 3 $w_{n+2} + 2w_{n+1} + 4w_n = 0$ $w_0 = 1$ $w_1 = 2$ Posons $w_n r^n$ $r^{n+2} + 2r^{n+1} + 4r^n = 0$ E.C. $r^2 + 2r + 4 = 0$ $\Delta = 4 - 16 = -12$

$$r = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3} \quad r_1 = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\rho = |r_1| = \sqrt{1+3} =$$

$$r_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\exp^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$w_n = 2^n\left(A\cos n\frac{2\pi}{3} + B\sin n\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$w_0 = A = 1 \quad \text{et } w_1 = 2\left(-\frac{1}{2} + B\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 \quad B = \sqrt{3}$$

$$w_n = 2^n\left(\cos n\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{2n\pi}{3}\right) \quad \text{Super bô}$$

généralisation

On peut résoudre les p-uples récurrences :

$$u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + ... + a_p u_n$$

Encore plus bô Equation différentielle du 2$^{\text{e}}$-ordre homogène et linéaire

$$y'' + py' + qy = 0 \quad p, q \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Solutions de 2 forment un espace vectoriel de dimension 2. Posons $y = \exp^{rx}$ $r^2 + pr + q = 0 \rightarrow 2$ racines distinctes r_1 et $r_2 \rightarrow y = A\exp^{r_1 x} + B\exp^{r_2 x}$ $\rightarrow 1$ racine double $r \rightarrow y = (Ax + B)\exp^{rx} \rightarrow 2$ racines complexes $u \pm iv$ $y = \exp^{ux}(A\cos vx + B\sin vx)$

2 Application linéaire

2.1 Définition générale

sch. 04/02/2011 - 0

φ est application linéaire (A.L.) de E dans F *ssi* $\forall\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\in E^2\ \ \forall\left(\alpha,\beta\right)\in K^2\ \ \varphi\left(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{v}\right)=\alpha\varphi\left(\overrightarrow{n}\right)+\beta\varphi\left(\overrightarrow{v}\right)$

$$\varphi\in L\left(E;F\right)$$

$$ssi\forall\left(\alpha,\beta\right)\in K^2\ \ \forall\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right)\in E^2$$

$$\varphi\left(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u'}\right)=\alpha\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)+\beta\left(\overrightarrow{u'}\right)$$

$$\rightarrow\ \varphi\left(\overrightarrow{0_E}\right)=\varphi\left(0,\overrightarrow{u}\right)=0.\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)=\overrightarrow{0_F}$$

$$\varphi_{\text{linéaire}}=\varphi\left(\overrightarrow{0_E}\right)=\overrightarrow{0_F}$$

$$\text{et }\varphi\left(\overrightarrow{0_E}\right)\neq\overrightarrow{0_F}\implies\varphi\text{ n'est pas linéaire}$$

$$\rightarrow\varphi\left(\sum_{i=1}^{i=q}\alpha_i\overrightarrow{u_i}\right)=\sum_{i=1}^{i=q}\alpha_i\varphi\left(\overrightarrow{u_i}\right)$$

Exemple :
schéma

$$X=x\ \ Y=-y$$

$$\text{Sym }_{/Ox}\left(x;y\right)=\left(x;-y\right)$$

$$\text{Sym }\left(\overrightarrow{u}\right)=\text{Sym }\left(x;y\right)=\left(x;-y\right)$$

Sym est linéaire car :

$$\overrightarrow{u_1}\left(x_1;y_1\right)\ \overrightarrow{u_2}\left(x_2;y_2\right)\ \text{Sym }\left(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\right)=\text{Sym }\left(x_1+x_2;y_1+y_2\right)$$

$$\text{Sym }\left(\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\right)=\left(x_1+x_2;-\left(y_1+y_2\right)\right)=\left(x_1;-y_1\right)+\left(x_2;-y2\right)=\text{Sym }\left(\overrightarrow{u_1}\right)+\text{Sym }\left(u_2\right)$$

$$\text{De même Sym}\left(\alpha\overrightarrow{u}\right)=\alpha\text{Sym}\left(\overrightarrow{u}\right)$$

rac.

Exemple 2 :

$$\mathscr{F}\left(\mathbb{R};\mathbb{R}\right)\quad\text{l'application « dérivation » est A.L. de }\mathscr{F}\left(\mathbb{R};\mathbb{R}\right)$$

$$d\left(\alpha f+\beta g\right)=\alpha d\left(f\right)+\beta d\left(g\right)\ \forall\left(\alpha,\beta\right)\in\mathbb{R}\ \ \forall f\text{ et }g\in\mathscr{F}\left(\mathbb{R};\mathbb{R}\right)$$

$$L\left(E;F\right)\ \text{est l'ensemble des A.L. de } E \text{ dans } F$$

$$\text{Si } F=E\quad L\left(E;E\right)=L\left(E\right)$$

schéma 18/02/2011 - 1
endomorphisme

{endomorphismes} = {bijection linéaire de E dans E} = Groupe linéaire de E = « G.L. de E »

2.2 Noyau et image

La noyau de $\varphi=\left\{\overrightarrow{u}\in E:\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)=\overrightarrow{O_F}\right\}=\text{Ker }\varphi$

$$\text{Ker }\varphi\neq\ \text{car }\overrightarrow{OE}\in\text{Ker }\varphi$$

$$\text{Ker }\varphi\subset E,\text{ qui est }K\text{-ev}$$

$$\text{Ker }\varphi\text{est stable car}\forall\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{u'}\right)\in\text{Ker }\varphi\forall\left(\alpha,\beta\right)\in K^2$$

$$\overrightarrow{w}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u'}\ \ \varphi\left(\overrightarrow{w}\right)=\varphi\left(\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u'}\right)=\alpha\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)+\beta\varphi\left(\overrightarrow{u'}\right)=\overrightarrow{O_F}$$

rac

$$\text{Ker }\varphi\text{ est sev de }E$$

Ex. 1

$$p\ inL\left(\mathbb{R}^3\right)\ \ \text{Ker }p=\left\{\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^3:p\left(\overrightarrow{u}\right)=\overrightarrow{O_{\mathbb{R}^3}}\right\}$$

$$\text{Ker }p=\left\{O_z\right\}$$

sch. 18/02/2011 - 2

$\varphi\in L\left(E;F\right)$, on appelle image de φ l'ensemble des $\overrightarrow{v}\in F$ tq $\exists\overrightarrow{u}\in E:\overrightarrow{v}=\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)$

$$\text{On la note }Im\varphi=\left\{\overrightarrow{v}\in F:\exists\overrightarrow{u}\in E:\overrightarrow{v}=\varphi\left(\overrightarrow{u}\right)\right\}$$

$$Im\varphi\text{ est sev de }F$$

car Soit $\overrightarrow{v_1}\in Im\varphi$; dc $\exists\overrightarrow{u_1}\in E:\overrightarrow{v_1}=\varphi\left(\overrightarrow{u_1}\right)$ Soit $\overrightarrow{v_2}\in Im\varphi$; dc $\exists\overrightarrow{u_2}\in E:\overrightarrow{v_2}=\varphi\left(\overrightarrow{u_2}\right)$

$$F\text{ est K-ev}\ \ Im\varphi\emptyset F$$

$$Im\varphi\neq\ \ \text{car }\overrightarrow{O_F}\in Im\varphi\text{ rac}$$

$$\alpha\left(\alpha;\beta\right)\in K^2\ \ \varphi\left(\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}\right)=\alpha\varphi\left(\overrightarrow{u_1}\right)+\beta\varphi\left(\overrightarrow{u_2}\right)=\alpha\overrightarrow{v_1}+\beta v_2\in Im\varphi$$

$Im\varphi$ est stable. rac
On appelle rang de φ la dimension de $Im\varphi$

$$\text{rg } \varphi = \dim Im\varphi$$

$$\text{rq } \varphi \leqslant \dim F \text{ car } Im\varphi \emptyset F \text{rac}$$
$$\text{rg } \varphi \leqslant \dim E$$

$$\text{car : Soit } B \text{ base de } E \quad B = \left\{\overrightarrow{b_i}\right\} \rightarrow \text{rg } \varphi \leqslant \min\left(\dim E; \dim F\right)$$

$$\forall \overrightarrow{u} \in E \ \overrightarrow{u} = \sum \alpha_i \overrightarrow{b_i}$$
$$\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \sum \alpha_i \varphi\left(\overrightarrow{b_i}\right)$$

Les $\varphi\left(\overrightarrow{b_i}\right)$ sont des générateurs de $Im\varphi$ donc rg $\varphi = \dim Im\varphi \leqslant$ card $\left\{\varphi\left(\overrightarrow{b_i}\right)\right\} = \dim E$ rac

$$\varphi \text{ est subjective} \iff Im\varphi = F \iff \text{rg } \varphi = \dim F$$

2.3 Appli linéaire injective

φ est injective *ssi* $\varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \varphi\left(\overrightarrow{u'}\right) \implies \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u'}$ alors $\varphi\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u'}\right) = \overrightarrow{O_F} \implies \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u'} = \overrightarrow{O_E}$ dc $\varphi\left(\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{O_F} \implies \overrightarrow{w} = \overrightarrow{O_E}$ donc Ker $\varphi = \left\{\overrightarrow{O_E}\right\} \iff$ dim Ker $\varphi = 0$

$$\varphi \text{ injective} \implies \dim \text{Ker } \varphi = 0 \iff \text{Ker } \varphi = \left\{\overrightarrow{O_E}\right\}$$

2.4 A.L. dans le cas fini

Supposons $\dim E = n$ dim Ker $\varphi \leqslant n$ rg $\varphi = p = \dim Im\varphi \leqslant n$

$$\text{Soit } p = \text{dim Ker } \varphi$$

On montre que

$$\dim \text{Ker}\varphi + \text{rg } \varphi = \dim E \quad \text{« théorème du rang »}$$

φ injective $\implies$ dim Ker $\varphi = 0 \implies \dim Im\varphi = \dim E$

$$\text{dim Ker } \varphi = 0 \iff \text{Ker } \varphi = \left\{\overrightarrow{O_E}\right\} \iff \forall \overrightarrow{u} \in E \text{tq} \varphi\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{O_F} \ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{O_E}$$

Ex (typique DE)

$$\varphi \in L\left(\mathbb{R}^3\right) \;\; \varphi(x;y;z) = (x+y-z; x-y; 2x-y)$$

Noyau et image de φ

$$\text{Ker } \varphi = \{(x;y;z) : \varphi(x;y;z) = (0;0;0)\}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} x+y-z & = & 0 \\ x-y & = & 0 \\ 2x-y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } z = x+y$$

$$\text{Ker } \varphi = \{(x;y;x+y) \;\; \text{tq } x-y=0\}$$

$$\text{donc } y = x$$

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi &= \{(x;x;2x)\} \\ &= \{x(1;1;2)\} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{e_i}$ est base de Ker φ

donc dim Ker $\varphi = 1$ φ n'est pas injective ; φ n'est pas bijective

Les équations sont au nombre de $\dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{ Ker } \varphi = 3 - 1 = 2$ par exemple $z = x+y$ et $y = x$

Appliquons le théorème du rang

$$\dim \text{Ker } \varphi + \text{rg } \varphi = \dim \mathbb{R}^3$$

$$\text{rg } \varphi = 2 = \dim Im\varphi < \dim \mathbb{R}^3 \;\; \varphi \text{ n'est pas surjective}$$

Base de $Im\varphi$

$$Im\varphi = \{(X;Y;Z)\, \text{tq} \exists\, (x;y;z) \;\; (X;Y;Z) = (x+y-z; x-y; 2x-y)\}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X & = & x+y-z \\ Y & = & x-y \\ Z & = & 2x-y \end{array} \right.$$

Eliminons x, y et z

d'où $x = X - y + z$

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{lcl} Y & = & X-y+z-y \\ Z & = & 2X-2y+2z-z \end{array} \right.$$

$$\text{soit} \left\{ \begin{array}{lcl} -x+Y & = & -2y+z \\ -2X+Z & = & -2y+z \end{array} \right.$$

d'où $-X+Y=-2X+Z$
$X+Y-Z=0$ **équation de** $Im\varphi$

$$Im\varphi = \{(X;Y;Z) \text{ tq } X+Y-Z=0\}$$
$$Im\varphi = \{(X;Y;X+Y)\}$$
$$Im\varphi = \{X\,(1;0;1)+Y\,(0;1;1)\}$$

$\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ sont génératrices de $Im\varphi$ $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ sont libres

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\a+b\end{pmatrix}\Longrightarrow a=b=O$$

$$\left(\overrightarrow{f_1},\overrightarrow{f_2}\right) \text{ est base de } Im\varphi$$

Ex 2 : Code de Haming

$$K=\{0;1\}=F_2$$

$$m\in K^4 \quad H\,(m)=M\in K^8$$

$$m=(x_1,x_2,x_3,x_4)$$
$$M=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_1+x_2,x_3+x_4,x_1+x_3,x_2+x_4)$$

H est une A.L. de K^4 dans K^8

$$\text{Ker } H=\{m=(x_1,x_2,x_3,x_4):H\,(m)=(0,0,0,0,0,0,0,0)\}$$

$$\Longrightarrow x_1=0 \; x_2=0 \; x_3=0 \; x_4=0 \; x_2+x_4=0$$

$$\text{Ker } H=\{(0,0,0,0)\}$$

H est injective :-)
il y a 16 messages clairs possibles.

$$\dim \text{Ker } H+\text{rg } H=\dim K^4$$
$$\text{rg } H=4=\dim ImH<\dim K^8$$

base de ImH

$$
\begin{array}{rcl}
ImH & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_1+x_2,...,x_2+x_4)\} \\
 & = & \{x_1\,(1,0,0,0,1,0,1,0) \\
 & + & x_2\,(0,1,0,0,1,0,0,1) \\
 & + & x_3\,(0,0,1,0,0,1,1,0) \\
 & + & x_4\,(0,0,0,1,0,1,0,1)\}\text{ 4 vecteurs de base de } ImH
\end{array}
$$

3 Matrices

3.1 Définition

sch. 04/03/2011 - 0

$$\varphi\left(\vec{u}\right)=\vec{v}$$

$$\vec{u}=x_1\vec{e_1}+\ldots+x_n\vec{e_n}$$

$$\varphi\left(\vec{u}\right)=\varphi\left(\sum_{j=1}^{j=n}x_j\vec{e_j}\right)=\sum_{j=1}^{j=n}x_j\varphi\left(\vec{e_j}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi\left(\vec{e_1}\right)=a_{11}\vec{f_1}+\ldots+a_{pi}\vec{f_p}\\ \varphi\left(\vec{e_j}\right)=a_{1j}\vec{f_1}+\ldots+a_{pj}\vec{f_p}\\ \varphi\left(\vec{e_n}\right)=a_{1n}\vec{f_1}+\ldots+a_{pn}\vec{f_p}\end{array}\right.$$

$$\text{donc }\varphi\left(\vec{u}\right)=\sum_{j=1}^{j=n}x_j\left(\sum_{i=1}^{i=p}a_{ij}\vec{f_i}\right)=\sum_{i=1}^{i=p}y_i\vec{f_i}$$

$$\text{d'où }y_i=\sum_{j=1}^{j=n}a_{ij}x_j$$

$$\text{(S)}\quad\left\{\begin{array}{l}y_1=a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n\\ \ldots\\ y_p=a_{p1}x_1+\ldots+a_{pn}x_n\end{array}\right.$$

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_p\end{pmatrix}\text{ matrice à } p \text{ lignes et 1 colonne}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\text{ matrice à } n \text{ lignes et 1 colonne}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ a_{p1}&\cdots&a_{pn}\end{pmatrix}\text{ matrice à } p \text{ lignes et } n \text{ colonnes}$$

$$(\mathrm{S}) \iff Y_{p1} = A_{pn} X_{n1}$$

$$A \text{ a pour vecteur colonne } C_j = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix} = \varphi\left(e_j\right)$$

$$\boxed{A = \mathrm{mat}\left(\varphi; \mathscr{B}_E; \mathscr{B}_{\mathscr{F}}\right)}$$

$$\boxed{\text{tout le } j^{\text{e}} \text{ vecteur colonne est } \varphi\left(\vec{e_j}\right)}$$

Ex.

$$\varphi \quad \mathbb{R}^2 \Longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \vec{v}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \varphi\left(x, y\right) = \left(x, 2y, x + y\right)$$

Dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

$$A = \text{ matrice associée à } \varphi \text{ est } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{array}{l} X = 1.x + 0.y \\ Y = 0.x + 2.y \\ Z = 1.x + 1.y \end{array}$$

Ex. 2

$$\text{Sym } / \; Ox \text{ dans } \mathbb{R}^2 = S$$

sch. 04/03/2011 - 1

$$\text{Sym}\left(\vec{i}\right) = \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sym}\left(\vec{j}\right) = -\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.2 Quelques propriétés

Matrice nulle $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \Theta_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Theta_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Égalité de matrices $A = B$ *ssi* elles ont la même taille p, n et $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall\ i = 1 \dots p\ \forall\ j = 1 \dots n$.

Transposition $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{p1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{pn} \end{pmatrix}$

$${}^t\left({}^tA\right) = A \text{ La transposition est } \textbf{involutive}.$$

3.3 Quelques opérations

$$\varphi \in \mathscr{L}(E, F) \to A_{p,n} \in \mathscr{M}_{p,n}(K)$$
$$\varphi' \in \mathscr{L}(E, F) \to A'_{p,n} \in \mathscr{M}_{p,n}(K)$$
$$\varphi'' = \varphi + \varphi' \to A''_{p,n} \in \mathscr{M}_{p,n}(K)$$

$$A'' = A + A'$$

$$a''_{ij} = a_{ij} + a'_{ij} \quad \forall\ i, j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{impossible}$$

$$A = (a_{ij})_{p,n} \quad \forall\ \lambda \in K \quad \lambda.A = (\lambda a_{ij})_{p,n}$$

ex.

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\lambda(A + B) = \lambda 1 + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$$

$$(\mathscr{M}_{p,n}(K), +) \text{ est un groupe abélien}$$
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

Très bo :

$$\to \{\mathscr{M}_{p,n}(K), +, .\} \text{ est un } K\text{-ev}$$

$$\text{Rmq } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m_2} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{m_3} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{m_4}$$

$$\{m_1; m_2; m_3; m_4\} \text{ sont génératrices de } \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}) \text{ de plus elles sont libres.}$$

$$\text{Donc, elles forment une base de } \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$$

$$\text{donc } M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$$

$$\boxed{\dim \mathscr{M}_{p,n}(K) = p.n}$$

$$\boxed{0.A_{p,n} = \Theta_{p,n}}$$

$$^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

$$^t(\lambda A) = \lambda.{}^tA$$

3.4 Composition d'applications et produit de matrices

$$f \in \mathscr{L}(E, F) \quad j \in \mathscr{L}(F, G) \quad h \in \mathscr{L}(E, G)$$
$$A = \mathrm{mat}(f; \mathscr{B}_E; \mathscr{B}_F) \quad B = \mathrm{mat}(g; \mathscr{B}_F; \mathscr{B}_G) \quad C = \mathrm{mat}(h; \mathscr{B}_E; \mathscr{B}_G)$$

$$\text{On dit que } C_{qn} = B_{qp}.A_{pn}$$

$$(C_{ij})_{qn} = (b_{ik})(a_{kj})$$

$$C = BA \iff C_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} b_{ik}a_{kj} \qquad \begin{array}{l} \forall\ i = 1 \ldots q \\ \forall\ j = 1 \ldots n \end{array}$$

Démonstration : La colonne C_j de C est $C_j = h(\vec{e_j}) = g[f(e_j)]$

$$f(\vec{e_j}) = j^{\text{e}}\text{colonne de } A = a_{1j}\vec{f_1} + \ldots + a_{pj}\vec{f_p}$$

$$
\begin{aligned}
\text{donc } h\left(\vec{e_j}\right) &= g\left[a_{1j}\vec{f_1} + \ldots + a_{pj}\vec{f_p}\right] \\
&= a_{1j}g\left(\vec{f_1}\right) + \ldots + a_{pj}g\left(\vec{f_p}\right)
\end{aligned}
$$

$$
h\left(\vec{e_j}\right) = a_{1j}\left(b_{11}\vec{g_1} + \ldots + b_{q1}\vec{g_q}\right) + \ldots + a_{pj}\left(b_{1p}\vec{g_1} + \ldots + b_{qp}\vec{g_q}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
h\left(\vec{e_j}\right) &= \vec{g_1}\left(a_{1j}b_{11} + \ldots + a_{pj}b_{1p}\right) + \ldots + \vec{g_Q}\left(a_{1j}b_{q1} + \ldots + a_{pj}b_{qp}\right) \\
&= j^{\text{e}}\text{colonne de } C = C_{1j}\vec{g_1} + \ldots + C_{pq}\vec{g_q}
\end{aligned}
$$

$$
\text{d'où } C_{ij} = \sum_{k=1}^{k=p} b_{ik}a_{kj}
$$

Ex. 1

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
B_{2,4}A_{3,2} = \text{impossible}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
A_{3,2}.B_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & 20 & 8 \\ 3 & 1 & -10 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -8 & 17 \\ -16 & 38 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
(A.B)_{34}.C_{42} = \qquad (AB)_{34} \qquad (AB).C
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
B_{2,4}C_{4,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$A_{3,2}.\left(BC\right)_{2,2}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -17\\ -16 & 38\\ 4 & -12\end{pmatrix}=\left(AB\right).C$$

Le produit de matrice est associatif.
Le produit de matrice n'est pas commutatif : $AB\neq BA$
Le produit de matrice est distributif :

$$\left(A+B\right).C=AC+AB$$

$$A.\left(B+C\right)=AB+AC$$

$$\lambda.\left(AB\right)=\left(\lambda.A\right).B=A.\left(\lambda.B\right)$$

$$A_{m,p}.\Theta_{p,q}=\Theta_{m,q}\qquad\text{la réciproque n'est pas forcément vraie.}$$

$$^{t}\left(A.B\right)={}^{t}B.{}^{t}A$$

3.5 Rang d'une matrice

$$A_{p,n}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & a_{ij} & \vdots\\ a_{p1} & \cdots & a_{pn}\end{pmatrix}=\left(\varphi\left(\vec{e_1}\right)\varphi\left(\vec{e_2}\right)\ldots\varphi\left(\vec{e_n}\right)\right)=\left(\vec{C_1},\vec{C_2}\ldots\vec{C_n}\right)$$

$$\begin{array}{rcl}\text{Le rang de } A\text{, noté rg } A & = & \text{rg (vecteur.colonnes)}\\ & = & \dim\left\langle\vec{C_1}\ldots\vec{C_n}\right\rangle\\ & = & \text{rg }\left(\left\langle\varphi\left(\vec{e_1}\right)\ldots\left(\vec{e_n}\right)\right\rangle\right)\\ & = & \text{rg }\varphi.\dim\varphi\end{array}$$

Obtenu par le pivot de Gauss.

3.6 Endomorphismes

$$\varphi\in\mathscr{L}\left(E\right)\ \rightarrow\ A=\text{mat}\left(\varphi\ ;B_E\right)$$

$$\dim E=n\quad A\text{ est carré de taille }n,n$$

$$A\in M_n\left(K\right)$$

$$\text{Matrice nulle : }\Theta_n=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$\text{Soit Id}_E:\forall\ \vec{u}\in E\ \ \text{Id}_E\left(\vec{u}\right)=\vec{u}$$

$$\rightarrow \text{ Matrice associée } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{pmatrix}$$

Symbole de Kroneckar δ_{ij}

$$\delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$
$$\delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j$$

$$I = (\delta_{ij}) = \text{« matrice identité »}$$

Remarque :

$$A_{m,n} I_n = A_{m,n} \quad \forall\ A \quad I \text{ est élément neutre pour la multiplication } I.A = A$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{matrice diagonale}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda.I$$

$$\text{Donc } \Delta_\lambda.A = \lambda.I.A = \lambda.A$$

$$T_\delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & t_{ij} \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda.I$$

$$T_{\text{inf}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & 0 \\ t_{ij} & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda.I$$

A est symétrique ssi ${}^tA = A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A est antisymétrique ssi ${}^tA = -A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{U_n(K), +, \circ\} \text{ est un anneau non commutatif}$$

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$$

$$A - (a_{ij})_{mn}$$

$$\text{Trace de } A : \text{tr } A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

4 Automorphisme

$$\varphi \in \mathscr{L}(E) \quad \text{inversible ou bijective } \rightarrow A \in u_n(K)$$

$$\exists \varphi^{-1} \in \mathscr{L}(E) \quad A^{-1} \in U_n(K)$$

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_E$$

$$A.A^{-1} = I = A^{-1.A}$$

$$A^{-1} \text{ est l'inverse de } A$$

$$\begin{array}{rcl} A.B = A.C & \Rightarrow & A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \\ & & \left(A^{-1}A\right)B = \left(A^{-1}A\right)C \end{array}$$

$$\text{ssi } IB = IC$$

$$A \text{ est inversible } B = C$$

$$A.B = \Theta \text{ avec } A \text{ inversible } \Rightarrow B = \Theta$$

$$\varphi \text{ est automorphisme de } E \Leftrightarrow \varphi \text{ est surjective } \Leftrightarrow \dim I_n = \dim E$$

$$\Leftrightarrow \text{rg } \varphi = n \Leftrightarrow \text{rg } A = n \Leftrightarrow \text{les } n \text{ vecteurs colonnes de } A \text{ sont libres.}$$

$$\rightarrow A \text{ est inversible ssi ses } n \text{ vecteurs colonnes sont libres}$$

$$\rightarrow \varphi \text{ est subjective } \Leftrightarrow \text{ rg } \varphi = n \text{ or } \dim \text{Ker } \varphi + \text{ rg } \varphi = n$$

$\Leftrightarrow$ dim Ker $\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi$ est injective (pour les automorphismes)

$$(A.B)\left(B^{-1}.A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$
$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$
$$\text{De même } \left({}^tA\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)$$

$$A \text{ est inversible } = {}^tA \text{ l'est}$$

Donc, les n vecteurs colonnes de A sont libres et les n vecteurs lignes de A sont libres

4.1 Calcul de l'inverse de A

$$A = (a_{ij}) \quad \text{on cherche } A^{-1} \text{ tq } AA^{-1} = I$$

4.1.1 Identification

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad A^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} a-c=1 \\ b-d=0 \\ 2a+3c=0 \\ 2b+3d=1 \end{cases}$$
$$d = b \quad c = \frac{-2a}{3} \quad a = \frac{3}{5} \quad c = \frac{-2}{5}$$
$$A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1.2 Résolution par système associé

$$A \to \text{système } Y = AX \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } A^{-1}Y = X$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 3x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3y_1 + y_2 \\ x_2 = -2y_1 + y_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

4.1.3 Inversion progressive (malin)

$$\begin{array}{ccc} A & & I \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 + \frac{L_2}{5} \\ L_2 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} L_1 \\ \frac{L_2}{5} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \end{array}$$

4.2 Changement de base

sch. 25/03 - A

$$\mathscr{B} = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$$
$$\mathscr{B}' = \left\{\vec{e_1'}, \dots, \vec{e_n'}\right\}$$

$$\vec{e_j'} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{ij} \vec{e_i}$$

$$P = \left(\begin{pmatrix} \vec{e_1'} & \dots & \vec{e_n'} \\ \alpha_{11} & & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & & \alpha_{2n} \\ \cdots & & \cdots \\ \alpha_{n1} & & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \right)$$

C'est la « matrice de passage » de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. ou matrice de changement de base.

P est inversible.

$$\vec{u} = x_1 \vec{e_1} + \ldots + x_n \vec{e_n} = x' \vec{e_1'} + \ldots + x_n' \vec{e_n'}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

d'où
$$\begin{aligned} \vec{u} &= x'_1\left(\alpha_{11}\vec{e_1} + \ldots + \alpha_{n1}\vec{e_n}\right) + \ldots + x'_n\left(\alpha_{1n}\vec{e_1} + \ldots + \alpha_{nn}\vec{e_n}\right) \\ &= \underbrace{(x'_1\alpha_{11} + \ldots + x'_n\alpha_{1n})}_{x_1}\vec{e_1} + \ldots + \underbrace{(x'_1\alpha_{n1} + \ldots + x'_n\alpha_{nn})}_{x_n}\vec{e_n} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \cdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Donc

$$\boxed{X = PX'}$$
$$X' = P^{-1}X$$

sch. 25/03 - B

$$A = \text{mat}\left(\varphi; \epsilon_1; \mathscr{F}_1\right) \quad Y_1 = AX_1 \quad X_1 = PX_2$$
$$B = \text{mat}\left(\varphi; \epsilon_2; \mathscr{F}_2\right) \quad Y_2 = AX_2 \quad Y_1 = QY_2$$

$$\text{d'où } Y_1 = QBX_2 = \underbrace{QBP^{-1}}_{A}X_1 \quad A = QBP^{-1}$$
$$\text{d'où } \boxed{B = Q^{-1}AP}$$

Cas particulier :

$$F = E \quad \varphi \in \mathscr{L}\left(E\right)$$
$$\text{alors } Q = P$$

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

On cherche, en général, si c'est possible, à trouver P pour que B soit une diagonale D alors $D = P^{-1}AP$. Alors $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

5 Déterminants

5.1 Groupe symétrique

$$E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$$

On appelle permutation φ une bijection de E_n dans E_n.

$$\text{Posons } \alpha_i = \varphi(i) \quad \alpha_i \neq \alpha_j \text{ si } i \neq j$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \mathscr{S}_n = \{\varphi \text{ bijection sur } E_n\} \quad \text{l'identité } e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

On peut composer des permutations

$(\mathscr{S}_n, \circ)$ est un groupe (non commutatif) appelé **groupe symétrique**

On appelle **transposition** τ_{ij}, la permutation qui i et j.

$$\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$$

Toute permutation est un produit de transposition.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \tau_{12} \circ \tau_{25} \circ \tau_{56} \circ \tau_{34}$$

En effet $\quad 1\,2\,3\,4\,5\,6 \overset{\tau_{34}}{\to} 1\,2\,4\,3\,5\,6 \overset{\tau_{56}}{\to} 1\,2\,4\,3\,6\,5 \overset{\tau_{25}}{\to} 1\,5\,4\,3\,6\,2 \overset{\tau_{12}}{\to} 2\,5\,4\,3\,6\,1$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

On dit α_i présente une inversion par rapport à α_j si $\alpha_i > \alpha_j$ et $i < j$.

$$I(\varphi) = \text{ nb d'inversions de } \varphi$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 prsente \qquad 1 inversion \tag{3}$$
$$5 prsente \qquad 3 inversions \tag{4}$$
$$4 prsente \qquad 2 inversions \tag{5}$$
$$3 prsente \qquad 1 inversion \tag{6}$$
$$6 prsente \qquad 1 inversion \tag{7}$$

$$I\left(\varphi\right) = 8 \text{ inversions}$$

On appelle signature $\epsilon\left(\varphi\right)$, le nombre $\epsilon\left(\varphi\right) = \left(-1\right)^{I(\varphi)}$
Ici $\epsilon\left(\varphi\right) = 1$. On dit que φ est paire.
Quelques théorèmes :

$$\epsilon\left(\tau_{ij}\right) = -1$$
$$\epsilon\left(\varphi_1 \circ \varphi_2\right) = \epsilon\left(\varphi_1\right) \circ \epsilon\left(\varphi_2\right)$$

5.2 Forme multilinéaire

E K-ev de dimension n. On appelle forme linéaire une application linéaire de E dans K.

Soit n vecteurs $\vec{V_1}, \ldots, \vec{V_n} \in E$

On appelle forme multilinéaire $f\left(\vec{V_1}, \ldots, \vec{V_n}\right)$ une application de E^n dans K, linéaire par rapport à $\vec{V_i}$, $\forall i$.

On dit que f est alternée *ssi* $f\left(\ldots V_i, \ldots, V_j, \ldots\right) = f\left(\ldots V_j \ldots V_i \ldots\right)$.

Conséquence 1 : $f\left(\ldots V_i, \ldots, V_i, \ldots\right) = 0$. Conséquence 2 : f (famille liée) $=$ 0.

Soit $\{\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\}$ base de E.

$$\vec{V_1} = \sum_{j_1=1}^{j_1=n} a_{1j_1}\vec{e_{j_1}} \quad V_i = \sum_{j_i=1}^{j_i=n} a_{i_{j_2}}\vec{e_{j_i}}$$

$$f\left(\vec{V_1}, \ldots, \vec{V_n}\right) = \sum_{\varphi \in \mathscr{S}_n} \left(-1\right)^{\epsilon(\varphi)} a_{1\varphi(n)} \ldots a_{n\varphi(n)} f\left(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}\right)$$

5.3 Définition d'un déterminant

On appelle déterminant de $\vec{V_1}, \ldots, \vec{V_n}$ la forme multilinéaire alternée prenant la valeur 1 sur la base

On le note

$$\boxed{\Delta = \det\left(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \ldots, \vec{V_n}\right) = \sum_{\varphi \in \mathscr{S}_n} \epsilon(\varphi)\, a_{1\varphi(1)} \ldots a_{n\varphi(n)}}$$

$$\vec{V_1} = (a_{11} \ldots a_{1n}) \quad \text{n coordonnées de } \vec{V_1}$$

$$\vec{V_n} = (a_{n1} \ldots a_{nn}) \quad \text{n coordonnées de } \vec{V_n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det\ A = |A| = \det \underbrace{\left(\vec{V_1}, \ldots, \vec{V_n}\right)}_{\text{écrits en ligne}}$$

Ex

$$n = 1$$

$$A = (a_{11})$$

$$\boxed{|A| = a_{11}}$$

$$n = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{S}_2 : \varphi_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \varphi_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon(\varphi_1) = +1$$

$$\epsilon(\varphi_2) = (-1)^1 = -1$$

$$\begin{aligned} \det(A) = |A| &= \epsilon(\varphi_1)\, a_{1\varphi_1(1)} a_{2\varphi_1(2)} + \epsilon(\varphi_2)\, a_{1\varphi_2(1)} a_{2\varphi_2(2)} \\ &= +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

lemme car $\mathscr{S}_n = n!$
$n = 3$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \ \epsilon_1 = +1$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \ \epsilon_2 = -1$$

$$\varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \ \epsilon_3 = -1$$

$$\varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \ \epsilon_4 = +1$$

$$\varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ \epsilon_5 = +1$$

$$\varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ \epsilon_6 = -1$$

$\Delta = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Règle de sarrus, ne marche que pour $n = 3$
$n > 3$: il faut trouver des règles de calcul.

Remarque : $|A| \neq 0 \Leftrightarrow$ ses n vecteurs lignes sont libres $\Leftrightarrow$ rg $A = n \Leftrightarrow$ ses n vecteurs colonnes sont l

Règle 1 : $|^tA| = A$(admis). Règle 2 : $|A.B| = |A|.|B|$. Règle 3 : $|I| = 1$.
Règle 4 : $|A.A^{-1}| = |A|.|A^{-1}| = |I| = 1$.

5.4 Règles de calcul

$$\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_n \end{vmatrix} = \Pi_{i=1}^{i=n} d_i$$

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t_{21} & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ t_{ij} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} & t_{n4} & d_n \end{vmatrix} = T_{inf} = \Pi_{i=1}^{i=n} d_i$$

$$\begin{vmatrix} I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det(v_1, \dots, v_n) = 0 \ \text{ ssi la famille } v_1 \dots v_n \text{ est liée}$$

$$\left|\lambda .A\right| = \lambda^n . \left|A\right| \quad \text{si } A \text{est de taille } n.n$$

$$\left|A\right| . \left|A\right| = \left|AB\right|$$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{\left|A\right|}$$

$$\left|{}^tA\right| = \left|A\right|$$

On ne change pas un det en ajoutant à une ligne une C.L. des autres lignes de ω pour les colonnes.

$$\left|A\right| = \Delta = \text{sch. d'ordre } n = \sum_{\varphi \in \mathscr{S}_n} \epsilon\left(\varphi\right) a_1 \varphi\left(1\right) \ldots a_n \varphi\left(n\right)$$

On appelle **mineur** de a_{ij}, noté m_{ij}, le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j dans Δ.

$$\min A = \begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle **cofacteur** de a_{ij}, noté $K_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} m_{ij}$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} +m_{11} & -m_{12} & \ldots & +\left(-1\right)^{i+n} m_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ +\left(-1\right)^{n+1} m_{n1} & & \ldots & +\left(-1\right)^{n+n} m_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & \ldots & K_{in} \\ K_{n1} & \ldots & K_{nn} \end{pmatrix} = \text{com}A \quad \text{comatrice de} A}$$

$$\boxed{\left|A\right| \overset{L_i}{=} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} K_{ij}, \ \forall i = 1, \ldots, n \quad \text{c'est le développement de } \left|A\right| \text{ selon } L_i}$$

et

$$\boxed{\left|A\right| \overset{C_j}{=} \sum_{i=1}^{i=n} a_{ij} K_{ij}, \ \forall j = 1, \ldots, n}$$

Ex.

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -8$$

$$\text{com } A = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 11 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\min A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ -11 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &\overset{L_1}{=} 1\,(-7) + 2\,(-2) + 3\,(1) = -8 \\ &\overset{L_2}{=} 0\,(11) + 1\,(2) + 2\,(-5) = -8 \\ &\overset{L_3}{=} -1\,(1) + 3\,(-2) - 1\,(1) = -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &\overset{C_1}{=} 1\,(-7) + 0\,(11) - 1\,(1) = -8 \\ &\overset{C_2}{=} 2\,(-2) + 1\,(2) + 3\,(-2) = -8 \\ &\overset{C_3}{=} 3\,(1) + 2\,(-5) - 1\,(1) = -8 \end{aligned}$$

Malin : on développe selon C_1.
Supermalin :

$$\left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}_{L_3+L_1} =^{C_1} 1.\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

5.5 Calcul de A^{-1}

$$A = \left(a_{ij}\right)_{n,n} \quad \text{inversible} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

$$K_{ij} \quad \text{cofacteur de } A_{ii} \quad \text{com } A = (K_{ij})$$

$$\Delta = |A| = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} K_{ij}, \forall i$$

$${}^{t}\text{com } A = (b_{jk})$$

$$b_{jk} = K_{kj}$$

$$A^{t}\text{com } A = C = (C_{ij})$$

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} K_{kj}$$

$$C_{kk} = \sum_{j=1}^{j=n} a_{kj} K_{kj} = |A| \quad \text{et } C_{ik} = 0 \text{ si } i \neq k$$

$$A^t\text{com } A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = |A|.I \quad \text{d'où } A.\frac{{}^t\text{com } A}{|A|} = I$$

$$\boxed{A^{-1} = \frac{{}^t\text{com } A}{|A|}}$$

Exemple :

$$A.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad |A| = |ad - bc|$$

$$\text{min } A = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{com } A = \begin{pmatrix} d & -c & -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Application géométrique :
Dans $\mathbb{R}$

$$OA_1SA_2//oy \text{ d'aire algébrique } \mathscr{A} = \varphi\left(\vec{OA_1}, \vec{0A_2}\right) \in \mathbb{R}$$

$\mathscr{A}$ est une forme linéaire dans 2 vecteurs $\vec{OA_1}$ et $\vec{OA_2}$, alternés

$$\mathscr{A}_{//oy\ OA_1SA_2} = \det\left(\vec{OA_1}, \vec{OA_2}\right) \quad \text{superbô}$$

Dans $\mathbb{R}^3$, le volume du parallélépipède construit sur OA_1, OA_2, OA_3 est $\det\left(\vec{OA_1}, \vec{OA_2}, \vec{OA_3}\right)$

6 Résolution de systèmes linéaires

6.1 Définition et résolution théorique

Système de n équations linéaires à p inconnues.

$$\left\{\begin{array}{l} A_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$$

$\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ rapportée à leurs bases canoniques $X \to \vec{X} \quad B \to \vec{B}$.

A est associée à l'application linéaire $f : \vec{B} = f\left(\vec{X}\right)$ (1) et $B_{n1} = A_{np}A_{n1}(1)$.

$$(S) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow (2)$$

(S) a une solution (au moins) ssi $\vec{B} \in Imf$

(S) a au plus une solution si f est injective

(S) a au moins une solution si f est subjective

(S) a une et une seule solution $\Leftrightarrow f$ est bijective $\Leftrightarrow A$ est carrée et inversible $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ et $n = p \Leftrightarrow$ On dit que l'on est « dans le "cas de Cramer" »

6.2 Cas de Cramer

$$n = p \; |A| \neq 0 \; (S) \Leftrightarrow AX = B$$

$$\text{d'où } \boxed{X = A^{-1}B} \quad X = \frac{{}^t\text{com } A}{|A|}B$$

$$C = {}^t\text{com } A = (C_{ij}) \quad \text{avec } C_{ij} = K_{ji}$$

$$\text{donc } \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} K_{11} & K_{21} & \ldots & K_{n1} \\ K_{1n} & K_{2n} & \ldots & K_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\sum_{j=1}^{j=n} K_{ji}b_j = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} K_{ji}b_j}{\sum_{j=1}^{j=n} K_{ji}a_{ji}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

Où $\Delta = |A|$.
Δ_1 est le déterminant obtenu en remplaçant dans A la 1$^{\text{re}}$colonne par B.

De même $\boxed{x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta} \text{où } \Delta_i \text{se déduit de } \Delta \text{en remplaçant la } i^{\text{e}} \text{colonne par le } 2^{\text{e}} \text{nombre}}$

Exemple :

$$\begin{cases} 2x + 7y = 4 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$$

$$n = p = z \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

On est dans le cas de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}}{3} = \frac{34}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-8}{3}$$

Exo. 2 :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x + 3z = -1 \end{cases}$$

$$n = p = 3 \quad \Delta \neq 0 \quad \text{on est dans le cas de Cramer}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

6.3 Cas général

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$$

n équations, p inconnues.

$$A = (a_{ij})_{np}$$

Soit Δ_q, un déterminant d'ordre q issu de A en supprimant $n-q$ lignes dans A.

On appelle rang r de (S), l'ordre du plus grand déterminant d'ordre r non nul issu de A.

Remarques :

1. Dans le cas de CRAMER $r = n = p$;
2. Dans le cas général $r \leq \inf(n;p)$;
3. Le rang de (S) de matrice A est le même que le rang du système de matrice ${}^tA$ et est égal au rang des vecteurs colonnes de A ou au rang de ses vecteurs lignes, c'est aussi le rang de A.

$$r = \text{rg}(S) = \text{rg } A$$

En organisant les équations et inconnues, (S) va devenir

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rp}x_p = b_r \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nr}x_r + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$$

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Les r premières équations sont les équations principales. Les r premières inconnues sont les inconnues principales.

Premier cas

$$r = n \quad \text{et} \quad p > r$$

On fait passer les inconnues non principales dans le deuxième nombre où elles deviennent des **paramètres**. (S) est alors un système de CRAMER avec r équations et inconnues principales.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{array}\right. \quad n = 2 \; p = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad r = 2$$

Les équations principales sont les deux premières. Les inconnues principales sont x et y.

$$\text{Donc } \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 - z \\ x - y = 2 - z \end{array} \right. \quad \text{de Cramer}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 2-z & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1+z-2+z}{-2} = \frac{-3+2z}{-2} = \frac{3}{2} = -z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2-z-1+z}{-2} = \frac{-1}{2}$$

A ne pas faire :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + z = 1 - y \\ x + z = 2 + y \end{array} \right.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{pas Cramer}$$

Deuxième cas

$$r < n$$

$$\text{équations principales} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + \ldots + a_{rp}x_p = b_r \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kr}x_r + \ldots + a_{kp}x_p = b_k \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nr}x_r + \ldots + a_{np}x_p = b_r \end{array} \right\} (n-r) \text{ équations principales}$$

On considère $(n-r)$ déterminants appelés **bordants** obtenues par

$$\beta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & \ldots b_1 \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & \ldots b_r \\ a_{k1} & \ldots & a_{kr} & \ldots b_k \end{vmatrix} \quad \text{pour } k = r+1 \text{ à } n$$

Si un bordant n'est pas nul (S) est impossible. Si les $(n-r)$ bordants sont nuls $(S) \equiv r$ équations principales qui se résout au cas (1).

Théorème de Fontené – Rouché Soit (S) un système de n équations linéaires à p inconnues et de rang r.

1. si $r = n = p$, on est dans le cas de Cramer, (S) a une solution unique ;
2. si $r = n < p$, on a n équations principales, n inconnues principales et $(p - n)$ inconnues non principales qui placées dans le deuxième nombre deviennent des paramètres d'un système de Cramer ;
3. $r < \inf(n, p)$, il existe r équations principales, r inconnues principales et $(n - r)$ bordants. Si un bordant est non nul, le système est impossible ; si tous les bordants sont nuls, le système est équivalent à ses r équations principales.

Exemple :

$$\begin{cases} x + ay = b \\ ax + y = c \end{cases} \quad n = 2 \; p = 2$$

Calcul du rang $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$

Premier cas

$$1 - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \notin \{-1\ ; 1\}$$

$$\text{alors } \Delta \neq 0 \quad r = 2 \text{ (ordre de } \Delta\text{)}$$

On est dans le cas de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b & a \\ c & 1 \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{b - ac}{1 - a^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b \\ a & c \end{vmatrix}}{1 - a^2} = \frac{c - ab}{1 - a^2}$$

Cas particulier n° 1

$$a = 1$$

$$\text{alors } (S) \text{ devient } \begin{cases} 1x + y = b \\ 1x + y = c \end{cases}$$

$$r = 1$$

La première équation est principale, x est principale.

$$\exists\, (n - r) = (2 - 1) = 1 \quad \text{Bordant } \beta = \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = c - b$$

Si $c - b \neq 0$, (S) est impossible
Si $c = b$, $(S) \Leftrightarrow \boxed{x = b - y}$ $\forall y \in \mathbb{R}$.

Deuxième cas particulier Si $a = -1$, (S) devient

$$\begin{cases} x - y = b \\ -x + y = c \end{cases} \quad n = p = z \quad r = 1 \text{ car } |1| = 1 \neq 0$$

La première équation est principale ; x est principale ; $\exists$ un bordant $\beta = \begin{vmatrix} 1 & b \\ -1 & c \end{vmatrix} = c + b$.

$$b \neq -c \quad \beta \neq 0, (S) \text{ est impossible}$$

$$b = -c \quad x = b + y \ \forall y$$

Récap.

$1 - a^2 \neq 0$	$x = \dfrac{b - ac}{1 - a^2} \quad y = \dfrac{c - ab}{1 - a^2}$
$a = 1$	$b \neq c$ Pas de solution $b = c \quad x = b - y \ ; \ \forall\, y \in \mathbb{R}$
$a \neq 1$	$b \neq -c$ Pas de solution $b = -c \quad x = b + y \ ; \ \forall\, y \in \mathbb{R}$

6.4 Systèmes homogènes

$$(S) \text{ est homogène ssi } \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

$\exists$ au moins une solution $x_1 = \ldots = x_p = 0$ c'est la solution **triviale**

Soit r le rang du système. $r = p = n$, on est dans le cas de CRAMER, il existe une seule solution, c'est donc la triviale.

Si $r < p$; les bordants sont toujours nuls, les $(p - r)$ inconnues non principales passent dans le deuxième nombre, deviennent des paramètres et on résout le CRAMER des p équations principales.

Exemple :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \qquad n = 3 \; p = 3 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

Calcul du rang :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}_{L_2+L_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{L_3-L_2} = 0$$

$$r \stackrel{?}{=} 2 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ donc } r = 2$$

Les deux premières équations sont principales ; x et y inconnues principales, il existe $(n - r) = 1$ bordant forcément nul.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z \\ x - y = -2z \end{cases} \quad \text{qui est de CRAMER } n = p = 2 = z$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -2z & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{z + 2z}{-2} = \frac{-3z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & -2z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2z + z}{-2} = \frac{z}{2}$$