EFREI -L1 mars 2009

ALGEBRE LINEAIRE – DE n°1
Sans documents ni calculatrice

Questions de cours :
Dans un espace vectoriel E, définir une famille libre et une famille génératrice de E.
Qu'est-ce que la dimension d'un espace vectoriel ?
Enoncer le théorème des 4 dimensions relatif à deux sous-espaces vectoriels F et G.
Définir le rang d'une famille de vecteurs, le rang d'une matrice, le rang d'une application linéaire.

Exercice n°1 :

Dans $\mathbf{R}^4$, on considère la famille $\mathcal{F} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ avec $\vec{a} = (1,1,1,1)$, $\vec{b} = (2,1,0,-1)$, $\vec{c} = (-2,-1,0,5)$ et $\vec{d} = (1,0,-1,2)$. Soit E=$<\vec{a},\vec{b}>$ et F=$<\vec{c},\vec{d}>$. Quel est le rang de la famille $\mathcal{F}$. Donner une relation linéaire entre les vecteurs de cette famille. Donner une base des espaces E+F et $E \cap F$. Quelle est l'équation de E+F ?

Exercice n°2 :
Soit φ un endomorphisme de R^4 défini par
$\varphi(x\,;y\,;z\,;t) = (x+y\,;x-y\,;2x+y-z+t\,;3x+6y-z+t)$
Donner les dimensions, bases et équations de l'image et du noyau de φ. Cette application est-elle injective, surjective, bijective ?

Exercice 3 :
On considère les matrices à coefficients réels A, B, C, D et E définies par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{et } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A+2.B ; A+C ; A.B ; D+E ; D+ ${}^tE$; D.E ; A.D ; A^2

Montrer qu'il existe α_n et β_n, entiers naturels tels

$A^n = \alpha_n A + \beta_n I$, où I est la matrice unité, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Calculer α_n et β_n et en déduire l'expression de A^n, en fonction de n.
Soient 3 points P_1, P_2 et P_3 non alignés, reliés l'un à l'autre par un chemin de longueur 1 ; montrer que le coefficient de ligne i et de colonne j de la matrice A^n est égal au nombre de chemins de longueurs n allant de P_i à P_j.