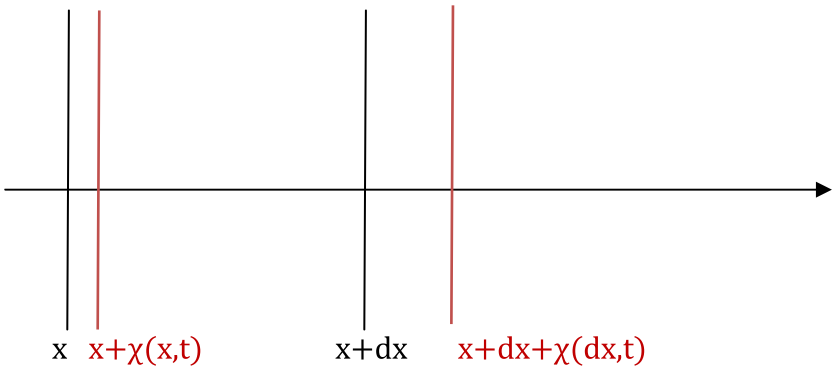
La voix et l'image

Rappel du dernier cours:



I.

pa=$p0 * \frac{dy}{dx}$

II.

Pa $= \frac{1}{P0.\chi0} pa$

III. Les inégalités de pression engendrent le mouvement du fluide:

- équation du mouvement :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$
$$m = m0 = p0 * \ S * \ dx$$
$$\vec{a} = \frac{d^2y}{dt^2} * \vec{e}_x$$
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_d = P(x) * S\,\vec{e}_x - P(x+dx) * S\,\vec{e}_x$$
$$\sum \vec{F} = \big(P(x) - P(x+dx)\big) * S\,\vec{e}_x$$
$$\sum \vec{F} = \frac{dP}{dx} * S\,\vec{e}_x \qquad\qquad (P = P0 + Pa)$$
$$\sum \vec{F} = -\frac{dPa}{dx} dx * S\,\vec{e}_x$$

Relation Fondamentale de la Statique :

$$p0\ S\ dx\ \frac{d^2y}{dt^2} * \vec{e}_x = -\frac{dPa}{dx} dx * S\,\vec{e}_x$$

III. $\Rightarrow$ $\boxed{p0\ S\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dPa}{dx}}$

- équation de propagation :

III. + II. $\Rightarrow$ $p0\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{d}{dx}(\frac{1}{P0.\chi0}pa) = \left(-\frac{1}{P0.\chi0}\right)\left(\frac{dpa}{dx}\right)$

+I. $\Rightarrow$ $p0\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{P0.\chi0} * \frac{d}{dx}\left(p0 * \frac{dy}{dx}\right)$

...

$$\boxed{\frac{d^2Pa}{dt^2} = \frac{1}{p0.\chi0} * \frac{d^2Pa}{dx^2}}$$

[Pa s-^{2}]=[$\frac{1}{p0\chi0}$] . [Pa.m-^{2}]

[p0χ0]=[$\frac{Pa s^{-2}}{Pa\ m^{-2}}$]=[m^2 s-^{2}]=(m.s-1)^2

On note: $\boxed{c = \sqrt(p0.\chi 0)}$ célérité de l'onde

$$\frac{d^2Pa}{dt^2} = \frac{1}{c^2} * \frac{d^2Pa}{dx^2}$$

c. Résolution de l'équation de d'Alembert (à 1 dimension)

- équation de d'Alembert : f(x,t)

$$\frac{d^2f}{t^2} = \frac{1}{c^2} * \frac{d^2f}{dx^2}$$

- changement de variable :

avec v = x-ct
w = x+ct

$\Rightarrow$ $x = \frac{v+w}{2}$
$t = \frac{w-v}{2}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv} * \frac{dv}{dx} + \frac{df}{dw} * \frac{dw}{dx} = \frac{df}{dv} * 1 + \frac{df}{dw} * 1$$

...

$$\boxed{\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2f}{dv^2} + \frac{2d^2f}{dv * dw} + \frac{d^2f}{dw^2}}$$

...

$$\boxed{\frac{d^2f}{dt^2} = c^2 * \left[-2\frac{d^2f}{dv * dw} + \frac{d^2f}{dv^2} + \frac{d^2f}{dw^2}\right]}$$

Application d'Alembert :
...

$$\frac{4(d^2f)}{dv * dw} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d^2f}{dv * dw} = 0}$$

- intégration par rapport à w:

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{df}{dv}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $\frac{df}{dv}$ constante quelconque par rapport à w
fonction quelconque de v g(v)

- intégration par rapport à v:

$f = \int g(x)dv$ + *constante quelconque par rapport à v*

fonction quelconque de v fonction quelconque de w

$$f(v, w) = f_+(v) + f_-(w)$$
$$f(x, t) = f_+(x - ct) + f_-(x + ct)$$

où f+ et f- sont 2 fonctions quelconques

$f_+(x - ct)$ est une onde progressive dans le sens des x croissants
$f_-(w + ct)$ est une onde progressive dans le sens des x décroissants

d. Vitesse du son

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{1}{p0\chi 0}}}$$

- Généralités : gaz - liquide - solide

(g) - (l) - (s)

en général:

$$ps > pl > pg$$
$$\chi s \ll \chi p \ll \chi g$$
$$\Rightarrow \qquad Cs > Cp > Cg$$

- Valeurs : en CNTP (P=1atm, T=20°C)
  air = 340 $m.s^{-1}$
  eau = 1480 $m.s^{-1}$
  glace = 3200 $m.s^{-1}$
  verre = 5300 $m.s^{-1}$
  béton = 3100 $m.s^{-1}$
  acier = 5200 $m.s^{-1}$
  granit = 6200 $m.s^{-1}$
- vitesse du son dans un gaz parfait
  loi des gaz parfaits : P.V=nRT
- loi de la variation adiabatique (sans échange de chaleur)

$$PV^{\delta} = constante$$

δ : coefficient adiabatique

δ=513 gaz monoatomique
δ=715 gaz diatomique

$$\chi = -\frac{1}{V} * \frac{dV}{dP}$$
$$PV^{\delta} = constante$$

$\Rightarrow \ln PV^{\delta} = \ln constante$
$\Rightarrow d(\ln P + \delta \ln V) = d\ (\ln(constante)\ )$
$\Rightarrow \frac{dP}{P} + \delta \frac{dV}{V} = 0 => \frac{dP}{P} = -\delta \frac{dV}{V}$
$\Rightarrow -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP} = \boxed{\frac{1}{\delta P} = \chi}$

Soit

$c = \frac{1}{\sqrt{p0\chi}} = \sqrt{\frac{\delta P}{p0}} = \sqrt{\frac{\delta PV}{m}}$

$c = \sqrt{\frac{\delta nRT}{m}} \qquad \frac{m}{n} = \mu = masse\ molaire$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{\delta RT}{\mu}}} = \alpha\sqrt{T}$$