Corrigé succinct – DE n°1 ; 116 points maxi théorique.

<u>Questions de cours : 14 points</u>

Voir cours

<u>Exercice n°1 : 26 points</u>

Par pivot de Gauss sur F on obtient 2 vecteurs non nuls, base de F qui a donc une dimension 2
Par pivot de Gauss sur G on obtient 2 vecteurs non nuls, base de G qui a donc une dimension 2
Par pivot de Gauss sur F+G on obtient un vecteur nul et 3 vecteurs non nuls, base de F+G, qui a donc une dimension 3.D'après le théorème des 4 dimensions, la dimension de $F \cap G$ est donc 1.Le vecteur nul nous donne la relation $-3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$ =vecteur nul.

D'où $-3\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} - \vec{d}$ =(2 ;-5 ;3 ;2) appartient à $F \cap G$, et est donc base de $F \cap G$. F+G est l'ensemble des vecteurs (x ;y ;z ;t) combinaisons linéaires des 3 vecteurs trouvés en fin de pivot de Gauss ; d'où un système donnant x,y,z et t en fonction des 3 coefficients de cette combinaison linéaire, qu'on élimine pour trouver l'équation de F+G : -4x+11y+15z+9t=0. De même $F \cap G$ est l'ensemble des vecteurs égaux à k.(2 ;-5 ;3 ;2), en éliminant k on trouve les 3 équations de $F \cap G$: 5x+2y=0 ; 3x-2z=0 ;x-t=0.

<u>Exercice n°2 : 24 points</u>

Ker φ={(x,y,z,t) : φ(x,y,z,t)=(0,0,0,0)}d'où un système de 4 équations ; d'où x=y puis y=-z puis t=-3z. D'où Ker φ={(x,y,z,t) : x=-t ;y=-t ;t=-3z}={z(-1 ;-1 ;1 ;-3)}où apparait le vecteur base de Ker φ, qui a donc une dimension 1. φ n'est donc pas injectif. D'après le théorème du rang, rg φ= 3 <dim $\mathbb{R}^4$, donc φ n'est pas surjectif ; ce n'est pas un automorphisme. Im φ={(X ;Y ;Z ;T)= φ(x ;y ;z ;t)} ; d'où un système de 4 équations où on élimine x,y,z et t, pour aboutir à l'équation de Im φ : 2X-3Y+Z-T=0
Donc Im φ={(X,Y,Z,T) : 2X-3Y+Z-T=0}={(X,Y,Z,2X-3Y+Z)}={X(1,0,0,2)+Y(0,1,0,-3)+Z(0,0,1,1)} où apparaissent les 3 vecteurs base de Im φ.
La matrice associée à φ, dans la base canonique est A :

$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ dont les vecteurs colonnes sont les images par φ des vecteurs de base de $\mathbb{R}^4$

<u>Exercice 3 :35 points</u>

$2A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 4 & -12 \\ -2 & 2 & -10 \end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$; ${}^tA=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$; $A.B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 9 & -8 & -7 \\ 6 & -8 & -8 \end{pmatrix}$

AC, AD et DC sont impossibles. $DA=\begin{pmatrix} -2 & 7-19 \\ -8 & 9-33 \end{pmatrix}$; ${}^tD=\begin{pmatrix} 1-2 \\ 3\ 5 \\ 0\ 1 \end{pmatrix}$; $A\,{}^tD=\begin{pmatrix} 42 \\ 56 \\ 22 \end{pmatrix}$.

$C^1 = \alpha_1 C + \beta_1 I, avec\, \alpha_1 = 1\, et\, \beta_1 = 0, entiers\, relatifs$;

de même $C^2 = \begin{pmatrix} 20 & 32 \\ 8 & 20 \end{pmatrix} = \alpha_2 C + \beta_2 I, avec\, \alpha_2 = 8\, et\, \beta_2 = -12, entiers\, relatifs$. Posons l'hypothèse

$H_n : \exists(\alpha_n, \beta_n) \in Z^2 : C^n = \alpha_n C + \beta_n I$; l'hypothèse est vraie pour n=1 ; si on la suppose vraie au rang n, alors $C^{n+1} = (8\alpha_n + \beta_n)C - 12\alpha_n I$. En posant alors $\alpha_{n+1} = 8\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = -12\alpha_n$, entiers relatifs, l'hypothèse est héréditaire donc vraie pour tout n>0.

Par élimination des β, on obtient $\alpha_{n+2} = 8\alpha_{n+1} - 12\alpha_n$. Posons alors $\alpha_n = r^n$, on obtient l'équation caractéristique : $r^2 - 8r + 12 = 0$, dont les racines réelles sont 2 et 6. On sait alors que $\alpha_n = \lambda.2^n + \mu.6^n$; avec les conditions initiales, on trouve $\lambda = -1/4\, et\, \mu = 1/4; donc\, \alpha_n = (6^n - 2^n)/4$. Comme $\beta_n = \alpha_{n+1} - 8\alpha_n$ on en tire $\beta_n = (3.2^n - 6^n)/2$ pour tout n>0.

<u>Etude démographique 17 points</u>

Le système séquentiel demandé est :

$A_{n+1} = (3A_n + F_n)/4$

$F_{n+1} = (A_n + 3F_n)/4$

Par élimination des A, on obtient $F_{n+2} = (3F_{n+1} - F_n)/2$, dont l'équation caractéristique associée est $r^2 - (3/2)r + 1/2 = 0$ dont les racines réelles sont 1 et ½.

On a donc $F_n = \alpha + \beta/2^n$, avec les conditions initiales F1=60 et F2=50, on obtient α=β=40.

Donc $F_n = 40(1 + 1/2^n)$; or $A_n = 4F_{n+1} - 3F_n$; donc $A_n = 40(1 - 1/2^n)$. Ces deux populations tendent vers 40 millions.