WEEKLY TIPS

知识小料

「电计 2203 班」周常规知识整理共享

ISSUE. 18

日期：2024-3-6

学科：矩阵与数值分析

求以下范数：

1. 求向量 $\boldsymbol{x}=[1,-2,3,-4]^{\mathrm{T}}$ 的 1-范数、2-范数和无穷范数；
2. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 5\\ 0 & -1 & -3 & 0\end{bmatrix}$ 的 m_1-范数和 F-范数（Frobenius 范数）；
3. 求向量 $\boldsymbol{x}=[1,-2,3]^{\mathrm{T}}$ 在权矩阵 $\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 下的加权 p-范数。

本题只需要使用范数的定义公式计算即可。

【第 1 题】向量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 的各种范数即为（注意**粗体**向量 $\boldsymbol{x}$ 和非粗体分量 x_i 的显示区别）：

- 1-范数：$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=1+|-2|+3+|-4|=10$
- 2-范数：$\|\boldsymbol{x}\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}=\sqrt{1^2+|-2|^2+3^2+|-4|^2}=\sqrt{30}$
- 无穷范数：$\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|=\max\{1,|-2|,3,|-4|\}=4$
- p-范数：$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$——也就是上面三者的一般化形式

【第 2 题】m 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各种范数即为

- m_1-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_{m_1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=1+|-1|+2+5+|-1|+|-3|=13$
- F-范数：$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}=\sqrt{1^2+|-1|^2+2^2+5^2+|-1|^2+|-3|^2}=\sqrt{41}$

【第 3 题】加权范数的定义是 $\|\boldsymbol{x}\|_W = \|\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}\|$。由于是向量的 p-范数，因此要计算的是 $\|\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}\|_p$。

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}\|_p &= \left\|\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\|_p \\
&= \left\|\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|_p \\
&= (|-2|^p + |-6|^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= (2^p + 6^p + 1)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leqslant p < \infty)
\end{aligned}
$$

【结论】

1. $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 10$，$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{30}$，$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 4$；
2. $\|\boldsymbol{A}\|_{m_1} = 13$，$\|\boldsymbol{A}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{41}$；
3. $\|\boldsymbol{W}\boldsymbol{x}\|_p = (2^p + 6^p + 1)^{\frac{1}{p}}$。

【点评】本题看着很唬人，其实就是套公式算就可以了。据说《矩阵与数值分析》的考试题大多都不难，主要考察基础概念。