求函数 $f(t)=\begin{cases}1-|t|, & t^2<1\\ 0, & t^2>1\end{cases}$ 的傅里叶积分。

所谓「傅里叶积分」，即是对函数作傅里叶变换再做逆变换的形式。也就是《积分变换与场论》课本的第 16 页：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1}$$

可以一步一步来，比如先做傅里叶正变换（这里写详细一些）——

$$\begin{aligned}
F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot[\cos(-\omega t)+\mathrm{i}\sin(-\omega t)]\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cdot\cos(\omega t)\mathrm{d}t \qquad \text{（奇函数部分在对称区间积分得 0）}\\
&=2\int_{0}^{\infty}(1-|t|)\cdot\cos(\omega t)\mathrm{d}t\\
&=2\int_{0}^{1}(1-t)\cdot\cos(\omega t)\mathrm{d}t \qquad \text{（注意这里把积分上限换成了 1）}\\
&=2\cdot\frac{1}{\omega}\int_{0}^{1}(1-t)\cdot\mathrm{d}\sin(\omega t) \qquad \text{（准备分部积分）}\\
&=\frac{2}{\omega}\left[(1-t)\sin(\omega t)|_{t=0}^{t=1}-\int_{0}^{1}\sin(\omega t)\cdot(-1)\mathrm{d}t\right]\\
&=\frac{2}{\omega}\int_{0}^{1}\sin(\omega t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{2(1-\cos\omega)}{\omega^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

然后再做逆变换——

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\cdot[\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)]\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos\omega)\cdot\cos\omega t}{\omega^2}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{(1-\cos\omega)\cdot\cos\omega t}{\omega^2}\mathrm{d}\omega
\end{aligned} \tag{3}
$$

算到这里，结论已经显现。

【结论】$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$。

【点评】这是一道经典的傅里叶积分问题，求解思路比较明确，主要是求分部积分的时候容易弄错，或者不记得把积分上限换成 1，导致拿广义积分来积半天也不出结果。另外，这里用到了「奇函数在对称区间积分值为 0」的性质简化了计算过程。