

知识小料

「电计 2203 班」周常规知识整理共享

ISSUE.

00

日期：2023-8-22

贡献者：@ 金光日

学科：工数 2

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和为？

常数项级数很少有求和的，一般是判敛居多。但是这题需要用到 **拆项** + **构造幂级数** 求解。首先：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (1)$$

其中， $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ 。

需要引入

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad (2)$$

然后有

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

于是原式等于 $S(\frac{1}{2}) - 1 = 4 - 1 = 3$ 。

【解答】 3

【点评】 常数项级数的求和，有时候可以转化为幂级数的逐项求和问题。