WEEKLY TIPS

知识小料

「电计 2203 班」周常规知识整理共享

ISSUE. **03**

日期：2023-9-25
学科：离散数学

求出 $(P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R))$ 的主析取范式和主合取范式，并判断公式类型。

由于中间是“合取”，所以这里先求主合取范式。对原式作如下等值演算：

$$\begin{aligned}
& (P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R)) \\
\iff & (\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \\
\iff & ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)) \wedge ((P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R)) \\
\iff & (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \text{（去外层括号）}
\end{aligned} \tag{1}$$

到此我们得到了合取范式，现在要变为主合取范式——对每一个简单析取式，需要补进所有未出现的命题变元，以获得极大项。如第一个简单析取式 $\neg P \vee Q$，可以补进命题变元 R 后用分配律展开之：

$$\begin{aligned}
\neg P \vee Q \iff & \neg P \vee Q \vee (R \wedge \neg R) \\
\iff & (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)
\end{aligned} \tag{2}$$

因此对得到的 4 个简单析取式作类似的操作，得到的极大项如下表 1 所示。重复出现的只计一次，得到原式的主合取范式为：

$\neg P \vee Q$	$\iff$	$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$
$\neg P \vee R$	$\iff$	$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$
$P \vee \neg Q$	$\iff$	$(P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$
$P \vee \neg R$	$\iff$	$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

表 1: 对 4 个简单析取式展开得到的极大项表

$$\begin{aligned}
& (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \\
& \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R) \\
\iff & M_{001} \wedge M_{010} \wedge M_{011} \wedge M_{100} \wedge M_{101} \wedge M_{110} \\
\iff & M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \quad \text{（可写作} \bigwedge_{i=1}^{6} M_i \text{）}
\end{aligned} \tag{3}$$

需要注意的是，在对极大项二进制编号时，原子命题记 0，否定记 1。这一点与极小项不同。

下面我们再来求主析取范式。对原式作如下等值演算：

$$
\begin{aligned}
&(P \to (Q \wedge R)) \wedge (\neg P \to (\neg Q \wedge \neg R)) \\
\iff &(\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (P \vee (\neg Q \wedge \neg R)) \\
\iff &((\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge P) \vee ((\neg P \vee (Q \wedge R)) \wedge (\neg Q \wedge \neg R)) \quad \text{（分配律）} \\
\iff &((\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge R \wedge P)) \vee ((\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (Q \wedge R \wedge \neg Q \wedge \neg R)) \qquad (4) \\
\iff &(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\
\iff &m_{111} \vee m_{000} \\
\iff &m_7 \vee m_0
\end{aligned}
$$

可以看到，求主析取范式时，大量使用了分配律，而且式子结构不美观，容易出错。事实上，当我们得到主合取范式为 $M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$ 之后，便可以直接推出主析取范式为 $m_0 \vee m_7$，因为这两种范式有「互补」关系。

最后就是判断公式类型，一般为永真式、永假式、可满足式的三者之一。本题由范式分析的结果很容易得到类型为可满足式。

【结论】主析取范式为 $m_0 \vee m_7$，主合取范式为 $M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$，公式类型为可满足式。

【点评】本题是一道求主范式的经典试题，可以由式子自身的结构选择求取某一种范式，然后通过「互补」关系直接写出另一种范式。