知识小料

「电计 2203 班」周常规知识整理共享

20

日期：2024-3-21

学科：概率与统计 A

已知随机变量 X, Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ay^2, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求：(1) A；(2) $f_{X|Y}(x|y)$。

【第 1 问】考察的是密度函数的归一性，直接用公式即可。

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x Ay^2 \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{A}{3}x^3 \mathrm{d}x = \frac{A}{12} \end{aligned}$$

因此 $A=12$。

【第 2 问】要求的是二维条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$，给定 y 求 x 的密度，公式为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\text{联合密度}}{y\text{的边缘密度}}$$

联合密度已知，接下来求 y 的边缘密度：

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \\ &= \int_y^1 (12y^2)\mathrm{d}x \\ &= 12y^2(1-y) \quad (0<y<x<1) \end{aligned}$$

因此得到条件密度（记得写范围）：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{12y^2}{12y^2(1-y)}=\frac{1}{1-y} \quad (0<y<x<1)$$

完整的写法是

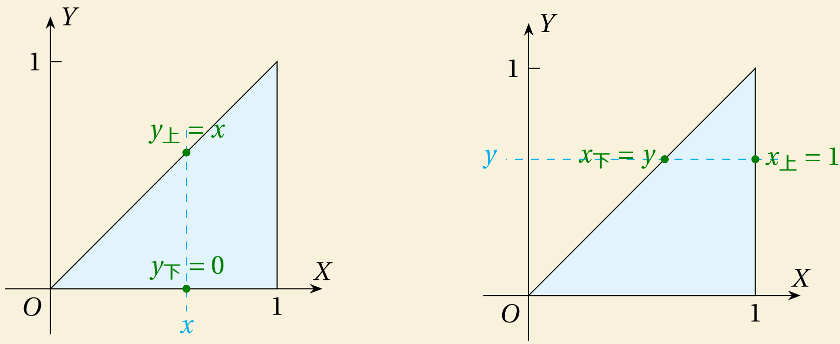
$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-y}, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

至此这题就做完了。不过在积分方面还有些细节：

在草稿纸上可以画出密度非 0 的区域，是一个直角三角形。

第 1 问我们把它当成 x 型域：如图 (a)，外层对 x 积分；内层对 y 积分，下限 0 上限 x。

第 2 问求边缘密度时，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$，积分变量是 x，因此定住 y，对 x 积分。如图 (b)，x 的下限 y，上限 1。



(a) 第 1 问：x 型域积分，外层 x 内层 y

(b) 第 2 问：给定 y，对 x 积分

【结论】

1. $A = 12$
2. $f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-y}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

【点评】本题考察二维连续性随机变量的相关知识点，包括密度函数的性质、条件密度的求解、由联合求边缘的方法等。主要难点可能在于不知道用哪条公式进行计算，或者二重积分计算有错误。本题在试卷中占据 15 分，同学们应掌握。