WEEKLY TIPS

知识小料

「电计 2203 班」周常规知识整理共享

ISSUE. 08

日期：2023-11-7
学科：积分变换与场论

本文档将用于对积分变换作出简明复习。

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

1 傅里叶变换

1.1 傅里叶级数

周期为 T 的函数 $f_T(t)$ 的傅里叶级数展开为 $f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_n t}$

1.2 傅里叶变换 · 概念

傅里叶积分定理 $f(t)$ 需在 $(-\infty, +\infty)$ 满足：

- 在任意有限区间内满足狄利克雷条件：
  - 连续，或只有有限个第一类间断点；
  - 只有有限个极值点；
- $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 绝对可积。

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t \right] \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega \tag{1}$$

另外，$f(t)$ 在每个点收敛于 $\frac{1}{2}[f(t-0) + f(t+0)]$。

傅里叶变换 以下是傅里叶变换的定义。

表达式	正变换	逆变换
原始变换	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega$
正弦变换	$F(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t \, \mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\omega) \sin \omega t \, \mathrm{d}\omega$
余弦变换	$F(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t \, \mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\omega) \cos \omega t \, \mathrm{d}\omega$

表 1: 傅里叶变换式

常见函数的傅里叶变换 以下是常见函数的傅里叶变换列表。

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} 1$$

$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{\mathscr{F}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}$$

$$1 \xrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta(\omega)$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} \xrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$H(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{\mathrm{i}\omega}+\pi\delta(\omega)$$

$$H(t-t_0) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t_0}+\pi\delta(\omega)$$

$$\sin\omega_0 t \xrightarrow{\mathscr{F}} \mathrm{i}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\cos\omega_0 t \xrightarrow{\mathscr{F}} \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

$$\mathrm{e}^{-\beta t}(t>0) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{\beta+\mathrm{i}\omega}$$

$$\mathrm{e}^{-\beta|t|} \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$$

$$A\mathrm{e}^{-\beta t^2} \xrightarrow{\mathscr{F}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\cdot A\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$$

（上述式中 $A,\beta>0$）

1.3 狄拉克函数

狄拉克函数的特征：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1$。

狄拉克函数的性质：

- 筛选性：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0)$
- 偶函数：$\delta(t)=\delta(-t)$
- 与单位阶跃函数联系：$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=H(t)$，$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}=\delta(t)$
- 尺度变换：$\delta(bt-a)=\frac{1}{b}\delta\left(t-\frac{a}{b}\right)$
- 乘以时间函数的性质：$\varphi(t)\delta(t-a)=\varphi(a)\delta(t-a)$
- 求导：$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=-f'(t_0)$

1.4 傅里叶变换 · 性质

以下是傅里叶变换的性质，共 8 条。

序号	性质名	公式表述
1	线性性	略
2	位移性	$f(t+t_0) \xrightarrow{\mathscr{F}} e^{i\omega t_0} F(\omega)$ $e^{-i\omega_0 t} f(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} F(\omega+\omega_0)$
3	相似性	$f(at) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
4	位移相似性	$f(at-b) \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{\lvert a\rvert} e^{-i\frac{b}{a}\omega} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
5	翻转性	$f(-t) \xrightarrow{\mathscr{F}} F(-\omega)$
6	对称性	$F(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} 2\pi f(-\omega)$

7. 微分性：若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 满足狄利克雷条件，且 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t)=0$ ，则

$$f'(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} i\omega F(\omega)$$

$$tf(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} iF'(\omega)$$

8. 积分性：一般地，在任何条件下，均有

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{i\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$$

如果还有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau=0$（错题），则

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathscr{F}} \frac{1}{i\omega}F(\omega)$$

帕塞瓦尔等式（能量积分）：$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2d\omega$。

1.5 傅里叶变换・卷积

傅里叶卷积的定义：$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$。

以下是傅里叶卷积的性质，$f=f(t)$，$g=g(t)$（简写）。

序号	性质名	公式表述
1	交换律	$f*g=g*f$
2	结合律	$(f*g)*h=f*(g*h)$
3	分配律	$f*(g+h)=f*g+f*h$
4	卷积不等式	$\lvert f*g\rvert\leqslant\lvert f\rvert*\lvert g\rvert$
5	$\delta(t)$ 卷积不变性	$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$
6	$H(t)$ 卷积	$f(t)*H(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\mathrm{d}\tau$
7	卷积的导数	$(f*g)'=f'*g=f*g'$

卷积定理 若 $f(t),g(t)$ 均满足傅里叶积分定理的条件，则

$$f(t)*g(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}F(\omega)\cdot G(\omega) \tag{2}$$

$$2\pi f(t)\cdot g(t)\xrightarrow{\mathscr{F}}F(\omega)*G(\omega) \tag{3}$$

1.6 傅里叶变换的应用

如求解微分方程、积分方程等。

2 拉普拉斯变换

2.1 拉普拉斯变换・概念

定义 s 是一个复参量，则

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{Re}(s)>0 \tag{4}$$

存在定理 若 $f(t)$ 满足

- 在 $t\geqslant 0$ 的任一有限区间上分段连续；
- 存在 M 和增长指数 c 使得 $\lvert f(t)\rvert\leqslant M\mathrm{e}^{ct}$，即增长是可控的。

则 $\mathscr{L}[f(t)]$ 在半平面 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上一定存在且解析，积分 $\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 在 $\mathrm{Re}(s)>c$ 上绝对收敛、一致收敛。

常见函数的拉普拉斯变换 以下是常见函数的拉普拉斯变换列表。

$$1,\ H(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

$$\mathrm{e}^{kt} \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s-k} \qquad \mathrm{Re}(s)>k$$

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} 1$$

$$\sin kt \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{k}{s^2+k^2} \qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

$$\cos kt \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{s}{s^2+k^2} \qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

$$t^k \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{k!}{s^{k+1}} \qquad k\in\mathbf{N}^*$$

最后一式亦可推广为 $t^k \xrightarrow{\mathscr{L}} \dfrac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$（$k>-1$）。

周期函数的拉普拉斯变换 设 T 是 $f(t)$ 的周期，且 $f(t)$ 在一周期内分段连续，$t>0$，则

$$\mathscr{L}[f(t)]=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-Ts}}\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

2.2 拉普拉斯变换・性质

以下是拉普拉斯变换的性质，共 9 条。

序号	性质名	公式表述
1	线性性	略
2	位移性	$f(t-\tau)\cdot H(t-\tau) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathrm{e}^{-s\tau}F(s) \qquad \mathrm{Re}(s)>c$ $\mathrm{e}^{at}f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s-a) \qquad \mathrm{Re}(s-a)>c$
3	相似性	$f(at) \xrightarrow{\mathscr{L}} \dfrac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
4	位移相似性	$f(at-b) \xrightarrow{\mathscr{F}} \dfrac{1}{\lvert a\rvert}\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}s}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$

5. 微分性：若 $f(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理，$\mathrm{Re}(s)>c$（几乎等同于

无条件），则有

$$f'(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} sF(s) - f(0)$$

$$f''(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} s^nF(s) - s^{n-1}\cdot f(0) - \cdots - s\cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$tf(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} -F'(s)$$

$$t^nf(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} (-1)^n\cdot F^{(n)}(s)$$

6. 积分性：若 $f(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理，$\mathrm{Re}(s) > c$（几乎等同于无条件），则有

$$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}F(s)$$

$$\frac{1}{t}f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_s^{\infty} F(\xi)\mathrm{d}\xi$$

7.「双积分相等」：

$$\int_0^{\infty} F(s)\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(s) \geqslant 0$$

8. 陶伯定理·初值：若 $f(t)$ 的拉普拉斯变换存在，且 $t\to 0$ 时 $f(t)$ 及其导数存在，则初值 $f(0)$ 满足

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$$

9. 陶伯定理·终值：若 $f(t)$ 的所有奇点都在复平面左半边，且有关极限存在，则终值 $f(\infty)$ 满足

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$$

2.3 拉普拉斯卷积

拉普拉斯卷积

$$f(t)*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

性质：交换律、结合律、分配律、卷积不等式、数乘、微分性质、积分性质。

卷积定理 若 $f(t), g(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理，则

$$f(t)*g(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(\omega)\cdot G(\omega) \tag{5}$$

2.4 拉普拉斯逆变换

反演积分公式 若 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ 是 $F(s)$ 的所有奇点，且

- 奇点都是孤立奇点，存在 β 使得这些奇点都在 $\mathrm{Re}(s) < \beta$ 的范围内；
- 当 $s \to \infty$ 时，$F(s) \to 0$。

则 $F(s)$ 的拉普拉斯逆变换为

$$\begin{aligned} f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ s_k], \quad t > 0 \end{aligned} \tag{6}$$

如果 $F(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)}$，且 s_k 为一级极点，则 $\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ s_k] = \dfrac{P(s_k)}{Q'(s_k)}\mathrm{e}^{s_k t}$。
另外，在复变函数中，若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则其留数为

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

拉普拉斯逆变换方法 以下若干种方法可用于求解拉普拉斯逆变换：

- 反演积分公式 + 留数；
- 常见函数的拉普拉斯变换正反推；
- 拉普拉斯变换的性质；
- 部分分式法（对有理函数，写成若干个易于逆变换的函数相加的形式）；
- 卷积定理。

2.5 拉普拉斯变换的应用

一个是计算广义积分，使用积分变元换序得到某些积分的值（即使并不严格）

$$\mathscr{L}\left[\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x\right] = \int_a^b \mathscr{L}[f(t,x)]\mathrm{d}x$$

另外就是求解微分、积分方程。其中解偏微分方程时，通常对 t 取拉普拉斯变换，x 保持不变，例如

$$u(t,x) \xrightarrow{\mathscr{L}} U(s,x), \quad u''_{xx}(t,x) \xrightarrow{\mathscr{L}} U''_{xx}(s,x),$$
$$u''_{tt}(t,x) \xrightarrow{\mathscr{L}} s^2 U(s,x) - su(0,x) - u'_t(0,x)$$

式中 $u''_{xx}(t,x)$ 表示对二元函数 $u(t,x)$ 连续对 x 求二阶偏导数，即 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，其余量含义类推。

3 场论

3.1 向量值函数

设向量值函数 $\boldsymbol{A}(t)=P(t)\boldsymbol{i}+Q(t)\boldsymbol{j}+R(t)\boldsymbol{k}$，简写为 $\boldsymbol{A}=[P,Q,R]$，则 $\boldsymbol{A}$ 的导数与积分是

$$\boldsymbol{A}'=[P',Q',R']$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int \mathrm{A}\mathrm{d}t=\boldsymbol{i}\int \mathrm{P}\mathrm{d}t+\boldsymbol{j}\int \mathrm{Q}\mathrm{d}t+\boldsymbol{k}\int \mathrm{R}\mathrm{d}t$$

3.2 等值面与矢量线

等值面 是数量场 $u(x,y,z)$ 取同值的点构成的曲面，方程为 $u(x,y,z)=C$。

矢量线 是矢量场 $\boldsymbol{A}=[P,Q,R]$ 每一点的切线，方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{P}=\frac{\mathrm{d}y}{Q}=\frac{\mathrm{d}z}{R}$$

3.3 方向导数・梯度・散度・旋度

方向导数 是数量场 $u(x,y,z)$ 沿着方向 $\boldsymbol{l}$ 的导数，其中 $\boldsymbol{e}_l=\frac{\boldsymbol{l}}{||\boldsymbol{l}||}=[\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]$ 为单位化的方向向量。

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

或简写为梯度与单位化方向向量的点积：

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathbf{grad}\,u\cdot\boldsymbol{e}_l$$

当梯度方向与已知方向同向，则方向导数最大；当反向，则方向导数最小，最大最小值都是梯度的绝对值取正/负号。

雅可比矩阵 矢量场 $\boldsymbol{A}=[P,Q,R]$ 的雅可比矩阵形式为

$$\mathrm{D}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\frac{\partial P}{\partial x}&\frac{\partial P}{\partial y}&\frac{\partial P}{\partial z}\\\frac{\partial Q}{\partial x}&\frac{\partial Q}{\partial y}&\frac{\partial Q}{\partial z}\\\frac{\partial R}{\partial x}&\frac{\partial R}{\partial y}&\frac{\partial R}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}P'_x&P'_y&P'_z\\Q'_x&Q'_y&Q'_z\\R'_x&R'_y&R'_z\end{vmatrix}$$

可以从雅可比矩阵中观察出散度和旋度的值。

梯度・散度・旋度 引入哈密顿算子 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$：

种类	记号	空间表达式	平面表达式	结果
梯度	$\mathbf{grad}\,u$、∇u	$\left[\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right]$	$\left[\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}\right]$	向量
散度	$\operatorname{div}\boldsymbol{A}$、$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$	$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$	$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}$	数量
旋度	$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}$、$\nabla\times\boldsymbol{A}$	$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$	$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$	向量

另有一些关系，如 $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)=\mathbf{0}$，$\operatorname{div}(\mathbf{rot}\boldsymbol{A})=0$ 等。

3.4 Gauss 公式与 Stokes 公式

Gauss 公式 设 S 为分片光滑的闭曲面，V 是 S 所围成的单连通闭区域，函数 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$（简写为 P,Q,R）在 V 上有一阶连续偏导数，则

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

由 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=[\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$ 以及散度公式，记 $\boldsymbol{A}=[P,Q,R]$，可得更简洁的 Gauss 公式：

$$\oiint\limits_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_V \operatorname{div}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}V$$

（注：$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 中间是点积，$\operatorname{div}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}V$ 中间是数量相乘）

Stokes 公式 设 L 为分段光滑的闭曲线，S 是以 L 为边界的有向曲面，函数 P,Q,R 有一阶连续偏导数，则

$$\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

由 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的表达式及旋度公式，记 $\boldsymbol{A}=[P,Q,R]$，可得更简洁的 Stokes 公式：

$$\oint\limits_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint\limits_S \mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

3.5 典型场 · 势函数 · 力函数

典型场 在单连通域内：

- 无旋场、有势场、保守场：$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$；存在数量值势函数 v 使得 $\boldsymbol{A}=-\mathbf{grad}\,v$。(如电场)
- 无源场、管形场：$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$（如磁场）
- 调和场：既无源也无旋，$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0\wedge\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$

势函数 在单连通域内，若 $\boldsymbol{A}=[P,Q,R]$ 是有势场/无旋场，则势函数 v 满足 $-\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\,v$，即可用偏积分法求出势函数 v：

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-P,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-Q,\quad \frac{\partial v}{\partial z}=-R \tag{7}$$

也可以用曲线积分与路径的无关性，选取点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 至 $M(x,y,z)$ 的路径积分，也可求势函数。其中起始点 M_0 通常取作 $(0,0,0)$。

$$v(x,y,z)=-\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x-\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\mathrm{d}y-\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

力函数 若 $\boldsymbol{A}=[P,Q]$ 是平面调和场，则 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$，即 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$，即可引入新的有势场$\underline{\boldsymbol{B}=[-Q,P]}$，且存在力函数 u 使得 $\boldsymbol{B}=\mathbf{grad}\,u$，即有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-Q,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=P \tag{8}$$

也可选取 (x_0,y_0) 至 (x,y) 的路径积分来求力函数：

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}-Q(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}P(x,y)\mathrm{d}y$$

势、力函数的关系 事实上，势函数 v 和力函数 u 都是调和函数：

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

而且因为 u,v 满足复变函数的「柯西—黎曼方程」：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

因此 u,v 也是共轭调和函数，由它们之中的其中一个可求出另一个。

注：上式中 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为拉普拉斯算子，Δu 称为 u 的调和量。

3.6 相对冷僻的概念

注：本节内容相对冷僻，可以视情况忽略。

通量、散度的原始定义

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}(M) = \lim_{\Delta V \to M} \frac{\displaystyle\oiint_{\Delta S} \boldsymbol{A}(M) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

环量密度、旋度的原始定义

$$\mu_n = \lim_{\Delta S \to M} \frac{\displaystyle\oint_{\Delta L} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}$$

$$\mu_n = \mathbf{rot} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}_0$$

其中，曲面 ΔS 的外法线方向为 $\boldsymbol{n}$，其单位化向量为 $\boldsymbol{n}_0$。

矢势量　在面单连通域内矢量 $\boldsymbol{A}$ 为管形场的充要条件是，它是另一个矢量场 $\boldsymbol{B}$ 的旋度。$\boldsymbol{B}$ 称为矢势量。若设 $\boldsymbol{A} = [P, Q, R]$，$\boldsymbol{B} = [U, V, W]$，则

$$U = \int_{z_0}^{z} Q(x, y, z)\mathrm{d}z - \int_{y_0}^{y} R(x, y, z_0)\mathrm{d}y, \quad V = -\int_{z_0}^{z} P(x, y, z)\mathrm{d}z, \quad W = 1$$