WEEKLY TIPS

# 知识小料

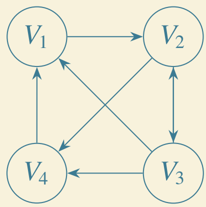
「电计 2203 班」周常规知识整理共享

ISSUE. 13

日期：2023-12-13

学科：离散数学

有向图 $G$ 如右图所示。




1. 求 $G$ 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$，并求出每一个结点的出度和入度；
2. 求出 $\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{A}^3$、$\boldsymbol{A}^4$，并解释这三个矩阵行、列及对角线各元素的含义，以及给出 $V_2$ 到 $V_1$ 长度小于等于 4 的路径数量；
3. 求可达矩阵（路径矩阵）$\boldsymbol{P}$。

【第 1 题】邻接矩阵的规则是：两个结点 $V_i, V_j$ 有连边则记 $a_{ij} = 1$，否则记为 0。那么，题图的邻接矩阵就不难得到：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

通过邻接矩阵来数出度 $d^+$、入度 $d^-$：对第 $i$ 个结点，出度 $d^+(V_i)$ 就是第 $i$ **行**的 1 的个数，入度 $d^-(V_i)$ 就是第 $i$ **列**的 1 的个数。或者也可以在图中数出与各个结点相连的边数。得到的结果如下表：

| 结点 | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 出度 $d^+$ | 1 | 2 | 3 | 1 |
| 入度 $d^-$ | 2 | 2 | 1 | 2 |

【第 2 题】$\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{A}^3$、$\boldsymbol{A}^4$ 使用矩阵乘法的知识即可求出。（但也是最容易出错的环节！需要认真 + 仔细 + 谨慎）

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad A^3=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix},\quad A^4=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\2&2&2&3\\3&3&2&3\\2&1&0&1\end{bmatrix} \tag{2}$$

含义解释：矩阵 $A^m$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素 $a_{ij}^{(m)}$，表示从 $V_i$ 到 $V_j$ 的长度为 $m$ 的不同路径的数目。矩阵 $A^m$ 的主对角线上元素 $a_{ii}^{(m)}$ 的值，表示结点 $V_i$ 上长度为 $m$ 的圈（回路）的个数。（见课本 p334 定理 16.4.1。举个例子，矩阵 $A^3$ 的 $a_{31}^{(3)}=2$，表示从 $V_3$ 到 $V_1$ 的长度为 3 的路径有 2 条，分别为 $V_3-V_2-V_3-V_1$ 和 $V_3-V_2-V_4-V_1$。）

从 $V_2$ 到 $V_1$ 的长度小于等于 4 的路径条数，即为 $a_{21}+a_{21}^{(2)}+a_{21}^{(3)}+a_{21}^{(4)}=0+2+1+2=5$。

【第 3 题】可达矩阵的规则是：两个结点 $V_i$ 到 $V_j$ 可达则记 $p_{ij}=1$，否则记为 0。构造方法是：构造 $B=A+A^2+A^3+A^4$，并将 $B$ 的所有非零元素改成 1，零元素仍记 0，就得到可达矩阵 $P$。

换言之，$A$ 的各次幂矩阵的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素 $a_{ij}$、$a_{ij}^{(2)}$、$a_{ij}^{(3)}$、$a_{ij}^{(4)}$ 只要有至少一个不为 0，就把可达矩阵 $P$ 的对应位置元素 $p_{ij}$ 记为 1；否则记为 0。（很幸运，本题中任意两个结点都是可达的，所以可以全部填 1。）

$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix} \tag{3}$$

【结论】见解析。

【点评】图的矩阵表示包括邻接矩阵、可达矩阵、关联矩阵、权矩阵等，本题考察了最为常见的邻接矩阵和可达矩阵。同学们须弄懂矩阵中元素的含义，以及邻接矩阵的若干次幂的意义。