WEEKLY TIPS
知识小料
「电计 2203 班」周常规知识整理共享
ISSUE. 05
日期：2023-10-16
学科：积分变换与场论

利用拉普拉斯变换，求方程 $\begin{cases} y''' + 3y'' + 3y' + y = \mathrm{e}^t \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$ 的解。

先两边取拉普拉斯变换，由

$$
\begin{aligned}
y(t) &\longrightarrow Y(s) \\
y'(t) &\longrightarrow sY(s) - y(0) \\
y''(t) &\longrightarrow s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \\
y'''(t) &\longrightarrow s^3 Y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)
\end{aligned}
$$

并将初值条件 $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ 代入，得到

$$s^3 Y(s) + 3s^2 Y(s) + 3sY(s) + Y(s) = \mathscr{L}(\mathrm{e}^t) = \frac{1}{s-1}$$

解得

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)^3} \tag{1}$$

接下来要对上式取逆变换了。有多种方法可以实现逆变换，这里提供两种方法。

【方法一】卷积定理。使用 $f(t) * g(t) \longrightarrow F(s) \cdot G(s)$。由于变换后的结果是 $\dfrac{1}{s-1} \cdot \dfrac{1}{(s+1)^3}$，故需要对这两个乘积式进行逆变换。

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] &= \mathrm{e}^t \\
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^3}\right] &= \mathrm{e}^{-t} \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right] = \mathrm{e}^{-t} \cdot \frac{1}{2} t^2 \quad \text{（逆用位移性质）}
\end{aligned}
$$

于是有 $y(t) = \mathrm{e}^t * \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} t^2$。用卷积的定义展开该式得到

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\tau}\tau^2 \cdot \mathrm{e}^{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^t \int_0^t \tau^2 \cdot \mathrm{e}^{-2\tau}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^t \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\tau}\left(\tau^2 + \tau + \frac{1}{2}\right)\right]\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \quad \text{（分部积分）}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}e^{t} \cdot \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\left(t^2+t+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right]$$
$$= -\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t}$$

【方法二】反演积分公式 + 留数法。我们知道，反演积分公式（课本 P108）的形式为

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s)e^{st},\ s_k], t > 0 \tag{2}$$

其中 s_k 是 $F(s)$ 的所有孤立奇点。那么在本题中，$Y(s)$ 有两个孤立奇点——$s=1$ 和 $s=-1$，应有

$$y(t) = \mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)(s+1)^3},\ 1\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)(s+1)^3},\ -1\right]$$

而 $f(z)$ 的 m 级极点处留数公式是

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^m f(z)]^{(m-1)} \tag{3}$$

故对于一级极点 $s=1$ 得到

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)(s+1)^3},\ 1\right] = \lim_{s\to 1}\frac{e^{st}}{(s+1)^3} = \frac{1}{8}e^{t}$$

对于三级极点 $s=-1$ 得到

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)(s+1)^3},\ -1\right] = \frac{1}{2}\lim_{s\to -1}\left(\frac{e^{st}}{s-1}\right)''_s = \frac{1}{8}e^{-t}(-2t^2-2t-1)$$

因而将两个留数的结果相加得到

$$y(t) = \frac{1}{8}e^{t} + \frac{1}{8}e^{-t}(-2t^2-2t-1)$$

【结论】$y(t) = -\frac{1}{4}t^2e^{-t}-\frac{1}{4}te^{-t}-\frac{1}{8}e^{-t}+\frac{1}{8}e^{t}$。

【点评】本题是一道通过拉普拉斯变换求解微分方程的问题，难点在于如何做拉普拉斯逆变换。通常来说，一个函数做拉普拉斯逆变换有多种方法，如卷积定理、反演积分公式、部分分式法等，对于不同的问题应作出具体分析。