WEEKLY TIPS

知识小料

「电计 2203 班」周常规知识整理共享

ISSUE. 06

日期：2023-10-23

学科：离散数学

离散数学第 3 章、第 4 章《集合论》、《关系与函数》概念小结

1　集合论部分

3.2 节 **集合相等** 两个集合相等，定义为它们恰有相同的各成员。

形式定义：$A=B \iff (\forall x)(x\in A \leftrightarrows x\in B)$

子集与真子集 与高中所学知识类似，这里只给出形式定义。

形式定义：$B\subseteq A := (\forall x)(x\in B\to x\in A)$

$B\subset A := (B\subseteq A)\land(B\neq A)\land(B\neq\varnothing)$

3.3 节 **集合的基数** 表示集合 S 的元素个数，记为 $|S|$。

3.4 节 **偶集/二元集** 意为「把两个集合放在一个大集合里」。当 A,B 都是集合时，称 $\{A,B\}$ 是一个偶集。类似的，还有三元集、四元集等 多元集 。

举例：$A=\{1,2\}$，$B=\{3\}$，则可以定义偶集 $C=\{A,B\}=\{\{1,2\},\{3\}\}$。

联集 相当于一个偶集的并。

一个集合的并 理解为把一个多元集的元素（它们也是集合）拿出来取并集。

形式定义：$\cup A := \{x|(\exists B)(B\in A\land x\in B)\}$

举例：$A=\{\{1,2\},\{3\},4\}$，则 $\cup A=\{1,2,3\}$，把 $\{1,2\}$ 和 $\{3\}$ 拿出来取并集。

一个集合的交 理解为把一个多元集的元素（它们也是集合）拿出来取交集。

形式定义：$\cap A := \{x|(\forall B)(B\in A\to x\in B)\}$

举例：$A=\{3,\{4,5\},\{5,6\}\}$，则 $\cap A=\{5\}$，把 $\{4,5\}$ 和 $\{5,6\}$ 拿出来取交集。

3.7 节 **幂集** 所有子集构成的集合。

形式定义：$2^A=Pw(A) := \{x|x\subseteq A\}$。其中课本使用符号 $P(A)$。

举例：$A=\{1,2\}$，则 $P(A)=2^A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$。

2　关系与函数部分

4.1 节 **有序对** 有确定次序的一对元素，记为 $\langle x,y\rangle$，其中 x 称为 前驱 ，y 称为 后继 。

有序对可以定义为一个集合：$\langle x,y\rangle := \{\{x\},\{x,y\}\}$。

举例：$\langle 1,2\rangle$ 是一个有序对，1 是前驱，2 是后继；$\langle 1,2\rangle$ 和 $\langle 2,1\rangle$ 不是相同的有序对。

4.3 节 **关系** 关系是有序对的集合。

4.2 节 **笛卡儿积** 从两个集合 A,B 各取一个元素，分别作一个关系的前驱和后继，这样的关系的集合就是这两个集合的笛卡尔积 $A\times B$。

形式定义：$A\times B := \{\langle x,y\rangle | x\in A \wedge y\in B\}$。

举例：$A=\{1,2\}$，$B=\{a,b\}$，则 $A\times B=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$。

4.3 节 **「xRy」** $xRy \iff \langle x,y\rangle\in R$。

举例：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$，则 $1R2, 3R4$ 为真，$5R6$ 为假。

定义域 (domain) 前驱的集合，记为 $dm(R)$。

值域 (range) 后继的集合，记为 $rn(R)$。

域 (field) 定义域和值域的并集，记为 $fl(R)$。

定义域、值域和域的形式定义在书中 p102,p103 页。

举例：$R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，$dm(R)=\{0,2\}$，$rn(R)=\{1,3\}$，$fl(R)=\{0,1,2,3\}$。

逆关系 把前驱和后继对调得到的关系，记为 R^{-1}。

形式定义：$R^{-1} := \{\langle x,y\rangle | yRx\}$。

举例：$R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，则 $R^{-1}=\{\langle 1,0\rangle,\langle 3,2\rangle\}$。

关系乘积 从关系 R 中拿出一个有序对 $\langle x,z\rangle$，再从关系 S 中拿出一个有序对 $\langle z,y\rangle$（其中 R 的有序对的后继需要等于 S 的有序对的前驱），那么所有的 $\langle x,y\rangle$ 的集合构成 R,S 的关系乘积（或 关系复合 ），记为 $R*S$。另外，$R*R$ 又记为 R^2。

形式定义：$R*S := \{\langle x,y\rangle | (\exists z)(xRz \wedge zSy)\}$。

举例：$R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$，$S=\{\langle a,4\rangle,\langle b,5\rangle\}$，则 $R*S=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,5\rangle\}$。

关系矩阵 用来描述关系的性质，其中若 $\langle x_i,y_j\rangle\in R$，则在关系矩阵的第 i 行第 j 列填 1，否则填 0。

举例：$A=\{x_1,x_2,x_3\}$，$B=\{y_1,y_2\}$，$R=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle,\langle x_3,y_2\rangle\}$，则关系矩阵为 $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}$。它的第 1 行第 1 列、第 2 行第 2 列、第 3 行第 2 列填 1。

4.4 节 **自反性** 对任意 $x\in A$ 均有 $\langle x,x\rangle\in R$。等价于 $I_{fl(R)}\subseteq R$。

形式定义：R 在 A 中自反 $:= (\forall x)(x\in A\to xRx)$。

非自反性 对任意 $x\in A$ 均有 $\langle x,x\rangle\notin R$，注意是严格的否定。

形式定义：R 在 A 中非自反 $:= (\forall x)(x\in A\to \neg(xRx))$。

对称性 对任意 $x,y\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in R$，则总有 $\langle y,x\rangle\in R$。等价于 $R^{-1}=R$。

形式定义：R 在 A 中对称 $:= (\forall x)(\forall y)((x,y\in A\wedge xRy)\to yRx)$。

非对称性 对任意 $x,y \in A$，若 $\langle x,y\rangle \in R$，则总有 $\langle y,x\rangle \notin R$。

形式定义：$(\forall x)(\forall y)(x,y \in A \wedge xRy) \to \neg(yRx)$。

反对称性 对任意 $x,y \in A$，若 $\langle x,y\rangle \in R$ 且 $x \neq y$，则总有 $\langle y,x\rangle \notin R$。

形式定义：$(\forall x)(\forall y)(x,y \in A \wedge xRy \wedge x \neq y) \to \neg(yRx)$。

传递性 对任意 $x,y,z \in A$，若 $\langle x,y\rangle \in R$ 且 $\langle y,z\rangle \in R$，则总有 $\langle x,z\rangle \in R$。等价于 $R*R \subseteq R$。

形式定义：$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x,y,z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \to xRz)$。

举例：相等关系 $R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \dots\}$ 是自反、对称、传递的（属于等价关系），集合的包含关系是自反、反对称、传递的（属于偏序关系）。

集合的恒等关系 定义在集合 A 上的恒等关系：$I_A := \{\langle x,x\rangle | x \in A\}$。

闭包 包含关系 R 且满足性质 P（六种性质之一）的最小关系，称为闭包。记作 $C_P(R)$。可分为自反闭包 $r(R)$、对称闭包 $s(R)$、传递闭包 $t(R)$。

举例：详见课本 p111 页例 4.4.1。

4.5 节 **等价关系** 同时满足自反、对称、传递性的关系。

举例：整数集内模 3 同余的关系：$R = \{\langle x,y\rangle | x \equiv y \pmod 3, x,y \in \mathbb{Z}\}$，满足该关系的 x 和 y 除以 3 得到的余数相同。R 满足自反、对称、传递性，所以是等价关系。

等价类 设 R 是 A 上的等价关系，则由 x 产生的等价类是满足 $y \in A$ 且 $\langle x,y\rangle \in R$ 的所有 y 的集合，记为 $[x]_R$ 或 x/R。称 x 是 等价类的代表 。

形式定义：$[x]_R := \{y | xRy\}$。

举例：$R = \{\langle x,y\rangle | x \equiv y \pmod 3, x,y \in \mathbb{Z}\}$，则 $[1]_R = \{-2,1,4,7,\dots\}$，$[2]_R = \{-1,2,5,8,\dots\}$，1 是等价类 $[1]_R$ 的代表。而且 $[0]_R = [-3]_R = [3]_R = \cdots$，故总共有三种不同的等价类：$[0]_R$、$[1]_R$、$[2]_R$。

划分 集合 A 的划分定义为一个多元集，其所有元素是并集为 A 且相互交集为空集的集合，记为 π_A。一般来说，划分出来的子集数越多，划分越细。

举例：$A = \{a,b,c\}$，则 A 的划分 π_A 可以取 $\{\{a\},\{b,c\}\}$、$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$、$\{\{a,b,c\}\}$ 等。其中，$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ 是最细的划分。

关系产生的划分 设 R 是等价关系，则由 R 产生的划分定义为 R 的所有不同等价类构成的集合，记为 $\pi(R)$。R 产生的集合 A 的划分也叫做 A 对 R 的 商集 ，记作 A/R。

形式定义：R 为等价关系，则 $\pi(R) := \{[x]_R | x \in fl(R)\}$。

举例：$R = \{\langle x,y\rangle | x \equiv y \pmod 3, x,y \in \mathbb{Z}\}$，则由 R 产生的划分为 $\pi(R) = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$，同时也是 R 的商集 $\mathbb{Z}/R$。

划分产生的关系 设 π_A 是集合 A 的划分，则由 π_A 产生的关系定义为 π_A 中各个「元素」——也是 A 的各个子集中任取的两个元素构成的关系的集合，记作 $R(\pi_A)$。

形式定义：$R(\pi_A) := \{\langle x,y\rangle | (\exists B)((B \in \pi_A) \wedge (x \in B) \wedge (y \in B))\}$。

举例：$A = \{a,b,c,d\}$，取 $\pi_A = \{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$，则 $R(\pi_A) = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$。

4.6 节 **函数** 函数 f 是一种关系，对任意 $\langle x,y\rangle \in f$ 且 $\langle x,z\rangle \in f$，均有 $y = z$，也就是说由一个前驱只能对应到一个确定的后继。也记为 $y = f(x)$、$f : A \to B$。判断一个关系为函数必须满足两个特征：① 「多对一」；② 定义域的全体均需被取到。

形式定义：f 为函数 $:= f$ 为关系 $\wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)((xfy \wedge xfz) \to y = z)$。

1-1 函数 也就是「一对一」且值域取全的函数。f 为 1-1 函数定义为 f^{-1} 为 1-1 函数。

举例：$A = \{1,2,3\}$，$B = \{a,b,c\}$，$f : A \to B$，$f = \{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$，则 f^{-1} 也是函数，$f^{-1} : B \to A$，$f^{-1} = \{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,3\rangle\}$，因此 f 和 f^{-1} 是 1-1 函数。

反函数 若 f 为 1-1 函数，则称 f^{-1} 为反函数。

满射 满射是把值域取全的函数。

形式定义：f 为满射 $:= f$ 为函数 $\wedge dm(f) = A \wedge rn(f) = B$。一般函数只有 $rn(f) \subseteq B$。

单射 单射是两个不同前驱必对应两个不同后继的函数，强调「一对一」。

形式定义：f 为单射 $:= f$ 为函数 $\wedge (\forall x)(\forall y)((x,y \in A \wedge x \neq y) \to f(x) \neq f(y))$。

双射 双射是既为满射也为单射的函数，即 1-1 函数。

超幂 从集合 A 到集合 B 的超幂，定义为从 A 映射到 B 的所有函数构成的集合，记作 B^A。B^A 的基数（元素个数）是 $|B|^{|A|}$。

形式定义：$B^A := \{f | f\text{为函数} \wedge dm(f) = A \wedge rn(f) \subseteq B\}$。

举例：$A = \{a,b\}$，$B = \{1,2\}$，令 $f_1 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle\}$，$f_2 = \{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$，$f_3 = \{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$，$f_4 = \{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle\}$，则超幂 $B^A = \{f_1,f_2,f_3,f_4\}$。

4.8 节 **偏序关系** 同时满足自反、反对称、传递的关系。若关系 R 是集合 A 的偏序关系，则称 $\langle A,R\rangle$ 为 偏序集 。

举例：常见的偏序关系有：实数的小于等于关系、集合的包含关系、整数的整除关系等。

以下四条设 $\langle A,\leqslant\rangle$ 是偏序集，且 $B \subseteq A$。

极小元 a 是 B 的极小元，定义为不存在元素 $x \in B$ 使 $x < a$。(可能有多个)

最小元 a 是 B 的最小元，定义为对一切元素 $x \in B$ 均有 $x \geqslant a$。(至多有一个)

下界 a 是 B 的下界，定义为对一切元素 $x \in B$ 均有 $x \geqslant a$，其中 $a \in A$。

下确界 a 是 B 的下确界，需满足：① a 是 B 的下界；② 对任意 $b \in A$，若 b 也是 B 的下界，则 $b \leqslant a$。也就是说，下确界是所有下界中最大的。

由以上四条的定义，可类似定义极大元、最大元、上界、上确界。

哈斯图 一种用来描述有限偏序关系的图。设 $\langle A, R\rangle$ 是偏序集，则作图规则是：① 以节点表示元素；② 若 $\langle x, y\rangle \in R$（如 $x \leqslant y$），则将 y 画在 x 的上层；③ 不可比的元素画在同一层；④ 由传递性得到的关系不计入。

举例：设 $A = \{1,2,3,6,12,24,36\}$，R 是整除关系，则可得到 $2R6, 12R24$ 等为真，把 6 画在 2 的上层，把 24 画在 12 的上层。由于 $1R6$ 可由 $1R2$ 和 $2R6$ 经由传递性得出，故节点 1 和 6 不连线。