知识小料

「电计 2203 班」周常规知识整理共享

34

日期：2024-9-18

学科：计算机组成原理

从十进制的角度看二进制浮点数补码加法。假设 $x = 0.1100 \times 2^{011}$，$y = -0.0110 \times 2^{110}$，求 $x + y$ 。阶码三位，尾数六位。

$$
\begin{array}{rrcccccccl}
 & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & & \\
x = & 0. & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times 2^{011} & \frac{3}{4} \times 2^3 \\
y = & -0. & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \times 2^{110} & -\frac{3}{8} \times 2^6
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
 & \text{阶码} & & \text{尾数} \\
[x]_{\text{补}} = & 00\,,\,011 & ; & 00\,,\,110000 \\
[y]_{\text{补}} = & 00\,,\,110 & ; & 11\,,\,101000
\end{array}
$$

（注：y 的原码 $11, 011000 \to$ 反码 $11, 100111 \to$ 补码 $11, 101000$。）

第一步：对阶 用 j 表示阶码，$j_x = (011)_2 = 3$，$j_y = (110)_2 = 6$，很明显 $j_x - j_y = -3$。当然也可以用补码竖式计算：

$[j_x]_{\text{补}} = 00, 011$，$[j_y]_{\text{补}} = 00, 110$，$[-j_y]_{\text{补}} = 11, 010$——

$$
\begin{array}{lrc}
 & [j_x]_{\text{补}} & 00\,,\,011 \\
+ & [-j_y]_{\text{补}} & 11\,,\,010 \\
\hline
 & & 11\,,\,101
\end{array}
$$

（补码 $11, 101 \to$ 反码 $11, 100 \to$ 原码 $11, 011 \to$ 真值 -3。）

因此应该把 x 的阶码提高 3，使 x 拥有和 y 相同的阶码。可以看到，「改变阶码」这一操作伴随着尾数整体右移 3 位，但不改变原始数值。

$$
\begin{array}{rcccccccccc|ccc}
 & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \frac{1}{64} & & & & \\
[x]_{\text{补}} = & 00\,, & 011\,; & 00\,, & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \frac{3}{4} & \times & 2^3 \\
 & & (+3) & & & & (>>3) & & & & & (\div 2^3) & & (\times 2^3) \\
[x]_{\text{补}} = & 00\,, & 100\,; & 00\,, & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & \frac{3}{32} & \times & 2^6
\end{array}
$$

第二步：尾数求和　用 S 表示尾数，$[S_x]_{补}=00,000110$，$[S_y]_{补}=11,101000$，做加和——

$$\begin{array}{cccc} & [S_x]_{补} & 00\ ,\ 000110 & \frac{3}{32} \\ + & [S_y]_{补} & 11\ ,\ 101000 & -\frac{3}{8} \\ \hline & & 11\ ,\ 101110 & -\frac{9}{32} \end{array}$$

（补码 $11,101110 \rightarrow$ 反码 $11,101101 \rightarrow$ 原码 $11,010010 \rightarrow$ 真值 $-\frac{9}{32}$。）

因此 $x+y$ 补码的尾数就是 $11,101110$。

$$[x+y]_{补} = \overset{\text{阶码}}{00\ ,\ 110}\ ;\ \overset{\text{尾数}}{11\ ,\ 101110} \qquad -\frac{9}{32}\times 2^6$$

第三步：检查规格化　补码规格化的要求是，尾数的第一位和符号位相反，也就是 $11,0\text{xxxxx}$。但是，我们得到的尾数是 $11,101110$，不符合规格化要求，因此需要：

- 尾数整体左移一位$(\times 2^1)$，左移补进零；
- 阶码减一$(\times 2^{-1})$。如此即可保证原始数值不变。

$$\begin{array}{llll|ccc} & & & \ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{8}\ \ \frac{1}{16}\ \ \frac{1}{32}\ \ \frac{1}{64} & & & \\ [x+y]_{补} = & 00\ , & 110\ ; & 11\ ,\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0 & -\frac{9}{32} & \times & 2^6 \\ & & (-1) & \qquad (<<1) & (\times 2^1) & & (\times 2^{-1}) \\ [x+y]_{补} = & 00\ , & 101\ ; & 11\ ,\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0 & -\frac{9}{16} & \times & 2^5 \end{array}$$

（补码 $11,011100 \rightarrow$ 反码 $11,011011 \rightarrow$ 原码 $11,100100$。）

该过程是左移，不存在「零舍一入」的问题；也不会产生溢出。

因此 $x+y$ 的原码即为 $00,101;11,100100$，真值为 $-\frac{9}{16}\times 2^5$ 即二进制 -0.1001×2^{101}。

【结论】-0.1001×2^{101}。

【点评】本题用于复习浮点数的加减法问题，综合使用了小数二进制的转换、原反补三码的转换、求相反数补码、浮点数的规格化等知识。本文档旨在给出每一步的十进制表示，便于同学们理解这种方法的「原始数值」的不变性。