Tarea 2

Francisco Cuevas

Fecha de entrega: 26 de Abril 2024 : Por Eric Zepeda - Rol 201410522-3

1. Considere la función de covarianza estacionaria

$$C_0(h;\alpha,\nu) = \sigma^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\nu} K_\nu\left(\frac{h}{\alpha}\right).$$

Sea $\gamma(h) = \sigma^2 - C_0(h;\alpha,\nu)$. Encuentre $\tau > 0$ tal que el límite

$$\lim_{h^+ \to 0} \frac{\gamma(h)}{h^\tau},$$

exista y sea distinto de 0.

$$\lim_{h^+\to 0} \frac{\gamma(h)}{h^\tau} = \lim_{h^+\to 0} \frac{\sigma^2 - C_0(h;\alpha,\nu)}{h^\tau}$$

$$= \lim_{h^+\to 0} \frac{\sigma^2 - \sigma^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\nu} K_\nu\left(\frac{h}{\alpha}\right)}{h^\tau}$$

$$= \sigma^2 \lim_{h^+\to 0} \left[\frac{1 - \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\nu} K_\nu\left(\frac{h}{\alpha}\right)}{h^\tau}\right] \qquad (1)$$

Donde

- $K_\nu\left(\frac{h}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu} - I_\nu}{\sin(\nu\pi)}$

- $I_\nu\left(\frac{h}{\alpha}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m+\nu}$

$\circ)\quad I_{-\nu}\left(\frac{h}{\alpha}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m-\nu}$

Además, note que

$$I_{-\nu}\left(\frac{h}{\alpha}\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{-\nu} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m-\nu} \quad (2)$$

Usando el hecho de que

$$\Gamma(1-\nu)\Gamma(\nu) = \frac{\pi}{\sin(\pi\nu)} \iff \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} = \frac{\sin(\pi\nu)\Gamma(\nu)}{\pi}$$

la expresión (2) queda como

$$I_{-\nu}\left(\frac{h}{\alpha}\right) = \frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\cdot\sin(\pi\nu)\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{-\nu} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m-\nu}$$

Usando esto en (1)

$$\nabla^2 \lim_{h\to 0^+}\left[1 - \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\nu}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{\sin(\nu\pi)}\left(\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\cdot\sin(\pi\nu)\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{-\nu} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m-\nu} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m+\nu}\right)\right]\cdot\frac{1}{h^{\gamma}}$$

$$= \nabla^2 \lim_{h\to 0^+}\left[1 - 1 - \frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\nu}\frac{\pi}{\sin(\nu\pi)}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m-\nu} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,(m+\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m+\nu}\right)\right]\cdot\frac{1}{h^{\gamma}}$$

$$= \nabla^2 \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{2^{-\nu}}{\Gamma(\nu)}\left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\nu}\frac{\pi}{\sin(\nu\pi)}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m+\nu} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m-\nu}\right)\right]\cdot\frac{1}{h^{\gamma}}$$

$$= \frac{\nabla^2}{\Gamma(\nu)}\cdot\frac{\pi}{\sin(\nu\pi)}\lim_{h\to 0^+}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m+2\nu} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)}\left(\frac{h}{2\alpha}\right)^{2m}\right)\Bigg]\frac{1}{h^{\gamma}}$$

$$= \frac{\nabla^2\pi}{\Gamma(\nu)\sin(\nu\pi)}\lim_{h\to 0^+}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^{2m+2\nu-\gamma}}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)(2\alpha)^{2m+2\nu}} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{h^{2m-\gamma}}{m!\,\Gamma(m-\nu+1)(2\alpha)^{2m}}\right)$$

Como se quiere que el límite esté bién definido y sea distinto de cero, los h tendrán que satisfacer con $m=0$ para la primera serie (I_{ν}) y $m=1$ para la segunda ($I_{-\nu}$ menos su primer termino, $m=0$)

$$2\nu - \gamma = 0 \qquad\qquad 2 - \gamma \geq 0$$

de modo que

$\tau = 2\nu$ y $2 \geq \tau$

Como $\tau > 0$, $\tau \in (0,2]$ lo que implica que $\nu \in (0,1]$.

De esta manera, si $\tau(\nu) = 2\nu$ con $\nu \in (0,1]$ se tiene el resultado esperado.

Por otro lado, Esto haría converger la primera serie a un valor distinto de cero y la segunda a cero.

Para generar el efecto contrario, al tomar $\tau = 2$,

Bastará tomar $2\nu \geq \tau$ para su convergencia, de modo que $\nu \geq 1$ si $\tau = 2$

Finalmente, el límite existirá y será distinto de cero si:

$\tau(\nu) = 2\nu$, $\nu \in (0,2]$ o bién $\nu \geq 1$ y $\tau = 2$

2. Determine cual de las siguiente funciones es una covarianza para un proceso Gaussiano definido en $\mathbb{R}$:

(a) $\varphi_1(h) = \exp\{-|h|\}\cos(h)$,

(b) $\varphi_2(h) = \exp\{-|h|\}(1-|h|)$,

(c) $\varphi_3(h) = (1-h^2)$.

Dem: Para determinar si las funciones entregadas en este ejercicio son covarianzas admisibles para un proceso Gaussiano definido en $\mathbb{R}$. se hará uso del Teorema de Bochner

Teorema [Bochner]: Una función $C_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es de covarianza si y solo si su transformada de Fourier es real y no negativa.

También es importante mencionar el hecho de que este resultado puede ser aplicado para un proceso estocástico estacionario. Como un proceso Gaussiano está caracterizado por su media y varianza. La varianza obtenida por el Teorema de Bochner también le otorgará al proceso Gaussiano, la propiedad de ser Estacionario.

Así, solo habría que comprobar que la transformada de Fourier sea no negativa y real.

a) $$F_h(\varphi_1(h))(\omega) = \frac{F_h[e^{-|h|}](\omega-1) + F_h[e^{-|h|}](\omega+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{1+(\omega-1)^2} + \frac{1}{1+(\omega+1)^2} > 0$$

Lo cual es no negativo y real

b) $F_h(\varphi_2(h))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|h|}(1-|h|)\, e^{-i\omega h}\, dh$

$$= \int_0^{\infty} (1-h) e^{-(1+i\omega)h}\, dh + \int_{-\infty}^{0} (1+h) e^{(1-i\omega)h}\, dh$$

$$= \left[-\frac{(1-h)\, e^{-(1+i\omega)h}}{1+i\omega} + \frac{e^{-(1+i\omega)h}}{(1+i\omega)^2} \right]\Bigg|_{h=0}^{h=\infty} + \left[\frac{(1+h)\, e^{(1-i\omega)h}}{1+i\omega} - \frac{e^{(1-\omega)h}}{(1-i\omega)^2} \right]\Bigg|_{h=-\infty}^{h=0}$$

$$= \left(\frac{1}{1+i\omega} - \frac{1}{(1+i\omega)^2} \right) + \left(\frac{1}{1-i\omega} - \frac{1}{(1-i\omega)^2} \right)$$

$$= \frac{1+i\omega-1}{(1+i\omega)^2} + \frac{1-i\omega-1}{(1-i\omega)^2}$$

$$= i\omega \left[\frac{1}{(1+i\omega)^2} - \frac{1}{(1-i\omega)^2} \right]$$

$$= i\omega \left[\frac{1-2i\omega-\omega^2-1-2i\omega+\omega^2}{(1+\omega^2)^2} \right]$$

$$= \frac{-4i^2\omega^2}{(1+\omega^2)^2}$$

$$= \frac{4\omega^2}{(1+\omega^2)^2} \geq 0$$

El cual es no negativo y real

c) $F_h(\varphi_3(h))(\omega) = \sqrt{2\pi}\left(\delta(\omega) + \delta''(\omega)\right)$ ← usando Wolfram

El cual puede tomar valores negativos por el δ''

Así, no puede ser una covarianza admisible

Para finalizar, solo a y b pueden ser covarianzas admisibles

3. Sea $\boldsymbol{X}$ un campo aleatorio Gaussiano con función de medias $\mathbb{E}[X(s)] = \mu(s) = 0$ y función de covarianzas $\operatorname{Cov}(X(s), X(s')) = C_0(s - s')$. Calcule la covarianza y el variograma del proceso $Y(s) = X^2(s)$. Describa si sus resultados cambian si $\mu(s) = \mu_0$.

Dem:

Sea X un campo aleatorio Gaussianto tal que

1) $E[X(s)] = \mu(s) = 0$

2) $\operatorname{Cov}(X(s), X(s')) = C_0(s-s')$

Se define $Y(s) = X^2(s)$, que por abuso de notación se denotará como $Y(s) = X(s)^2$.

Se procede a calcular $E[Y(s)]$

$$\begin{aligned} E[Y(s)] &= E[X(s)^2] \\ &= \operatorname{Var}(X(s)) + E[X(s)]^2 \\ &= \operatorname{Var}(X(s)) + 0 \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Luego, para el cálculo de la covarianza

$$\begin{aligned} E[Y(s)Y(s')] &= E[X(s)^2 X(s')^2] \\ &= E[X(s)X(s)X(s')X(s')] \\ &= \sigma^4 + 2C_0(s-s')^2 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(Y(s), Y(s')) &= E[Y(s)Y(s')] - E[Y(s)]E[Y(s')] \\ &= \sigma^4 + 2C_0(s-s')^2 - \sigma^2 \\ &= 2C_0(s-s')^2 \end{aligned}$$

Luego, para construir $\gamma_Y(h)$ se usará el hecho de que

$$\begin{aligned} E[Y(s)] = \sigma^2 \Rightarrow 2\gamma_Y(h) &= E[(Y(s) - Y(\overbrace{s+h}^{s'}))^2] \\ &= \operatorname{Var}(Y(s)) - 2\operatorname{Cov}(Y(s), Y(s')) + V(Y(s')) \\ &= 2C_0(0)^2 - 4C_0(s-s')^2 + 2C_0(0)^2 \\ &= 4(C_0(0)^2 - C_0(s-s')^2) \end{aligned}$$

Así

$$2\gamma_Y(h) = 4\left(C_0(0)^2 - C_0(s-s')^2\right)$$

Finalmente, Debo describir como cambian los resultados si $E[X(s)] = \mu(s) = \mu_0$.

Naturalmente, nada cambia si $\mu_0 = 0$, así que sin pérdida de generalidad, sea μ_0 un valor en $\mathbb{R}$ distinto de cero.

$$\begin{aligned} E[Y(s)] &= E[X(s)^2] \\ &= \mathrm{Var}(X(s)^2) - E[X(s)]^2 \\ &= \sigma^2 + \mu_0^2 \end{aligned}$$

Por lo que ahora la esperanza incluye μ_0^2. Luego,

$$\begin{aligned} E[Y(s)Y(s')] &= E[X(s)^2 X(s')^2] \\ &= E[(X(s)-\mu_0+\mu_0)^2 (X(s)-\mu_0+\mu_0)^2] \qquad (*) \end{aligned}$$

Donde la expresión $(*)$ en el cálculo de $E[Y(s)Y(s')]$, convenientemente sirve para repetir los pasos anteriores usando la linealidad de la esperanza, se trabajará con el argumento

$$\left[(X(s)-\mu_0)+\mu_0\right]^2\left[(X(s')-\mu_0)+\mu_0\right]^2 = \left[(X(s)-\mu_0)^2 + 2(X(s)-\mu_0)\mu_0 + \mu_0^2\right]\left[(X(s')-\mu_0)^2 + 2(X(s')-\mu_0)\mu_0 + \mu_0^2\right]$$

$$\begin{aligned} &= (X(s)-\mu_0)^2(X(s')-\mu_0)^2 + 2(X(s)-\mu_0)^2(X(s')-\mu_0) + \mu_0^2(X(s)-\mu_0)^2 \\ &+ 2(X(s)-\mu_0)\mu_0(X(s')-\mu_0)^2 + 4\mu_0^2(X(s)-\mu_0)(X(s')-\mu_0) + 2\mu_0^2(X(s)-\mu_0) \\ &+ \mu_0^2(X(s')-\mu_0)^2 + 2\mu_0^2(X(s')-\mu_0) + \mu_0^4 \end{aligned}$$

Como las variables aleatorias $X(s)-\mu_0$, $X(s')-\mu_0$ tienen media 0. Luego, si su producto consiste en una cantidad impar de estas variables, sería como el momento impar de una distribución Normal. Es decir,

$$E\left[2(X(s)-\mu_0)^2(X(s')-\mu_0)\right] = E\left[2(X(s)-\mu_0)\mu_0(X(s')-\mu_0)^2\right] = E\left[2\mu_0^2(X(s)-\mu_0)\right] = E\left[2\mu_0^2(X(s')-\mu_0)\right] = 0$$

De esta forma:

$$E\left[(X(s)-\mu_0+\mu_0)^2(X(s)-\mu_0+\mu_0)^2\right] = E\left[(X(s)-\mu_0)^2(X(s')-\mu_0)^2\right] + E\left[(X(s)-\mu_0)^2\mu_0^2 + (X(s')-\mu_0)^2\mu_0^2\right]$$
$$+ 4\mu_0^2 E\left[(X(s)-\mu_0)(X(s')-\mu_0)\right] + \mu_0^4$$

$$= E\left[(X(s)-\mu_0)^2(X(s')-\mu_0)^2\right] + \mu_0^2\sigma^2 + \mu_0^2\sigma^2 + 4\mu_0^2 C_0(s-s') + \mu_0^4$$

$$= \sigma^4 + 2C_0(s-s')^2 + 2\mu_0^2\sigma^2 + 4\mu_0^2 C_0(s-s') + \mu_0^4$$

En consecuencia,

$$Cov(Y(s),Y(s')) = E[Y(s)Y(s')] - E[Y(s)]E[Y(s')]$$
$$= \sigma^4 + 2C_0(s-s')^2 + 2\mu_0^2\sigma^2 + 4\mu_0^2 C_0(s-s') + \mu_0^4 - (\sigma^2+\mu_0^2)^2$$
$$= 2C_0(s-s')^2 + 4\mu_0^2 C_0(s-s')$$

De modo que ahora existe influencia de μ_0 en la covarianza causada por el término $4\mu_0 C_0(s-s')$. Finalmente, en el caso del variograma $(2\gamma(h))$

$$E[Y(s)] = \sigma^2+\mu_0^2 \Rightarrow 2\gamma_Y(h) = E\left[\left(Y(s) - \overbrace{Y(s+h)}^{s'}\right)^2\right]$$
$$= Var(Y(s)) - 2\,Cov(Y(s),Y(s')) + V(Y(s'))$$
$$= 2C_0(0)^2 + 4\mu_0^2 C_0(0) - 2\left(2C_0(s-s') + 4\mu_0^2 C_0(s-s')\right)$$
$$+ 2C_0(0)^2 + 4\mu_0^2 C_0(0)$$
$$= 4\left[C_0(0)^2 + 2\mu_0^2 C_0(0) - C_0(s-s') - 2\mu_0^2 C_0(s-s')\right]$$

de modo que el variograma queda de la forma

$$2\gamma(h) = 4\left[C_0(0)^2 + 2\mu_0^2 C_0(0) - C_0(s-s') - 2\mu_0^2 C_0(s-s')\right]$$