4

不定积分

4.2 不定积分方法

换元法

定理：设 $f(u)$具有原函数，$u=\varphi(x)$ 可导，则有换元公式 $\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=[\int f(u)\,du]_{u=\varphi(x)}$

求 $\int 2\text{Cos } 2x\, dx$

$\int 2\text{Cos } 2x\, dx=\int \text{Cos } 2x*2dx=\int \text{Cos } 2x\,(2x)'\, dx=\int \text{Cos } u\, du=\text{Sin } u+C=\text{Sin } 2x+C$

定理：设$x=\psi(t)$是单调的可导函数，并且$\psi'(x)\neq 0$,又设$f[\psi(t)]\psi'(t)$具有原函数，则有换元公式 $\int f(x)dx=[\int f[\psi(t)\,\psi'(t)\,dt]]_{t=\psi^{-1}(x)}$, 其中$\psi^{-1}(x)$是$x=\psi(t)$的反函数.

求 $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx$

设 $x=\frac{1}{t}$, 则 $dx=-\frac{dt}{t^2}$,于是

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx=\int \frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{dt}{t^2}\right)}{\frac{1}{t^4}}=-\int \left(a^2t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\left|t\right|dt$$

当 x > 0 时，有 $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx=-\frac{1}{2a^2}\int\left(a^2t^2-1\right)^{\frac{1}{2}}d\left(a^2t^2-1\right)=-\frac{\left(a^2t^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C=-\frac{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C$. 当 $x<0$ 时有相同的结果.

分部积分法

设函数u=u(x)及v=v(x)具有连续导数，则有(uv)'=u'v+uv',→uv'=(uv)'-u'v,两边同时求不定积分可得

定理：$\int u\, dv=uv-\int v du$.

求 $\int x\text{ Cos } x\, dx$

$\int x\text{ Cos } x\, dx=\int x\, d\text{ Sin } x=x\text{ Sin } x-\int \text{Sin } x\, dx=x\text{ Sin } x+\text{Cos } x+C$

小结

- 了解不定积分的概念与性质

▪ 了解基本函数定积分的求法

积分与微分是两个互为逆向的过程，在学习的过程中注意配合学习

练习：

- ▲ 已知 $\frac{\operatorname{Sin} x}{x}$ 是 f(x) 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\,\mathrm{dx}$.
- ▲ 求积分：$\int \frac{\mathrm{dx}}{x\left(x^6+4\right)}$、$\int \frac{\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x}{\operatorname{Sin} x+\operatorname{Cos} x}\,\mathrm{dx}$