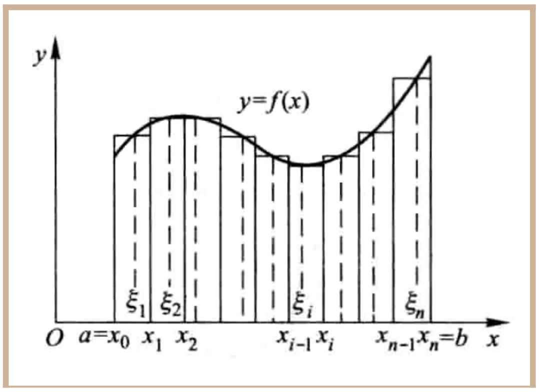
5

定积分及其应用

5.1 定积分

定积分的概念



定义：设函数$f(x)$在$[a, b]$上有界，，

在$[a, b]$中任意插入若干个分点$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.即把区间$[a, b]$分成n个小区间$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$
各区间的长度依次是$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$.在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点$\xi_i(x_{i-1} < \xi_i < x_i)$,

作函数值$f(\xi_i)$与小区间长度Δx_i的乘积$f(\xi_i)\,\Delta x_i (i = 1, 2, \ldots n)$，并作出和

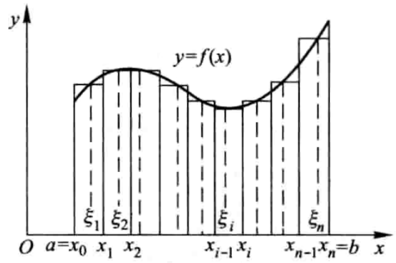
$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

记$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n\}$,如果当$\lambda\to 0$时，这和的极限总存在，且与闭区间[a,b]的分法及点ξ_i的取法无关，那么称这个极限I为函数f(x)在区间[a,b]上的定积分

$$记作 \int_a^b f(x)\,dx = I = \lim_{\lambda\to 0} = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

其中f(x)叫做被积函数，f(x)dx 叫做被积表达式，x叫做积分变量，b、a叫做积分上下限，[a,b]叫做积分区间。

定积分的性质



- 性质1 设α与β均为常数，则 $\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.

- 性质2 设a<c<b, $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$.

- 性质3 如果在区间[a,b]上f(x)≡1,那么 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dx=b-a$.

- 性质4 如果在区间[a,b]上f(x)≥0,那么 $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$ (a<b).

- 性质5 设M及m分别是函数f(x)在区间[a,b]上的最大值及最小值，则 $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$, $(a<b)$

- 性质6(定积分中值定理) 如果函数f(x)在积分区间[a,b]上连续，那么在[a,b]上至少存在一个点ξ使得 $\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)\,(b-a)$, $(a\leq\xi\leq b)$