5

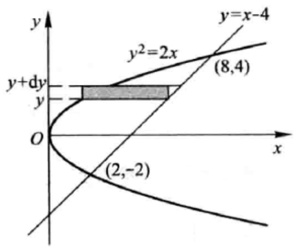
定积分及其应用

5.3 定积分的应用

计算图形面积

计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

解 这个图形如图所示. 为了定出这图形所在的范围,先求出所给抛物线和直线的交点. 解方程组



$$\begin{cases} y^2=2x, \\ y=x-4, \end{cases}$$

得交点$(2,-2)$和$(8,4)$,从而知道这图形在直线 $y=-2$ 及 $y=4$ 之间.

现在,选取纵坐标 y 为积分变量,它的变化区间为$[-2,4]$相应于$[-2,4]$上任一小区间$[y,y+dy]$的窄条面积近似于高为 dy、底为$(y+4)-\frac{1}{2}y^2$的窄矩形的面积,从而得到面积元素

$$dA=\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy.$$

以$\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy$ 为被积表达式,在闭区间$[-2,4]$上作定积分,便得所求的面积为

$$A=\int_{-2}^{4}\left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\left[\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right]_{-2}^{4}=18.$$

计算体积

计算由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

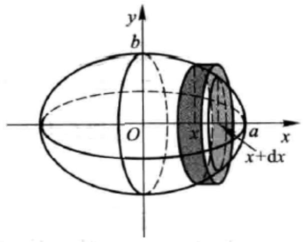
所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体(叫做旋转椭球体)的体积.

解 这个旋转椭球体也可以看作是由半个椭圆

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的立体.

取 x 为积分变量,它的变化区间为 $[-a,a]$. 旋转椭球体中相应于 $[-a,a]$ 上任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的薄片的体积,近似于底半径为 $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$、高为 $\mathrm{d}x$ 的扁圆柱体的体积即体积元素



$$\mathrm{d}V=\frac{\pi b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x.$$

于是所求旋转椭球体的体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

当 $a=b$ 时,旋转椭球体就成为半径为 a 的球,它的体积为 $\frac{4}{3}\pi a^3$.

小结

- 了解定积分的概念与性质
- 了解定积分的求法
- 了解定积分在实际问题中的应用

练习：计算下列积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\mathrm{Sin}\,x}{1+\mathrm{Cos}\,x}\,\mathrm{dx}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\mathrm{Sin}\,2\,x}\;\mathrm{dx}$$