4

向量、矩阵与二次型

4.1 向量及其线性组合

定义： n个有次序的数 $a_1, a_2, ..., a_n$ 所组成的数组称为n维向量，这n个数称为该向量的n个分量，第i个数 a_i 称为第i个分量.

定义：给定向量组 $A: a_1, a_2, ..., a_m$ 对于任何一组实数 $k_1, k_2, ..., k_m$,表达式 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + ... + k_m a_m$称为向量组A的一个线性组合，$k_1, k_2, ..., k_m$称这个线性组合的系数.

定义：设有两个向量组 $A: a_1, a_2, ..., a_m$及 $B: b_1, b_2, ... b_l$若B组中的每一个向量都能由向量组A线性表示，则称向量组B能由向量组A线性表示.若向量组A与向量组B能相互线性表示，则称这两个向量组等价.

$$\text{bj} = k_{1j} a_1 + k_{2j} a_2 + ... + k_{mj} a_m = (a_1 \quad a_2 \quad ... \quad a_m) \begin{pmatrix} k_{1j} \\ k_{2j} \\ \vdots \\ k_{mj} \end{pmatrix} \longrightarrow (b_1 \quad b_2 \quad ... \quad b_l) = (a_1 \quad a_2 \quad ... \quad a_m) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1l} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2l} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \cdots & k_{ml} \end{pmatrix}$$

定理：向量b(向量组B)能由向量组 $A: a_1, a_2, ..., a_m$线性表示的充分必要条件是矩阵 $A = (a_1, a_2, ..., a_m)$的秩等于矩阵$B = (a_1, a_2, ..., a_m, b)$的秩，即 R(A)=R(B); $((A, B) = (a_1, ..., a_m, b_1, ... b_l))$(R(A)=R(A,B))

例题：设 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$,将b用向量组 a_1, a_2, a_3表示，并求表示式.

$$B = (A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 - 2r_1]{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

,显然R(A)=R(B)=2,所以b可用向量组A线性表示

方程 $(a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b$ 的解 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3c + 2 \\ 2c - 1 \\ c \end{pmatrix} \Longrightarrow b = (a_1, a_2, a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (-3c + 2) a_1 + (2c - 1) a_2 + c a_3$