2

线性代数

第一节

- 练习：
- 求 $D=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$
- 求 $D_n=\begin{vmatrix}x&a&\dots&a\\a&x&\dots&a\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a&a&\dots&x\end{vmatrix}$

参考答案：

▲ $D=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xRightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\4&1&2&4\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}\xRightarrow[r_3-10r_1]{r_2-4r_1}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&-7&2&-4\\0&-15&2&-20\\0&1&1&7\end{vmatrix}$

$\xRightarrow{r_4\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&-15&2&-20\\0&-7&2&-4\end{vmatrix}\xRightarrow[r_4+7r_2]{r_3+15r_2}-\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&1&1&7\\0&0&17&85\\0&0&9&45\end{vmatrix}=0$(因为34行成比例)

▲ $D_n=\begin{vmatrix}x&a&\dots&a\\a&x&\dots&a\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a&a&\dots&x\end{vmatrix}\xRightarrow{r_1+r_2+r_3+\dots+r_n}\begin{vmatrix}x+(n-1)a&x+(n-1)a&\cdots&x+(n-1)a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\Longrightarrow[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}\xRightarrow[i=2,3,\dots,n]{r_i-ar_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x-a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&x-a\end{vmatrix}=(x-a)^{n-1}$

$\Longrightarrow D_n=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$

第二节

- 练习：
- 求逆矩阵 $\begin{pmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\1&0&2&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$
- 解方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=2\\x_1+2x_2+4x_3=3\\x_1+3x_2+9x_3=5\end{cases}$

参考答案：

▲ $A=\begin{pmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\1&0&2&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$;Det[A]=2>0, 故 A^{-1} 存在，计算 $|A|$ 的代数余子式 $\begin{matrix}A_{11}=-4 & A_{12}=8 & A_{13}=10 & A_{14}=-12\\ A_{21}=-2 & A_{22}=4 & A_{23}=4 & A_{24}=-4\\ A_{31}=2 & A_{32}=-4 & A_{33}=-4 & A_{34}=6\\ A_{41}=4 & A_{42}=-7 & A_{43}=-9 & A_{44}=10\end{matrix}$

可得伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}-4&8&10&-12\\-2&4&4&-4\\2&-4&-4&6\\4&-7&-9&10\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}-2&4&5&-6\\-1&2&2&-2\\1&-2&-2&3\\2&-3.5&-4.5&5\end{pmatrix}$

▲ $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{vmatrix}=2\neq 0$ 方程组有唯一解. $|A_1|=\begin{vmatrix}2&1&1\\3&2&4\\5&3&9\end{vmatrix}$, $|A_2|=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&4\\1&5&9\end{vmatrix}$, $|A_3|=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&3\\1&3&5\end{vmatrix}$

$x_1=\dfrac{|A_1|}{|A|}=2,\ x_2=\dfrac{|A_2|}{|A|}=\dfrac{-1}{2},\ x_3=\dfrac{|A_3|}{|A|}=\dfrac{1}{2}$

第三节

练习：

求逆矩阵 $\begin{pmatrix}3&-2&0&-1\\0&2&2&1\\1&-2&-3&-2\\0&1&2&1\end{pmatrix}$

解方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-x_4=0\\2x_1+x_2+x_3-x_4=0\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$ $\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2\\3x_1-x_2+2x_3=10\\11x_1+3x_2=8\end{cases}$

参考答案：

▲ $(A,E)=\begin{pmatrix}3&-2&0&-1&1&0&0&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\\1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\end{pmatrix}\underset{r_2\leftrightarrow r_4}{\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\Longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\3&-2&0&-1&1&0&0&0\\0&2&2&1&0&1&0&0\end{pmatrix}\underset{r_4-2r_2}{\overset{r_3-3r_1}{\Longrightarrow}}$

$\begin{pmatrix}1&-2&-3&-2&0&0&1&0\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&4&9&5&1&0&-3&0\\0&0&-2&-1&0&1&0&-2\end{pmatrix}\underset{r_3-4r_4}{\overset{r_1+2r_2}{\Longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1&0&4&6\\0&1&2&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&-2&-1&0&1&0&-2\end{pmatrix}\underset{r_2-2r_3}{\overset{r_1-r_3,\ r_4+2r_3}{\Longrightarrow}}$

$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&-1&0&4&6\\0&1&0&-1&-2&0&6&9\\0&0&1&1&1&0&-3&-4\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix}\underset{r_3-r_4}{\overset{r_1+r_4,\ r_2+r_3}{\Longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1&-2&-4\\0&1&0&0&0&1&0&-1\\0&0&1&0&-1&-1&3&6\\0&0&0&1&2&1&-6&-10\end{pmatrix}=(E,A^{-1})\Longrightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-2&-4\\0&1&0&-1\\-1&-1&3&6\\2&1&-6&-10\end{pmatrix}$

▲ 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{pmatrix}\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\Longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&-1&-3&1\\0&0&-3&4\end{pmatrix}\underset{r_3\times\frac{1}{3}}{\overset{r_2\times(-1)}{\Longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\0&1&3&-1\\0&0&1&\frac{-4}{3}\end{pmatrix}\overset{r_1-r_2}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&-1\\0&0&1&\frac{-4}{3}\end{pmatrix}\underset{r_2-3r_3}{\overset{r_1+r_3}{\Longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{-4}{3}\\0&1&0&3\\0&0&1&\frac{-4}{3}\end{pmatrix}$

于是R(A)=3,故方程组有4-R(A)=1个自由未知数，解得 $\begin{cases}x_1=\frac{4}{3}x_4\\x_2=-3x_4\\x_3=\frac{4}{3}x_4\end{cases}$ 整理得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-3\\\frac{4}{3}\\1\end{pmatrix}$, $c\in R$

▲ 增广矩阵 $B=\begin{pmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\overset{r_1-r_2}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\underset{r_3-11r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\Longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&-30&33&96\end{pmatrix}\overset{r_3-3r_2}{\Longrightarrow}\begin{pmatrix}1&3&-3&-8\\0&-10&11&34\\0&0&0&-6\end{pmatrix}$;

R(A)=2<R(B)=3,方程无解。

第四节

练习：

设 $A=\begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{pmatrix}$ 求 A^{2018}

参考答案：

▲ 先求A的特征值：

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&4&2\\0&-3-\lambda&4\\0&4&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-3-\lambda&4\\4&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5)\Longrightarrow\text{特征值 }\lambda_1=-5,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=5$$

1. $\lambda_1=-5$解方程 $(A+5E)x=0$, $A+5E=\begin{pmatrix}6&4&2\\0&2&4\\0&4&8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow$得特征向量 $p_1=(1,\ -2,\ 1)^T$

2. $\lambda_1=1$解方程 $(A-E)x=0$, $A-E=\begin{pmatrix}0&4&2\\0&-4&-4\\0&4&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow$得特征向量 $p_2=(1,\ 0,\ 0)^T$

3. $\lambda_1=5$解方程 $(A-5E)x=0$, $A-5E=\begin{pmatrix}-4&4&2\\0&-8&4\\0&4&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow$得特征向量 $p_3=(2,\ 1,\ 2)^T$

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}$, 有 $P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(-5,\ 1,\ 5)\Longrightarrow A=P\Lambda P^{-1}\Longrightarrow A^{2018}=P\Lambda^{2018}P^{-1}$

可求得 $P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&0&-5\\0&1&2\end{pmatrix}$代入可得

$$A^{2018}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1&2\\-2&0&1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{2018}&&\\&1&\\&&5^{2018}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&0&-5\\0&1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5^{2018}&1&2\times5^{2018}\\-2\times5^{2018}&0&5^{2018}\\5^{2018}&0&2\times5^{2018}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&1\\5&0&-5\\0&1&2\end{pmatrix}$$