4

向量、矩阵及其对角化

4.4 矩阵的对角化

相似矩阵与对角化

定义：设A、B都是n阶矩阵，若有可逆矩阵P，使得 $P^{-1}AP=B$ 则称B是A的相似矩阵，或矩阵A与矩阵B相似

定理：若n阶矩阵A与B相似，则A与B的特征多项式相同，从而A与B的特征值亦相同.

推论：若n阶矩阵A与对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$相似，则 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$即是A的n个特征量.

例题：设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -4 & 1 & 3\end{pmatrix}$将A对角化.

A的特征多项式为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ -4 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}= \ldots =-(\lambda-2)^2(\lambda+1),\Longrightarrow$ A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2$

当$\lambda_1=-1$时 解方程 $(A+E)x=0.\ A+E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow p_1=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时 解方程 $(A-2E)x=0.\ A-2E=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow p_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\ p_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 4\end{pmatrix}.$

p_1, p_2, p_3线性无关，记 $P=(p_1, p_2, p_3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$则有 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-1, 2, 2)$

```
Inverse[(1 0 1; 0 1 0; 1 -1 4)].(-2 1 1; 0 2 0; -4 1 3).(1 0 1; 0 1 0; 1 -1 4) // MatrixForm
```
逆　矩阵格式

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

小结

- 介绍了向量及线性组合

- 介绍了线性代数方程组的解向量
- 介绍了方阵的特征值与特征向量
- 方阵的对角化

练习：

设 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$ 求 A^{2018}