2

导数与微分

2.2 函数的求导

基本初等函数的求导

1. $(C)' = 0$;
2. $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$
3. $(\mathrm{Sin}\, x)' = \mathrm{Cos}\, x$
4. $(\mathrm{Cos}\, x)' = -\mathrm{Sin}\, x$
5. $(\mathrm{Tan}\, x)' = \mathrm{Sec}^2 x$
6. $(\mathrm{Cot}\, x)' = -\mathrm{Csc}^2 x$
7. $(\mathrm{Sec}\, x)' = \mathrm{Sec}\, x\, \mathrm{Tan}\, x$
8. $(\mathrm{Csc}\, x)' = -\mathrm{Csc}\, x\, \mathrm{Cot}\, x$
9. $(a^x)' = a^x \mathrm{Ln}\, a \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
10. $(e^x)' = e^x$
11. $(\mathrm{Log}_a x)' = \dfrac{1}{x\, \mathrm{Ln}\, x} \quad (a > 0,\ a \neq 1))$
12. $(\mathrm{Ln}\, x)' = \dfrac{1}{x}$
13. $(\mathrm{ArcSin}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14. $(\mathrm{ArcCos}\, x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
15. $(\mathrm{ArcTan}\, x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
16. $(\mathrm{ArcCot}\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

函数的四则运算求导法则

定理：如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x具有导数，那么它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都在点 x 具有导数，且

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

$$[u(x)\, v(x)]' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$$

例题： $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x\,\mathrm{Sin}\,x + \dfrac{x^2+1}{2x} - 7$，求 y'.

```
y=2x^3-5x^2+3x Sin[x]+(x^2+1)/(2x)-7;
D[y,x]
```

$$1 - 10x + 6x^2 - \frac{1+x^2}{2x^2} + 3x\,\mathrm{Cos}[x] + 3\,\mathrm{Sin}[x]$$

复合函数的求导

定理： 如果 *u=g(x)* 在点 *x* 可导， 而 *y=f(u)* 在点 *u=g(x)* 可导， 那么复合函数*y=f[g(x)]* 在点 *x* 可导， 且其导数为

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) * g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

例题： 设 $y = \mathrm{Sin}\,n\,x * \mathrm{Sin}^n\,x$ (n为常数）， 求 y'.

应用积的求导法则： $y' = (\mathrm{Sin}\,n\,x)'\,\mathrm{Sin}^n\,x + \mathrm{Sin}\,n\,x * (\mathrm{Sin}^n\,x)'$.

计算 $(\mathrm{Sin}\,n\,x)'$和 $(\mathrm{Sin}^n\,x)'$时应用复合函数的求导法则，

$(\mathrm{Sin}\,n\,x)' = \mathrm{Cos}\,n\,x * (n\,x)' = \mathrm{Cos}\,n\,x * n$

$(\mathrm{Sin}^n\,x)' = n(\mathrm{Sin}\,x)^{n-1} * (\mathrm{Sin}\,x)' = n\,\mathrm{Sin}^{n-1}\,x * \mathrm{Cos}\,x$ 由此可得最终结果。

```
y=Sin[n x] Sin[x]^n;
D[y,x]
```

$$n\,\mathrm{Cos}[n\,x]\,\mathrm{Sin}[x]^n + n\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]^{-1+n}\,\mathrm{Sin}[n\,x]$$

高阶导数

一般地， 函数 *y=f(x)* 的导数 $y' = f'(x)$ 仍然是 *x* 的函数.我们把 $y' = f'(x)$的导数叫做函数 *y=f(x)* 的二阶导数， 记作 y''或 $\frac{d^2y}{dx^2}$, 即

$$y'' = (y')' \text{ 或 } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

类似地， 二阶导数的导数叫三阶导数， $(n-1)$ 阶导数的导数叫做 *n* 阶导数， 分别记作

$$y''' = (y'')', \ldots, y^{(n)} \text{ 或 } \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$