6

多元函数与重积分

6.1 多元函数

多元函数的概念

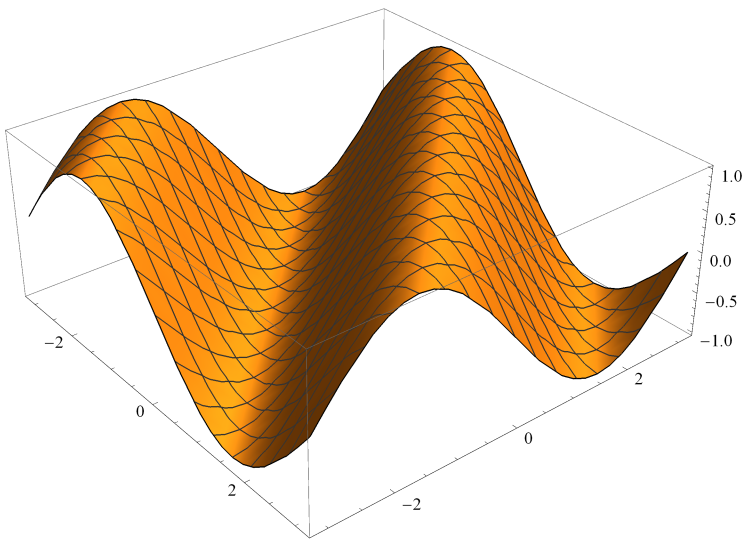
定义：设D是 R^2 的一个非空子集，称映射 $f: D \to R$为定义在D上的二元函数，通常记为

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D \text{ 或 } z = f(P),\ P \in D$$

其中点集D称为该函数的定义域，x和y称为自变量，z称为因变量

二元函数 $z = \mathrm{Sin}(x + y)$

```
Plot3D[Sin[x + y], {x, -π, π}, {y, -π, π}]
```



偏导数

定义：设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域有定义，当y固定在 y_0 而x在 x_0 处有增量Δx时，相应函数有增量 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, 如果有极限

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\, y_0)-f(x_0,\, y_0)}{\Delta x}$存在，那么称这个极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对x的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}},\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}\text{或}\ f_x(x_0, y_0)$$

- 求 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的偏导数

  把y看作常量，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+3y$,把x看作常量，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=3x+2y$,代入点(1,2)可得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}}=8$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=2}}=7.$

全微分

定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某一邻域有定义，

如果函数在点 (x,y) 的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x,\, y+\Delta y)-f(x,y)$ 可表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$

其中A和B不依赖于Δx和Δy而仅与x和y有关，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，那么称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，而AΔx+BΔy称为函数在点(x,y)的全微分

$$\text{记作}\ dz=A\Delta x+B\Delta y$$

定理：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，那么该函数在点 (x,y) 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

- 计算函数 $z=x^2y+y^2$ 的全微分

  $\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y,\ \to dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=2xydx+\left(x^2+2y\right)dy$