2

导数与微分

2.3 函数的微分

定义：设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y=A\,\Delta x+o(\Delta x)$ 其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 dy 即 $dy=A\Delta x$

简言之：函数(因变量)的变化量(微元)与自变量的变化量(微元)的关系

$$y=f(x)$$

$$\mathrm{dy}=f'(x)\,\mathrm{dx}$$

求函数 $\mathrm{y}=x^2$ 的微分.

$$dy=d\left(x^2\right)=\left(x^2\right)'dx=2x\,dx$$

基本初等函数的微分

---

1. $\mathrm{d}(x^{\mu})'=\mu\,x^{\mu-1}\,\mathrm{dx}$
2. $\mathrm{d}(\mathrm{Sinx})'=\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{dx}$
3. $\mathrm{d}(\mathrm{Cos}\,x)'=-\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{dx}$
4. $\mathrm{d}(\mathrm{Tan}\,x)'=\mathrm{Sec}^2\,x\,\mathrm{dx}$
5. $d(\mathrm{Cot}\,x)'=-\mathrm{Csc}^2\,x\,\mathrm{dx}$
6. $\mathrm{d}(\mathrm{Sec}\,x)'=\mathrm{Sec}\,x\,\mathrm{Tan}\,x\,\mathrm{dx}$
7. $\mathrm{d}(\mathrm{Csc}\,x)'=-\mathrm{Csc}\,x\,\mathrm{Cot}\,x\,\mathrm{dx}$
8. $\mathrm{d}(a^x)'=a^x\,\mathrm{Ln}\,a\,\mathrm{dx}\ \ (a>0,\ a\neq 1)$
9. $\mathrm{d}(e^x)'=e^x\,\mathrm{dx}$
10. $\mathrm{d}(\mathrm{Log}_a\,x)'=\dfrac{1}{x\,\mathrm{Ln}\,x}\,\mathrm{dx}\ \ (a>0,\ a\neq 1))$
11. $\mathrm{d}(\mathrm{Ln}\,x)'=\dfrac{1}{x}\mathrm{dx}$
12. $\mathrm{d}(\mathrm{ArcSin}\,x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx}$
13. $\mathrm{d}(\mathrm{ArcCos}\,x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx}$
14. $\mathrm{d}(\mathrm{ArcTan}\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{dx}$
15. $\mathrm{d}(\mathrm{ArcCot}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{dx}$

函数的四则运算的微分法则

$d[u \pm v] = du \pm dv$

$d[uv] = vdu + udv$

$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} (v \neq 0)$

复合函数的微分法则

设 $y=f(x)$ 及 $u=g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分为

$$dy = y'_u\, du,\ du = g'_x\, dx$$
$$dy = y'_x\, dx = f'(u)\, g'(x)\, dx$$

例题：设 $y = \mathrm{Sin}\, n\, x$ (n为常数），求 dy.

$dy = y'_x\, dx = (\mathrm{Sin}\, n\, x)'\, dx = n\, \mathrm{Cos}\, n\, x\, dx$

$dy = f'(u)\, g'(x)\, dx = (\mathrm{Sin}(u))'\, (n\, x)'\, dx = n\, \mathrm{Cos}\, n\, x\, dx$

小结与练习

- 了解导数与微分的概念
- 了解简单函数导数及微分的求法

导数是函数的性质，微分是更重要的是微元思想

练习：

▲ 计算函数 $y = 2x^2 + \mathrm{Ln}\, x$的二阶导数

▲ 求函数的微分：$y = x\, \mathrm{Sin}\, 2\, x$