1

概率论

1.3 随机变量的数字特征

数学期望

- 离散型随机变量X的分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\ldots$ 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$绝对收敛，则称其为随机变量X的数学期望，记为 $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$

- 连续型随机变量X的概率密度为f(x) 若积分 $\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ 绝对收敛，则称其为随机变量X的数学期望，记为 $E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx.$

随机变量分布率为 $\begin{pmatrix} X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ p_k & 0.002 & 0.001 & 0.002 & 0.005 & 0.02 & 0.04 & 0.18 & 0.37 & 0.25 & 0.12 & 0.01 \end{pmatrix}$, 求数学期望

E(X)=0×0.002+1×0.001+2×0.002+3×0.005+4×0.02+5×0.04+6×0.18+7×0.37+8×0.25+9×0.12+10×0.01=7.15,

随机变量分布率为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, 求数学期望E$(X)$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda\, e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\, e^{\lambda}=\lambda$$

随机变量概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{else}\end{cases}$ 求 $E(X)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx=\frac{a+b}{2}$$

方差

定义： 设X是一个随机变量，若 $E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$存在，则称$E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$为X的方差，记为D(X)或Var(X) 即D(X)=$E\left\{[X-E(x)]^2\right\}$

随机变量的方差可按照如下计算： $D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2$

$$* D(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}=E\left\{X^2-2\,X\,E(X)+[E(X)]^2\right\}=E\left(X^2\right)-2\,E(X)\,E(X)+[E(X)]^2=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2$$

随机变量分布率为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, 求D$(X)$

$E(X)=\lambda$;

$$E\left(X^2\right) = E[X(X-1)+X] = E[X(X-1)] + E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)\,\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$D(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = \lambda$$

- 随机变量概率密度 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ 求 $D(X)$

$$E(X) = \frac{a+b}{2};\ D(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- 随机变量概率密度 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ 求 $D(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\,\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = -x\, e^{-x/\theta}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = \theta$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^2\,\frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = -x^2\, e^{-x/\theta}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2\,x\, e^{-\frac{x}{\theta}}\,dx = 2\,\theta^2$$

$$D(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = \theta^2$$

小结

- 介绍概率论的基本概念
- 介绍了随机变量及其分布
- 概率分布、分布律及概率密度
- 随机变量的数学特征

- 练习：
- 求正态分布的期望和方差