2

矩阵

2.2 矩阵的运算

矩阵的加法

设两个m×n矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$，那么矩阵A与B的和记为A+B

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

* $A + B = B + A$;

* $(A + B) + C = A + (B + C)$.

矩阵的乘法

■ 数与矩阵相乘

数λ与矩阵A相乘的乘积记作 λA 或 Aλ 记 $\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

* $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;

* $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

* $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

矩阵的加法与数乘矩阵统称为矩阵的线性运算

■ 矩阵与矩阵相乘

定义：设 $A = (a_{ij})$ 是一个m×s 矩阵, $B = (b_{ij})$是一个s×n矩阵，那么规定矩阵A与矩阵B的乘积是一个m×n的矩阵 $C = (c_{ij})$，其中

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{is} b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}, \ (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots n)$$

例 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32} \end{pmatrix}$

* $(AB)C=A(BC)$;

* λ(AB)=(λA)B=A(λB) (其中λ为常数)

* A(B+C)=AB+AC,(B+C)A=BA+CA.

例求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$与 $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}$的乘积AB及BA

$AB=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

■ 矩阵的转置

定义：把矩阵A的行换成同序数的列得到的一个新矩阵，叫做A的转置矩阵，记作 A^T

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}\to A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

* $\left(A^T\right)^T=A$;

* $(A+B)^T=A^T+B^T$;

* $(\lambda A)^T=\lambda A^T$;

* $(AB)^T=B^T A^T$.

例 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 求 $(AB)^T$

$AB=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 4 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 14 & -3\\ 17 & 13 & 10\end{pmatrix}\to (AB)^T=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}$

$(AB)^T=B^T A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 7 & 2 & 0\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 17\\ 14 & 13\\ -3 & 10\end{pmatrix}$.