3

矩阵变换与线性方程组

3.1 矩阵变换

初等变换及其性质

求解线性代数方程组$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & (2) \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4, & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & (4) \end{cases} \xrightarrow[(3)\div 2]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & (1) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2, & (2) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2, & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9, & (4) \end{cases} \xrightarrow[\substack{(3)-2(1)\\(4)-3(1)}]{(2)-(3)}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & (1) \\ 0x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, & (2) \\ 0x_1 - 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6, & (3) \\ 0x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3, & (4) \end{cases} \xrightarrow[(4)-\frac{3}{2}(2)]{\substack{(2)\times\frac{1}{2}\\(3)+5(2)}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & (1) \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, & (2) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = -6, & (3) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 = -3, & (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(4)-2(3)]{(3)\leftrightarrow(4)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, & (1) \\ 0x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, & (2) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = -6, & (3) \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0, & (4) \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = x_3 + 4, \\ x_2 = x_3 + 3, \\ x_3 = c, \\ x_4 = -3 \end{cases} \to x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+4 \\ c+3 \\ c \\ -3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)\div 2]{(1)\leftrightarrow(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{(3)-2(1)\\(4)-3(1)}]{(2)-(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-\frac{3}{2}(2)]{\substack{(2)\times\frac{1}{2}\\(3)+5(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(4)-2(3)]{(3)\leftrightarrow(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定义：下面三种变换称为矩阵的初等行变换

- 对换两行(对换i，j两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);
- 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行中的所有元(第i行乘以k，记作 $r_i \times k$)
- 把某一行的所有元的k倍加到另一行对应的元上去(第j行的k倍加到第i行上，记作 $r_i + k\, r_j$)

把定义中的“行”换成“列”即得矩阵的初等列变换的定义

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵初等变换

如果矩阵A经过有限次初等变换变成矩阵B，就称矩阵A与矩阵B等价，记作A~B

- 等价的性质

  - 反身性 A~A
  - 对称性 若A~B,则B~A
  - 传递性 若A~B,B~C 则A~C.

初等变换与矩阵

定义：由单位矩阵E经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵，三种初等变换对应有三种初等矩阵

- 对换两行

$$E(i,\ j) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& 0 && \cdots && 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && \cdots && 0 &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}, E_m(i,\ j)\,A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots && \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots && \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots && \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- 数乘某行

$$E(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& k &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix}, E(i(k))\,A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots && \vdots \\ a_{k-1,1} & a_{k-1,2} & \cdots & a_{k-1,n} \\ k\,a_{k,1} & k\,a_{k,2} & \cdots & k\,a_{k,n} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots && \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- 数乘某行加上另一行

$$E\big(\mathrm{ij}(k)\big) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 & \cdots & k && \\ &&& \ddots & \vdots && \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix},\ E\big(\mathrm{ij}(k)\big)\,A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots && \vdots \\ a_{i1} + k\,a_{j1} & a_{i2} + k\,a_{j2} & \cdots & a_{in} + k\,a_{jn} \\ \vdots & \vdots && \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots && \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例题：设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ 的行最简形矩阵为F，求F，并求一个可逆矩阵P，使 PA=F.

$$(A,\ E) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 - 2r_2 \\ r_2 - 2r_1}]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 - r_2 \\ r_3 + r_4}]{r_2 - r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

故 $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为A的行最简形矩阵，而使 PA=F 的可逆矩阵 $P = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 10 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

$P\,A = F$、$P\,E = P \Longrightarrow P(A,\ E) = (F,\ P) \Longrightarrow (A,\ E) \sim (F,\ P)$

例题：设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 求 A^{-1}.

(A,E)~(F,P),如果F=E,A可逆，由PA=E 可得 $P=A^{-1}$

$$(A,\ E)=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{\substack{r_3\times 3 \\ r_3+2r_2}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+9r_2]{r_3\times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+2r_3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 18 & 9 & 12 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2\div(-2)]{r_1\div 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

因A~E,故A可逆， $A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.