1

行列式

1.3 行列式的性质

- 性质1：行列式与它的转置行列式相等。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质2：对换行列式的两行(列),行列式变号.

例题:计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}, D'=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$D=1*2*(-2)+2*1*(-3)+(-4)*(-2)*4-1*1*4-2*(-2)*(-2)-(-4)*2*(-3)=-4-6+32-4-8-24=-14.$$

$$D'=1*4*1+2*(-2)*(-2)+(-4)*(-3)*2-1*(-2)*2-2*(-3)*1-(-4)*4*(-2)=4+8+24+4+6-32=14.$$

- 性质3：行列式中的某一行(列)的所有元素都乘以同一个数k，等于用数k乘此行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k a_{i1} & k a_{i2} & \cdots & k a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质4：行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零。

例题:计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$,

$$D=1*2*2+2*1*(-4)+(-4)*(-2)*4-1*1*4-2*(-2)*2-(-4)*2*(-4)=4-8+32-4+8-32=0.$$

- 性质5：若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则行列式等于两行列式之和。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 性质6：把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数加到另一行(列)对应的元素上，行列式不变。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1}+k\,a_{i1} & a_{j2}+k\,a_{i2} & \cdots & a_{jn}+k\,a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式按行(列)展开(行列式的降阶)

- 余子式

在n阶行列式中，把(i,j)元 a_{ij}所在的第i行和第j列划去后留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j)元 $a_{i,j}$ 的余子式，记作 M_{ij}

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{i+j}$, A_{ij} 叫做 $(i,\ j)$ 元 a_{ij}的代数余子式

例四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$,中 (3,2) 元 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\ A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}$$

定理：行列式等于它的任一行(列)的各个元素与对应的代数余子式乘积之和，即

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ 或 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$

展开并验证四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

按照第三行展开 $D=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}=A_{31}+A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

```
D1 = (1 2 3 4
      0 1 2 3
      1 0 1 0
      1 1 1 1); d1 = (2 3 4
                      1 2 3
                      1 1 1); d2 = (1 2 4
                                    0 1 3
                                    1 1 1);
Det[D1]
行列式
Det[d1] + Det[d2]
行列式      行列式
```

```
0
```

```
0
```

小结

- 介绍了简单行列式与n阶行列式
- 介绍了行列式的性质
- 行列式的求法及降阶

练 习：

求 $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

求 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \ldots & a \\ a & x & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a & a & \ldots & x \end{vmatrix}$