

1

概率论

1.1 概率论的基本概念

🔍 随机试验与随机事件

随机试验：

- ▲ 抛硬币，观察正面H与反面T出现的情况；
- ▲ 掷骰子，观察出现的点数；
- ▲ 记录某地一昼夜出现的最高温度和最低温度

样本空间：我们将随机试验E的所有可能结果组成的集合称为E的样本空间，记为S。样本空间的元素，即E的每个结果，称为样本点。

- ▲ $S_1 : \{H, T\}$;
- ▲ $S_2 : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- ▲ $S_3 : \{(x, y) \mid T_0 \leq x \leq y \leq T_1\}$, 这里x, y分别表示最低(高)温度。且这一地区温度不小于 T_0 , 不大于 T_1

随机事件：一般，我们称试验E的样本空间S的子集为E的随机事件，简称事件。

样本空间S包含所有的样本点，它是S自身的子集，每次试验必然发生，S称为必然事件

空集 \emptyset 不包含任何样本点，也是S的子集，每试验必然不会发生， \emptyset 称不可能事件

📌 例子

随机试验E: 将一枚硬币抛掷三次，观察正面H、反面T出现的情况。

样本空间S: $\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

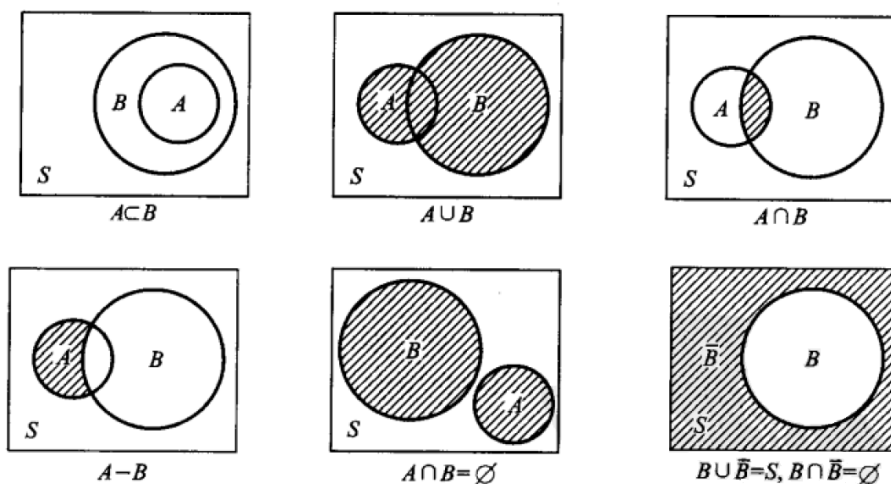
随机事件：

第一次出现的是H: $A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$;

三次出现同一面: $A_2 = \{HHH, TTT\}$

事件间的关系

- ▲ 包含：事件B包含事件A: $A \subset B$
- ▲ 和事件：事件A或事件B发生: $A \cup B$
- ▲ 积事件：事件A与事件B发生: $A \cap B$
- ▲ 差事件：事件A发生且事件B不发生: $A - B$
- ▲ 互不相容事件(互斥事件): 事件A与事件B不可能同时发生: $A \cap B = \emptyset$
- ▲ 对立事件(逆事件): 事件B不发生: \bar{B}



*基本事件

频率与概率及独立性

频率：在相同条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数。比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$ 。

频率的性质：

- ▲ $0 \leq f_n(A) \leq 1$;
- ▲ $f_n(S) = 1$;
- ▲ 对于互不相容事件 A_1, A_2, \dots, A_k 则 $f_n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \dots + f_n(A_k)$

概率：设 E 是随机试验， S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$ ，称为事件 A 的概率
概率满足：

- ▲ 非负性： $P(A) \geq 0$;
- ▲ 规范性： $P(S) = 1$;
- ▲ 可加性： $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k)$, 其中 A_1, A_2, \dots, A_k 为互不相容事件

例子

随机试验 E : 将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H 、反面 T 出现的情况。

样本空间 S : $\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

某次结果 $\{HTH\}$;

频率： $f_3(H) = \frac{2}{3}$

概率： $P(H) = ?$

等可能概型

设试验样本空间为 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 试验中每个基本事件发生可能性相同称为等可能概型，即有 $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\})$

事件 A 包含 k 个基本事件，则有 $P(A) = \sum_{j=1}^k P(\{e_{ij}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{S \text{ 中基本事件总数}}$

例子

随机试验 E : 将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H 、反面 T 出现的情况。

样本空间 S : $\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

随机事件 A_1 : 恰好出现一次正面; 随机事件 A_2 : 至少有一次出现正面

某次结果 {HTH};

$$\text{频率: } f_3(H) = \frac{2}{3}$$

$$\text{概率: } P(H) = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = \{\text{HTT, THT, TTH}\}; A_2 = \{\dots\}, \overline{A_2} = \{\text{TTT}\}$$

$$\text{概率: } P(A_1) = \frac{3}{8}; P(A_2) = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

定义: 设 A、B 是两事件, 如果满足等式 $P(AB) = P(A)P(B)$ 则称事件 A、B 相互独立, 简称 A、B 独立