3

导数与微分的应用

3.1 泰勒公式

泰勒中值定理

定义：如果函数f(x)在x_0处具有n阶导数，那么存在x_0的一个邻域，对于该邻域内的任一x，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \tag{1.1}$$

其中 $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$

定义：如果函数f(x)在x_0的某个邻域U(x_0)内具有$(n+1)$阶导数，那么对任一 $x \in U(x_0)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \tag{1.2}$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$，这里$\xi$是x与$x_0$之间某个值.

- 在泰勒公式(1.1)中，取x_0=0，那么有带有佩亚诺余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{1.3}$$

- 在泰勒公式(1.2)中，取x_0=0，ξ在0与x之间，那么变为带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, (0 < \theta < 1) \tag{1.4}$$

由(1.3)与(1.4)可得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

按(x-4)的幂展开多项式 $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$

$$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3,\ f''(x) = 12x^2 - 30x + 2,\ f'''(x) = 24x - 30,\ f''''(x) = 24,\ f^{(n\geq 5)}(x) = 0;$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4 \\ &= f(4) + f'(4)(x - 4) + \frac{f''(4)}{2!}(x - 4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x - 4)^3 + \frac{f''''(4)}{4!}(x - 4)^4 \\ &= -56 + 21(x - 4) + 37(x - 4)^2 + 11(x - 4)^3 + (x - 4)^4 \end{aligned}$$