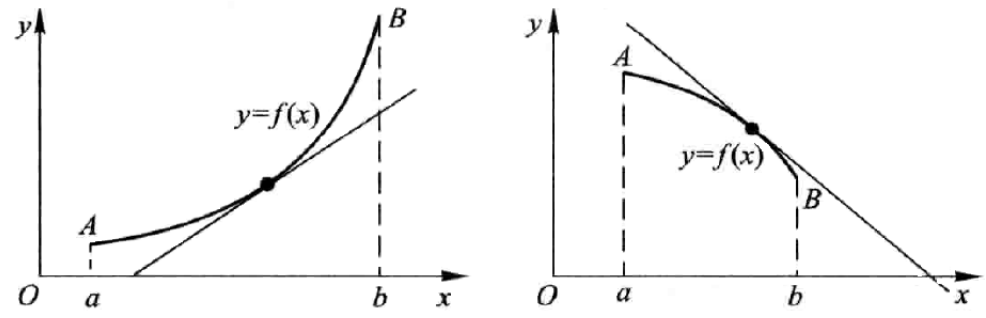
3

导数与微分的应用

3.2 函数的单调性与曲线的凸凹性

函数的单调性



(a) 函数图形上升时切线斜率非负　(b) 函数图形下降时切线斜率非正

定理：设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

- 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\geq 0$, 且等号仅在有限多个点处成立，那么函数 y=f(x)在[a,b]上单调增加；
- 如果在 (a,b) 内 $f'(x)\leq 0$, 且等号仅在有限多个点处成立，那么函数 y=f(x)在[a,b]上单调减少；

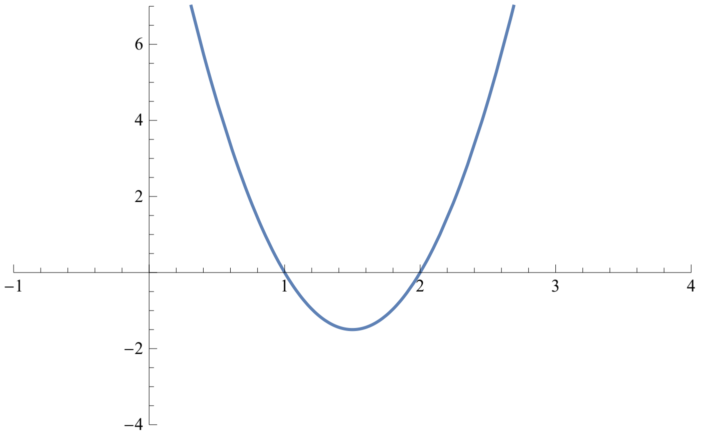
确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间

思路：先求导，确定导函数在不同区间内的取值，然后分析讨论 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$;f'(x)=0→x=1,2;

▲ f'(x)

```
Plot[{6 (x - 1) (x - 2)}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-1, 4}, {-4, 7}}]
```

绘图　　绘制范围



$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$

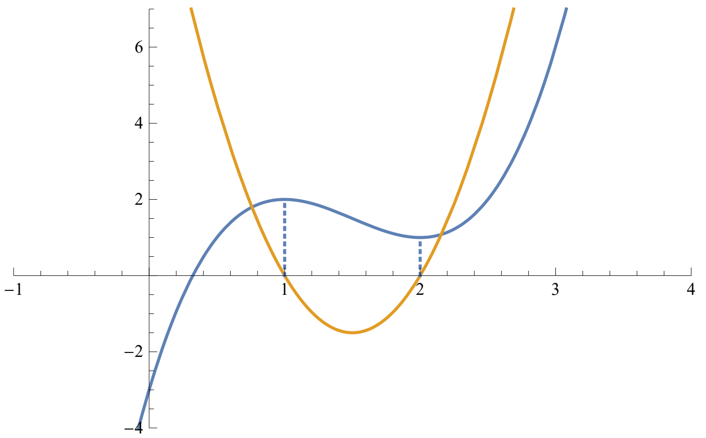
```
p = Plot[{2 x^3 - 9 x^2 + 12 x - 3, 6 (x - 1) (x - 2)}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-1, 4}, {-4, 7}}];
p1 = ListPlot[{{1, 0}, {1, 2}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
p2 = ListPlot[{{2, 0}, {2, 1}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
Show[p, p1, p2]
```

绘图　　绘制范围

绘制点集　　连接点　　真　　绘图样式　　虚线…　　微小

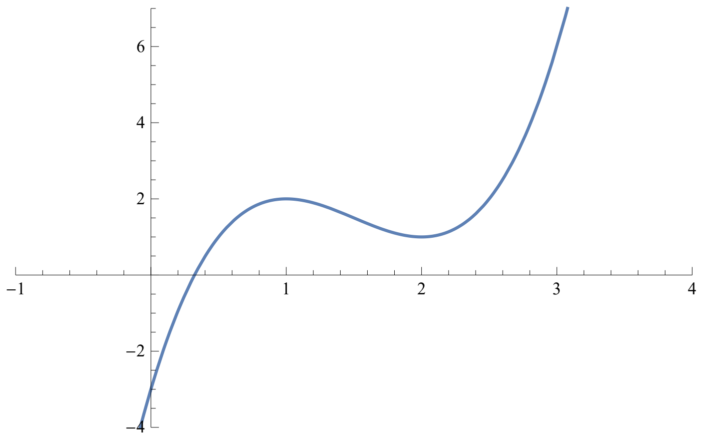
绘制点集　　连接点　　真　　绘图样式　　虚线…　　微小

显示



▲ f(x)

```
Plot[2 x^3 - 9 x^2 + 12 x - 3, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-1, 4}, {-4, 7}}]
绘图                                          绘制范围
```



曲线的凸凹性

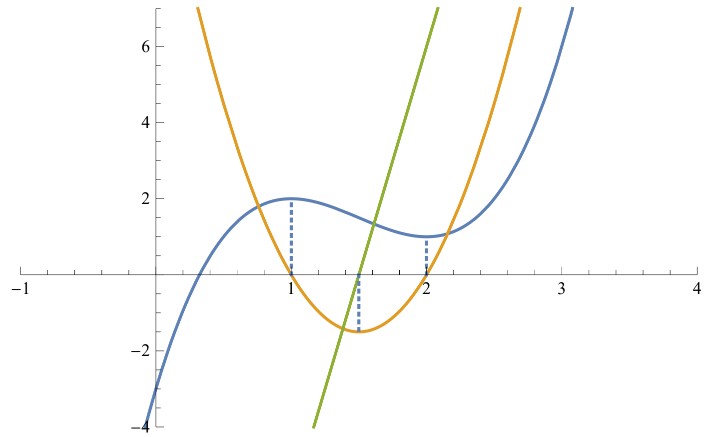
定理：设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数，那么

- 如果在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则函数 y=f(x)在 [a,b]上是凹的；
- 如果在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则函数 y=f(x)在 [a,b]上是凸的；

思考函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ 的凸凹性

思路：先求导，确定二阶导函数在不同区间内的取值，然后分析讨论 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$; $f''(x) = 12x - 18$;f’’(x)=0→x=1.5;

```
p = Plot[{2 x^3 - 9 x^2 + 12 x - 3, 6 (x - 1) (x - 2), 12 x - 18},
    └绘图
   {x, -10, 10}, PlotRange → {{-1, 4}, {-4, 7}}];
                 └绘制范围
p1 = ListPlot[{{1, 0}, {1, 2}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
     └绘制点集                   └连接点   └真    └绘图样式   └虚线…  └微小
p2 = ListPlot[{{2, 0}, {2, 1}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
     └绘制点集                   └连接点   └真    └绘图样式   └虚线…  └微小
pp = ListPlot[{{1.5, 0}, {1.5, -1.5}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
     └绘制点集                         └连接点   └真    └绘图样式   └虚线…  └微小
Show[p, p1, p2, pp]
└显示
```

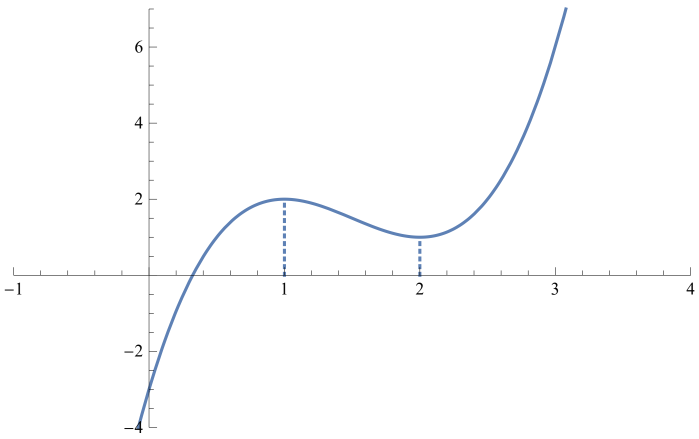


函数的极值简介

定义：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果对于去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内的任一x，
有 $f(x) < f(x_0)$ (或 $f(x) > f(x_0)$) 那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值(或极小值).

经典例子一：$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

```
p = Plot[{2 x^3 - 9 x^2 + 12 x - 3}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-1, 4}, {-4, 7}}];
    绘图                                          绘制范围
p1 = ListPlot[{{1, 0}, {1, 2}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
     绘制点集                   连接点    真    绘图样式    虚线…   微小
p2 = ListPlot[{{2, 0}, {2, 1}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
     绘制点集                   连接点    真    绘图样式    虚线…   微小
Show[p, p1, p2]
显示
```



经典例子二：$f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$

```
p = Plot[{(x^2 - 1)^3 + 1}, {x, -10, 10}, PlotRange → {{-2, 2}, {0, 4}}, PlotStyle → {Red}];
    绘图                                  绘制范围                          绘图样式      红色
p1 = ListPlot[{{-1, 0}, {-1, 1}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
     绘制点集                     连接点    真    绘图样式    虚线…   微小
p2 = ListPlot[{{1, 0}, {1, 1}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
     绘制点集                   连接点    真    绘图样式    虚线…   微小
p3 = ListPlot[{{-1.4, 1}, {-0.6, 1}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
     绘制点集                         连接点    真    绘图样式    虚线…   微小
p4 = ListPlot[{{0.6, 1}, {1.4, 1}}, Joined → True, PlotStyle → Dashing[Tiny]];
     绘制点集                       连接点    真    绘图样式    虚线…   微小
Show[p, p1, p2, p3, p4]
显示
```