2

矩阵

2.3 逆矩阵

定义：对于n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使 $AB=BA=E$，则说矩阵A是可逆的，并把矩阵B称A的逆矩阵，A的逆矩阵记为 A^{-1}。

定理1：若矩阵A可逆，则 $|A|\neq 0$.

定理2：若 $|A|\neq 0$,则矩阵A可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$,其中 A^* 为矩阵A的伴随矩阵。

例 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, 求 A^{-1}

求得 $|A|=2>0$,故 A^{-1}存在，计算|A|的余子式 $\begin{matrix}M_{11}=2 & M_{12}=3 & M_{13}=2\\ M_{21}=-6 & M_{22}=-6 & M_{23}=-2,\\ M_{31}=-4 & M_{32}=-5 & M_{33}=-2\end{matrix}$ 可得伴随矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix}M_{11}&-M_{21}&M_{31}\\-M_{12}&M_{22}&-M_{32}\\M_{13}&-M_{23}&M_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&6&-4\\-3&-6&5\\2&2&-2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

例 $P=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, AP=PΛ, 求 A^n

$|P|=2$, $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$, $A=P\Lambda P^{-1}$, $A^2=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1}$,..., $A^n=P\Lambda^nP^{-1}$

$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $\Lambda^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix}$,..., $\Lambda^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2^{n+1}\\1&2^{n+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}$$

克拉默法则

n个未知数的m个方程的线性代数方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n= & b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n= & b_2\\ \ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n= & b_m\end{cases}$

克拉默法则：如果线性方程组得系数矩阵A的行列式不等于零，即 $|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&\ldots&a_{1n}\\\ldots&&\ldots\\a_{n1}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$,那么方程组的唯

一解：

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|},\ x_2=\frac{|A_2|}{|A|},\ \ldots,\ x_n=\frac{|A_n|}{|A|}$$

其中 A_j是把系数矩阵A中第j列元素换位方程右侧常数项： $A_j=\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$

例 求解线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2 \\ 2x_1-x_2-3x_3=1 \\ 3x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases}$

- $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=3\neq0$ 方程组有唯一解. $|A_1|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$, $|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$, $|A_3|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

  $x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=5,\ x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=0,\ x_3=\frac{|A_3|}{|A|}=3$

- |A|=3≠0, 故A可逆

  $x=A^{-1}b=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

小结

- 介绍了矩阵的概念及矩阵的基本运算
- 介绍了逆矩阵及其求法
- 矩阵的应用

练习：

求逆矩阵 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+2x_2+4x_3=3 \\ x_1+3x_2+9x_3=5 \end{cases}$