3

矩阵变换与线性方程组

3.2 线性方程组

矩阵的秩

$$B=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&1&0\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定义： 在m×n矩阵A中，任取k行与k列(k≤m,k≤n) 位于这些行列交叉处的 k^2个元素，不改变它们在A中所处的位置次序而得到的k阶行列式，称为矩阵A的k阶子式

定义： 设在矩阵A中有一个不等于0的r阶子式D，且所有r+1阶子式全等于0，因此把D称为最高阶非零子式，r称为矩阵A的秩。记作R(A). 并规定零矩阵的秩等于0.

例题：求矩阵A和B的秩，其中 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}$.

在A中容易看出一个2阶子式 $\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\neq 0$,A的3阶子式只有一个 |A|=0，因此R(A)=2.

对B做初等行变换变成阶梯型矩阵

$$B=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\r_2-r_4}}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&-12&9&7&-11\\0&-16&12&8&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&4&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_3}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&1&-1\\0&0&0&4&-8\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

行阶梯型矩阵有3个非零行，所以R(B)=3.

线性方程组的解

设有n个未知数m个方程的线性代数方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}\equiv Ax=b$$

定理： n元线性方程组 $Ax=b$

- ▲ 无解的充分必要条件是 $R(A)<R(A,\,b)$;
- ▲ 有唯一解的充分必要条件是 $R(A)=R(A,\,b)=n$;

▲ 有无限个解的充分必要条件是 $R(A) = R(A,\ b) < n$.

例题：求解齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$

对稀疏矩阵做初等行变换

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div (-3)]{r_3 - r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 - \frac{5}{3}x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + \frac{4}{3}x_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + \frac{5}{3}x_4 \\ x_2 = -2x_3 - \frac{4}{3}x_4 \end{cases}$$

令 $x_3 = c_1,\ x_4 = c_2 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2c_1 + \frac{5}{3}c_2 \\ x_2 = -2c_1 - \frac{4}{3}c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + \frac{5}{3}c_2 \\ -2c_1 - \frac{4}{3}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例题：求解非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - +x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$

增广矩阵

$$B = (A,\ b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -7 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \div (-4)]{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4} \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4} \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

即 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{4}x_4 - \frac{1}{4} \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}c_1 - \frac{3}{4}c_2 + \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2}c_1 + \frac{7}{4}c_2 - \frac{1}{4} \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

小结

- 介绍了矩阵的初等变换
- 介绍了矩阵变换的性质
- 线性方程组的求解

练习：

求逆矩阵$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解方程组$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10 \\ 11x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$