4

向量、矩阵及其对角化

4.3 向量的性质

向量的性质及正交性

定义：设有n维向量 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$

- 内积：$[x, y]=x_1 y_1+x_2 y_2+\ldots+x_n y_n$ 称为向量x和y的内积. 对两个列向量 $[x, y]=x^T y$

内积的性质:

▲ [x,y]=[y,x];

▲ [λx,y]=λ[x,y];

▲ [x+y,z]=[x,z]+[y,z];

▲ 当x=0，[x,x]=0;当x≠0,[x,x]>0

- 长度(范数)：$\|x\|=\sqrt{[x, x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ 称为n维向量x的长度.

范数的性质

▲ 非负性 当x≠0 ||x||>0；当x=0, ||x||=0；

▲ 齐次性 ||λ x||=|λ| ||x||;

定义：当 $[x, y]=0$ 时，称向量 x 与 y 正交.

例题：已知两个向量 $a_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, a_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$,正交，试求一个非零向量 a_3使得 a_1, a_2, a_3两两正交

记 $A=\begin{pmatrix}a_1^T\\a_2^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$,那么 a_3 应满足齐次线性方程组 $Ax=0$ 即 $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0\end{cases}\quad\Longrightarrow a_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

方阵的特征值与特征向量

定义：设A是n阶矩阵，如果 λ 和 n 维非零列向量 x 使关系式 $Ax=\lambda x$ 成立，那么这样的数 λ 称为矩阵A的

特征值，非零向量x称为A对应于特征值λ的特征向量

即写作 $(A-\lambda E)x=0$

这是n个未知数n个方程的齐次线性代数方程组，它有非零解的充要条件是系数行列式等于零：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

例题：求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

A的特征多项式为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)^2-1=8-6\lambda+\lambda^2=(\lambda-2)(\lambda-4),\Longrightarrow$ A 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=4$

当$\lambda_1=2$时 对应的特征向量满足 $\begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -1 & 3-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow x_1=x_2$即得所对应的特征向量可取为 $p_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

当$\lambda_2=4$时 对应的特征向量满足 $\begin{pmatrix} 3-4 & -1 \\ -1 & 3-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow x_1=-x_2$即得所对应的特征向量可取为 $p_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

例题：求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

A的特征多项式为 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=\ \ldots=(\lambda-1)^2(\lambda-2),\Longrightarrow$ A 的特征值为 $\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1$

当$\lambda_1=2$时 解方程 $(A-2E)x=0.\ A-2E=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow p_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时 解方程 $(A-E)x=0.\ A-E=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\ldots\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow p_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$