

4

不定积分

4.1 不定积分的概念与性质

不定积分的概念

定义：如果在区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导数为 $f(x)$ ，即对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x)=f(x) \text{ 或 } dF(x)=f(x)dx$$

那么函数 $F(x)$ 就成为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数。

目 $(\sin x)' = \cos x$ ，故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数。

定义：在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)dx$$

基本初等函数的积分表

1. $\int kdx = kx + C$, (k 是常数)
2. $\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$, ($\mu \neq -1$)
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
10. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
11. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
12. $\int e^x dx = e^x + C$
13. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
14. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
15. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
16. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$

$$17. \int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$18. \int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$19. \int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$20. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$21. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$23. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

不定积分的性质

■ 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在，则 $\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$.

■ 设函数 $f(x)$ 的原函数存在， k 为非零常数，则 $\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$.

例 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos x) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \cos x \, dx \right) = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C$$