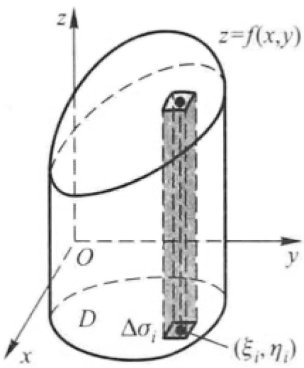
6

多元函数与重积分

6.2 重积分

二重积分的概念与性质



定义：设函数 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上 的 有 界 函 数 ， 将 闭 区 域 D 任 意 分 成 n 个 小 闭 区 域 ， $\Delta\delta_1, \Delta\delta_2, ..., \Delta\delta_n$, 其中 $\Delta\delta_i$ 表示第i个小闭区域， 也表示它的面积.在每个小闭区域内任取一点 (ξ_i, η_i) 做乘积 $f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\delta_i(i = 1, 2, ..., n)$，并做求和

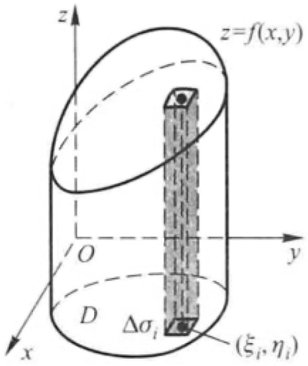
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\delta_i$$

记 $\lambda=\max\{\Delta\delta_1,\Delta\delta_2,...,\Delta\delta_n\}$,如果当 $\lambda\to 0$ 时，这和的极限总存在，且与闭区间D的分法及点 (ξ_i, η_i) 的取法无关，那么称这个极限为函数f(x,y)在区间D上的二重积分

$$\text{记作} \iint_D f(x, y)\,d\delta = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta\delta_i$$

其中f(x,y)叫做被积函数，f(x,y)dδ 叫做被积表达式，dδ叫做面积元素，x、y叫做积分变量，D叫做积分区域。

二重积分的性质



- 性质1 设α与β均为常数，则 $\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\,d\delta=\alpha\iint\limits_D f(x,y)d\delta+\beta\iint\limits_D g(x,y)d\delta$.

- 性质2 如果闭区域D被有限条曲线分为有限个闭区域，那么二重积分等于各闭区域的二重积分之和，如 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\delta=\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,d\delta+\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,d\delta$.

- 性质3 如果在区间D上 $f(x,y)\equiv 1$, δ是D的面积，那么 $\iint\limits_D f(x,y)d\delta=\iint\limits_D d\delta=\delta$.

- 性质4 如果在区间D上 $f(x,y)\geq g(x,y)$,那么 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\delta\geq\iint\limits_D g(x,y)\,d\delta$.

- 性质5 设M及m分别是函数f(x,y)在区间D上的最大值及最小值，则 $m\delta\leq\iint\limits_D f(x,y)\,d\delta\leq M\delta$

- 性质6(二重积分中值定理) 如果函数f(x,y)在积分区间D上连续，那么在D上至少存在一个点(ξ,η)使得 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\delta=f(\xi,\eta)\,\delta$