3

导数与微分的应用

3.3 方程近似解

二分法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$上连续，$f(a)*f(b)<0$,且方程 $f(x)=0$在 (a,b)内仅有一个实根 ξ,于是$[a,b]$即是这个根的一个隔离区间。

- 取$[a, b]$的中点$\xi_1 = \dfrac{a+b}{2}$，计算$f(\xi_1)$.
  - 如果$f(\xi_1) = 0$, 那么$\xi = \xi_1$,计算结束；
  - 如果$f(\xi_1)$与$f(a)$同号，那么取$a_1 = \xi_1, b_1 = b$, 由$f(a_1) * f(b_1) < 0$, 即知$a_1 < \xi < b_1$, 且$b_1 - a_1 = \dfrac{1}{2}(b-a)$;
  - 如果$f(\xi_1)$与$f(b)$同号，那么取$a_1 = a, b_1 = \xi_1$, 同理$a_1 < \xi < b_1$, 且$b_1 - a_1 = \dfrac{1}{2}(b-a)$;
- 总之，当$\xi \neq \xi_1$时，可求得$a_1 < \xi < b_1$，且$b_1 - a_1 = \dfrac{1}{2}(b-a)$
- 以$[a_1, b_1]$作为新的隔离区间，重复上述做法，当$\xi \neq \xi_2 = \dfrac{1}{2}(a_1+b_1)$时可求得$a_2 < \xi < b_2$，且$b_2 - a_2 = \dfrac{1}{2^2}(b-a)$

如此反复n次，可求得$a_n < \xi < b_n$，且$b_n - a_n = \dfrac{1}{2^n}(b-a)$.由此可知，如果以$a_n$或$b_n$作为$\xi$的近似值，那么其误差小于$\dfrac{1}{2^n}(b-a)$

用二分法求方程$x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$的实根的近似值。

分析：$f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4$, $f'(x) = 3x^2 + 2.2x + 0.9$,

经判断$f'(x) > 0$, 因此$f(x)$为单调递增函数，$f(x) = 0$至多一个实根。

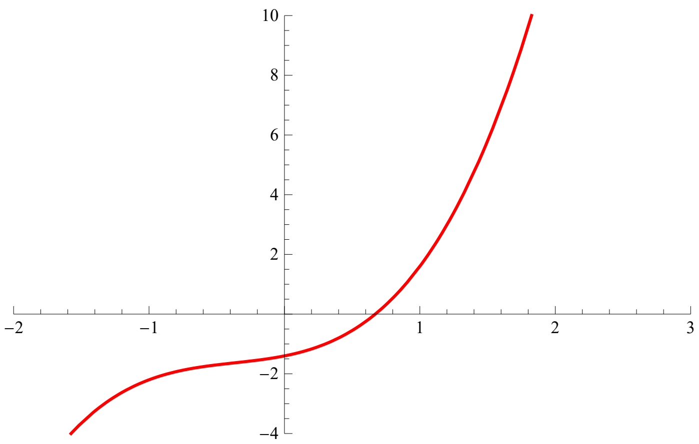
f(0)=-1.4<0,f(1)=1.6>0,因此f(x)=0在[0,1]内有唯一实根，取a=0,b=1,[0,1]即是一个隔离区间

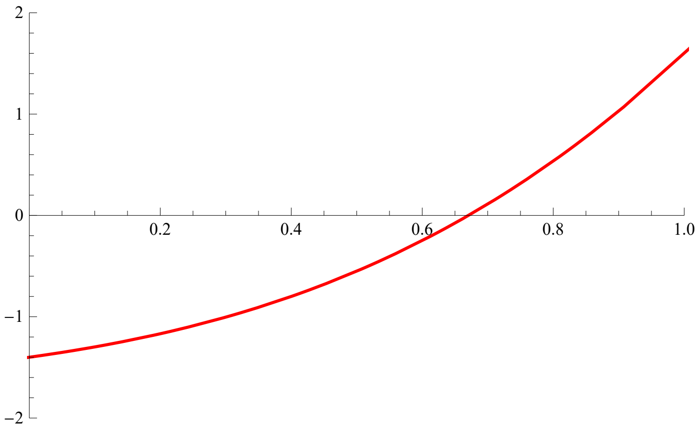
- ▲ $\xi_1 = 0.5,\ f(\xi_1) = -0.55 < 0,\ \to a_1 = 0.5,\ b_1 = 1;$
- ▲ $\xi_2 = 0.75,\ f(\xi_2) = 0.32 > 0,\ \to a_2 = 0.5,\ b_2 = 0.75;$
- ▲ $\xi_1 = 0.625,\ f(\xi_3) = -0.16 < 0,\ \to a_3 = 0.625,\ b_3 = 0.75;$
- ▲ $\xi_4 = 0.687,\ f(\xi_4) = 0.062 > 0,\ \to a_4 = 0.625,\ b_4 = 0.687;$
- ▲ ...
- ▲ $\xi_{10} = 0.671,\ f(\xi_{10}) = 0.001 > 0,\ \to a_{10} = 0.670,\ b_{10} = 0.671;$

于是$0.670<\xi<0.671$

```
Solve[x^3 + 1.1 x^2 + 0.9 x - 1.4 == 0, x, Reals]
解方程                                  实数域
Plot[x^3 + 1.1 x^2 + 0.9 x - 1.4, {x, -10, 10},
绘图
 PlotRange → {{-2, 3}, {-4, 10}}, PlotStyle → {Red}]
 绘制范围                      绘图样式      红色
Plot[x^3 + 1.1 x^2 + 0.9 x - 1.4, {x, -10, 10}, PlotRange → {{0, 1}, {-2, 2}}, PlotStyle → {Red}]
                                                 绘制范围                      绘图样式      红色
Solve[x^3 + 1.1 x^2 + 0.9 x - 1.4 == 0, x, Reals]
解方程                                  实数域
```

$\{\{x \to 0.670657\}\}$

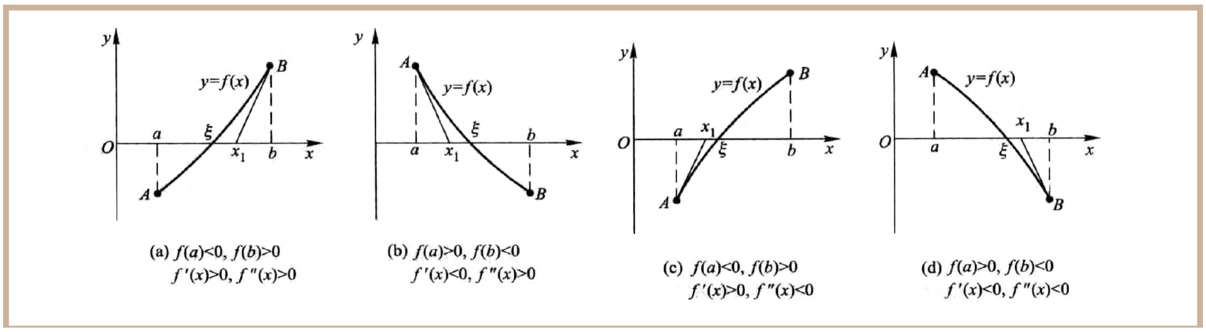




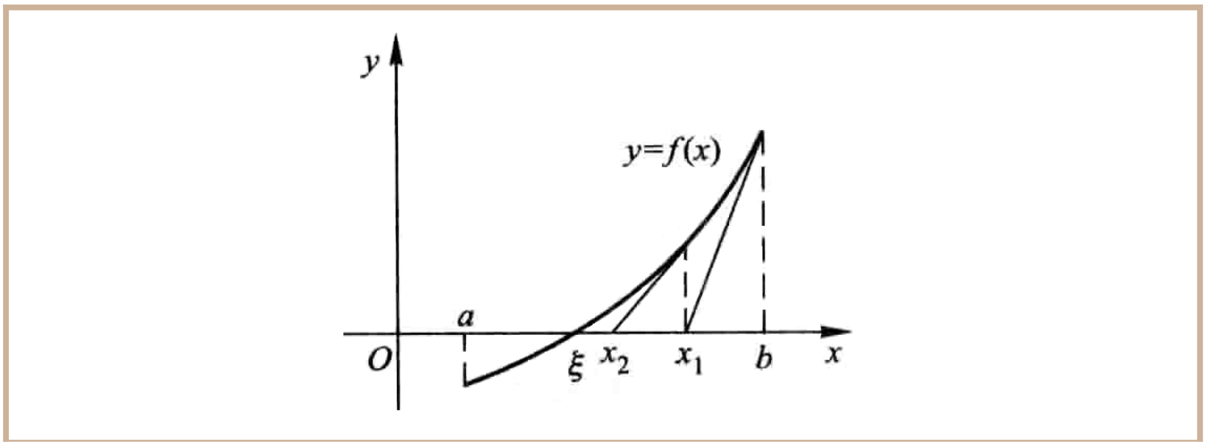
$\{\{x \to 0.670657\}\}$

切线法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$上具有二阶导数连续，$f(a)*f(b)<0$,且$f'(x)$及$f''(x)$在$[a,b]$上保持定号.这样方程 $f(x)=0$在(a,b)内仅有一个实根 ξ;于是$[a,b]$即是这个根的一个隔离区间。此时图形仅以下几种情况：



考虑用曲线弧的端点的切线来代替曲线弧，从而求出方程实根的近似值。这种方法叫做切线法



以f(a)<0,f(b)>0,f'(x)>0,f''(x)>0讨论

- 令$x_0 = b$, 在端点$(x_0, f(x_0))$处做切线，切线方程为$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$,
  得到与x轴交点$(x_1,\ 0) = \left(x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)},\ 0\right)$, 它比$x_0$更接近方程的根$\xi$;
- 在点$(x_1, f(x_1))$处做切线，可得到根的近似值x_2;
- 如此继续，一般地，在点$(x_n, f(x_n))$处作切线，得到根的近似值$x_{n+1} = x_n\ \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

用切线法求方程$x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$的实根的近似值。

分析：$f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4$, $f'(x) = 3x^2 + 2.2x + 0.9$,

$f''(x) = 6x + 2$经判断在区间$[0, 1]$ $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, 因此$f(x) = 0$至多一个实根。

f(0)=-1.4<0,f(1)=1.6>0,因此f(x)=0在[0,1]内有唯一实根，取a=0,b=1,[0,1]即是一个隔离区间

▲ $x_1 = 1 - \dfrac{f(1)}{f'(1)} \approx 0.738$,

▲ $x_2 = 0.738 - \dfrac{f(0.738)}{f'(0.738)} \approx 0.674$,

▲ $x_3 = 0.674 - \dfrac{f(0.674)}{f'(0.674)} \approx 0.671$,

▲ $x_4 = 0.671 - \dfrac{f(0.671)}{f'(0.671)} \approx 0.671$.

小结

- 了解泰勒公式及导数的应用

▪ 了解导数与函数行为的关系

▪ 了解实际应用中处理问题的一些方法

导数是函数的性质，其行为直接影响了函数的性质，针对导数可以做一些方便研究函数性质的事情

练习：证明方程$x^3-5x-2=0$只有一个正根，并求解这个根的近似值。