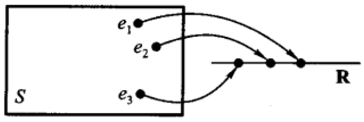
1

概率论

1.2 随机变量及其分布

随机变量及其分布率

定义：设随机试验的样本空间 S={e}. X=X(e)是定义在样本空间S上的实值单值函数。称X=X(e)为随机变量。



有些随机变量，它全部可能取到的值是有限个或可列无限多个，这种变量称为离散型随机变量

离散型随机变量X所有可能取值为 $x_k(k=1,2,\ldots)$ X取各个可能值的概率，即事件 $\{X=x_k\}$的概率为 $P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\ldots$ 称为离散型随机变量X的分布律

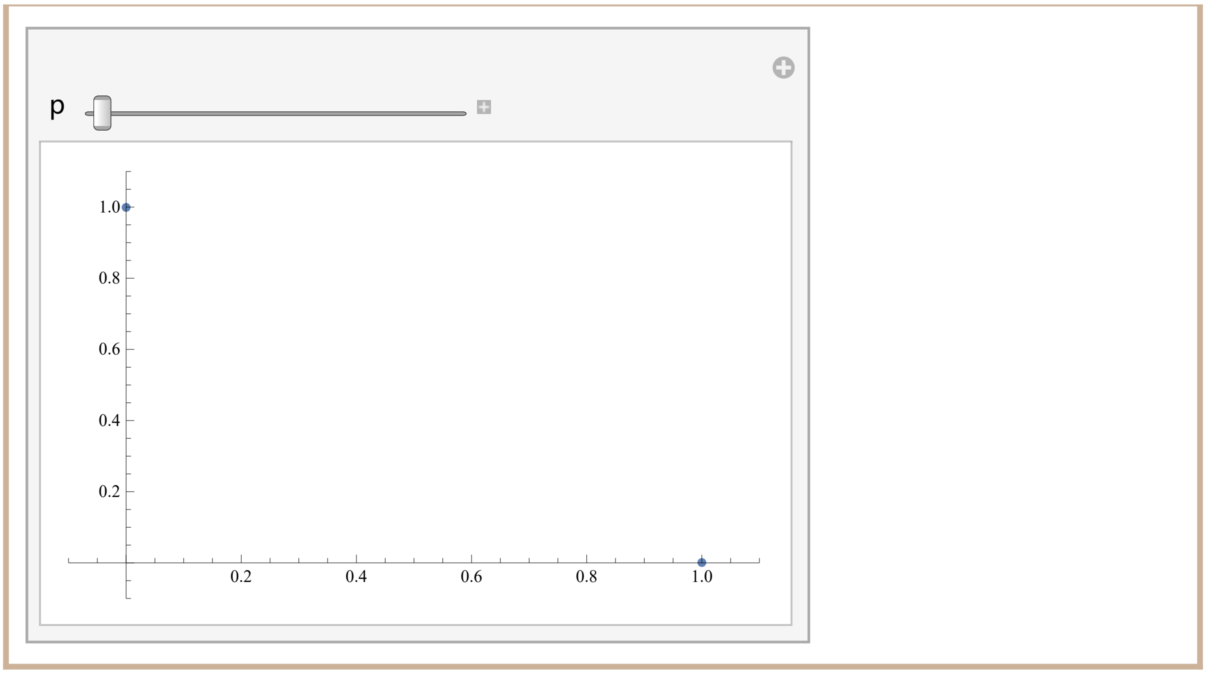
且满足：$1.\ p_k\geq 0;\ 2.\ \sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$

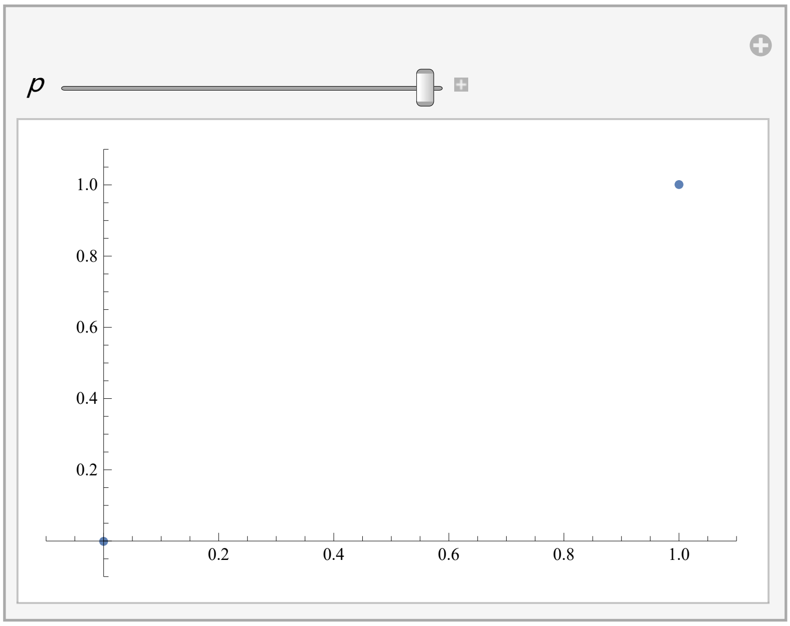
或以表格表示：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

- $(0-1)$分布：$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$,k=0,1

In[1]:=
```
Clear[p,k]
Manipulate[ListPlot[Table[{k,p^k (1-p)^(1-k)},{k,0,1}],PlotRange→{{-0.1,1.1},{-0.1,1.1}}],{p,0.001
```

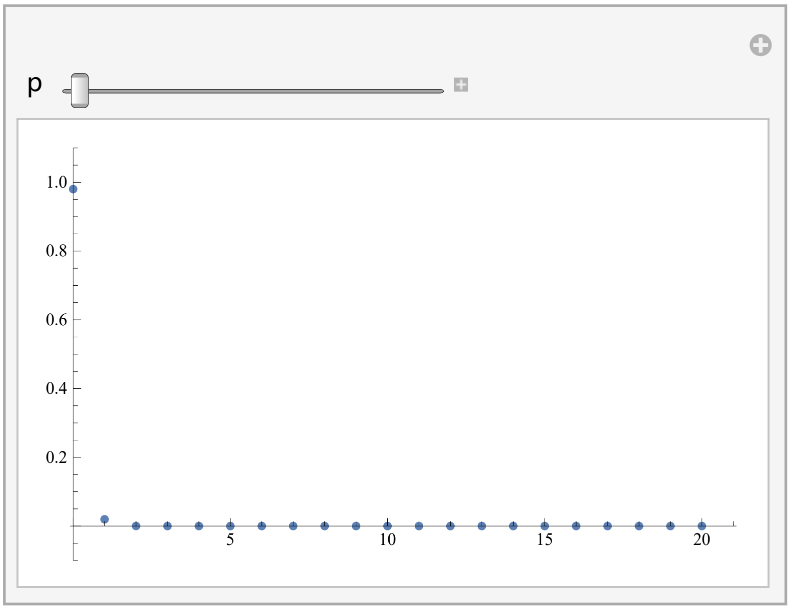


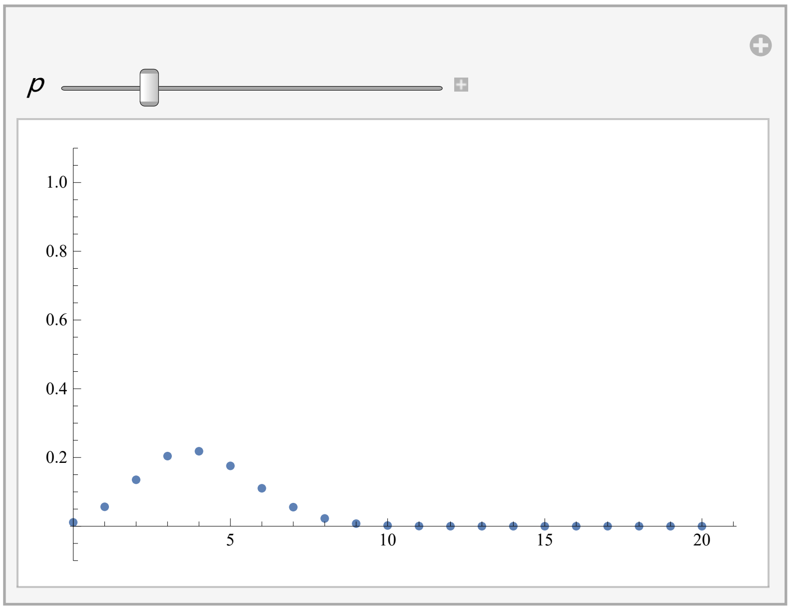


二项分布： $P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$,k=0,1,2,...,n

In[3]:=

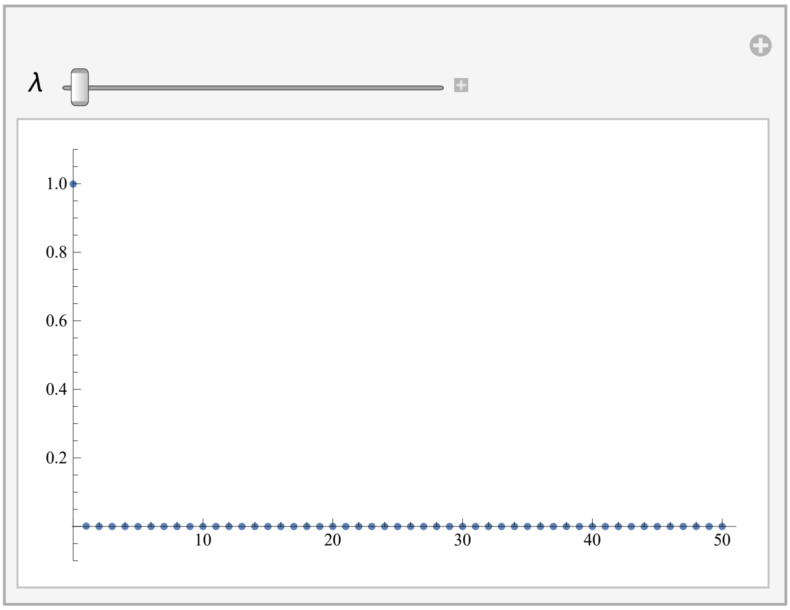
```
Clear[p,k]
Manipulate[ListPlot[Table[{k,Binomial[20,k]p^k (1-p)^(20-k)},{k,0,20}],PlotRange→{{-0.1,21.1},{-0.
```

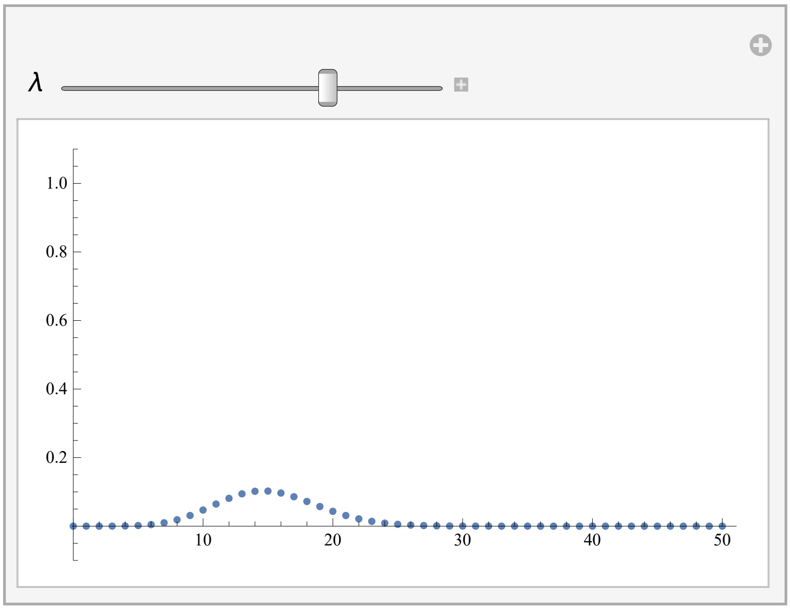




泊松分布： $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{\lambda}}{k!}$,k=0,1,2,...,n

In[5]:=
```
Clear[p,k]
Manipulate[ListPlot[Table[{k, λ^k e^-λ / k!},{k,0,50}],PlotRange→{{-0.1,51.1},{-0.1,1.1}}],{λ,0.001,2
```





随机变量的分布函数

定义 设X是一个随机变量，x是任意实数， 函数 $F(x) = P\{x \le x\}$, $-\infty < x < \infty$ 称为X的分布函数

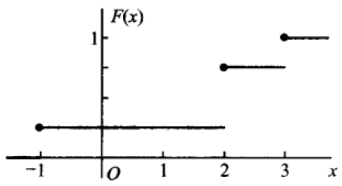
分布函数的性质：

- ▲ F(x) 是一个不减函数；
- ▲ 0≤F(x)≤1,且 $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

设随机变量分布率为 $\begin{pmatrix} X & -1 & 2 & 3 \\ p_k & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, 求分布函数，并求P $\left\{X \le \frac{1}{2}\right\}$, $P\left\{\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}\right\}$, $P\{2 \le X \le 3\}$

X仅在$x=-1, 2, 3$处概率不为零则有

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ P\{X=-1\} & -1\le x<2\\ P\{X=-1\}+P\{X=2\} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}=\begin{cases}0 & x<-1\\ \frac{1}{4} & -1\le x<2\\ \frac{3}{4} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$



$P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4};$

$P\left\{\frac{3}{2}<X\le\frac{5}{2}\right\}=F\left(\frac{5}{2}\right)-F\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2};$

$P\{2\le X\le 3\}=F(3)-F(2)+P\{X=2\}=1-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

连续型随机变量及其概率密度

如果对于随机变量X的分布函数 F(x)存在非负可积函数 f(x) 使得 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$ 则称X为连续型随机变量，f(x)称为X的概率密度函数，简称概率密度。

概率密度的性质：

- ▲ f(x)>0;
- ▲ $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$
- ▲ $P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx$
- ▲ $f(x)$在点x出连续，则$F'(x)=f(x)$

设随机变量X具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}kx & 0\le x<3\\ 2-\frac{x}{2} & 3\le x\le 4\\ 0 & \text{else}\end{cases}$,求常数k，分布函数F(x)及P{1<X≤ $\frac{7}{2}$}

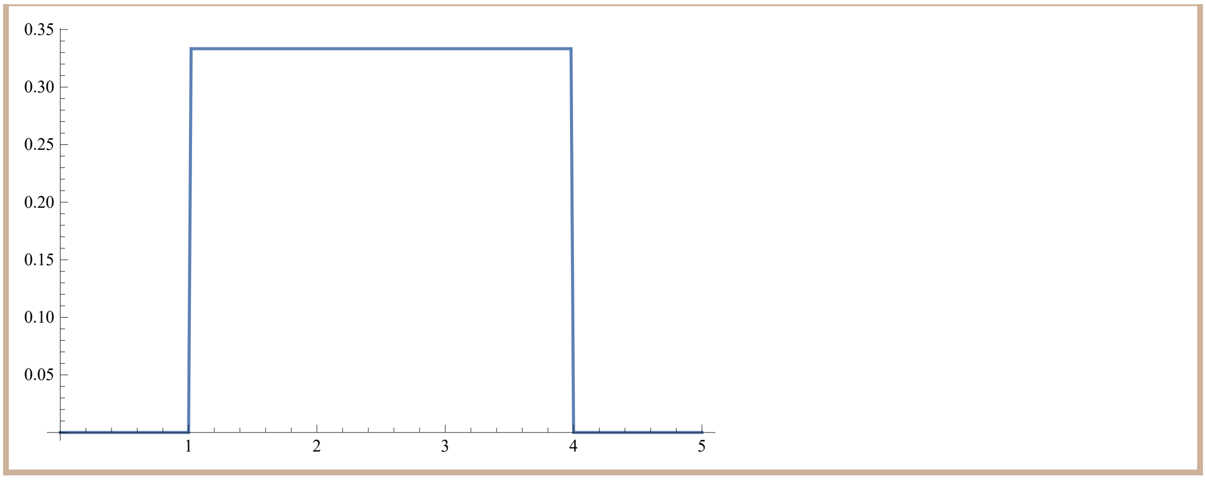
由于 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1=\int_0^3 kx\,dx+\int_3^4\left(2-\frac{x}{2}\right)dx\Longrightarrow k=\frac{1}{6}\Longrightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{x}{6} & 0\le x<3\\ 2-\frac{x}{2} & 3\le x\le 4\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

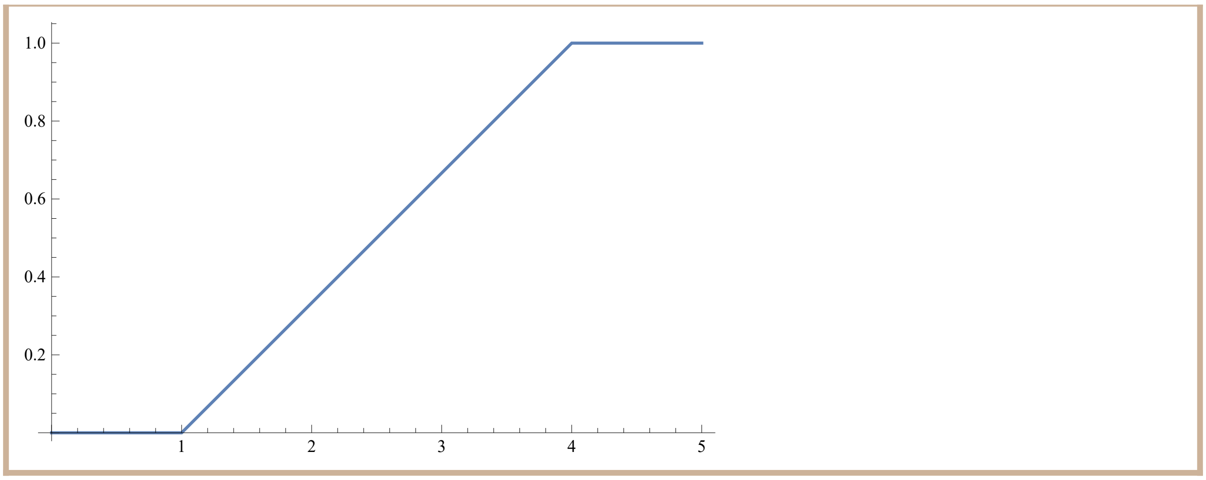
则 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \int_0^x\frac{x}{6}\,dx & 0\le x<3\\ \int_0^3\frac{x}{6}\,dx+\int_3^x\left(2-\frac{x}{2}\right)dx & 3\le x\le 4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{12} & 0\le x<3\\ -3+2x-\frac{x^2}{4} & 3\le x\le 4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$

$P\left\{1<X\le\frac{7}{2}\right\}=F\left(\frac{7}{2}\right)-F(1)=\frac{41}{48}$

均匀分布：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{else}\end{cases}$

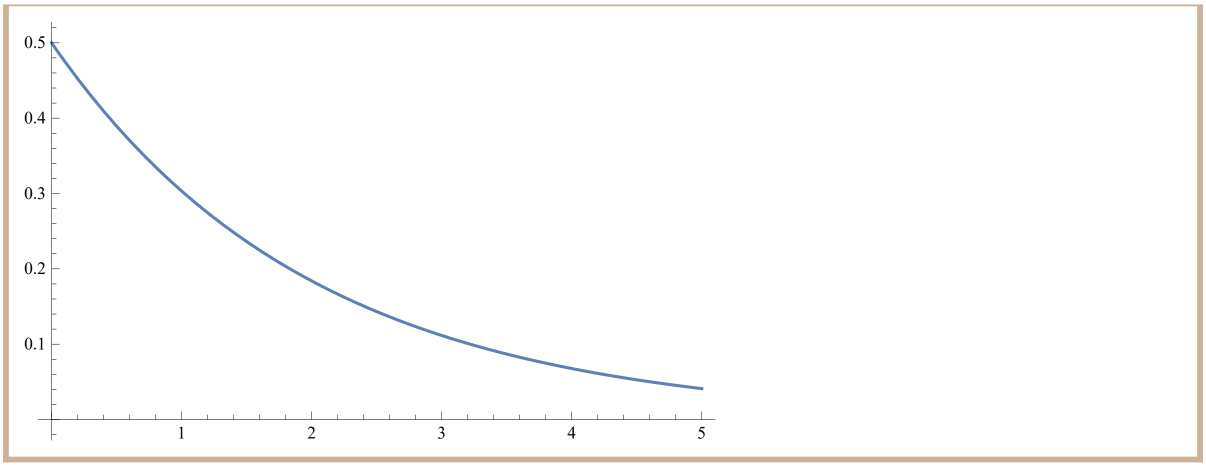
In[7]:=
```
Clear[p,k]
a=1;b=4;
f[x_]:=If[a<x<b, 1/(b-a), 0];
F[x_]:=Integrate[f[t],{t,-∞,x}];
ListPlot[Table[{x,f[x]},{x,0,5,0.02}],Joined→True]
ListPlot[Table[{x,F[x]},{x,0,5,0.02}],Joined→True]
```

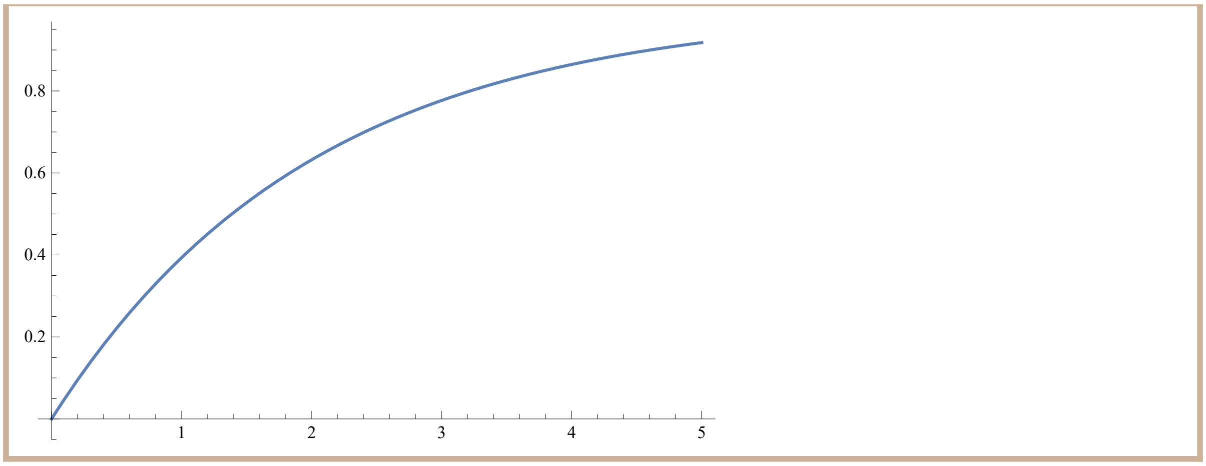




指 数 分 布： $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

In[13]:=
```
θ=2;
f[x_]:=If[x>0, (1/θ) e^(-x/θ), 0];
F[x_]:=Integrate[f[t],{t,0,x}];
Plot[f[x],{x,0,5}]
Plot[F[x],{x,0,5}]
```





正态分布：$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}}, \delta>0$

In[23]:=

```
δ=0.5;μ=3;
f[x_]:=1/(Sqrt[2π] δ) e^(-(x-μ)^2/(2δ^2));
F[x_]:=Integrate[f[t],{t,-∞,x}];
Plot[f[x],{x,0,5}]
Plot[F[x],{x,0,5}]
```

$$f[x\_]:=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\delta}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}};$$