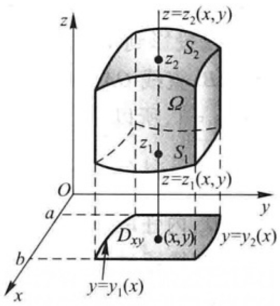
6

多元函数与重积分

6.4 三重积分及重积分的应用

三重积分的概念



定义：设函数f(x, y, z)是空间有界闭区域 Ω上的有界函数，将闭区域Ω任意分成n个小闭区域，$\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$, 其中$\Delta v_i$表示第i个小闭区域，也表示它的体积.在每个小闭区域内任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i)做乘积$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta v_i(i = 1, 2, ..., n)$，并做求和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta v_i$$

记$\lambda=\max\{\Delta v_1,\Delta v_2,\ldots,\Delta v_n\}$,如果当$\lambda\to 0$时，这和的极限总存在，且与闭区间$\Omega$的分法及点$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$的取法无关，那么称这个极限为函数f(x,y,z)在区间Ω上的三重积分

$$\text{记作} \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dv =$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta v_i = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} f(\rho\,\mathrm{Cos}\theta\,\mathrm{Sin}\varphi, \rho\,\mathrm{Sin}\,\theta\,\mathrm{Sin}\,\varphi, \rho\,\mathrm{Cos}\,\varphi)\,\rho^2\,\mathrm{Sin}\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

其中f(x,y,z)叫做被积函数，f(x,y,z)dv 叫做被积表达式，dv叫做体积元素，x、y、z叫做积分变量，Ω叫做积分区域。

$$dv = dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz = \rho^2\,\mathrm{Sin}\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

重积分的应用

- 直角坐标

计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围成的空间闭区域.

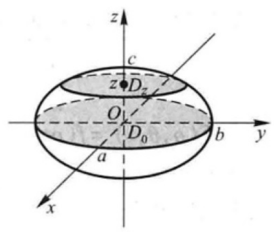
解 空间闭区域 Ω 可表示为

$$\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2},\ -c\leqslant z\leqslant c\right\},$$

如图 10－32 所示. 由公式(3－3)得

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)z^2\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc^3.$$



柱坐标

利用柱面坐标计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域.

解 把闭区域 Ω 投影到 xOy 面上，得半径为 2 的圆形闭区域

$$D_{xy}=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

在 D_{xy} 内任取一点 (ρ,θ)，过此点作平行于 z 轴的直线，此直线通过曲面 $z=x^2+y^2$ 穿入 Ω 内，然后通过平面 $z=4$ 穿出 Ω 外. 因此闭区域 Ω 可用不等式

$$\rho^2\leqslant z\leqslant 4,\ 0\leqslant\rho\leqslant 2,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

来表示. 于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4 z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho(16-\rho^4)\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[8\rho^2-\frac{1}{6}\rho^6\right]_0^2=\frac{64}{3}\pi.$$

极坐标

求半径为 a 的球面与半顶角为 α 的内接锥面所围成的立体的体积.

解 设球面通过原点 O，球心在 z 轴上，又内接锥面的顶点在原点 O，其轴与 z 轴重合，则球面方程为 $r=2a\cos\varphi$，锥面方程为 $\varphi=\alpha$.

因为立体所占有的空间闭区域 Ω 可用不等式

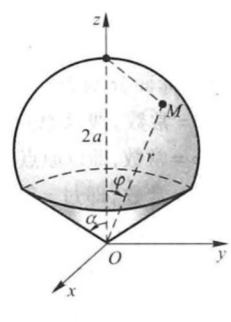
$$0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

来表示，所以

$$V=\iiint\limits_{\Omega} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\alpha}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\alpha}\cos^3\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}(1-\cos^4\alpha).$$



小结

- 引入了多元函数的概念
- 在多元函数的基础上介绍了重积分概念及其性质
- 介绍了重积分在不同情况下的处理方式

练习：

设 $x = e^{u}\,\mathrm{Cos}\,v,\ y = e^{u}\,\mathrm{Sin}\,v,\ z = u\,v$, 试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

计算重积分 $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{z\mathrm{Ln}\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{dv}$ 其中Ω是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域.