20. 특잇값 분해 Ⅱ

1) Symmetric matrix와 diagonalization

- Symmetric matrix는 항상 diagonalizable하다.
- Symmetric matrix는 항상 orthogonally diagonalizable하다. 즉, eigenvector들이 linearly independent할 뿐만 아니라 서로에게 orthogonal하다.

2) Positive Definite Matrix

- 정의: Matrix $A \in R^{n\times n}$가 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A\boldsymbol{x} > 0$ $(\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$을 만족하면 positive definite이다.
- Positive semi-definite: Matrix $A \in R^{n\times n}$가 $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} A\boldsymbol{x} \geq 0$ $(\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$을 만족하면 positive semi-definite이다.
- A의 eigenvalue가 모두 양수이다. ⟺ A가 positive definite이다.

3) SVD 계산 방법

- SVD 계산에는 eigen decomposition을 이용한다. 하지만 SVD를 진행할 matrix가 항상 square matrix는 아니므로, A^TA와 AA^T를 이용한다.

$$A^TA = U\Sigma \underbrace{V^T V}_{I} \Sigma^T U^T = U\underbrace{\Sigma\Sigma^T}_{\Sigma = \Sigma^T} U^T = U\Sigma^2 U^T$$
$$AA^T = V\Sigma^T \underbrace{U^T U}_{I} \Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$$

(1) A^TA와 AA^T의 eigenvalue와 eigenvector를 각각 구한다. 이 두 matrix는 동일한 eigenvalue를 공유한다.

A^TA와 AA^T는 symmetric이므로 eigenvector가 orthogonal이고, positive (semi-)definite이므로, eigenvalue는 모두 양수이다.

$$x^T A A^T x = (A^T x)^T (A^T x) = \|A^T x\|^2 \geq 0$$
$$x^T A^T A x = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|^2 \geq 0$$

(2) eigenvalue의 제곱근을 구하여 Σ의 요소로 이용한다.

(3) AA^T의 eigenvector를 U, A^TA의 eigenvector를 V의 column으로 한다.

4) SVD의 성질

- 어떠한 rectangular matrix $A \in R^{m\times n}$에 대해서, SVD는 항상 존재한다.
- 어떠한 square matrix $A \in R^{n\times n}$에 대해서, eigen decomposition이 항상 존재하는 것은 아니지만, SVD는 항상 존재한다.
- 어떠한 symmetric positive (semi-)definite matrix $A \in R^{n\times n}$에 대해서, eigen decomposition과 SVD는 항상 존재하며, 둘은 동일하다.