6. 선형변환

1) Transformation

- Domain(정의역): 모든 가능한 x값의 집합.
- Co-domain(공역): 모든 가능한 y값의 집합.
- Image: x가 주어졌을 때, 그에 해당하는 y의 값.
- Range(치역): Domain에 있는 각각의 x에 대응되는 모든 y값의 집합.

- 특정한 x에 대응하는 y값은 유일하다. 즉, 하나의 x값이 두 개의 y값을 결과로 가질 수 없다.

2) Linear Transformation

- 정의: 다음과 같은 조건을 만족하면 transformation T는 선형이다.
  조건: T의 정의역에 존재하는 모든 u, v에 대해, 그리고 모든 scalar c, d에 대해

$$T(c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{u}) + dT(\boldsymbol{v})$$

e.g. $T: x \mapsto y$, $T(x) = y = 3x$

if) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $c = 4$, $d = 5$

$T(x_1) = 3$, $T(x_2) = 6$

$T(4x_1 + 5x_2) = 42$

$\Rightarrow \quad 4T(x_1) + 5T(x_2) = T(4x_1 + 5x_2)$

3) Vector간 transformation

- T: $x \in R^n \mapsto y \in R^m$: m차원 vector를 n차원 vector에 대응.

e.g. $T: x \in \mathbb{R}^3 \mapsto y \in \mathbb{R}^2$. $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mapsto y = T(x) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

4) T가 linear transformation이라면, T는 항상 matrix와 vector의 곱으로 나타낼 수 있다.

e.g.1. $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 라면,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T(x) = T\left(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x_1 T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

matrix의 곱 적용

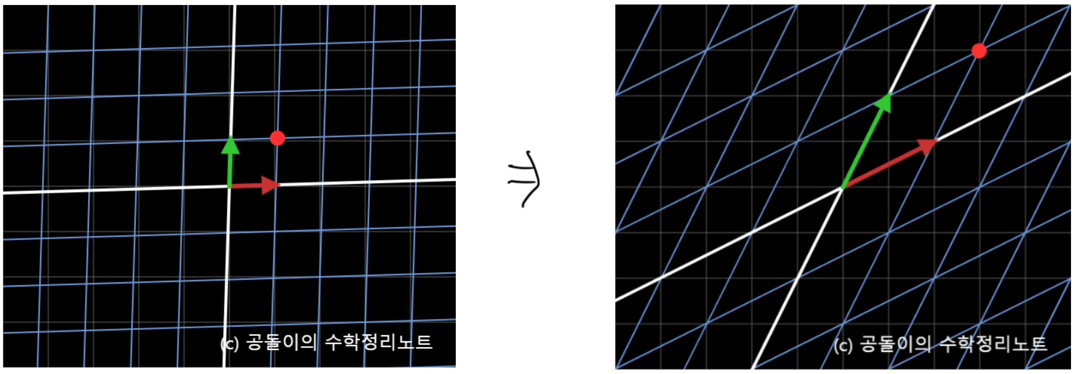
e.g.2. $T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix},\ T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$ 이면.

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T(x)=T\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=x_1T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)+x_2T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)+x_3T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$=x_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&5\\2&3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=Ax$$

5) 기하학적으로, Linear transformation은 정사각형의 공간을 평행사변형의 공간으로 바꾼다.



출처: 공돌이의 수학정리노트

6) Neural network에서 bias를 포함하여 transformation을 하면 affine transformation이다.

- Affine transformation은 linear transformation 이후에 평행이동이 진행된 것이다.