5. 부분공간의 기저와 차원

1) Span & Subspace

- 정의: Subspace(부분공간) H는 linear combination에 대해 닫힌 R^n의 부분집합이다.

두 vector $u_1, u_2 \in H$에 대해. 그리고 두 scalar c, d에 대해,

$cu_1 + du_2 \in H$ 이다.

- Span $\{v_1, \ldots, v_p\}$은 항상 Subspace이다.

2) Basis

- 정의: Subspace H의 basis(기저)는 다음 두 가지를 모두 만족시키는 vector의 집합이다.

(1) 주어진 subspace H를 완전히 span한다.

(2) Linearly independent하다. (즉, 중복성이 없다.)

e.g. $H = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$ 라 하자.

$\text{Span}\{v_1, v_2\}$가 plane을 만들고, $v_3 = 2v_1 + 3v_2 \in \text{Span}\{v_1, v_2\}$ 라면,

$\{v_1, v_2\}$는 H의 basis지만

$\{v_1, v_2, v_3\}$나 $\{v_1\}$은 basis가 아니다.

3) 하나의 Subspace에 대한 basis는 유일하지 않다.

- subspace내의 한 vector를 표현할 수 있는 linear combination이 유일하지 않기 때문이다.

4) Dimension

- Subspace H의 basis가 유일하지는 않지만, basis를 이루는 vector의 수는 어느 basis나 동일하다.
- Basis를 이루는 vector의 수를 dimension(차원)이라고 한다.

5) Column Space

- 정의: Matrix의 column에 의해 span되는 subspace를 column space라고 한다.

e.g.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Col}(A) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

e.g.) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Col(A)는 여전히 $\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ 이다.

6) Rank

- 정의: Column space의 dimension.

$$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{col}(A)$$

cf. 데이터 분석에서 불필요하거나 다른 feature에 의존적인 feature를 판별할 때 rank를 사용하기도 한다.