15. 영공간과 직교여공간

1) Null Space

- 정의: Linear system $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ $(A \in R^{m \times n})$의 모든 해의 집합을 A의 null space라고 한다.
- 표기는 'Null space of A', 'Nul A', 또는 $N(A)$라고 표기한다.
- $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$ 에 대해, x는 다음을 만족한다.

$$a_1^T x = 0,\ a_2^T x = 0,\ \dots,\ a_m^T x = 0$$

⇒ x는 A의 모든 row vector에 대해 orthogonal이다.

2) Null space는 subspace이다.

pf. null space가 subspace이려면 $x, y \in N(A)$인 x, y에 대해
그 linear combination $ax+by$도 $ax+by \in N(A)$여야 한다.
A의 row를 $r_1^T, r_2^T \cdots r_n^T$라 하면, x와 y는 모두 이들에 대해 orthogonal이다.
따라서 $r_i^T(ax+by) = a r_i^T x + b r_i^T y = 0$ 이 되므로
nullspace는 subspace가 된다.

3) Orthogonal Complement

- Subspace W에 대해 orthogonal인 모든 vector의 집합을 orthogonal complement라고 하고, $W^{\perp}$로 표기한다.
- 만약 어떤 vector가 $W^{\perp}$에 속하려면 반드시 W를 span하는 모든 vector의 집합에 대해 orthogonal이어야 한다.

4) $N(A) = C(A^T)^{\perp}$

- Nullspace는 row space의 orthogonal complement이다.
- Nullspace의 transpose(left nullspace)는 column space의 orthogonal complement이다 ($N(A^T) = C(A)^{\perp}$).

5) Matrix $A \in R^{m \times n}$ 4개의 subspace 각각의 dimension

- Row space $C(A^T)$: Rank (r)
- Column space $C(A)$: Rank (r)
- Null space $N(A)$: $n - r$
- Left nullspace $N(A^T)$: $m - r$
- 서로 orthogonal complement인 subspace가 되기 위해서는 반드시 두 subspace의 dimension을 합쳤을 때 m 또는 n이 나와야 한다.