4. 선형독립과 선형종속

1) Linear Independent

- Practical Definition

Vector의 집합 $V_1, V_2 \cdots V_p \in \mathbb{R}^n$이 주어졌을 때,
이전 vector $\{V_1, V_2 \cdots V_{j-1}\}$의 linear combination으로 표현 가능한 V_j가 적어도 하나 존재하면
$\{V_1, \cdots V_p\}$는 linearly dependent 하다.

만약 위에 해당하는 V_j가 없다면, $\{V_1, \cdots V_p\}$는 linearly independent 하다.

- Formal Definition

$x_1V_1 + x_2V_2 + \cdots + x_pV_p = 0$ 가 있을 때.
한가지 해는 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다. 0-vector는 항상 포함된다.

↳ trivial solution

- 만약 trivial solution이 위 방정식의 유일한 해라면, $V_1 \cdots V_p$는 linearly independent 이다.
- 만약 trivial solution 외에 다른 해가 있다면, $V_1, \cdots, V_p$는 linearly dependent 하다.

2) Linear dependent인 vector는 Span을 늘리지 않는다.

만약 $V_3 \in Span\{V_1, V_2\}$ 라면

$$Span\{V_1, V_2\} = Span\{V_1, V_2, V_3\}$$

$V_3 = d_1V_1 + d_2V_2$ 라고 쓸 수 있다면,

$$C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 = (C_1 + d_1)V_1 + (C_1 + d_2)V_2$$ 로 표현 가능하다.

3) Linear dependent 집합은 주어진 vector에 대해 다수의 linear combination을 만든다.

eg. $x_1V_1 + x_2V_2 + x_3V_3 = b$ 의 해가 $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이라고 하자.

$V_3 = 2V_1 + 3V_2$ 라고 한다면, $3V_1 + 2V_2 + 1V_3 = 3V_1 + 2V_2 + (2V_1 + 3V_2)$
↳ V_3가 V_1, V_2의 linear combination 이면 $= 5V_1 + 5V_2$ 로 표현 가능하다.

그렇다면, $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ 또한 위 방정식의 해가 된다.