17. 대각화

1) Diagonalization

- Square matrix $A \in R^{n \times n}$를 다음과 같이 diagonalization 할 수 있다. $S \in R^{n \times n}$는 invertible matrix, $D \in R^{n \times n}$는 diagonal matrix이다.

$$D = S^{-1}AS$$

- A가 diagonalizable이기 위해서는 invertible인 S가 존재해야 한다.

2) S의 column들은 eigenvector이고, D의 diagonal element들은 eigenvalue이다.

pf. $AS = A[v_1\ v_2\ \cdots\ v_n] = [Av_1\ Av_2\ \cdots\ Av_n]$

$$SD = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 v_1\ \cdots\ \lambda_n v_n]$$

0에 의해 S의 나머지 column이 사라진다.

$AS = SD \Rightarrow [Av_1\ Av_2\ \cdots\ Av_n] = [\lambda_1 v_1\ \lambda_2 v_2\ \cdots\ \lambda_n v_n]$

$\therefore Av_1 = \lambda_1 v_1$
$Av_2 = \lambda_2 v_2$
$\vdots$
$Av_n = \lambda_n v_n$

이를 만족하기 위해서는 λ는 eigenvalue, v는 eigenvector여야 한다.

3) 모든 matrix A가 diagonalizable인 것은 아니다.

- Matrix A가 diagonalizable이기 위해서는 S가 square matrix이면서 n개의 linearly independent columns을 가져야 한다.
- 이는 A가 n개의 linearly independent인 eigenvector를 가져야 한다는 말과 같다.
- A가 항상 n개의 linearly independent인 eigenvector를 가지지는 않으므로, 모든 A가 diagonalizable하지는 않다.
- A가 n개의 서로 다른 eigenvalue를 가진다면, A는 diagonalizable하다.

pf.

x_1, x_2를 eigenvector라 할 때, $c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ 이라 하자. (식①)

식①에 A를 곱해 다음과 같은 식을 유도한다.

$c_1 A x_1 + c_2 A x_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 \lambda_1 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$ (식②)

식①에 λ_2를 곱한다.

$c_1 \lambda_2 x_1 + c_2 \lambda_2 x_2 = 0$ (식③)

식②에서 식③을 뺀다.

$c_1 \lambda_1 x_1 - c_1 \lambda_2 x_1 = 0$

$(\lambda_1 - \lambda_2) c_1 x_1 = 0$

$c_1 = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2,\ x_1 \neq 0)$

동일한 논리로 $c_2 = 0$ 이다.

$c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ 은 $c_1 = 0,\ c_2 = 0$ 인 경우만 가능하므로, x_1, x_2는 linearly independent이다. ⇒ diagonalizable 하다.

동일한 논리를 j개의 eigenvector로 확장할 수 있다.
일부 중간 과정을 보면,

$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdots (\lambda_1 - \lambda_j) c_1 x_1 = 0 \quad \therefore c_1 = 0$
$\Rightarrow c_j = 0$

$\therefore$ A가 n개의 서로 다른 eigenvector를 가지면, diagonalizable 하다.

4) Invertible과 diagonalizable 사이에는 관계가 없다.

- Invertible: Eigenvalue가 0인지 아닌지와 관련.
- Diagonalizable: Eigenvector의 수와 관련.