3. 선형결합

1) Linear Combination

- Linear Combination(선형결합)은 다음과 같이 정의된다.

Vector $v_1, v_2, \cdots, v_p \in \mathbb{R}^n$과 scalar $c_1, c_2 \cdots c_p$가 주어졌을 때,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p$$

- 선형결합의 관점에서는 3개의 방정식이 하나의 방정식으로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} 60 \\ 65 \\ 66 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 5.5 \\ 5.0 \\ 6.0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 66 \\ 74 \\ 78 \end{bmatrix}$$

2) Span

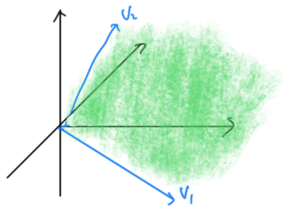
- 정의: Vector의 집합 $v_1, v_2, \ldots, v_p \in R^n$이 주어졌을 때, 그 vector들의 선형결합으로 구할 수 있는 모든 vector의 집합을 Span이라고 한다.

즉, 다음과 같이 쓸 수 있는 모든 vector의 집합인 것이다. ($c_1, \ldots, c_p$는 scalar)

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_p v_p$$

- Span의 기하학적 표현

v_1, v_2가 $\mathbb{R}^3$의 non-zero vector이면서 v_2가 v_1의 multiple이 아닐 때,
Span$\{v_1, v_2\}$는 $\mathbb{R}^3$의 평면(plane)이다.
이 평면은 $v_1, v_2, 0$(vector)을 포함한다.



- Vector 방정식의 기하학적 해석

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$의 해는 오직 b가 Span$\{a_1, a_2, a_3\}$에 포함될 때만 존재한다.

3) Matrix의 곱 관점 1 – Row와 Column의 Product

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 11 & 1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$$

4) Matrix의 곱 관점 2 – Column Combinations

- One column on the right

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} 2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3$$

가중치로서의 의미

- Multi-columns on the right

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} 2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} 1$$

5) Matrix의 곱 관점 3 – Row Combinations

- One row on the left

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ +2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ +3 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Multiple-rows on the left

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^T \\ y^T \end{bmatrix}$$

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$y^T = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

많은 숫자가 있는 matrix를 적은 숫자로 표현 가능 (factorization)

6) Matrix의 곱 관점 4 – Sum of Rank-1 Outer Products

- Rank-1 Outer Product

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

cf.) 원리 (전부 vector)

$$[a][b] = ab$$

c,d가 추가되면?

$$\begin{bmatrix} a & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = ab + cd$$

- Sum of Rank-1 Outer Product

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -4 & -5 & -6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$