19. 특잇값 분해 I

1) Singular Value Decomposition(SVD)

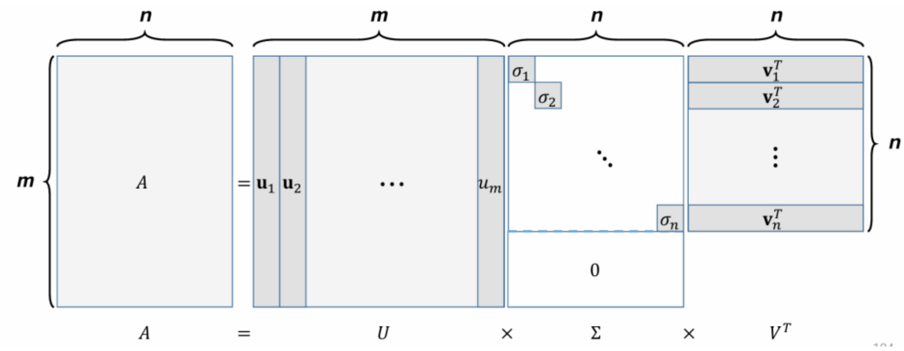
- Rectangular matrix $A \in R^{m \times n}$를 다음과 같이 분해할 수 있다.

$$A = U \Sigma V^T$$

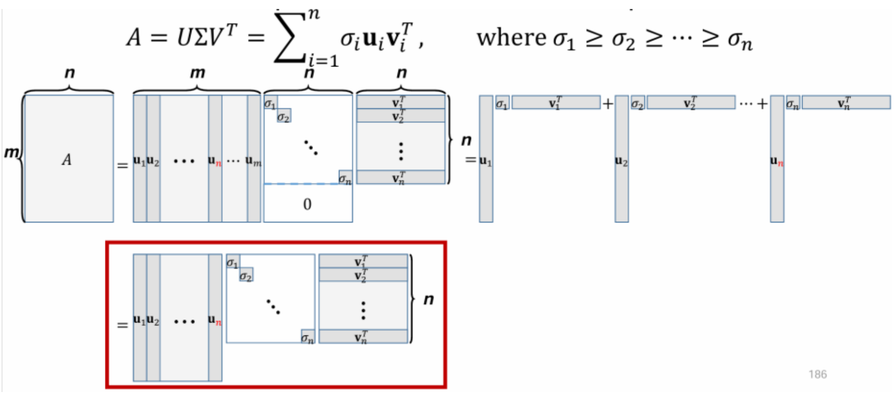
- $U \in R^{m \times m}$, $V \in R^{n \times n}$는 orthonormal인 column들을 가지고 있다.
- $\Sigma \in R^{m \times n}$는 entry들이 내림차순으로 정렬되어 있는 diagonal matrix이다.

2) SVD을 보는 다양한 관점

(1) 기본적인 관점



(2) Sum of Outer Products



(3) Orthonormal matrix에 집중해서 보는 관점

Gram-Schmidt를 이용해서

ColA의 orthogonal basis $\{u_1, \dots, u_n\}$과

RowA의 orthogonal basis $\{v_1, \dots, v_n\}$을 찾을 수 있다.

이들은 unique한 basis가 아니므로, 다음을 만족시키는 V, U를 찾을 수 있다.

↳ column의 순서에 따라 달라짐.

$$Av_i = \sigma_i u_i \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

$U = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $V = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

이라 하자.

$$AV = A[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] = [Av_1 \ \cdots \ Av_n]$$

$$U\Sigma = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} = [\sigma_1 u_1 \ \sigma_2 u_2 \ \cdots \ \sigma_n u_n]$$

$$AV = U\Sigma \iff [Av_1 \ \cdots \ Av_n] = [\sigma_1 u_1 \ \cdots \ \sigma_n u_n]$$

$V^{-1} = V^T$ 이므로 (orthonormal columns)

$$\therefore A = U\Sigma V^T$$