21. 고유값 분해와 특잇값 분해의 응용

1) Machine Learning과 Symmetric Positive (Semi-)Definite Matrix

- A^TA는 inner product로 계산된 샘플 간의 유사도를 나타낸다.

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{bmatrix} \qquad A^TA = \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^Ts_1 & \cdots & \\ s_2^Ts_1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ s_n^Ts_1 & & \end{bmatrix}$$

s_2와 s_1 관계

s_n과 s_1 관계

샘플 끼리의 유사도 전부 도출 가능

- AA^T는 inner product로 계산된 특성 간의 유사도를 나타낸다.

$$A = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \qquad AA^T = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^T & f_2^T & \cdots & f_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1f_1^T & \cdots & \\ f_2f_1^T & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \\ f_nf_1^T & & \end{bmatrix}$$

f_2와 f_1의 관계

f_n과 f_1의 관계

특성 끼리의 유사도(관계) 전부 도출 가능

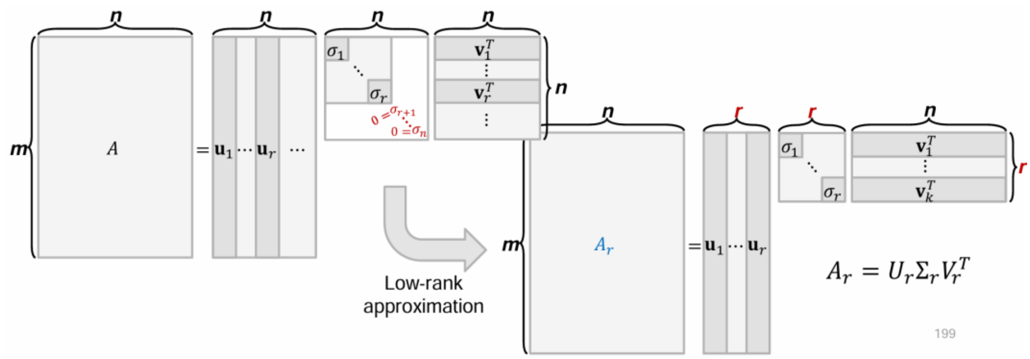
2) Low-Rank Approximation of a Matrix

- Matrix $A \in R^{m \times n}$의 SVD는 다음과 같이 나타낼 수 있었다.

$$A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T$$

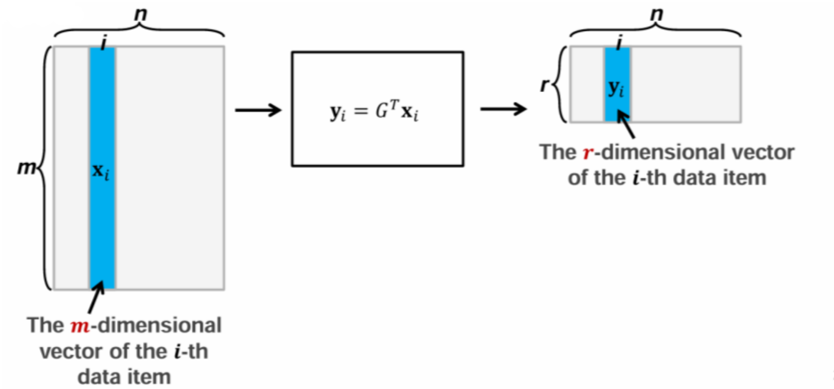
- A를 낮은 차원으로 근사하고 싶다면 다음과 같이 원하는 차원까지만 더해주면(선택해주면) 된다.

$$\hat{A}_r = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$$



3) Dimension-Reducing Transformation

- 다음과 같이 matrix $X \in R^{m \times n}$의 차원을 linear transformation $G: \boldsymbol{x} \in R^m \mapsto \boldsymbol{y} \in R^r (r < m)$로 줄일 수 있다.



- $G \in R^{m \times r}$의 column이 orthonormal할 때, 샘플(A의 column) 간의 유사도를 가장 잘 보존하는 G는 SVD로 구해진 U의 column으로 이루어진다.

$$\hat{G} = U_r = [u_1 \; u_2 \cdots u_r]$$

$$Y = \hat{G}^T X = U_r^T U \Sigma V^T = \Sigma_r V_r^T$$