11. Orthogonal Projection Ⅰ

1) Projection

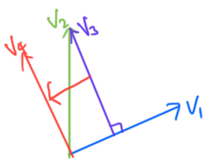
- Vector $\boldsymbol{b}$의 col(A)에 대한 orthogonal projection $\hat{\boldsymbol{b}}$를 (정규방정식을 참고하여) 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{b} = f(b) = A\hat{x} = A(A^TA)^{-1}A^Tb$$

- 위 식이 성립하는 이유는 기하학적으로 생각할 수 있다. 지난 정규방정식 강의에서, Col(A)에 있지 않은 vector $\boldsymbol{b}$에 대해, A에 수선의 발을 내려서 error를 최소화하는 $\hat{\boldsymbol{b}}$을 찾았다. 이것이 orthogonal projection이다.

2) Orthogonal, Orthonormal Sets

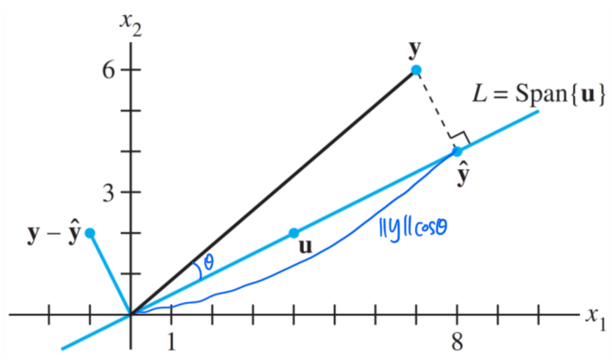
- Orthogonal set의 정의: Vector의 집합 $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_p\} \subset R^n$에 대해, 모든 서로 다른 두 vector의 조합이 orthogonal이다. (내적이 0이다.)
- Orthonormal ser의 정의: Vector의 집합 $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_p\} \subset R^n$이 orthogonal set인 동시에 unit vector로만 이루어져 있다.
- Orthogonal(or orthonormal) set은 linearly independent이다.
- Orthogonal set이 아닌 vector의 집합도 Gram-Schmidt 과정을 통해 orthogonal set으로 만들 수 있다.



V_1, V_2가 주어졌을 때, 일단 projection을 통해 V_3를 구하고,
그 vector를 평행이동시켜 V_4를 구한다.

3) Orthogonal Projection on to Line

- Subspace L(line)에 대한 어떤 vector $\boldsymbol{y}$의 projection $\hat{\boldsymbol{y}}$은 다음과 같이 구할 수 있다.



Vector y와 u 사이의 각도를 θ라 하자. 그럼 다음 식이 성립한다.

$$\cos\theta = \frac{y \cdot u}{\|y\|\|u\|}$$

우리가 원하는 것은 projection한 $\hat{y}$의 길이 $(\|y\| \cdot \cos\theta)$이므로 이는 $\frac{y \cdot u}{\|u\|}$가 된다.

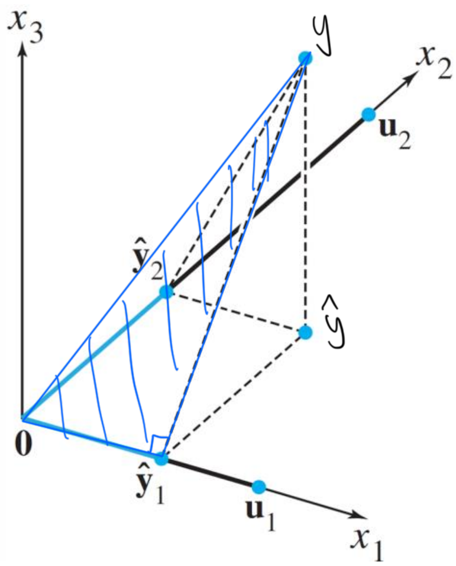
이제 길이는 구했으니 방향성만 구하면 된다. 이는 u의 unit-vector $\frac{u}{\|u\|}$를 활용한다.

이렇게 구한 길이와 방향성을 곱하면 $\hat{y}$이 도출된다.

$$\therefore \hat{y} = \underbrace{\frac{y \cdot u}{\|u\|}}_{\text{길이}} \cdot \underbrace{\frac{u}{\|u\|}}_{\text{방향성}} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u$$

4) Orthogonal Projection on to Plane

- Subspace W(plane)에 대한 어떤 vector $\boldsymbol{y}$의 projection $\hat{\boldsymbol{y}}$은 다음과 같이 구할 수 있다.



기본적인 idea는 다음과 같다.

(1) y를 W의 basis인 u_1, u_2에 대해 projection.

(2) projection된 두 vector를 합쳐서 $\hat{y}$ 도출.

(1)의 과정을 할 때는 왼쪽처럼 y를 한 점으로 하는 직각삼각형을 생각한다.

$$\therefore \hat{y} = \underbrace{\frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1}_{u_1\text{에 대한 projection}} + \underbrace{\frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2}_{u_2\text{에 대한 projection}}$$