18. 고유값 분해와 선형변환

1) Linear Transformation via Eigen decomposition

- Eigen decomposition을 linear transformation의 관점에서 3단계로 처리할 수 있다.

$$A = SDS^{-1}$$

$$T(x) = Ax = SDS^{-1}x = S(D(S^{-1}x))$$

(1) Change of Basis

- S^{-1}를 $\boldsymbol{x}$에 곱하는 과정은 basis를 바꾸는 과정으로 생각할 수 있다.

$y = S^{-1}x$ 라 하면,

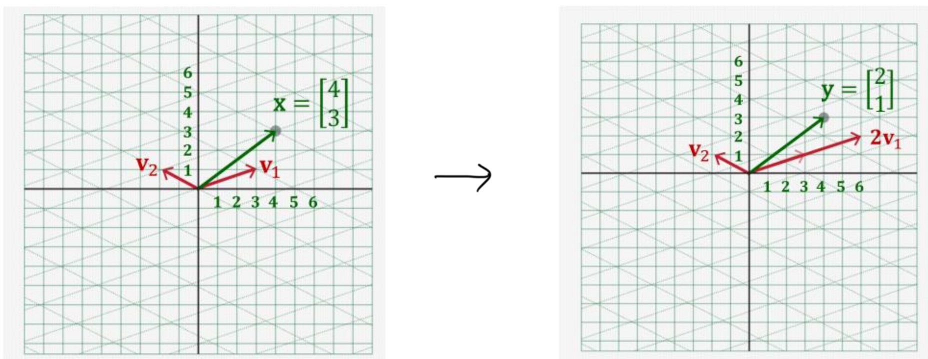
$Sy = x$ 이다.

따라서 y는 eigenvector (column of S)를 basis로 하는 x의 새로운 좌표이다.

e.g. $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 일 때

$S = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\therefore y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

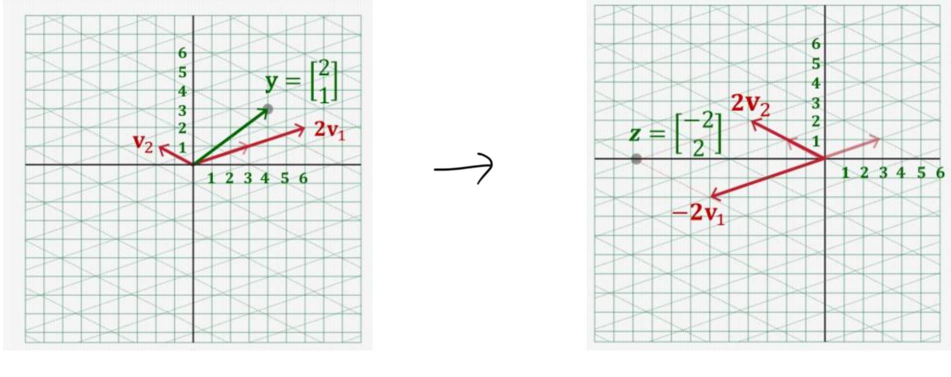


(2) Element-wise Scaling

- D를 곱하는 과정은 element-wise scaling이다.

e.g. $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ 이면, $z = Dy = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

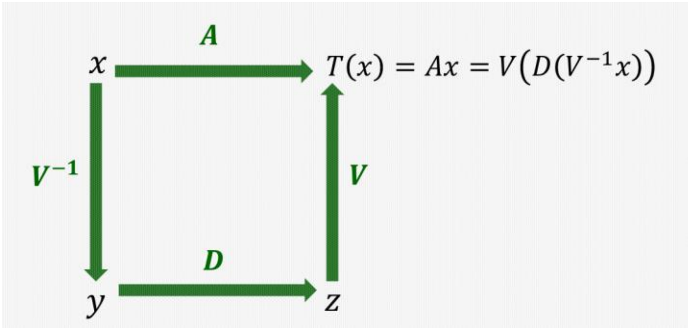
$= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$



(3) Back to Original Basis

- S를 곱하는 과정은 다시 원래의 basis로 돌아가는 것이다.

e.g. $Sz = [v_1\ v_2]\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix} = -2v_1 + 2v_2 = -2\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10\\0\end{bmatrix}$



2) Eigen decomposition과 A^k 연산

- A^k는 eigen decomposition을 이용해 다음과 같이 간단하게 처리할 수 있다.

$$A = SDS^{-1}$$
$$A^k = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) \cdots (SDS^{-1}) = SD^kS^{-1}$$

$$D^k = \begin{bmatrix}\lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k\end{bmatrix}$$

- 물론 이 과정도 linear transformation의 관점에서 볼 수 있다.

$$A^k x = SD^kS^{-1}x = S(D^k(S^{-1}x))$$