2. 선형방정식과 선형시스템

1) Linear Equation

- Linear Equation(선형방정식)은 다음과 같이 정의된다.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

b와 계수 a_1, a_2, … a_n은 실수 혹은 허수이다.

다음과 같이 벡터화를 적용해서 표기하는 것이 일반적이다.

$$a^Tx = b \quad (a, x, b\text{는 vector})$$

2) Linear System은 linear equation의 집합이다.

- Linear System의 예시

$$60x_1 + 5.5x_2 + 1 \cdot x_3 = 66$$
$$65x_1 + 5.0x_2 + 0 \cdot x_3 = 74$$
$$55x_1 + 6.0x_2 + 1 \cdot x_3 = 78$$

- Matrix와 vector를 적용해서 하나의 matrix equation으로 표기할 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 5.5 & 1 \\ 65 & 5.0 & 0 \\ 55 & 6.0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 66 \\ 74 \\ 78 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

3) Identity Matrix

- 정의: 대각 항목들이 모두 1이고 나머지 항목들이 모두 0인 square matrix.

$$I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\text{eg)}\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 좀 더 수학적인 정의: Square matrix $A \in R^{n \times n}$에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

- 2 by 2 matrix에 대해 inverse matrix는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

4) Inverse matrix로 linear system 해결하기

- 일반적 과정

$$Ax = b$$
$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$
$$I_n x = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b$$

- e.g.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 60 & 5.5 & 1 \\ 65 & 5.0 & 0 \\ 55 & 6.0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 66 \\ 74 \\ 78 \end{bmatrix}} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0870 & 0.0087 & -0.0870 \\ -1.1304 & 0.0870 & 1.1314 \\ 2.0000 & -1.0000 & -1.0000 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 20 \\ -20 \end{bmatrix}$$

5) 어떤 Matrix A가 invertible하다면, 해(solution)는 유일(unique)하다.

- 증명

if) invertible인 A에 대해 x와 x^*가 모두 해라고 하자.

$Ax = b$, $Ax^* = b$ 이다.

$$Ax = b \qquad Ax^* = b$$
$$x = \underbrace{A^{-1}b \qquad x^* = A^{-1}b}_{\text{동일}}$$

$\Rightarrow$ ∴ matrix가 invertible 하다면 해는 유일하다.

6) Determinant(det)가 0이면 non-invertible이고, 0이 아니라면 invertible이다.

- 2 by 2 matrix의 determinant

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det A = ad - bc$$

7) Inverse matrix가 존재하지 않는다면 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$는 해가 없거나, 무수히 많다.

- 해가 없는 경우

eg. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

- 해가 무수히 많은 경우

eg. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

8) Square matrix가 아닌 rectangular matrix인 경우

m이 방정식의 개수, n이 변수의 개수일 때,

- $m < n$: 일반적으로 해가 무수히 많다. (Under-determined system)

- $m > n$: 일반적으로 해가 없다. (Over-determined system)