14. 고유벡터와 고유값

1) Eigenvectors and Eigenvalues

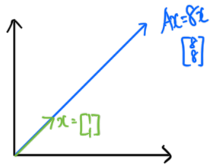
- Eigenvector의 정의: Square matrix $A \in R^{n\times n}$의 eigenvector $\boldsymbol{x} \in R^n$는 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ (λ는 scalar)를 만족하는 nonzero vector이다.
- Eigenvalue의 정의: Eigenvector의 정의에서, λ를 A의 eigenvalue라고 한다.

2) Transformation의 관점

- Linear transformation $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$이 있을 때, x가 eigenvector라고 하면 $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$라고 할 수 있다.
- 즉, linear transformation의 결과 vector는 $\boldsymbol{x}$와 방향은 같지만 크기가 다른(λ에 의해 스케일링 된) vector라고 할 수 있다.

e.g. $A=\begin{bmatrix}2&6\\5&3\end{bmatrix}$ 의 eigenvector는 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 이다.

$$T(x)=Ax=\underset{A}{\begin{bmatrix}2&6\\5&3\end{bmatrix}}\underset{x}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}8\\8\end{bmatrix}=\underset{\lambda}{8}\,\underset{x}{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}$$



3) 계산에서 얻는 이점

- Eigenvalue와 eigenvector는 matrix와 vector의 곱보다 계산량이 적다는 장점이 있다.

e.g. $\begin{bmatrix}2&6\\5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ⇒ 계산 6번 (곱셈 2번 + 덧셈 1번)×2

$8\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ⇒ 계산 2번

4) Eigenvalue와 eigenvector를 구하는 과정에서, column들을 linearly dependent하게 바꿀 수 있다.

- Eigenvalue와 eigenvector는 다음 linear system을 풀어서 구할 수 있다.

$$(A-\lambda I)x=0$$

- 원래는 linearly independent인 column들일지라도, eigenvalue와 eigenvector를 구하는 과정에서 linearly dependent하게 될 수 있다.

e.g. $A=\begin{bmatrix}2&6\\5&3\end{bmatrix}$ 일 때, $\lambda=8$ 이다. $(A-\lambda I)x=\begin{bmatrix}-6&6\\5&-5\end{bmatrix}$

⇓ linearly independent

⇓ linearly dependent