AI and Deep Learning

선형회귀(1)

오류 그래프와 기울기, 그리고 경사하강

제주대학교

변 영 철

http://github.com/yungbyun/mllecture

공부할 내용

- 회귀의 의미
- 뉴런의 출력과 절대값 오류
- 기울기와 경사하강
- 절대값 오류의 문제점과 평균 제곱오류
- 기울기를 구하는 방법, 미분
- 기울기가 갖는 의미

회귀(Regression)

go

인류는 고향을 떠나도 나이가 들면 언젠가는 고향으로 회귀하고(돌아가고) 싶어한다. (인류학)

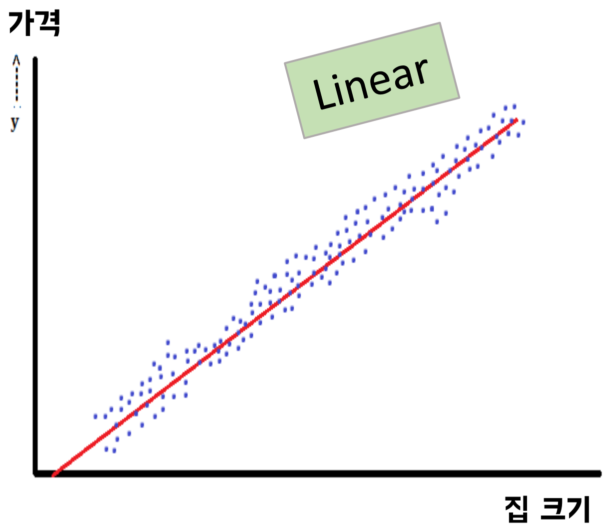

KBS1 HD

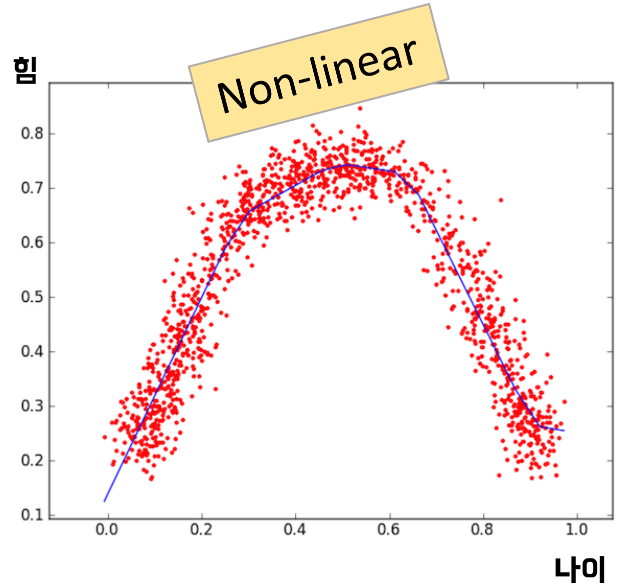
회귀=자연의 법칙, 현상

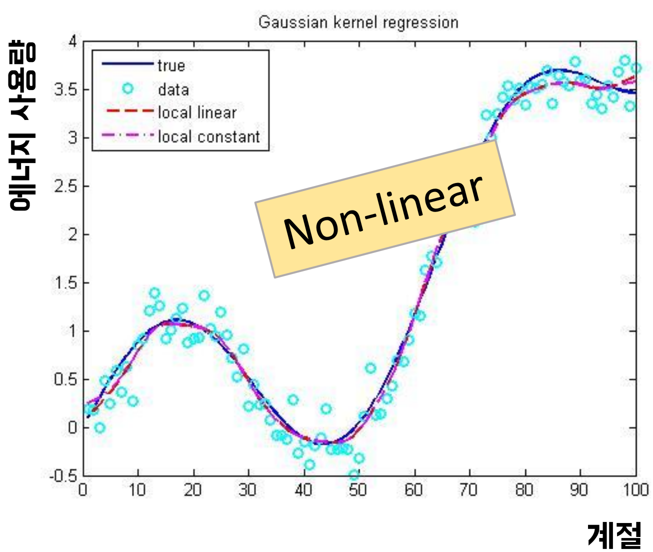
- 연어는 자라서 태어난 곳으로 돌아온다.
- 집은 클수록 비싼 편이다.
- 젊을 때는 힘이 세지만 나이가 들수록 약해진다.
- 성적이 좋을 수록 취업이 잘되는 편이다.

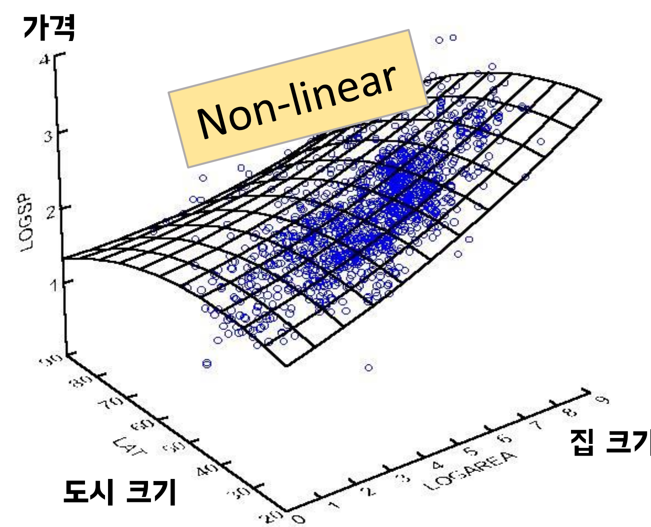
일종의 규칙, 이러한 회귀는 지식이 되고 인해 예측(prediction)이 가능

회귀는 그래프로 표현하면 이해하기 쉽다.









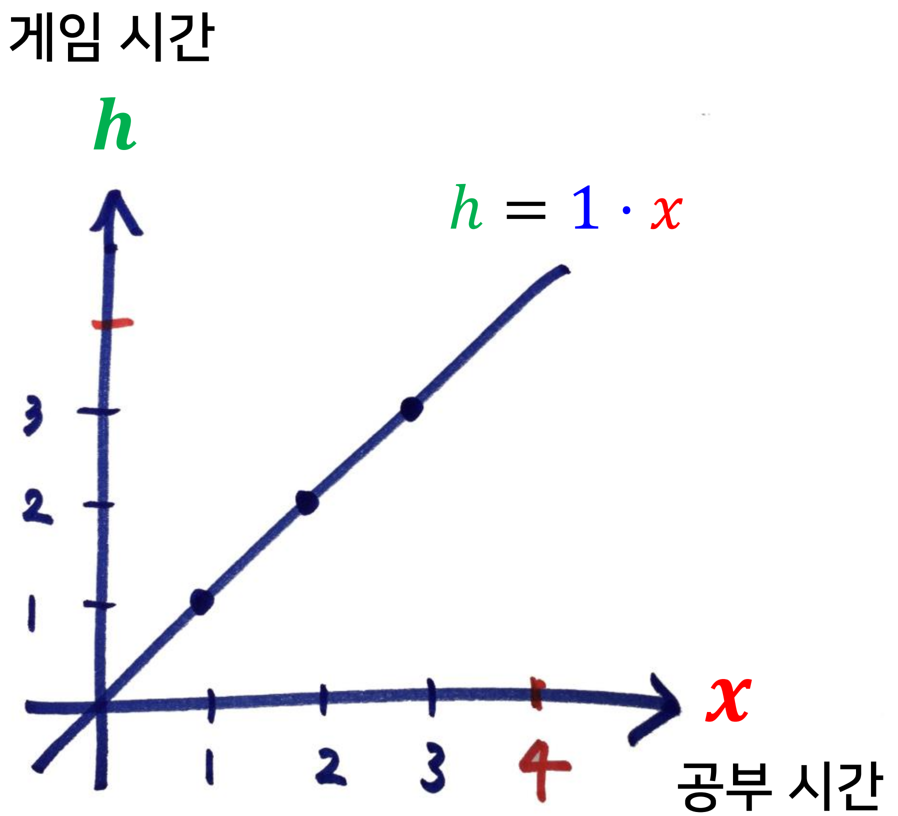
Lab.
Linear Regression

using desmos

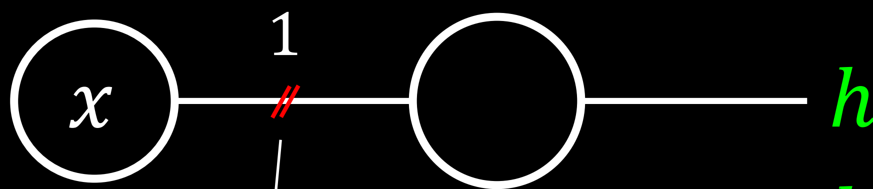
www.desmos.com

1. 점 (1, 1) 표시
2. 점 (2, 2), (3, 3) 추가
3. $h = x$
4. $h = 2x$
5. $h = wx$ (회전)
6. 모든 점 y에 1 더함
7. $h = wx + 1$ (이동)
8. $h = wx + b$ (회전과 이동)

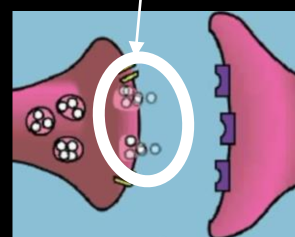
www.desmos.com



$$h = wx$$



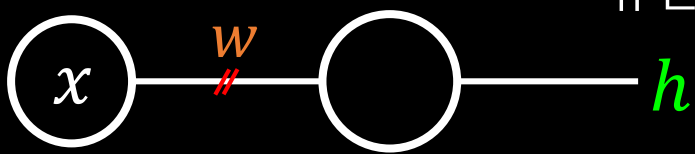
$$h = w \cdot x$$



- 신경전달 물질의 양
- 많으면? 적으면? 없으면?

뉴런과 회귀

$h$ypothesis
= 뉴런의 출력값

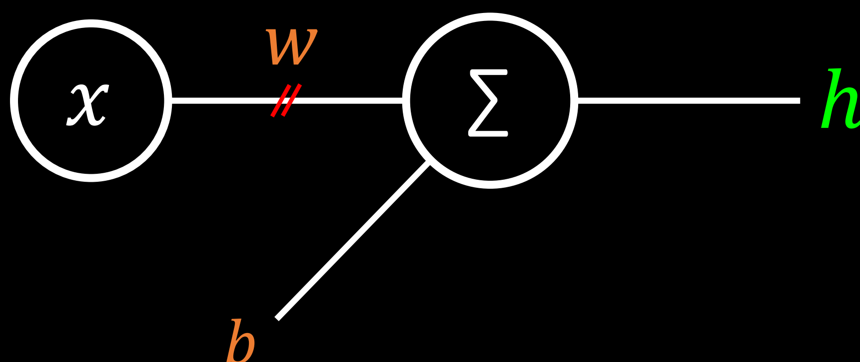


- 하나의 뉴런은 하나의 선형 회귀(Linear Regression)를 표현
- $h$ypothesis : a proposed explanation for a phenomenon(a regression).
- 증명되지 않았으나 w 조절을 통하여 회귀(regression)를 표현할 수 있음.

바이어스 b 의미

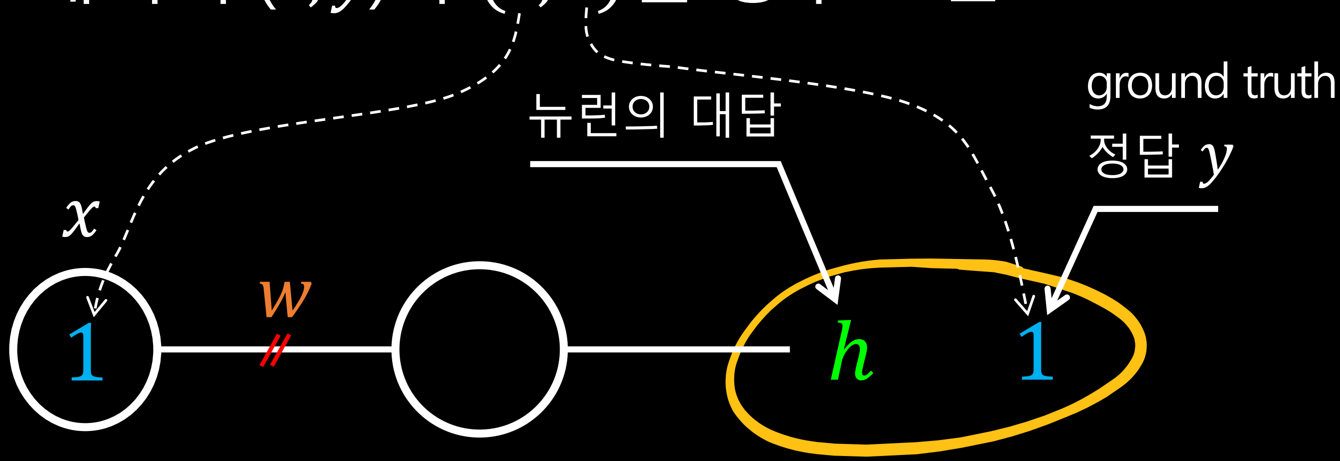
$$h = wx + b$$

바이어스로
다양한 회귀를
표현할 수 있음.



데이터와 학습

- 데이터 (x, y)가 $(1, 1)$일 경우 w는?



- 따라서 학습이란?

지도학습

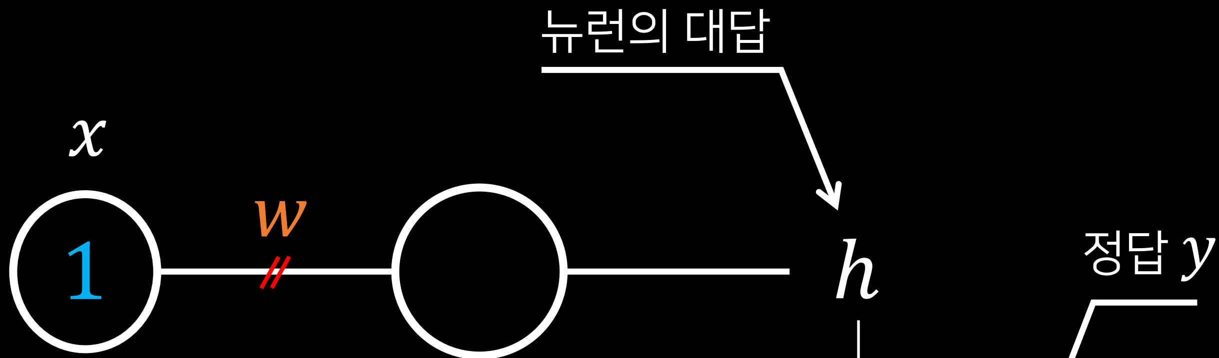
Supervised Learning

w를 어떻게 조정할 것인가?

- 뉴런이 답을 맞히지 못하면 야단침.
- 그러면 다음에 오류가 줄어드는 방향으로 가중치 w가 자동으로 조정됨.
- 뉴런의 대답과 정답의 차이(오류, 에러 E, 비용, loss)가 0이 되거나 충분히 가까울 때까지 w를 조정함.

오류(차이) 함수

뉴런의 대답이 정답과 얼마나
차이가 있나?



$$E = |w \cdot 1 - 1|$$

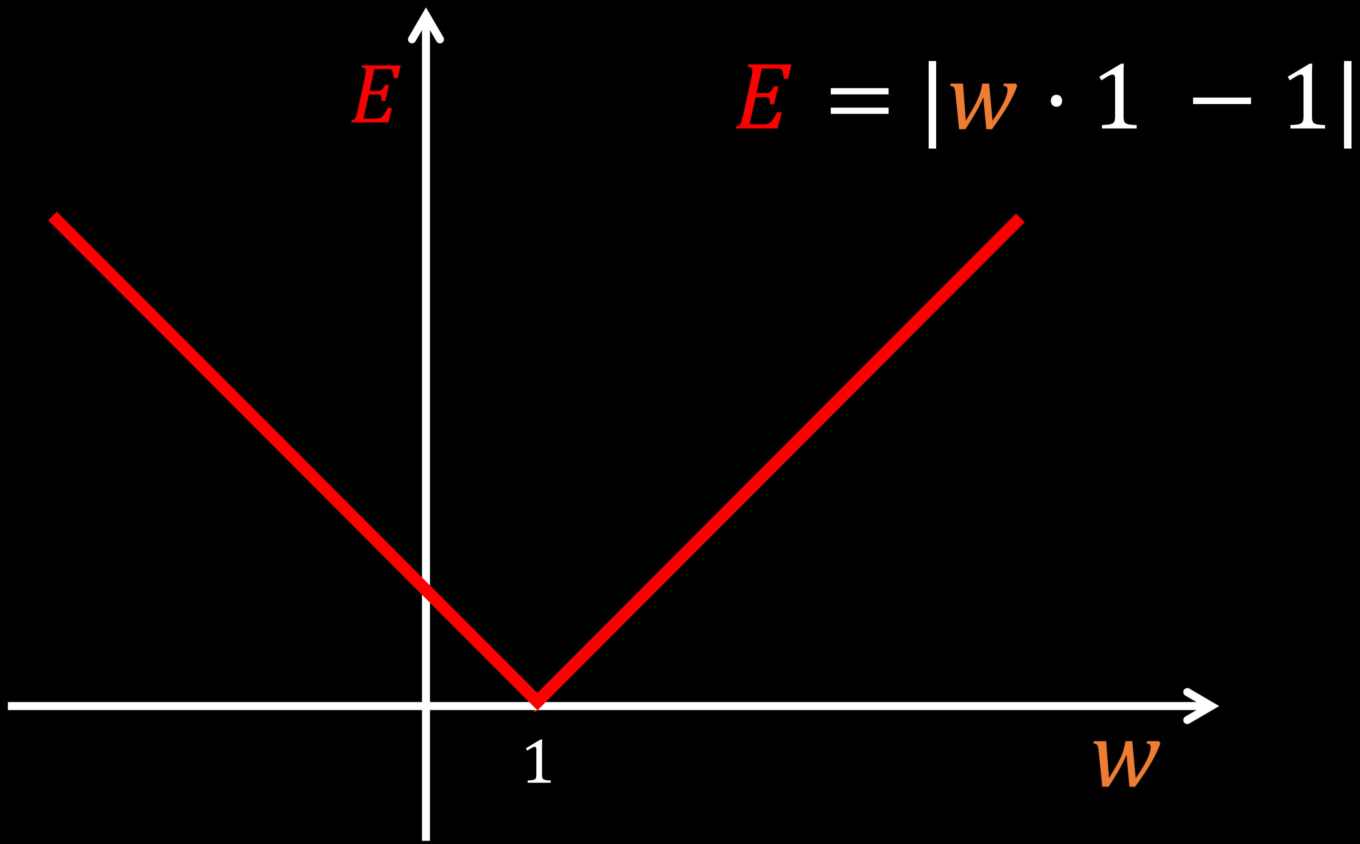
왜 절대값인가?

www.desmos.com

1. 점 (1, 1) 표시
2. $h = w \cdot x$
3. $E = w \cdot 1 - 1$
4. $E = |w \cdot 1 - 1|$

desmos

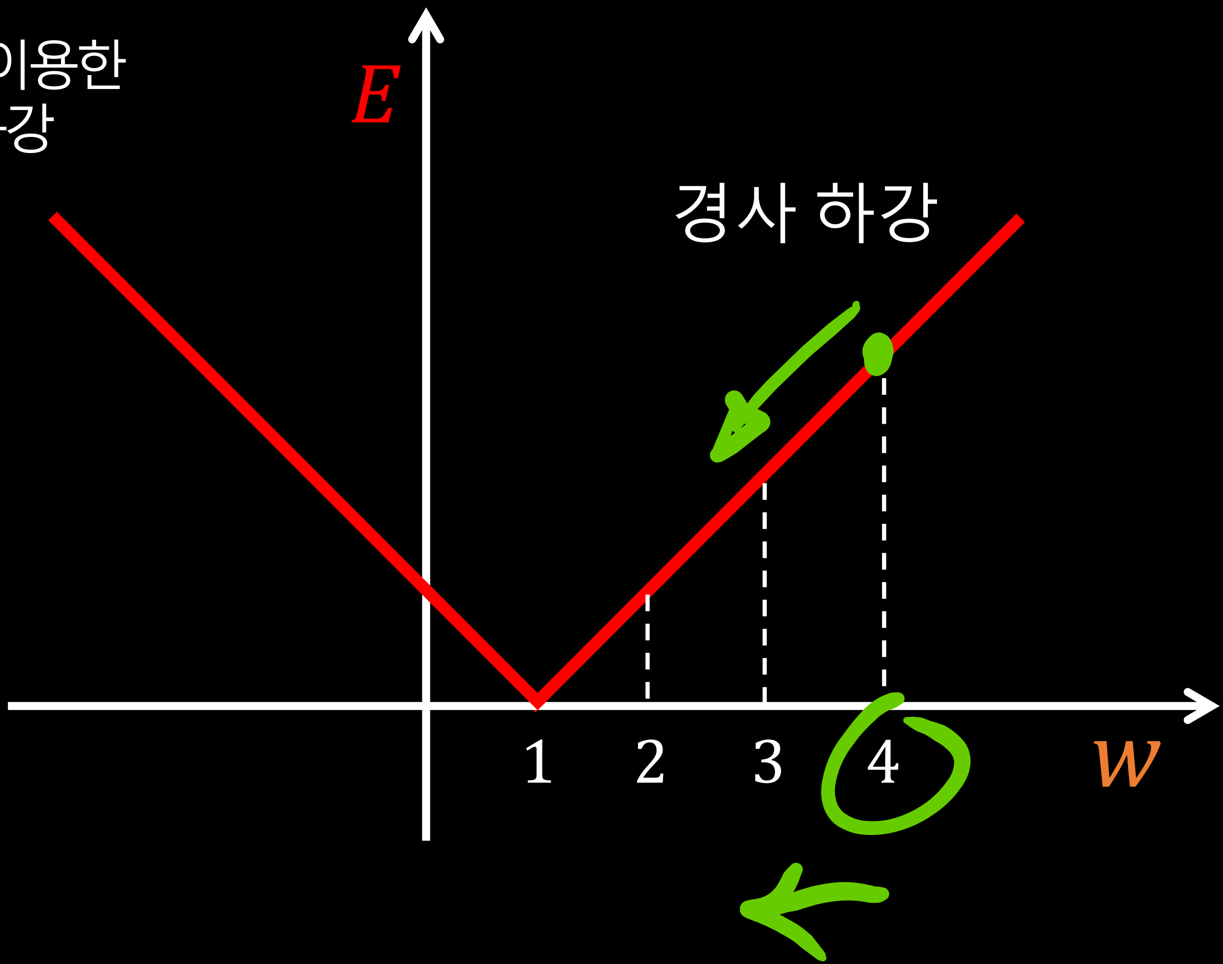
w에 대한 오류 함수



오류가 줄어들도록

w 업데이트 하는 법

기울기를 이용한
경사하강



오류가 줄어들도록

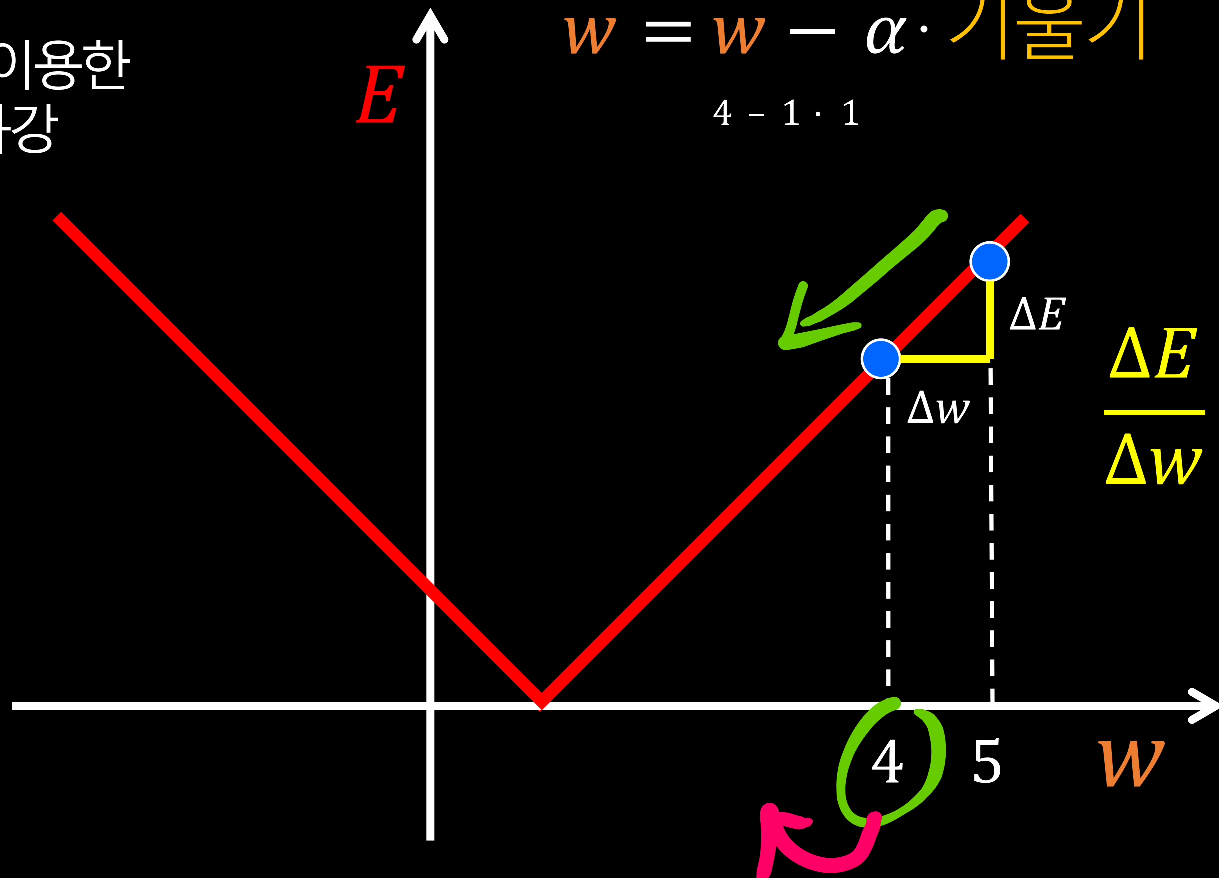
w 업데이트 하는 법

기울기를 이용한
경사하강

반영 비율 (가령, 1)

$$w = w - \alpha \cdot \text{기울기}$$

$4 - 1 \cdot 1$



$$\frac{\Delta E}{\Delta w} = \frac{+1}{+1}$$

오류가 줄어들도록

w 업데이트 하는 법

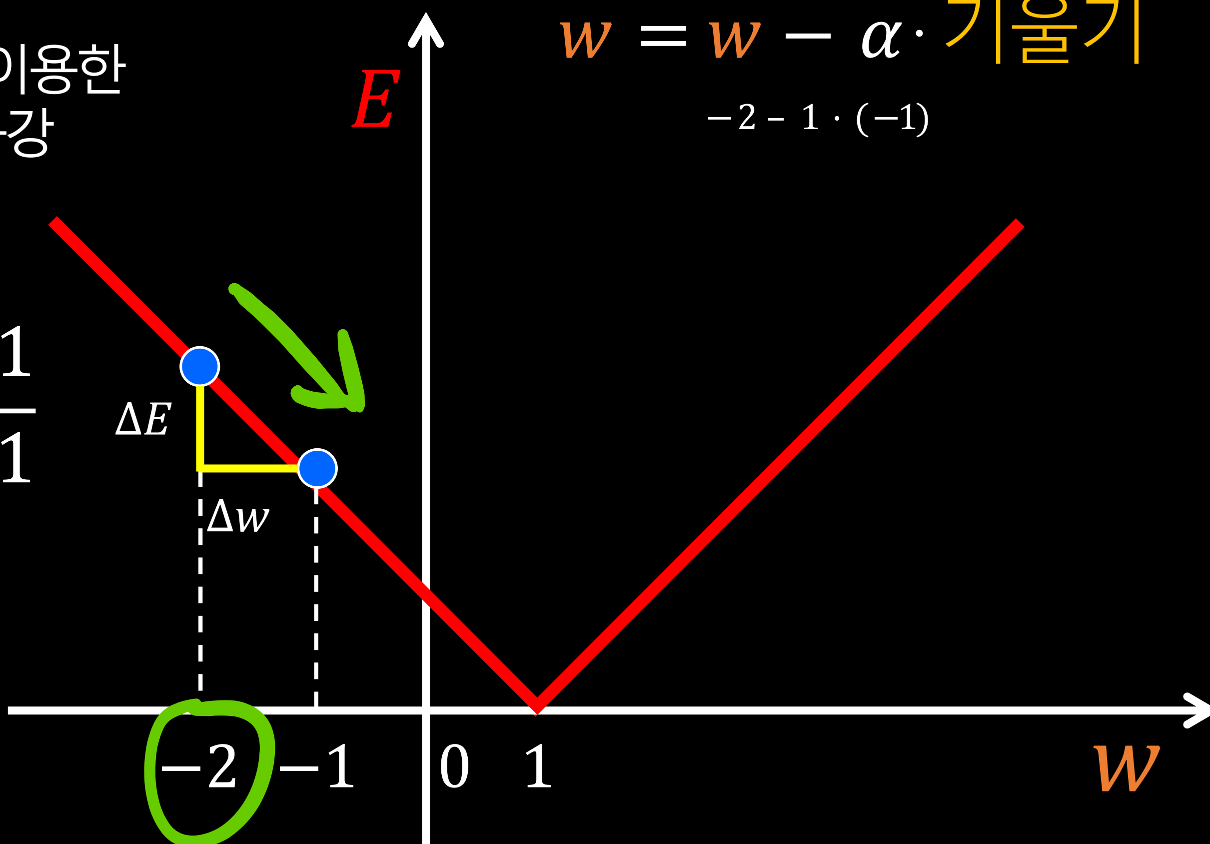
기울기를 이용한
경사하강

반영 비율 (가령, 1)

$$w = w - \alpha \cdot \text{기울기}$$

$$-2 - 1 \cdot (-1)$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta w} = \frac{-1}{+1}$$



$$w = 4, \alpha = 1, \text{기울기} = 1$$

$4 - 1 \cdot 1 \longrightarrow 3$ error E = 2

$3 - 1 \cdot 1 \longrightarrow 2$ error E = 1

$2 - 1 \cdot 1 \longrightarrow 1$ error E = 0

$$w = -2, \alpha = 1, \text{기울기} = -1$$

$-2 - 1 \cdot (-1) \longrightarrow -1$ error E = 2

$-1 - 1 \cdot (-1) \longrightarrow 0$ error E = 1

$0 - 1 \cdot (-1) \longrightarrow 1$ error E = 0

$$w = -2, \alpha = 2, \text{기울기} = -1$$

$-2 - 2 \cdot (-1) \longrightarrow 0$ error E = 1

$0 - 2 \cdot (-1) \longrightarrow 2$ error E = 1

$2 - 2 \cdot (1) \longrightarrow 0$ error E = 1

$0 - 2 \cdot (-1) \longrightarrow 2$ error E = 1

절대값 오류, 어떤 문제?

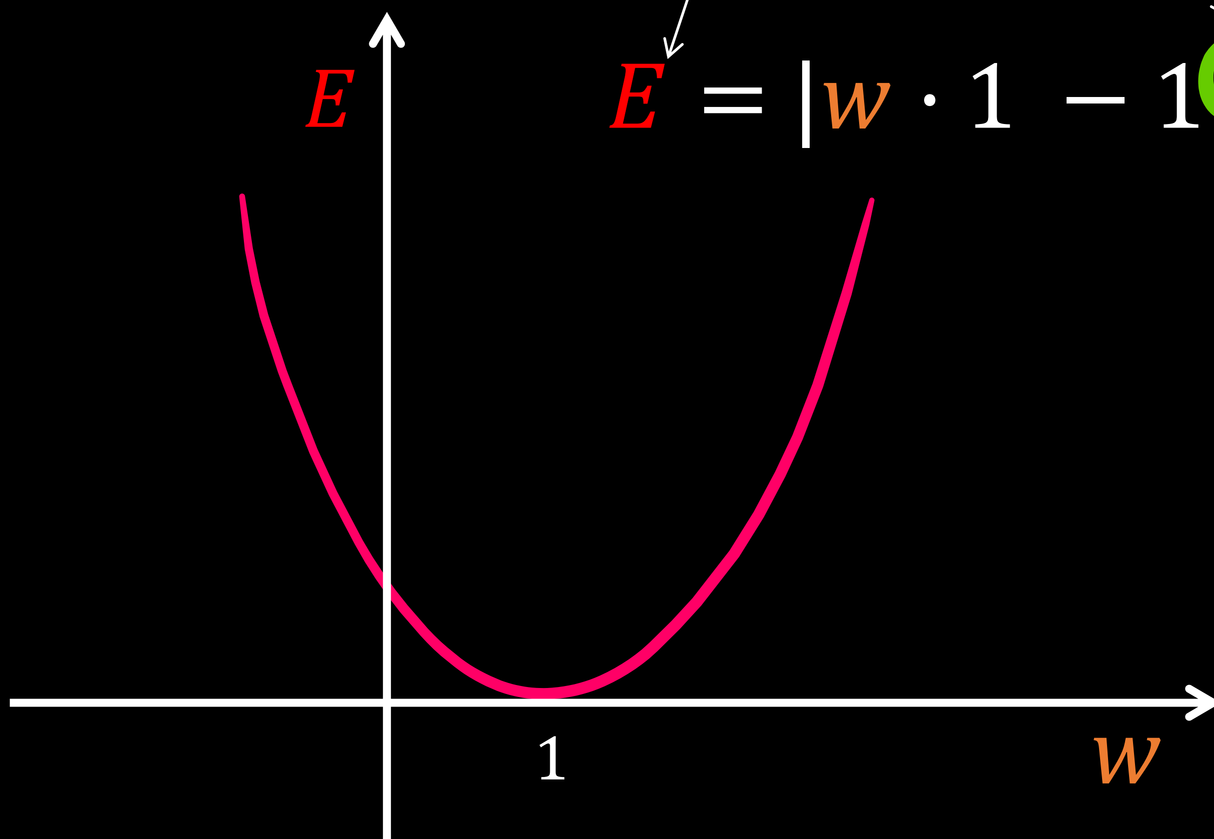
- 현재 w 값에 관계 없이 항상 같은 기울기
- 따라서 항상 같은 경사하강 속도
- 오류가 0, 혹은 거의 0이 되는 w 값으로 수렴하기 어려울 수도 있음.
- ~~기울기 값만 보고 w가 어디에 있는지 알 수 없음.~~
- ~~w가 1일 때는 기울기 구할 수 없음.~~

제곱 오류 함수

square(제곱)

error

$$E = |w \cdot 1 - 1|^2$$



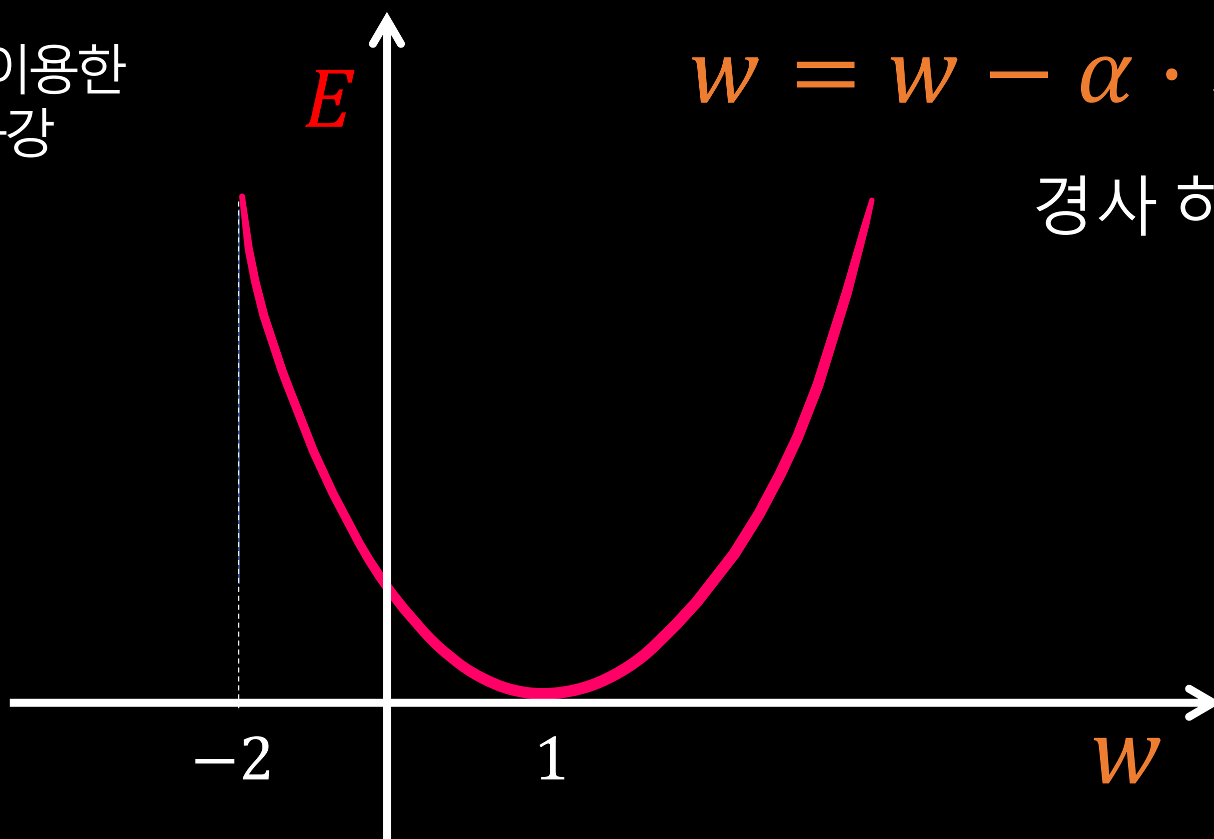
w 업데이트 하는 법

기울기를 이용한
경사하강

$$\frac{\Delta E}{\Delta w}$$

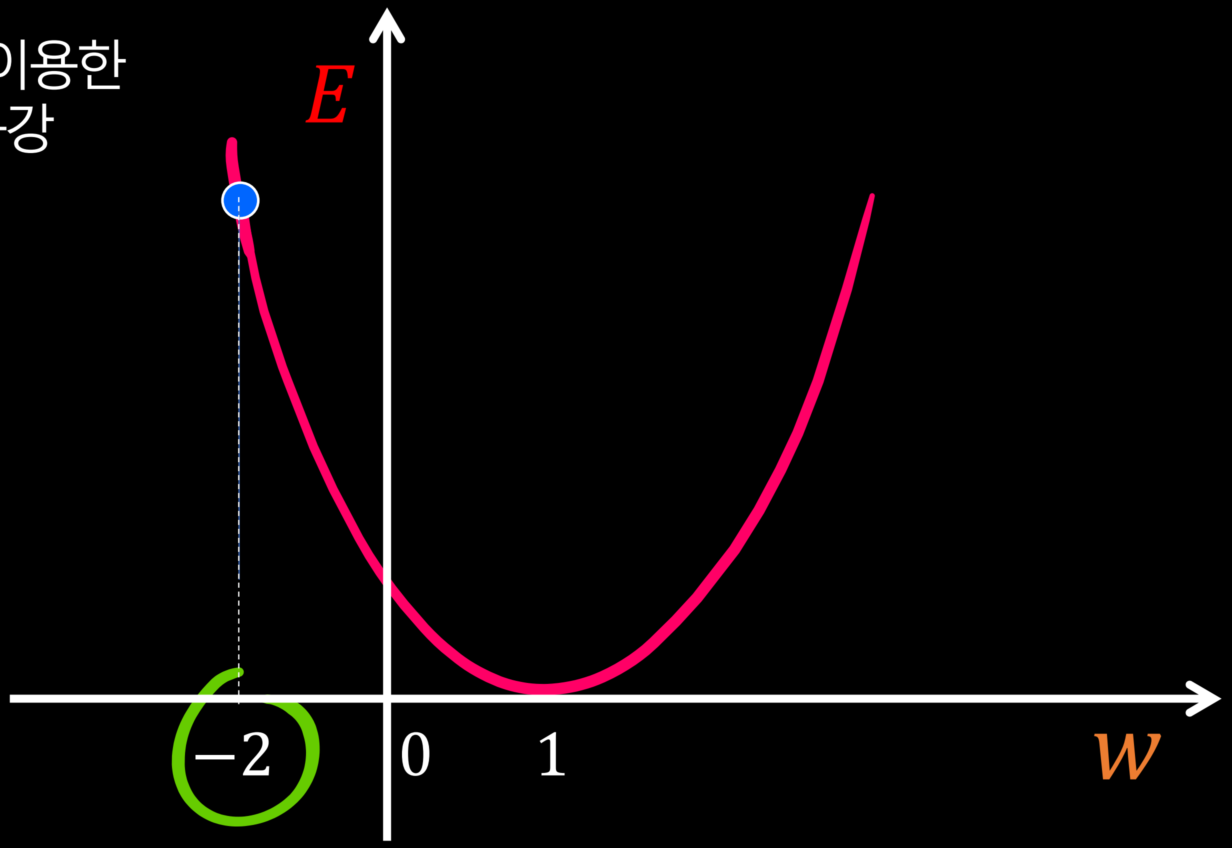
$w = w - \alpha \cdot$ 기울기

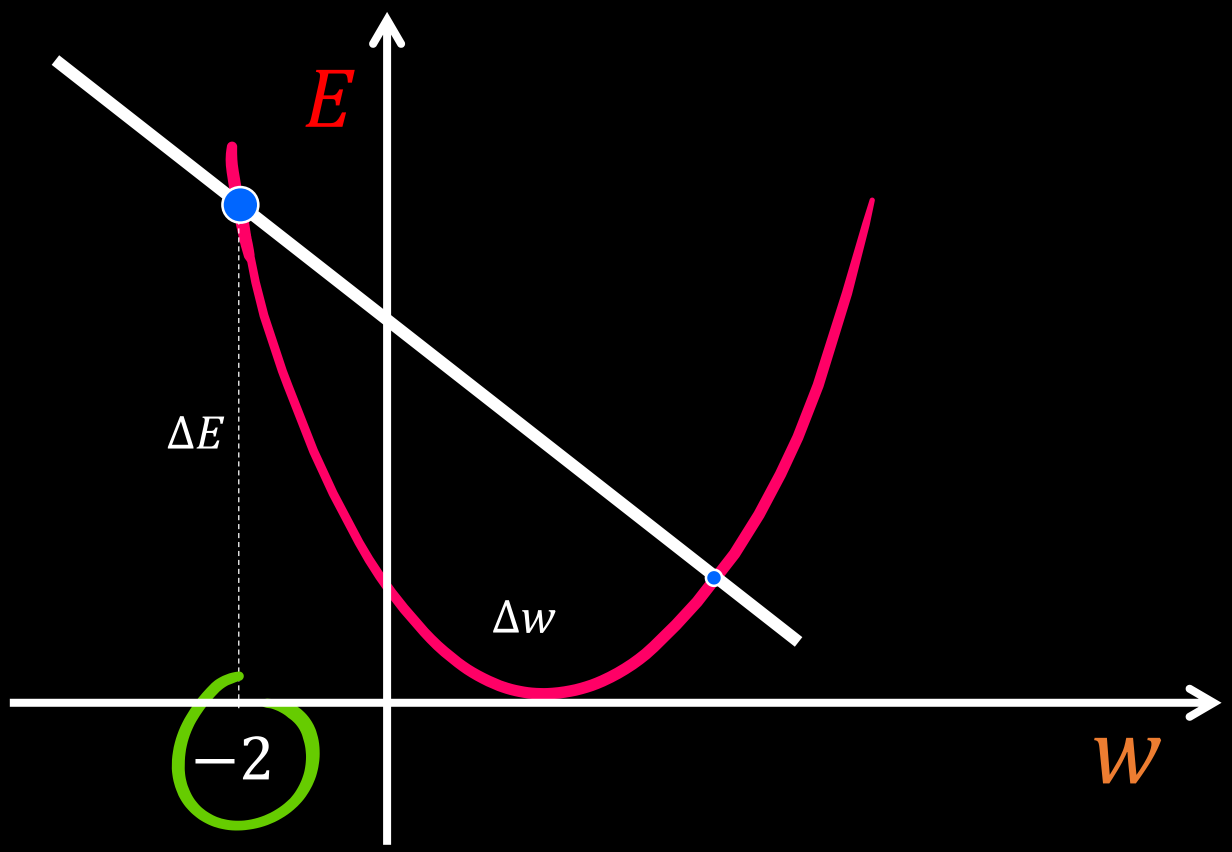
경사 하강

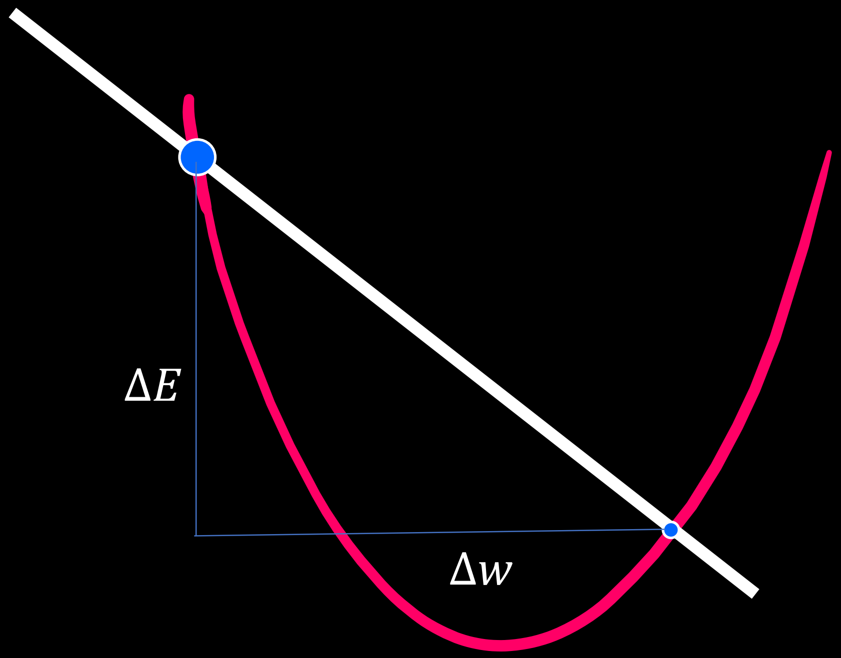


어떻게 기울기를 구할까

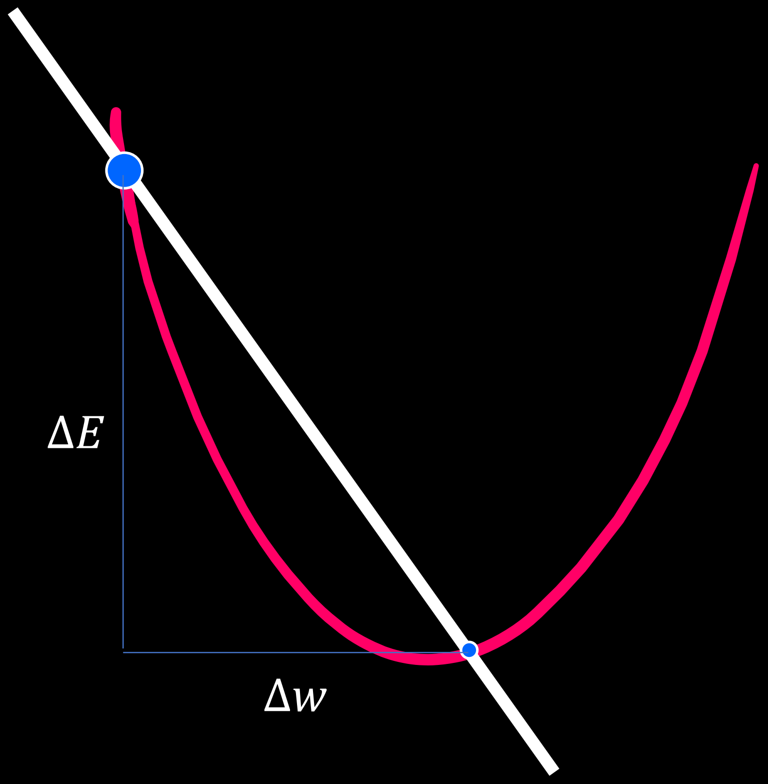
기울기를 이용한
경사하강

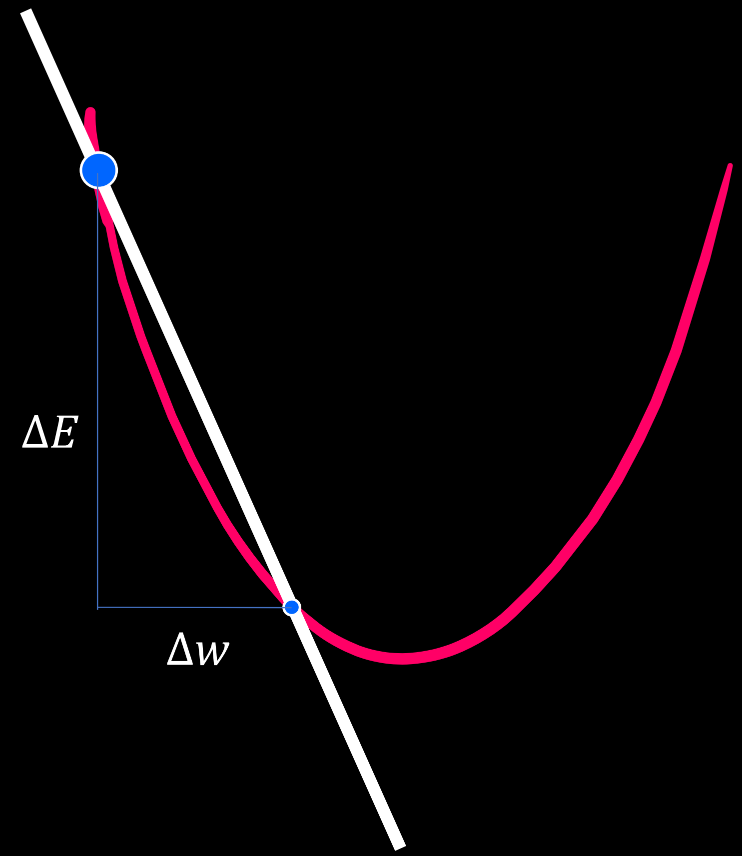


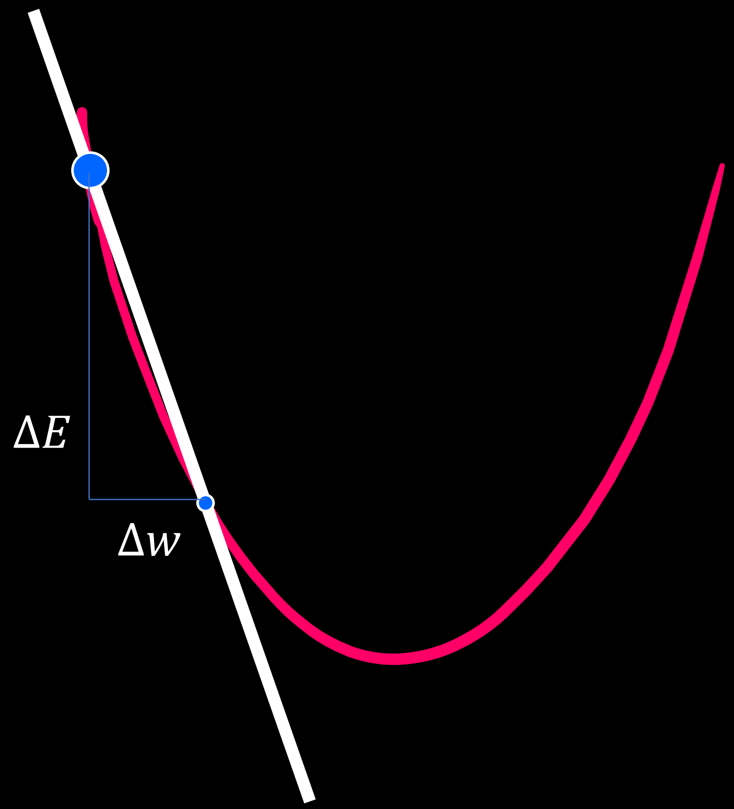

E
ΔE
Δw
-2
w

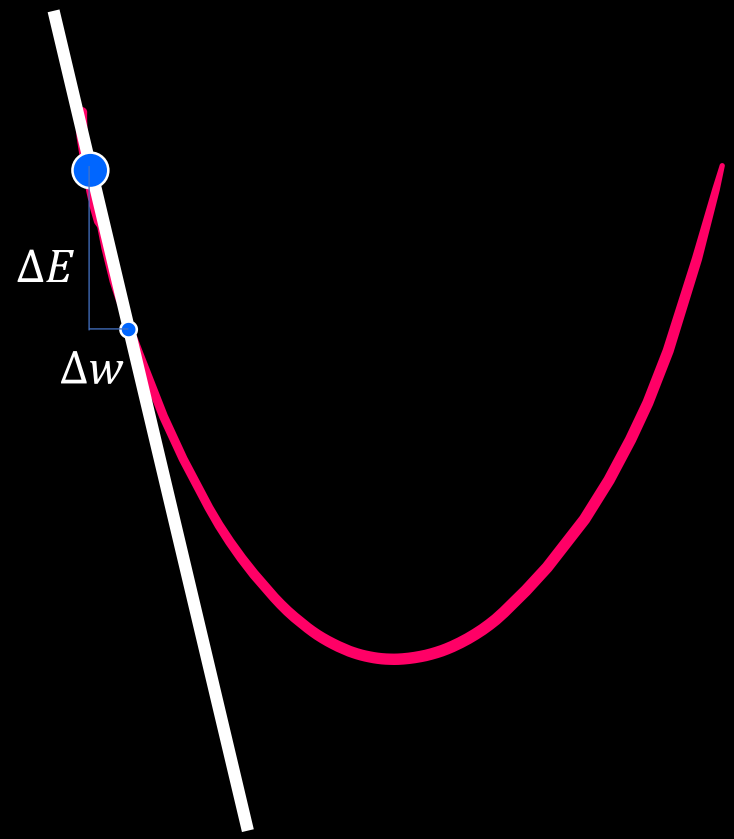


ΔE
Δw

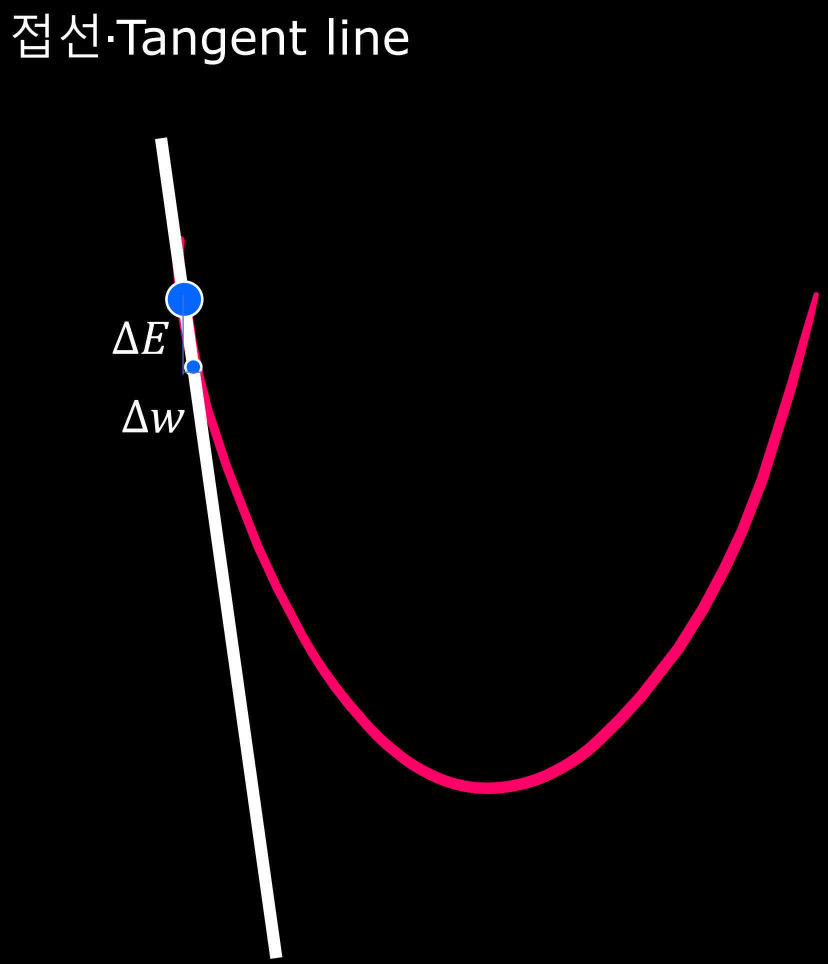

ΔE
Δw

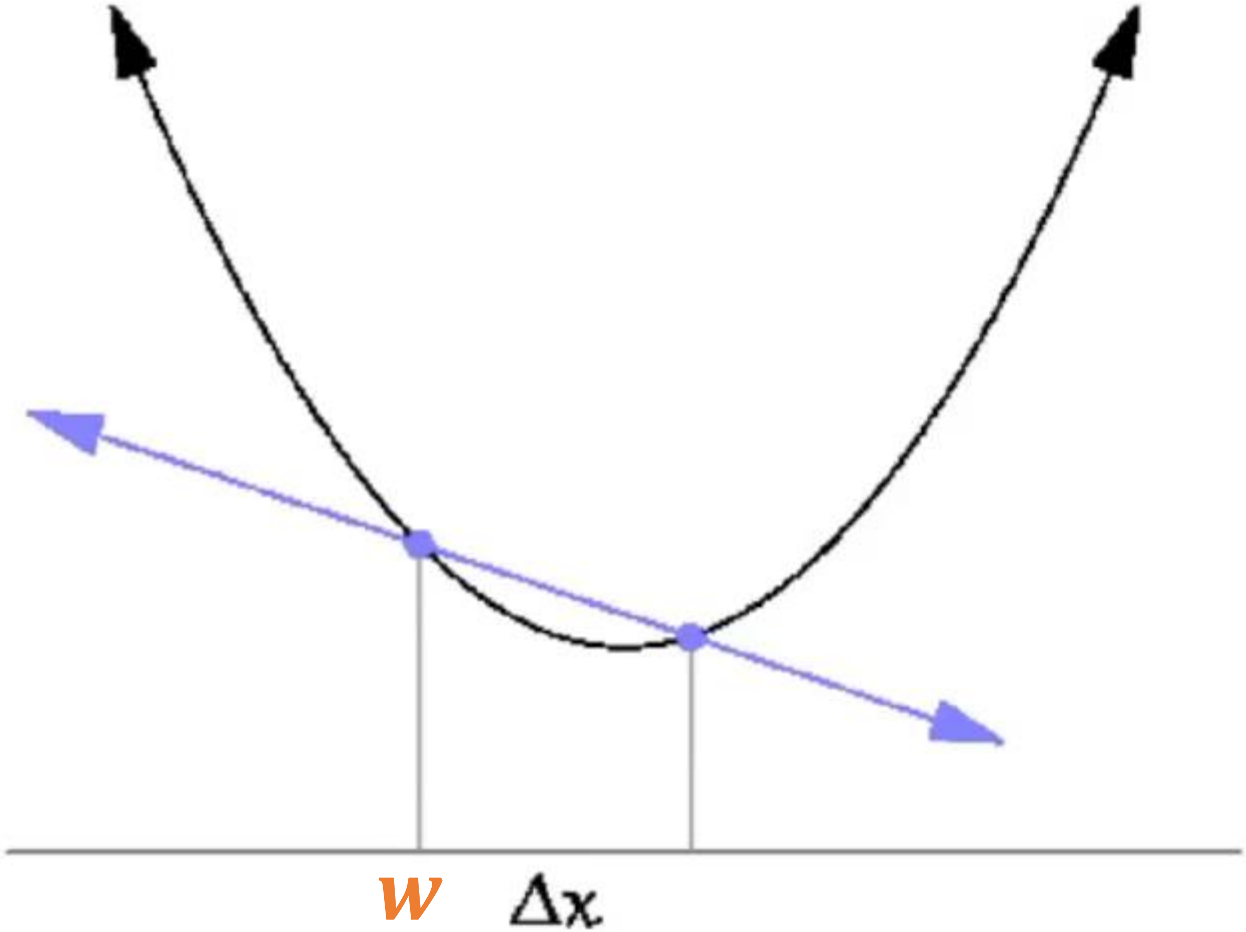

ΔE
Δw


ΔE
Δw



ΔE
Δw


접선·Tangent line
ΔE
Δw



$$\Delta x = \Delta w$$

$$\lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta w}$$

$$= \frac{\partial E}{\partial w}$$

아주 잘게 자른 선

Numerical differentiation

① 길이를 0에 가깝게 잘게 자름 (미분)

② 선 끝을 연결 → 접선

$$\lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta w}$$

$$= \frac{\partial E}{\partial w}$$

= 미분

$$w = w - \alpha \cdot \text{기울기}$$

$$\frac{\partial E}{\partial w}$$

제곱 에러 장점

- 오류 최저점, 즉, w 가 1인 지점에서 멀리 떨어진 곳에서는 빨리 경사하강 하고,
- 오류 최저점에 가까운 곳에서는 천천히 하강함.
- 기울기 값의 크기에 따라 w 가 어디에 있는지 알 수 있음.
- 모든 곳에서 기울기 계산 가능(미분가능)

절대값 오류에서는?

- 현재 w 값에 관계 없이 항상 같은 기울기
- 따라서 항상 같은 경사하강 속도
- 오류가 0, 혹은 거의 0이 되는 w 값으로 수렴하기 어려울 수도 있음.
- **기울기 값만 보고 w가 최저점에서 얼마나 떨어져 있는지 알 수 없음.**
- **w 가 1일 때는 기울기 구할 수 없음.**

여러 데이터

만일, 데이터가 3개라면

x_i	y_i
1	1
2	2
3	3

$$E = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(wx_i - y_i)^2$$

각각의 오류를 모두
더해서 평균

desmos

점 (2, 2), (3, 3) 추가

$$E = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}(wx_i - y_i)^2$$

(w, E) 그리기

여러 데이터

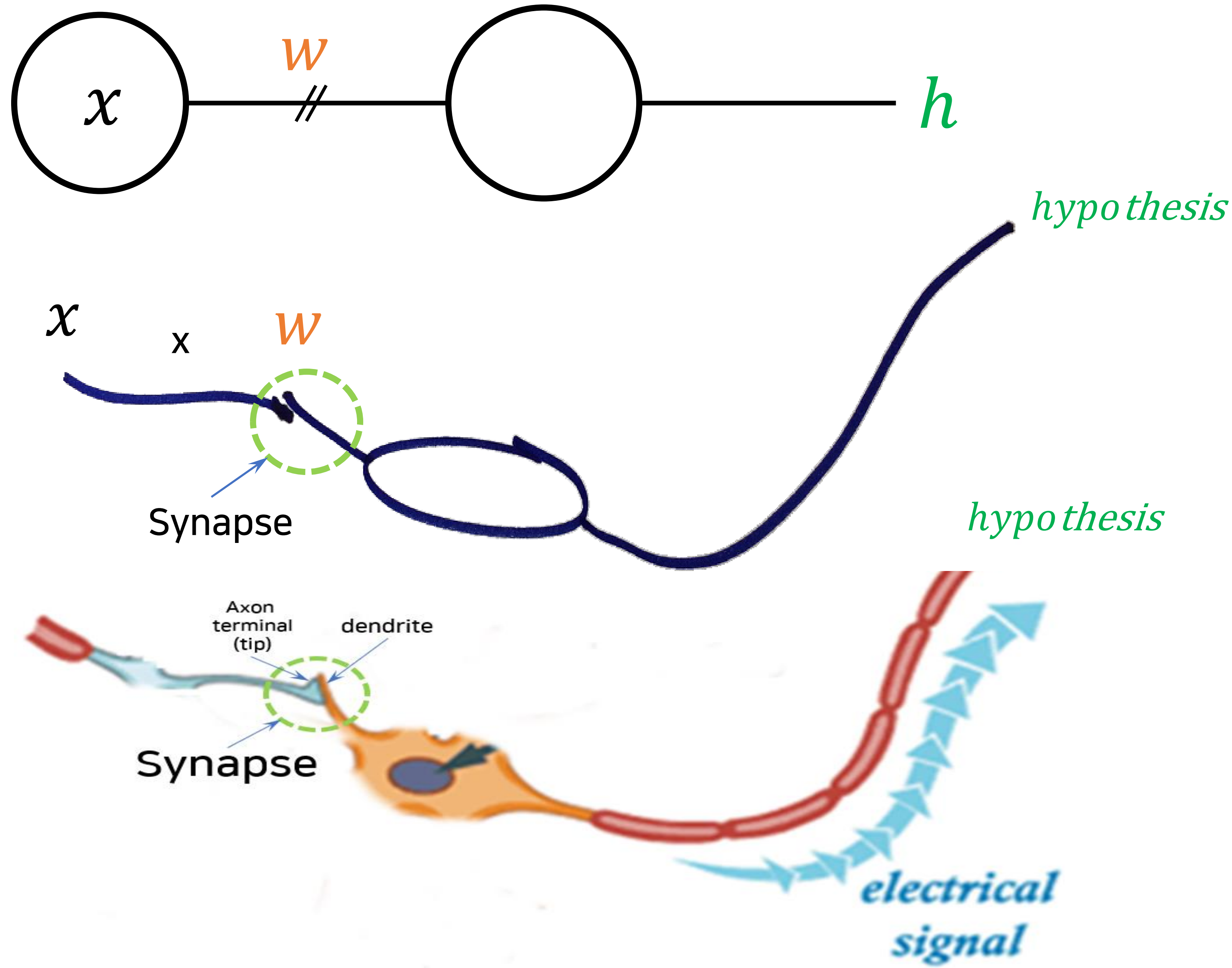
데이터가 m개일 경우

Mean Square Error

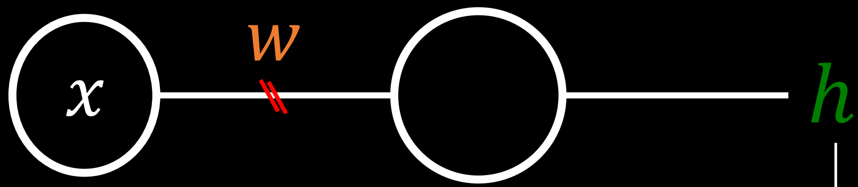
뉴런이 대답(예측)한 값 (가설)

$$E = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(wx_i - y_i)^2$$

정답



x
w
h
hypothesis
x
x
w
Synapse
hypothesis
Axon terminal (tip)
dendrite
Synapse
electrical signal

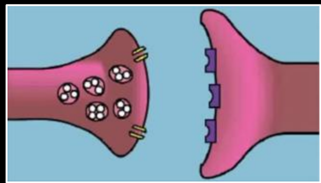


$$E = (h - y)^2$$

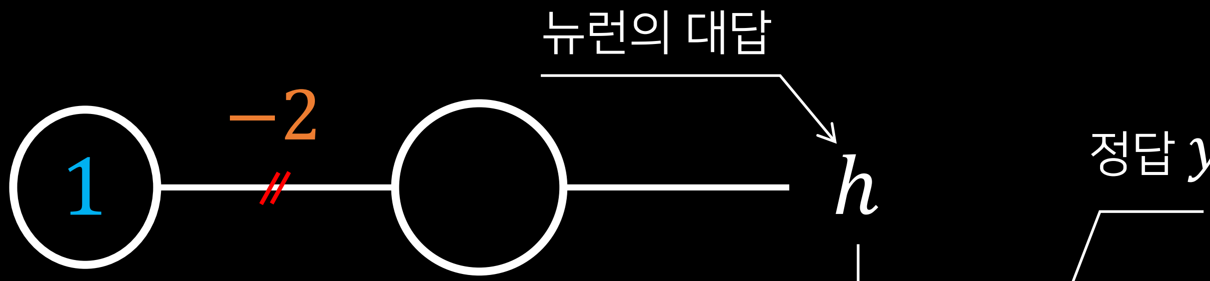
$$E = (w \cdot x - y)^2$$

x	y
1	1

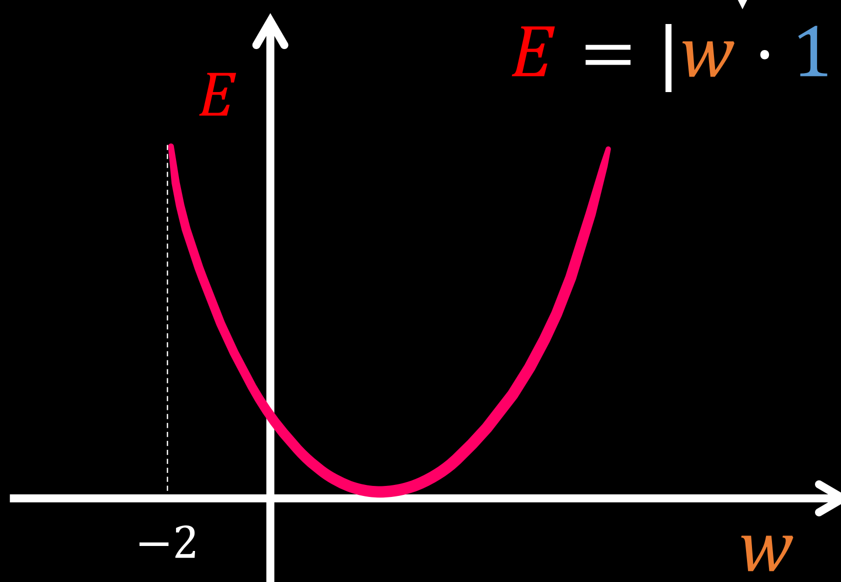
$$E = (w \cdot 1 - 1)^2$$



$$\frac{\Delta noise}{\Delta dial}$$



$$E = |w \cdot 1 - 1|^2$$



기울기와 미치는 영향

$$\frac{\Delta E}{\Delta w} \quad \frac{8}{1}$$

- 기울기가 크다. w를 조금만 크게 해도 E가 많이 늘어난다. → w가 E에 미치는 영향력이 크다.
- 기울기가 작다. w를 바꿔도 E는 별로 변하지 않는다. → 미치는 영향력이 작다.
- 결국, 기울기 = 미치는 영향력 $\frac{1}{10}$

(Q) 미치는 영향 구하기

$$E = (wx - y)^2$$

데이터 (x, y)가 $(1, 1)$일 때
w = 3인 지점에서 w변화가 오류 E에 미치는 영향(기울기)를 구하라.

Compute the influence of w change on E when w is equal to 3.

(A1) 값을 대입

$$E = (w \cdot 1 - 1)^2$$

w: 3 -> E: 4
w: 3.00001 -> E: 4.00004
w가 0.00001 증가 (변화량 Δw=0.00001)
E는 0.00004 증가 (변화량 ΔE=0.00004)

$$\frac{\Delta E}{\Delta w} = \frac{0.00004}{0.00001} = 4$$

따라서 기울기 = 미치는 영향 = 4

(A2) 미분

$$E = (w \cdot 1 - 1)^2$$

$$\lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta w} = \frac{\partial E}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}(w \cdot 1 - 1)^2$$

$$= 2(w \cdot 1 - 1)$$

따라서 $w = 3$이면

기울기는 $2(3 - 1) = 4$

학습(Learning)은

- $w = w - a \cdot$ 기울기(미치는 영향)
- 오류 E가 감소하도록 w 업데이트
- 파라미터 튜닝

이번 학습에서는

- 회귀가 무슨 의미인지 알 수 있다.
- 뉴런의 대답과 정답 간의 차이를 그래프로 그릴 수 있다.
- 오류 그래프가 갖는 문제점을 파악할 수 있다.
- 기울기를 구하고 그 의미를 이해할 수 있다.