

# AI and Deep Learning

4. Linear Regression & Influence on error

Yung-Cheol BYUN, Jeju National Univ.

여행, 그리고 회귀

# 회귀(Regression)

인류는 고향을 떠나도 나이가 들면  
언젠가는 본래의 고향으로  
회귀하고(돌아가고) 싶어한다.  
(인류학)



# 자연의 법칙, 섭리, 일종의 규칙

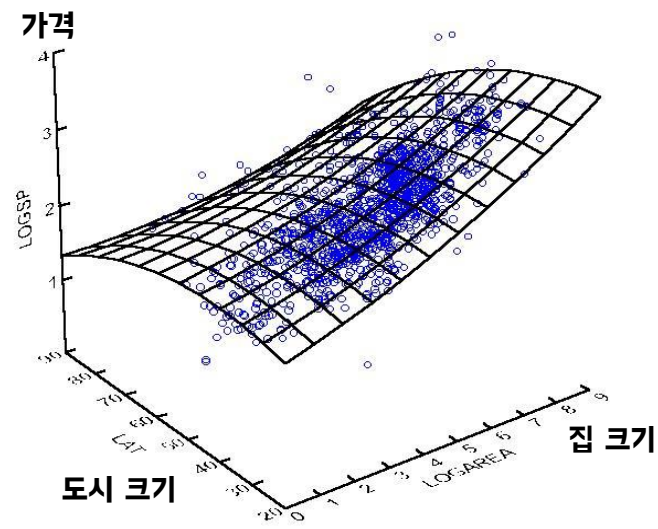
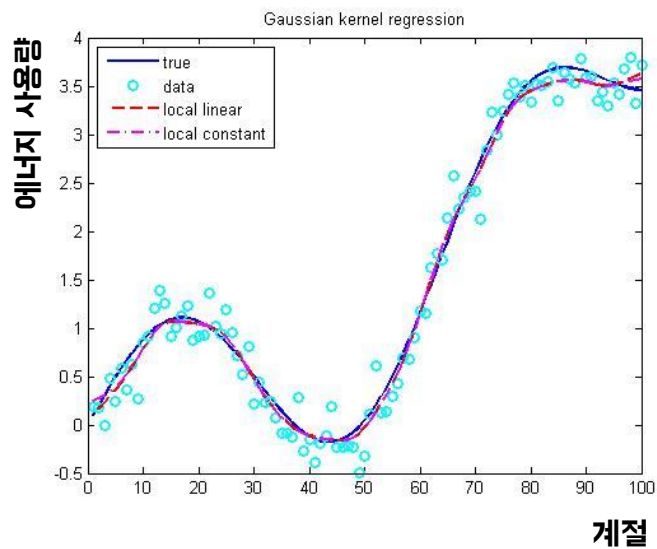
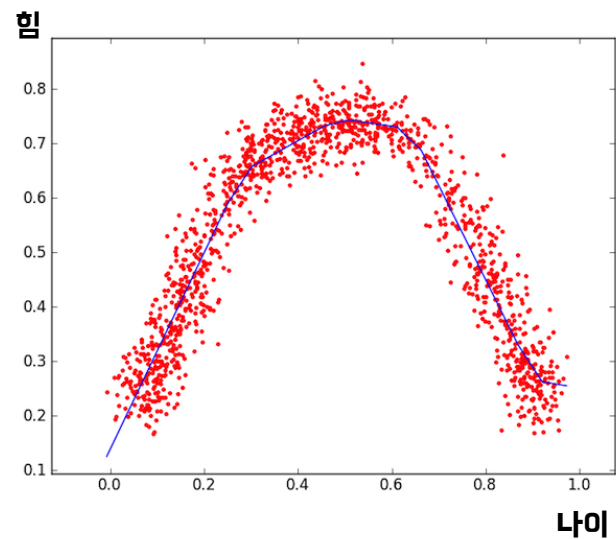
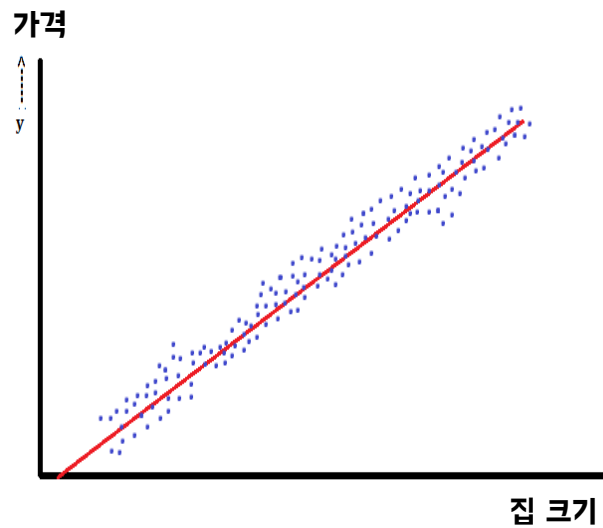
- 연어는 태어난 곳으로 돌아온다.
- 집은 클수록 비싸다.
- 젊을 때는 강하지만 어리거나 늙으면 약하다.
- 남자가 여자보다는 큰 편이다.
- 성적이 좋을 수록 취업이 잘된다.

반드시 그런 것은 아니지만 일반적으로 그런 경향이 있다.

# 이를 잘 표현하는 말, 용어

## 회귀(Regression)

‘집이 클수록 가격이 비싸다.’ (회귀)  
집의 크기와 가격 간의 관계  
회귀는 그래프로 표현하면 이해하기 쉬움.



# 회귀(Regression)

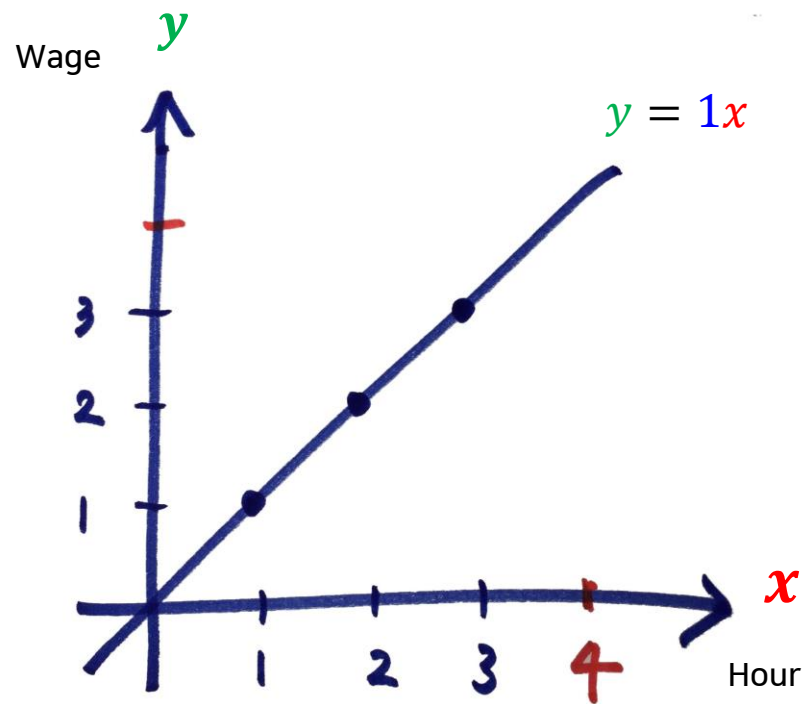
하나 이상의 독립변수( $X$ )와  
하나의 종속변수( $Y$ ) 사이의 관계  
(statistical measure to determine  
the relationship)



# Linear Regression

The relationship forms **linear** shape.  
ex) wage/hour, price/size of house

가격



[www.desmos.com](https://www.desmos.com)

# Goal

- 데이터는 Linear Regression 경향
- 모든 점을 지나는 직선 찾기
- 혹은 가장 근사하게 지나는 직선 찾기

# 가설(Hypothesis)

$$h = wx$$

$$h = wx + b$$

- An assumption representing the data
- At first, the hypothesis with a random  $w$  (*and*  $b$ ) might not fit the data given,
- however, after updating  $w$  (*and*  $b$ ), the line becomes our solution.

# 가설과 $w$ 값

$$h = 2x$$

$(x, y) = (1, 1)$ 일 때

가설값( $h$ )과 정답( $y$ )의 차이는?

$$h = \frac{1}{2}x$$

$$h = 1x$$

# 어떻게 $w$ 를 찾을 것인가?

- 모든 점을 지날 경우 차이 값(오류, 에러, 비용, loss)은 0
- 따라서 차이 값이 0이 되도록  $w$ 를 조금씩 계속해서 조정

오류( $e$ ) = |뉴런이 예상한 값 - 정답|

$$e = |wx - y|$$

데이터가 1개( $x=1, y=1$ )라면?

$$e = |w \cdot 1 - 1|$$

자, 이제  $e$  가 0이 되는  $w$  를 찾자.



x	y
1	1
2	2
3	3

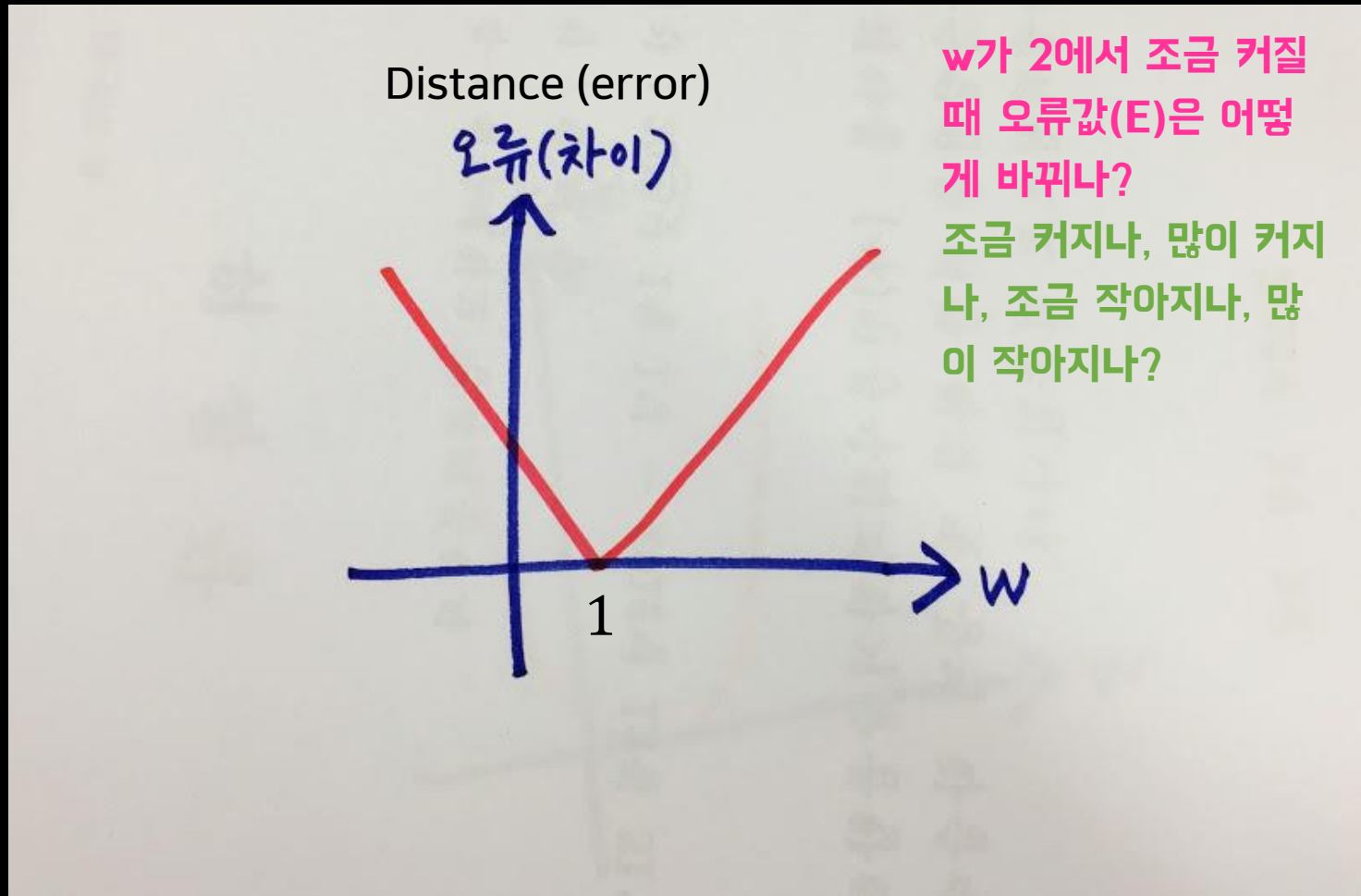
만일, 데이터가 3개라면

$$E = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 |w x_i - y_i|$$

모두 더해서 평균

# 오류 그래프

$$E = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 |w x_i - y_i|$$

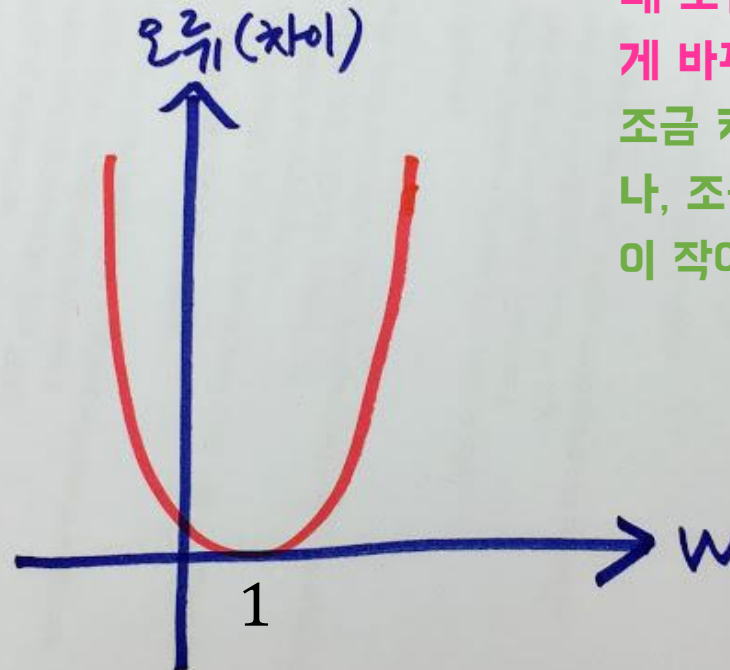


# 오류 그래프

$$E = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (w x_i - y_i)^2$$

MSE

Distance (error)



w가 2에서 조금 커질  
때 오류값(E)은 어떻  
게 바뀌나?

조금 커지나, 많이 커지  
나, 조금 작아지나, 많  
이 작아지나?

# 데이터가 m개일 경우

Mean  
Square  
Error

Prediction by computer

Correct answer

$$E = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\mathbf{w}x_i - y_i)^2$$

Get  $\mathbf{w}$  (and  $\mathbf{b}$ ) to minimize the error (cost, loss) function.

In this example,  $\mathbf{w}=1$

then our machine predicts correctly.

# 오류 그래프 해석

- $w$  가 변하면 오류  $E$ 도 변한다.
- 오류를 줄이고 싶으면  $w$ 를 적절히 바꾸면 된다.
- 현재  $w$  값에 따라  $w$ 가 조금만 변해도 오류가 많이 변하는 곳도 있고,
- 어떤 곳에서는  $w$ 가 변해도 오류가 아주 조금만 변하기도 한다.

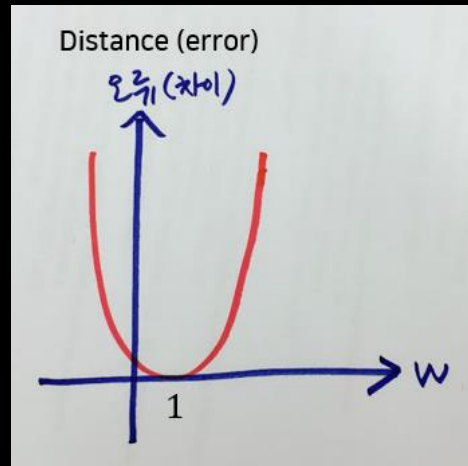
## (Q) $w$ 예상하기

- 현재  $w$  가 어떤 값일 때  $w$  를 조금 증가시켰더니 오류  $E$ 가 아주 급격하게 늘어났다. 현재  $w$  값은?
- 현재  $w$ 에서  $w$ 를 조금 증가시켰더니 오류는 반대로 급격하게 감소하였다. 어디?
- $w$  를 변경해 보았지만 오류는 거의 변하지 않았다. 어디?

현재  $w$ 가 어떤 값일 때

# $w$ 가 오류 $E$ 에 미치는 영향

예를 들어, 현재  $w$ 가 4인 곳에서는  $w$ 가 조금만 늘려도  
오류( $E$ )는 아주 크게 늘어난다.



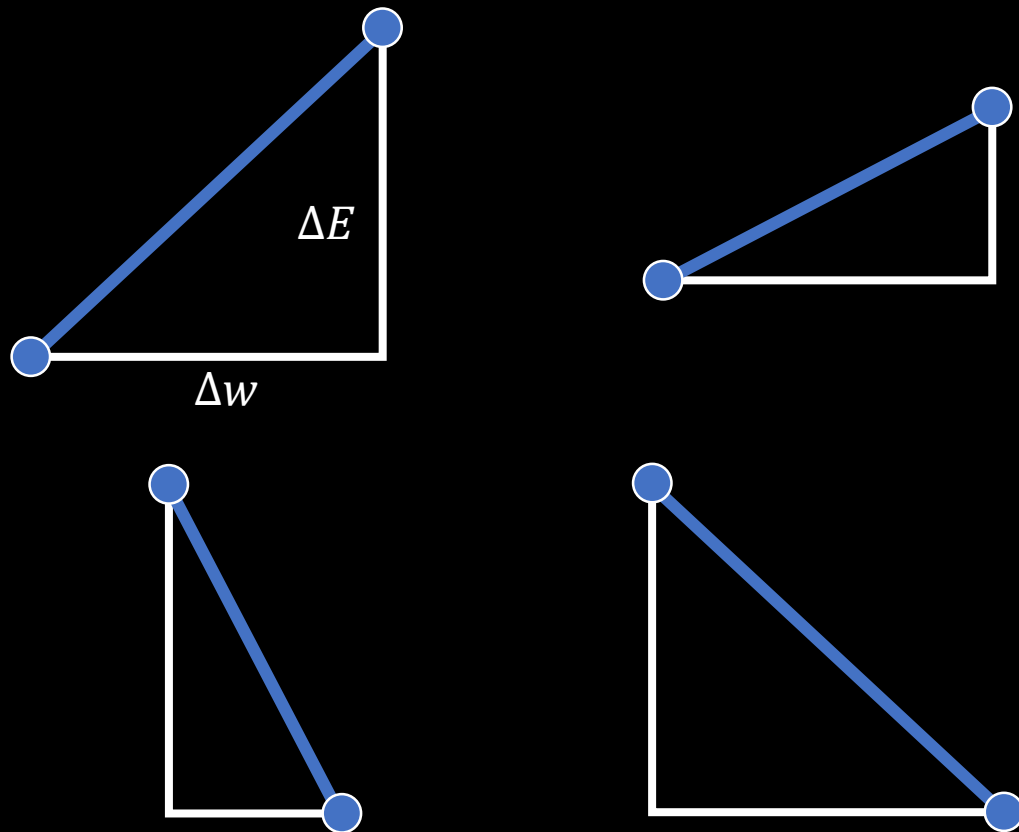
현재  $w$ 가 어떤 값일 때

$w$ 가 오류  $E$ 에 미치는 영향,  
기울기로 표현된다.

예)  $w$ 가 1만큼 늘어날 때 오류( $E$ )는 2만큼 늘어날 경우 기울기는 1

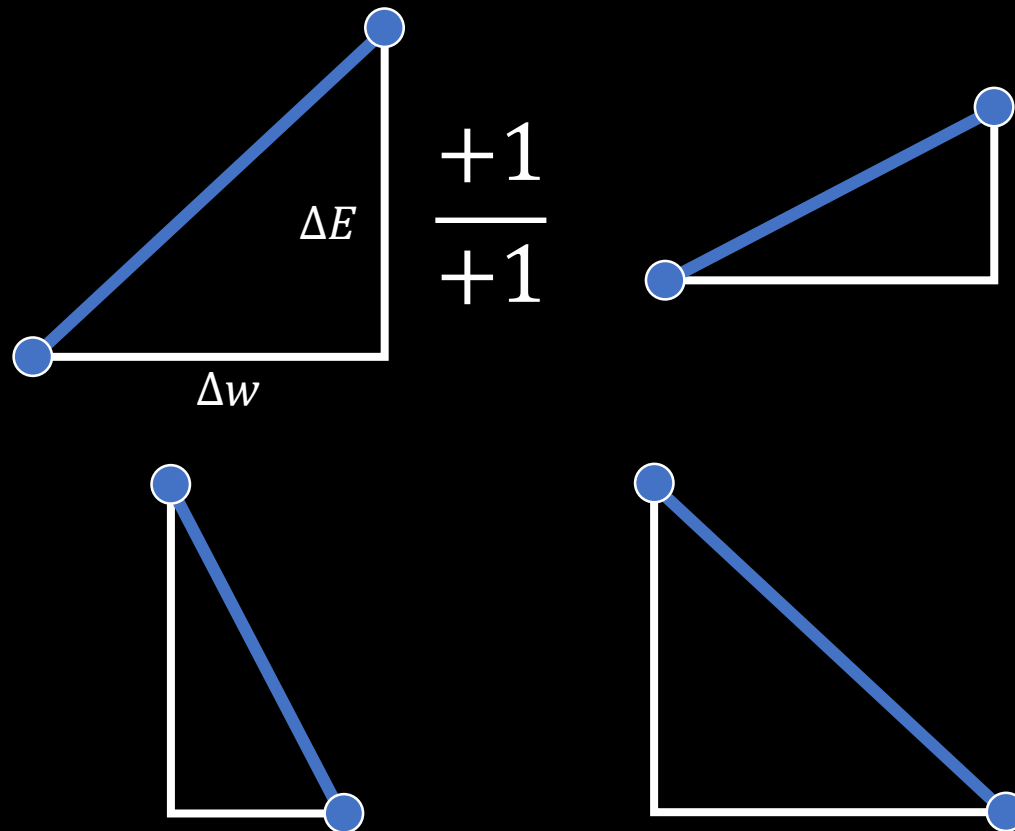


# 기울기 의미( $w$ 와 $E$ 관계)



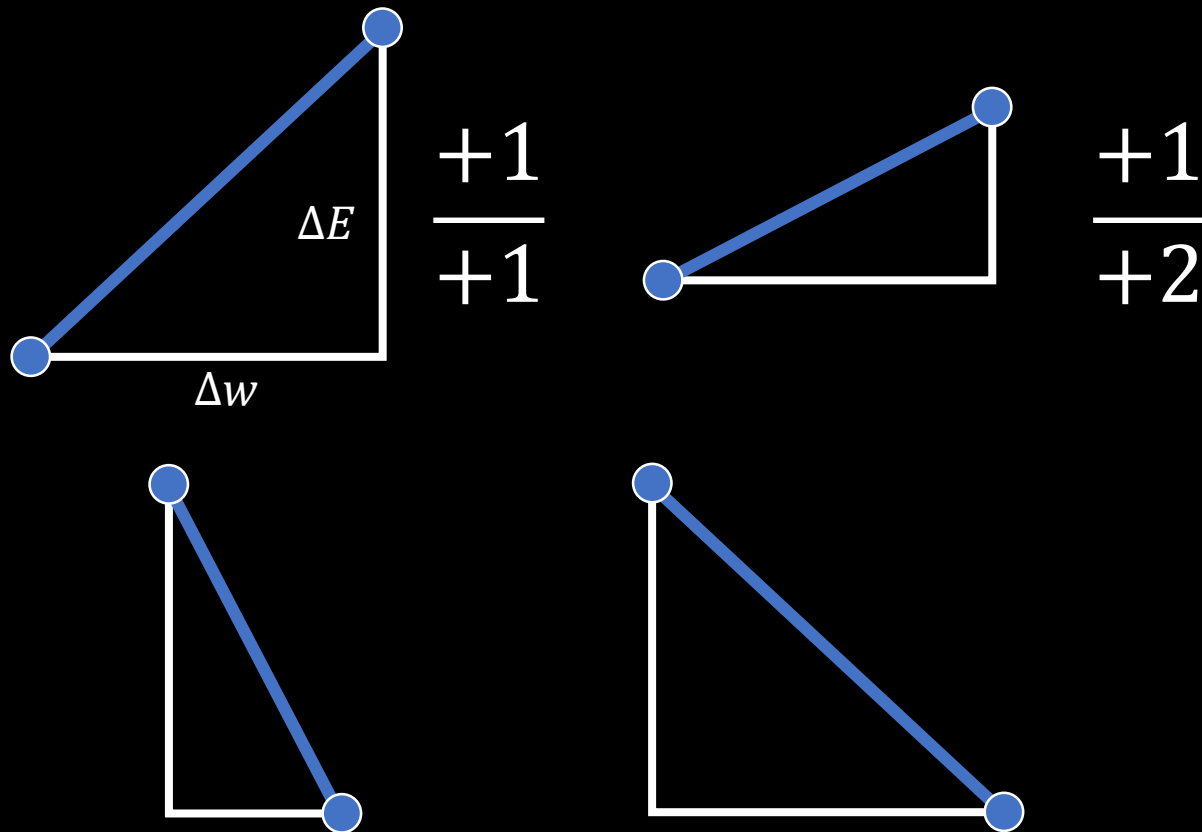
오류 그래프에서 두 점을 연결했을 때의 기울기

# 기울기 의미( $w$ 와 $E$ 관계)



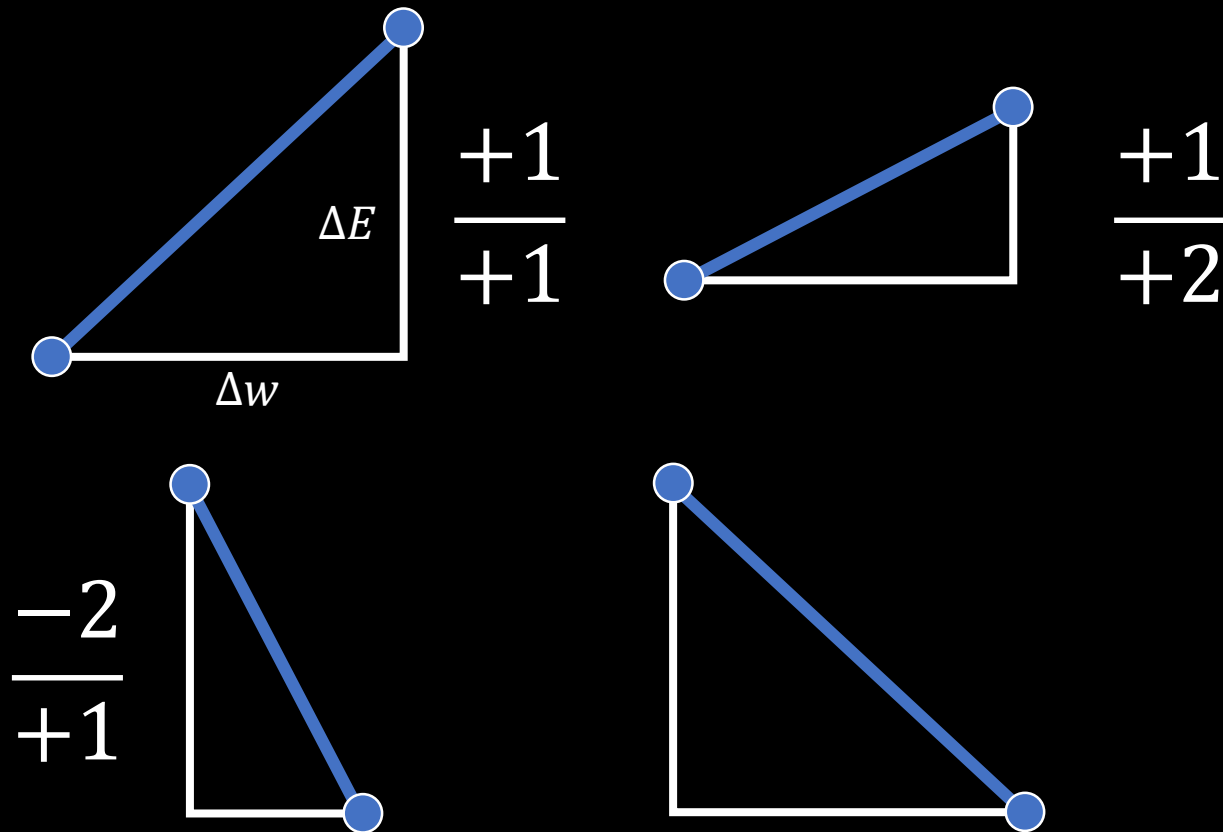
오류 그래프에서 두 점을 연결했을 때의 기울기

# 기울기 의미( $w$ 와 $E$ 관계)



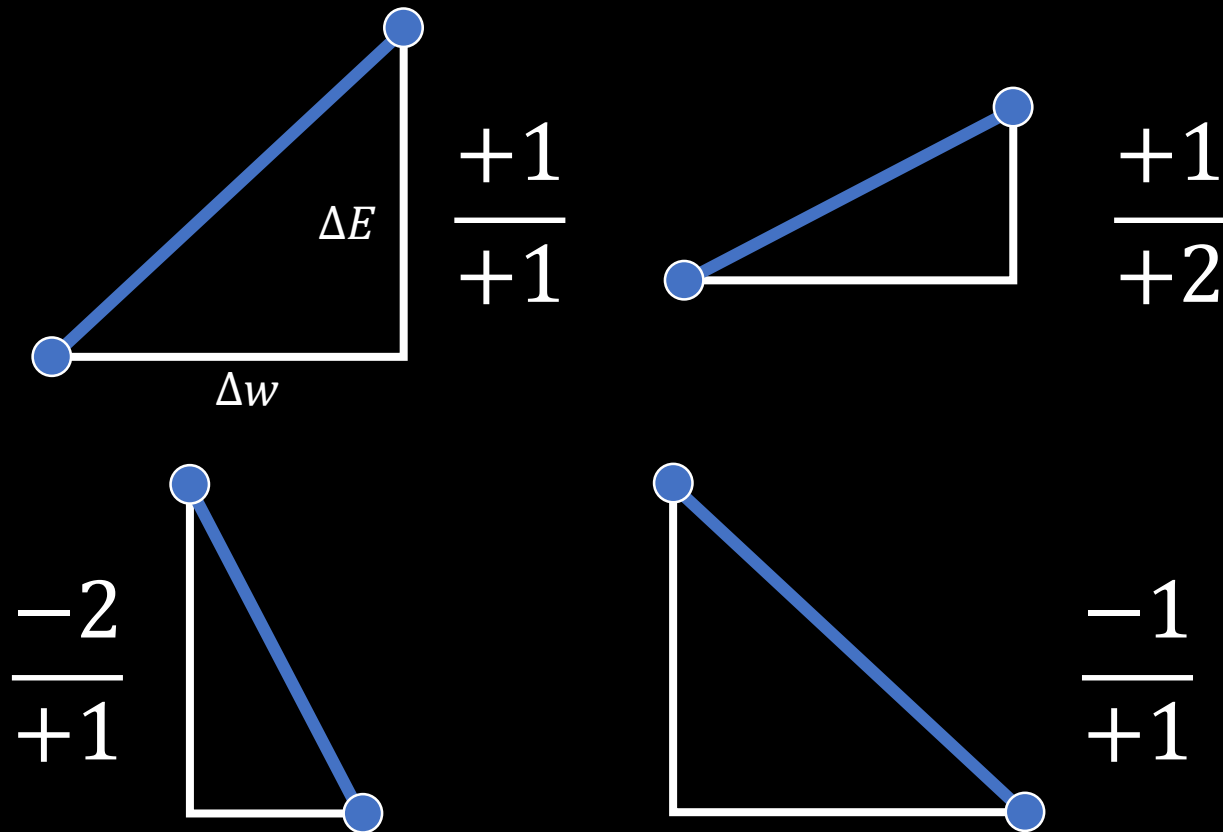
오류 그래프에서 두 점을 연결했을 때의 기울기

# 기울기 의미( $w$ 와 $E$ 관계)



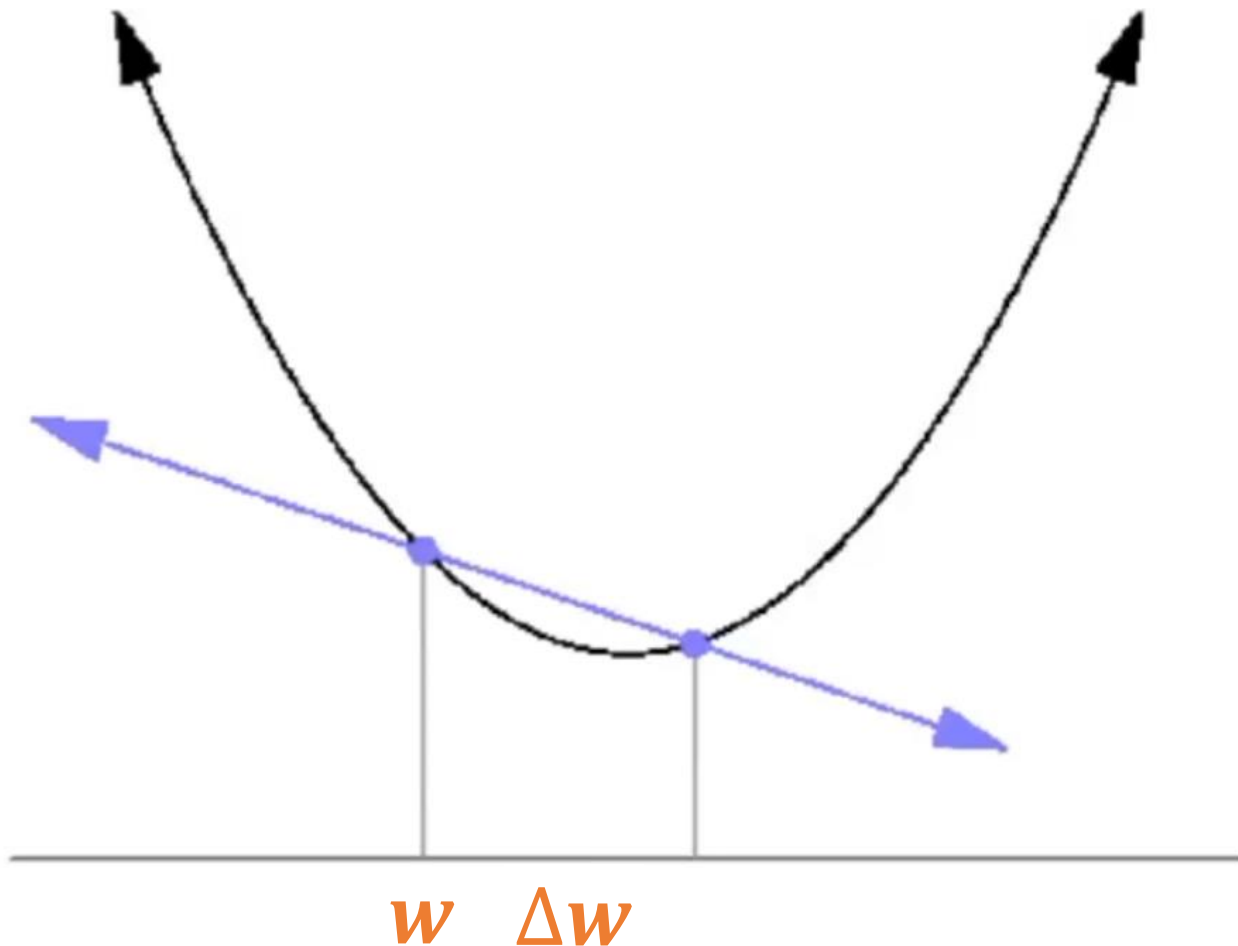
오류 그래프에서 두 점을 연결했을 때의 기울기

# 기울기 의미( $w$ 와 $E$ 관계)

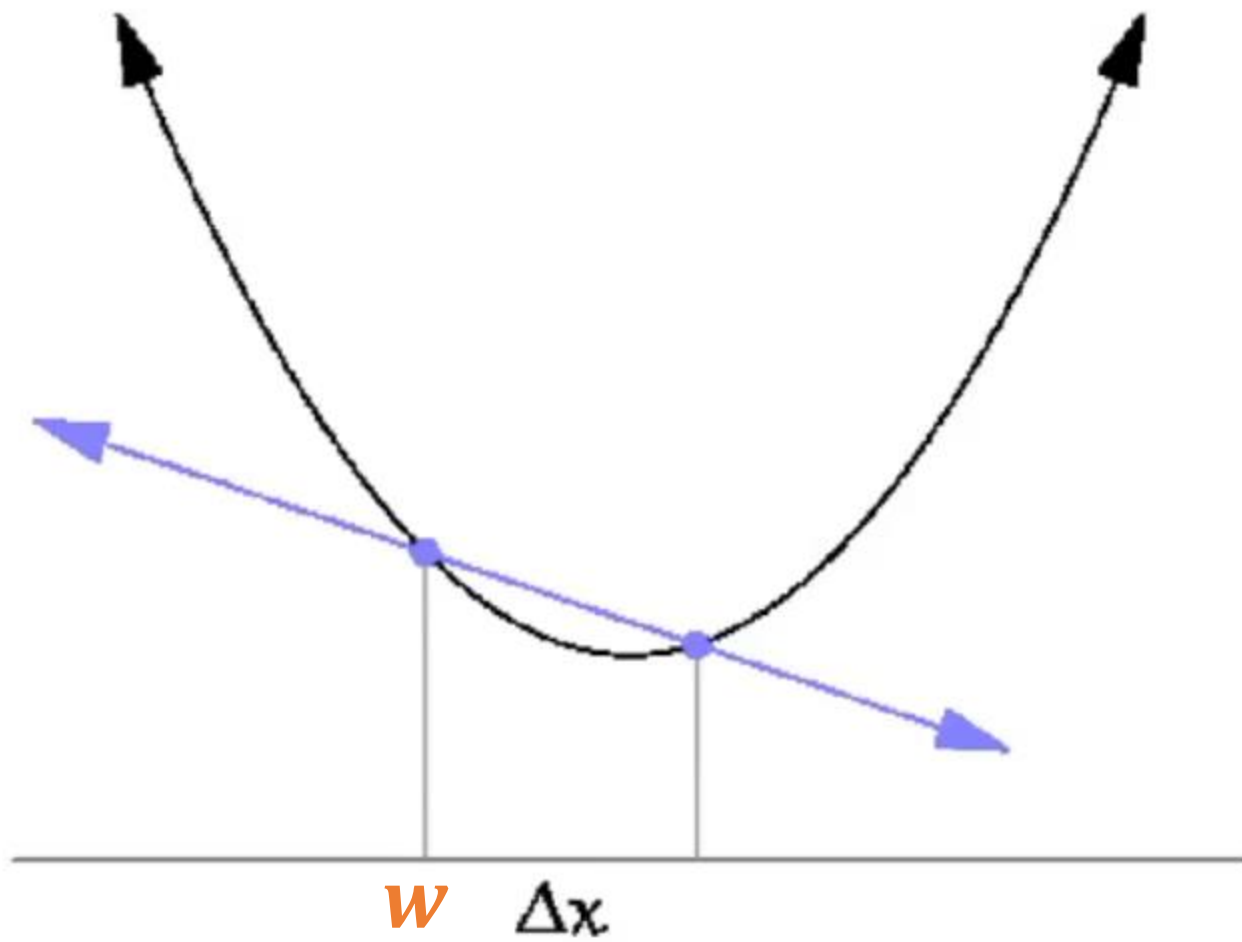


오류 그래프에서 두 점을 연결했을 때의 기울기

# 오류 그래프에서 기울기



오류 그래프에서 두 점을 연결했을 때의 기울기



## Numerical differentiation

오류 그래프 모양을 몰라도,  
공식  $E$ 만 알면 기울기를  
계산할 수 있다.  
즉,  $w$ 가  $E$ 에 미치는  
영향을 알 수 있다.



# (Q) 미치는 영향 구하기

$$E = (wx - y)^2$$

데이터  $(x, y)$ 가  $(1, 1)$ 일 때

$w=3$ 인 지점에서  $w$ 가  $E$ 에 미치는 영향, 즉, 기울기를 구하라.

# (Q) 미치는 영향 구하기

$$E = (w1 - 1)^2$$

$w$ : 3  $\rightarrow$   $E$ : 4

$w$ : 3.00001  $\rightarrow$   $E$ : 4.00004

$w$ 가 0.00001 증가할 때  $E$ 는 0.00004 증가

$w$ 가 1증가할 때  $E$ 는 4 증가함을 의미

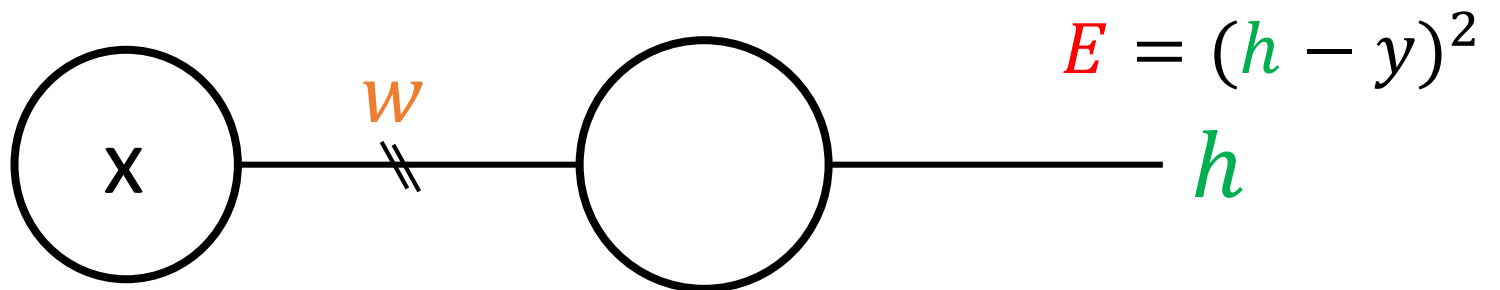
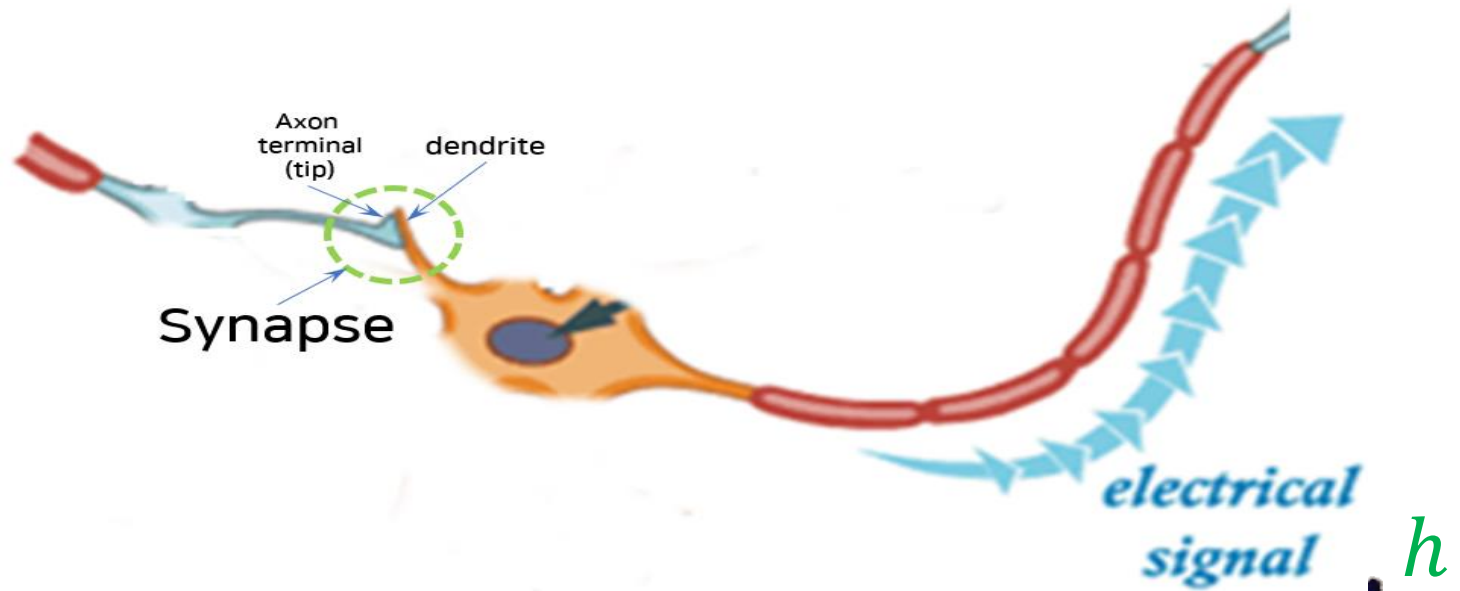
따라서 미치는 영향(기울기)=4

기울기= $\square$ 치는 영향,  
공식이 있을 때 어떻게 구한다?

# 기울기에 대한 생각

- 기울기가 4 →  $w$ 가 1만큼 증가하면 오류  $E$ 는 4만큼 증가
- 따라서 오류를 줄이고 싶으면?  $w$ 를 감소시켜야 함을 의미
- 기울기가 -5 →  $w$ 가 1만큼 증가하면 오류는 5만큼 감소 뜻
- 따라서 오류를 줄이고 싶으면?  $w$ 를 증가시켜야 함을 의미

$w$ 를 조정하면서  
오류  $E$ 를 계속해서 줄이자.  
(학습, Learning)



# Learning is ...

- parameter( $w$ ) tuning to minimize the error/cost/loss function (**learning**)
- then machine can **predict** correct answers.

# 어떻게 '자동으로'

- 오류  $E$ 를 최소화하는  $w$  값을 찾을까?



# 요약

- 리그레션(회귀)을 이해한다.
- 가설과 오류 그래프를 이해한다.
- 오류 그래프를 해석할 수 있다.
- 가중치가 오류에 미치는 영향을 안다.
- 기울기의 의미를 안다.