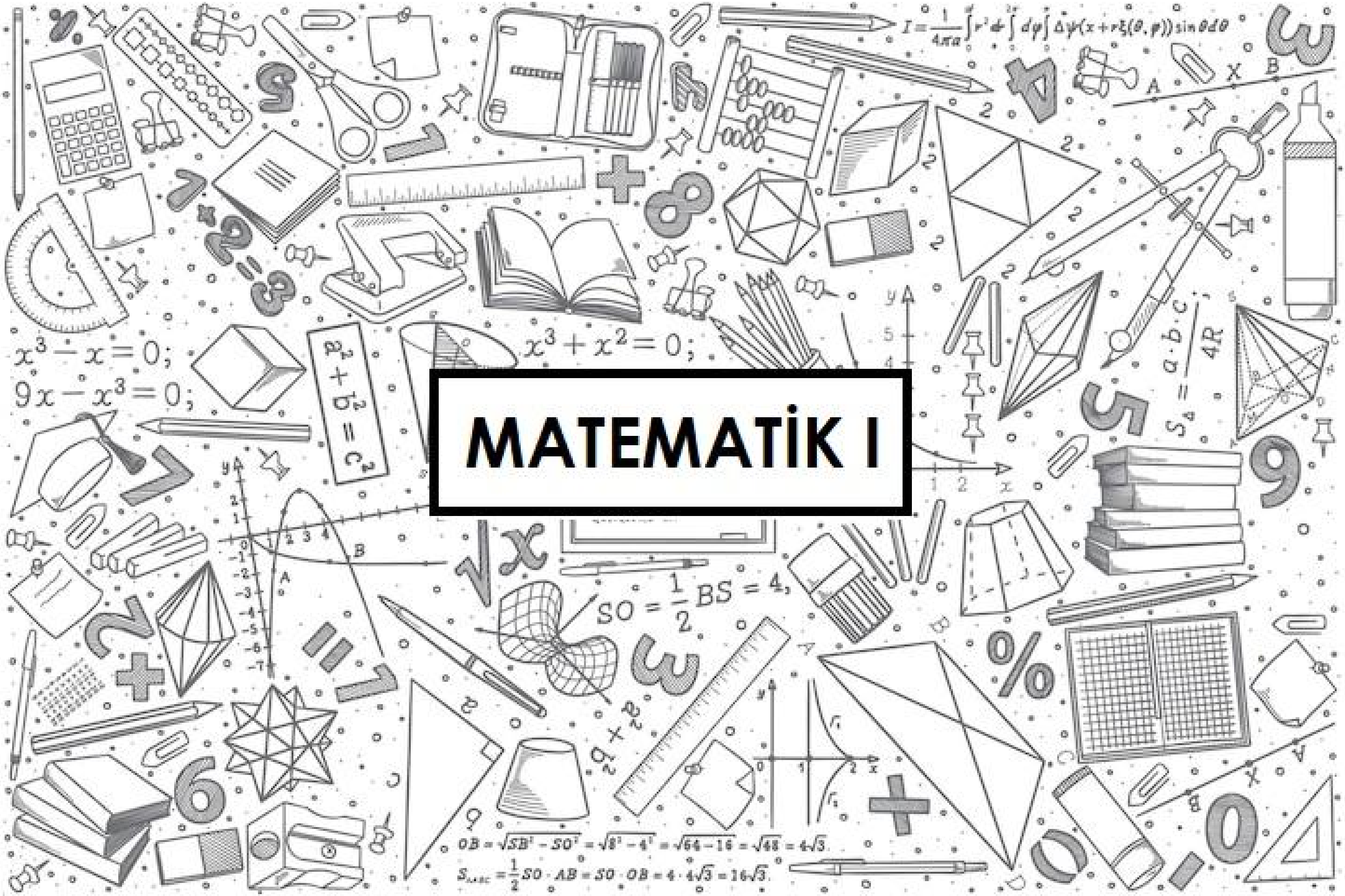
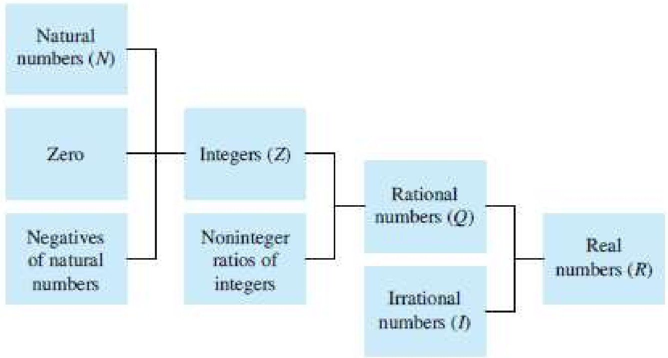
MATEMATİK I



1. Temel Cebir Bilgileri

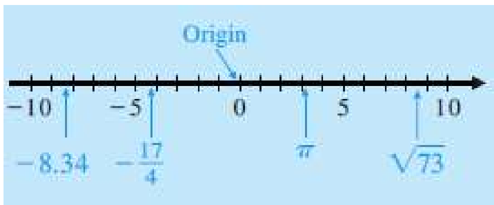
1.1 Sayı Kümeleri

- **Doğal sayılar kümesi.** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- **Pozitif doğal sayılar kümesi.** $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$
- **Tamsayılar kümesi.** $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- **Rasyonel sayılar kümesi.** $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a,\ b \text{ tamsayı ve } b \neq 0 \right\}$ şeklindeki küme veya başka bir ifade ile devirli ondalık sayılar kümesi. a ya rasyonel sayının payı, b ye paydası denir. Her tamsayı paydası 1 olan bir rasyonel sayıdır ancak tersi doğru değildir. $\frac{0}{0}$ belirsiz, $\frac{sayı}{0}$ tanımsız, $\frac{0}{sayı} = 0$ dır. Eğer $\frac{a}{b} = 0$ ise $a = 0$ ve $b \neq 0$ olmalıdır.
- **İrrasyonel sayılar kümesi.** İki tamsayının oranı olarak yazılamayan sayılar veya başka bir ifade ile devirli olmayan ondalık sayılar kümesi . Bu küme $\mathbb{Q}'$ ile gösterilir. Aynı anda rasyonel ve irrasyonel olan sayı yoktur. Yani $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$ dir.
- **Reel sayılar kümesi.** $\mathbb{R}$ ile gösterilir. Rasyonel ve İrrasyonel sayıların tamamının oluşturduğu kümedir. Yani $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ dür.

- 

1.2 Reel Sayı Doğrusu

- Reel sayılar ile bir doğrunun noktaları arasında birebir bir eşleme vardır. Daha açık olarak, her bir reel sayıya doğru üstünde bir nokta karşılık gelir. Karşıt olarak, doğru üzerindeki her bir noktaya kaşılık bir ve yalnız bir reel sayı karşılık gelir. Reel sayılar ile eşlenmiş aşağıdaki doğru **reel sayı doğrusu** olarak isimlendirilir. Doğru üzerindeki bir noktaya karşılıok gelen sayıya o noktanın **koordinatı** denir.



- Koordinatı sıfır olan noktaya **başlangıç noktası (orijin)** adı verilir. Sağ yanındaki ok pozitif doğrultuyu gösterir. Başlangıç noktasının sağındaki noktaların koordinatları **pozitif reel sayılar**, solundaki noktaların koordinatları **negatif reel sayılar** olarak adlandırılır.

1.3 Reel Sayıların Temel Özellikleri

- $\mathbb{R}$ Reel sayılar kümesinden a, b, c gibi gelişigüzel seçilmiş elemanları göz önünen alalım.
  - **Toplama Özellikleri**
    - **Birleşme Özelliği** $(a+b)+c = a+(b+c)$
    - **Değişme Özelliği** $a+b = b+a$
    - **Birim Eleman** $a+0 = 0+a = a$
    - **Ters Eleman** a reel sayısının toplamsal tersi $-a$ dır.
  - **Çarpma Özellikleri**
    - **Birleşme Özelliği** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
    - **Değişme Özelliği** $a \cdot b = b \cdot a$
    - **Birim Eleman** $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
    - **Ters Eleman** Sıfırdan farklı bir a reel sayısının çarpımsal tersi $1/a$ dır ve a^{-1} ile gösterilir. Sıfırın çarpımsal tersi yoktur.
  - **Dağılma Özellikleri**
    - **Sağdan Dağılma Özelliği** $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
    - **Soldan Dağılma Özelliği** $c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$

1.4 Çıkarma ve Bölme

- a dan b yi çıkarmak için b nin negatifi a ya eklenir. a yı b ye bölmek için a sayısı b nin çarpımsal tersi ile çarpılır. 0 sayısının çarpımsal tersi bulunmadığından 0 sayısına bölme tanımsızdır. 0 asla bir bölen olarak kullanılamaz. Buna göre, her a ve sıfırdan farklı her b reel sayısı için çıkarma ve bölme işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır.
  - **Çıkarma** $a - b = a + (-b)$
  - **Bölme** $a \div b = a \cdot b^{-1} = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right), b \neq 0$

1.5 Sayının Negatifi ile İlgili Özellikler

- Her a ve b reel sayısı için,
  1. $-(-a) = a$
  2. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$
  3. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
  4. $(-1) \cdot a = -a$
  5. $\left(\frac{-a}{b}\right) = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}, b \neq 0$
  6. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, b \neq 0$

1.6 Sıfırın Özellikleri

- Her a ve b reel sayısı için,
  1. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (Çarpma işleminin yutan eleman özelliği)
  2. $a \cdot b = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.
- **Örnek.**

$$x^2(4x+1) = 4x+1$$

denklemini sağlayan bütün x değerlerini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned} x^2(4x+1) - (4x+1) &= 0 \\ (4x+1)\left(x^2-1\right) &= 0 \\ (4x+1)(x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Çarpanlardan en az biri 0 olacağına göre x üç farklı değer alır. Bunlar aşağıdaki gibidir:

- $4x+1 = 0$ ise $x_1 = -\frac{1}{4}$
- $x-1 = 0$ ise $x_2 = 1$
- $x+1 = 0$ ise $x_3 = -1$

1.7 Tamsayı Türleri

- n bir tamsayı olmak üzere $2n$ şeklinde yazılabilen tamsayılara **çift sayı**, $2n-1$ veya $2n+1$ şeklinde yazılabilen tamsayılara **tek sayı** denir. Ç çift T tek olmak üzere

$$\begin{array}{lll} \text{Ç} \pm \text{Ç} = \text{Ç} & \text{Ç} \cdot \text{Ç} = \text{Ç} & n \text{ pozitif tamsayı} \\ \text{Ç} \pm \text{T} = \text{T} & \text{Ç} \cdot \text{T} = \text{Ç} & \text{T}^n = \text{T} \\ \text{T} \pm \text{T} = \text{Ç} & \text{T} \cdot \text{T} = \text{T} & \text{Ç}^n = \text{Ç} \end{array}$$

- Sıfırdan büyük sayılara **pozitif sayı**, sıfırdan küçük sayılara **negatif sayı** denir.

$$\begin{aligned} a &> 0, b > 0 \text{ ise } a+b > 0, a.b > 0, \frac{a}{b} > 0 \\ a &< 0, b < 0 \text{ ise } a+b < 0, a.b > 0, \frac{a}{b} > 0 \\ a &> 0, b < 0 \text{ ise } a.b < 0, \frac{a}{b} < 0 \end{aligned}$$

- **Örnek.** a bir çift sayı olmak üzere aşağıdaki sayıların tek veya çift olduklarını bulalım.
  1. $a^2 - 3a + 1$
  2. $5a - 2$
  3. $a^2 - 1$
  4. $a^3 + 200a - 20001$
- **Çözüm.** $a = 0$ için bakalım.
  1. Tek
  2. Çift
  3. Tek
  4. Tek

- **Örnek.** a, b, c birer tamsayı olmak üzere

$$\frac{4a-1}{b} = c - 3$$

olduğuna göre a, b ve c sayıların tek veya çift olduklarını bulalım.

- **Çözüm.**

$$4a - 1 = b(c-3)$$

olarak yazılabilir. $4a-1$ tek olduğuna göre b ve $c-3$ tek olmalı. Bu durumda c çift olmalı. a sayısı tek veya çift olabilir. Kesin karar verilemez.

- **Örnek.** a, b, c birer tamsayı olmak üzere

$$a^2 b < 0, bc > 0, ac < 0$$

olduğuna göre a, b ve c sayıların işaretlerini bulalım.

- **Çözüm.** $a^2 > 0$ olduğuna göre $b < 0$ dır. $bc > 0$ olduğuna göre $c < 0$ dır. $c < 0$ olduğuna göre $ac < 0$ olduğundan $a > 0$ olmalıdır. Demek ki a, b ve c sayıların işaretleri sırasıyla $+, -, -$ dir.

- **Örnek.** $a < b < 0 < c$ olmak üzere aşağıdaki sayıların işaretleri bulalım.
  1. $a - b + c$
  2. $a + b + c$
  3. $a - b - c$
  4. $a^2 + b^2 + c^2$
- **Çözüm.**
  1. Negatif, pozitif veya sıdır olabilir.
  2. Negatif, pozitif veya sıdır olabilir.
  3. Daima negatif
  4. Daima pozitif

- **Örnek.** Aşağıda verilen işlemleri yapınız.
  1. $5 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 4$
  2. $7 + 12 \div (4 - 2) + (-6) \div 2 \cdot 4$
  3. $x - \{x - [x - y + (2x - y)] - 2y\}$
  4. $(x - (3 - y - (1 - x - (5 + y)))) - 1$
- **Çözüm.**
  - $5 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 4 = 5 + 6 - 8 + 4 = 7$
  - $7 + 12 \div (4 - 2) + 5 \div 2 \cdot 4 = 7 + 12 \div 2 + (-3) \cdot 4 = 7 + 6 + (-12) = 1$
  - $x - \{x - [x - y + 2x - y] - 2y\} = x - \{x - [3x - 2y] - 2y\} =$
    $x - \{x - 3x + 2y - 2y\} = x - \{-2x\} = x + 2x = 3x$
  - $(x - (3 - y - (1 - x - 5 - y))) - 1 = (x - (3 - y - (-x - 4 - y))) - 1 =$
    $(x - (3 - y + x + 4 + y)) - 1 = (x - (7 + x)) - 1 = (x - 7 - x) - 1 =$
    $-7 - 1 = -8$

- **Alıştırmalar.**
  1. $-14 \div 7 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 21 \div 7$ işleminin sonucu kaçtır? $\{$Cevap: $-15\}$
  2. $\{x - [y - (z + 2)]\} - \{x + [z - (x - 1)]\} + y - 1$ ifadesinin en sade hali nedir? $\{$Cevap: $x\}$
  3. $3 + 8 \div 4 - 7 + 5 \cdot 3$ işleminin sonucu kaçtır? $\{$Cevap: $13\}$
  4. $3 \div 7 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2 \div 7$ işleminin sonucu kaçtır? $\{\text{Cevap} : -8\}$
  5. $21 - (8 - 16 \div 4 + 4 - (5 - 14 \div 7))$ işleminin sonucu kaçtır? $\{\text{Cevap} : 16\}$
  6. $(12 - (-4)) \div (2 \cdot (1 - 3)) - 1$ işleminin sonucu kaçtır? $\{\text{Cevap} : -5\}$
  7. a, b, c doğal sayı $a \cdot b = 7$ ve $b \cdot c = 16$ olduğuna göre, $a + b + c$ toplamı kaçtır? $\{\text{Cevap} : 24\}$
  8. $48 \div 8 \div 6 + 7 \cdot 3 \div 6 - 7 \div 4 \cdot 2$ işleminin sonucu kaçtır? $\{\text{Cevap} : 1\}$
  9. a, b doğal sayı $a + b = 13$ olduğuna göre, $a \cdot b$ en az ve en fazla kaçtır? $\{\text{Cevap : En az } 0, \text{ en fazla } 42\}$
  10. a, b tam sayı $a \cdot b = 48$ olduğuna göre, $a + b$ en az ve en fazla kaçtır? $\{\text{Cevap : En az } -49, \text{ en fazla } 49\}$

2. Rasyonel Sayılar

2.1 Kesirlerle İlgili Temel Özellikler

- $b \neq 0$ olmak üzere $a \div b$ bölümü a/b biçiminde yazıldığında bir **kesir** elde edilir. a ya kesrin **payı**, b ye kesrin **paydası** denir. 0 ile bölme hariç olmak üzere a, b, c, d, k reel sayıları için,
  1. $\frac{a}{b} = 0$ ise $a = 0$ ve $b \neq 0$ olmalıdır.
  2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ olması için gerek ve yeter koşul $ad = bc$ olmasıdır. (İçler-dışlar çarpımı)
  3. $\frac{k \cdot a}{k \cdot b} = \frac{a}{b}$ (Genişletme veya sadeleştirme)
  4. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ (Çarpma)
  5. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ (Bölme)
  6. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ (Toplama)
  7. $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$ (Çıkarma)
  8. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$ (Paydası farklı olan kesirleri toplama ve çıkarma)

- **Örnek.** $\frac{(x+1) \cdot (x-1)}{(2x+2)\,(x-3)} = 0$ olduğuna göre x in değeri kaçtır?
- **Çözüm.** Bir rasyonel sayı payının sıfır olduğu durumda 0 olacağından
  - $x + 1 = 0$ ise $x = -1$ dir. Ancak bu değer paydayı da 0 yaptığından alınamaz.
  - $x - 1 = 0$ ise $x = 1$ dir. Bu değer paydayı da 0 yapmadığından alınır.
  - Sonuç olarak x in tek değeri 1 dir.

- **Örnek.** $\frac{3}{4} = -\frac{x}{12}$ olduğuna göre x in değeri kaçtır?
- **Çözüm.** İçler-dışlar çarpımından

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-12) &= 4 \cdot x \\ -36 &= 4 \cdot x \\ x &= -\frac{36}{4} = -9 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.** Aşağıdakileri kesirleri en sade şekilde yazınız.
  1. $\frac{24}{36}$
  2. $\frac{-8}{20}$
  3. $\frac{-12}{-44}$
- **Çözüm.**
  1. $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$
  2. $\frac{-8}{20} = -\frac{2}{5}$
  3. $\frac{-12}{-44} = \frac{3}{11}$

- **Örnek.** Aşağıdaki işlemleri yapınız.
  1. $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$
  2. $4 + \frac{2}{3} - \frac{3}{15}$
  3. $7 - \frac{1}{7} + \frac{3}{14}$
- **Çözüm.**
  1. $$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} - \frac{6}{12} + \frac{2}{12} = \frac{4-6+2}{12} = \frac{0}{12} = 0$$
  2. $$4 + \frac{2}{3} - \frac{3}{15} = \frac{60}{15} + \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{60+10-3}{15} = \frac{67}{15}$$
  3. $$7 - \frac{1}{7} + \frac{3}{14} = \frac{98}{14} - \frac{2}{14} + \frac{3}{14} = \frac{98-2+3}{14} = \frac{99}{14}$$

- Aşağıdaki işlemleri yapınız.
  1. $\frac{4}{21} \cdot \frac{-3}{10}$
  2. $\frac{2}{3} \div \frac{4}{15}$
  3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3 - \frac{1}{3}}$
  4. $\frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{1}{\frac{2}{3}}$
- **Çözüm.**
  1. $$\frac{4}{21} \cdot \frac{-3}{10} = \frac{2}{7} \cdot \frac{-1}{5} = \frac{-2}{35}$$
  2. $$\frac{2}{3} \div \frac{4}{15} = \frac{2}{3} \cdot \frac{15}{4} = \frac{1}{1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$
  3. $$\frac{1}{2} + \frac{1}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$
  4. $$\frac{\frac{1}{2}}{3} + \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{1}{6} + \frac{9}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

2.2 Ondalık Sayılar

- Bir rasyonel sayının payını paydasına bölmekle elde edilen sayıya, verilen rasyonel sayının **ondalık açılımı** veya **ondalık yazılımı** denir. Her rasyonel sayının bir ondalık açılımı vardır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir. Ondalık sayılardan sadece devirli olanlar rasyonel sayıdır.
- **Örnek.** Aşağıdaki rasyonel sayıları ondalık sayı olarak yazınız.
  1. $\frac{1}{5}$
  2. $\frac{17}{4}$
  3. $\frac{1}{3}$
  4. $\frac{1}{7}$
- **Çözüm.**
  1. $\frac{1}{5} = 0.2$
  2. $\frac{17}{4} = 4.25$
  3. $\frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\overline{3}$
  4. $\frac{1}{7} = 0.142857142857\cdots = 0.\overline{142857}$

- **Örnek.** Aşağıdaki ondalık sayıları rasyonel sayı olarak yazınız.
  1. 5.2
  2. 3.14
  3. -2.375
- **Çözüm.**
  1. $$5.2 = \frac{52}{10} = \frac{26}{5}$$
  2. $$3.14 = \frac{314}{100} = \frac{157}{50}$$
  3. $$-2.375 = -\frac{2375}{1000} = -\frac{475}{200} = -\frac{95}{40} = -\frac{19}{8}$$

- Devirli ondalık sayılar rasyonel sayıya çevirilirken tüm sayıdan devretmeyen kısım çıkarılır ve paya yazılır. Paydaya ise ondalık sayının virgülden sonraki kısmında bulunan basamaklardan devredenlerin sayısı kadar 9 devretmeyenlerin sayısı kadar 0 yazılır.
- **Örnek.**
  - $$1.2\overline{34} = \frac{1234-12}{990} = \frac{1222}{990} = \frac{611}{495}$$
  - $$4.\overline{21} = \frac{421-4}{99} = \frac{417}{99} = \frac{139}{33}$$

- **Örnek.** Aşağıdaki devirli ondalık sayıları rasyonel sayıya çeviriniz.
  1. $0.\overline{9}$
  2. $2.2\overline{3}$
  3. $4.\overline{12}$
- **Çözüm.**
  1. $$0.\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$$
  2. $$2.2\overline{3} = \frac{223-22}{90} = \frac{201}{90} = \frac{67}{30}$$
  3. $$4.\overline{12} = \frac{412-4}{99} = \frac{408}{99} = \frac{136}{33}$$

2.3 Ondalık Sayılarda Dört İşlem

- İki ya da daha fazla ondalık kesir toplanıp-çıkarılırken sayılar virgülleri alt alta gelecek şekilde yazılır ve işlem yapılır.
- İki ondalık kesir çarpılırken önce sayılardaki virgüller hesaba katılmadan doğal sayılarda çarpma işlemi yapılır gibi işlem yapılır. Bulunan sonuçta virgül, çarpılan sayıların virgülden sonraki basamak sayılarının toplamı kadar sağdan itibaren sayılarak konulur. Eğer basamak sayısı eksik olursa virgülden hemen sonra 0 yazılarak tamamlanır.
- İki ondalık kesir bölünürken her iki sayı da virgülden kurtarılacak şekilde virgüller sağa kaydırılır. Elde edilen rasyonel sayı ondalık sayıya çevrilir.

- **Örnek.** Aşağıdaki işlemleri yapınız.
  1. $4.2 + 12.304 + 122.35$
  2. $432.3 - 21.45$
  3. 9.12×7.8
  4. 0.2×0.34
  5. $13.482 \div 3.21$
- **Çözüm.**
  1. $4.2 + 12.304 + 122.35 = 138.854$
  2. $432.3 - 21.45 = 410.85$
  3. $9.12 \times 7.8 = 71.136$
  4. $0.2 \times 0.34 = 0.068$
  5. $13.482 \div 3.21 = 4.2$

- **Alıştırmalar**
- Aşağıdaki işlemleri yapınız.
  1. $4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ $\left\{\text{Cevap: } \frac{23}{6}\right\}$
  2. $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{8}\right)$ $\left\{\text{Cevap: } \frac{53}{120}\right\}$
  3. $1 + \frac{1 - \frac{1}{2}}{3}$ $\left\{\text{Cevap: } \frac{7}{6}\right\}$
  4. $\frac{2\frac{1}{2} - 1 \div 3}{3 \div 2\frac{1}{3} + 1}$ $\left\{\text{Cevap: } \frac{91}{96}\right\}$
- Aşağıdaki rasyonel sayıları ondalık sayıya çeviriniz.
  1. $\frac{3}{4}$ $\{\text{Cevap: } 0.75\}$
  2. $\frac{27}{60}$ $\{\text{Cevap: } 0.45\}$
  3. $\frac{8}{15}$ $\{\text{Cevap: } 0.5\overline{3}\}$
  4. $\frac{4}{11}$ $\{\text{Cevap: } 0.\overline{36}\}$

- Aşağıdaki ondalık sayıları rasyonel sayıya çeviriniz.
  1. 32.4 $\left\{\text{Cevap: } \frac{162}{5}\right\}$
  2. 5.16 $\left\{\text{Cevap: } \frac{129}{25}\right\}$
  3. $0.5\overline{2}$ $\left\{\text{Cevap: } \frac{47}{90}\right\}$
  4. $6.\overline{16}$ $\left\{\text{Cevap: } \frac{610}{99}\right\}$
- Aşağıdaki işlemleri yapınız.
  1. $3.13 + 41.5 + 21.014$ $\{\text{Cevap: } 65.644\}$
  2. $0.2 - 0.002$ $\{\text{Cevap: } 0.198\}$
  3. 8.2×12.15 $\{\text{Cevap: } 99.63\}$
  4. $0.8 \div 0.08$ $\{\text{Cevap: } 10\}$

3. Rasyonel Sayılarda Sıralama ve Mutlak Değer

3.1 Pozitif Rasyonel Sayılarda Sıralama

- Pozitif rasyonel sayılar büyüklük-küçüklük bakımından aşağıdaki yöntemlere göre sıralanabilir.
  - Paydaları eşit olan iki kesirden payı büyük olan daha büyüktür. Örneğin, $\frac{1}{5} < \frac{3}{5}$ şeklindedir.
  - Payları eşit olan iki kesirden paydası küçük olan daha büyüktür. Örneğin, $\frac{5}{9} < \frac{5}{7}$ şeklindedir.
  - Payı ve paydası farklı olan kesirlerin payları ve paydası eşitlenerek sıralama yapılır.
  - $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow ad < bc$
  - Rasyonel sayıların payları ile paydaları arasındaki fark eşit ise,
    - Eğer, rasyonel sayılar basit kesir şeklinde iseler, payı (veya paydası) küçük olan daha küçüktür.
    - Eğer, rasyonel sayılar bileşik kesir şeklinde iseler, payı (veya paydası) küçük olan daha büyüktür.
  - Rasyonel sayılar ondalık sayıya çevirilerek sıralama yapılabilir. Ondalık sayılardan tam kısmı büyük olan büyüktür. Tam kısmı aynı olan ondalık sayılar sıralanırken virgülleri alt alta gelecek şekilde yazılır. Sayıların sonuna sıfırlar eklenerek basamak sayıları eşitlenir. Virgülden sonraki ilk basamaktan başlayarak sıralama yapılır.

- **Örnek.** $\dfrac{11}{4}, \dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{8}$ sayılarını sıralayınız.
- **Çözüm.** Verilen rasyonel sayıların paydaları 8 yapılırsa sırası ile $\dfrac{22}{8}, \dfrac{20}{8}, \dfrac{7}{8}$ elde edilir. Paydaları eşit olan iki kesirden payı büyük olan daha büyük olacağından

$$\frac{7}{8} < \frac{20}{8} < \frac{22}{8} \rightharpoondown \frac{7}{8} < \frac{5}{2} < \frac{11}{4}$$

şeklinde sıralama yapılır.

- **Örnek.** $a = \dfrac{7}{6}, b = \dfrac{11}{3}, c = \dfrac{5}{2}$ sayılarını sıralayınız.
- **Çözüm.** Verilen rasyonel sayıların paydaları 6 yapılırsa sırası ile $a = \dfrac{7}{6}, b = \dfrac{22}{6}, c = \dfrac{15}{6}$ elde edilir. Paydaları eşit olan iki kesirden payı büyük olan daha büyük olacağından

$$a < c < b$$

şeklinde sıralama yapılır.

- **Örnek.** $\dfrac{4}{7}, \dfrac{8}{9}, \dfrac{2}{5}$ sayılarını sıralayınız.
- **Çözüm.** Verilen rasyonel sayıların payları 8 yapılırsa sırası ile $\dfrac{8}{14}, \dfrac{8}{9}, \dfrac{8}{20}$ elde edilir. Payları eşit olan iki kesirden paydası büyük olan daha küçük olacağından

$$\frac{8}{20} < \frac{8}{14} < \frac{8}{9} \rightharpoondown \frac{2}{5} < \frac{4}{7} < \frac{8}{9}$$

şeklinde sıralama yapılır.

- **Örnek.** $a = \dfrac{6}{7}, b = \dfrac{3}{11}, c = \dfrac{2}{5}$ sayılarını sıralayınız.
- **Çözüm.** Verilen rasyonel sayıların payları 6 yapılırsa sırası ile $a = \dfrac{6}{7}, b = \dfrac{6}{22}, c = \dfrac{6}{15}$ elde edilir. Payları eşit olan iki kesirden paydası büyük olan daha küçük olacağından

$$a > c > b$$

şeklinde sıralama yapılır.

- **Örnek.** $\frac{4}{9}$ ve $\frac{11}{23}$ sayılarını karşılaştırınız.
- **Çözüm.** $4 \cdot 23 < 9 \cdot 11$ olduğundan

$$\frac{4}{9} < \frac{11}{23}$$

olacaktır.
- **Örnek.** $\frac{17}{5}$ ve $\frac{13}{4}$ sayılarını karşılaştırınız.
- **Çözüm.** $4 \cdot 17 > 5 \cdot 13$ olduğundan

$$\frac{17}{5} > \frac{13}{4}$$

olacaktır.

- **Örnek.** $a = \frac{3}{4}, b = \frac{4}{5}, c = \frac{5}{6}$ sayılarını karşılaştırınız.
- **Çözüm.** Pay ve paydası arsındaki fark sabit olan basit kesirlerde, payı (veya paydası) küçük olan daha küçük olduğundan

$$a < b < c$$

olacaktır.
- **Örnek.** $a = \frac{17}{15}, b = \frac{19}{17}, c = \frac{21}{19}$ sayılarını karşılaştırınız.
- **Çözüm.** Pay ve paydası arsındaki fark sabit olan bileşik kesirlerde, payı (veya paydası) küçük olan daha büyük olduğundan

$$a > b > c$$

olacaktır.

- **Örnek.** $\frac{1}{3}$ ve $\frac{5}{12}$ sayıları arasında olan üç tane rasyonel sayı bulunuz.
- **Çözüm.** Verilen sayıları paydaları 48 olacak şekilde genişletelim. Bu durumda verilen rasyonel sayılar sırası ile $\frac{16}{48}$ ve $\frac{20}{48}$ olur.

$$\frac{17}{48}, \frac{18}{48}, \frac{19}{48}$$

sayıları $\frac{1}{3}$ ve $\frac{5}{12}$ sayıları arasındadır.
- **Örnek.** 3.72,3.519 ve 3.09 sayılarını sıralayınız.
- **Çözüm.** Verilen sayıların virgülden sonraki basamak sayılarını eşitleyerek, virgülleri alt alta gelecek şekilde yazalım.

$$\begin{array}{c} 3.720 \\ 3.519 \\ 3.090 \end{array}$$

Virgülden sonraki ilk basamaktan başlayarak sıralama yaparsak

$$3.090 < 3.519 < 3.720$$

- **Örnek.** $5.12, 5.1\overline{2}$ ve $5.\overline{12}$ sayılarını sıralayınız.
- **Çözüm.** Verilen sayıları aşağıdaki gibi yazalım:

$$\begin{array}{c} 5.12000\cdots \\ 5.12222\cdots \\ 5.12121\cdots \end{array}$$

Sayılar virgülden sonraki iki basamağa kadar aynıdır. Üçüncü basamağa göre sıralama yaparsak:

$$\begin{array}{ccc} 5.12000\cdots & < & 5.12121\cdots < 5.12222\cdots \\ & \downarrow & \\ 5.12 & < & 5.\overline{12} < 5.1\overline{2} \end{array}$$

3.2 Negatif Rasyonel Sayılarda Sıralama

- Negatif rasyonel sayılar sıralanırken sayıların işareti göz önüne alınmadan sıralama yapılır. Elde edilen sıralamanın tersi alınarak gerçek sıralama bulunur.
- **Örnek.** $-\frac{30}{23}, -\frac{15}{13}$ ve $-\frac{6}{5}$ sayılarını sıralayınız.
- **Çözüm.** Verilen sayıların işaretlerini dikkate almayalım ve paylarını 30 yapalım. Bu durumda sırası ile $\frac{30}{23}, \frac{30}{26}$ ve $\frac{30}{25}$ buluruz. Bunları sıralarsak

$$\begin{array}{ccc} \frac{30}{26} & < & \frac{30}{25} < \frac{30}{23} \\ & \downarrow & \\ \frac{15}{13} & < & \frac{6}{5} < \frac{30}{23} \end{array}$$

Elde edilen sıralamanın tersi alınırsa

$$-\frac{15}{13} > -\frac{6}{5} > -\frac{30}{23}$$

elde edilir.

- **Örnek.** $-\frac{11}{9}, -\frac{13}{11}$ sayılarını sıralayınız.
- **Çözüm.** Verilen sayıların işaretlerini dikkate almayalım. $11 \cdot 11 > 13 \cdot 9$ olduğundan

$$\frac{11}{9} > \frac{13}{11}$$

olur. İşaretleri dikkate aldığımızda yukarıdaki sıralamanın tersi bir sıralama olacaktır:

$$-\frac{11}{9} < -\frac{13}{11}$$

3.3 Mutlak Değer

- Sayı doğrusunda bir a sayısının karşılık geldiği noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığına bu sayının mutlak değeri denir ve $|a|$ şeklinde gösterilir. Bu tanıma göre mutlak değer

$$|a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \text{ ise} \\ 0, & a = 0 \text{ ise} \\ a, & a > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

- **Örnek.**
  1. $|0| = 0$
  2. $|-3| = 3$
  3. $|3| = 3$
  4. $x > y$ ise $|x - y| = x - y$
  5. $x < y$ ise $|x - y| = y - x$

- **Örnek.** $a > 0 > b$ olduğuna göre

$$|b - a| + |a| - |-b|$$

işleminin sonucu nedir?

- **Çözüm.**
  - $a > b$ olduğundan $|b - a| = a - b$
  - $a > 0$ olduğundan $|a| = a$
  - $0 > b$ ve bu durumda $-b > 0$ olduğundan $|-b| = -b$ olacağından sonuç

$$|b - a| + |a| - |-b| = a - b + a - (-b) = 2a$$

olarak bulunur.

- **Örnek.** $x < y < 0$ olmak üzere

$$|x + |x + y|| + |x| - |y|$$

işleminin sunucu nedir?

- **Çözüm.** x ve y nin her ikisi de negatif olduğundan toplamları negatiftir. Bu durumda $|x + y| = -(x + y)$ olacaktır. Yerine yazılırsa sonuç

$$\begin{aligned} |x + |x + y|| + |x| - |y| &= |x - (x + y)| + |x| - |y| \\ &= |x - x - y| + |x| - |y| \\ &= |-y| + |x| - |y| \\ &= (-y) + (-x) - (-y) \\ &= -y - x + y = -x \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

- **Özellikler.**
  1. $|a| \geq 0$
  2. $|a| = 0$ ise $a = 0$ dır
  3. $|a| = |-a|$
  4. $|a - b| = |b - a|$
  5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
  6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
  7. $|a^n| = |a|^n$, n tamsayı
  8. $\left|a^{2n}\right| = a^{2n}$, n tamsayı

- **Örnek.** $\left|0.2 - 0.\overline{2}\right| + \left|0.\overline{2} - \frac{1}{4}\right|$ işleminin sonucu kaçtır?
- **Çözüm.** $0.\overline{2} > 0.2$ ve $\frac{1}{4} > 0.\overline{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left|0.2 - 0.\overline{2}\right| + \left|0.\overline{2} - \frac{1}{4}\right| &= 0.\overline{2} - 0.2 + \frac{1}{4} - 0.\overline{2} \\ &= -0.2 + \frac{1}{4} \\ &= -0.2 + 0.25 \\ &= 0.05 \end{aligned}$$

- **Örnek.** $-1 < a < 1$ için $|2a - |a + 1|| + |a + 2|$ ifadesinin en sade hali nedir?
- **Çözüm.** $a + 1 > 0$ ve $a - 1 < 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} |2a - |a + 1|| + |a + 2| &= |2a - (a + 1)| + a + 2 \\ &= |2a - a - 1| + a + 2 \\ &= |a - 1| + a + 2 \\ &= 1 - a + a + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

- **Örnek.** x, y, z negatif tamsayılardır. Ayrıca $-\frac{1}{x} > -\frac{1}{y} > -\frac{1}{z}$ ise $|x-z| + |y-x| - |z+y|$ ifadesinin en sade hali nedir?
- **Çözüm.** $-\frac{1}{x} > -\frac{1}{y} > -\frac{1}{z}$ ise $\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$ ve $x > y > z$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} |x-z| + |y-x| - |z+y| &= x - z + x - y - (-z - y) \\ &= x - z + x - y + z + y \\ &= 2x \end{aligned}$$

- **Örnek.** $||x| - 3| = 7$ denklemini sağlayan x sayılarının toplamını bulunuz.
- **Çözüm.** $||x| - 3| = 7$ ise $|x| - 3 = 7$ veya $|x| - 3 = -7$ dir.
  - $|x| - 3 = 7$ ise
  $$|x| = 10 \Longrightarrow x = 10 \text{ veya } x = -10$$
  - $|x| - 3 = -7$ ise
  $$|x| = -4$$
  olur ki bu durum olamaz.
  - Sonuç olarak $x = 10$ veya $x = -10$ olacağından x sayılarının toplamı 0 dır.

- **Örnek.** $|(x-4)(x+4)| = |x+4|$ denklemini sağlayan x sayıları hangileridir?
- **Çözüm.** $|(x-4)(x+4)| = |x-4||x+4|$ olduğundan

$$\begin{aligned} |x-4||x+4| &= |x+4| \\ |x-4||x+4| - |x+4| &= 0 \\ |x+4|(|x-4| - 1) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $|x+4| = 0$ veya $(|x-4| - 1) = 0$ olmalıdır.

  - $|x+4| = 0$ ise $x = -4$ tür.
  - $|x-4| - 1 = 0$ ise

$$\begin{aligned} |x-4| &= 1 \\ x - 4 &= 1 \text{ veya } x - 4 = -1 \\ x &= 5 \text{ veya } x = 3 \end{aligned}$$

olur. Demek ki denklemi sağlayan x değerleri $-4, 5$ ve 3 tür.

- **Örnek.** $|x-3| + |y+5| = 0$ denklemini sağlayan x ve y sayıları hangileridir?
- **Çözüm.** $|x-3| + |y+5| = 0$ ise

$$|x-3| = 0 \text{ ve } |y+5| = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $x = 3$ ve $y = -5$ olur.

- **Örnek.** $x^2 - |5x| - 6 = 0$ denklemini sağlayan x sayıları hangileridir?
- **Çözüm.** $x^2 = |x|^2$ ve $|5x| = 5|x|$ olduğundan

$$\begin{aligned} x^2 - |5x| - 6 &= |x|^2 - 5|x| - 6 \\ &= (|x| - 6)(|x| + 1) \end{aligned}$$

olur. Bu çarpanlar sıfıra eşitlenirse

  - $|x| - 6 = 0$ ise $x = 6$ veya $x = -6$
  - $|x| + 1 = 0$ ise $|x| = -1$ olur. Bu durum olamaz!
  - Denklemini sağlayan x sayıları $x = 6$ veya $x = -6$ olmalıdır.

- **Alıştırmalar.**

1. $$a = -\frac{3}{4}, b = -\frac{2}{5}, c = -\frac{1}{2}$$
   sayılarını sıralayınız. {Cevap: $b > c > a$ }
2. $$a = \frac{24}{13}, b = \frac{34}{23}, c = \frac{28}{17}$$
   sayılarını sıralayınız. {Cevap: $b < c < a$ }
3. $$a = 3.41, b = 3.4\overline{1}, c = 3.\overline{41}$$
   sayılarını sıralayınız. {Cevap: $c > b > a$ }
4. $$|-12| + |7| - |-5| + |4 - 6|$$
   işlemini yapınız. {Cevap: 16 }
5. $b < 0 < a$ olmak üzere
   $$|2a| + |-a| + |-b| - 2|b|$$
   işlemini yapınız. {Cevap: $3a + b$ }

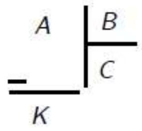
- .

6. $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ için
   $$|3 - 2x| + |2x + 1|$$
   ifadesinin en sade hali nedir? {Cevap: 4 }
7. $$3x + |-2x| - 15 = 0$$
   denklemini sağlayan x sayıları hangileridir? {Cevap: 3 }
8. $|2x - 5| = 13$ denklemini sağlayan x sayılarının toplamını bulunuz. {Cevap: 5}
9. $|2x| + |-3x| + |-x| = 12$ denklemini sağlayan x sayılarının çarpımını bulunuz. {Cevap: -4 }
10. $x > -1$ ise $|x + 1| + |x + 2| - (2x - 1)$ ifadesinin en sade hali nedir? {Cevap: 4 }

4. Bölünebilme Kuralları

4.1 Bölme

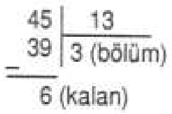
- A, B, C ve K bir tamsayı, $B \neq 0$ ve $K \geq 0$ olmak üzere A sayısının B sayısına bölümünde bölüm C ve kalan K ise



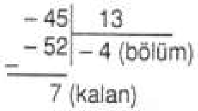
şeklinde bölme işlemi yapılır. Burada A ya bölünen, B ye bölen, C ye bölüm ve K ya kalan denir. Bu bölme işlemine göre,

1. $A = B \cdot C + K$ (Bölme özdeşliği)
2. $0 \leq K < |B|$ (Kalan Özelliği)
3. $K = 0$ ise A sayısı B ye kalansız bölünüyordur veya B sayısı A sayısını tam bölüyordur.
4. $K < C$ olduğunda bölen ve bölüm yer değiştirdiğinde kalan değişmez.

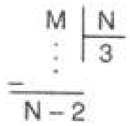
- **Örnek.** 45 sayısının 13 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulunuz.
- **Çözüm.**



- **Örnek.** -45 sayısının 13 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalanı bulunuz.
- **Çözüm.**



- **Örnek.**



olduğuna göre N nin M türünden eşitini bulunuz.

- **Çözüm.** Bölme özdeşliğine göre,

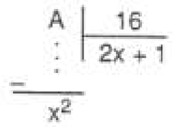
$$M = 3N + N - 2 = 4N - 2$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} 4N &= M + 2 \\ N &= \frac{M+2}{4} \end{aligned}$$

bulunur.

- **Örnek.** A doğal sayısı 16 ile bölündüğünde bölüm $2x+1$ kalan x^2 olmaktadır. Buna göre A nın en büyük değerini bulunuz.
- **Çözüm.**



Bölme özdeşliği gereği

$$A = 16\,(2x+1) + x^2$$

dir. Kalan özelliğine göre

$$x^2 < 16$$

olacağından x in değerleri $0, 1, 2, 3$ olmalıdır. Bu durumda $x = 3$ için A en büyük olur. A nın en büyük değeri

$$16\,(2 \cdot 3 + 1) + 3^2 = 121$$

olarak elde edilir.

4.2 Bölünebilme Kuralları

2,5 ve 10 ile Bölünebilme

- Birler basamağı $0, 2, 4, 6, 8$ olan sayılar (yani çift sayılar) 2 ile tam bölünür. Tek sayıların 2 ile bölümünden kalan 1 dir.
- Birler basamağı 0 veya 5 olan sayılar 5 ile tam bölünür. Bir sayının 5 ile bölümünden kalan bu sayının birler basamağının 5 ile bölümünden kalanına eşittir.
- Birler basamağı 0 olan sayılar 10 ile tam bölünür. Bir sayının 10 ile bölümünden elde edilen kalan bu sayının birler basamağına eşittir.
- **Örnek.** Bir sayının 10 ile bölümünden kalan 7, 5 ile bölümünden kalan x ve 2 ile bölümünden kalan y dir. Buna göre $x + y$ kaçtır?
- **Çözüm.** Sayının 10 ile bölümünden kalan 7 olduğuna göre birler basamağı 7 dir. Bu durumda $x = 2$ olmalıdır. Sayı tek olduğundan $y = 1$ olmalıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned} x + y &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

olacaktır.

Bölünebilme Kuralları

3 ve 9 ile Bölünebilme

- Rakamları toplamı 3 ün katı olan sayılar 3 e, 9 un katı olanlar 9 a tam bölünür.
- Bir sayının 3 ve 9 ile bölümünden kalan sayının rakamları toplamının 3 ve 9 ile bölümünden kalana eşittir.
- **Örnek.** 21074 sayısının 3 ve 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.
- **Çözüm.** Verilen sayının rakamları toplamı 14 ve 14 ün rakamları toplamı 5 olduğundan
  - sayının 3 ile bölümünden kalan 5 in 3 e bölümünden kalana yani 2 ye eşittir.
  - sayının 9 ile bölümünden kalan 5 in 9 a bölümünden kalana yani 5 e eşittir.
- **Örnek.** Dört basamaklı $23a5$ sayısı 3 ile tam bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** Verilen sayı 3 ile tam bölünebildiğine göre rakamları toplamı da 3 e tam bölünmelidir. Rakamlar toplamı

$$10 + a$$

olacağından a nın değerleri

$$2, 5, 8$$

olacaktır.

- **Örnek.** Beş basamaklı $3a627$ sayısı 9 ile tam bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** Verilen sayı 9 ile tam bölünebildiğine göre rakamları toplamı da 9 ile tam bölünmelidir. Rakamlar toplamı

$$18 + a$$

olacağından a nın değerleri

$$0, 9$$

olacaktır.
- **Örnek.** Yirmibeş basamaklı 7272727272727272727272727 sayısın 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.
- **Çözüm.** Verilen sayının rakamları toplamı

$$\underbrace{9 + 9 + \cdots + 9}_{12 \text{ tane } 9} + 7$$

olduğundan sayının 9 ile bölümünden kalan 7 dir.

Bölünebilme Kuralları

6 ile Bölünebilme

- 2 ve 3 ile bölünebilen sayılar 6 ile tam bölünür.
- **Örnek.** Dört basamaklı $574a$ sayısı 6 ile tam bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** Verilen sayı 6 ile bölünebildiğine göre a çift sayı olmalıdır. Ayrıca rakamlar toplamı 3 ün katı olmalıdır. Rakamlar toplamı

$$16 + a$$

dır. Bu sayıyı 3 ün katı yapan a çift sayıları iki tanedir:

$$2, 8$$

- **Örnek.** 6 ile tam bölünebilen beş basamaklı $3a27b$ sayısının 10 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre a nın alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** Verilen sayının 10 ile bölümünden kalan 4 olduğuna göre $b = 4$ olmalıdır. Sayı 6 ile bölüneildiğinden rakamlar toplamı 3 ün katı olmalıdır. Rakamlar toplamı

$$16 + a$$

dır. Bu sayıyı 3 ün katı yapan a sayıları üç tanedir:

$$2, 5, 8$$

Bölünebilme Kuralları

4 ve 8 ile Bölünebilme

- Son iki basamağı 4 e bölünebilen sayılar 4 ile kalansız bölünür.
- Son üç basamağı 8 e bölünebilen sayılar 8 ile kalansız bölünür.
- **Örnek.** Beş basamaklı $7a35b$ sayısı 3 ve 4 ile tam bölünebildiğine göre a nın alabileceği değerleri bulunuz
- **Çözüm.** Verilen sayının 4 ile tam bölünebilmesi için son iki basamağı 4 ün katı olmalıdır. Bu durumda b

$$2, 6$$

olabilir.

  - $b = 2$ ise a nın değerleri $1, 4, 7$ olabilir.
  - $b = 6$ ise a nın değerleri $0, 3, 6, 9$ olabilir.

- **Örnek.** Beş basamaklı $3205a$ sayısı 5 ile bölündüğünde 2 kalanını veren bir çift sayı olduğuna göre bu sayının 8 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.
- **Çözüm.** Sayının 5 ile bölümünden kalan 2 olduğuna göre $a = 2$ dir. Bu durumda sayının son üç basamağı 052 olur. Bu sayının 8 ile bölümünden kalan 4 tür.

Bölünebilme Kuralları

7 ile Bölünebilme

- Sayının rakamları birler basamağından başlayarak sırasıyla; $1, 3, 2, -1, -3, -2, +1, \ldots$ sayılarıyla çarpılır. Elde edilen sayıların toplamı 7 nin tam katı ise bu sayı 7 ile tam bölünüyor demektir.
- **Örnek.** 55853 sayısının 7 ile bölünüp bölünmediğini bulunuz.
- **Çözüm.** Sayının rakamları birler basamağından başlayarak sırasıyla; $1, 3, 2, -1, -3, -2, +1, \ldots$ sayılarıyla çarpılırsa

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 5 & 8 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ -15 & -5 & 16 & 15 & 3 \end{array}$$

olacaktır. Elde edilen çarpımlar toplanırsa

$$-15 - 5 + 16 + 15 + 3 = 14$$

olur. Bu sayı 7 nin katı olduğundan 55853 sayısı da 7 nin tam katıdır.

- **Örnek.** Beş basamaklı $a362a$ sayısı, 7 ile tam bölündüğüne göre, a nın alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** Sayının rakamları birler basamağından başlayarak sırasıyla; $1, 3, 2, -1, -3, -2, +1, \ldots$ sayılarıyla çarpılırsa

$$\begin{array}{ccccc} a & 3 & 6 & 2 & a \\ -3 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3a & -3 & 12 & 6 & a \end{array}$$

olacaktır. Elde edilen çarpımlar toplanırsa

$$-3a - 3 + 12 + 6 + a = -2a + 15$$

olur. Bu sayını 7 nin katı olması için a nın alabileceği tek değer 4 tür.

Bölünebilme Kuralları
11 ile Bölünebilme

- Bir sayının 11 ile tam olarak bölünebilmesi için, sayının rakamlarının altına birler basamağından başlayarak sırasıyla $+, -, +, -, \ldots$ ile çarpılır ve çarpımlar toplanır. Bu toplamın 11 e bölümünde kalan 0 ise sayı 11 e tam bölünür.
- **Örnek.** 40562314 sayısının 11 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.
- **Çözüm.** Birler basamağından başlayarak sırasıyla $+, -, +, -, \ldots$ işaretleri yazılırsa:

$$\begin{array}{cccccccc} 4 & 0 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ - & + & - & + & - & + & - & + \\ -4 & 0 & -5 & 6 & -2 & 3 & -1 & 4 \end{array}$$

olur. Bu sayılar toplanırsa

$$-4+0-5+6-2+3-1+4=1$$

olduğundan 40562314 sayısının 11 ile bölümünden kalan 1 dir.

4.3 Asal Sayılar ve Asal Çarpanlara Ayırma

- 1 ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1 den büyük doğal sayılara **asal sayı** denir. Sonsuz sayıda asal sayı vardır. Bunlar

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$$

sayılarıdır. Bir doğal sayının asal olup olmadığını belirlemek için bu doğla sayıyı, karekökünden küçük asal sayılara böleriz. Sayıyı bölen bir asal yoksa bu durumda doğal sayımız asaldır.
- 1 den büyük her doğal sayı üsleri pozitif tamsayı olan sayıların çarpımı biçiminde, çarpanların yazılış sırası önemli olmamak üzere, bir tek şekilde yazılabilir. Bu tür yazılışa sayının **asal çarpanlarına ayrılması** denir.
- **Örnek.** 360 sayısını asal çarpanlarına ayırınız.
- **Çözüm.** Verilen sayı sırası ile asal sayılara bölünürse $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ olduğu görülür.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

- **Örnek.** 420 sayısını asal çarpanlarına ayırınız.
- **Çözüm.** Verilen sayı sırası ile asal sayılara bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Buna göre 420 sayısının asal çarpanlarına ayrılmış hali

$$420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

şeklindedir.

- **Örnek.** 233 sayısının asal olup-olmadığını belirleyiniz.
- **Çözüm.** 233 ün karekökü yaklaşık olarak 15 tir. 15 ten küçük asallardan hiçbiri 233 ü bölmez. Bundan dolayı 233 asaldır.
- **Örnek.** 287 sayısının asal olup-olmadığını belirleyiniz.
- **Çözüm.** 287 nin karekökü yaklaşık olarak 16 dır. 16 dan küçük asallardan 7, 287 yi böler. Bu yüzden 287 asal değildir.

4.4 Alıştırmalar

- **Örnek.** $12a7b$ sayısının 4 ile bölümünden kalan 3, 9 ile bölümünden kalan 7 dir. Buna göre a ve b sayılarının alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** Sayının 4 ile bölümünden kalan 3 ise b sayısı $1, 5, 9$ olabilir. Diğer taraftan sayının 9 ile bölümünden kalan 7 olduğundan
  - $b = 1$ ise $1 + 2 + a + 7 + 1 = a + 11 = 16$ olmalıdır. Buradan $a = 5$ olur.
  - $b = 5$ ise $1 + 2 + a + 7 + 5 = a + 15 = 16$ olmalıdır. Buradan $a = 1$ olur.
  - $b = 9$ ise $1 + 2 + a + 7 + 9 = a + 19 = 25$ olmalıdır. Buradan $a = 6$ olur.

- **Örnek.** Dört basamaklı $5x3y$ sayısının 10 ile bölümünden kalan 7 dir. Bu sayı 3 ile tam bölündüğüne göre, x hangi değerleri alabilir?
- **Çözüm.** Sayının 10 ile bölümünden kalan 7 ise y sayısı 7 olabilir. Diğer taraftan sayı 3 ile tam bölündüğünden

$$5 + x + 3 + 7 = 15 + x = 3k, \ \ k \text{ doğal sayı}$$

olmalıdır. Bu durumda x sayısı $0, 3, 6, 9$ olmalıdır.

- **Örnek.** Beş basamaklı $34x5y$ sayısının 11 ile bölümünden kalan 0 dır. Bu sayı 5 ile bölündüğünde 2 kalanını verdiğine göre, x hangi değerleri alabilir?
- **Çözüm.** Sayının 5 ile bölümünden kalan 2 ise y sayısı 2 veya 7 olabilir. Diğer taraftan sayı 11 ile tam bölündüğünden
  - $y = 2$ ise

$$(x + 2 + 3) - (5 + 4) = x - 4 = 11k, \ \ k \text{ doğal sayı}$$

olmalıdır. Bu durumda x sayısı 4 olmalıdır.
  - $y = 7$ ise

$$(x + 2 + 3) - (5 + 4) = x + 1 = 11k, \ \ k \text{ doğal sayı}$$

olmalıdır. Bu durumda x yoktur.

- **Örnek.** Beş basamaklı $3x2x4$ sayısının 9 ile bölümünden kalan 6 dır. Bu sayının 6 ile bölümünden kalan kaçtır?
- **Çözüm.**

$$3 + x + 2 + x + 4 = 2x + 9 = 9k + 6, \ \ k \text{ doğal sayı}$$

olmalıdır. Bu durumda x sayısı 3 olmalıdır. Demek ki sayı 33234 şeklindedir. Bu sayının 6 ile bölümünden kalan 0 dır.

- **Alıştırmalar.**
  1. İki doğal sayıdan biri diğerine bölündüğünde bölüm 9 ve kalan 3 tür. Bölen sayı 5 olduğuna göre, bölünen sayı kaçtır? $\{$Cevap: 48$\}$
  2. Üç basamaklı $77a$ sayısı 2 ve 3 ile kalansız bölünebildiğine göre a nın değeri kaçtır? $\{$Cevap: 4$\}$
  3. Beş basamaklı $83a14$ sayısı 9 ile kalansız bölünebildiğine göre a nın değeri kaçtır? $\{$Cevap: 2$\}$
  4. Üç basamaklı $32a$ sayısının 4 ile tam bölünebilmesi içi a nın yerine kaç değer yazılabilir? $\{$Cevap: 3$\}$
  5. Dört basamaklı $52a0$ sayısı 8 ile kalansız bölünebildiğine göre a nın kaç farklı değeri vardır? $\{$Cevap: 3$\}$
  6. Dört basamaklı $123b$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 tür. Buna göre, b nin alabileceği değer toplamı kaçtır? $\{$Cevap: 11$\}$
  7. Üç basamaklı $37a$ sayısının 10 ile bölümünden kalan 5 olduğuna göre, bu sayının 11 ile bölümünden kalanı bulunuz. $\{$Cevap: 1 $\}$
  8. $m < n$ olmak üzere, üç basamaklı $1mn$ sayısının 5 ile bölümünden kalan 3 tür. Bu sayı 4 ile tam bölünebildiğine göre, m nin alabileceği kaç farklı değer vardır? $\{$Cevap: 4$\}$
  9. $41, 73, 91, 97, 121, 251, 301$ sayılarından asal olanları bulunuz. $\{$Cevap: $41, 73, 97, 251\}$
  10. 480 sayını asal çarpanlarına ayırınız. $\{$Cevap: $2^5 \cdot 3 \cdot 5\}$

5. Üslü İfadeler

5.1 Üslü İfade Tanımı

- a bir reel sayı n ise bir pozitif doğal sayı olmak üzere
$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tane } a}$$
olarak tanımlanır. a taban, n ise üs veya kuvvet olarak adlandırılır.
- **Örnek.**
  - $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
  - $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
  - $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

5.2 Temel Özellikler

- **Özellikler**
  1. $a \neq 0$ için $a^0 = 1$
  2. $a^1 = a$
  3. $1^n = 1, (-1)^{2n} = 1, (-1)^{2n-1} = -1$
  4. $a^m a^n = a^{m+n}$ ve $a^m b^m = (ab)^m$
  5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ve $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
  6. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$
  7. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ ve daha genel olarak $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$
  8. $a \neq 0, \pm 1$ için $a^m = a^n$ ise $m = n$
  9. $m \neq 0$ için $a^m = b^m$ ise $\begin{cases} a = b & m \text{ tek ise} \\ a = \pm b & m \text{ çift ise} \end{cases}$
  10. $0 < a < 1$ için $a^m < a^n$ ise $m > n$ ve $1 < a$ için $a^m < a^n$ ise $m < n$

- **Örnek.** Aşağıdakileri basitleştiriniz ve cevabı pozitif üslü olarak yazınız.
  1. $(2x^3)(3x^5)$
  2. $x^5 x^{-9}$
  3. $\frac{x^5}{x^7}$
  4. $\frac{x^{-3}}{x^{-4}}$
  5. $(u^{-3}v^2)^{-2}$
  6. $\left(\frac{y^{-5}}{y^{-2}}\right)^{-2}$
  7. $\frac{4m^{-3}n^{-5}}{6m^{-4}n^3}$

- **Çözüm.**
  1. $(2x^3)(3x^5) = 2 \cdot 3 \cdot x^{3+5} = 6x^8$
  2. $x^5 x^{-9} = x^{5+(-9)} = x^{-4} = \dfrac{1}{x^4}$
  3. $\dfrac{x^5}{x^7} = x^{5-7} = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$
  4. $\dfrac{x^{-3}}{x^{-4}} = x^{-3-(-4)} = x^{-3+4} = x^1 = x$
  5. $(u^{-3}v^2)^{-2} = (u^{-3})^{-2}(v^2)^{-2} = u^6 v^{-4} = \dfrac{u^6}{v^4}$
  6. $\left(\dfrac{y^{-5}}{y^{-2}}\right)^{-2} = \dfrac{(y^{-5})^{-2}}{(y^{-2})^{-2}} = \dfrac{y^{10}}{y^4} = y^6$
  7. $\dfrac{4m^{-3}n^{-5}}{6m^{-4}n^3} = \dfrac{2}{3}m^{-3-(-4)}n^{-5-3} = \dfrac{2}{3}m^{-3+4}n^{-8} = \dfrac{2}{3}m^1 n^{-8} = \dfrac{2m}{3n^8}$

- **Örnek.** $\dfrac{1}{25^x} = 0.00032$ olduğuna göre, x in değerini bulunuz.
- **Çözüm.** Eşitliğin sol tarafı

$$\frac{1}{25^x} = \left(\frac{1}{5^2}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$$

şeklinde yazılabilir. Sağ tarafı ise

$$0.00032 = \frac{32}{100000} = \frac{2^5}{10^5} = \left(\frac{2}{10}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}\right)^5$$

olduğundan

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^5 \Longrightarrow 2x = 5 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$$

bulunur.

- **Örnek.**

$$9^{x+2} = 9^{x+1} - 9^x + 5913$$

olduğuna göre x kaçtır?
- **Çözüm.** Verilen ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} 9^{x+2} - 9^{x+1} + 9^x &= 5913 \\ 9^x\left(9^2 - 9 + 1\right) &= 5913 \\ 73 \cdot 9^x &= 5913 \\ 9^x &= 81 \end{aligned}$$

olacağından $x = 2$ bulunur.

- **Örnek.** $(x+2)^3 = (3x)^3$ olduğuna göre x in alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** Kuvvet tek olduğundan

$$x + 2 = 3x$$

olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} x + 2 &= 3x \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

olmalıdır.

- **Örnek.** $(x-6)^4 = (2x)^4$ olduğuna göre x in alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** Kuvvet çift olduğundan

$$x-6 = 2x \text{ veya } x-6=-2x$$

olmalıdır. Buna göre

  - $x-6=2x$ ise

$$\begin{aligned} x-6 &= 2x \\ x &= -6 \end{aligned}$$

  - $x-6=-2x$ ise

$$\begin{aligned} x-6 &= -2x \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

bulunur.

- **Örnek.**

$$\frac{16^{x+1}}{32\cdot 4^{2x}+8^{x-1}\cdot 2^{x+7}}$$

kesrini en sade halde yazınız.
- **Çözüm.** İfade 2 nin kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{16^{x+1}}{32\cdot 4^{2x}+8^{x-1}\cdot 2^{x+7}} &= \frac{2^{4x+4}}{2^5\cdot 2^{4x}+2^{3x-3}\cdot 2^{x+7}} \\ &= \frac{2^{4x+4}}{2^{4x+5}+2^{4x+4}} \\ &= \frac{2^4}{2^5+2^4} \\ &= \frac{1}{2+1} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- **Örnek.**

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-x-3}$$

olduğuna göre, x in en küçük tamsayı değerini bulunuz.
- **Çözüm.**

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{x+3}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 2x+1 &> x+3 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

olmalıdır. Buna göre, x in en küçük tamsayı değeri 3 tür.

- **Örnek.**

$$\frac{(-0.0002)^2\cdot(0.1)^{-4}}{(-0.005)^3\cdot(-0.05)^{-2}}$$

ifadesini sadeleştiriniz
- **Çözüm.** İfade 10 un kuvvetlerine göre düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{(-0.0002)^2\cdot(0.1)^{-4}}{(-0.005)^3\cdot(-0.05)^{-2}} &= \frac{\left(2\cdot 10^{-4}\right)^2\cdot\left(10^{-1}\right)^{-4}}{-\left(5\cdot 10^{-3}\right)^3\cdot\left(5\cdot 10^{-2}\right)^{-2}} \\ &= -\frac{2^2\cdot 10^{-8}\cdot 10^4}{5^3\cdot 10^{-9}\cdot 5^{-2}\cdot 10^4} \\ &= -\frac{2^2\cdot 10^{-4}}{5\cdot 10^{-5}} \\ &= -\frac{2^2\cdot 10}{5} \\ &= -8 \end{aligned}$$

- **Örnek.**

$$(x-2)^{2x+4} = 1$$

eşitliğini sağlayan kaç tane x değeri vardır?

- **Çözüm.** Eşitliğin sağlanabilmesi için üç farklı durum olabilir:
  - $2x+4=0$ ve $x=-2$ olabilir. Bu durumda $x=-2$ için $x-2 \neq 0$ olduğuna dikkat edilmelidir.
  - $x-2=1$ ve $x=3$ olabilir.
  - $x-2=-1$ ve $x=1$ olabilir. Bu durumun sağlanabilmesi için kuvvet yani $2x+4$ çift olmalıdır. $2 \cdot 1+4=6$ olduğundan $x=1$ olabilir.

- **Örnek.** a ve b tamsayılar ve

$$2^{a+3} = 3^{b-2}$$

olduğuna göre a ve b nin değerlerini bulunuz.

- **Çözüm.** 2 ve 3 ün tamsayı kuvvetlerinin birbirine eşit olması ancak ve ancak kuvvetleri 0 olduğunda mümkün olabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} a+3 &= 0 \Longrightarrow a=-3 \\ b-2 &= 0 \Longrightarrow b=2 \end{aligned}$$

olmalıdır.

- **Örnek.**

$$2^a = 3 \text{ ve } 2^b = 27$$

olduğuna göre

$$\frac{a-b}{a+b}$$

ifadesinin değerini bulunuz.

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 2^b &= 27 = 3^3 \\ 2^b &= (2^a)^3 = 2^{3a} \\ b &= 3a \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{a-3a}{a+3a} = -\frac{2a}{4a} = -\frac{1}{2}$$

- **Bilgi.** A ve n birer doğal sayı olmak üzere A sayısı k basamaklı ise $A.10^n$ sayısı $k+n$ basamaklıdır.
- **Örnek.** $20^4 \cdot 40^3$ sayısı kaç basamaklıdır?
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 20^4 \cdot 40^3 &= 2^4 \cdot 10^4 \cdot 4^3 \cdot 10^3 \\ &= 2^4 \cdot 2^6 \cdot 10^7 \\ &= 2^{10} \cdot 10^7 \\ &= 1024 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

olduğundan verilen sayı

$$4+7=11$$

basamaklıdır.

- **Örnek.**

$$8^{-3a} = 512$$

olduğuna göre, 3^{3a} kaçtır?

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 2^{-9a} &= 2^9 \\ -9a &= 9 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

olduğundan

$$3^{3a} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

olur.

- **Örnek.**

$$\left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{4}{3}}, \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{6}{5}}, \left(\frac{11}{10}\right)^{\frac{5}{4}}$$

sayılarını sıralayınız.

- **Çözüm.**

$$\frac{11}{10} > 1, \frac{10}{11} < 1$$

ve

$$\frac{4}{3} > \frac{5}{4}$$

olduğundan

$$\frac{11}{10}^{\frac{4}{3}} > \frac{11}{10}^{\frac{5}{4}} > \left(\frac{10}{11}\right)^{\frac{6}{5}}$$

olmalıdır.

- **Örnek.**

$$x^{200} < 5^{300}$$

eşitsizliğini sağlayan en büyük x tamsayısı kaçtır?

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} \left(x^2\right)^{100} &< \left(5^3\right)^{100} \\ \left(x^2\right)^{100} &< 125^{100} \end{aligned}$$

olduğundan

$$x^2 < 125$$

olacağından x en fazla 11 olmalıdır.

- **Örnek.**

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{x+3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{-x-3}$$

şartını sağlayan en küçük x tamsayı değerini bulunuz.

- **Çözüm.** Verilen ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+6} &\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{-x-3} \\ 2x+6 &\geq -x-3 \\ 3x &\geq -9 \\ x &\geq -3 \end{aligned}$$

olacağından en küçük x tamsayısı $x = -3$ olarak bulunur.

- **Alıştırmalar.**
  - Aşağıdakileri basitleştiriniz ve cevabı pozitif üslü olarak yazınız.

1. $(3y^4)(2y^3)$ $\{\text{Cevap: } 6y^7\}$
2. $m^2 m^{-6}$ $\left\{\text{Cevap: } \dfrac{1}{m^4}\right\}$
3. $(u^3 v^{-2})^{-2}$ $\left\{\text{Cevap: } \dfrac{v^4}{u^6}\right\}$
4. $\left(\dfrac{y^{-6}}{y^{-2}}\right)^{-1}$ $\{\text{Cevap: } y^4\}$
5. $\dfrac{8x^{-2}y^{-4}}{6x^{-5}y^2}$ $\left\{\text{Cevap: } \dfrac{4x^3}{3y^6}\right\}$

  - Aşağıdaki kesirleri en sade halde yazınız.

1. $\dfrac{1-x^{-2}}{x-x^{-1}}$ $\left\{\text{Cevap: } \dfrac{1}{x}\right\}$
2. $\dfrac{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}}$ $\left\{\text{Cevap: } \dfrac{v+u}{v-u}\right\}$
3. $(x^{m-1})^m \cdot (x^{m+1})^m$ $\left\{\text{Cevap: } (x)^{2m^2}\right\}$

- Aşağıdaki eşitliklerde x değerini bulunuz.

1. $3^{x^2-3} = x^6$, x tamsayı $\{\text{Cevap: } -3, 3\}$
2. $8^{x+2} + 2^{3x+2} = 17 \cdot 2^8$ $\{\text{Cevap: } 2\}$
3. $(x-3)^{(x-3)(x-1)} = 1$ $\{\text{Cevap: } 4, 1\}$
4. $x = 2^{2y+4}$ ve $4x^3 = 2^{10y+4}$ $\{\text{Cevap: } 2^9\}$
5. $\dfrac{6^x - 15^x}{8^x - 20^x} = \dfrac{64}{27}$ $\{\text{Cevap: } -3\}$
6. $9^{x+2} = 240 + 9^x$ $\{\text{Cevap: } \frac{1}{2}\}$

6. Köklü İfadeler (İrrasyonel Sayılar)

6.1 Köklü İfade Tanımı

- Her bir pozitif n doğal sayısı için

$$r^n = a$$

ise r ye a nın n **inci (kuvvetten) köklerinden biri** denir ve bu kökler

$$r = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

şeklinde gösterilir ve n. dereceden kök a şeklinde okunur. Birden fazla kök olduğu için köklerden n çift olduğunda pozitif reel sayı olanını, n tek olduğunda ise reel sayı olanını kabul edeceğiz.
- $n = 1$ olduğunda kök yazılmaz. Başka bir ifade ile $\sqrt[1]{a} = a$ dır.
- $n = 2$ olduğunda kökün derecesi yazılmaz. Başka bir ifade ile $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ (Kare kök a diye okunur.)
- $n = 3$ ise $\sqrt[3]{a}$ (Küp kök a diye okunur.)
- $n = 4$ ise $\sqrt[4]{a}$ (Dördüncü dereceden kök a diye okunur.)

6.2 Temel Özellikler

- **Özellikler**
  1. $\sqrt[2n]{a}$ ifadesinin tanımlı (yani reel sayı) olabilmesi için $a \geq 0$ olmalıdır. $\sqrt[2n-1]{a}$ ifadesi daima tanımlıdır.
  2. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$ ve $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = a$
  3. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$ (n çift, m tek ise a negatif olamaz)
  4. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}}$ (Kök derecesini genişletme veya sadeleştirme)
  5. $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{a^m b}$
  6. $x\sqrt[n]{a} - y\sqrt[n]{a} + z\sqrt[n]{a} = (x - y + z)\sqrt[n]{a}$ (Toplama çıkarma yapılabilmesi için dereceler ve kök içleri aynı olmalıdır)
  7. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (Çarpma ve bölme yapılabilmesi için dereceler aynı olmalıdır)
  8. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

- **Örnek.** Aşağıdakileri hesaplayınız.
  1. $4^{\frac{1}{2}}$
  2. $-4^{\frac{1}{2}}$
  3. $(-4)^{\frac{1}{2}}$
  4. $8^{\frac{1}{3}}$
  5. $(-8)^{\frac{1}{3}}$
- **Çözüm.**
  1. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
  2. $-4^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{4} = -2$
  3. $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$ Reel sayı değil.
  4. $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
  5. $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$

- **Örnek.** Aşağıdaki ifadeleri basitleştiriniz. Sonuç rasyonel üslü ise onu köklü sayı biçiminde yazınız.
  1. $\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)$
  2. $(-8)^{\frac{5}{3}}$
  3. $\left(2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{-2}{3}}\right)^3$
  4. $\left(\dfrac{4x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

- **Çözüm.**
  1. $\left(3x^{\frac{1}{3}}\right)\left(2x^{\frac{1}{2}}\right)=6x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=6x^{\frac{5}{6}}=6\sqrt[6]{x^5}$
  2. $(-8)^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{-8^5}=\sqrt[3]{-\left(2^3\right)^5}=\sqrt[3]{-2^{15}}=-2^{\frac{15}{3}}=-2^5=-32$
  3. $\left(2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{-2}{3}}\right)^3=2^3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3\left(y^{\frac{-2}{3}}\right)^3=8xy^{-2}$
  4. $\left(\dfrac{4x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(4x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(4x^{-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{12}}=\dfrac{4^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{12}}}=\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt[12]{x}}=\dfrac{2}{\sqrt[12]{x}}$

- **Örnek.**

$$\sqrt[3]{-3^3}-\sqrt{(-9)^2}$$

işleminin sonucunu bulunuz.

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{-3^3}-\sqrt{(-9)^2} &= -3-|-9|\\ &= -3-9\\ &= -12\end{aligned}$$

- **Örnek.**

$$\frac{\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{300}}{\sqrt{75}}$$

işleminin sonucunu bulunuz.

- **Çözüm.** Kök içlerindeki sayılar asal çarpanlarına ayrılırsa sonuç

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3\cdot2^2}+\sqrt{3\cdot2^4}-\sqrt{3\cdot2^2\cdot5^2}}{\sqrt{3\cdot5^2}} &= \frac{2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-10\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}\\ &= \frac{-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=-\frac{4}{5}\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.**
$$\frac{\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{50}}{\sqrt{32}}$$
işleminin sonucunu bulunuz.
- **Çözüm.** Kök içlerindeki sayılar asal çarpanlarına ayrılırsa sonuç
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2^3}-\sqrt{2\cdot 3^2}+\sqrt{2\cdot 5^2}}{\sqrt{2^5}} &= \frac{2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\\ &= \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=1\end{aligned}$$
olarak elde edilir.

- **Örnek.** Aşağıdakileri, köklü sayıların özelliklerini kullanarak sadeleştiriniz.
  1. $\sqrt[4]{(3x^4y^3)^4}$
  2. $\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{2}$
  3. $\sqrt[3]{\frac{xy}{27}}$
- **Çözüm.**
  1. $\sqrt[4]{(3x^4y^3)^4}=\left(3x^4y^3\right)^{\frac{4}{4}}=\left|3x^4y^3\right|$
  2. $\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{8\cdot 2}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$
  3. $\sqrt[3]{\frac{xy}{27}}=\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{xy}}{3}$

- **Örnek.** Aşağıdaki işlemleri yapınız.
  1. $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{9}$
  2. $\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{8}}$
- **Çözüm.**
  1. $$\begin{aligned}\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{2\cdot 12\cdot 9}=\sqrt[3]{2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 3^2}\\ &= \sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=2\cdot 3=6\end{aligned}$$
  2. Kök dereceleri 12 de eşitlenir ve işlem yapılırsa
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[3]{16}}{\sqrt[6]{8}} &= \frac{\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{16^4}}{\sqrt[12]{8^2}}=\frac{\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{2^{16}}}{\sqrt[12]{2^6}}\\ &= \sqrt[12]{\frac{2^3\cdot 2^{16}}{2^6}}=\sqrt[12]{2^{13}}=\sqrt[12]{2^{12}\cdot 2}\\ &= 2\sqrt[12]{2}\end{aligned}$$

6.3 Paydanın Rasyonel Yapılması

- Paydası irrasyonel olan bir kesir uygun çarpanlar yardımıyla genişletilir ve paydası rasyonel olacak şekilde yazılır.

Payda	**Çarpan**	**Çarpım**
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	a
$a\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$	ab
$\sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$	a
$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$a-b$
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$a-b$

- **Örnek.** Aşağıdakilerin her birinde paydayı rasyonel yapınız.
  1. $\dfrac{6x}{\sqrt{2x}}$
  2. $\dfrac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$
  3. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}}$
- **Çözüm.**
  1. $\dfrac{6x}{\sqrt{2x}} = \dfrac{6x\cdot\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{2x}} = \dfrac{6x\sqrt{2x}}{2x} = 3\sqrt{2x}$
  2. $\dfrac{6\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{6\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \dfrac{6\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5} =$
     $\dfrac{6\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{2} = 3\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)$
  3. $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{2\sqrt[4]{2^3}}{2} = \sqrt[4]{2^3}$

6.4 İrrasyonel Sayıların Sıralanması

- Köklü sayılarda sıralama yapılırken genelde iki yöntem kullanılır:

1. Köklü ifadenin tanımlı olduğu durumlarda

$$a < b < c \iff \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} < \sqrt[n]{c}$$

kuralına göre sıralama yapılır. Kök dereceleri aynı olmadığında

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k\cdot n]{a^{k\cdot m}}$$

kuralı yardımıyla kök dereceleri eşitlenir ve sıralama yapılır.

2. Sayıların aynı dereceden kuvvetleri alınarak kökten kurtarılır ve sayıların sıralaması yapılır. Pozitif a, b, c sayıları için sıralama yapılırken

$$a < b < c \iff a^n < b^n < c^n$$

özelliği kullanılır. (n pozitif tamsayı)

- **Örnek.** Aşağıdaki sayıları sıralayınız.
  1. $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}, z = \sqrt{5}$
  2. $x = \sqrt{2}, y = \sqrt[3]{3}, z = \sqrt[4]{5}$
  3. $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, z = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$
- **Çözüm.**
  1. $2 < 3 < 5$ olduğundan

     $$x < y < z$$

     olacaktır.
  2. Köklerin derecelerini 12 yapalım:

     $$\begin{aligned} x &= \sqrt[12]{2^6}, y = \sqrt[12]{3^4}, z = \sqrt[12]{5^3} \\ x &= \sqrt[12]{64}, y = \sqrt[12]{81}, z = \sqrt[12]{125} \end{aligned}$$

     Kök içlerine göre sıralama yaparsak

     $$x < y < z$$

     olur.
  3. Verilen sayıların karelerini alalım:

     $$x^2 = \frac{1}{2}, y^2 = \frac{4}{3}, z^2 = \frac{9}{5}$$

     Sayılar arasındaki sıralama ile kareleri arasındaki sıralama aynı olacağından

     $$x^2 < y^2 < z^2 \Longrightarrow x < y < z$$

6.5 Alıştırmalar

- **Örnek.** $\sqrt{5+\sqrt{22-\sqrt{36}}}$ işleminin en sade hali nedir?
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} \sqrt{5+\sqrt{22-\sqrt{36}}} &= \sqrt{5+\sqrt{22-6}} \\ &= \sqrt{5+\sqrt{16}} \\ &= \sqrt{5+4} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

- **Örnek.** $\sqrt{10-\sqrt{4-\sqrt{7-\sqrt[3]{-8}}}}$ işleminin en sade hali nedir?
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}\sqrt{10-\sqrt{4-\sqrt{7-\sqrt[3]{-8}}}} &= \sqrt{10-\sqrt{4-\sqrt{7-(-2)}}}\\ &= \sqrt{10-\sqrt{4-\sqrt{9}}}\\ &= \sqrt{10-\sqrt{4-3}}\\ &= \sqrt{9}\\ &= 3\end{aligned}$$

- **Örnek.** $\dfrac{\sqrt{9}+\sqrt{5^2}}{\sqrt{(-3)^2}-\sqrt{(-2)^2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{9}+\sqrt{5^2}}{\sqrt{(-3)^2}-\sqrt{(-2)^2}} &= \frac{3+5}{|-3|-|-2|}\\ &= \frac{8}{3-2}\\ &= 8\end{aligned}$$

- **Örnek.** $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt[12]{64}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}}$ işleminin sonucunu bulunuz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt[12]{64}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}} &= \frac{\sqrt[12]{8^6}\cdot\sqrt[12]{64}}{\sqrt[12]{4^4}\cdot\sqrt[12]{2^4}}\\ &= \frac{\sqrt[12]{2^{18}}\cdot\sqrt[12]{2^6}}{\sqrt[12]{2^8}\cdot\sqrt[12]{2^4}}\\ &= \sqrt[12]{\frac{2^{18}\cdot 2^6}{2^8\cdot 2^4}}\\ &= \sqrt[12]{2^{24-12}}\\ &= 2\end{aligned}$$

- **Örnek.** $\dfrac{1}{4-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{4+\sqrt{2}}$ işleminin en sade halini bulunuz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-\sqrt{2}}-\frac{1}{4+\sqrt{2}} &= \frac{4+\sqrt{2}}{\left(4-\sqrt{2}\right)\left(4+\sqrt{2}\right)}-\frac{\left(4-\sqrt{2}\right)}{\left(4+\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{2}\right)}\\ &= \frac{4+\sqrt{2}}{14}-\frac{\left(4-\sqrt{2}\right)}{14}\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{14}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{7}\end{aligned}$$

- **Örnek.** $\sqrt{\left(2-\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}\right)^2}$ işleminin sonucu kaçtır?
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(2-\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}\right)^2} &= \left|2-\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}\right| \\ &= \left|2-\left|\sqrt{5}-3\right|\right| \\ &= \left|2-\left(3-\sqrt{5}\right)\right| \\ &= \left|\sqrt{5}-1\right| \\ &= \sqrt{5}-1\end{aligned}$$

- **Örnek.** $\dfrac{\sqrt{1.47}}{\sqrt{0.48}-\sqrt{0.27}}$ işleminin sonucu kaçtır?
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1,47}}{\sqrt{0,48}-\sqrt{0,27}} &= \frac{\sqrt{\frac{147}{100}}}{\sqrt{\frac{48}{100}}-\sqrt{\frac{27}{100}}} \\ &= \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{48}-\sqrt{27}} \\ &= \frac{7\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3\sqrt{3}} \\ &= 7\end{aligned}$$

- **Örnek.** $\dfrac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$ işleminin sonucu kaçtır?
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}} \\ &= \frac{\frac{5\sqrt{6}}{6}}{-\frac{\sqrt{6}}{6}} \\ &= -5\end{aligned}$$

- **Alıştırmalar.**
  - Aşağıdaki ifadeleri basitleştiriniz. Sonuç rasyonel üslü ise onu köklü sayı biçiminde yazınız.

1. $9^{\frac{3}{2}}$ $\{\text{Cevap: } 27\}$
2. $(-27)^{\frac{4}{3}}$ $\{\text{Cevap: } 81\}$
3. $\left(5y^{\frac{1}{4}}\right)\left(2y^{\frac{1}{3}}\right)$ $\left\{\text{Cevap: } 10\sqrt[12]{y^7}\right\}$
4. $\left(2x^{\frac{-3}{4}}y^{\frac{-1}{4}}\right)^4$ $\left\{\text{Cevap: } \dfrac{16}{x^3y}\right\}$
5. $\left(\dfrac{8x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}$ $\left\{\text{Cevap: } \dfrac{2}{\sqrt[18]{x}}\right\}$

  - Aşağıdakilerin her birinde paydayı rasyonel yapınız.

1. $\dfrac{12ab^2}{\sqrt{3ab}}$ $\left\{\text{Cevap: } 4b\sqrt{3ab}\right\}$
2. $\dfrac{9}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ $\left\{\text{Cevap: } 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)\right\}$
3. $\dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ $\left\{\text{Cevap: } (x+y)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\right\}$

- **Alıştırmalar.**
  - Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını en sade biçimde yazınız.

1. $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \dfrac{3}{\sqrt{3}}$ $\left\{\text{Cevap: } \sqrt{5}\right\}$
2. $\sqrt{0.09} + \sqrt{0.49} - \sqrt{0.64}$ $\{\text{Cevap: } 0.2\}$
3. $\dfrac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{75}}$ $\{\text{Cevap: } 2\}$
4. $\dfrac{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt{3}}$ $\left\{\text{Cevap: } \sqrt[12]{3^{11}}\right\}$

  - Aşağıda sayıları sıralayınız.

1. $a = \sqrt[3]{3}, b = \sqrt{5}, c = \sqrt[4]{2}$ $\{\text{Cevap: } b > a > c\}$
2. $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, b = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}, c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\{\text{Cevap: } b > a > c\}$

7. Modüler Aritmetik

7.1 Tanım

- 4. bölümde A, B, C ve K bir tamsayı, $B \neq 0$ ve $K \geq 0$ olduğunda

$$A = B \cdot C + K \text{ ve } 0 \leq K < |B|$$

ise K ya A tamsayısının B tamsayısına bölümünden kalan demiştik. Örneğin;

  - $$32 = 6 \cdot 5 + 2$$

    olduğundan 32 in 6 ile bölümünden kalan 2 dir.
  - $$-43 = 7 \cdot (-7) + 6$$

    olduğundan -43 ün 7 ile bölümünden kalan 6 dır.

- x ve y tamsayılar, m ise 1 den büyük bir tamsayı olsun. x ve y sayılarının m ile bölümlerinden kalanlar aynı ise x **ve** y **sayısı** m **moduna göre birbirine denktir** denir

$$x \equiv y \pmod{m} \text{ veya } y \equiv x \pmod{m}$$

şeklinde gösterilir. x ve y sayılarının m ile bölümlerinden kalanlar aynı değil ise x **ve** y **sayısı** m **moduna göre birbirine denk değildir** denir.
- Örneğin; 30 ve 72 sayılarının 7 ile bölümlerinden kalan aynı olduğundan

$$30 \equiv 72 \pmod{7} \text{ veya } 72 \equiv 30 \pmod{7}$$

dir.
- Yukarıdaki tanımda x ve y sayılarının m ile bölümlerinden kalanların aynı olduğunda $x - y$ farkının m ile kalansız bölünebildiğine dikkat etmeliyiz. Sonuç olarak

$$\frac{x-y}{m}$$

bölümü bir tamsayıdır. Ya da başka bir ifade ile $x - y$ farkı m nin bir tam katıdır. Bunu k bir tamsayı olmak üzere

$$x - y = mk$$

şeklinde ifade edebiliriz.

- **Örnek.**

$$89 \equiv x \pmod{5}$$

denkliğinde x in alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** 89 sayısının 5 ile bölümünden kalan 4 tür. Bu durumda x tamsayıları 4 sayısına 5 in tam katları eklenerek aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots$$

- **Örnek.**

$$-45 \equiv x \pmod{8}$$

denkliğinde x in alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** -45 sayısının 8 ile bölümünden kalan 3 tür. Bu durumda x tamsayıları 3 sayısına 8 in tam katları eklenerek aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\ldots, -21, -13, -5, 3, 11, 19, 27, \ldots$$

- **Örnek.** $41 \equiv 5 \pmod m$ olduğuna göre m nin alabileceği değerleri bulunuz.
- **Çözüm.** $41 \equiv 5 \pmod m$ olarak verildiğine göre

$$\frac{41-5}{m} = \frac{36}{m}$$

ifadesi bir tamsayı olmalıdır. Bunun için m tamsayısı 36 yı bölmelidir. Bu durumda m nin alabileceği değerler aşağıdaki gibidir:

$$2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36$$

- **Örnek.** $x \equiv 2 \pmod 7$ ve $x \equiv 2 \pmod 5$ denkliklerini sağlayan en küçük üç basamaklı x pozitif tamsayısını bulunuz.
- **Çözüm.** k ve m tamsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= 7k+2 \text{ ve } x = 5m+2 \\ x-2 &= 7k \text{ ve } x-2 = 5m \end{aligned}$$

olmalıdır. $x-2$ sayısı 5 ve 7 ile aynı anda bölündüğüne göre $x-2$, 35 olabilir. Bu durumda x in değeri 37 olur. Bu sayıya 35 in katları eklenirse x in alabileceği değerler

$$37, 72, 107, \ldots$$

şeklinde olacaktır. Sonuç olarak en küçük üç basamaklı x pozitif tamsayısı 107 dir.

7.2 Özellikler

- $x \equiv y \pmod m$ ve $a \equiv b \pmod m$ olmak üzere

1. $x + a \equiv y + b \pmod m$ (İki denklik taraf tarafa toplanabilir)
2. $x - a \equiv y - b \pmod m$ (İki denklik taraf tarafa çıkarılabilir)
3. $x \cdot a \equiv y \cdot b \pmod m$ (İki denklik taraf tarafa çarpılabilir)
4. $x + c \equiv y + c \pmod m$ (Bir denkliğin iki tarafına aynı sayı eklenebilir)
5. $x - c \equiv y - c \pmod m$ (Bir denkliğin iki tarafından aynı sayı çıkarılabilir)
6. $x^n \equiv y^n \pmod m$, n tamsayı (Bir denkliğin iki tarafının aynı tamsayı kuvveti alınabilir)
7. $kx \equiv ky \pmod m$ ise $x \equiv y \left(\bmod \frac{m}{\text{ebob}(k,m)}\right)$
8. $\frac{x}{a} \equiv \frac{y}{b} \pmod m$ her zaman doğru değildir.

- **Örnek.** 19^{53} sayısının 8 ile bölümünden kalan kaçtır?
- **Çözüm.**

$$19 \equiv 3 \pmod 8$$

ise

$$19^{53} \equiv 3^{53} \pmod 8$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} 3^1 &\equiv 3 \pmod 8 \\ 3^2 &\equiv 1 \pmod 8 \end{aligned}$$

olduğundan

$$3^{53} = \left(3^2\right)^{26} \cdot 3 \equiv 3 \pmod 8$$

olur.

- **Örnek.** $2222^{5555} \equiv x \pmod 7$ denkliğini sağlayan en küçük x doğal sayısı kaçtır?
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 2222 &\equiv 3 \pmod 7 \\ 2222^2 &\equiv 2 \pmod 7 \\ 2222^3 &\equiv 6 \pmod 7 \\ 2222^4 &\equiv 4 \pmod 7 \\ 2222^5 &\equiv 5 \pmod 7 \\ 2222^6 &\equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 2222^{5555} &\equiv 3^{5555} \equiv 3^{5550} 3^5 \pmod 7 \\ &\equiv 3^5 \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7 \end{aligned}$$

olur.

- **Örnek.** $38 \cdot 4^{48} + 14 \cdot 15^{78}$ sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?
- **Çözüm.**
$$38 \equiv 2 \pmod 9,\ 14 \equiv 5 \pmod 9,\ 15 \equiv 6 \pmod 9$$
olduğundan
$$38 \cdot 4^{48} + 14 \cdot 15^{78} \equiv 2 \cdot 4^{48} + 5 \cdot 6^{78} \pmod 9$$
yazılabilir. Ayrıca
$$\begin{aligned} 4^{48} &\equiv 1 \pmod 9 \\ 6^{78} &\equiv 0 \pmod 9 \end{aligned}$$
olacağından
$$2 \cdot 4^{48} + 5 \cdot 6^{78} \equiv 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 \equiv 2 \pmod 9$$
olur.

- **Örnek.** $3^{1001} \cdot 7^{1002} + 13^{1003}$ sayısının birler basamağı kaçtır?
- **Çözüm.** Bir sayının birler basamağındaki rakam o sayının 10 ile bölümünden kalana eşittir.
$$3^{1001} \equiv 3 \pmod{10},\ 7^{1002} \equiv 9 \pmod{10},\ 13^{1003} \equiv 7 \pmod{10}$$
olduğundan
$$\begin{aligned} 3^{1001} \cdot 7^{1002} + 13^{1003} &\equiv 3 \cdot 9 + 7 \pmod{10} \\ &\equiv 4 \pmod{10} \end{aligned}$$
olur. Demek ki sayının birler basamağı 4 tür.

- **Örnek.** 1995^{1995} sayısının 9 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.
- **Çözüm.**
$$1995^{1995} \equiv x \pmod 9$$
denkliğini çözmek istiyoruz.
$$1995 \equiv 6 \pmod 9$$
olduğundan
$$6^{1995} \equiv x \pmod 9$$
denkliğini çözmemiz yeterlidir.
$$\begin{aligned} 6^1 &\equiv 6 \pmod 9 \\ 6^2 &\equiv 0 \pmod 9 \\ 6^3 &\equiv 0 \pmod 9 \\ &\vdots \\ 6^{1995} &\equiv 0 \pmod 9 \end{aligned}$$
olduğundan 1995^{1995} sayısının 9 ile bölümünden elde edilen kalan 0 dır.

- **Örnek.** 2018^{2019} sayısının birler basamağını bulunuz.
- **Çözüm.** Bir sayının birler basamağı o sayının 10 a bölümünden kalan olduğundan
$$2018^{2019} \equiv x \pmod{10}$$
denkliğini çözmeliyiz.
$$2018 \equiv 8 \pmod{10}$$
olduğundan
$$8^{2019} \equiv x \pmod{10}$$
denkliğini çözmemiz yeterlidir.
$$\begin{aligned} 8^1 &\equiv 8 \pmod{10} \\ 8^2 &\equiv 4 \pmod{10} \\ 8^3 &\equiv 2 \pmod{10} \\ 8^4 &\equiv 6 \pmod{10} \\ 8^5 &\equiv 8 \pmod{10} \\ &\vdots \end{aligned}$$
olur. Dikkat edilirse kalanlar $8, 4, 2, 6$ şeklinde periyodiktir. $2019 \equiv 3 \pmod 4$ olduğundan 2018^{2019} sayısının birler basamağı 2 dir.

- **Örnek.** Tam 12 yi gösteriyorken çalıştırlan bir saatin akrebi 1999 saatlik süre dolduğunda kaçı gösterir?
- **Çözüm.**

$$1999 \equiv x \pmod{12}$$

denkliğini çözmeliyiz. 1999 un 12 ile bölümünden elde edilen kalan 7 olduğuna göre akrep 7 yi gösterir.
- **Örnek.** 5 günde bir nöbet tutan bir doktor ilk nöbetini çarşamba günü tuttuğuna göre 38. nöbetini hangi gün tutar?
- **Çözüm.** Doktor ilk nöbetini tuttuğuna göre 37 nöbet daha tutmalıdır. Bunun için $37 \cdot 5 = 185$ gün geçmelidir.

$$185 \equiv 3 \pmod{7}$$

olduğundan,

$$\underset{\text{Çarşamba}}{0}, \underset{\text{Perşembe}}{1}, \underset{\text{Cuma}}{2}, \underset{\text{Cumartesi}}{3}$$

şeklinde düşünülürse 38. nöbetini cumartesi günü tutar.

- **Örnek.** Bir elektronik saat şu anda 15 : 40 ı göstermektedir.
  - 119 saat sonra kaçı gösterir?
  - 119 dakika sonra kaçı gösterir?
- **Çözüm.** Elektronik saatler 24 saate bir aynı saati gösterir.
  -
  $$119 \equiv 23 \pmod{24}$$
  ve
  $$15:40 + 23:00 \equiv 38:40 \equiv 14:40$$
  olduğundan 119 saat sonra saat 14 : 40 ı gösterir.
  - 119 dakika 1 saat 59 dakikadır.
  $$15:40 + 1:59 \equiv 16:99 \equiv 17:39$$
  olduğundan 119 dakika sonra saat 17 : 39 u gösterecektir.

- **Örnek.** Bugün günlerden cuma olduğuna göre,
  - 320 gün sonra hangi gündür?
  - 320 gün önce hangi gündü?
- **Çözüm.** $320 \equiv 5 \pmod{7}$ olduğundan
  -
  $$\underset{\text{Cuma}}{0}, \underset{\text{Cumartesi}}{1}, \underset{\text{Pazar}}{2}, \underset{\text{Pazartesi}}{3}, \underset{\text{Salı}}{4}, \underset{\text{Çarşamba}}{5}$$
  olduğundan 320 gün sonra çarşambadır
  - Benzer şekilde düşünüp günleri geriye doğru saymalıyız:
  $$\underset{\text{Cuma}}{0}, \underset{\text{Perşembe}}{1}, \underset{\text{Çarşamba}}{2}, \underset{\text{Salı}}{3}, \underset{\text{Pazartesi}}{4}, \underset{\text{Pazar}}{5}$$
  olduğundan 320 gün önce pazardır.

7.3 Denklik (Kalan) Sınıfları

- m ile bölündüğünde x kalanını veren tamsayılar kümesi $\overline{x}$ ile gösterilir ve x in **denklik (veya kalan) sınıfları** olarak adlandırılır. Bu durumda m modundaki tüm denklik sınıfları

$$\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, .., \overline{m-1}$$

olacak şekilde m tanedir. Kalan sınıflarının oluşturduğu kümeye de **denklik (kalan) sınıfları kümesi denir** ve $\mathbb{Z}/m$ ile gösterilir.
- **Örnek.** 4 moduna göre denklik sınıfları

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{..., -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...\} \\ \overline{1} &= \{..., -7, -3, 1, 5, 9, 13, ...\} \\ \overline{2} &= \{..., -6, -2, 2, 6, 10, 14, ...\} \\ \overline{3} &= \{..., -5, -1, 3, 7, 11, 15, ...\} \end{aligned}$$

ve 4 moduna göre denklik sınıfları kümesi

$$\mathbb{Z}/4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$$

şeklindedir.
- m moduna göre aynı denklik sınıfında bulunan bir eleman üs olmamak şartıyla bir diğerinin yerine kullanılabilir.

- **Örnek.**
$$5 - x \equiv 4 \pmod{7}$$
olduğuna göre x in alabileceği pozitif en küçük üç değeri bulunuz.
- **Çözüm.** Denklik özellikleri kullanılırsa
$$\begin{aligned} x &\equiv 5 - 4 \pmod{7} \\ x &\equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$$
olur. $\mathbb{Z}/7$ de 1 in denklik sınıfı
$$\overline{1} = \{..., -13, -6, 1, 8, 15, 22, ...\}$$
olduğundan x in alabileceği pozitif en küçük üç değer $1, 8$ ve 15 tir.

- **Örnek.**
$$2x - 1 \equiv 5 \pmod{8}$$
denkliğini sağlayan en büyük negatif tamsayı ile en küçük pozitif tamsayıyı bulunuz.
- **Çözüm.** Denklik özelliklerinden
$$\begin{aligned} 2x &\equiv 6 \pmod{8} \\ x &\equiv 3 \pmod{4} \end{aligned}$$
olur. $\mathbb{Z}/4$ te 3 ün denklik sınıfı
$$\overline{3} = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}$$
olduğundan soruda verilen denkliği sağlayan en büyük negatif tamsayı ile en küçük pozitif tamsayı sırası ile -1 ve 3 tür.

- **Örnek.** $\mathbb{Z}/5$ te
$$\overline{2}x + \overline{3} = \overline{0}$$
denklemini çözünüz.
- **Çözüm.** Önce
$$2x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$$
denkliğini çözelim. Denklik özelliklerinden
$$\begin{aligned} 2x &\equiv -3 \pmod{5} \\ 2x &\equiv 2 \pmod{5} \\ x &\equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$$
olduğundan x sayısının alabileceği tüm değerler
$$..., -9, -4, 1, 6, 11, ...$$
şeklindedir. Bunu kısaca
$$\overline{1} = \{..., -9, -4, 1, 6, 11, ...\}$$
şeklinde gösteririz. Demek ki $\mathbb{Z}/5$ te verilen denklemin çözüm kümesi $\overline{1}$ dir.

- **Örnek.** $\mathbb{Z}/7$ de
$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-83}$$
işleminin sonucunu bulunuz.
- **Çözüm.** Öncelikle
$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-83} = \left(\frac{3}{4}\right)^{83}$$
olduğunu dikkate alalım. $\mathbb{Z}/7$ de
$$3 \equiv 10 \equiv 17 \equiv 24$$
olduğundan
$$\left(\frac{3}{4}\right)^{83} \equiv \left(\frac{24}{4}\right)^{83} \equiv 6^{83}$$
olarak yazılabilir.
$$\begin{aligned} 6^1 &\equiv 6 \pmod{7} \\ 6^2 &\equiv 1 \pmod{7} \\ &\cdots \\ 6^{83} &\equiv 6 \pmod{7} \end{aligned}$$
olur. Buna göre verilen işlemin sonucu $\overline{6}$ olmalıdır.

- **Örnek.** $\mathbb{Z}/6$ da karekökü olan sayıları bulunuz.
- **Çözüm.** $\mathbb{Z}/6$ da

$$\begin{aligned}
\overline{0}\cdot\overline{0} &= \overline{0} \Longrightarrow \sqrt{\overline{0}}=\overline{0}\\
\overline{1}\cdot\overline{1} &= \overline{1} \Longrightarrow \sqrt{\overline{1}}=\overline{1}\\
\overline{2}\cdot\overline{2} &= \overline{4} \Longrightarrow \sqrt{\overline{4}}=\overline{2}\\
\overline{3}\cdot\overline{3} &= \overline{3} \Longrightarrow \sqrt{\overline{3}}=\overline{3}\\
\overline{4}\cdot\overline{4} &= \overline{4} \Longrightarrow \sqrt{\overline{4}}=\overline{4}\\
\overline{5}\cdot\overline{5} &= \overline{1} \Longrightarrow \sqrt{\overline{1}}=\overline{5}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda karekökü olan sayılar $\overline{0},\overline{1},\overline{3}$ ve $\overline{4}$ tür.

- **Örnek.** $\mathbb{Z}/7$ de

$$\overline{5}\cdot\overline{x}+\sqrt{\overline{2}}=\overline{2}$$

denklemini çözünüz.

- **Çözüm.** $\mathbb{Z}/7$ de

$$\begin{aligned}
\overline{3}\cdot\overline{3} &= \overline{2} \Longrightarrow \sqrt{\overline{2}}=\overline{3}\\
\overline{4}\cdot\overline{4} &= \overline{2} \Longrightarrow \sqrt{\overline{2}}=\overline{4}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda
  - $\sqrt{\overline{2}}=\overline{3}$ için denklemin çözümü

$$\begin{aligned}
\overline{5}\cdot\overline{x}+\overline{3} &= \overline{2}\\
\overline{5}\cdot\overline{x} &\equiv \overline{6}\\
\overline{x} &\equiv \overline{4}
\end{aligned}$$

  tür.
  - $\sqrt{\overline{2}}=\overline{4}$ için denklemin çözümü benzer şekilde yapılırsa $\overline{x}\equiv\overline{1}$ bulunur. Sonuç olarak denklemin çözüm kümesi $\overline{x}=\{\overline{1},\overline{4}\}$ olacaktır.

- **Örnek.** $\mathbb{Z}/7$ de $\left(\frac{\overline{3}}{\overline{4}}\right)^{-61}$ kaçtır?
- **Çözüm.** $\mathbb{Z}/7$ de

$$\left(\frac{\overline{3}}{\overline{4}}\right)^{-61}=\left(\frac{\overline{4}}{\overline{3}}\right)^{61}$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\overline{4}}{\overline{3}}\right)^{61} &\equiv \left(\frac{39}{3}\right)^{61} \pmod 7\\
&\equiv (13)^{61} \pmod 7\\
&\equiv (-1)^{61} \pmod 7\\
&\equiv 6 \pmod 7
\end{aligned}$$

olacağından

$$\left(\frac{\overline{3}}{\overline{4}}\right)^{-61}=\overline{6}$$

olur.

7.4 Alıştırmalar

- **Alıştırma.** -86 sayısının 9 ile bölümünden elde edilen bölüm ve kalan kaçtır?
- **Çözüm.**

$$\begin{array}{rr|l}
 & -86 & \ \ 9 \\ \cline{3-3}
- & -90 & -10 \\ \cline{1-2}
 & 4 &
\end{array}$$

olduğundan elde edilen bölüm 10, ve kalan 4 tür.

- **Alıştırma.** $18 \equiv 3 \pmod{m}$ denkliğini sağlayan $m > 1$ sayılarının toplamı kaçtır?
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 18 - 3 &\equiv 0 \pmod{m} \\ 15 &\equiv 0 \pmod{m} \end{aligned}$$

olduğundan m doğal sayısı 15 i tam bölmelidir. 15 i bölen $m > 1$ sayıları

$$3, 5, 15$$

olduğundan bu sayıların toplamı 23 tür.

- **Alıştırma.** $7^x \equiv 1 \pmod{5}$ denkliğini sağlayan bütün doğal sayıları bulunuz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 7^1 &\equiv 2 \pmod{5} \\ 7^2 &\equiv 4 \pmod{5} \\ 7^3 &\equiv 3 \pmod{5} \\ 7^4 &\equiv 1 \pmod{5} \end{aligned}$$

olduğundan $x = 4n$, n tamsayı, şeklindeki bütün doğal sayılar verilen denkliği sağlar.

- **Alıştırma.** 2343^{70} sayısının birler basamağını bulunuz.
- **Çözüm.** Bir sayının birler basamağı o sayının 10 ile bölümünden kalandır. Buna göre

$$2343^{70} \equiv x \pmod{10}$$

denkliğini çözmeliyiz. $2343 \equiv 3 \pmod{10}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} 3^1 &\equiv 3 \pmod{10} \\ 3^2 &\equiv 9 \pmod{10} \\ 3^3 &\equiv 7 \pmod{10} \\ 3^4 &\equiv 1 \pmod{10} \end{aligned}$$

olur. $70 \equiv 2 \pmod{4}$ olduğundan

$$2343^{70} \equiv 9 \pmod{10}$$

olur. Yani sayının birler basamağı 9 dur.

- **Alıştırma.** $\mathbb{Z}/7$ de 6 nın denklik sınıfını bulunuz.
- **Çözüm.** Tamsayılardan 7 ile bölündüğünde 6 kalanını verenler $\mathbb{Z}/7$ de 6 nın denklik sınıfını oluşturur. Buna göre $\mathbb{Z}/7$ de 6 nın denklik sınıfı

$$\overline{6} = \{..., -15, -8, -1, 6, 13, 19, 25, ...\}$$

şeklindedir.

- **Alıştırma.** $\mathbb{Z}/5$ te $\left(\overline{4}x+\overline{1}\right)\left(\overline{3}x+\overline{1}\right)=\overline{0}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** $\left(\overline{4}x+\overline{1}\right)\left(\overline{3}x+\overline{1}\right)=\overline{0}$ ise $\overline{4}x+\overline{1}=\overline{0}$ veya $\left(\overline{3}x+\overline{1}\right)=\overline{0}$ olmalıdır.
  - $\overline{4}x+\overline{1}=\overline{0}$ ise
  $$x\equiv\frac{-1}{4}\equiv\frac{4}{4}=\overline{1}$$
  - $\overline{3}x+\overline{1}=\overline{0}$ ise
  $$x\equiv\frac{-1}{3}\equiv\frac{4}{3}\equiv\frac{9}{3}=\overline{3}$$

  olacaktır. Demek ki denklemin çözüm kümesi $\left\{\overline{1},\overline{3}\right\}$ şeklindedir.

- **Alıştırma.** Bugün günlerden Pazartesi olduğuna göre
  - 165 gün sonra hangi gündür?
  - 165 gün önce hangi gündü?
- **Çözüm.** $165\equiv 4\pmod 7$ olduğundan
  - 165 gün sonra
  $$\underset{\text{Pazartesi}}{0},\underset{\text{Salı}}{1},\underset{\text{Çarşamba}}{2},\underset{\text{Perşembe}}{3},\underset{\text{Cuma}}{4}$$
  olacağından Cuma günüdür.
  - 165 gün önce
  $$\underset{\text{Pazartesi}}{0},\underset{\text{Pazar}}{1},\underset{\text{Cumartesi}}{2},\underset{\text{Cuma}}{3},\underset{\text{Perşembe}}{4}$$
  olacağından Perşembe günü idi.

- **Alıştırma.** İki çalar saatten birincisi ayarlandıktan sonra 4 saatte bir, ikincisi ise ayarlandıktan sonra 5 saatte bir çalmaktadır. Saatler sabah 8.00 da aynı anda ayarlandıktan sonra 82. kez aynı anda çaldıklarında saat kaçtır?
- **Çözüm.** İki saat 20 saatte bir aynı anda çalmaktadır. 82 kez aynı anda çaldıklarında
$$82\times 20=1640$$
saat geçer.
$$1640\equiv 8\pmod{24}$$
olduğundan 82. kez aynı anda çaldıklarında saat
$$8.00+8.00=16.00$$
olacaktır.

- **Alıştırmalar.**
  1. $43\equiv 1\pmod x$ olduğuna göre, x kaç farklı değer alabilir? {Cevap: 7}
  2. $3x+1\equiv 7\pmod 9$ denkliğini sağlayan en küçük üç pozitif tamsayının toplamı kaçtır? {Cevap: 15}
  3. 22^{33} sayısının 6 ile bölümünden kalan kaçtır? {Cevap: 4}
  4. $\mathbb{Z}/9$ da $\left(\frac{5}{4}\right)^{-39}$ işleminin sonucunu bulunuz. {Cevap: $\overline{4}$}
  5. 4 günde bir nöbet tutan bir asker ilk nöbetini perşembe günü tuttuğuna göre 14. nöbetini hangi gün tutar? {Cevap: Pazar}
  6. Bugün günlerden cumartesi olduğuna göre, 123 gün önce hangi gündü? {Cevap: Salı}
  7. Pazartesi günü elektronik bir saat 12 : 40 ı gösterdikten 358 dakika sonra hangi saati gösterir? {Cevap: 18 : 38}
  8. $\mathbb{Z}/11$ de $\overline{4}x+\overline{5}\equiv\overline{0}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. {Cevap: $\overline{7}$}
  9. $20\equiv 8\pmod{12}$ ve $16\equiv 4\pmod{12}$ denkliklerini ele alalım.
     1. $a=3, c=2, n=-1$ değerlerini kullanarak 7.3 te verilen özellikleri doğrulayınız.
     2. $20\equiv 8\pmod{12}$ denkliğinden elde edilen $10\equiv 4\pmod{12}$ denkliği neden doğru değildir?
     3. $20\equiv 8\pmod{12}$ ve $16\equiv 4\pmod{12}$ denklikleri taraf tarafa bölünebilir mi? Neden?

8. Kümeler

8.1 Küme Kavramı

- Tam bir tanımı olmamakla birlikte küme için **iyi tanımlanmış nesneler topluluğu** diyebiliriz. Yani bir kümenin herkesin aynı şeyi anlayacağı şekilde tanımlanmış olması gerekir.
- Kümeler genellikle $A, B, C, ...$ gibi büyük harflerle gösterilir.
- Kümeyi oluşturan varlıkların her birine **kümenin bir elemanı** denir. Elemanlar küme içine yalnız bir kez yazılır ve elemanların yer değiştirmesi yeni bir küme oluşturmaz.
- Eğer bir x elamanı A kümesine ait ise $x \in A$ ile, ait değilse $x \notin A$ biçiminde gösterilir.
- Bir A kümesinin tüm eleman sayısı $s(A)$ veya $n(A)$ ile gösterilir.
- Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir ve $\{\}$ veya $\emptyset$ ile gösterilir. A boş küme ise $s(A) = 0$ dır.
- Üzerinde işlem yapılan en geniş kümeye **evrensel küme** denir ve E ile gösterilir.

- **Örnek.** BİLECİK kelimesinin harflerinden oluşan küme A ise bu küme

$$A = \{\text{B,İ,L,E,C,K}\}$$

şeklindedir. A kümesinin eleman sayısı

$$s(A) = 6$$

dır.
- **Örnek.** Bir A kümesi

$$A = \{1, 2, \{3, 4\}\}$$

şeklinde olsun. Bu durumda $s(A) = 3$ tür. Bu küme ile ilgili olarak aşağıdakiler söylenebilir:
  - $1 \in A$
  - $2 \in A$
  - $3 \notin A$ ve $4 \notin A$
  - $\{3, 4\} \in A$

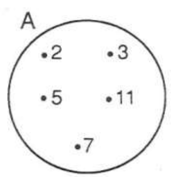
8.2 Kümelerin Gösterimi

- Kümeler üç farklı şekilde gösterilir:

1. **Liste Yöntemi:** Kümenin elemanları arasına virgül konularak, sıraya dikkat etmeden $\{\}$ biçimindeki küme parantezi içine yazılır. 13 ten küçük asal sayılar liste yöntemi ile $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ şeklinde gösterilir.
2. **Ortak Özellik Yöntemi:** Elemanlar küme parantezine tek tek yazılmaz. Bunun yerine elemanların ortak özelliği yazılır. 15 ten küçük asal sayılar ortak özellik yöntemine göre

$$A = \{x : x < 13, x \text{ asal sayı}\}$$

şeklinde yazılır. Burada " : ", "öyle ki" şeklinde okunur. Bazen bu simge yerine " | " simgesi de kulllanılır.
3. **Venn Şeması Yöntemi:** Kümenin elemanları kapalı bir şekil içine ve herbir elemanın yanına bir nokta konularak gösterilir. Yukarıdaki küme Venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterilir:



8.3 Eşit ve Denk Kümeler

- Eleman sayıları eşit olan kümelere **denk kümeler**, aynı elemanlardan oluşan kümelere **eşit kümeler** denir. Denk kümeler " $\equiv$ ", eşit kümeler " $=$ " ile gösterilir. Eşit kümeler aynı zamanda birbirine denktir.
- **Örnek.** $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x : x^2 < 4, x \text{ tamsayı}\}$, $C = \{a, b, \{\emptyset\}\}$ kümelerini göz önüne alalım. $B = \{-1, 0, 1\}$ olduğundan
$$A = B$$
dir. Diğer taraftan
$$s(A) = s(B) = s(C) = 3$$
olduğundan
$$\begin{aligned} A &\equiv C \\ B &\equiv C \\ A &\equiv B \end{aligned}$$
olacaktır.

8.4 Alt Küme

- Bir A kümesinin her elemanı aynı zamanda bir B kümesinin de elemanı ise A kümesi B kümesinin **alt kümesidir** denir ve $A \subset B$ biçiminde gösterilir. Bunun yerine B kümesi A kümesini kapsar da denilebilir ve $B \supset A$ şeklinde gösterilir. A kümesi B kümesinin alt kümesi değilse $A \not\subset B$ ile gösterilir, A alt küme değil B şeklinde okunur.
- Boş küme her kümenin alt kümesidir ayrıca her küme kendisinin alt kümesidir. Yani $\emptyset \subset A$ ve $A \subset A$ dır. Bir kümenin kendisinden farklı olan alt kümelerine bu kümenin **öz alt kümeleri** denir.
- Her küme evrensel kümenin alt kümesidir, yani $A \subset E$ dir.
- n elemanlı bir kümenin 2^n tane alt kümesi vardır.
- n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt kümeleri
$$\frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$
tanedir. Formülde $0! = 1! = 1$ kabul edilir.

- **Örnek.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin bütün alt kümelerini yazınız.
- **Çözüm.**
  - Hiç elemanı olmayanlar : $\emptyset$
  - 1 elemanlı olanlar : $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$
  - 2 elemanlı olanlar : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$
  - 3 elemanlı olanlar : $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$
  - 4 elemanlı olanlar : $\{1, 2, 3, 4\}$

- **Örnek.** 7 elemanlı bir kümenin
  - tüm alt kümeleri kaç tanedir?
  - 3 elemanlı kaç alt kümesi vardır?
- **Çözüm.**
  - $n = 7$ olduğundan kümenin
$$2^7 = 128$$
tane alt kümesi vardır.
  - $n = 7$ ve $r = 3$ olduğundan kümenin 3 elemanlı kaç alt kümeleri
$$\frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$
tanedir.

- **Örnek.** Eleman sayısı 3 arttığında alt küme sayısı 56 artan bir kümenin ilk durumda eleman sayısı kaçtır?
- **Çözüm.** İlk durumda eleman sayısı n olsun.

$$2^{n+3} - 2^n = 56$$

olarak verilmiş.

$$2^{n+3} = 2^n \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^n$$

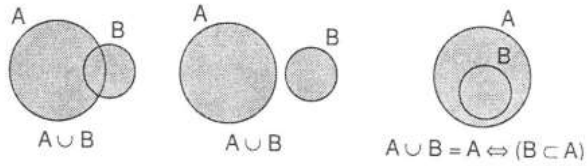
olduğundan

$$\begin{aligned} 2^{n+3} - 2^n &= 56 \\ 8 \cdot 2^n - 2^n &= 56 \\ 7 \cdot 2^n &= 56 \\ 2^n &= 8 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

ilk durumda eleman sayısı 3 tür.

8.5 Kümelerde İşlemler

- **Birleşme İşlemi.** A kümesi ile B kümesinin bütün elemalarından oluşan kümeye A birleşim B kümesi denir ve $A \cup B$ biçiminde gösterilir. Birleşim kümesinde elemanlar bir defa yazılmalıdır.

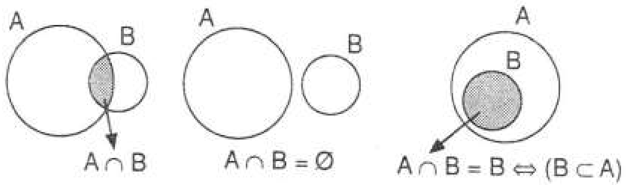


- **Örnek.** $A = \{a, b, 1, 2, 3, x\}$, $B = \{a, 1, 2, x, y\}$ kümeleri veriliyor. $A \cup B$ kümesini yazınız.
- **Çözüm.**

$$A \cup B = \{a, b, 1, 2, 3, x, y\}$$

olmalıdır.

- **Kesişim İşlemi.** A kümesi ile B kümesinin ortak elemalarından oluşan kümeye A kesişim B kümesi denir ve $A \cap B$ biçiminde gösterilir.



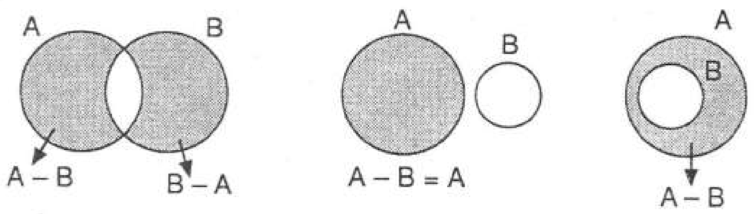
- $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümelerine **ayrık kümeler** denir.
- **Örnek.** $A = \{a, b, 1, 2, 3, x\}$, $B = \{a, 1, 2, x, y\}$ kümeleri veriliyor. $A \cap B$ kümesini yazınız.
- **Çözüm.**

$$A \cap B = \{a, 1, 2, x\}$$

olmalıdır.

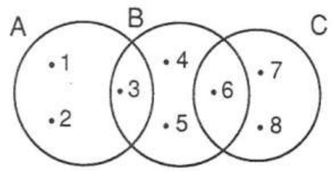
- **Birleşim ve kesişim ile ilgili özellikler:**
  1. $A \cup A = A$ ve $A \cap A = A$ (Tek kuvvet özelliği)
  2. $A \cup B = B \cup A$ ve $A \cap B = B \cap A$ (Değişme özelliği)
  3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ve $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Birleşme özelliği)
  4. $A \cup \emptyset = A$ ve $A \cap E = A$ (Etkisiz eleman özelliği)
  5. $A \cup E = E$ ve $A \cap \emptyset = \emptyset$ (Yutan eleman özelliği)
  6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Dağılma özelliği)
  7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Dağılma özelliği)
  8. $A \subset B$ ise $A \cap B = A$ ve $A \cup B = B$
  9. $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$
  10. $s(A \cup B \cup C) =$ $s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$

- **Fark İşlemi.** A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanların kümesine A fark B kümesi denir, $A - B$ veya $A \backslash B$ şeklinde gösterilir.



- **Örnek.** $A = \{x : |x| < 4, x \text{ tamsayı}\}$ ve $B = \left\{x : x^2 - 4 = 0\right\}$ kümeleri veriliyor. $A - B$ ve $B - A$ kümelerini yazınız.
- **Çözüm.** $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ve $B = \{-2, 2\}$ olduğundan
  - $A - B = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$
  - $B - A = \{\}$

- **Örnek.**



Yukarıdaki şekilde verilen kümelere göre
  - $B - A$ kümesini yazınız.
  - $B - C$ kümesini yazınız.
- **Çözüm.**

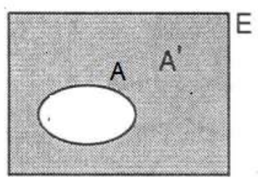
$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{3, 4, 5, 6\} \\ C &= \{6, 7, 8\} \end{aligned}$$

olduğundan
  - $$B - A = \{4, 5, 6\}$$
  - $$B - C = \{3, 4, 5\}$$

  olacaktır.

8.6 Bir Kümenin Tümleyeni

- E evrensel küme ve A kümesi evrensel kümenin bir alt kümesi olsun. E de bulunup A da bulunmayan elemanların oluşturduğu kümeye A kümesinin tümleyeni denir ve A' veya $\overline{A}$ ile gösterilir.



- **Örnek.** $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $A = \{1, 2\}$ olarak veriliyor. Buna göre A' kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** E de bulunup A da bulunmayan elemanların oluşturduğu kümeyi yazmalıyız. İstenen küme

$$A' = \{3, 4, 5, 6\}$$

olmalıdır.

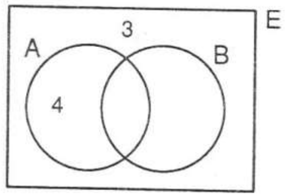
- **Tümleme ve Fark ile ilgili özellikler:**
  - $(A')' = A$
  - $\emptyset' = E$ ve $E' = \emptyset$
  - $A \cap A' = \emptyset$ ve $A \cup A' = E$
  - $s(A) + s(A') = s(E)$
  - $A - B = A \cap B'$ ve $B - A = B \cap A'$
  - $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ve $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (De Morgan Kuralları)
  - $(A \subset B)' = A' \supset B'$

- **Örnek.** A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleri olmak üzere

$$\begin{aligned} s(E) &= 12 \\ s(A-B) &= 4 \\ s(A' \cap B') &= 3 \end{aligned}$$

olduğuna göre, B kümesinin eleman sayısı kaçtır?

- **Çözüm.** $A' \cap B' = (A \cup B)'$ olduğu dikkate alınıp verilenler venn şemasına yazılırsa:



B kümesinin eleman sayısı $s(B) = 5$ olarak elde edilir.

- **Örnek.**

$$[A \cap (A' \cup B')] \cap B$$

ifadesini en sade biçimde yazınız.

- **Çözüm.** Birleşim, kesişim ve tümleyen özellikleri kullanılırsa ifadenin en sade biçimi

$$\begin{aligned} [A \cap (A' \cup B')] \cap B &= [(A \cap A') \cup (A \cap B')] \cap B \\ &= [\varnothing \cup (A \cap B')] \cap B \\ &= (A \cap B') \cap B \\ &= A \cap (B' \cap B) \\ &= A \cap \varnothing \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

- **Örnek.**

$$[(A \cap B) \cap (B \cup B')] \cup (B - A)$$

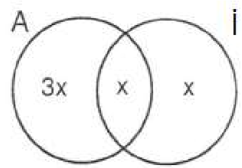
ifadesini en sade biçimde yazınız.

- **Çözüm.** Birleşim, kesişim, tümleyen ve fark özellikleri kullanılırsa ifadenin en sade biçimi

$$\begin{aligned} [(A \cap B) \cap (B \cup B')] \cup (B - A) &= [(A \cap B) \cap E] \cup (B - A) \\ &= [(A \cap B) \cup (B - A)] \\ &= [(A \cap B) \cup (B \cap A')] \\ &= B \cap (A \cup A') \\ &= B \cap E \\ &= B \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.** Bir sınıfta Almanca veya İngilizce dillerinden en az birini bilen 40 öğrenci vardır. Almanca bilenlerin sayısı İngilizce bilenlerin sayısının 2 katı, her iki dili bilenlerin sayısının 4 katıdır. Buna göre, sınıfta Almanca bilenlerin sayısı kaçtır?
- **Çözüm.** Her iki dili de bilenlerin sayısına x denirse, Almanca bilenlerin sayısı $4x$ olacaktır. Almanca bilenlerin sayısı İngilizce bilenlerin sayısının 2 katı olduğundan İngilizce bilenlerin sayısı $2x$ olacaktır. Venn şemasına aşağıdaki gibi yerleştirilirse



olur.

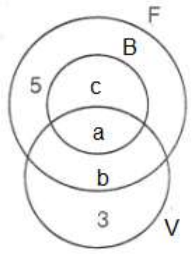
$$5x = 40 \Longrightarrow x = 8$$

olacağından sınıfta Almanca bilenlerin sayısı

$$4x = 32$$

olmalıdır.

- **Örnek.** Futbol, voleybol ve basketbol oyunlarından ez az birini oynayanların olduğu bir sınıfta basketbol oynayanların hepsi futbol oynamaktadır. Sadece voleybol oynayanların sayısı 3, sadece futbol oynayanların sayısı 5, voleybol oynayanların sayısı 6 ve en az iki oyunu oynayanların sayısı 7 dir. Buna göre, voleybol oynamayan kaç kişi vardır?
- **Çözüm.** Verilenler venn şemasına aşağıdaki gibi yerleştirilirse



olur. Soruda verilenlere göre

$$\begin{aligned} a+b+3 &= 6 \Longrightarrow a+b=3 \\ a+b+c &= 7 \Longrightarrow c=4 \end{aligned}$$

olacaktır. Voleybol oynamayanlar

$$c+5=9$$

Alıştırmalar.

- A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, c, 1, 2\} \\ A' &= \{d, e, 3, 4\} \\ B' &= \{c, 3, 4\} \end{aligned}$$

olduğuna göre aşağıdakileri cevaplayınız:

1. $A \cup B = ?$ $\{$Cevap: $\{a, b, c, d, e, 1, 2\}\}$
2. $A \cap B = ?$ $\{$Cevap: $\{a, b, 1, 2\}\}$
3. $B - A = ?$ $\{$Cevap: $\{d, e\}\}$
4. $A' \cap B' = ?$ $\{$Cevap: $\{3, 4\}\}$
5. $A \cap B' = ?$ $\{$Cevap: $\{c\}\}$
6. A kümesinin tüm alt küme sayısı kaçtır?$\{$Cevap: 32$\}$
7. B kümesinin 4 elemanlı alt küme sayısı kaçtır? $\{$Cevap: 15$\}$

- A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

$$\begin{aligned} s(E) &= 20 \\ s(A') &= 10 \\ s(A \cap B) &= 3 \\ s(A' \cap B') &= 4 \end{aligned}$$

olduğuna göre $s(E - B)$ kaçtır? $\{$Cevap: 11$\}$
- A ve B kümeleri E evrensel kümesinin alt kümeleridir.

$$\left[(A-B)' \cap (A' \cup B')\right]' \cap (B - A)$$

ifadesinin en sade biçimi nedir? $\{$Cevap: $\emptyset\}$
- Bir kümenin eleman sayısı 3 azaldığında alt küme sayısı 448 azalmaktadır. Buna göre ilk durumda bu kümenin eleman sayısı kaçtır? $\{$Cevap: 9$\}$
- Bir sınıftaki öğrencilerin 35 i İngilizce, 33 ü Almanca, 15 i her iki kursa gidiyor. Buna göre bu sınıfta kurslara katılanların tümü kaç kişidir? $\{$Cevap: 53$\}$
- Futbol, voleyol ve basketbol oynayanlardan oluşan bir sporcu kafilesinde, üç oyunu da oynayanlar 5, futbol ve voleybol oynayanlar 9, voleybol ve basketbol oynayanlar 8, futbol ve basketbol oynayanlar 6 kişidir. Futbol oynayanlar 23, voleybol oynayanlar 21, basketbol oynayanlar 15 kişi olduğuna göre, kafilede kaç sporcu vardır? $\{$Cevap: 41$\}$

9. Bağıntı ve Fonksiyon

9.1 Sıralı İkili

- x ve y gibi iki eleman sıraları dikkate alınarak (x, y) şeklinde yazıldığında bir **sıralı ikili** ve kısaca **ikili** denir. Örneğin, $(1, a)$, (İstanbul, Ankara) birer ikilidir. x ikilinin birinci bileşeni, y ise ikinci bileşenidir. Bileşenler arasında sıra önemli olduğundan
$$(x, y) \neq (y, x)$$
olduğuna dikkat edilmelidir.
- (x, y) ve (a, b) iki ikili olsun. Bu ikililerin eşit olması için karşılıklı bileşenler eşit olmalıdır. Bunun tersi de doğrudur. Yani
$$(x, y) = (a, b) \Longleftrightarrow x = a \text{ ve } y = b$$
olmalıdır.
- **Örnek.** $(2x - 1, 5) = (-3, 2y - 3)$ olduğuna göre x ve y yi bulunuz.
- **Çözüm.** İkililerin eşit olması için karşılıklı bileşenler eşit olmalıdır. Buna göre,
$$\begin{aligned} 2x - 1 &= -3 \Longrightarrow x = -1 \\ 2y - 3 &= 5 \Longrightarrow y = 4 \end{aligned}$$
olur.

9.2 Kartezyen Çarpım

- A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun. Birinci bileşeni A kümesinden, ikinci bileşeni B kümesinden alınarak oluşturulan bütün ikililerin kümesine A **kartezyen çarpım** B **kümesi** denir ve $A \times B$ şeklinde gösterilir. Kısaca
$$A \times B = \{(x, y) \,|x \in A, y \in B\}$$
dir. Benzer şekilde B **kartezyen çarpım** A **kümesi**
$$B \times A = \{(x, y) \,|x \in B, y \in A\}$$
şeklindedir.
- **Örnek.** Bir $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ olsun. Bu durumda
  - A kartezyen çarpım B kümesi
  $$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$
  - B kartezyen çarpım A kümesi
  $$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

  şeklinde olur.

- **Örnek.** $A = \{x : x^2 < 4, x \in \mathbb{Z}\}$ ve $B = \{y : y^2 = 4, y \in \mathbb{Z}\}$ olduğuna göre $A \times B$ kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** $A = \{-1, 0, 1\}$ ve $B = \{-2, 2\}$ olduğundan
$$A \times B = \{(-1, -2), (-1, 2), (0, -2), (0, 2), (1, -2), (1, 2)\}$$
olmalıdır.
- **Örnek.**
$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$
olduğuna göre, $A \times A$ ve $B \times B$ kümelerini bulunuz.
- **Çözüm.** $A = \{a, b\}$ ve $B = \{1, 2\}$ olduğundan
  - $A \times A = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$
  - $B \times B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

9.3 Bağıntı

- A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun. $A \times B$ **nin herhangi bir alt kümesine** A **dan** B **ye bir bağıntı denir.** A dan B ye bir β bağıntısı $\beta : A \longrightarrow B$ şeklinde gösterilir.
- **Örnek.** Bir $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{a, b\}$ olsun. Bu durumda $A \times B$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

şeklindedir. Buna göre,

  - $$\begin{aligned} \beta_1 &= \{(1, a), (3, b)\} \\ \beta_2 &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\} \end{aligned}$$

    bağıntıları A dan B ye birer bağıntıdır. Ancak
  - $$\beta_3 = \{(a, 1), (1, b), (2, a)\}$$

    bağıntısı A dan B ye bir bağıntı değildir. Çünkü $\{(a, 1), (1, b), (2, a)\}$ kümesi $A \times B$ nin bir alt kümesi değildir.

- **Örnek.** $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olsun. $\beta = \{(a, b) : a = 2b \text{ ve } a, b \in A\}$ bağıntısını liste yöntemi ile yazınız.
- **Çözüm.** Bağıntının elemanlarının birinci bileşenleri ikinci bileşenlerinin 2 katı olacağından bağıntı

$$\beta = \{(0, 0), (2, 1), (4, 2), (6, 3)\}$$

şeklinde olmalıdır.
- **Örnek.** $A = \{0, 1, 2\}$ ve $B = \{a, b, c\}$ olsun. Bu durumda aşağıdakilerden hangisi A dan B ye bir bağıntıdır?
  1. $\beta_1 = \{(1, a), (1, b), (1, c)\}$
  2. $\beta_2 = \{(b, 2)\}$
  3. $\beta_3 = \{(1, a), (1, b), (b, a)\}$
- **Çözüm.** Sadece β_1 bağıntısı $A \times B$ nin bir alt kümesi olduğundan A dan B ye bir bağıntıdır.

9.4 Bağıntının Tersi

- A dan B ye verilen bir β bağıntısını oluşturan ikililerin bileşenleri yer değiştirdiğinde elde edilen bağıntıya β **bağıntısının tersi** denir ve β^{-1} ile gösterilir.
- **Örnek.** Bir bağıntı

$$\beta = \{(1, 1), (2, b), (3, a)\}$$

şeklinde verilsin. Bu bağıntının tersini (yani β^{-1} bağıntısını) elde ediniz.
- **Çözüm.** Bağıntıyı oluşturun elemanların bileşenleri yer değiştirise tersi elde edilir. Buna göre bu bağıntının tersi

$$\beta^{-1} = \{(1, 1), (b, 2), (a, 3)\}$$

olacaktır.
- **Örnek.** $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun. $\beta = \{(a, b) : a + 2b = 9 \text{ ve } a, b \in A\}$ bağıntısı veriliyor. Buna göre β^{-1} bağıntısını liste yöntemi ile yazınız.
- **Çözüm.** $\beta = \{(1, 4), (3, 3), (5, 2)\}$ olduğundan

$$\beta^{-1} = \{(4, 1), (3, 3), (2, 5)\}$$

olmalıdır.

- **Örnek.** Tamsayılar kümesinde tanımlı bir bağıntı

$$\beta = \left\{(a, b) : a^2 + 2b^2 = 12 \text{ ve } a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

biçiminde veriliyor. Buna göre,
  - β^{-1} bağıntısını bulunuz.
  - $\beta \cap \beta^{-1}$ bağıntısını bulunuz.
- **Çözüm.**
  - $\beta^{-1} = \{(a, b) : b^2 + 2a^2 = 12 \text{ ve } a, b \in \mathbb{Z}\} = \{(2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2)\}$
  - $\beta \cap \beta^{-1}$ bağıntısının elemanları β ve β^{-1} bağıntılarında ortak olan elemanlardır. $(a, b) \in \beta$ ise $(b, a) \in \beta^{-1}$ olmalıdır. Bu iki elemanın aynı olabilmesi için $a = b$ olmalıdır. Bağıntıda yazılırsa

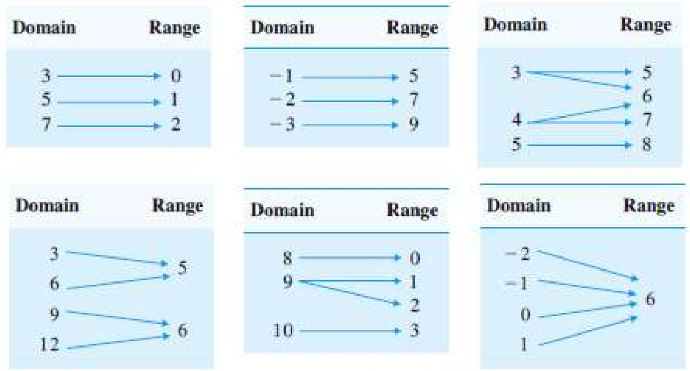
$$\begin{aligned} b^2 + 2a^2 &= a^2 + 2a^2 = 3a^2 = 12 \\ a^2 &= 4 \Longrightarrow a = 2 \text{ ve } a = -2 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\beta \cap \beta^{-1} = \{(2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2)\}$ olacaktır.

9.5 Fonksiyon

- A dan B ye tanımlı bir bağıntı aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa bu bağıntıya **fonksiyon** denir:
    1. A kümesinde açıkta elaman kalmayacak,
    2. A kümesindeki bir eleman B kümesindeki birden fazla eleman ile eşlenmeyecek.
- A ya tanım kümesi, B ye değer kümesi denir. Bu şekilde tanımlı olan bir f fonksiyonu $f : A \longrightarrow B, y = f(x)$ şeklinde gösterilir. Tanım kümesindeki elemanların eşlendiği elemanlardan oluşan kümeye ise görüntü kümesi denir. Fonksiyonlar $f, g, h, \ldots$ gibi harflerle gösterilir. Tanım kümesindeki bir x elemanının görüntüsü ise $f(x)$ simgesi ile gösterilir.

- **Örnek.** Aşağıdaki bağıntıların fonksiyon belirtip belirtmediğini gösteriniz.



- **Örnek.** $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdaki bağıntıların A dan B ye bir fonksiyon olup-olmadıklarını belirtiniz:
    1. $\beta_1 = \{(a, 2), (c, 1)\}$
    2. $\beta_2 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 3), (b, 2)\}$
    3. $\beta_3 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$
    4. $\beta_4 = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}$
- **Çözüm.** A dan B ye tanımlı bir bağıntının fonksiyon olabilmesi için A nın her elemanı B nin bir ve yalnız elemanı ile eşlenmelidir. Buna göre,
    1. β_1 fonksiyon değildir. Çünkü A kümesindeki b nin görüntüsü yoktur.
    2. β_2 fonksiyon değildir. Çünkü A kümesindeki b nin iki tane görüntüsü vardır.
    3. β_3 fonksiyondur.
    4. β_4 fonksiyondur.

- **Örnek.** $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$ kümeleri veriliyor. A dan B ye bir fonksiyon $f = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3)\}$ şeklinde veriliyor. Buna göre $f(a), f(b), f(c)$ yi bulunuz.
- **Çözüm.**
    - $f(a) = 2$
    - $f(b) = 1$
    - $f(c) = 3$
- **Örnek.** $f(x) = 2x - 3$ ve $g(x) = x^2 + 2x$ olduğuna göre $f(5), g(-8)$ değerlerini bulunuz.
- **Çözüm.** f fonksiyonunda $x = 5$ yazarsak

$$f(5) = 2 \cdot 5 - 3 = 7$$

olur. g fonksiyonunda $x = -8$ yazarsak

$$g(-8) = (-8)^2 + 2 \cdot (-8) = 64 - 16 = 48$$

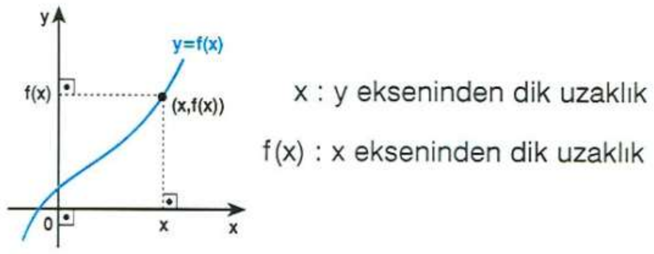
bulunur.

- **Örnek.** $f(3x-1)=2x-3$ olduğuna göre $f(0)$ ve $f(5)$ değerlerini bulunuz.
- **Çözüm.**
  - $3x-1=0$ ise $x=\frac{1}{3}$ olur. Bu değer $f(3x-1)=2x-3$ eşitliğinde yazılırsa
$$f(0)=2\cdot\frac{1}{3}-3=-\frac{7}{3}$$
olarak elde edilir.
  - $3x-1=5$ ise $x=2$ olur. Bu değer $f(3x-1)=2x-3$ eşitliğinde yazılırsa
$$f(5)=2\cdot 2-3=1$$
olarak elde edilir.
- **Örnek.** $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+4}$ olduğuna göre $f(x+2)$ fonksiyonunu bulunuz.
- **Çözüm.** Fonksiyonda x yerine $x+2$ yazmalıyız. Bu durumda
$$f(x+2)=\frac{3(x+2)-2}{(x+2)+4}=\frac{3x+4}{x+6}$$
olur.

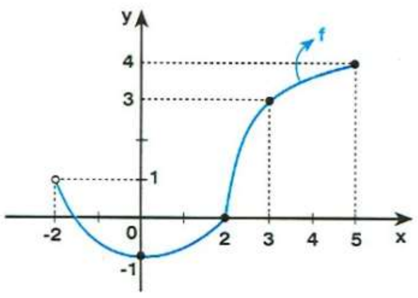
- **Örnek.** $f(x)=\begin{cases}3x^2+3 & ,x\leq 2\\ 10x-5 & ,x>2\end{cases}$ parçalı fonksiyonu veriliyor. Buna göre $f(-1), f(2), f(3)$ değerlerini bulunuz.
- **Çözüm.**
$$\begin{aligned}f(-1)&=3\cdot(-1)^2+3=6\\ f(2)&=3\cdot 2^2+3=15\\ f(3)&=10\cdot 3-5=25\end{aligned}$$
olur.
- **Örnek.** $f(x)=(x+2)^3$ olduğuna göre $f\left(\sqrt[3]{5}-2\right)$ değerini bulunuz.
- **Çözüm.** Fonksiyonda x yerine $\sqrt[3]{5}-2$ yazılırsa bu durumda $f\left(\sqrt[3]{5}-2\right)$ değeri
$$f\left(\sqrt[3]{5}-2\right)=\left(\sqrt[3]{5}-2+2\right)^3=\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=5$$
olarak elde edilir.

9.6 Fonksiyonun Grafiği

- $f(x)=y$ eşitliğini sağlayan bütün (x,y) noktalarının dik koordinat sisteminde gösterilmesi ile elde edilen şekle fonksiyonun grafiği denir.



- **Örnek.** f fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi verildiğine göre $f(0), f(2), f(3), f(5)$ değerlerini bulunuz.



- **Çözüm.** Grafikte $f(0)$ değerini bulurken apsisi 0 olan noktanın ordinatını bulmalıyız. Bu nokta grafikte $(0,-1)$ olduğundan

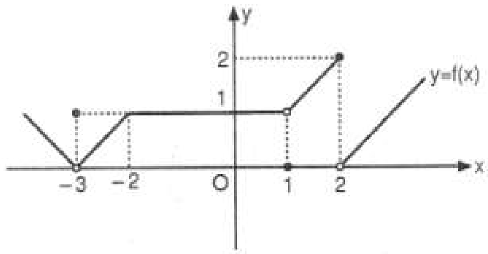
$$f(0) = -1$$

tür. Benzer olarak

$$\begin{aligned} f(2) &= 0 \\ f(3) &= 3, \\ f(5) &= 4 \end{aligned}$$

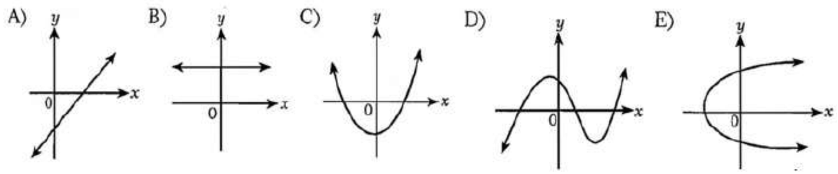
olacaktır.

- **Örnek.** Aşağıdaki garafikte $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $f(-3), f(-2), f(0), f(1), f(2)$ değerlerini bulunuz.



- **Çözüm.**
  - $f(-3) = 1$
  - $f(-2) = 1$
  - $f(0) = 1$
  - $f(1) = 0$
  - $f(2) = 2$

- **Örnek.** Aşağıdaki garafiklerden hangileri $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyondur?



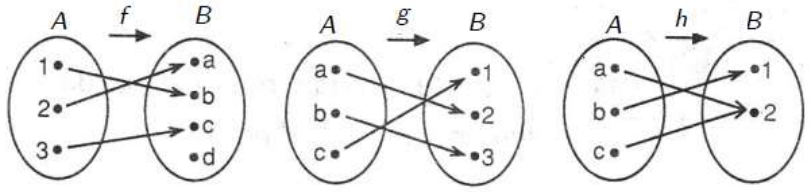
- **Çözüm.** E) de verilen grafik dışında diğer dört grafik $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyondur.

- **Örnek.** Aşağıdaki verilenlerin bir fonksiyon olup-olmadığını belirleyiniz.
  1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
  2. $f : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x}{x+1}$
  3. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x-1}$
  4. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N},\ f(x) = x+1$
- **Çözüm.** Sadece 2. de verilen bağıntı bir fonksiyondur. Diğerleri fonksiyon olma şatlarını taşımaz.

9.6 Fonksiyon Türleri

1-1 Fonksiyon

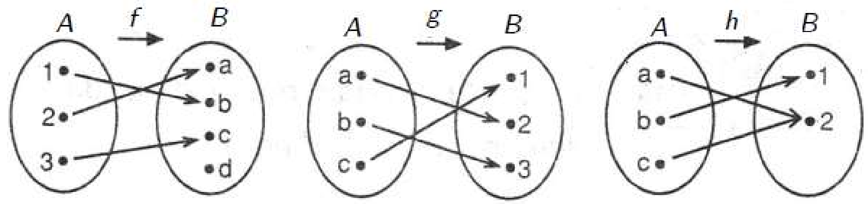
- Bir fonksiyonun tanım kümesindeki farklı her elemanın görüntüsü de farklı ise bu tür fonksiyonlara **1-1 fonksiyon** denir.
- **Örnek.** Aşağıdaki fonksiyonlardan f ve g fonksiyonları birebirdir ancak h fonksiyonu 1-1 değildir.



Fonksiyon Türleri

Örten Fonksiyon

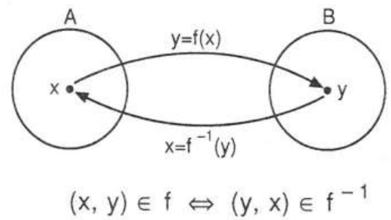
- Bir fonksiyonda değer kümesinde A kümesi ile eşlenmeyen eleman yoksa bu fonksiyona **örten fonksiyon** denir.
- **Örnek.** Aşağıdaki fonksiyonlardan g ve h fonksiyonları örtendir ancak f fonksiyonu örten değildir.



- **Örnek.** Aşağıdaki fonksiyonların fonksiyon olup-olmadıklarını eğer fonksiyon iseler 1-1 ve örten olup-olmadıklarını belirleyiniz
  1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
  2. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \frac{1-3x}{4}$
  3. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ f(x) = -x + 3$
  4. $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z},\ f(x) = 2x + 3$
  5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 25$
- **Çözüm.**
  1. Fonksiyon. 1-1 değil ve örten değil.
  2. Fonksiyon değil.
  3. Fonksiyon. 1-1 ve örten.
  4. Fonksiyon. 1-1 ancak örten değil.
  5. Fonksiyon. 1-1 değil örten değil.

9.7 Bir Fonksiyonun Tersi

- f bire-bir ve örten fonksiyon olmak üzere $f : A \longrightarrow B$ fonksiyonunun tersi $f^{-1} : B \longrightarrow A$ fonksiyonudur. Eğer (x, y) noktası f fonksiyonu üzerinde ise (y, x) noktası f^{-1} fonksiyonu üzerindedir.



- Dikkat edilirse
$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$
olur.
- Bire-bir ve örten bir $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun tersini bulmak için:
  1. x yalnız bırakılır
  2. Elde edilen eşitlikte $x \longleftrightarrow y$ dönüşümü yapılır. Bulunan son ifade $y = f(x)$ fonksiyonun tersi olan fonksiyondur.

- **Örnek.** $f(x) = 3x - 2$ fonksiyonunun tersini bulunuz.
- **Çözüm.** $y = 3x - 2$ fonksiyonunda x yalnız bırakılırsa

$$x = \frac{y+2}{3}$$

olur. Bu eşitlikte $x \longleftrightarrow y$ dönüşümü yapılırsa

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

elde edilir. Bu fonksiyon $f(x) = 3x - 2$ fonksiyonunun tersidir.

- Genel olarak $f(x) = ax + b$ ise

$$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

dır.

- **Örnek.** $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, f(x) = \dfrac{2x+3}{-4x+8}$ fonksiyonunun tersini bulunuz.
- **Çözüm.** $y = \dfrac{2x+3}{-4x+8}$ fonksiyonunda x yalnız bırakılırsa

$$x = \frac{8y-3}{4y+2}$$

olur. Bu eşitlikte $x \longleftrightarrow y$ dönüşümü yapılırsa

$$f^{-1}(x) = \frac{8x-3}{4x+2}$$

elde edilir. Bu fonksiyon $f(x) = \dfrac{2x+3}{-4x+8}$ fonksiyonunun tersidir.

- Genel olarak $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ise

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

dır.

- **Örnek.** Tanımlı olduğu kümede $f(x+3) = \dfrac{x+5}{x-3}$ olarak veriliyor. Buna göre $f^{-1}(9)$ kaçtır?
- **Çözüm.**

$$f(x+3) = \frac{x+5}{x-3} \Longrightarrow f^{-1}\left(\frac{x+5}{x-3}\right) = x+3$$

olmalıdır. Önce hangi x değeri için $\dfrac{x+5}{x-3}$ in 9 ettiğini bulmalıyız. Bu x değerini bulup $x+3$ te yerine yazacağız. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x-3} &= 9 \\ x+5 &= 9x-27 \\ 8x &= 32 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

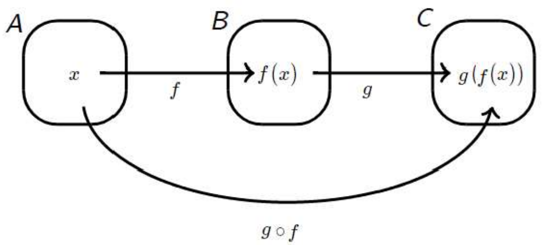
olacaktır. Buna göre istenen değer

$$f^{-1}(9) = 4+3 = 7$$

olur.

9.8 Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi

- $f : A \longrightarrow B$ ve $g : B \longrightarrow C$ fonksiyonları verilsin. A kümesinin elemanlarını C kümesinin elemanlarına eşleyen $g \circ f : A \longrightarrow C$ fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının bileşkesi denir.



- $g \circ f$ fonksiyonu bulunurken, g fonksiyonundaki değişken yerine f fonksiyonu yazılır.
- **Örnek.** $f(x) = 2x - 3$ ve $g(x) = 3x + 2$ fonksiyonları verilsin. Buna göre, $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonları aşağıdaki gibidir:
  - $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(3x+2) - 3 = 6x + 1$
  - $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3(2x-3) + 2 = 6x - 7$

- **Örnek.** $f(x) = 3x - 5$ ve $g(x) = 2 - 5x$ olduğuna göre aşağıdaki değerleri bulunuz:
  - $(f \circ g)(3)$
  - $(g \circ f)(-2)$
  - $(f \circ f)(4)$
- **Çözüm.**
  - $$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(-13) = 3 \cdot (-13) - 5 = -44$$
  - $$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(-11) = 2 - 5 \cdot (-11) = 57$$
  - $$(f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(7) = 3 \cdot 7 - 5 = 16$$

- **Örnek.** $f(x) = 2x + 1$ ve $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+5}$ fonksiyonları verilsin. $\left(g^{-1} \circ f\right)(x) = -16$ olduğuna göre, x kaçtır?
- **Çözüm.**

$$g^{-1}(x) = \frac{-5x-1}{x-2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \left(g^{-1} \circ f\right)(x) &= \frac{-5(2x+1)-1}{2x+1-2} = -16 \\ \frac{-10x-5-1}{2x-1} &= -16 \\ -10x-6 &= -32x+16 \\ 22x &= 22 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

bulunur.

- **Örnek.** $f(x) = \dfrac{2x+u}{x+1}$ ve $(f \circ f)(x) = \dfrac{x-9}{3x-2}$ olduğuna göre, u kaçtır?
- **Çözüm.**

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2\left(\dfrac{2x+u}{x+1}\right)+u}{\left(\dfrac{2x+u}{x+1}\right)+1} = \frac{\dfrac{4x+2u}{x+1}+u}{\dfrac{2x+u}{x+1}+1} = \frac{(4+u)x+3u}{3x+u+1}$$

olduğundan

$$\frac{(4+u)x+3u}{3x+u+1} = \frac{x-9}{3x-2}$$

eşitliğinin sağlanabilmesi için $u = -3$ bulunur.

- **Fonksiyonlarda bileşke işleminin özellikleri:**
  1. $f \circ g \neq g \circ f$ (Değişme özelliği yoktur.)
  2. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (Birleşme özelliği vardır)
  3. $I(x) = x$ fonksiyonu bileşke işleminin etkisiz elemanıdır. Buna göre, $f \circ I = I \circ f = f$ tir.
  4. $f : A \longrightarrow A$ fonksiyonu 1-1 ve örten olduğunda $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = x$ olur.
  5. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ ve $(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$

- **Örnek.** $(f \circ g)(x) = \dfrac{x}{2x+1}$ ve $g(x) = x + 1$ olduğuna göre f fonksiyonunu bulunuz.
- **Çözüm.** Verilen ilk eşitliğin her iki tarafı sağdan $g^{-1}(x) = x - 1$ fonksiyonu ile bileşke işlemine sokulursa

$$
\begin{aligned}
\left(f \circ g \circ g^{-1}\right)(x) &= \left(\frac{x}{2x+1}\right) \circ (x-1) \\
(f \circ x)(x) &= \left(\frac{x}{2x+1}\right) \circ (x-1) \\
f(x) &= \frac{x-1}{2x-1}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.** Birebir ve örten f ve g fonksiyonları için

$$f(x+3) = g^{-1}(x-5)$$

olduğuna göre $\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)^{-1}(6)$ ifadesinin değeri kaçtır?
- **Çözüm.**

$$
\begin{aligned}
\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)^{-1} &= \left(g^{-1}\right)^{-1} \circ \left(f^{-1}\right)^{-1} \\
&= g \circ f
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)^{-1}(6) &= (g \circ f)(6) \\
&= g(f(6))
\end{aligned}
$$

olacaktır. Diğer taraftan

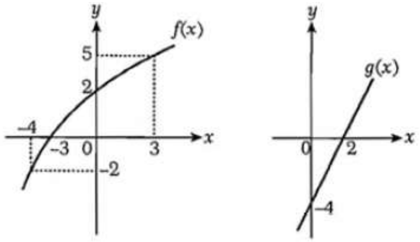
$$f(x+3) = g^{-1}(x-5) \Longrightarrow g(f(x+3)) = x - 5$$

olduğundan $x = 3$ için

$$g(f(6)) = 3 - 5 = -2$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.**



Yukarıdaki şekilde f ve g fonksiyonlarının grafiği verilmiştir. Buna göre $(f \circ g)(0) + \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(-4)$ toplamını bulunuz.
- **Çözüm.**

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(0) &= f(g(0)) = f(-4) = -2 \\
\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(-4) &= f^{-1}\left(g^{-1}(-4)\right) = f^{-1}(0) = -3
\end{aligned}
$$

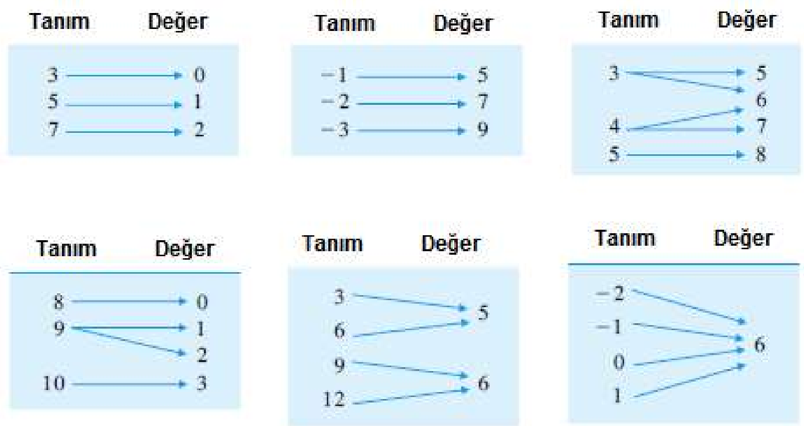
olduğundan

$$(f \circ g)(0) + \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(-4) = -2 + (-3) = -5$$

olacaktır.

Ödev.

- $A = \{x, y, t\}$ ve $B = \{1, 2\}$ veriliyor.
  1. $A \times B$ ve $B \times A$ kümelerini yazınız.
  2. A dan B ye ve B den A ya birer bağıntı yazınız.
  3. A dan B ye ve B den A ya birer fonksiyon yazınız.
- Aşağıdaki her bir tablonun fonksiyon olup-olmadığını eğer fonksiyon ise bire bir ve örten olup olmadığını belirtiniz.



- $f(x) = 2x - 3$ ve $g(x) = x^2 + 2x$ ise aşağıdakilerden her birini bulunuz.
  1. $f(5)$ $\{\text{Cevap: } 7\}$
  2. $g(-8)$ $\{\text{Cevap: } 48\}$
  3. $f^{-1}(x)$ $\left\{\text{Cevap: } \dfrac{x+3}{2}\right\}$
  4. $(f \circ g)(x)$ $\{\text{Cevap: } 2x^2 + 4x - 3\}$
  5. $(f \circ f)(x)$ $\{\text{Cevap: } 4x - 9\}$
  6. $(g \circ f)(-2)$ $\{\text{Cevap: } 35\}$
- Tanımlı olduğu kümede $f\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) = \dfrac{3x}{x+3}$ olarak veriliyor. Buna göre $f^{-1}(2)$ kaçtır? $\left\{\text{Cevap: } \dfrac{8}{5}\right\}$
- $(f \circ g)(x) = \dfrac{x-1}{2x+2}$ ve $f(x) = 2x + 1$ olduğuna göre g fonksiyonunu bulunuz. $\left\{\text{Cevap: } g(x) = \dfrac{-x-3}{4x+4}\right\}$

10. Çarpanlara Ayırma

- Toplam veya fark şeklinde verilen bir cebirsel ifadenin kendisinden farklı en az iki cebirsel ifadenin çarpımı olarak yazılmasına bu ifadenin çarpanlarına ayrılması denir. Bir ifadenin çarpanlarına ayrılması için farklı yöntemler mevcuttur. Bunlardan ilki ortak çarpan parantezine alma yöntemidir.
- Tüm cebirsel ifadeleri ne yazık ki tek bir yöntem ile çarpanlarına ayırmak mümkün değildir. Bunun için aşağıdaki yöntemler kullanılır:
  1. Ortak çarpan parantezine alma
  2. Gruplandırma
  3. Özdeşliklerden yararlanma
  4. $ax^2 + bx + c$ türü ifadeleri çarpanlarına ayırma
  5. Değişken değiştirme
  6. Terim ekleme-çıkarma

10.1 Ortak Çarpan Parantezine Alma

- Bütün terimlerde bulunan **ortak çarpanları (varsa)** bulup, terimler bu çarpanların parantezine alınır.
- **Örnek.**
  - $$ax + ay = a(x + y)$$
  - $$a^4 - 3a^2 = a^2\left(a^2 - 3\right)$$
  - $$ab + ac - a = a(b + c - 1)$$
  - $$8a^3b^2 - 12a^2b = 4a^2b(2ab - 3)$$
  - $$\begin{aligned}(a-c)(a-b)^2 - (b-a)^2(c-a) &= (a-c)(a-b)^2 - (a-b)^2(c-a)\\ &= (a-b)^2((a-c)-(c-a))\\ &= 2(a-b)^2(a-c)\end{aligned}$$

10.2 Gruplandırma Yolu ile Çarpanlara Ayırma

- Tüm terimlerde ortak bir çarpan yoksa, terimleri **gruplandırarak** bu grupları kendi arasında ortak çarpan parantezine alma yoluna gidilir.
- **Örnek.**
  - $$\begin{aligned}a^2 + ab - 4a - 4b &= a(a+b) - 4(a+b)\\ &= (a+b)(a-4)\end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned}a^3 + a^2 + a + 1 &= a^2(a+1) + (a+1)\\ &= (a+1)\left(a^2+1\right)\end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned}ux + uy + vx + vy &= ux + vx + uy + vy\\ &= x(u+v) + y(u+v)\\ &= (u+v)(x+y)\end{aligned}$$

10.3 Özdeşliklerden Yararlanarak Çarpanlara Ayırma

- Gruplandırma da işe yaramadığında, aşağıda verilen **çarpanlara ayırma formülleri yardımıyla** ifade çarpanlarına ayrılır.
  1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (İki kare farkı)
  2. Küpler farkı ve toplamı
     1. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (İki küp toplamı)
     2. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (İki küp farkı)
  3. Tam kare ifadeler
     1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
     2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  4. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$ (Tam kare ifade)
  5. Binom açılımı
     1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
     2. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

- **Örnek.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.
  1. $a^2 - 16$
  2. $4x^2 - 9y^2$
  3. $x - y$
  4. $(a-b-c)^2 - (a+b-c)^2$
- **Çözüm.**
  1. $a^2 - 16 = a^2 - 4^2 = (a-4)(a+4)$
  2. $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x-3y)(2x+3y)$
  3. $x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$
  4. $(a-b-c)^2 - (a+b-c)^2 =$
     $(a-b-c-a-b+c)(a-b-c+a+b-c) = 4b(c-a)$

- **Örnek.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.
  1. $x^3 - 1$
  2. $x^6 - y^6$
  3. $a^4 + 8a$
- **Çözüm.**
  1. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$
  2. $x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) =$
     $(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2)$
  3. $a^4 + 8a = a(a^3 + 8) = a(a+2)(a^2 - 2a + 4)$

- **Örnek.** $x + \dfrac{2}{x} = 4$ olduğuna göre, $x^2 + \dfrac{4}{x^2}$ nin değeri kaçtır?
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 &= 4^2 \\ x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} &= 16 \\ x^2 + \frac{4}{x^2} &= 12 \end{aligned}$$

olur.

- **Örnek.** $x + \dfrac{2}{x} = 4$ olduğuna göre, $x - \dfrac{2}{x}$ hangi değerleri alabilir?
- **Çözüm.** $x - \dfrac{2}{x} = k$ olsun. Her iki tarafın karesi alınırsa

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 &= k^2 \\ x^2 - 4 + \frac{4}{x^2} &= k^2 \\ 8 &= k^2 \\ k &= \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

- **Örnek.** $a+b+c=8$ ve $ab+ac+bc=5$ olduğuna göre $a^2+b^2+c^2$ ifadesini bulunuz.
- **Çözüm.**
$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$
olduğundan istenen ifade
$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) &= 64 \\ a^2+b^2+c^2+10 &= 64 \\ a^2+b^2+c^2 &= 54 \end{aligned}$$
olarak bulunur.
- **Örnek.** $a-b-c=7$ ve $-ab-ac+bc=-5$ olduğuna göre $a^2+b^2+c^2$ ifadesini bulunuz.
- **Çözüm.**
$$(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(-ab-ac+bc)$$
olduğundan istenen ifade
$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+2(-ab-ac+bc) &= 49 \\ a^2+b^2+c^2-10 &= 49 \\ a^2+b^2+c^2 &= 59 \end{aligned}$$
olarak bulunur.

- **Örnek.** $\dfrac{999^2-100}{1009}$ ifadesini sadeleştiriniz.
- **Çözüm.** İki kare farkı ile
$$\frac{999^2-100}{1009} = \frac{999^2-10^2}{1009} = \frac{(999-10)(999+10)}{1009} = 989$$
olur.
- **Örnek.** $\sqrt{\dfrac{4}{25}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{5}}$ ifadesinin değerini bulunuz.
- **Çözüm.** $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ olduğundan istenen sonuç
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{1}{16}-\frac{1}{5}} &= \sqrt{\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)^2} = \left|\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right| \\ &= \frac{2}{5}-\frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{20} \end{aligned}$$
olarak elde edilir.

- **Örnek.** Aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulunuz.
  1. $(x+1)^3$
  2. $(x-1)^3$
  3. $(x-2)^3$
  4. $(x+3)^3$
- **Çözüm.**
  1. $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$
  2. $(x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1$
  3. $(x-2)^3 = x^3-6x^2+12x-8$
  4. $(x+3)^3 = x^3+9x^2+27x+27$

10.4 Üç Terimlileri Çarpanlarına Ayırma

- ax^2+bx+c biçimindeki üç terimlilerde
$$a = mp,\, c = nq \text{ ve } b = mq+np$$
ise
$$ax^2+bx+c = (mx+n)(px+q)$$
biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.
- **Örnek.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.
  1. x^2+6x+5
  2. $x^2-16x+60$
  3. $6x^2+x-2$
  4. $5a^2+4a-12$
- **Çözüm.**
  1. $x^2+6x+5 = (x+5)(x+1)$
  2. $x^2-16x+60 = (x-6)(x-10)$
  3. $6x^2+x-2 = (3x+2)(2x-1)$
  4. $5a^2+4a-12 = (a+2)(5a-6)$

10.5 Değişken Değiştirme Yoluyla Çarpanlara Ayırma

- **Örnek.** $x^4 - 6x^2 + 8$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.
- **Çözüm.** $x^2 = t$ dönüşümü yapılırsa verilen ifade $t^2 - 6t + 8$ şekline dönüşür. Bu ifade
$$t^2 - 6t + 8 = (t-2)(t-4)$$
şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. t yerine x^2 yazılırsa
$$(t-2)(t-4) = \left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right)$$
olacaktır. Elde edilen son ifade iki kare farkı yardımıyla
$$\left(x^2-2\right)\left(x^2-4\right) = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x-2)(x+2)$$
olur. Böylece
$$x^4 - 6x^2 + 8 = \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)(x-2)(x+2)$$
olrak elde edilir.

- **Örnek.** $2 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 4$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.
- **Çözüm.** $3^x = t$ değişken dönüşümü ile ifade $2t^2 - 7t - 4$ biçimine dönüşür. Bu ifade
$$2t^2 - 7t - 4 = (2t+1)(t-4)$$
şeklinde çarpanlarına ayrılabilir. t yerine 3^x yazılırsa
$$(2t+1)(t-4) = (2 \cdot 3^x + 1)(3^x - 4)$$
olacaktır. Böylece
$$2 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x - 4 = (2 \cdot 3^x + 1)(3^x - 4)$$
olur.

10.6 Terim Ekleme-Çıkarma Yoluyla Çarpanlara Ayırma

- Bazı durumlarda verilen ifadenin çarpanları görülemeyebilir. Böyle durumlarda verilen ifadeye belli terimleri ekleme ve çıkarma yöntemiyle ifade çarpanlarına ayrılabilir.
- **Örnek.** $x^4 + x^2 + 1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.
- **Çözüm.** Verilen ifadeye x^2 ekleyip-çıkaralım:
$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= \left(x^2+1\right)^2 - x^2 \end{aligned}$$
Elde edilen son ifade iki kare farkı yardımıyla çarpanlarına ayrılabilir:
$$\left(x^2+1\right)^2 - x^2 = \left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1-x\right)$$
Buna göre soruda verilen ifade
$$x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1-x\right)$$
şeklinde çarpanlarına ayrılmış olur.

- **Örnek.** $a^2 - b^2 + 2a - 4b - 3$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.
- **Çözüm.** Verilen ifadeye 1 ekleyip-çıkaralım:
$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 2a - 4b - 3 &= a^2 - b^2 + 2a - 4b - 3 + 1 - 1 \\ &= a^2 + 2a + 1 - b^2 - 4b - 3 - 1 \\ &= a^2 + 2a + 1 - \left(b^2 + 4b + 4\right) \\ &= (a+1)^2 - (b+2)^2 \end{aligned}$$
Elde edilen son ifade iki kare farkı yardımıyla çarpanlarına ayrılabilir:
$$(a+1)^2 - (b+2)^2 = (a+b+3)(a-b-1)$$
Buna göre soruda verilen ifade
$$a^2 - b^2 + 2a - 4b - 3 = (a+b+3)(a-b-1)$$
şeklinde çarpanlarına ayrılmış olur.

10.7 Karışık Örnekler

- **Örnek.**
$$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-1}$$
ifadesini en sade şekilde yazınız.
- **Çözüm.** Verilen ifadede pay ve payda çarpanlarına ayrılırsa ifadenin en sade hali
$$\begin{aligned}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-1} &= \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}\\ &= \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)}\\ &= \frac{x-1}{x^2+1}\end{aligned}$$
olarak elde edilir.

- **Örnek.**
$$\frac{2x+1}{x+1}-\frac{1-x}{x^2-1}$$
ifadesini en sade şekilde yazınız.
- **Çözüm.** İkinci terim düzenlenirse
$$\begin{aligned}\frac{2x+1}{x+1}-\frac{1-x}{x^2-1} &= \frac{2x+1}{x+1}+\frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)}\\ &= \frac{2x+1}{x+1}+\frac{1}{x+1}\\ &= \frac{2x+2}{x+1}\\ &= \frac{2(x+1)}{x+1}\\ &= 2\end{aligned}$$
olarak elde edilir.

- **Örnek.**
$$\frac{(a+b)x^2+(a+b)x-x-1}{ax+bx-1}$$
ifadesini en sade şekilde yazınız.
- **Çözüm.** Pay ve paydada verilen ifadeler düzenlenip sadeleştirme yapıldığında
$$\begin{aligned}\frac{(a+b)x^2+(a+b)x-x-1}{ax+bx-1} &= \frac{[(a+b)x-1](x+1)}{(a+b)x-1}\\ &= x+1\end{aligned}$$
olarak elde edilir.

- **Örnek.**
$$\frac{2x^2+x-1}{x^2-ax+b}=\frac{2x-1}{x-3}$$
olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.
- **Çözüm.**
$$2x^2+x-1=(x+1)(2x-1)$$
olduğundan pay ve paydada $x+1$ terimi sadeleşmiş demektir.
$(x-3)(x+1)=x^2-2x-3$
$$\frac{2x-1}{\underset{(x+1)}{x-3}}=\frac{2x^2+x-1}{x^2-2x-3}$$
olduğundan
$$x^2-ax+b=x^2-2x-3$$
ve buradan $a=2$ ve $b=-3$ olarak elde edilir.

- **Örnek.** $a^2 - 3a + 1 = 0$ olduğuna göre $a - \dfrac{1}{a}$ ifadesinin değerlerini bulunuz.
- **Çözüm.** $a^2 - 3a + 1 = 0$ ise $a^2 + 1 = 3a$ ve

$$a + \frac{1}{a} = 3$$

olur. Bu ifadede iki tarafın karesi alınarak

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 7$$

bulunur. Diğer taraftan $a - \dfrac{1}{a} = k$ yazılarak iki tarafın karesi alınırsa

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 &= k^2 \\ 5 &= k^2 \end{aligned}$$

eşitliğinden $k = \sqrt{5}$ ve $k = -\sqrt{5}$ elde edilir.

- **Örnek.** $\left(x^2 - x\right)^2 - 8\left(x^2 - x\right) + 12$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.
- **Çözüm.** $x^2 - x = t$ denirse

$$\begin{aligned} \left(x^2 - x\right)^2 - 8\left(x^2 - x\right) + 12 &= t^2 - 8t + 12 \\ &= (t-2)(t-6) \end{aligned}$$

olur. t yerine $x^2 - x$ yazılırsa

$$(t-2)(t-6) = \left(x^2 - x - 2\right)\left(x^2 - x - 6\right)$$

olur. Bu ifade çarpanlarına ayrılırsa

$$\left(x^2 - x - 2\right)\left(x^2 - x - 6\right) = (x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$$

bulunur.

- **Örnek.** $x^5 + x + 1$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.
- **Çözüm.** Verilen ifadeye x^2 eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned} x^5 + x + 1 &= x^5 + x + 1 + x^2 - x^2 \\ &= x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x^2\left(x^3 - 1\right) + x^2 + x + 1 \\ &= x^2(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) + x^2 + x + 1 \\ &= \left(x^2 + x + 1\right)\left[x^2(x-1) + 1\right] \\ &= \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^3 - x^2 + 1\right) \end{aligned}$$

olur.

Ödev.

- Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.
  1. $a^2x - ax^2 + a^2x^2$ $\{$Cevap: $ax(a - x + ax)\}$
  2. $x^3 - 3x^2 - 9x + 27$ $\left\{\text{Cevap: } (x+3)(x-3)^2\right\}$
  3. $(a-b-c)^2 - (a+b-c)^2$ $\{$Cevap: $4b(c-a)\}$
  4. $x^2 - 7x - 18$ $\{$Cevap: $(x+2)(x-9)\}$
  5. $12x^2 - 14x - 10$ $\{$Cevap: $(4x+2)(3x-5)\}$
  6. $8a^3 - 64$ $\left\{\text{Cevap: } 8(a-2)\left(2a + a^2 + 4\right)\right\}$
  7. $x^3 + 9x^2 + 27x + 19$ $\left\{\text{Cevap: } (x+1)\left(8x + x^2 + 19\right)\right\}$
  8. $x^4 + x^2y^2 + y^4$ $\left\{\text{Cevap: } \left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^2 + xy + y^2\right)\right\}$

- Aşağıdakilerden her birinde isteneni bulunuz.
  1. $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{2}$ ise $x^2 + \frac{1}{x^2}$ kaçtır? {Cevap: 6}
  2. a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere, $ab = 31$ ve $a + b = 12$ ise $a^3 + b^3$ kaçtır {Cevap: 612}
  3. $x^2 - 10x + a$ ifadesinin bir tam kare olması için a kaç olmalıdır? {Cevap: 25}
  4. $x^3 + 3xy^2 = 15$ ve $y^3 + 3x^2y = 12$ olduğuna göre $x + y$ kaçtır? {Cevap: 3}
  5. $x = 102$ için $x^3 - 6x^2 + 12x$ ifadesinin değeri kaçtır? {Cevap: 1000008}
  6. $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ifadesinin en sade hali nedir? {Cevap: $2\sqrt{a}$}
  7. $a - b = b - c = 6$ olduğuna göre $a^2 + c^2 - 2b^2$ işleminin sonucu kaçtır? {Cevap: 72}

11. Oran ve Orantı

11.1 Oran

- Ez az biri sıfırdan farklı ve aynı birimli a ve b gibi iki çokluğun karşılaştırılmasına **oran** denir. Oran birimsizdir.
  - a nın b ye oranı $a : b$ dir. Bunun yerine $\frac{a}{b}$ gösterimi de kullanılabilir $(b \neq 0)$. Benzer şekilde
  - b nin a ya oranı $b : a$ dır $(a \neq 0)$. Bu da $\frac{b}{a}$ şeklinde gösterilebilir.
- **Örnek.**
  - 12 kız ve 15 erkek öğrencinin bulunduğu bir sınıfta kız öğrencilerin sayısının erkek öğrencilerin sayısına oranı $12 : 15$ tir. Bu durumu $\frac{12}{15}$ kesiri ile de ifade edebiliriz. Sadeleştirisek $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ olur. Demek ki sınıfta 4 kıza karşılık 5 erkek öğrenci gelmektedir.
  - İçinde 1 kg şeker ve 2 kg meyve bulunan bir reçelde şeker miktarının tüm meyve miktarına oranı $1 : 2$ ya da $\frac{1}{2}$ dir.
  - Bir torbada 3 mavi, 4 sarı, 5 kırmızı bilye varsa mavi bilyelerin sayısının tüm bilyelerin sayısına oranı $3 : 12$ veya $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ tür.

11.2 Orantı

- En az iki oranın eşitliğine **orantı** denir.
  - $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ikili orantıdır. Bu ifade $a : b = c : d$ şeklinde de yazılabilir.
  - $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ üçlü orantıdır. Bu ifade $a : b = c : d = e : f$ şeklinde de yazılabilir.
- **Örnek.** $\frac{2}{4}$ ve $\frac{4}{8}$ birer orandır. Bunların

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

şeklinde yazılması bir orantıdır. Ayrıca

$$\frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

olduğundan $k = \frac{1}{2}$ orantı sabitidir.

- **Orantının Özellikleri:**
  1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ise $ad = bc$ (İçler-dışlar çarpımı)
  2. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ise $a = bk$ ve $c = dk$ dır. Burada k ya **orantı sabiti** denir.
  3. r ve s sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ ise $\frac{ar + sc}{br + sd} = k$ yazılabilir. Özel olarak
  $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$
  yazılabilir.

- **Örnek.**
$$\frac{0.35}{0.7} = \frac{0.05}{x}$$
eşitliğinde x kaçtır?
- **Çözüm.** İçler-dışlar çarpımından
$$\begin{aligned} 0.35x &= 0.05 \times 0.7 \\ x &= \frac{0.05 \times 0.7}{0.35} \\ x &= 0.1 \end{aligned}$$

- **Örnek.**
$$\frac{a}{a+b} = \frac{4}{7}$$
olduğuna göre $\frac{b}{a}$ oranı kaçtır?
- **Çözüm.** İçler-dışlar çarpımından
$$\begin{aligned} 7a &= 4a + 4b \\ 3a &= 4b \\ \frac{b}{a} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$
olur.

- **Örnek.** $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ ve $x^2 + y^2 = 100$ olduğuna göre x ve y nin pozitif değeri kaçtır?
- **Çözüm.** $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = k$ olsun. Bu durumda $x = 3k$ ve $y = 4k$ olur. Bu durumda
$$\begin{aligned} (3k)^2 + (4k)^2 &= 100 \\ 25k^2 &= 100 \\ k^2 &= 4 \\ k &= 2 \end{aligned}$$
olur. Buna göre x ve y nin pozitif değeri
$$\begin{aligned} x &= 3k = 6 \\ y &= 4k = 8 \end{aligned}$$
olarak elde edilir.

- **Örnek.** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{2}{3}$ olduğuna göre $\frac{ad^2f}{bc^2e}$ ifadesinin değerini bulunuz.
- **Çözüm.** $\frac{d}{c} = \frac{f}{e} = \frac{3}{2}$ olduğundan istenen değer
$$\begin{aligned} \frac{ad^2f}{bc^2e} &= \frac{a}{b} \cdot \frac{d^2}{c^2} \cdot \frac{f}{e} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{d}{c}\right)^2 \cdot \frac{f}{e} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$
olarak bulunur.

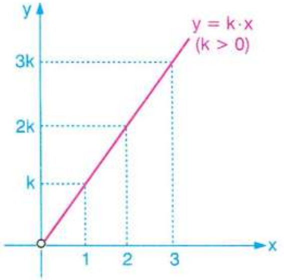
- **Örnek.**
$$\frac{a+2}{3}=\frac{b-1}{2}=\frac{c+4}{5}=3$$
olduğuna göre $a+b+c$ toplamını bulunuz.
- **Çözüm.**
$$\begin{aligned} a+2 &= 9 \Longrightarrow a=7 \\ b-1 &= 6 \Longrightarrow b=7 \\ c+4 &= 15 \Longrightarrow c=11 \end{aligned}$$
olduğundan
$$a+b+c=7+7+11=25$$
olur.

- **Örnek.**
$$\frac{a+3}{b-3}=\frac{b-2}{c+2}=\frac{c+5}{a+1}=3$$
olduğuna göre, $a+b+c$ toplamını bulunuz.
- **Çözüm.** Orantının dördüncü özelliği gereği
$$\begin{aligned} \frac{a+3+b-2+c+5}{b-3+c+2+a+1} &= 3 \\ \frac{a+b+c+6}{a+b+c} &= 3 \\ a+b+c+6 &= 3(a+b+c) \\ 2(a+b+c) &= 6 \\ a+b+c &= 3 \end{aligned}$$
olur.

11.3 Orantı Türleri

Doğru Orantı

- Birbirine bağlı olarak artan veya azalan iki çokluktan biri arttığında (azaldığında) diğeri de aynı oranda artıyorsa (azalıyorsa) bu iki çokluk **doğru orantılıdır** veya kısaca **orantılıdır** denir.
- Doğru orantılı iki çokluğun oranı daima sabittir. x ve y doğru orantılı olduğunda k orantı sabiti ise
$$\frac{y}{x}=k \text{ veya } y=kx$$
denklemi yazılabilir.
- $y=kx$ denkleminin grafiği aşağıdaki gibidir.



- **Örnek.** a, b, c sayıları sırası ile $2, 3$ ve 5 ile orantılıdır. $a-2b+3c=44$ olduğuna göre a kaçtır?
- **Çözüm.** Doğru orantılı çoklukların oranları sabit olduğundan
$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= \frac{b}{3}=\frac{c}{5}=k \\ a &= 2k,\, b=3k,\, c=5k \end{aligned}$$
değerleri eşitlikte yazılırsa
$$\begin{aligned} a-2b+3c &= 2k-6k+15k=44 \\ 11k &= 44 \\ k &= 4 \end{aligned}$$
olduğundan
$$a=2k=8$$
bulunur.

- **Örnek.** 74 TL yaşları $10, 12, 15$ olan üç kardeşe yaşları ile doğru orantılı olacak şekilde paylaştırılacaktır. En küçük kardeş kaç TL almalıdır?
- **Çözüm.** Yaşları $10, 12, 15$ olan üç kardeşler sırası ile a TL, b TL, c TL alsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{a}{10} &= \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = k \\ a &= 10k, b = 12k, c = 15k \end{aligned}$$

olur. Toplam para 74 TL olduğundan

$$\begin{aligned} a + b + c &= 37k = 74 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

olur. Buna göre en küçük kardeş

$$10k = 20$$

TL almalıdır.

- **Örnek.** a ve b sayıları doğru orantılıdır. a sayısı 9 olduğunda b sayısı 6 olduğuna göre a sayısı 6 olduğunda b sayısı kaçtır?
- **Çözüm.** Doğru orantılı çoklukların oranları sabit olduğundan

$$\frac{a}{b} = k$$

olmalıdır. a sayısı 9 olduğunda b sayısı 6 olduğuna göre

$$\frac{9}{6} = \frac{3}{2} = k$$

olur. Buna göre a sayısı 6 olduğunda b sayısı

$$\begin{aligned} \frac{6}{b} &= \frac{3}{2} \\ b &= 4 \end{aligned}$$

bulunur.

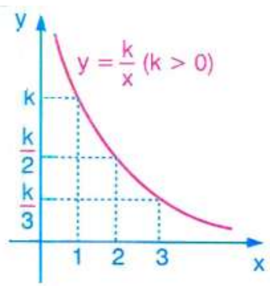
11.3 Orantı Türleri

Ters Orantı

- Birbirine bağlı olarak artan veya azalan iki çokluktan biri arttığında (azaldığında) diğeri de aynı oranda azalıyorsa (artıyorsa) bu iki çokluk **ters orantılıdır** denir.
- Ters orantılı iki çokluğun çarpımı daima sabittir. x ve y ters orantılı olduğunda k orantı sabiti ise

$$xy = k \text{ veya } y = \frac{k}{x}$$

denklemi yazılabilir.
- $y = \frac{k}{x}$ denkleminin grafiği aşağıdaki gibidir.



- **Örnek.** a, b, c sayıları sırası ile $2, 3$ ve 5 ile ters orantılıdır. $a - b + c = 44$ olduğuna göre a kaçtır?
- **Çözüm.** Ters orantılı çoklukların çarpımları sabit olduğundan

$$\begin{aligned} 2a &= 3b = 5c = k \\ a &= \frac{k}{2}, b = \frac{k}{3}, c = \frac{k}{5} \end{aligned}$$

değerleri eşitlikte yazılırsa

$$\begin{aligned} a - b + c &= \frac{k}{2} - \frac{k}{3} + \frac{k}{5} == 44 \\ \frac{11}{30}k &= 44 \\ k &= 120 \end{aligned}$$

olduğundan

$$a = \frac{k}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

bulunur.

- **Soru.** a ve b sayıları ters orantılıdır. a sayısı 9 olduğunda b sayısı 6 olduğuna göre a sayısı 27 olduğunda b sayısı kaçtır?
- **Çözüm.** Ters orantılı çoklukların çarpımları sabit olduğundan

$$ab = k$$

olmalıdır. a sayısı 9 olduğunda b sayısı 6 olduğuna göre

$$9 \cdot 6 = k = 54$$

olur. Buna göre a sayısı 27 olduğunda b sayısı

$$\begin{aligned} 27b &= 54 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

bulunur.

- **Örnek.** Kapasiteleri aynı olan 9 işçi bir işi 8 günde bitirebilmektedir. Aynı işi işçilerden 6 sı kaç günde bitirebilir?
- **Çözüm.** 6 işçi işi x günde bitirsin. İşçi sayısı ile bitirme süresi ters orantılı olduğundan

$$\begin{aligned} 9 \cdot 8 &= 6 \cdot x \\ 72 &= 6x \\ x &= 12 \end{aligned}$$

gün olarak elde edilir.

- **Örnek.** 77 TL yaşları 10, 12 olan iki kardeşe yaşları ile ters orantılı olacak şekilde paylaştırılacaktır. Büyük kardeş kaç TL almalıdır?
- **Çözüm.** Yaşları 10, 12 olan kardeşler sırası ile a TL, b TL alsın. Bu durumda

$$\begin{aligned} 10a &= 12b = k \\ a &= \frac{k}{10}, b = \frac{k}{12} \end{aligned}$$

olur. Toplam para 77 TL olduğundan

$$\begin{aligned} a + b &= \frac{k}{10} + \frac{k}{12} = 77 \\ \frac{11}{60}k &= 77 \Longrightarrow k = 420 \end{aligned}$$

olur. Buna göre büyük kardeş

$$\frac{k}{12} = \frac{420}{12} = 35$$

TL almalıdır.

11.3 Orantı Türleri

Bileşik Orantı

- İçinde birden fazla sayıda doğru orantı veya ters orantı bulunduran orantı türlerine **bileşik orantı** denir.
- Bileşik orantı problemlerinde

$$\frac{\text{Birinci iş miktarı}}{\text{İkinci iş miktarı}} = \frac{\text{Birinci iş ile verilen diğer verilerin çarpımı}}{\text{İkinci iş ile verilen diğer verilerin çarpımı}}$$

eşitliği kullanılır.
- **Örnek.** 6 işçi 12 m^2 halıyı 30 günde dokumaktadır. Buna göre aynı kapasitedeki 9 işçi 24 m^2 halıyı kaç günde dokur?
- **Çözüm.** 9 işçi 24 m^2 halıyı t günde dokusun. Bu durumda t

$$\frac{12}{24} = \frac{6 \cdot 30}{9 \cdot t} \Longrightarrow t = 40$$

gün olarak elde edilir.

- **Örnek.** 9 işçi 72 parça işi 8 günde yapabilmektedir. Buna göre aynı kapasitedeki 8 işçi 10 günde kaç parça iş yapar?
- **Çözüm.** Yapılabilecek parça sayısı x olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{72}{x} &= \frac{9 \cdot 8}{8 \cdot 10} \\ \frac{72}{x} &= \frac{9}{10} \\ 720 &= 9x \\ x &= 80 \end{aligned}$$

parça olarak bulunur.

11.4 Ortalamalar

Aritmetik Ortalama

- n tane sayının toplamının n ye bölümüne bu sayıların aritmetik ortalaması denir AO ile gösterilir. Buna göre $a_1, a_2, ..., a_n$ sayılarının aritmetik ortalaması

$$AO = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

şeklinde bulunur. Özel olarak
  - a ve b nin aritmetik ortalaması

$$AO = \frac{a+b}{2}$$

  - a, b ve c nin aritmetik ortalaması

$$AO = \frac{a+b+c}{3}$$

- **Örnek.** 4, 9 ve 11 sayılarının aritmetik ortalamasını bulunuz.
- **Çözüm.**

$$AO = \frac{4+9+11}{3} = 8$$

- **Örnek.** 7 sayının ortalaması 21 olduğuna göre bu sayıların toplamı kaçtır?
- **Çözüm.** Sayıların toplamı T olsun

$$\frac{T}{7} = 21 \Longrightarrow T = 147$$

olur.

- **Örnek.** Toplamları 153 olan 15 sayının bir kısmının ortalaması 9 bir kısmının ise 11 dir. Buna göre ortamalası 9 olan sayılar kaç tanedir?
- **Çözüm.** Ortalaması 9 olan sayılar x tane ise ortalaması 11 olanlar $15 - x$ tanedir. Bu durumda

$$\begin{aligned} 9 \cdot x + (15 - x) \cdot 11 &= 153 \\ 9x + 165 - 11x &= 153 \\ -2x &= 153 - 165 \\ -2x &= -12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

olur.

11.4 Ortalamalar
Geometrik Ortalama

- n tane sayının çarpımının n. dereceden köküne bu sayıların geometrik ortalaması denir GO ile gösterilir. Buna göre $a_1, a_2, ..., a_n$ sayılarının geometrik ortalaması
$$GO = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$$
şeklinde bulunur. Özel olarak
  - a ve b nin geometrik ortalaması
$$GO = \sqrt{ab}$$
  - a, b ve c nin geometrik ortalaması
$$GO = \sqrt[3]{abc}$$

- **Örnek.** 4 ve 9 sayılarının geometrik ortalamasını bulunuz.
- **Çözüm.**
$$GO = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$$
- **Örnek.** 3, 6 ve 8 sayılarının geometrik ortalamasını bulunuz.
- **Çözüm.**
$$GO = \sqrt[3]{3 \times 6 \times 8} = \sqrt[3]{144} \approx 5.24$$
olur.

- **Örnek.** Pozitif a, b ve c sayıları için $ab = 6, ac = 9, bc = 24$ olduğuna göre bu sayıların geometrik ortalaması kaçtır?
- **Çözüm.** Verilenler taraf-tarafa çarpılırsa abc çarpımı
$$\begin{aligned} ab \cdot ac \cdot bc &= a^2b^2c^2 = 6 \cdot 9 \cdot 24 \\ abc &= \sqrt{6 \cdot 9 \cdot 24} = 36 \end{aligned}$$
olarak elde edilir. Bu sayıların geometrik ortalaması
$$\begin{aligned} GO &= \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{36} \\ &\approx 3.30 \end{aligned}$$
olacaktır.

11.4 Ortalamalar
Harmonik Ortalama

- $a_1, a_2, ..., a_n$ sayılarının harmonik ortalaması
$$HO = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$
şeklinde tanımlanır. Özel olarak
  - a ve b nin harmonik ortalaması
$$HO = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$
  - a, b ve c nin harmink ortalaması
$$HO = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = \frac{3abc}{ab + ac + bc}$$

- Oran, yüzde, bölme şeklindeki verilerin ortalamalarını bulmak için genellikle aritmetik ortalama uygun bir ortalama türü değildir. Örneğin birim zamanda alınan yol (yani hız), birim başına ödenecek para miktarı (yani fiyat) gibi ölçüler aritmetik ortalamanın kullanımı için uygun değildir. Bu gibi durumlarda harmonik ortalama kullanılabilir.
- Genel olarak ortalama bulunacak dönem içinde ortalaması bulunan oranın payı sabit ise harmonik ortalama, paydası sabit ise aritmetik ortalama kullanılmalıdır. Örneğin

$$\text{Ortalama Hız} = \frac{\text{Alınan toplam yol}}{\text{Toplam zaman}}$$

olduğundan alınan toplam yol sabit ise harmonik ortalama, zaman sabit ise aritmetik ortalama kullanılmalıdır. Yine benzer olarak

$$\text{Ortalama Fiyat} = \frac{\text{Ödenen para miktarı}}{\text{Alınan miktar sayısı}}$$

olduğundan ödenen para miktarısabit ise harmonik ortalama, alınan miktar sayısı sabit ise aritmetik ortalama kullanılmalıdır.

- **Örnek.** 8 ve 12 sayılarının harmonik ortalamasını bulunuz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} HO &= \frac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}} = \frac{2}{\frac{5}{24}} \\ &= \frac{48}{5} = 9.6 \end{aligned}$$

olur.

- **Örnek.** İki sayının geometrik ortalaması 5, aritmetik ortalaması 8 olduğuna göre harmonik ortalaması kaçtır?
- **Çözüm.** Bu iki sayı a ve b olsun.

$$\begin{aligned} GO &= \sqrt{ab} = 5 \Longrightarrow ab = 25 \\ AO &= \frac{a+b}{2} = 8 \Longrightarrow a+b = 16 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} HO &= \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \\ &= \frac{50}{16} = \frac{25}{8} = 3.125 \end{aligned}$$

bulunur.

- **Örnek.** Bir araç üç saat boyunca 90 km/sa hızla başka bir üç saat boyunca 60 km/sa hızla gittiğine göre aracın ortalama hızı nedir?
- **Çözüm.** Zaman (payda) sabit olduğundan ortalama hız için aritmetik ortalama kullanılmalıdır. Buna göre ortalama hız

$$\begin{aligned} V_{ort} &= \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}} = \frac{90\cdot 3 + 60\cdot 3}{6} \\ &= \frac{90+60}{2} = \frac{150}{2} \\ &= 75 \text{ km/sa} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.
- **Örnek.** Bir araç belirli bir mesafeyi 90 km/sa hızla gidip 60 km/sa hızla geri döndüğüne göre aracın ortalama hızı nedir?
- **Çözüm.** Toplam yol (pay) sabit olduğundan ortalama hız için harmonik ortalama kullanılmalıdır. Buna göre ortalama hız

$$\begin{aligned} V_{ort} &= \frac{\text{Toplam yol}}{\text{Toplam zaman}} = \frac{x+x}{\frac{x}{90}+\frac{x}{60}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{90}+\frac{1}{60}} = 2\cdot\frac{36}{1} = 72 \text{ km/sa} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.** Benzinin litre fiyatı ilk ay 1.70 TL ikinci ay 1.90 TL dir. Bu iki aylık dönem boyunca aylık 30 litre benzin kullanıldığına göre benzinin litre fiyatı ortalama kaç TL dir?
- **Çözüm.** Alınan miktar (payda) sabit olduğundan (her iki durumda da 30 lt) ortalama fiyat için aritmetik ortalama kullanılmalıdır. Buna göre ortalama fiyat

$$\begin{aligned} Fiyat_{ort} &= \frac{\text{Ödenen para miktarı}}{\text{Alınan miktar sayısı}} = \frac{30 \times 1.70 + 30 \times 1.90}{30 + 30} \\ &= \frac{1.70 + 1.90}{2} = 1.80 \text{ TL} \end{aligned}$$

olur.

- **Örnek.** Benzinin litre fiyatı ilk ay 1.70 TL ikinci ay 1.90 TL dir. Bu iki aylık dönem boyunca aylık 300 TL lik benzin kullanıldığına göre benzinin litre fiyatı ortalama kaç TL dir?
- **Çözüm.** Ödenen miktar (pay) sabit olduğundan (her iki durumda da 300 TL) ortalama fiyat için harmonik ortalama kullanılmalıdır. Buna göre ortalama fiyat

$$\begin{aligned} Fiyat_{ort} &= \frac{\text{Ödenen para miktarı}}{\text{Alınan miktar sayısı}} = \frac{300 + 300}{\frac{300}{1.70} + \frac{300}{1.90}} \\ &= \frac{2}{\quad} \approx 1.79 \text{ TL} \end{aligned}$$

11.5 Oran Orantı Problemleri

- **Örnek.** Bir kuyumcu 800 adet altını 2,3 ve 5 yaşlarındaki üç çocuğu arasında yaşları ile doğru orantılı olacak şekilde paylaştıracaktır. Buna göre her bir çocuğun alacağı altın miktarını bulunuz.
- **Çözüm.** Çocukların alacakları altın miktarları sırası ile a, b ve c olsun. Doğru orantı gereği

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = k \\ a &= 2k, b = 3k, c = 5k \end{aligned}$$

olmalıdır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2k + 3k + 5k = 800 \\ 10k &= 800 \Longrightarrow k = 80 \end{aligned}$$

olur. Buna göre çocukların alacakları altın miktarı

$$\begin{aligned} a &= 2k = 160 \\ b &= 3k = 240 \\ c &= 5k = 400 \end{aligned}$$

olmalıdır.

- **Örnek.** Bir tüccar 6200 TL'yi 2, 3 ve 5 yaşlarındaki üç çocuğu arasında yaşları ile ters orantılı olacak şekilde paylaştıracaktır. Buna göre her bir çocuğun alacağı para miktarını bulunuz.
- **Çözüm.** Çocukların alacakları para miktarları sırası ile a, b ve c TL olsun. Ters orantı gereği

$$\begin{aligned} 2a &= 3b = 5c = k \\ a &= \frac{k}{2}, b = \frac{k}{3}, c = \frac{k}{5} \end{aligned}$$

olmalıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} a + b + c &= \underset{(15)}{\frac{k}{2}} + \underset{(10)}{\frac{k}{3}} + \underset{(6)}{\frac{k}{5}} = 6200 \\ \frac{31k}{30} &= 6200 \Longrightarrow k = 6000 \end{aligned}$$

olur. Buna göre çocukların alacakları para miktarı

$$\begin{aligned} a &= \frac{k}{2} = 3000 \\ b &= \frac{k}{3} = 2000 \\ c &= \frac{k}{5} = 1200 \end{aligned}$$

- **Örnek.** Bir tüccar 6200 TL'yi 2, 3 ve 5 yaşlarındaki üç çocuğu arasında yaşları ile ters orantılı olacak şekilde paylaştıracaktır. Buna göre her bir çocuğun alacağı para miktarını bulunuz.
- **Çözüm.** Çocukların alacakları para miktarları sırası ile a, b ve c TL olsun. Ters orantı gereği

$$\begin{aligned} 2a &= 3b = 5c = k \\ a &= \frac{k}{2}, b = \frac{k}{3}, c = \frac{k}{5} \end{aligned}$$

olmalıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} a + b + c &= \underset{(15)}{\frac{k}{2}} + \underset{(10)}{\frac{k}{3}} + \underset{(6)}{\frac{k}{5}} = 6200 \\ \frac{31k}{30} &= 6200 \Longrightarrow k = 6000 \end{aligned}$$

olur. Buna göre çocukların alacakları para miktarı

$$\begin{aligned} a &= \frac{k}{2} = 3000 \\ b &= \frac{k}{3} = 2000 \\ c &= \frac{k}{5} = 1200 \end{aligned}$$

- **Örnek.** A, B ve C ortakları sırasıyla 100000, 200000 ve 300000 TL sermaye koyarak bir şirket kuruyorlar. Dönem sonunda bu ortaklıktan 240000 TL kâr ediyorlar. Buna göre her bir sermayedarın bu kârdan alacakları miktarı bulunuz.
- **Çözüm.** Kârdan alacakları pay ortaya koydukları miktar ile doğru orantılı olacağından alacakları para miktarları sırası ile a, b ve c TL ise

$$\begin{aligned} \frac{a}{100000} &= \frac{b}{200000} = \frac{c}{300000} \\ a &= \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = k \\ a &= k, b = 2k, c = 3k \end{aligned}$$

olmalıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} a+b+c &= 6k = 240000 \\ k &= 40000 \end{aligned}$$

olur. Buna göre sermayedarın bu kârdan alacakları miktarlar

$$\begin{aligned} a &= k = 40000 \\ b &= 2k = 80000 \\ c &= 3k = 120000 \end{aligned}$$

TL olmalıdır.

- **Örnek.** Kemal bir işi tek başına 9 ünde, Mustafa aynı işi tek başına 18 günde bitiriyor. İkisi beraber bu işi kaç günde bitirirler?
- **Çözüm.** Kemal bir günde işin $\frac{1}{9}$ unu, Mustafa bir günde işin $\frac{1}{18}$ ini bitirir. İkisi beraber bir günde işin

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

sını bitirirler. Doğru orantı yardımıyla bir günde 6 da 1 ini yaptıklarına göre işin tamamını 6 günde yaparlar.
- **Örnek.** Kemal bir işi tek başına 9 ünde, Mustafa aynı işi tek başına 18 günde bitiriyor. İkisi beraber 3 gün çalıştıktan sonra Kemal işi bırakıyor. Kalan işi Mustafa kaç günde bitirir?
- **Çözüm.** İkisi beraber bir günde işin

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

sını bitiririyorlardı. 3 günde

$$3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

sini bitirler. Böylece işin $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ si (yarısı) kalır. Mustafa işi tek başına 18 günde bitirdiğine göre yarısını 9 günde bitirir.

- **Örnek.** Bir fabrikada bulunan iki makineden birisi günlük siparişlerin $\frac{1}{3}$ ünü 2 saatte, diğeri $\frac{1}{2}$ sini 3 saatte bitirmektedir. Buna göre bu iki makine beraber çalıştıklarında günlük siparişin %60 ını kaç saatte bitirirler?
- **Çözüm.** İlk makine günlük siparişlerin $\frac{1}{3}$ ünü 2 saatte bitirdiğine göre tamamını 6 saatte, ikinci makine günlük siparişlerin $\frac{1}{2}$ sini 3 saatte bitirdiğine göre tamamını 6 saatte bitirir. İkisi beraber 1 saatte siparişlerin

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

ünü bitirirler. Tamamını 3 saatte bitireceklerinden günlük siparişin %60 ını yani $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ ini doğru orantı yardımıyla

$$\frac{9}{5} = 1.8$$

saatte bitirirler.

- **Örnek.** Bir işyerinde çalışanların %40 ı bayandır. Bayanların yaşlarının ortalaması 30, tüm çalışanların yaşlarının ortalaması 45 tir. İş yerinde toplam 120 kişi olduğuna göre, bu iş yerinde çalışan erkeklerin yaş ortalaması kaçtır?
- **Çözüm.** 120 nin %40 ı $120 \times \frac{40}{100} = 48$ olduğundan çalışanların 48 i bayan, $120 - 48 = 72$ si erkektir. Erkeklerin ortalaması x olsun.

$$\begin{aligned} \frac{48 \cdot 30 + x \cdot 72}{120} &= 45 \\ 48 \cdot 30 + x \cdot 72 &= 45 \cdot 120 \\ 1440 + 72x &= 5400 \\ x &= 55 \end{aligned}$$

bulunur.

12. Denklemler

12.1 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler (Doğrusal Denklemler)

- $a \neq 0$ olmak üzere

$$ax + b = 0$$

şeklindeki denklemlere **birinci dereceden bir bilinmeyenli ya da doğrusal (lineer) denklem** denir. Bu denklemi sağlayan

$$x = -\frac{b}{a}$$

sayısına **denklemin çözümü** veya **kökü** adı verilir. Bir denklemin bütün köklerinden oluşan küme **çözüm kümesi** olarak adlandırılır.

- Bir denklemi çözmek demek bu denklemi sağlayan değer(ler)i bulmak demektir. $ax + b = 0$ biçimine gelebilen denklemleri çözmek için aşağıdaki eşitlik özellikleri kullanılır:
  1. Bir eşitliğin her iki yanına aynı sayı eklendiğinde veya eşitliğin her iki tarafından aynı sayı çıkarıldığında elde edilen eşitlik ilk eşitliğe denktir.
  2. Bir eşitliğin her iki yanı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpıldığında veya bölündüğünde elde edilen eşitlik ilk eşitliğe denktir.

- **Örnek.**

$$6x + 18 = 0$$

denklemini çözünüz.

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 6x &= -18 \\ x &= -\frac{18}{6} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

- **Örnek.**

$$2x + 9 = 5x - 6$$

denklemini çözünüz.

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 9 + 6 &= 5x - 2x \\ 15 &= 3x \\ \frac{15}{3} &= \frac{3x}{3} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

- **Örnek.**

$$3x - 2\left(2x - 5\right) = 2\left(x + 3\right) - 8$$

denklemini çözünüz.

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 3x - 4x + 10 &= 2x + 6 - 8 \\ -x + 10 &= 2x - 2 \\ 2x + x &= 10 + 2 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

- **Örnek.**
$$\frac{x+1}{3}-\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$$
denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned}
\underset{(4)}{\frac{x+1}{3}}-\underset{(3)}{\frac{x}{4}} &= \underset{(6)}{\frac{1}{2}}\\
\frac{4x+4}{12}-\frac{3x}{12} &= \frac{4x+4-3x}{12}=\frac{6}{12}\\
\frac{x+4}{12} &= \frac{6}{12}\\
x+4 &= 6\\
x &= 2
\end{aligned}$$

olduğundan çözüm kümesi $\{2\}$ şeklindedir.

- **Örnek.**
$$(2a-1)\,x+3a-2=x+4$$
denkleminin kökü $x=2$ olduğuna göre a nın değerini bulunuz.
- **Çözüm.** Denklemde x yerine 2 değeri verildiğinde a nın değeri

$$\begin{aligned}
2\,(2a-1)+3a-2 &= 2+4\\
4a-2+3a-2 &= 6\\
7a-4 &= 6\\
7a &= 10\\
a &= \frac{10}{7}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

- **Örnek.** Bir kısmı 35, bir kısmı 55 dolardan olmak üzere 95 biletin satıldığı bir konserde 4325 dolar gelir elde edilmiştir. İki çeşit biletten kaçar tane satılmıştır?
- **Çözüm.**

35 dolarlık bilet sayısı	55 dolarlık bilet sayısı
x	$95-x$

-
$$\begin{aligned}
35x+55\,(95-x) &= 4325\\
35x+55\cdot 95-55x &= 4325\\
35x+5225-55x &= 4325\\
-20x &= 4325-5225\\
-20x &= -900\\
x &= 45
\end{aligned}$$

  olur. Demek ki 35 dolarlık 45 adet, 55 dolarlık $95-x=95-45=50$ adet bilet vardır.

- **Örnek.** Emekli olduğunuzda hesabınızda 50000 dolarınız var. Bu parayı iki farklı fona yatırma seçeneğiniz bulunuyor. A fonu yıllık % 5 getiri ve B fonu yıllık % 7 getiri sağlamaktadır. Yıllık 3200 dolarlık faiz geliri elde etmek için paranızı A ve B fonlarına nasıl bölüştürürsünüz?
- **Çözüm.**

A fonuna yatırılan miktar	B fonuna yatırılan miktar
x	$50000-x$

-
$$\begin{aligned}
x\cdot\frac{5}{100}+(50000-x)\cdot\frac{7}{100} &= 3200\\
\frac{5x+(50000-x)\cdot 7}{100} &= 3200\\
5x+350000-7x &= 320000\\
350000-2x &= 320000\\
2x &= 350000-320000=30000\\
x &= 15000
\end{aligned}$$

  - Demek ki tüm para A fonuna 15000 \$, B fonuna $50000-x=50000-15000=35000$ \$ yatırılacak şekilde bölüştürülmelidir.

- **Örnek.** Bilgisayar mağazasında çalışan bir satış elemanı aylık 2000 dolar temel ücretin yanısıra aylık 7000 doların üzerindeki her satıştan %8 komisyon almaktadır. Bu çalışanın ayda 4000 dolar kazanabilmesi için bir ayda ne kadar satış yapması gerekir?
- **Çözüm.** x dolarlık satış yapılan bir ayda satış elemanının alacağı tüm ücret

Temel ücret	Komisyon
2000	$(x-7000)\cdot\frac{8}{100}$

şeklinde olacaktır.

  - Çalışanın ayda 4000 dolar kazanabilmesi için

$$\begin{aligned} 2000+(x-7000)\cdot\frac{8}{100} &= 4000 \\ (x-7000)\cdot\frac{8}{100} &= 2000 \\ x-7000 &= \frac{2000\cdot 100}{8}=25000 \\ x &= 32000 \end{aligned}$$

  dolarlık satış yapması gerekir.

12.2 Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemler

- a, b, c reel sayılar ve $a, b \neq 0$ olmak üzere

$$ax+by+c=0$$

şeklindeki denklemlere x ve y değişkenlerine bağlı **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem** denir.

- Örneğin
  - $$x+y-5=0$$
    denklemi x ve y değişkenlerine bağlı birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem,
  - $$3a-4b-1=0$$
    denklemi a ve b değişkenlerine bağlı birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemdir.

- $$\begin{aligned} ax+by+c &= 0 \\ dx+ey+f &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde birden fazla iki bilinmeyenli denklem **denklem sistemini** oluşturur. Bu denklemlerin her ikisini de sağlayan (x, y) ikilisi (varsa) denklem sisteminin bir çözümüdür. Denklemde x ve y değerleri değişkenlerdir. Yukarıdaki denklem sistemi çözülürken bir çok çözüm yöntemi mevcuttur. Aşağıdaki iki yöntem, en sık kullanılan yöntemlerdir:

1. **Yok etme metodu :** Değişkenlerden biri yok edilir ve kalan değişken bulunur. Bu değişken yardımıyla diğer değişken elde edilir.
2. **Yerine koyma metodu :** Verilen denklemlerin birinden değişkenlerden biri çekilip diğer denklemde yazılır. Böylece birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklem elde edilir. Bu denklem çözülerek değişkenlerden biri, bu değişken yardımıyla da diğer değişken elde edilir.

- **Örnek.**

$$\begin{aligned} 4x+2y &= 6 \\ 3x-4y &= 10 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.

- **Çözüm.** Yok etme metodunu kullanalım. Denklemlerden birinciyi 2 ile çarpıp iki denklemi taraf tarafa toplayalım:

$$\begin{array}{rr} & 8x+4y=12 \\ + & 3x-4y=10 \\ \hline & 11x=22 \end{array}$$

ve buradan

$$x=2$$

bulunur. Bu değeri denklemlerden birinde örneğin birincide yazarsak y değerini

$$\begin{aligned} 8+2y &= 6 \\ 2y &= -2 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

olarak buluruz. Demek ki sorudaki denklem sisteminin çözümü $(2, -1)$ ikilisidir.

- **Örnek.**

$$\begin{aligned} 2a+b &= 4 \\ 4a+3b &= 6 \end{aligned}$$

denklem sistemini yok etme metodu ile çözünüz.

- **Çözüm.** Denklemlerden birinciyi -3 ile çarpıp iki denklemi taraf tarafa toplayalım:

$$\begin{array}{rr} & -6a-3b=-12 \\ + & 4a+3b=6 \\ \hline & -2a=-6 \end{array}$$

ve buradan

$$a=3$$

buluruz. Bu değeri denklemlerden birinde örneğin birincide yazarsak b nin değerini

$$\begin{aligned} 6+b &= 4 \\ b &= -2 \end{aligned}$$

olarak buluruz. Demek ki sorudaki denklem sisteminin çözümü $(3,-2)$ ikilisidir.

- **Örnek.**

$$\begin{aligned} 5x-4y &= -32 \\ x-y &= -7 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.

- **Çözüm.** Yerine koyma metodunu kullanalım. İkinci denklemden elde edilen

$$y=x+7$$

yi birinci denklemde yazıp elde edeceğimiz birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi çözelim:

$$\begin{aligned} 5x-4(x+7) &= -32 \\ 5x-4x-28 &= -32 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

ve bu değeri denklemlerden birinde örneğin ikincide yazıp

$$\begin{aligned} -4-y &= -7 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

olarak buluruz. Demek ki sorudaki denklem sisteminin çözümü $(-4,3)$ ikilisidir.

- **Örnek.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}-\frac{8}{y} &= 18 \\ \frac{7}{x}+\frac{3}{y} &= 67 \end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.

- **Çözüm.** Birinci denklem -7 ile genişletilip denklemler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} \frac{56}{y}+\frac{3}{7} &= (-7)\cdot 18+67 \\ \frac{59}{y} &= -59 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

olur. Soruda verilen ilk denklemde $y=-1$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+8 &= 18 \\ x &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

elde edilir.

- **Örnek.** 20 soruluk bir test sınavında dört yanlış soru bir doğru soruyu götürmektedir. Yapılan her net 5 puandır. Sınavda tüm soruları cevaplayan bir öğrenci sınavdan 62.5 aldığına göre, kaç soruyu doğru cevaplamıştır?
- **Çözüm.**Doğru yaptığı sorular x,yanlış yaptığı sorular y tane olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x+y &= 20 \\ \left(x-\frac{y}{4}\right)\cdot 5 &= 62.5 \end{aligned}$$

denklem sistemi yazılabilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$x=14, y=6$$

elde edilir. Demek öğrenci 14 soruyu doğru, 6 soruyu yanlış cevaplamıştır.

- **Örnek.** Bir sınıfta 2 şer ve 3 er kişilik toplam 21 adet sıra vardır. Tüm sıralar dolu olduğunda sınıfta 56 öğrenci olduğuna göre sınıfta 2 şer kişilik kaç sıra vardır?
- **Çözüm.** 2 şer kişilik x, 3 er kişilik y adet sıra olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x+y &= 21 \\ 2x+3y &= 56 \end{aligned}$$

denklem sistemi yazılabilir. Bu denklem sistemi çözüldüğünde

$$x=7, y=14$$

elde edilir. Demek ki sınıfta 2 şer kişilik 7 adet sıra vardır.

- **Örnek.** Bir sürahi yarısına kadar su ile dolu olduğunda ağırlığı 3000 gram, üçte biri su ile dolu iken ağırlığı 2400 gramdır. Sürahi su ile tam dolu olduğunda ağırlığı kaç gram olacaktır?
- **Çözüm.** Sürahi boş olduğunda ağırlığı x, sürahinin alabildiği toplam su miktarı y olsun.

$$\begin{aligned} x+\frac{y}{2} &= 3000 \\ x+\frac{y}{3} &= 2400 \end{aligned}$$

denklem sistemi yazılabilir. Bu denklem sisteminin çözümü

$$x=1200, y=3600$$

olduğundan sürahi su ile tam dolu olduğunda ağırlığı

$$x+y=4800$$

gram olacaktır.

12.3 İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

- a, b, c reel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$ax^2+bx+c=0$$

şeklindeki denklemlerdir. Böyle bir denklemin daima iki kökü vardır. Ancak bu kökler reel olmayabilir. Bu tür denklemleri çözmek için genelde aşağıdaki iki çözüm yönteminden biri kullanılılır.
- **Çarpanlara Ayırma İle.** Verilen ifade $a=mn, c=pq$ ve $b=mq+pn$ olmak şartıyla

$$ax^2+bx+c=(mx+n)(px+q)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır.

$$(mx+n)(px+q)=0$$

olabilmesi için $mx+n=0$ veya $px+q=0$ olmalıdır. Buna göre

$$mx+n=0 \Longrightarrow x_1=-\frac{n}{m}$$

ve

$$px+q=0 \Longrightarrow x_2=-\frac{q}{p}$$

şeklinde iki çözüm elde edilir.

- **Diskriminant Yardımıyla.**

$$ax^2+bx+c=0$$

denklemi verilsin.

$$\Delta=b^2-4ac$$

sayısına bu denklemin **diskriminantı** denir.
  - $\Delta>0$ ise denklemin birbirinden farklı iki reel kökü vardır ve bu kökler

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

formülleri ile bulunur.
  - $\Delta=0$ ise denklemin birbirine eşit iki reel kökü vardır ve bu kökler

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$$

ile bulunur. Bu durumda

$$ax^2+bx+c=(mx+n)^2$$

şeklinde bir tamkaredir.
  - $\Delta<0$ ise denklemin reel kökü yoktur. İki karmaşık kök vardır.

- **Örnek.**
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
denklemini çözünüz.
- **Çözüm.**
$$x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$$
şeklinde çarpanlarına ayrılır. Çarpımları 0 olan iki reel sayının en az biri sıfır olduğundan
$$(x+2)(x-4) = 0$$
ise $x+2=0$ dır veya $x-4=0$ dır. Buna göre,
  - $x+2=0$ ise $x_1 = -2$ ve
  - $x-4=0$ ise $x_2 = 4$ olur. Buna göre denklemin çözüm kümesi $\{-2, 4\}$ olur.

- **Örnek.**
$$x^2 - 2x - 1 = 0$$
denklemini çözünüz.
- **Çözüm.** $x^2 - 2x - 1$ ifadesini çarpanlara ayırmak için terim ekleyip çıkarmak gerekir. Bunu yerine daha kestirmeden Δ yoluyla denklem çözülebilir.
$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 8$$
olduğundan
  - $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2}$$
  ve
  - $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$$
  olur. Dikkat edilirse kökler bir birinin eşleniğidir. Buna göre denklemin çözüm kümesi $\left\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right\}$ olur.

- **Örnek.**
$$x^2 - 5x + 1 = 0$$
denklemini çözünüz.
- **Çözüm.**
$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21$$
olduğundan
  - $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{21}}{2 \cdot 1} = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$$
  ve
  - $$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{21}}{2 \cdot 1} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$
  olur. Buna göre denklemin çözüm kümesi $\left\{\frac{5-\sqrt{21}}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right\}$ olur.

- **Örnek.**
$$\frac{x^2}{4} - x + 1 = 0$$
denklemini çözünüz.
- **Çözüm.**
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 0$$
olduğundan
  - $$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2$$
  olacaktır. Buna göre, denklemin çözüm kümesi $\{2\}$ olacaktır.
  - Dikkat edilirse
  $$\frac{x^2}{4} - x + 1 = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2$$
  şeklinde bir tamkaredir.

- $$ax^2+bx+c=0$$
  bir bilinmeyenli denklemi
  $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
  biçiminde de yazılabilir.
- Kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden denklem
  $$(x-x_1)(x-x_2)=0$$
  şeklinde veya bu eşitliğin düzenlenmiş hali olan
  $$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
  şeklinde yazılabilir.
- Dikkat edilirse $ax^2+bx+c=0$ denkleminde
  $$\begin{aligned} x_1+x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$
  dır.

- **Örnek.** Kökleri $\frac{3}{4}$ ve $-\frac{2}{3}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazınız.
- **Çözüm.** İstenen denklem
  $$\begin{aligned} x^2-\left(\frac{3}{4}+\left(-\frac{2}{3}\right)\right)x+\left(\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) &= 0 \\ x^2-\frac{1}{12}x-\frac{1}{2} &= 0 \\ 12x^2-x-6 &= 0 \end{aligned}$$
  şeklinde elde edilir.

- **Örnek.**
  $$3x^2-2x-4=0$$
  denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre, kökleri $2x_1+1$ ve $2x_2+1$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazınız.
- **Çözüm.** Verilen denklemin kökler toplamı ve çarpımı
  $$x_1+x_2=\frac{2}{3},\quad x_1x_2=-\frac{4}{3}$$
  tür. İstenen denklemin kökleri toplamı ve kökleri çarpımını bulmalıyız.
  $$\begin{aligned} 2x_1+1+2x_2+1 &= 2(x_1+x_2)+2=2\cdot\frac{2}{3}+2=\frac{10}{3} \\ (2x_1+1)(2x_2+1) &= 2(x_1+x_2)+4x_1x_2+1=2\cdot\frac{2}{3}+4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+1 \\ &= -3 \end{aligned}$$
  soruda istenen denklem
  $$\begin{aligned} x^2-\frac{10}{3}x+(-3) &= 0 \\ 3x^2-10x-9 &= 0 \end{aligned}$$
  olarak elde edilir.

- **Örnek.** Toplamları 4, çarpımları 1 olan iki reel sayı bulunuz.
- **Çözüm.** Bu sayılar x_1 ve x_2 olsun.
  $$\begin{aligned} x_1+x_2 &= 4 \\ x_1x_2 &= 1 \end{aligned}$$
  olduğundan kökleri x_1 ve x_2 olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem
  $$x^2-4x+1=0$$
  şeklindedir. Bu denklem diskiminant yoluyla çözülürse
  $$\begin{aligned} x_1 &= 2-\sqrt{3} \\ x_2 &= 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$
  olarak elde edilecektir.

- **Örnek.** 1 metre boyundaki teli öyle iki parçaya ayırınız ki telin uzunluğunun uzun parçanın uzunluğuna oranı, uzun parçanın uzunluğunun kısa parçanın uzunluğuna oranına eşit olsun.
- **Çözüm.** Uzun parçanın uzunluğu x ise kısa parçanın uzunluğu $1-x$ olacaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{x}{1-x}\\ x^2 &= 1-x\\ x^2+x-1 &= 0\end{aligned}$$

ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi elde edilecektir. Denklem çözülürse

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

olur. Ancak ikinci kök negatif olduğundan telin parçalarından birinin uzunluğu bu olamaz. Diğer parçanın uzunluğu

$$1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

şeklindedir.

12.4 Karışık Problemler

- **Örnek.**

$$\frac{x-3}{2} - \frac{x+2}{3} = 2$$

denkleminin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Payda eşitlenirse

$$\begin{aligned}\frac{3(x-3)}{6} - \frac{2(x+2)}{6} &= 2\\ 3x-9-2x-4 &= 12\\ x-13 &= 12\\ x &= 25\end{aligned}$$

olduğundan çözüm kümesi $\{25\}$ şeklindedir.

- **Örnek.**

$$\begin{aligned}2x-4y &= -1\\ x-2y &= 3\end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümünü araştırınız.
- **Çözüm.** Yok etme metodunu kullanalım. Denklemlerden ikinciyi -2 ile çarpıp iki denklemi taraf tarafa toplayalım:

$$\begin{array}{rr} & 2x-4y=-1\\ + & -2x+4y=-6\\ \hline & 0=-7\end{array}$$

olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla soruda verilen denklem sisteminin reel çözümü yoktur.

- **Örnek.**

$$\begin{aligned}\frac{5}{x}+\frac{6}{y} &= 1\\ \frac{4}{x}-\frac{5}{y} &= \frac{31}{2}\end{aligned}$$

denklem sistemini çözünüz.
- **Çözüm.** Birinci denklem 5 ile ve ikinci denklemi 6 ile genişletilip denklemleri taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}\frac{49}{x} &= 98\\ x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

olur. Bu değer yazılırsa

$$\begin{aligned}10+\frac{6}{y} &= 1\\ y &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

elde edilir. Demek ki çözüm kümesi $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$ tür.

- **Örnek.** $4x^2 + y^2 - 6y + 4x + 10 = 0$ olduğuna göre xy çarpımı kaçtır?
- **Çözüm.** Denklem

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 1 + y^2 - 6y + 9 &= 0 \\ (2x+1)^2 + (y-3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

olur. Eğer A ve B reel sayıları için

$$A^2 + B^2 = 0 \text{ ise } A = B = 0$$

olacağından

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2} \\ y - 3 &= 0 \Longrightarrow y = 3 \end{aligned}$$

olacaktır. Bu durumda

$$xy = -\frac{3}{2}$$

bulunur.

- **Örnek.**

$$5x^2 - 13x + 6 = 0$$

denklemini çözünüz.
- **Çözüm.**

$$5x^2 - 13x + 6 = (5x-3)(x-2)$$

şeklinde çarpanlarına ayrılır. Çarpımları 0 olan iki reel sayının en az biri sıfır olduğundan

$$(5x-3)(x-2) = 0$$

ise $5x - 3 = 0$ dır veya $x - 2 = 0$ dır. Buna göre,
  - $5x - 3 = 0$ ise $x_1 = \frac{3}{5}$ ve
  - $x - 2 = 0$ ise $x_2 = 2$ olur. Buna göre denklemin çözüm kümesi $\left\{\frac{3}{5}, 2\right\}$ olur.

- **Örnek.**

$$2x^2 - 5x + m - 1 = 0$$

denkleminin çözüm kümesi tek elamanlı olduğuna göre m hangi değeri almalıdır?
- **Çözüm.** Çözüm kümesi tek elemanlı ise $\Delta = 0$ olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m-1) &= 0 \\ 33 - 8m &= 0 \\ m &= \frac{33}{8} \end{aligned}$$

olmalıdır.

- **Örnek.**

$$3x^2 + 10x - 4 = 0$$

denklemini çözünüz.
- **Çözüm.**

$$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 148$$

olduğundan
  - $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{148}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 - \sqrt{37}}{3}$$

  ve
  - $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{148}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 + \sqrt{37}}{3}$$

  olur. Buna göre denklemin çözüm kümesi $\left\{\frac{-5 - \sqrt{37}}{3}, \frac{-5 + \sqrt{37}}{3}\right\}$ olur.

- **Örnek.**

$$3x^2 - 5x - 6 = 0$$

denkleminin kökler toplamını ve kökler çarpımını bulunuz.

- **Çözüm.** $a = 3, b = -5$ ve $c = -6$ olduğundan

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} = \frac{5}{3} \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a} = -2 \end{aligned}$$

olur.

- **Örnek.**

$$(m-1)x^2 - 4mx - 2 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{3}$$

olduğuna göre m nin değerini bulunuz..

- **Çözüm.**

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2}{3}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\frac{4m}{m-1}}{\frac{-2}{m-1}} &= \frac{2}{3} \\ \frac{4m}{-2} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

olacağından $m = -\frac{1}{3}$ bulunur.

- **Örnek.**

$$x^2 + 5x + 2 = 0$$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Buna göre, kökleri $3x_1 - 2$ ve $3x_2 - 2$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazınız.

- **Çözüm.** Verilen denklemin kökler toplamı ve çarpımı

$$x_1 + x_2 = -5, \quad x_1 x_2 = 2$$

tür. İstenen denklemin kökleri toplamı ve kökleri çarpımını bulmalıyız.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2 + 3x_2 - 2 &= 3(x_1 + x_2) - 4 = 3 \cdot (-5) - 4 = -19 \\ (3x_1 - 2)(3x_2 - 2) &= -6(x_1 + x_2) + 9x_1 x_2 + 4 \\ &= -6(-5) + 9 \cdot 2 + 4 \\ &= 52 \end{aligned}$$

olacağından soruda istenen denklem

$$x^2 + 19x + 52 = 0$$

olarak elde edilir.

- **Örnek.** Kareleri toplamı 12 olan iki pozitif sayıdan biri diğerinin 2 katının 1 fazlasıdır. Buna göre bu sayıları bulunuz.
- **Çözüm.** Sayılar x ve y olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 12 \\ x &= 2y + 1 \end{aligned}$$

olur. $x = 2y + 1$ ifadesi ilk denklemde yazılırsa

$$\begin{aligned} y^2 + (2y+1)^2 &= 12 \\ 5y^2 + 4y + 1 &= 12 \\ 5y^2 + 4y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

olur. Diskriminant yardımıyla denklem çözülürse

$$y = \frac{-2 + \sqrt{59}}{5}$$

olur. Bu durumda

$$x = 2y + 1 = \frac{1 + 2\sqrt{59}}{5}$$

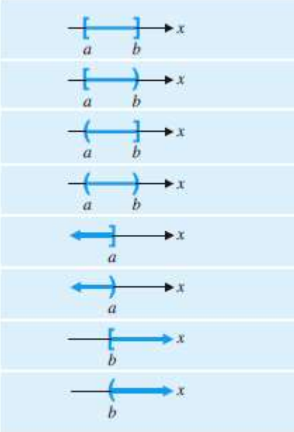
bulunur.

13. Eşitsizlikler

13.1 Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

- a ve b reel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ ifadelerinden her birine **doğrusal (lineer) eşitsizlik** veya **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir. Bu eşitsizliklerin çözüm kümeleri genelde aşağıdaki gibi bir aralık şeklindedir.
-

$[a, b]$	$a \leq x \leq b$
$[a, b)$	$a \leq x < b$
$(a, b]$	$a < x \leq b$
(a, b)	$a < x < b$
$(-\infty, a]$	$x \leq a$
$(-\infty, a)$	$x < a$
$[b, \infty)$	$x \geq b$
(b, ∞)	$x > b$



- Bu tür eşitsizlikler üç aşamada çözülür.

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın $ax + b = 0$ denkleminden $x = -\dfrac{b}{a}$ bulunur.
2.

$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
a nın işaretinin tersi		a nın işareti

şeklinde tablo yapılır

3. Eşitsizlik < 0 şeklinde ise tablodaki $-$ olan bölge, > 0 şeklinde ise tablodaki $+$ olan bölge çözüm kümesidir. Eğer eşitsizlik ≤ 0 veya ≥ 0 şeklinde ise çözüm kümesine kökler de katılır. Ancak çözüm kümesine $-\infty$ ve ∞ un olduğu uçlar hiçbir zaman dahil edilmez.

- $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$ biçimindeki eşitsizlikler alternatif olarak şöyle de çözülebilir: Örneğin $ax + b < 0$ eşitsizliğini ele alalım. Önce b eşitsizliğin diğer tarafına atılır. Sonra da eşitsizliğin her iki tarafı a sayısına bölünür. Ancak burada a nın işaretine dikkat edilmelidir. a nın işareti negatif ise eşitsizlik yön değiştirecektir.

$$
\begin{aligned}
a \text{ pozitif olduğunda} &: \quad ax < -b \Longrightarrow x < -\frac{b}{a} \\
a \text{ negatif olduğunda} &: \quad ax < -b \Longrightarrow x > -\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

- **Örnek.** $3(x-1) \leq 5(x+2) - 5$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.** İkinci yolla çözelim.

$$\begin{aligned} 3(x-1) &\leq 5(x+2)-5 \\ 3x-3 &\leq 5x+10-5 \\ 3x-5x &\leq 5+3 \\ -2x &\leq 8 \\ x &\geq -4 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Demek ki eşitsizliğin çözüm kümesi $[-4, \infty)$ aralığıdır.

- **Örnek.** $-8 \leq 3x - 5 < 7$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Yine ikinci yolu kullanalım.

$$\begin{aligned} -8 &\leq 3x-5<7 \\ -8+5 &\leq 3x<7+5 \\ -3 &\leq 3x<12 \\ -1 &\leq x<4 \end{aligned}$$

olur. Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi $[-1, 4)$ tür.

- **Örnek.** $-3 \leq \frac{-2x+4}{4} < 7$ eşitsizliğini sağlayan tamsayıları bulunuz.
- **Çözüm.** İkinci yolu kullanalım.

$$\begin{aligned} -12 &\leq -2x+4<28 \\ -16 &\leq -2x<24 \\ -12 &< x \leq 8 \end{aligned}$$

olur. Buna göre eşitsizliği sağlayan tam sayılar $-11, -10, -9, ..., 7, 8$ dir.

- **Örnek.** Bir şirket DVD üretmektedir. x tane DVD üretilip satıldığında toplam maliyet $C(x) = 2x + 36000$ ve toplam gelir $R(x) = 4x$ ile bulunmaktadır. Şirketin kâr edebilmesi için en az kaç DVD üretip satması gerekir?
- **Çözüm.** Şirketin kâr edebilmesi için $R(x) > C(x)$ olmalıdır. Bu eşitsizliği çözersek

$$\begin{aligned} 4x &> 2x+36000 \\ 4x-2x &> 36000 \\ 2x &> 36000 \\ x &> \frac{36000}{2} = 18000 \end{aligned}$$

olur. Demek ki kâr için en az 18001 adet DVD üretilip satılmalıdır.

- **Örnek.** 1984 yılında Dünya'nın en derin sondajını yapan Rus bilim insanları yerin x kilometre altındaki T sıcaklığını Celcius türünden $3 \leq x \leq 20$ için

$$T = 30 + 25(x-3)$$

olduğunu buldular. Buna göre hangi derinliklerde sıcaklık 300° ile 400° arasındadır?

- **Çözüm.** Sıcaklık 300° ile 400° arasında ise

$$300 \leq 30 + 25(x-3) \leq 400$$

olmalıdır. Bu eşitsizlik çözülürse

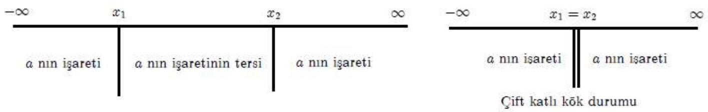
$$\begin{aligned} 270 &\leq 25(x-3) \leq 370 \\ \frac{270}{25} &\leq x-3 \leq \frac{370}{25} \\ \frac{54}{5}+3 &\leq x \leq \frac{74}{5}+3 \\ \frac{69}{5} &\leq x \leq \frac{89}{5} \end{aligned}$$

olur. Demek ki 300° ile 400° arasında ise derinlik $\frac{69}{5}$ km ile $\frac{89}{5}$ km arasındadır.

13.2 İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler

- $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c \leq 0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c \geq 0$ biçimindeki eşitsizlikler ikinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizliklerdir. Bu tür eşitsizlikler de doğrusal eşitsizliklere benzer olarak üç aşamada çözülür:

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın $ax^2+bx+c=0$ denkleminin varsa reel kökleri bulunur.
2. Farklı iki kök ve eşit iki kök olma durumuna göre



şeklinde tablo yapılır. Reel kökün olmadığı durumlarda her yer a nın işareti ile doldurulur.

3. Eşitsizlik <0 şeklinde ise tablodaki $-$ olan bölge(ler), >0 şeklinde ise tablodaki $+$ olan bölge(ler) çözüm kümesidir. Eğer eşitsizlik ≤ 0 veya ≥ 0 şeklinde ise çözüm kümesine kökler de katılır. Ancak çözüm kümesine $-\infty$ ve ∞ un olduğu uçlar hiçbir zaman dahil edilmez.

- **Örnek.** $-3x^2+4x-1>0$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.** Önce eşitsizliği dikkate almadan $-3x^2+4x-1=0$ denklemini çözmeliyiz. $-3x^2+4x-1=(-3x+1)(x-1)$ olduğundan bu denklemin kökleri 1 ve $\frac{1}{3}$ tür. Tablo

$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$-$	$+$	$-$	

şeklinde oluşacaktır. Bu tabloyu oluşturuken işaretlemeye tablonun sağından başlarız ve $a=-3$ yani negatif olduğundan $-$ yazarız. Eşitsizlik >0 şeklinde olduğundan tablodaki $+$ olan bölge aradığımız çözüm kümesidir. Ayrıca eşitszlik ≥ 0 şeklinde olmadığından çözüm kümesine sınırları dahil etmeyiz. Sonuç olarak eşitsizliğin çözüm kümesi $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ dir.

- **Örnek.** $x^2+x+\frac{1}{4}>0$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.** Eşitsizliği dikkate almadan $x^2+x+\frac{1}{4}=0$ denklemini çözmeliyiz. $x^2+x+\frac{1}{4}=4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ olduğundan bu denklemin kökleri $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$ dir. Yani kökler çift katlıdır. Bu durumda tablo

$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$+$	$+$	

şeklinde oluşacaktır. Tabloyu oluştururken işaretlemeye tablonun sağından başlarız ve $a=4$ yani pozitif olduğundan $+$ yazarız. Çift katlı köklerde işaret değişmeyeceğinden yine $+$ şeklinde devam ederiz. Eşitsizlik >0 şeklinde olduğundan tablodaki $+$ olan bölgeler aradığımız çözüm kümesidir. Ayrıca eşitszlik ≥ 0 şeklinde olmadığından çözüm kümesine sınırları dahil etmeyiz. Sonuç olarak eşitsizliğin çözüm kümesi $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ dir. Yani eşitsizliği bütün reel sayılardan sadece $-\frac{1}{2}$ sağlamaz.

- **Örnek.** $x^2 - 2x \leq -2$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.** $x^2 - 2x \leq -2$ ile $x^2 - 2x + 2 \leq 0$ aynı olduğundan

$$x^2 - 2x + 2 \leq 0$$

eşitsizliğini çözmek yeterlidir.

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

denkleminin reel kökü olmadığından yapacağımız tabloya kök işaretleyemeyiz. Bu durumda tablo aşağıdaki gibi olacaktır:

$-\infty$	∞
+ + + + + +	

Tabloda $-$ olan bir bölge olmadığından eşitsizliğin çözüm kümesi $\emptyset$ (boş küme) dir.

- **Örnek.** Bir reel sayının karesi, kendisinin 12 fazlasından küçük olduğuna göre bu koşula uyan kaç tamsayı vardır?
- **Çözüm.** Bu reel sayı x olsun. Buna göre

$$x^2 < x + 12$$

olmalıdır.

$$x^2 - x - 12 < 0$$

şeklinde düzenleyip çözmeliyiz.

$$x^2 - x - 12 = 0 \Longrightarrow x = -3 \text{ ve } x = 4$$

olur. Bu durumda tablo aşağıdaki gibi olacaktır:

$-\infty$	-3	4	$+\infty$
$+$	$-$	$+$	

Çözüm kümesi $(-3, 4)$ olduğundan bu aralıktaki $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ tamsayıları çözümdür.

- **Örnek.** Karesi kendisinden küçük olan bütün reel sayıları bulunuz.
- **Çözüm.** Bu reel sayılar x ile gösterilsin. Buna göre

$$x^2 < x$$

olmalıdır.

$$x^2 - x < 0$$

şeklinde düzenleyip çözmeliyiz.

$$x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ ve } x = 1$$

olur. Bu durumda tablo aşağıdaki gibi olacaktır:

$-\infty$	0	1	$+\infty$
$+$	$-$	$+$	

Çözüm kümesi $(0, 1)$ olduğundan bu aralıktaki reel sayılar istenen özelliktedir.

13.3 Çarpım Şeklindeki Eşitsizlikler

- Çarpım şeklinde verilen bir eşitsizliğin çözüm kümesi bulunurken

1. Eşitsizliğin yönüne bakılmaksızın ifade sıfıra eşitlenerek varsa tüm reel kökler bulunur.
2. Bulunan tüm kökler sayı doğrusuna eşitlenir. Çift katlı kökler belirlenir.
3. Her çarpanın işareti alınıp çarpılır. Tablonun en sağından başlanarak işaretleme yapılır. Çift katlı köklerde işaret değiştirilmez. Örneğin tüm kökler x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 olsun ve x_3, x_4 çift katlı kökler olsunlar. İfadenin işareti de $(-)$ olsun. Tablo aşağıdaki gibi oluşturulacaktır.

x	$-\infty$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$+\infty$
	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	

- **Örnek.**
$$\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-1\right)(x+9)=0$$
denkleminin tüm köklerini bulunuz. Çift katlı kökleri belirtiniz.
- **Çözüm.**
$$\begin{aligned} x^2-5x+4 &= 0 \Longrightarrow x=1, x=4 \\ x^2-1 &= 0 \Longrightarrow x=1, x=-1 \\ x+9 &= 0 \Longrightarrow x=-9 \end{aligned}$$
olduğundan denklemin tüm kökleri $-9,-1,1,4$ tür. $x=1$ iki tane (çift sayıda) olduğundan çift katlı köktür.

- **Örnek.** $(x-7)^2(x+3)^3 \leq 0$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.**
$$(x-7)^2(x+3)^3=0$$
denkleminin kökleri $x_1=7$ ve $x_2=-3$ tür. Ayrıca $x_1=7$ çift katlı köktür. Tablo aşağıdaki gibi oluşturulmalıdır:

	$-\infty$	-3	7	$+\infty$
$(x-7)^2(x+3)^3$	$-$	$+$	$+$	

Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty,-3]\cup\{7\}$ şeklinde olmalıdır.

- **Örnek.** $(x-5)^4(x+3)^5>0$ eşitsizliğini çözünüz.
- **Çözüm.**
$$(x-5)^4(x+3)^5=0$$
denkleminin kökleri $x_1=5$ ve $x_2=-3$ tür. Ayrıca $x_1=5$ çift katlı köktür. Tablo aşağıdaki gibi oluşturulmalıdır:

	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$(x-5)^4(x+3)^5$	$-$	$+$	$+$	

Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-3,5)\cup(5,\infty)$ şeklinde olmalıdır. Bu küme $(-3,\infty)-\{5\}$ şeklinde de gösterilebilir.

13.4 Bölüm Şeklindeki Eşitsizlikler

- Bölüm şeklindeki eşitsizlikler çarpım şeklindeki eşitsizlikler gibi çözülür. Ancak paydanın kökleri hiç bir zaman çözüm kümesine alınmaz.
- **Örnek.** $\dfrac{x+6}{5-x}>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Bu eşitsizlik yerine
$$(x+6)(5-x)>0$$
eşitsizliğini çözebiliriz.
$$(x+6)(5-x)=0$$
denkleminin kökleri $x_1=-6$ ve $x_2=5$ tir. Tablo yapılırsa

	$-\infty$	-6	5	$+\infty$
$\dfrac{x+6}{5-x}$	$-$	$+$	$-$	

Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-6,5)$ şeklinde olur.

- **Örnek.** $\dfrac{(x^2-x-6)\,(x-1)^3}{x^2\,(1-x^2)^5} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Bu eşitsizlik yerine

$$\left(x^2-x-6\right)(x-1)^3\,x^2\left(1-x^2\right)^5 \geq 0$$

eşitsizliğini çözebiliriz.

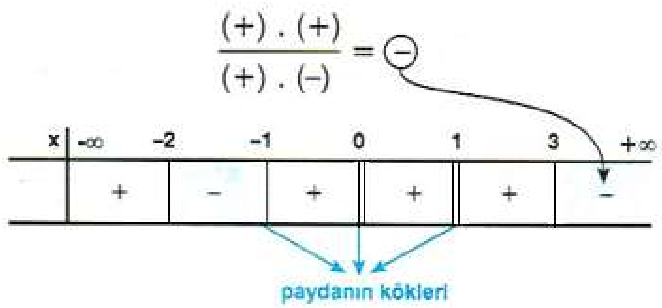
$$\left(x^2-x-6\right)(x-1)^3\,x^2\left(1-x^2\right)^5 = 0$$

denkleminin tüm köklerini bulalım.

$$\begin{aligned} x^2-x-6 &= 0 \Longrightarrow x=-2, x=3 \\ (x-1)^3 &= 0 \Longrightarrow x=1 \ \ (3 \text{ tane}) \\ x^2 &= 0 \Longrightarrow x=0 \ \ (2 \text{ tane}) \\ \left(1-x^2\right)^5 &= 0 \Longrightarrow x=1 \ \ (5 \text{ tane})\,, x=-1 \ \ (5 \text{ tane}) \end{aligned}$$

Köklerden 0 ve 1 çift katlıdır.

- Tablo yapılırsa



Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty,-2] \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,3]$ şeklinde olur.

- **Örnek.** $\dfrac{|3-x|\,(x+5)^4}{(2-x)} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Mutlak değerli ifadelerin kökleri çift katlı kök olarak alınır. Ayrıca

$$\begin{aligned} (x+5)^4 &= 0 \Longrightarrow x=-5 \ \ (4 \text{ tane}) \\ 2-x &= 0 \Longrightarrow x=2 \end{aligned}$$

olur. Tablo

$-\infty$	-5	2	3	$+\infty$
$+$	‖	$+$ | $-$	‖	$-$

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $(2,\infty) \cup \{-5\}$ aralığıdır.

- **Örnek.** $\dfrac{x-2}{x} \leq \dfrac{x}{x-2}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Eşitsizlik çözümü yapılırken içler-dışlar çarpımı yapılmaz. Çözümde aşağıdaki adımlar takip edilir.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x}-\frac{x}{x-2} &\leq 0 \\ \frac{(x-2)^2-x^2}{x\,(x-2)} &\leq 0 \\ \frac{-4x+4}{x\,(x-2)} &\leq 0 \\ -4x+4 &= 0 \Longrightarrow x=1 \\ x\,(x-2) &= 0 \Longrightarrow x=0 \text{ ve } x=2 \end{aligned}$$

olur. Tablo

$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$+$	$-$	$+$	$-$	

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $(0,1] \cup (2,\infty)$ aralığıdır.

13.5 Eşitsizlik Sistemleri

- Birden fazla eşitsizlikten oluşan sisteme eşitsizlik sistemi denir. Bir eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi demek, sistemi oluşturan tüm eşitsizlikleri aynı anda sağlayan reel sayı aralığı demektir. Bundan dolayı eşitsizlik sistemleri çözülürken sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimi alınır.
- **Örnek.**

$$\text{(I)} \quad \frac{x^2+x-4}{x} < 1$$

$$\text{(II)} \quad x^2 < 64$$

  eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.
  - $\frac{x^2+x-4}{x} < 1$ ise $\frac{x^2-4}{x} < 0$ ve $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$
  - $x^2 < 64$ ise $x^2 - 64 < 0$ ve $x_4 = -8, x_5 = 8$

-

x	-∞		-8		-2		0		2		8		+∞
(I)		–		–	0	+	0	–	0	+		+	
(II)		+	0	–		–		–		–	0	+	
sistem				–				–					
				çözüm				çözüm					

- Tabloda ilk eşitsizliğin −, ikinci eşitsizliğin − olduğu bölgeler alınması gereken bölgelerdir. Buna göre soruda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi

$$(-8,-2) \cup (0,2)$$

  olacaktır.

- **Örnek.**

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 2x-1 \geq 0 \\ \text{(II)} & x+2 > 0 \\ \text{(III)} & 2x-1 < (x+2)^2 \end{array}$$

  eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözüp tek tablo yapacağız. Bunun için tüm reel kökleri elde edelim.
  - $2x-1=0$ ise $x_1 = \frac{1}{2}$
  - $x+2=0$ ise $x_2 = -2$
  - $2x-1 < (x+2)^2$ ve $2x-1-(x+2)^2 < 0$ için $x^2+2x+5 > 0$ ve $x^2+2x+5 = 0$ için reel kök yok.

-

x	-∞		-2		$\frac{1}{2}$		+∞
(I)		–		–	0	+	
(II)		–	0	+		+	
(III)		+		+		+	
sistem							
						çözüm	

- Tabloda üç eşitsizliğin de + olduğu bölge alınması gereken bölgedir. Buna göre soruda verilen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi

$$\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

  olacaktır.

13.4 Karışık Örnekler

- **Örnek.** $-2 < \frac{3x-1}{-5} \leq 4$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 10 &> 3x-1 \geq -20 \\ 11 &> 3x \geq -19 \\ \frac{11}{3} &> x \geq \frac{-19}{3} \end{aligned}$$

olur. Buna göre eşitsizliğin çözüm kümesi $\left[\frac{-19}{3}, \frac{11}{3}\right)$ olacaktır.

- **Örnek.** Su, deniz seviyesinde $^\circ 0$ (sıfır santigrat derece) ile $^\circ 100$ (yüz santigrat derece) arasında sıvı haldedir. Başka bir sıcaklık ölçüsü de Fahrenheit derecesidir ve aralarında

$$C = \frac{^\circ F - 32}{1.8}$$

bağıntısı vardır. Buna göre su hangi Fahrenheit dereceler arasında sıvı haldedir?

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{^\circ F - 32}{1.8} \leq 100 \\ 0 &\leq {^\circ F} - 32 \leq 180 \\ 32 &\leq {^\circ F} \leq 212 \end{aligned}$$

olmalıdır. Demek ki su 32 ve 212 Fahrenheit dereceler arasında sıvı haldedir.

- **Örnek.** Bir reel sayının karesi, kendisinin 20 fazlasından büyük olduğuna göre bu koşula uyan en büyük negatif tamsayı kaçtır?
- **Çözüm.** Bu reel sayı x olsun. Buna göre

$$x^2 > x + 20$$

olmalıdır.

$$x^2 - x - 20 > 0$$

şeklinde düzenleyip çözmeliyiz.

$$x^2 - x - 20 = 0 \Longrightarrow x = -4 \text{ ve } x = 5$$

olur. Bu durumda tablo aşağıdaki gibi olacaktır:

$-\infty$	-4	5	$+\infty$
$+$		$-$	$+$

Çözüm kümesi $(-\infty, -4) \cup (5, \infty)$ olduğundan bu aralıktaki en büyük negatif tamsayı -5 tir.

- **Örnek.**

$$\left(x^2 - 1\right)^7 \left(x^2 + x\right)^6 = 0$$

denkleminin tüm köklerini bulunuz. Çift katlı kökleri belirtiniz.

- **Çözüm.**

$$\begin{aligned} \left(x^2 - 1\right)^7 &= 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ (7 tane)}, x = -1 \text{ (7 tane)} \\ \left(x^2 + x\right)^6 &= 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ (6 tane)}, x = -1 \ \text{ (6 tane)} \end{aligned}$$

olduğundan denklemin tüm kökleri $0, -1, 1$ dir. $x = 0$ altı tane (çift sayıda) olduğundan çift katlı köktür.

- **Örnek.** $\dfrac{|2+x|\left(x^2-6x+5\right)}{(1-x)} > 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Mutlak değerli ifadelerin köleri çift katlı kök olarak alınır. Ayrıca

$$\begin{aligned} x^2-6x+5 &= 0 \Longrightarrow x=1 \text{ ve } x=5 \\ 1-x &= 0 \Longrightarrow x=1 \end{aligned}$$

olur. Tablo

$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
	$+$	‖	$+$	‖	$+$	│	$-$	

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, 5) - \{-2, 1\}$ aralığıdır.

- **Örnek.** $\dfrac{x-3}{x} > \dfrac{x}{x-3}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.
- **Çözüm.** Eşitsizlik çözümü yapılırken içler-dışlar çarpımı yapılmaz. Çözümde aşağıdaki adımlar takip edilir.

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x} - \frac{x}{x-3} &> 0 \\ \frac{-6x+9}{x(x-3)} &> 0 \\ -6x+9 &= 0 \Longrightarrow x=\frac{3}{2} \\ x(x-3) &= 0 \Longrightarrow x=0 \text{ ve } x=3 \end{aligned}$$

olur. Tablo

$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
	$+$	│	$-$	│	$+$	│	$-$	

şeklinde elde edilir. Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, 3\right)$ aralığıdır.

- **Örnek.**

$$\text{(I)} \quad (x-1)(2-x) < 0$$

$$\text{(II)} \quad \frac{x^2-9}{x+1} \geq 0$$

eşitsizlik sisteminin çözüm kümesini bulunuz.

- **Çözüm.** Eşitsizlikleri ayrı ayrı çözerek tek tablo yapacağız. Bunun için önce tüm reel kökleri elde edelim sonra da tablo yapalım.
  - $(x-1)(2-x)=0 \Longrightarrow x=1$ ve $x=2$
  - $x^2-9=0 \Longrightarrow x=3$ ve $x=-3$
  - $x+1=0 \Longrightarrow x=-1$
  - Bu değerler tabloya taşınırsa

	$-\infty$		-3		-1		1		2		3		$+\infty$
$(x-1)(2-x)<0$		$-$	│	$-$	│	$-$	o	$+$	o	$-$	│	$-$	
$\dfrac{x^2-9}{x+1} \geq 0$		$-$	o	$+$	o	$-$	│	$-$	│	$-$	o	$+$	

  - Buna göre verilen eşitsizliğin çözüm kümesi $[-3, -1) \cup [3, \infty)$ aralığıdır.

MATEMATİK-I ARA SINAV ALIŞTIRMA SORULARI

1. Aşağıdaki işlemleri yapınız.
   (a) $21 \div (22 - 22 \div 22) \cdot (10 - 1)$
   (b) $13 - (7 - \{4 \cdot 3 - [11 - 5]\} + 12)$
   (c) $24 \cdot 19 - 24 \cdot 20 + 24 \cdot 2$
   (d) $17 \cdot (30 \cdot 3 + 30 \cdot 7)$
   (e) $(11 - 22) - (44 - 66) \cdot (72 - 7 \cdot 5 \cdot 2)$
   (f) $((-21 - 7) \div (-4)) \cdot 2$
2. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.
   (a) $x - (x - (x - (x - 1))) - x$
   (b) $x - (x - (x - y)) - (y + (x - y))$
   (c) $(a + (c - (a - 1))) - b + 1 - (a - (b - (c + 2)))$
3. Aşağıdaki işlemleri yapınız.
   (a) $2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \div 2\right) \div \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}$
   (b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{333}{666}\right)$
   (c) $4\frac{1}{3} - 3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{5}$
   (d) $\frac{\frac{2}{5}}{7} - \frac{2}{\frac{5}{7}}$
   (e) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)$
4. Bir kesrin paydası payından 8 fazladır. Pay ve paydasına 3 eklenince kesrin değeri $\frac{2}{3}$ oluyorsa bu kesrin değeri kaçtır?
5. Aşağıdaki sayıları küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
   (a) $a = \frac{11}{10}, b = \frac{101}{100}, c = \frac{1001}{1000}$
   (b) $a = \frac{x}{10}, b = \frac{x}{11}, c = \frac{x}{12}$ $(x < 0)$

(c) $a = \dfrac{314871253}{932106715}, b = \dfrac{314871255}{932106717}$

(d) $a = \dfrac{2}{x}, b = \dfrac{3}{x}, c = \dfrac{4}{x} \quad (x < 0)$

(e) $a = \dfrac{4}{9}, b = \dfrac{3}{8}, c = \dfrac{5}{6}$

(f) $a = -1\dfrac{1}{3}, b = -1\dfrac{1}{4}, c = -\dfrac{7}{4}$

(g) $a = -\dfrac{12}{7}, b = -\dfrac{102}{107}, c = -\dfrac{1002}{1007}$

6. $\dfrac{8}{5}$ ve $\dfrac{7}{3}$ sayıları arasına 3 sayı yerleştiriniz.

7. Aşağıdaki rasyonel sayıları ondalık sayı olarak yazınız.

(a) $\dfrac{13}{10}$

(b) $\dfrac{7}{4}$

(c) $\dfrac{29}{12}$

(d) $\dfrac{1}{11}$

8. Aşağıdaki ondalık sayıları rasyonel sayı olarak yazınız.

(a) 21.4

(b) 3.16

(c) $4.2\overline{1}$

(d) $8.\overline{42}$

9. $\dfrac{1}{13}$ rasyonel sayısını devirli ondalık sayı olarak yazınız.

10. $\dfrac{1}{13}$ sayısının ondalık yazılımında virgülden sonraki 2019. rakamı bulunuz.

11. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

(a) $0 < a < \dfrac{1}{5}$ ise $|2a - 1 + |5a - 1||$

(b) $x < 0$ ve $x + y > 0$ ise $|-x| - |x - y| + |-x - y|$

(c) $a < b$ ise $\dfrac{|b - a| + a}{|1 - a + b| - |a - b|}$

(d) $a > 1$ ise $\dfrac{||1-a|-a|}{|1-a|+|a-1|-2a}$

12. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

    (a) $|2x-1| = 7$
    (b) $|2x+1|+1 = 0$
    (c) $|2x-12| = 0$
    (d) $||x-1|+3| = 9$

13. Aşağıdaki bölme işlemlerinde bölüm ve kalanları bulunuz.

    (a) $2896 : 12$
    (b) $4875 : 23$
    (c) $3333 : 33$
    (d) $67 : (-13)$
    (e) $-128 : 15$

14. A sayısı 7 ile bölündüğünde bölüm B, kalan 4 tür. B sayısı 3 ile bölündüğünde bölüm C, kalan 2 dir. Buna göre A sayısının 21 ile bölümünde kalan kaçtır?

15. n ve A birer doğal sayıdır. A nın 7 ile bölümünde bölüm $n-1$ ve kalan $n+1$ olduğuna göre A nın en büyük değeri kaç olabilir?

16. İki basamaklı bir sayı rakamları toplamına bölündüğünde bölüm 6, kalan 3 tür. Bu sayının rakamları yer değiştirip rakamları toplamına bölündüğünde bölüm 4 ve kalan 9 oluyorsa bu sayıyı bulunuz. (Yol gösterme : İki basamaklı ab sayısını $10a+b$ şeklinde yazabiliriz.)

17. $3826m4$ sayısı aşağıdaki sayılara kalansız olarak bölünebiliyorsa m sayısının alabileceği değerleri bulunuz.

    (a) 2
    (b) 3
    (c) 4
    (d) 5
    (e) 6
    (f) 8
    (g) 9
    (h) 11

18. $35m4$ sayısı 4 ve 9 ile kalansız bölünebiliyorsa m hangi değerleri alabilir?

19. $635ab$ sayısı 4 ile tam bölünebilmektedir. $a-b=4$ ise a nın alabileceği değerleri bulunuz.

20. $7m2n6k$ sayısı 5 ve 8 ile tam bölünebilmektedir. Bu sayının 9 ile kalansız bölünebilmesi için m nin alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

21. Aşağıdaki sayıların asal olup-olmadıklarını belirleyiniz.

(a) 243
(b) 379
(c) 461
(d) 657

22. Aşağıdaki sayıları asal çarpanlarına ayırınız.

(a) 480
(b) 800
(c) 3240

23. Aşağıda verilenleri basitleştiriniz ve cevabı pozitif üslü olarak yazınız.

(a) $\dfrac{10^{-3} \cdot 10^{4}}{10^{-11} \cdot 10^{-2}}$

(b) $\left(5x^{2}y^{-3}\right)^{-2}$

(c) $\left(-\dfrac{5}{2x^{3}}\right)^{-2}$

(d) $\dfrac{8x^{-3}y^{-1}}{6x^{2}y^{-4}}$

24. Aşağıdaki kesirleri sadeleştiriniz.

(a) $\dfrac{u+v}{u^{-1}+v^{-1}}$

(b) $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}$

(c) $\dfrac{xy^{-2}-yx^{-2}}{y^{-1}-x^{-1}}$

25. $5^{9} \cdot 8^{5} = A \cdot 10^{n}$ olduğuna göre A ve n sayılarını bulunuz.

26. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

(a) $\left(x^{-3}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{x^{4}}\right)^{2} \cdot \left(-x^{-2}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-3}$

(b) $\dfrac{5^{n+1}-3 \cdot 5^{n-1}}{2 \cdot 5^{n}-3 \cdot 5^{n-2}}$

(c) $\dfrac{4}{1+3^{x}}+\dfrac{4}{1+3^{-x}}$

27. $4^{1-x} = 49$ ise 8^{x-1} kaçtır?

28. $9^{-a} = x$ ve $2^a = y$ ise 324^a ifadesinin x ve y türünden ifadesi nedir?

29. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} > \left(\frac{1}{3}\right)^{3x+5}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük x tamsayı değeri kaçtır?

30. $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} < \left(\frac{9}{4}\right)^{2x-5}$ eşitsizliğini sağlayan en küçük x tamsayı değeri kaçtır?

31. Aşağıdaki ifadelerin kareköklerini bulunuz.

(a) $\frac{36}{25}$

(b) $\frac{121}{81}$

(c) $\frac{25}{400}$

(d) 0.0004

(e) 0.0049

(f) 0.25

32. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

(a) $\sqrt{16}$

(b) $\sqrt{9x^2}$

(c) $\frac{\sqrt{4x^3y^5}}{\sqrt{16xy^3}}$

(d) $\frac{\sqrt{3x}\sqrt{5}}{\sqrt{27x}}$

(e) $\frac{\sqrt{6x}\sqrt{8}}{\sqrt{2x}}$

33. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

(a) $a < 0$ ve $b > 0$ için $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} - a - b$

(b) $-3 < x < 0$ için $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{x^2}$

(c) $x < y < 0 < m$ için $\sqrt{x^2} + \sqrt{m^2} + \sqrt{(y-m)^2}$

34. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

(a) $\sqrt{27} - \sqrt{48} - \sqrt{108} + \sqrt{75}$

(b) $2\sqrt{\frac{15}{2}} - 6\sqrt{\frac{10}{3}}$

(c) $\left(\sqrt{2}\right)^4 - \left(\sqrt{5}\right)^3 + \left(\sqrt{2}\right)^6 + \left(\sqrt{5}\right)^5$

(d) $\sqrt{\frac{48}{9}}+\sqrt{\frac{75}{9}}+\sqrt{\frac{12}{9}}$

(e) $x<0, y>0$ ve $z>0$ için $\sqrt{x^2y}+\sqrt{z^2y}+x\sqrt{y}+z\sqrt{y}$

35. Aşağıdaki ifadelerin paydasını rasyonel yapınız.

(a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

(b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}-3}$

(c) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$

(d) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

36. Aşağıdaki ifadelerin değerini hesaplayınız.

(a) $9^{\frac{1}{2}}$

(b) $16^{\frac{3}{4}}$

(c) $25^{-\frac{3}{2}}$

(d) $(-64)^{\frac{5}{6}}$

(e) $-64^{\frac{5}{6}}$

37. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz. Sonuçları rasyonel kuvvet olacak şekilde yazınız.

(a) $\sqrt[3]{-27}$

(b) $\sqrt[3]{25a^6y^{12}}$

(c) $\sqrt[4]{64a^5b^8}$

(d) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{xy}}$

(e) $\sqrt{\sqrt[4]{x^{16}}}$

(f) $\sqrt[3]{4\sqrt{8}}$

38. Aşağıdaki işlemleri yapınız.

(a) $\sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{4}$

(b) $\sqrt[3]{27}\,\sqrt[5]{81}$

(c) $\dfrac{\sqrt[4]{32}\,\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{2x}\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2x^2}\sqrt[6]{2x}}$

(e) $\dfrac{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[5]{x^2y^2}}{\sqrt[15]{xy}}$

39. $\dfrac{\sqrt[3]{x\sqrt{y}}}{\sqrt[3]{y\sqrt{x}}}\sqrt{\dfrac{y}{x}} = \sqrt[3]{a}$ ise a nın değeri x ve y türünden nedir?

40. $\dfrac{\sqrt[3]{5^{3b+4}}}{\sqrt{5^{2b+a}}} = 0.04$ ise a nın değeri kaçtır?

41. Aşağıdaki sayıları sıralayınız.

    (a) $x = \sqrt[6]{5}, y = \sqrt[4]{3}, z = \sqrt[3]{4}$

    (b) $x = \sqrt[6]{\frac{1}{2^7}}, y = \sqrt[4]{\frac{1}{2^3}}, z = \sqrt[3]{\frac{1}{2^4}}$

    (c) $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, z = -\frac{1}{\sqrt[4]{4}}$

    (d) $x = \sqrt[3]{66} - 2, y = \sqrt{38} - 2, z = \sqrt[4]{79} + 1$

42. $a = \sqrt[5]{2^{x-1}}$ olduğuna göre 2^{2x-1} ifadesinin a türünden değeri nedir?

43. $x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{4^{-a}}}$ olduğuna göre 2^{a+4} ifadesinin x türünden değeri nedir?

44. $\sqrt[y]{2^x} = \sqrt[x]{16^y}$ ise $\frac{x+y}{y}$ kaçtır?

45. $x = \sqrt[3]{2}, y = \sqrt[3]{5}, z = \sqrt[3]{7}$ ise $\sqrt[3]{0.07}$ sayısı x, y, z türünden nedir?

46. $\sqrt[3]{1007} - \sqrt[3]{65}$ ifadesinin değeri hangi ardışık iki doğal sayı arasındadır?

47. Aşağıdaki denklikleri sağlayan en küçük pozitif x sayısını bulunuz.

    (a) $2038 \equiv x \pmod{8}$

    (b) $7679 \equiv x \pmod{5}$

    (c) $-38 \equiv x \pmod{9}$

    (d) $-1844 \equiv x \pmod{10}$

48. Aşağıdaki denklikleri sağlayan en büyük negatif x sayısını bulunuz.

    (a) $9 + x \equiv 3 \pmod{7}$

    (b) $-2x \equiv 5 \pmod{3}$

    (c) $-37 \equiv 2 - x \pmod{5}$

(d) $32 + 4x \equiv -x + 14 \pmod 6$

49. Aşağıdaki sayıların 3 ile bölümünden kalanı bulunuz.

    (a) 8^{92}
    (b) $13^{15} \cdot 5^{26}$
    (c) $52^{16} \cdot 23^{11}$

50. Aşağıdaki sayıların birler basamağını bulunuz.

    (a) 15^{92}
    (b) $48^{27} \cdot 23^{16}$
    (c) $138^{5} \cdot 44$

51. Bugün günlerden çarşamba olduğuna göre,

    (a) 56 gün sonra hangi gündür?
    (b) 264 gün önce hangi gündü?

52. 6 günde bir nöbet tutan bir hemşire ilk nöbetini cumartesi günü tutarsa 33. nöbetini hangi gün tutar?

53. Bir hastanede doktorlar pazar günleri nöbet tutmamaktadır. 4 günde bir nöbet tutan bir doktor ilk nöbetini cuma günü tutarsa 27. nöbetini hangi gün tutar?

54. Tamsayıların 5 moduna göre denklik sınıflarını oluşturunuz.

55. $\mathbb{Z}/4$ kümesini oluşturarak bu kümenin her bir elemanın oluşturduğu kümeyi liste yöntemi ile yazınız.

56. Aşağıdaki denklikleri çözünüz.

    (a) $32 \equiv 102x \pmod 7$
    (b) $3x^2 \equiv 2 \pmod 5$
    (c) $4x^2 \equiv 1 \pmod 6$
    (d) $3x^2 \equiv x \pmod 4$

57. $x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 4 \pmod 6$ denkliklerini sağlayan üç basamaklı en küçük pozitif tamsayıyı bulunuz.

58. $x \equiv 2 \pmod 7, x \equiv 3 \pmod 5, x \equiv 4 \pmod 6$ denkliklerini sağlayan üç basamaklı en büyük pozitif tamsayıyı bulunuz.

59. $-7 \equiv -22 \pmod m$ denkliğini sağlayan bütün m değerlerini bulunuz.

60. $x^2 + 7x \equiv 15 \pmod x$ denkliğini sağlayan bütün x değerlerini bulunuz.

61. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

    (a) $\mathbb{Z}/4$ te $2x + 5 = 3$

(b) $\mathbb{Z}/6$ da $3x+2=5$

(c) $\mathbb{Z}/7$ de $5x+3=5$

62. $\mathbb{Z}/7$ de aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

(a) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-78}$

(b) $\sqrt{2}$

(c) $\sqrt[3]{6}$

(d) $\dfrac{1}{6}$

63. $\mathbb{Z}/5$ te aşağıdaki işlemleri yapınız.

(a) $3\cdot 4+3^4+4^3\cdot 3$

(b) $\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^5+(-4)^{100}$

CEVAPLAR

1.

   (a) 9
   (b) 0
   (c) 24
   (d) 5100
   (e) 33
   (f) 14

2.

   (a) $1-x$
   (b) $-y$
   (c) $-a$

3.

   (a) $\frac{5}{6}$
   (b) 1
   (c) $\frac{197}{60}$
   (d) $-\frac{96}{35}$
   (e) $\frac{1}{6}$

4. $\frac{13}{21}$

5.

   (a) $a > b > c$
   (b) $a < b < c$
   (c) $a < b$
   (d) $a > b > c$
   (e) $c > a > b$
   (f) $c < a < b$
   (g) $b > c > a$

6. Örneğin $\frac{26}{15}, \frac{29}{15}, \frac{31}{15}$

7.

(a) 1.3
(b) 1.75
(c) $2.41\overline{6}$
(d) $0.\overline{09}$

8.

(a) $\frac{107}{5}$
(b) $\frac{79}{25}$
(c) $\frac{379}{90}$
(d) $\frac{278}{33}$

9. $0.\overline{076923}$

10. 6

11.

(a) $3a$
(b) x
(c) b
(d) $-\frac{1}{2}$

12.

(a) $\{-3, 4\}$
(b) $\emptyset$
(c) $\{6\}$
(d) $\{-5, 7\}$

13.

(a) Bölüm 241, kalan 4
(b) Bölüm 211, kalan 22
(c) Bölüm 101, kalan 0
(d) Bölüm -5, kalan 2
(e) Bölüm -9, kalan 7

14. 18

15. 34

16. 75

17.

   (a) $\{0, 1, 2, 3, ..., 9\}$
   (b) $\{1, 4, 7\}$
   (c) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$
   (d) $\emptyset$
   (e) $\{1, 4, 7\}$
   (f) $\{2, 6\}$
   (g) $\{4\}$
   (h) $\{2\}$

18. 6

19. 12

20. 26

21.

   (a) Asal değil
   (b) Asal
   (c) Asal
   (d) Asal değil

22.

   (a) $2^5 \cdot 3 \cdot 5$
   (b) $2^5 \cdot 5^2$
   (c) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$

23.

   (a) 10^{14}
   (b) $\dfrac{y^6}{25x^4}$
   (c) $\dfrac{4x^6}{25}$

(d) $\dfrac{4y^3}{3x^5}$

24.

(a) uv

(b) $\dfrac{y-x}{xy}$

(c) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{xy}$

25. $A = 64, n = 9$

26.

(a) $-x^3$

(b) $\frac{110}{47}$

(c) 4

27. $\frac{1}{7^3}$

28. $\frac{y^2}{x^2}$

29. 0

30. 2

31.

(a) $\frac{6}{5}$

(b) $\frac{11}{9}$

(c) $\frac{1}{4}$

(d) 0.02

(e) 0.07

(f) 0.5

32.

(a) 4

(b) $3\,|x|$

(c) $\frac{|xy|}{2}$

(d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(e) $2\sqrt{6}$

33.

(a) $-2a$
(b) 3
(c) $-x+2m-y$

34.

(a) $-2\sqrt{3}$
(b) $-\sqrt{30}$
(c) $20\sqrt{5}+12$
(d) $\frac{11\sqrt{3}}{3}$
(e) $2z\sqrt{y}$

35.

(a) $\sqrt{3}-1$
(b) $-\frac{4\sqrt{6}}{3}-4$
(c) $\sqrt{x}-1$
(d) $\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$

36.

(a) 3
(b) 8
(c) $\frac{1}{125}$
(d) Tanımsız
(e) -32

37.

(a) -3
(b) $a^2y^45^{\frac{2}{3}}$
(c) $2^{\frac{3}{2}}a^{\frac{5}{4}}b^2$
(d) $(xy)^{\frac{1}{20}}$
(e) x^2

(f) $2^{\frac{7}{6}}$

38.

(a) $2\sqrt[3]{5}$
(b) $3^{\frac{9}{5}}$
(c) $2^{\frac{17}{12}}$
(d) $\frac{1}{\sqrt[6]{2}}$
(e) $(xy)^{\frac{8}{15}}$

39. $\frac{y}{x}$

40. $\frac{20}{3}$

41.

(a) $z > y > x$
(b) $y > x > z$
(c) $y > z = x$
(d) $z > x > y$

42. $2a^{10}$

43. $\frac{16}{x^2}$

44. 3

45. $\frac{z}{x^2y^2}$

46. 6 ve 7

47.

(a) 6
(b) 4
(c) 7
(d) 6

48.

(a) -6
(b) -1
(c) -1

(d) -2

49.

(a) 1
(b) 1
(c) 2

50.

(a) 5
(b) 2
(c) 2

51.

(a) Çarşamba
(b) Cuma

52. Salı

53. Pazartesi

54. $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}$ ve $\overline{4}$

55. $\overline{0} = \{.., -4, 0, 4, ...\}, \overline{1} = \{.., -3, 1, 5, ...\}, \overline{2} = \{.., -2, 2, 4, ...\}, \overline{3} = \{.., -1, 3, 7, ...\}$ ve $\mathbb{Z}/4 = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\right\}$

56.

(a) $x = 7n + 1, n$ tamsayı
(b) $x = 5n + 2$ ve $x = 5n + 3, n$ tamsayı
(c) Tamsayılarda çözüm yok
(d) $x = 4n$ ve $x = 4n + 3, n$ tamsayı

57. 118

58. 898

59. $3, 5, 15$

60. $3, 5, 15$

61.

(a) $\overline{3}$

(b) $\overline{1}$

(c) $\overline{6}$

62.

(a) $\overline{1}$

(b) $\overline{3}$

(c) $\overline{6}$

(d) $\overline{6}$

63.

(a) 0

(b) 2

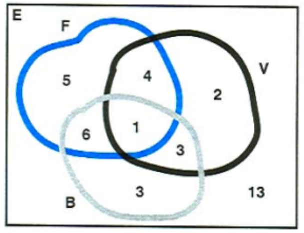
MATEMATİK-I FİNAL ALIŞTIRMA SORULARI

1. $A = \left\{x : x^2 < 39, x \in \mathbb{Z}^+\right\}$ kümesi veriliyor. Buna göre,
   (a) A kümesini liste yöntemi ile yazınız.
   (b) $s(A)$ yı bulunuz.
   (c) A kümesinin tüm alt küme sayısını bulunuz.
   (d) A kümesinin 4 elemanlı alt küme sayısını bulunuz.
2. Bir kümenin 21 tane 2 elemanlı alt kümesi varsa bu kümenin 4 elemanlı alt kümeleri kaç tanedir?
3. $P = \{3, 4, 7\}, P \cup S = \{3, 4, 7, 9, 10, 12\}$ ve $P \cap S = \{4, 7\}$ ise S kümesini bulunuz.
4. $s(A) = 8 + x, s(B) = 3x + 2, s(A \cap B) = 5$ ve $s(A \cup B) = 5x$ ise x in değerini bulunuz.
5. $s(A) = 15,\ s(B) = 8$ ve $A \cap B \neq \emptyset$ ise
   (a) $s(A \cup B)$ en az kaçtır?
   (b) $s(A \cup B)$ en fazla kaçtır?
6. $s(K) + s(L') = 13$ ve $s(K') + s(L) = 17$ olduğuna göre $s(E)$ kaçtır?
7. $A = \{2, 3, 4\}, B = \{3, 7, 8, 9\}$ ve $C = \{1, 3, 5, 9, 10\}$ ise aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazınız.
   (a) $A \cup B \cup C$
   (b) $A \cap B \cap C$
   (c) $C - (A \cap B)$
   (d) $A - (B \cup C)$
   (e) $(A \cup B) - [(A \cap B) - C]$
8. Aşağıdaki ifadeleri en sade biçimde yazınız.
   (a) $(A \cap B') \cup B$
   (b) $(B \cap B') \cup (A \cap B)$
   (c) $A \cap (B \cup B')$
   (d) $(A' \cup B) \cap A$
   (e) $A \cap (B - A)$
9. 39 kişilik bir sınıfta, 28 öğrenci basketbol, 16 öğrenci futbol oynamaktadır. Öğrencilerden 5 i bu sporların hiçbirini yapmıyorsa, her iki sporu da yapan kaç öğrenci vardır?

10. Bir köyde, 10 evin bahçesi ve balkonu yoktur. 7 evin balkonu, 8 evin de bahçesi vardır. Bütün evlerin sayısı, hem balkonlu hem de bahçeli evlerin sayısının 4 katı ise, bu köyde kaç ev vardır?

11. En az bir dilin konuşulduğu 50 kişilik bir sınıfta, 30 öğrenci İngilizce, 15 öğrenci Fransızca, 19 öğrenci Almanca, 6 öğrenci İngilizce ve Almanca, 7 öğrenci İngilizce ve Fransızca, 5 öğrenci de Almanca ve Fransızca konuşuyor. Üç dili de konuşan kaç öğrenci vardır?

12.



Yukarıda verilenlere göre futbol, basketbol ve voleybol oynayanların ve oynamayanların bulunduğu bir sınıfta, öğrencilerin kaçı bu sporlardan;

(a) sadece birini,
(b) sadece ikisini
(c) en çok birini,
(d) en çok ikisini,
(e) en az birini,
(f) en az ikisini oynuyor?

13. Aşağıdaki eşitliklerde bilinmeyenleri bulunuz.

(a) $(3x+5,3) = (-4,-2y+1)$
(b) $(3^x+1,1) = \left(\frac{10}{9}, 2^{4y-2}\right)$

14. $A = \{x : x^2 < 15, x \in \mathbb{Z}^+\}$ ve $B = \{x : x^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{Z}\}$ için aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazınız.

(a) $A \times B$
(b) $B \times A$
(c) $A \times A$
(d) $B \times B$

15. Aşağıdaki bağıntıları liste yöntemi ile yazınız.

(a) $A = \{0,1,2,3\}$ ve $B = \{0,1,4,9\}$ için $\beta = \{(x,y) : y = x^2, x \in A, y \in B\}$
(b) $A = \{x : -3 < x < 4$ ve $x \in \mathbb{Z}\}$ için $\beta = \{(x,y) : 2x - 3y = 1$ ve $x,y \in A\}$
(c) $A = \{-2,1,2,3,4\}$ için $\beta = \{(x,y) : x^y = 4$ ve $x,y \in A\}$

16. $A = \{a, b, c, d\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ için aşağıdaki bağıntılardan hangilerinin A dan B ye bir fonksiyon olduğunu belirtiniz.

(a) $\beta_1 = \{(a,3), (b,1), (c,4), (d,3), (b,2)\}$
(b) $\beta_2 = \{(a,3), (b,1), (c,4), (d,4)\}$
(c) $\beta_3 = \{(a,3), (b,1), (c,4)\}$
(d) $\beta_4 = \{(a,1), (b,1), (c,1), (d,1)\}$

17. Aşağıda verilen bağıntıların fonksiyon olup olmadıklarını belirterek sebebini açıklayınız.

(a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ve $B = \{-1, 2, 5\}$
$f : A \longrightarrow B, f(x) = 3x - 1$
(b) $A = \{-1, 0, 1, 4\}$ ve $B = \{-1, 0, 1, 2\}$
$f : A \longrightarrow B, f(x) = \sqrt{x}$
(c) $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ ve $B = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$
$f : A \longrightarrow B, f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$
(d) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(x) = x$

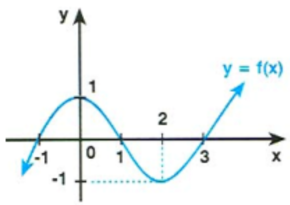
18. $f(x) = 2x + 3$ olduğuna göre, aşağıdakileri bulunuz.

(a) $f(0)$
(b) $f(-1)$
(c) $f(x-2)$

19. $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x$ olduğuna göre, aşağıdakileri bulunuz.

(a) $f(-1)$
(b) $f(3)$
(c) $f(x)$

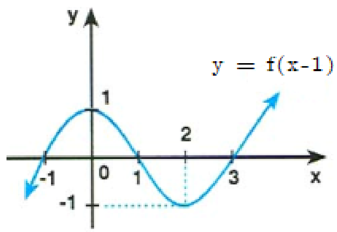
20. Şekilde grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonu için aşağıdakileri bulunuz.



(a) $f(0)$

(b) $f(1)$
(c) $f(2)$
(d) $f(3)$

21. Şekilde grafiği verilen $y = f(x-1)$ fonksiyonu için aşağıdakileri bulunuz.



(a) $f(0)$
(b) $f(1)$
(c) $f(2)$
(d) $f(-1)$

22. Reel sayılarda tanımlı $f(x) = 2x^9 - 3x^7 + ax - 3$ fonksiyonu veriliyor. $f(11) = 2$ ise $f(-11)$ kaçtır?

23. Her x reel sayısı için $f(x) = x$ şeklinde olan fonksiyonlara birim fonksiyon denir.

$$f(x) = ax - b + x + 2$$

fonksiyonu birim fonksiyon ise (a, b) ikilisi nedir?

24. Reel sayılarda tanımlı f fonksiyonu birim fonksiyondur.

$$f(3a-2) = 2a + 3$$

ise $f(a+3)$ nedir?

25. c sabit bir sayı olmak üzere, her x reel sayısı için $f(x) = c$ şeklinde olan fonksiyonlara sabit fonksiyon denir.

$$f(x) = (a-1)x^2 + bx - 2$$

fonksiyonu sabit fonksiyon ise $f(2020)$ değeri nedir?

26. Reel sayılarda tanımlı

$$f(x) = \frac{ax-2}{3x-b}$$

fonksiyonu sabit fonksiyon ise ab çarpımı nedir?

27. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x > 1 \text{ ise} \\ 3, & x = 1 \text{ ise} \\ 3x, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$ parçalı fonksiyonu veriliyor.

(a) $\dfrac{f(2)+f(1)}{f(-1)}$ değeri kaçtır?

(b) $f(a)=5$ şartını sağlayan a değerini bulunuz.

28. Tanımlı oldukları kümelerde $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+1}$ ve $g(x)=\dfrac{x+2}{3x-2}$ fonksiyonları veriliyor.

(a) $f\circ g$ fonksiyonunu bulunuz.

(b) $g\circ f$ fonksiyonunu bulunuz.

(c) $f\circ f$ fonksiyonunu bulunuz.

(d) $(f\circ g)(1)$ değerini bulunuz.

(e) $(g\circ f)(1)$ değerini bulunuz.

29. Aşağıda verilen fonksiyonlara göre istenen değerleri bulunuz.

(a) $f(x)=\dfrac{2x+5}{5}$ ise, $f^{-1}(x)=?$

(b) $f(x)=\dfrac{2x+5}{5}$ ise, $f^{-1}(3)=?$

(c) $f^{-1}(x)=x^2-3$ ise, $f(-3)=?$

(d) $f(3x+1)=\dfrac{4x-1}{x-2}$ ise, $f^{-1}(3)=?$

(e) $f\left(x^2+x+1\right)=x-2$ ise, $f^{-1}(0)=?$

30. $f(x)=2x+3$ ve $(g\circ f)(x)=4x-5$ ise $g(x)$ nedir?

31. $g(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$ ve $(f\circ g)(x)=2x+3$ ise $f^{-1}(x)$ nedir?

32. $g(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ ve $\left(g^{-1}\circ f\right)(x)=2x-1$ ise $f^{-1}(x)$ nedir?

33. Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpanlarına göre çarpanlarına ayırınız.

(a) $3x+6y-9z$

(b) $6a^2b-9ab^2$

(c) $4x^3+4x^2+8x$

(d) $3a^2bx^2+4ab^2x^2-5a^2b^2x$

(e) $5x(x-y)-(x-y)^2+3y(x-y)$

(f) $axy+a^2xy-ax^2y-axy^2$

(g) $4x^{n+1}-8x^{2n}$

34. Aşağıdaki ifadeleri gruplandırarak çarpanlarına ayırınız.

(a) $ax - ay - bx + by$

(b) $2x + 2y + 4 + xy$

(c) $a^3 + a^2 - a - 1$

(d) $abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1$

(e) $xyz + 3xy + 2xz + 6x + yz + 3y + 2z + 6$

35. Aşağıdaki ifadeleri iki kare farkı özdeşliğini kullanarak çarpanlarına ayırınız.

(a) $a^2 - \dfrac{1}{16}$

(b) $25x^2 - 4y^2$

(c) $9a^2b^2 - 36c^2$

(d) $1 - m^4n^2$

(e) $(3x + 2y)^2 - (2x - y)^2$

(f) $(a - b + 2)^2 - (a + b - 3)^2$

36. Aşağıdaki ifadeleri iki küp farkı ve toplamı özdeşliklerini kullanarak çarpanlarına ayırınız.

(a) $27a^3 - 8b^3$

(b) $(3x - y)^3 + 8$

(c) $x^9 + y^9$

(d) $(x + 1)^3 - 1$

(e) $x^3 + \dfrac{8}{x^3}$

(f) $2x^6 - 128$

37. Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

(a) $x^2 + 6x + 8$

(b) $x^2 + 2x - 8$

(c) $x^2 - 7xy + 12y^2$

(d) $x^2 + xy - 12y^2$

(e) $24x^2 - 24x + 6$

(f) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

38. Aşağıdaki ifadeleri değişken değiştirerek çarpanlarına ayırınız.

(a) $x^8 - 14x^4 + 25$
(b) $4a^4 - 9a^2 + 2$
(c) $x^{2a} - x^a - 30$
(d) $3^{2x} - 3^x - 12$

39. Aşağıdaki ifadeleri terim ekleyip-çıkararak çarpanlarına ayırınız.

(a) $x^4 + x^2 + 1$
(b) $x^4 + 324$
(c) $a^8 - 12a^4 + 16$
(d) $6xy + 4 - x^2 - 9y^2$
(e) $4x^4 + 3x^2y^2 + y^4$

40. Aşağıdaki ifadelerin açılımlarını yapınız.

(a) $(2x - y)^2$
(b) $(3a + 2b)^2$
(c) $(1 - 2a)^3$
(d) $(3x + y)^3$

41. $x + \frac{1}{x} = 5$ ise $x^2 + \frac{1}{x^2}$ kaçtır?

42. $x - \frac{1}{x} = 5$ ise $x^3 - \frac{1}{x^3}$ kaçtır?

43. $a^3 + b^3 = 6$ ve $a + b = 2$ ise $a^2 + b^2$ kaçtır?

44. $a - \frac{1}{a} = 4$ ise $a^2 - \frac{1}{a^2}$ kaçtır?

45. $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ ise $\frac{a-b}{a+b}$ kaçtır?

46. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ ve $2x - y + 3z = 68$ ise $x + y + z$ kaçtır?

47. $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$, $\frac{y}{z} = \frac{3}{5}$ ve $x + y + z = 123$ ise $x - y + z$ kaçtır?

48. 30 dönümlük bir tarla 6 saatte sürülüyor ise kaç dönümlük tarla 4 saatte sürülür?

49. 8 işçi bir işi 5 saatte yaparsa, aynı kapasitedeki 10 işçi aynı işi kaç saatte yapar?

50. 10 işçi günde 8 saat çalışarak 12 günde 120 parça iş yapıyorsa aynı nitelikteki 15 işçi günde 8 saat çalışarak 18 günde kaç parça işi yapar?

51. Üç kişilik bir arkadaş grubunun yaş ortalaması 23 tür. Gruba 1 kişi daha katılınca grubun yaş ortalaması 22 oluyor. Buna göre gruba son katılan kişi kaç yaşındadır?

52. 1240 sayısı $2, 3, 5$ ile ters orantılı olacak şekilde üç parçaya bölünmek isteniyor. Parçaların en küçüğü kaç olmalıdır?

53. 720 kg pirinç üç aileye $3, 6, 9$ ile doğru orantılı olacak şekilde paylaştırılıyor. En fazla alan aile kaç kg pirinç alır?

54. Bir fabrikada bulunan iki makine beraber çalışarak fabrikanın tüm siparişlerini 10 günde karşılayabiliyorlar. Beraber 4 gün çalıştıktan sonra makinelerden biri arızalanıyor. Diğer makine kalan siparişleri 9 günde yetiştirebildiğine göre, arızalanan makine tüm siparişleri tek başına kaç günde yetiştirebilir?

55. Bir işyerinde çalışan erkeklerin sayısının bayanların sayısına oranı $\frac{3}{7}$ dir. Bu işyerinde erkeklerin yaşlarının ortalaması 35, bayanların yaş ortalaması 30 olduğuna göre işyerindeki tüm çalışanların yaşlarının ortalaması kaçtır?

56. Bir baba 150 bilyeyi 5 ve 10 yaşlarındaki iki çocuğu arasında yaşlarıyla doğru orantılı olacak şekilde paylaştırıyor. Eğer bu paylaşım 5 yıl sonra yapılmış olsaydı küçük kardeşin alacağı bilye sayısında nasıl bir değişiklik olurdu?

57. 2 dokumacı günde 6 saat çalışarak 12 günde 1 halı dokuyor. Bunlara aynı nitelikte 2 dokumacı daha katılırsa günde 3 saat çalışarak 24 günde kaç halı dokurlar?

58. $\frac{2a+3}{b} = \frac{2b-1}{c} = \frac{2c+7}{a} = 5$ olduğuna göre, $a+b+c$ toplamını bulunuz.

59. 3,6 ve 12 sayılarının,

(a) aritmetik ortalaması kaçtır?
(b) geometrik ortalaması kaçtır?
(c) harmonik ortalaması kaçtır?

60. Aşağıdaki denklemlerde x i bulunuz.

(a) $ax + b^2 + 2b = a^2 + bx + 2a$
(b) $ax + 3x = a^3 + 3a^2 + a + 3$
(c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 4$
(d) $\frac{5x-4}{6} + \frac{7x-8}{9} = \frac{4x-3}{15}$
(e) $(2x+1)(3x-2) = x(6x-1) - 2$
(f) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-2}$
(g) $\frac{x-c}{x-d} = \frac{x-a}{x-b}$

61. Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

(a) $\begin{aligned} 2x - 3y &= -4 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} \tfrac{2x}{3} - \tfrac{y}{2} &= 3 \\ \tfrac{3x}{4} - \tfrac{y}{4} &= 4 \end{aligned}$

(c) $\frac{x+1}{y+1} = \frac{3}{2}$
$\frac{2x-3}{y+1} = \frac{1}{2}$

(d) $\frac{x-y}{2} - x = 20$
$\frac{y-x}{3} + y = 10$

62. Onyediden çıkarıldığı zaman 15 in üçte ikisinden 4 fazla olan sayı kaçtır?

63. 25 ve 50 kuruşluklardan oluşan 7 tane madeni paranın tutarı 275 kuruştur. Bu paralardan kaç tanesi 25 kuruşluktur?

64. Oya ile Aykut'un paraları toplamı 450 liradır. Oya Aykut'a 25 lira verirse Aykut'un parası Oya'nın parasının iki katı olacaktır. İlk durumda Oya'nın kaç lirası vardır?

65. Bir çubuk 8 eşit parçaya bölünüyor. Parçalardan herbirinin uzunluğu 10 cm daha kısa olsaydı bu çubuk 12 eşit parçaya bölünebilecekti. Buna göre, çubuğun boyu kaç cm dir?

66. Bir salonda 36 erkek ve 10 kadın vardır. Bu salona kaç evli çift gelirse erkek sayısı kadın sayısının 3 katı olur?

67. 20 çocuğun bulunduğu bir çocuk balosunda erkek çocuklardan birincisi 5 kız arkadaşıyla, ikincisi 6, üçüncüsü 7 ve her seferinde kız çocukların sayısı bir artmak üzere sonuncu erkek tüm kız arkadaşlarıyla dans ettiğine göre, balodaki erkek çocuk sayısı kaçtır?

68. Bir manav bir sandıktaki b tane limonun tanesini a liradan satmayı düşünmektedir. Sandıktaki limonların 10 tanesi çürük çıktığına göre, aynı parayı elde debilmek için manav, sağlam limonların tanesini kaç liradan satmalıdır?

69. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

(a) $3x^2 + 2x - 5 = 0$
(b) $x^2 + 3x = 28$
(c) $x^2 + 4x - 7 = 0$
(d) $3x^2 - 5x + 1 = 0$

70. Kökleri $3 - 2\sqrt{2}$ ve $3 + 2\sqrt{2}$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazınız.

71. $4x^2 + 5x - 1 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

(a) $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$
(b) $x_1^2 + x_2^2$
(c) $|x_1 - x_2|$
(d) Kökleri $2x_1 + 1$ ve $2x_2 + 1$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi yazınız.

72. Kareleri toplamı 34 olan iki sayıdan biri, diğerinin iki katından 1 eksiktir. Bu sayıları bulunuz.

73. Karekökünün 2 katının 3 fazlasına eşit olan sayıyı bulunuz.

74. 60 cm lik telin tamamı kullanılarak hipotenüsü 25 cm olan bir dik üçgen elde edilmektedir. Dik kenarların uzunluklarını bulunuz.

75. 1440 liraya alınan bir koli konserveye kavanoz başına 2 lira zam gelince aynı paraya 24 tane daha az konserve alınabilmektedir. Zamdan önce bu paraya kaç tane kavanoz alınabilmekteydi ve fiyatları neydi?

76. $\left.\begin{array}{c} x-y=1 \\ x^2+y^2=41 \end{array}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

77. $\left.\begin{array}{c} x^2=13x+4y \\ y^2=4x+13y \end{array}\right\}$ denklem sistemini çözünüz.

78. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

(a) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{4}\geq\dfrac{x}{5}$

(b) $-\dfrac{x+3}{4}\leq\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{2x}{3}$

(c) $x^2<9x-20$

(d) $(2x-1)^2>(x-5)^2$

(e) $3x^2+8x\leq-\dfrac{16}{3}$

(f) $(2-x)(3x+1)(2x-3)>0$

(g) $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(x+2)^4<0$

(h) $\dfrac{2x^2+18x-4}{x^2+9x+8}>2$

(i) $\dfrac{1}{3x-2-x^2}>\dfrac{3}{7x-4-3x^2}$

79. Aşağıdaki eşitsizlik sistemlerinin çözüm kümesini bulunuz.

(a) $\left.\begin{array}{c} x^2-4x+3<0 \\ 2x-4<0 \end{array}\right\}$

(b) $\left.\begin{array}{c} \dfrac{x+3}{x-2}<1 \\ \dfrac{2x+3}{3x-2}<2 \end{array}\right\}$

(c) $\left.\begin{array}{c} \dfrac{x+3}{3-x}<2 \\ x^3<16x \\ 4>x^2 \end{array}\right\}$

(d) $4x-2<x^2+1<4x+6$

80. Aşağıdaki eşitsizliklerin her x reel sayısı için sağlanabilmesi için m hangi aralıkta olmalıdır?

(a) $2x^2+5x+m>x^2-x-7$

(b) $(m+2)x^2-3x+m-2<0$

(c) $x^2-6x+4m^2>7$

CEVAPLAR

1.
   (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   (b) 6
   (c) 64
   (d) 15
2. 35
3. $S = \{4, 7, 9, 10, 12\}$
4. 5
5.
   (a) 15
   (b) 22
6. 15
7.
   (a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$
   (b) $\{3\}$
   (c) $\{1, 5, 9, 10\}$
   (d) $\{2, 4\}$
   (e) $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$
8.
   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) A
   (d) $A \cap B$
   (e) $\emptyset$
9. 10
10. 20

11. 4

12.

(a) 10
(b) 13
(c) 23
(d) 36
(e) 24
(f) 14

13.

(a) $x = -3, y = -1$
(b) $x = -2, y = \frac{1}{2}$

14.

(a) $\{(1,-1), (1,1), (2,-1), (2,1), (3,-1), (3,1)\}$
(b) $\{(-1,1), (1,1), (-1,2), (1,2), (-1,3), (1,3)\}$
(c) $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
(d) $\{(-1,-1), (-1,1), (1,-1), (1,1)\}$

15.

(a) $\{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$
(b) $\{(-1,-1), (2,1)\}$
(c) $\{(2,2), (4,1), (-2,2)\}$

16.

(a) Değil
(b) Fonksiyon
(c) Değil
(d) Fonksiyon

17.

(a) Değil. 3 ün görüntüsü yok
(b) Değil. -1 in görüntüsü yok
(c) Değil. -2 nin görüntüsü yok

(d) Değil.

18.

(a) 3

(b) 1

(c) $2x - 1$

19.

(a) 0

(b) 2

(c) $\frac{x+1}{x-1}$

20.

(a) 1

(b) 0

(c) -1

(d) 0

21.

(a) 0

(b) -1

(c) 0

(d) 1

22. -8

23. $(0, 2)$

24. 8

25. -2

26. 6

27.

(a) $-\dfrac{8}{3}$

(b) 2

28.

(a) $\frac{9x-2}{2x}$
(b) $\frac{5x+7}{7x+13}$
(c) $\frac{7x+10}{2x+3}$
(d) $\frac{7}{2}$
(e) $\frac{3}{5}$

29.

(a) $\frac{5x-5}{2}$
(b) 5
(c) 0
(d) -14
(e) 7

30. $2x - 11$

31. $\frac{3x-7}{x-5}$

32. $\frac{x-1}{2x-4}$

33.

(a) $3\left(x + 2y - 3z\right)$
(b) $3ab\left(2a - 3b\right)$
(c) $4x\left(x + x^2 + 2\right)$
(d) $-abx\left(5ab - 3ax - 4bx\right)$
(e) $4\left(x - y\right)\left(x + y\right)$
(f) $axy\left(a - x - y + 1\right)$
(g) $4x^n\left(x - 2x^n\right)$

34.

(a) $a\left(x - y\right)\left(a - b\right)$
(b) $\left(y + 2\right)\left(x + 2\right)$
(c) $\left(a - 1\right)\left(a + 1\right)^2$
(d) $\left(c - 1\right)\left(b - 1\right)\left(a - 1\right)$
(e) $\left(z + 3\right)\left(y + 2\right)\left(x + 1\right)$

35.

(a) $\frac{1}{16}(4a-1)(4a+1)$
(b) $(5x-2y)(5x+2y)$
(c) $9(-2c+ab)(2c+ab)$
(d) $-\left(m^2n-1\right)\left(m^2n+1\right)$
(e) $(5x+y)(x+3y)$
(f) $-(2b-5)(2a-1)$

36.

(a) $(3a-2b)\left(6ab+9a^2+4b^2\right)$
(b) $(3x-y+2)\left(-6x+2y-6xy+9x^2+y^2+4\right)$
(c) $(x+y)\left(-xy+x^2+y^2\right)\left(-x^3y^3+x^6+y^6\right)$
(d) $x\left(3x+x^2+3\right)$
(e) $\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2-2+\frac{4}{x^2}\right)$
(f) $2(x-2)(x+2)\left(2x+x^2+4\right)\left(-2x+x^2+4\right)$

37.

(a) $(x+4)(x+2)$
(b) $(x+4)(x-2)$
(c) $(x-4y)(x-3y)$
(d) $(x-3y)(x+4y)$
(e) $6(2x-1)^2$
(f) $(3x-2y)^2$

38.

(a) $\left(-2x^2+x^4-5\right)\left(2x^2+x^4-5\right)$
(b) $(2a+1)(2a-1)\left(a^2-2\right)$
(c) $(x^a+5)(x^a-6)$
(d) $(3^x+3)(3^x-4)$

39.

(a) $\left(x+x^2+1\right)\left(-x+x^2+1\right)$
(b) $\left(-6x+x^2+18\right)\left(6x+x^2+18\right)$

(c) $\left(2a^2+a^4-4\right)\left(-2a^2+a^4-4\right)$
(d) $-\left(x-3y-2\right)\left(x-3y+2\right)$
(e) $\left(xy+2x^2+y^2\right)\left(-xy+2x^2+y^2\right)$

40.

(a) $4x^2-4xy+y^2$
(b) $9a^2+12ab+4b^2$
(c) $-8a^3+12a^2-6a+1$
(d) $27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$

41. 23

42. 140

43. $\frac{10}{3}$

44. $8\sqrt{5}, -8\sqrt{5}$

45. $\frac{1}{7}$

46. 48

47. 51

48. 20

49. 4

50. 270

51. 19

52. 240

53. 360

54. 30

55. 31.5

56. 10 artardı

57. 2

58. 3

59.

(a) 7
(b) 6
(c) $\frac{36}{7}$

60.

(a) $a+b+2$
(b) a^2+1
(c) $\frac{24}{5}$
(d) $\frac{122}{121}$
(e) Tüm reel sayılar
(f) 3
(g) $\frac{ad-bc}{a-b-c+d}$

61.

(a) $(1,2)$
(b) $(6,2)$
(c) $(2,1)$
(d) $(-38,-2)$

62. 3

63. 3

64. 175 lira

65. 240 cm

66. 3

67. 8

68. $\frac{ab}{b-10}$

69.

(a) $1, -\frac{5}{3}$
(b) $4, -7$
(c) $\sqrt{11}-2, -\sqrt{11}-2$
(d) $\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}, \frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}$

70. $x^2 - 6x + 1 = 0$

71.

(a) $\frac{5}{16}$
(b) $\frac{33}{16}$
(c) $\frac{\sqrt{41}}{4}$
(d) $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 0$

72. 3 ile 5 veya $-\frac{11}{5}$ ile $-\frac{27}{5}$

73. 9

74. 15 cm ve 20 cm

75. 144 kavanoz, tanesi 10 lira

76. $(5, 4)$ ve $(-4, -5)$

77. $(17, 17), (0, 0), (12, -3), (-3, 12)$

78.

(a) $[0, \infty)$
(b) $[3, \infty)$
(c) $(4, 5)$
(d) $(2, \infty) \cup (-\infty, -4)$
(e) $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$
(f) $\left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$
(g) $(-2, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, 3\right) \cup (-\infty, -2)$
(h) $(-8, -1)$
(i) $\left(\frac{4}{3}, 2\right) \cup (-\infty, 1)$

79.

(a) $(1, 2)$
(b) $\left(\frac{7}{4}, 2\right) \cup \left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$
(c) $(0, 1)$
(d) $(-1, 1) \cup (3, 5)$

80.

(a) $(2, \infty)$
(b) $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$
(c) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$