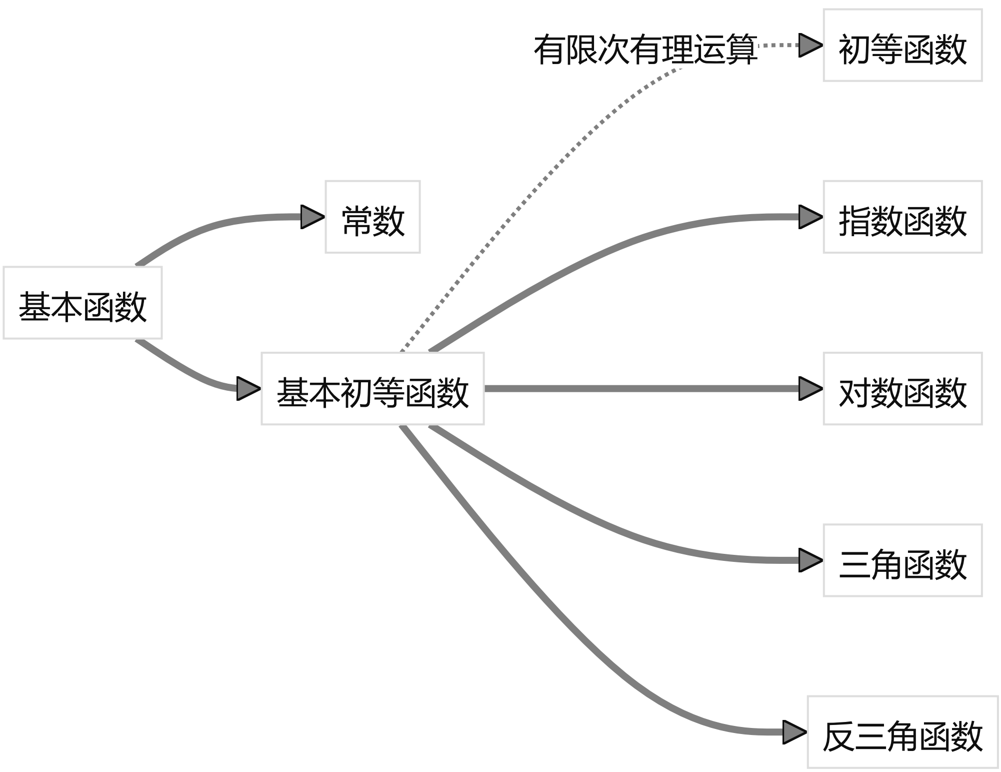
# 导数&微积分

> ~~"How to ask the guidance for help?"~~
> "How to find the derivative of a function"

## 函数




## 导数

> 一个函数在某一点的导数描述了这个函数在这一点附近的变化率
>
> 几何意义：表示函数曲线在点 $P_0(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率

函数 $y = f(x)$ 在 $x_0$ 某邻域有定义则：

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

## 导数性质

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)+v'(x)$$

$$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$$

$$[\frac{u(x)}{v(x)}]'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$$

$$y=f(u),u=g(x)\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)g'(x)$$

> 以此类推:
>
> $$y=f(u),u=\phi(v),v=\psi(x)\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot'(v)\cdot\psi'(x)$$

## 初等函数求导

$$(C)'=0$$

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

$$(a^x)'=a^x\ln a$$

$$(e^x)'=e^x$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

## 微分

> 几何意义：表示函数曲线在点 $P_0(x_0, f(x_0))$ 处的切线纵坐标增量

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$ 则函数 $y = f(x)$ 在点 $x_0$ 处可微，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f$ 即
$\mathrm{d}y = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x$

## 微分性质

$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$

$\mathrm{d}(Cu) = C\mathrm{d}u$

$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$

$\mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$

$y = f(u), u = \phi(x) \Longrightarrow \mathrm{d}y = y'_x\mathrm{d}x = f'(u)\phi'\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}y = f'(u)\prime du$

## 微分应用：近似求 $f(x)$

$\Delta u = f'(x_0) + o(\Delta x)$

当 $|\Delta x|$ 很小时，得近似等式：

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \Longrightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$

换元得：

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

特别当 $x_0 = 0, |x|$ 很小时：

$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$

# 积分

---

# 泰勒公式

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

提高精度，估计误差

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n +$$

取 $x_0 = 0, \xi = \theta x, 0 < \theta < 1$ 得麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!}x^n + 1 \Longrightarrow f(x)$$

# 不定积分

> $f(x)$ 的原函数，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$，求一个函数的原函数，微分的逆运算，是一个表达式
> 几何意义：$f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线
> $\int f(x)\mathrm{d}x$ 的图形为 $f(x)$ 所有积分曲线组成的平行线族

$\mathrm{d}[\int f(x)\mathrm{d}x] = f(x)\mathrm{d}x$

$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$

## 积分运算

$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x + C$

$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

## 分部积分

$(uv)' = u'v + v'u \Longrightarrow uv = \int u'v\mathrm{d}x + \int v'u\mathrm{d}x$

## 定积分

> 设函数 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，若对 $[a,b]$ 任一种分法
> $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ 任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$
> 只要 $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\}\to 0$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 总有确定的极限 $I$ 则 $I$
> 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$

| 式 | 理解 |
| --- | --- |
| $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ | 分割 |
| $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ | 取样 |
| $\lambda=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{x_i\}\to 0$ | 分割无限小 |
| $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ | 面积 |

> 几何意义
> $f(x)>0,\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$
> $f(x)<0,\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-A$

## 性质

- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x\Longrightarrow\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$
- $\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$
- $\int kf(x)\mathrm{d}x=k\int f(x)\mathrm{d}x+C$
- $\int[f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x\pm\int g(x)\mathrm{d}x$

## 计算

看完才懂[https://zhuanlan.zhihu.com/p/453108063](https://zhuanlan.zhihu.com/p/453108063)

### 不定积分 + 牛顿 - 莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

## 按照定义

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

### 求和

> $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

**性质:**

- $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k + \sum\limits_{k=m+1}^{m} a_k, 1 < m < n$
- $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{m} a_k + \sum\limits_{k=1}^{m} b_k$
- $\sum\limits_{k=1}^{n} ra_k = r\sum\limits_{k=1}^{m} a_k$

**伸缩求和:**

$\sum\limits_{i=a}^{b} [f(i) - f(i-1)] = f(b) - f(a-1)$

这可以抵消

## 奇偶性/对称性

### 奇偶性

奇函数在正负对称区间上的积分为 $0$

### 对称性

在区间 $[a,b]$ 上有一点 $x$，则它关于区间对称轴的对称点为 $a+b-x$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$（区间再现公式）

## 更多更抽象的方法 $\cdots$ ,:(