高阶导数

1 高阶导数的定义

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

可记为:

$$f''(x), y'', \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

n 阶导数的拉格朗日记法:

$$f^n(x), y^n(x)$$

2 高阶导数的计算

2.1 直接法

eg.1

$$y^{(n)} = (e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

eg.2

$$\sin(\omega x)^n = \omega^n \sin(\omega x + n\frac{\pi}{2}) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\sin(x)^n = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\cos(x)^n = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\cos(\omega x)^n = \omega^n \cos(\omega x + n\frac{\pi}{2}) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

eg.3

2.1.1 第一组结论：

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$f^n(x) = a_0n! \qquad f^k(x) = 0, (k > n)$$

2.1.2 第二组结论：

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n} & n < m \\ n! & n = m \\ 0 & n > m \end{cases}$$

2.1.3 第三组结论

对于:

$$y = (x+c)^\mu$$

有:

$$y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)(x+c)^{\mu-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

当 $\mu = 1$ 时:

$$(\frac{1}{x+c})^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+c)^{(n+1)}}$$

对于对数:

$$[ln(1+x)]^{(n)} = (\frac{1}{1+x})^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

eg.4
设 $y = f(\ln x)^2$, 求 y''.
解:
$y' = 2f(\ln x) \cdot f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x}$
$y'' = [2f(\ln x)]' \cdot f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + 2f(\ln x) \cdot [f'(\ln x)]' \cdot \frac{1}{x} + 2f(\ln x) \cdot f'(\ln x) \cdot [\frac{1}{x}]'$

2.2 补充公式：

$$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \quad (a > 0)$$
$$(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}} \quad (a \neq 0)$$

2.3 间接法

设 $\mu = \mu(x), \nu = \nu(x)$ 具有 n 阶导数, 则

$$(\mu \pm \nu)^{(n)} = \mu^{(n)} \pm \nu^{(n)} \tag{1}$$
$$(c\mu)^{(n)} = c\mu^{(n)} \quad (c \in \mathbb{R}) \tag{2}$$
$$(\mu\nu)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu^{(n-k)} \nu^{(k)} \tag{3}$$
$$(\mu + \nu)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu^{n-k} \nu^{k} \tag{4}$$

eg.1
求 $y = \frac{x}{x^2-1}$ 的 n 阶导数

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) \\ \therefore \quad y^{(n)} &= \frac{1}{2}\left((\tfrac{1}{x+1})^{(n)} + (\tfrac{1}{x-1})^{(n)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{(n+1)}} + \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{(n+1)}}\right) \end{aligned}$$

eg.2

求 $y=(\sin x)^6+(\cos x)^6$ 的 n 阶导数

$$
\begin{aligned}
y &= (\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3 \\
&= (\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x) \quad (\text{立方和公式}) \\
&= (\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x \quad (\text{展开}) \\
&= 1-\tfrac{3}{4}\sin^2 2x \quad (\text{二倍角公式}) \\
&= \frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x \quad (\text{后续带公式})
\end{aligned}
$$

eg.3

已知 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0), n>1$

$$y'=\frac{1}{1+x^2}$$

整理得:

$$(1+x^2)y'=1$$

对等式两边同时求 n 阶导，由莱布尼兹公式:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+x^2)^{(k)}y^{(n-k+1)}=0$$

仅当 $k=0,1,2$ 时，$(1+x^2)^{(k)}\neq 0$

$$\binom{n}{0}(1+x^2)y^{(n+1)}+\binom{n}{1}(2x)y^{(n)}+\binom{n}{2}(2)y^{(n-1)}=0$$

简化得:

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0$$

令 $x=0$, 代入得:

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0)$$

令 $a_m = y^{(m)}(0)$, 则递推关系为:

$$a_m = -(m-1)(m-2)a_{m-2} \quad m \geq 2$$
$$a_0 = y(0) = \arctan(0) = 0, a_1 = y'(0) = 1$$

当 m 为偶数时,

$$a_m = 0;$$

当 m 为奇数时,

$$a_m = (-1)^{\frac{m-1}{2}}(m-1)!$$

当 $n > 1$ 时:

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \text{ 为偶数}, \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & \text{若 } n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

2.3.1 莱布尼兹公式的使用建议

1. 求两个函数乘积的高阶导数

2. 建议一个是幂函数或多项式函数