

Projet de cours

MTH8211

Wadih Chalhoub

Nicolas Alacoque

Contexte et Motivations

Les techniques de visualisation d'espaces occupent une place centrale dans des domaines variés, allant de l'art numérique aux jeux vidéo, en passant par des applications scientifiques comme la discrétisation de volumes pour les simulations numériques. Ces méthodes permettent de transformer des représentations 2D, telles que des images ou des scans, en modèles 3D discrets, essentiels pour des analyses physiques ou médicales, notamment en imagerie médicale ou en simulations CFD.

Le passage d'une image 2D à un espace 3D discrétisé repose sur des systèmes matriciels issus du traitement du signal, comme les équations aux dérivées partielles ou les problèmes de moindres carrés. Ces matrices présentent souvent des structures particulières, creuses ou bloc-diagonales, qui reflètent les contraintes physiques du problème.

La résolution de ces systèmes linéaires de grande taille exige des méthodes numériques à la fois stables et efficaces. La décomposition QR se présente comme une solution privilégiée, surtout lorsque la structure creuse ou bloc peut être exploitée pour réduire la complexité calculatoire.

Objectif de l'Étude

Cette étude explore l'application et l'implémentation de la décomposition QR structurée pour résoudre des problèmes aux moindres carrés linéaire. Elle se concentre sur 3 axes principaux :

1. Des matrices bloc-diagonales
2. Cas de concaténation horizontale
3. Construction de la matrice de problèmes d'ajustement de faisceau en fonction de paramètres

Construction de la Matrice

Problèmes d'Ajustement de Faisceau

Les problèmes d'ajustement de faisceau sont des problèmes d'optimisation non linéaire où on cherche à minimiser la somme des erreurs de reprojection :

$$\min_{\{P_j\}, \{X_i\}} \sum_{i,j} \|\pi(P_j, X_i) - x_{ij}\|^2$$

où :

- X_i : Position du i -ème point 3D (dans l'espace monde)
- P_j : Paramètres de la j -ème caméra (matrice de projection)
- $\pi(P_j, X_i)$: Projection du point X_i dans l'image de la caméra j

— x_{ij} : Observation 2D du point i dans l'image j (coordonnées pixel)

Structure du Problème

La matrice jacobienne du système présente une structure creuse caractéristique :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{11}}{\partial P_1} & 0 & \frac{\partial r_{11}}{\partial X_1} & \frac{\partial r_{11}}{\partial X_2} & 0 \\ \frac{\partial r_{12}}{\partial P_1} & 0 & 0 & \frac{\partial r_{12}}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial r_{22}}{\partial P_2} & 0 & \frac{\partial r_{22}}{\partial X_2} & \frac{\partial r_{22}}{\partial X_3} \\ 0 & \frac{\partial r_{23}}{\partial P_2} & 0 & 0 & \frac{\partial r_{23}}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

Équation 1 : Structure de la matrice jacobienne pour 2 caméras et 3 points 3D Cette structure provient du fait qu'un point 3D X_i n'est visible que par un sous-ensemble de caméras.

Plan d'Action pour la Factorisation QR Structurée

Recherche Préliminaire

L'étude débutera par une analyse des travaux existants, notamment les algorithmes QRKit et SuiteSparseQR, ainsi que des modèles d'ajustement de faisceau. Cette revue bibliographique permettra d'identifier les meilleures pratiques et les optimisations possibles.

Collecte et Préparation des Données

Deux types de données seront utilisés : des matrices synthétiques présentant des structures bloc-diagonales et concaténées, ainsi que des problèmes réels issus de la bibliothèque BundleAdjustmentModels.jl. Ces données serviront de base pour les tests et les comparaisons.

Optimisation des Performances

L'accent sera mis sur la parallélisation des blocs indépendants et sur une gestion optimale de la mémoire. Ces optimisations visent à améliorer l'efficacité des calculs pour les problèmes de grande taille.

Validation et Benchmarks

Des tests rigoureux compareront les performances de l'implémentation proposée avec celles des solveurs existants, comme SuiteSparseQR. Les mesures porteront sur la précision des résultats et les temps d'exécution.