[대학기초수학]

13차시 | 공간좌표

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 3차원 공간에서 평면과 직선을 이해한다.
- 정사영의 정의와 활용법을 이해한다.
- 공간좌표와 두 점 사이의 거리를 이해한다.
- 구의 정의를 이해하고 방정식을 작성한다.

목차

1 공간도형

1. 배경: 차원과 공간

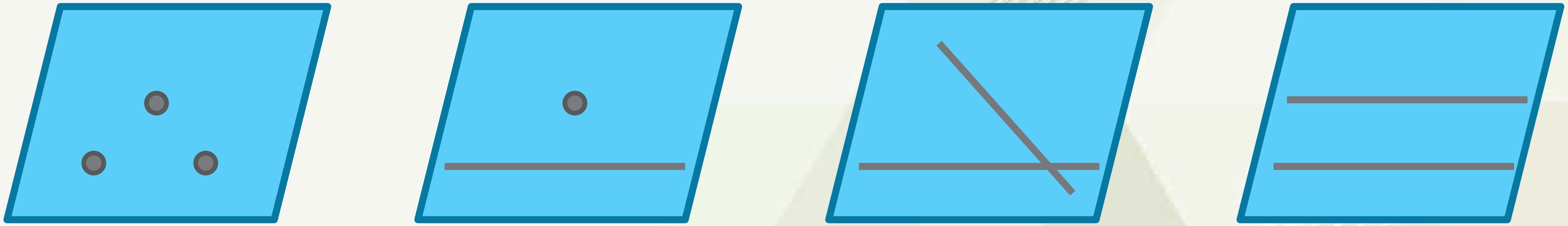
◆ 차원(dimension)의 개념

- 차원: 관계식에서 자유 변수(free variable)의 개수
  - 직선(축): 직선 방향을 따라 무수히 많은 값을 가지므로 1차원
    - $x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow (-1,4), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0), \cdots$
    - $x_1 - x_2 = 6 \Rightarrow (6,0), (5,-1), (4,-2), (3,-3), (2,-4), \cdots$
  - 평면: 평행하지 않은 두 방향(수평·수직) 자유 변수 2차원
    - $z = 0$(xy-평면) $\Rightarrow (2,4,0), (-1,3,0), (-1,-2,0), (2,-1,0), \cdots$
    - $x + y + z = 3 \Rightarrow (3,0,0), (3,1,-1), (3,-1,1), (2,2,-1), \cdots$
  - 공간: 선형독립인 세 방향(가로·세로·높이) 자유 변수 3차원
    - $\mathbb{R}^3$: x축, y축, z축으로 이루어진 3차원 공간의 직교좌표계

1.1 3차원 공간에서 평면과 직선

◆ 3차원 공간에서 평면의 결정조건

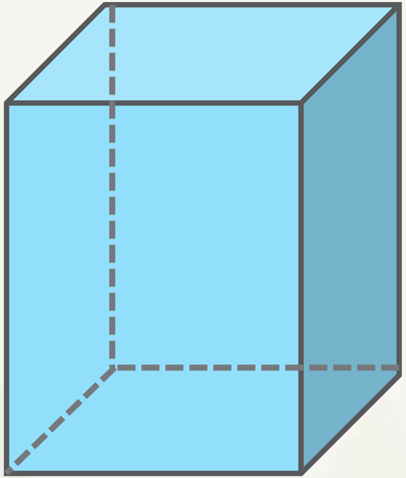
- 같은 직선 위에 있지 않은 세 점
- 한 직선과 그 직선 위에 있지 않은 한 점
- 만나는 두 직선
- 평행한 두 직선

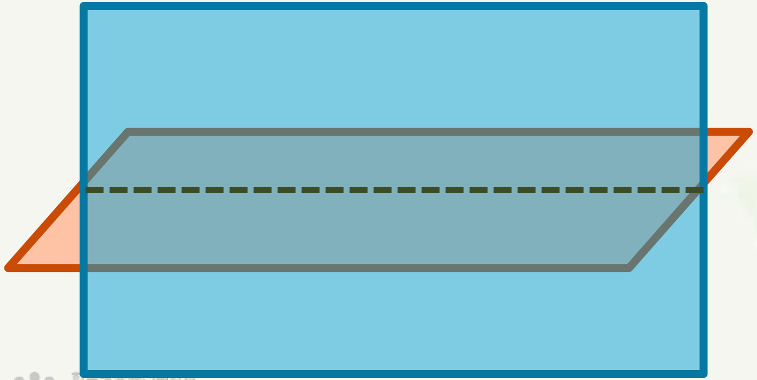


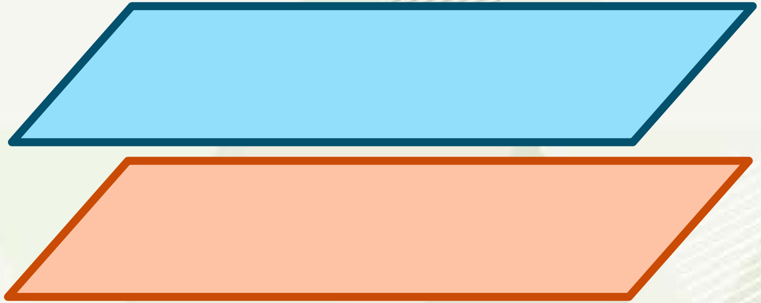
1.1 3차원 공간에서 평면과 직선

◆ 3차원 공간에서 두 평면의 위치 관계

- 두 평면이 서로 만남 (교선 존재)
- 두 평면이 서로 평행 (만나지 않음)

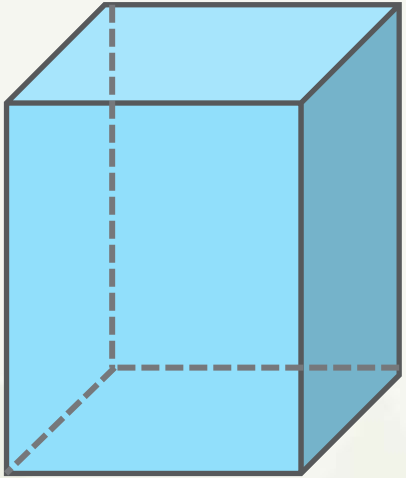


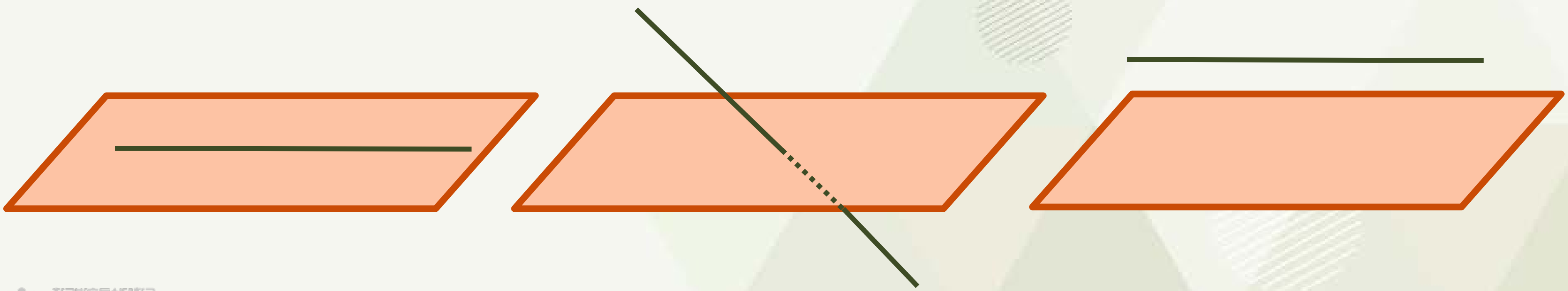




1.1 3차원 공간에서 평면과 직선

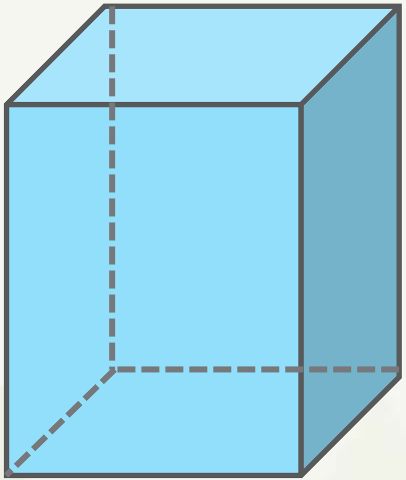
- 3차원 공간에서 평면과 직선의 위치 관계
  - 직선이 평면에 포함 (직선 = 교선)
  - 직선과 평면이 한 점에서 만남(교점 존재)
  - 직선과 평면이 평행 (만나지 않음)





1.1 3차원 공간에서 평면과 직선

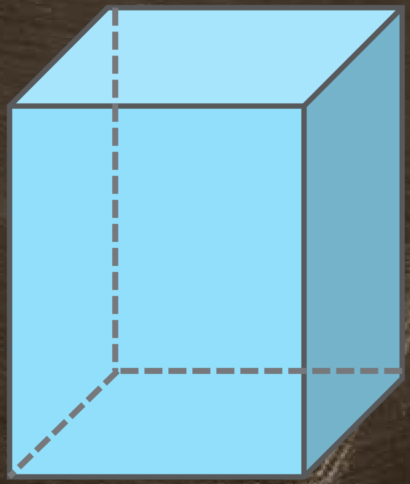
- 3차원 공간에서 두 직선의 위치 관계
  - 두 직선이 만남 (같은 평면에 존재)
  - 두 직선이 평행 (같은 평면에 존재)
  - 꼬인 위치 (만나지도 평행하지 않음)



1.1 3차원 공간에서 평면과 직선

평면과 직선 예제

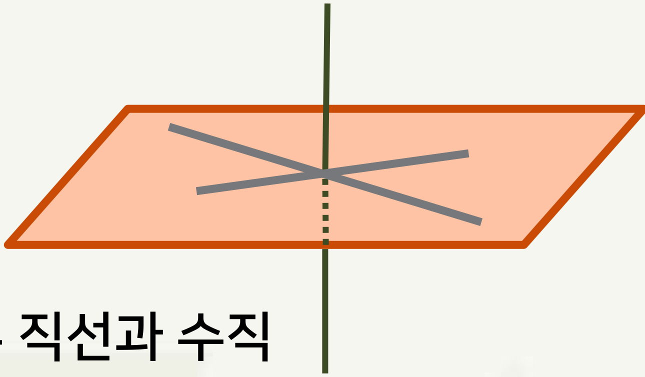
- 오른쪽 직육면체에서 확인되는 평면, 직선
  - 만나는 평면
  - 평행한 평면
  - 평면에 포함된 직선
  - 평면과 만나는 직선
  - 평면과 평행한 직선
  - 만나는 두 직선
  - 평행한 두 직선
  - 꼬인 위치에 있는 두 직선



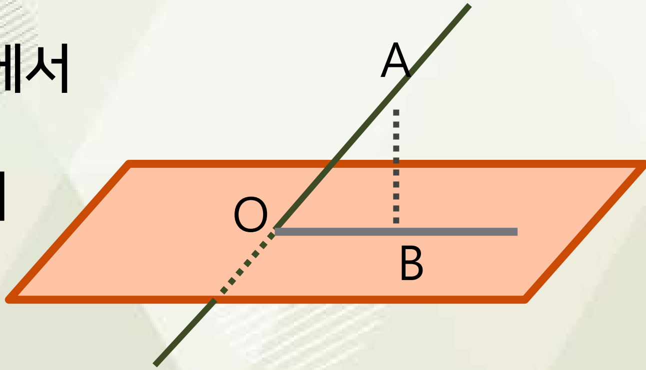
1.2 정사영의 개념

◆ 평면과 직선이 이루는 각

- 평면과 직선의 수직
  - 정의: 직선이 평면 위의 모든 직선과 수직
  - 충분조건:
    직선이 평면 위의 평행하지 않은 서로 다른 두 직선과 수직



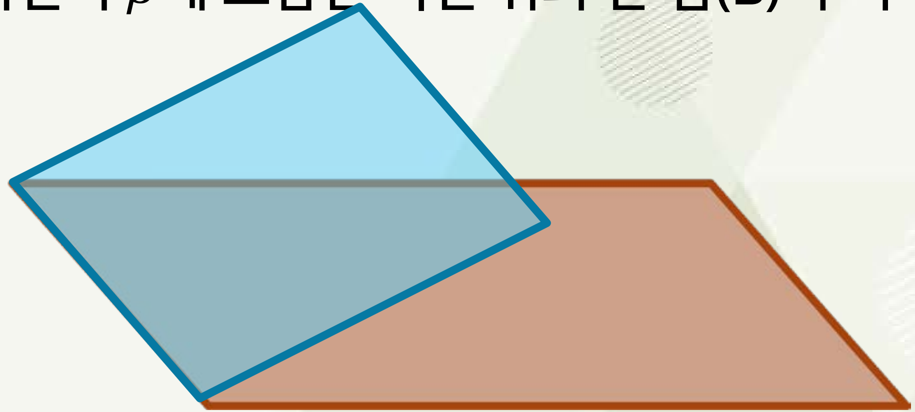
- 평면과 직선이 이루는 각의 크기
  - 직선과 평면의 교점(O)이 아닌 임의의 점(A)에서
    평면에 내린 수선의 발(B)에 대하여
    직선 OA와 직선 OB가 이루는 각 AOB의 크기



1.2 정사영의 개념

◆ 평면과 평면이 이루는 각

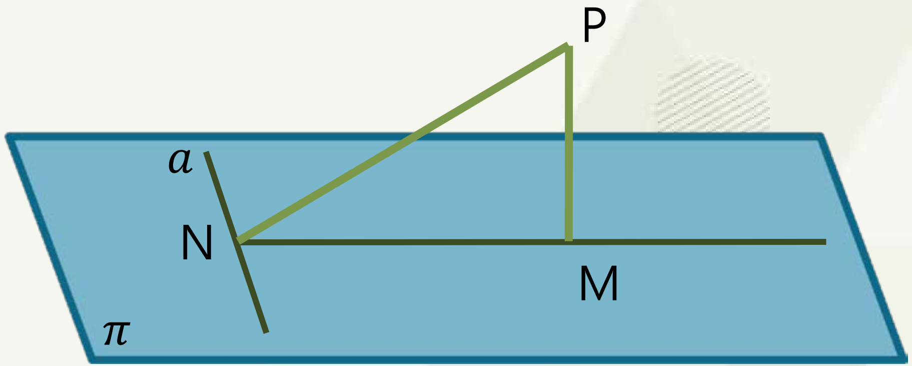
- 두 평면의 위치 관계: 만난다 vs. 평행하다
- 만나는 두 평면이 이루는 각
  - 두 평면(α와 β)이 만날 때 생기는 교선 위의 임의의 한 점(O)에서 그은 교선과 수직이면서 α에 포함된 직선 위의 한 점(A)과 교선과 수직이면서 β에 포함된 직선 위의 한 점(B)이 이루는 각



1.2 정사영의 개념

◆ 삼수선의 정리

- $\overline{PM} \perp \pi, \overline{MN} \perp a \Rightarrow \overline{PN} \perp a$
- $\overline{PM} \perp \pi, \overline{PN} \perp a \Rightarrow \overline{MN} \perp a$
- $\overline{PN} \perp a, \overline{MN} \perp a \Rightarrow \overline{PM} \perp \pi$



1.2 정사영의 개념

- 정사영(orthogonal projection)의 정의
  - 공간에 어떤 도형과 그 도형의 상(像)이 그려질 투영면 존재
  - 투영면에 수직인 빛을 도형에 비췄을 때
  - 투영면에 생기는 도형의 그림자
  - 선분 $\overline{AB}$의 평면 α 위로 정사영을 $\overline{A'B'}$,
    선분 $\overline{AB}$와 평면 α가 이루는 예각의 크기 θ

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\theta$$

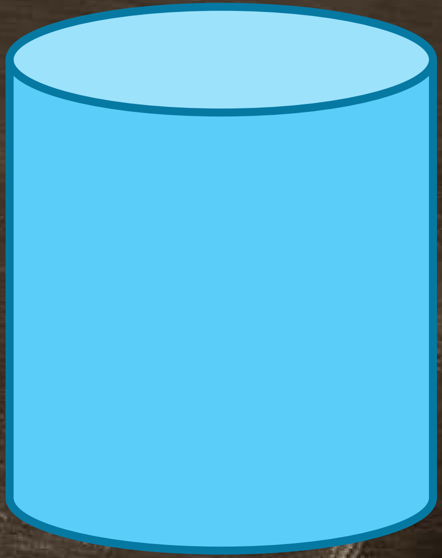
  - 평면 β 위의 넓이가 S인 도형의 평면 α 위로 정사영 넓이 S'

$$S' = S\cos\theta$$

1.2 정사영의 개념

정사영 예제

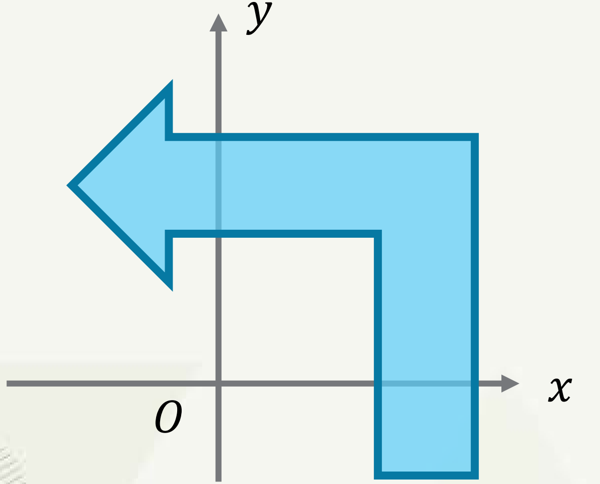
- 반지름의 길이가 r인 밑면의 중심을 지나도록 원기둥을 평면으로 자를 때 단면의 넓이는?
  - $30°$
  - $45°$
  - $60°$



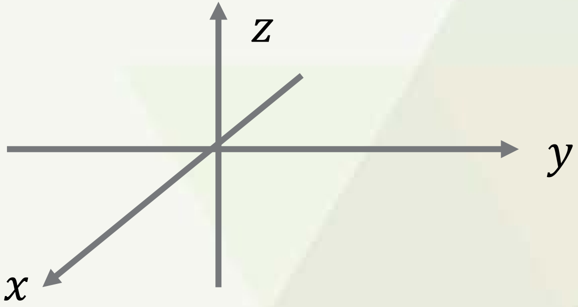
2 공간좌표

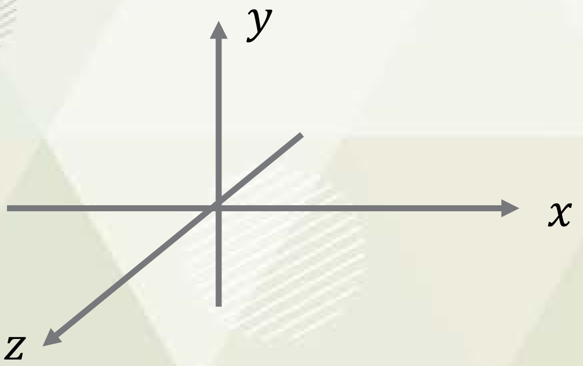
2. 배경: 공간에서 직교좌표

- "오른손 법칙"과 직교좌표계
  - 평면에서 직교좌표계
    - x축의 반시계방향 90° 방향으로 y축이 위치



  - 3차원 공간의 직교좌표계
    - x축과 y축이 직교좌표를 이룬 상황에서
    - x축과 y축에 모두 수직은 방향으로 z축이 위치

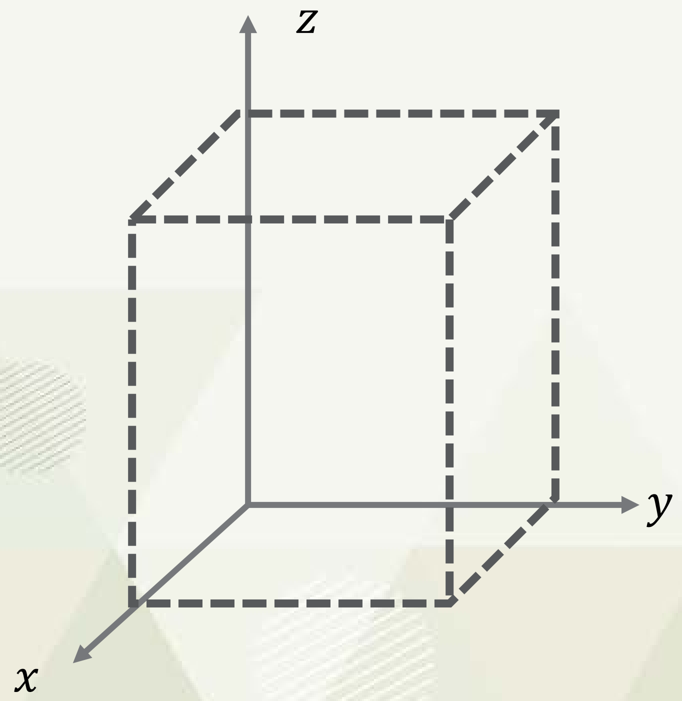




2.1 3차원 공간에서 두 점 사이의 거리

◆ 공간좌표에서 점의 좌표

- 3차원 공간의 직교좌표계
  - 점 $P(a, b, c)$의 위치
  - 점 $P(a, b, c)$에서 축에 내린 수선의 발
    - x축
    - y축
    - z축
  - 점 $P(a, b, c)$에서 평면에 내린 수선의 발
    - xy-평면
    - yz-평면
    - zx-평면



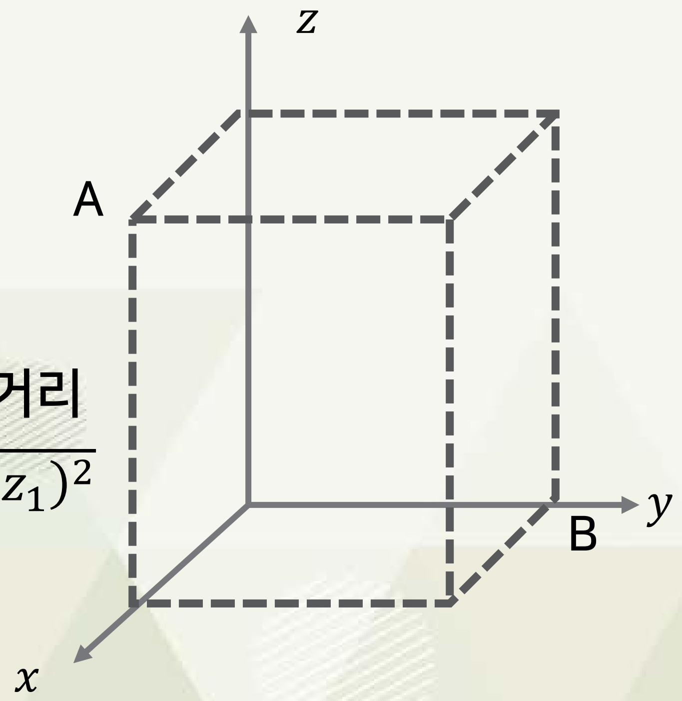
2.1 3차원 공간에서 두 점 사이의 거리

◆ 두 점 사이의 거리

- 평면좌표에서 두 점 사이의 거리
  - 점 $A(x_1, y_1)$와 점 $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리

    $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 공간좌표에서 두 점 사이의 거리
  - 점 $A(x_1, y_1, z_1)$와 점 $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리

    $\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



2.1 3차원 공간에서 두 점 사이의 거리

◆두 점 사이의 거리 예제

- 두 점 $P(1,2,3)$와 $Q(-1,3,6)$ 사이의 거리
- 세 점 $O(0,0,0), A(1,2,1), B(-1,0,1)$에서 같은 거리에 있는 yz-평면 점의 좌표

2.2 내분점과 외분점

◆ 내분점과 외분점 공식

- 평면좌표에서 점 $A(x_1, y_1)$와 점 $B(x_2, y_2)$의 $m: n$ 내분점 P와 외분점 Q

$$P = \left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right),\ Q = \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

- 공간좌표에서 점 $A(x_1, y_1, z_1)$와 점 $B(x_2, y_2, z_2)$의 $m: n$ 내분점 P와 외분점 Q

$$P = \left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

$$Q = \left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right)$$

2.2 내분점과 외분점

- 내분점과 외분점 예제
  - 두 점 $P(1, 2, 3)$와 $Q(-2, 5, 6)$
    - 1:2 내분점
    - 2:1 외분점

3 구의 방정식

3.1 구의 정의와 방정식

◆ 원의 정의와 원의 방정식

원의 정의

- 평면 위의 한 정점(중심)으로부터
일정한 거리(반지름)만큼 떨어진 점의 집합

원을 정의하려면?

- 중심과 반지름 필요
- 삼각형의 외접원은 유일 → 같은 직선 위에 있지 않은 세 점 필요

원의 방정식

- $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$
- $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

3.1 구의 정의와 방정식

◆ 구의 정의와 구의 방정식

- 구의 정의
  - 공간 위의 한 정점(중심)으로부터 일정한 거리(반지름)만큼 떨어진 점의 집합
- 구를 정의하려면?
  - 중심과 반지름 필요
  - 한 평면 위에 있지 않은 네 점이 주어질 때
- 구의 방정식
  - $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$
    $\rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$
  - $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$

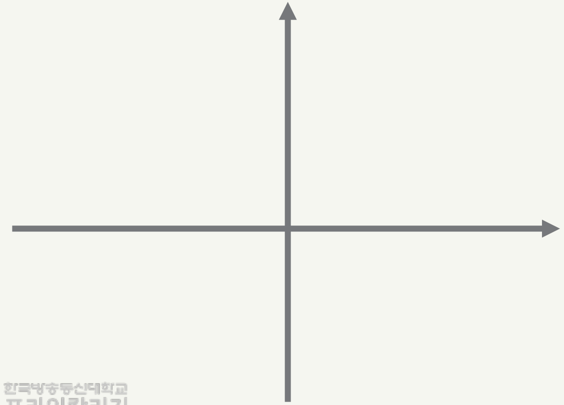
3.1 구의 정의와 방정식

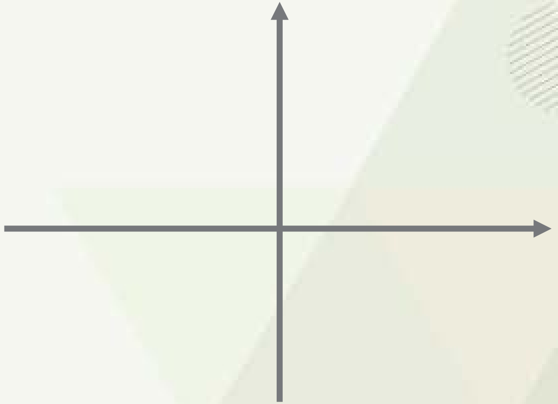
- 구의 방정식 예제
  - 중심이 $(0,2,0)$이고 반지름이 3인 구의 방정식
  - 네 점 $(0,0,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(-1,0,1)$을 지나는 구

3.2 구의 방정식 활용

◆ 평면 또는 축에 접하는 구의 방정식

- 좌표평면에서 축에 접하는 원의 방정식
  - x축에 접하는 원의 방정식 $(x-a)^2+(y\pm b)^2=b^2$
  - y축에 접하는 원의 방정식 $(x\pm a)^2+(y-b)^2=a^2$
  - x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식 $(x\pm r)^2+(y\pm r)^2=r^2$





3.2 구의 방정식 활용

◆ 평면도는 축에 접하는 구의 방정식 (계속)

- 좌표공간에서 평면에 접하는 구의 방정식
  - xy-평면에 접하는 구의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z\pm c)^2=c^2$
  - yz-평면에 접하는 구의 방정식 $(x\pm a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2$
  - zx-평면에 접하는 구의 방정식 $(x-a)^2+(y\pm b)^2+(z-c)^2=b^2$
- 좌표공간에서 축에 접하는 구의 방정식
  - x축에 접하는 구의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=b^2+c^2$
  - y축에 접하는 구의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=c^2+a^2$
  - z축에 접하는 구의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2$

3.2 구의 방정식 활용

- 구의 방정식 활용 예제
  - 두 점 $(1,1,1)$, $(1,1,3)$을 지나고 yz-, zx-평면에 접하는 구의 방정식

정리하기

- 평면과 다른 공간에서 위치 관계
- 정사영은 투사면에 수직인 그림자
- 공간에서 거리는 평면 거리의 확장
- 구의 정의, 방정식, 단면의 모양

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.