9강. 일차함수와 이차함수

※ 연습문제

문제 1. 좌표평면에서 원점 O를 지나고 꼭짓점이 $A(2,\ -4)$ 인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 B라 하자. 직선 $y=mx$가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하도록 하는 실수 m이 존재할 때, $3m^2$의 값은?

① $\frac{5}{6}$

② 1

③ $\frac{5}{4}$

④ $\frac{4}{3}$

정답 : ④

이차함수의 조건을 이용하여 점 B의 좌표를 구하면, 꼭짓점의 좌표가 $A(2,\ -4)$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$의 식을 $y=k(x-2)^2-4$ (k는 상수)라 하자.

이때, 이차함수의 그래프가 원점을 지나므로 $0=4k-4$, $\therefore k=1$

따라서 $y=(x-2)^2-4=x^2-4x=x(x-4)$ 이므로 점 B의 좌표는 $B(4,0)$이다. 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하기 위해서는 직선 $y=mx$ 는 선분 AB의 중점을 지나야 한다. 선분 AB의 중점의 좌표는 $(3,\ -2)$이므로

$$-2=3m \Rightarrow m=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ 3m^2=3\times(-\frac{2}{3})^2=\frac{4}{3}$$

문제 2. 두 이차함수 $f(x)=x^2-7$과 $g(x)=-2x^2+5$가 있다. 그림과 같이 네 점 $A(a, f(a))$, $B(a, g(a))$, $C(-a, g(-a))$, $D(-a, f(-a))$ 를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $ABCD$의 둘레 길이의 최댓값이 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값은?

① 77 ② 80
③ 83 ④ 86

정답 : ①

$f(x)=x^2-7$, $g(x)=-2x^2+5$ 는 y축에 대하여 대칭인 함수이므로

$\overline{AD}=\overline{BC}=a-(-a)=2a$

$\overline{BA}=\overline{CD}=g(a)-f(a)=(-2a^2+5)-(a^2-7)=-3a^2+12$

직사각형 $ABCD$ 의 둘레의 길이를 $l(a)$라 하면

$$l(a)=\overline{AD}+\overline{BC}+\overline{BA}+\overline{CD}=2(\overline{AD}+\overline{BA})$$
$$=2(2a-3a^2+12)=-6a^2+4a+24$$
$$=-6(a-\frac{1}{3})^2+\frac{74}{3}\ (0<a<2)$$

따라서 $a=13$ 일 때 직사각형 $ABCD$의 둘레의 길이가 최대가 되므로 직사각형 $ABCD$의 둘레 길이의 최댓값은 $\frac{74}{3}$ 이다.

$\therefore\ p+q=3+74=77$