

11강. 삼각함수 (1)

※ 연습문제

문제 1. a, b 는 양수이고 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 이다. 또한 $a^2 + b^2 = 3ab \cos \gamma$ 일 때

$9\sin^2(\pi + \alpha + \beta) + 9\cos \gamma$ 은 $\cos \gamma = \frac{q}{p}$ 에서 최댓값 M 을 갖는다.

$p + q + M$ 의 값은?

(가) 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $x = p$ 를 축으로 한다.

(나) 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 의 해는 $-1 \leq x \leq 5$ 이다.

$p^2 \times \frac{1}{3} \{f(2) - g(2)\}$ 의 값은?

① 15

② 16

③ 17

④ 18

정답 : ①

$a^2 + b^2 = 3ab \cos \gamma$ 의 양변을 ab 로 나누면 $3ab \cos \gamma = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 이다.

a, b 는 양수이므로 ab, ba 도 양수이다. 따라서 산술-기하평균에 의하여

$$3ab \cos \gamma = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} = 2, \quad \therefore \cos \gamma \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{2}{3} \leq \cos \gamma \leq 1$$

또, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ 이므로 $\sin(\pi + \alpha + \beta) = \sin(2\pi - \gamma) = -\sin \gamma$

$$\begin{aligned} \therefore 9\sin^2(\pi + \alpha + \beta) + 9\cos \gamma &= 9\sin^2 \gamma + 9\cos \gamma \\ &= 9(1 - \cos^2 \gamma) + 9\cos \gamma \\ &= -9(\cos^2 \gamma - \cos \gamma) + 9 \\ &= -9\left(\cos \gamma - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{45}{4} \end{aligned}$$

그런데 $\frac{2}{3} \leq \cos\gamma \leq 1$ 이므로, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$ 일 때 최댓값 11을 갖는다.

$$\therefore p+q+M=3+2+11=16$$

문제 2. 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭인 두 직선 $y=ax$ 와 $y=bx$ 가 이루는 각이 30° 일 때,

$$\frac{3(a^2+b^2)}{2} \text{의 값은?}$$

① 2

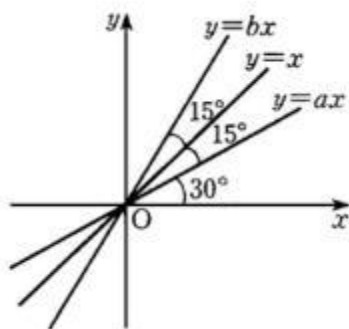
② 5

③ 8

④ 11

정답 : ②

두 직선 $y=ax$ 와 $y=bx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 각각 30° , 60° 라 하자.



$$a = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad b = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

$$\therefore \frac{3(a^2 + b^2)}{2} = \frac{3 \times \frac{10}{3}}{2} = 5$$