[대학기초수학]

# 5차시 | 여러 가지 수열의 합

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

# 오늘의 목표

- 기호 $\sum$의 정의와 성질을 이해한다.
- 기호 $\sum$를 활용하여 수열의 합을 표현한다.
- 여러 가지 수열의 일반항과 합을 도출하는 과정을 이해한다.

# 목차

# 1 기호 Σ의 정의와 성질

# 1.1 기호 Σ의 정의

◆ Σ(Sigma, summation): 수열의 합을 나타내는 기호

- $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
  - 수열의 일반항($k$번째 항) $a_k$에 $k = 1, 2, \cdots, n$ 대입
  - 수열의 첫째 항부터 $n$번째 항까지의 합
  - $\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$,
    $\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{10}$,
    $\sum_{k=1}^{15} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{15}$
- $A = \{1, 2, \cdots, n\}$라 정의할 때, $\sum_{i \in A} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
  - $A = \{x | x$는 짝수인 자연수$\}$
    $\sum_{i \in A} a_i = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$, $\sum_{i \notin A} a_i = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots$

# 1.1 기호 Σ의 정의

- Σ(Sigma, summation) 기호 예제 1
  - 수열의 합을 Σ로 표현
    - $1 + 2 + 3 + \cdots + 20 =$
    - $3 + 7 + 11 + \cdots + 59 =$
    - $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 15 \cdot 16 =$
    - $x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots + x_n f_n =$

# 1.1 기호 Σ의 정의

- Σ(Sigma, summation) 기호 예제 2
  - Σ로 표현된 합을 일반적인 수열의 합으로 표현
    - $\sum_{k=1}^{12} k^2 =$
    - $\sum_{k=3}^{99}(2k-1) =$
    - $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k =$
    - $\sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^k =$

# 1.2 기호 Σ의 성질

- 기호 Σ에 대하여 분배법칙과 실수배 가능
  - $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$
    - $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) =$
  - $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$
    - $\sum_{k=1}^{n} ca_k =$
  - $\sum_{k=1}^{n} c = cn$
    - $\sum_{k=1}^{n} c =$
  - $\sum_{k=1}^{n}(pa_k + qb_k + r) = p\sum_{k=1}^{n} a_k + q\sum_{k=1}^{n} b_k + rn$

# 1.2 기호 Σ의 성질

- 기호 Σ에 대한 분배법칙과 실수배 예제
  - $\sum_{k=1}^{n} a_k = 15n, \sum_{k=1}^{n} b_k = 20n$일 때,
    $\sum_{k=1}^{n}(3a_k - 2b_k + 5) = ?$
  - $f(30) = 30, f(1) = 5$일 때,
    $\sum_{k=1}^{29} f(k+1) - \sum_{k=2}^{30} f(k-1) = ?$

# 2 기호 Σ와 수열의 합

# 2.1 자연수 거듭제곱의 합

- 일반항이 다항함수인 수열의 합
  - 일반항이 $n$에 대한 일차함수 = 등차수열
    → 일반항이 일차함수인 수열의 합 = 등차수열의 합
    - $\{n\}$: $1,\ 2,\ 3,\ \cdots, n$ → $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
    - $\{2n\}$: $2,\ 4,\ 6,\ \cdots, 2n$
      → $2+4+6+\cdots+2n = 2(1+2+3+\cdots+n) = n(n+1)$
  - 일반항이 $n$에 대한 이차함수?
    - $\{n^2\}$: $1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2, \cdots, n^2$
      → $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

# 2.1 자연수 거듭제곱의 합

## ◆ 일반항이 다항함수인 수열의 합 (계속)

### ◻ 일반항이 $n$에 대한 삼차함수?

- $\{n^3\}$: $1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \cdots, n^3$ → $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$
- $\{(2n)^3\}$: $2^3,\ 4^3,\ 6^3,\ \cdots,(2n)^3$ → $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3$
  $=8(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=2n^2(n+1)^2$

### ◻ 일반항이 $n$에 대한 사차함수?

- $\{n^4\}$: $1^4,\ 2^4,\ 3^4,\cdots,n^4$

  → $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

# 2.1 자연수 거듭제곱의 합

- 일반항이 다항함수인 수열의 합 예제
  - $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) =$
  - $2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3 =$

# 2.2 수열의 합과 일반항의 관계

## ◆ 수열의 합 $S_n$과 일반항 $a_n$의 관계

- $S_n$: 수열의 첫 번째 항부터 $n$번째 항까지의 합
- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$
  $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \qquad = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$
  $a_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \ (n \geq 2),\ a_1 = S_1$
- $\sum_{k=1}^{n} a_k$로 표현된 수열의 합으로부터 일반항 $a_n$ 도출
  - $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 2n = S_n$
    $\Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} = 2n + 1 \ (n \geq 3)$

# 2.2 수열의 합과 일반항의 관계

- 수열의 합 $S_n$과 일반항 $a_n$의 관계 예제
  - $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2n}{n+1}$일 때, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} =?$

# 3 여러 가지 수열

# 3.1 수열의 차로 이루어진 수열

## ◆ 수열과 수열의 차(계차)로 이루어진 수열의 관계

- $\{a_n\}$: $1, 3, 7, 13, 21, 31, \cdots$
  - $a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2, a_3 - a_2 = 7 - 3 = 4,$
    $a_4 - a_3 = 13 - 7 = 6, a_5 - a_4 = 21 - 13 = 8,$
    $a_6 - a_5 = 31 - 21 = 10, \ \cdots$
  - $b_n \coloneqq a_{n+1} - a_n \Rightarrow \{b_n\}: 2, 4, 6, 8, 10, \cdots \Rightarrow b_n = 2n$
  - $a_2 = a_1 + b_1 = 1 + 2 = 3,$
    $a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 + b_2 = 1 + 2 + 4 = 7,$
    $a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 = 1 + 2 + 4 + 6 = 13,$
    $\vdots$
    $a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

# 3.1 수열의 차로 이루어진 수열

- 수열과 계차로 이루어진 수열 예제
  - $\{a_n\}: 3, 4, 6, 10, 18, 34, 66, \cdots$ 일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k = ?$

# 3.2 수열의 곱으로 이루어진 수열

## ◆ 유사한 수열의 곱

- 등차수열×등차수열 = $n$에 대한 이차함수 (다항함수)
  - $\{a_n = 2n - 1\}$: $1, 3, 5, 7, 9, \cdots$
  - $\{b_n = 2n + 1\}$: $3, 5, 7, 9, 11, \cdots$
  - $\{a_n b_n = 4n^2 - 1\}$: $3, 15, 35, 63, 99, \cdots$
- 등비수열×등비수열 = $n$에 대한 지수함수 (등비수열)
  - $\{a_n = 2^{n-1}\}$: $1, 2, 4, 8, 16, \cdots$
  - $\{b_n = 3^n\}$: $3, 9, 27, 81, 243, \cdots$
  - $\{a_n b_n = 3 \cdot 6^{n-1}\}$: $3, 18, 108, 648, 3888, \cdots$

# 3.2 수열의 곱으로 이루어진 수열

## 이질적인 수열의 곱

- (등차수열×등비수열) 꼴 수열
  - $\{a_n = n\}$: $1, 2, 3, 4, 5 \cdots$
  - $\{b_n = 2^{n-1}\}$: $1, 2, 4, 8, 16 \cdots$
  - $\{a_n b_n = n \cdot 2^{n-1}\}$: $1 \cdot 1, 2 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 4 \cdot 2^3, 5 \cdot 2^4, \cdots$
- (등차수열×등비수열) 꼴 수열의 합
  - $S = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^{k-1} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$
  - 등비수열의 합 공식을 유도하듯이 계산 가능

# 3.2 수열의 곱으로 이루어진 수열

- (등차수열×등비수열) 꼴 수열의 합 예제 1
  - $S = 1 \cdot 1 + \ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ 4 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$

# 3.2 수열의 곱으로 이루어진 수열

- (등차수열×등비수열) 꼴 수열의 합 예제 2
  - $S = 2 \cdot 1 + 4 \cdot x + 6 \cdot x^2 + 8 \cdot x^3 + \cdots + 2n \cdot x^{n-1}$

# 정리하기

- 특정 조건에서 합을 나타내는 기호 $\sum$
- 기호 $\sum$로 표현되는 수열의 합
- 수열의 차로 이루어진 수열
- 등차수열$\times$등비수열로 이루어진 수열

강의를 마쳤습니다.

# 수고하셨습니다.