10강. 부등식의 영역

※ 연습문제

문제 1. 최고차항의 계수가 각각 $\frac{1}{2}$, 2 인 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=p$를 축으로 한다.
> (나) 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 의 해는 $-1 \leq x \leq 5$ 이다.

$p^2 \times \frac{1}{3}\{f(2)-g(2)\}$ **의 값은?**

① 18	② 21
③ 24	④ 27

정답 : ①

최고차항의 계수가 각각 $\frac{1}{2}$, 2인 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 축은 직선 $x=p$ 이므로 $f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2+a$, $g(x)=2(x-p)^2+b$ 라 하자.

조건 (나)의 부등식 $f(x) \geq g(x)$, 즉 $g(x)-f(x) \leq 0$ 에서

$$g(x)-f(x)=\frac{3}{2}x^2-3px+\frac{3}{2}p^2+b-a \leq 0 \quad \cdots ㉠$$

또, 해가 $-1 \leq x \leq 5$ 이고 최고차항의 계수가 $\frac{3}{2}$인 이차부등식은

$\frac{3}{2}(x+1)(x-5) \leq 0$ 에서 $\frac{3}{2}x^2-6x-\frac{15}{2} \leq 0 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $3p=6, \frac{3}{2}p^2+b-a=-\frac{15}{2}$ 이므로, $p=2, a-b=\frac{27}{2}$

$$\therefore\ p^2 \times \frac{1}{3}\{f(2)-g(2)\}=p^2 \times \frac{1}{3}(a-b)=2^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{27}{2}=18$$

문제 2. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2+4x-21 \le 0 \\ x^2-5kx-6k^2 > 0 \end{cases}$ **의 해가 존재하도록 하는 모든 양의 정수** k **의 합은?**

① 19　　② 21
③ 23　　④ 25

정답 : ②

$x^2+4x-21 \le 0$ 에서 $(x+7)(x-3) \le 0$ $\quad \therefore -7 \le x \le 3$ $\quad \cdots$ ㉠

$x^2-5kx-6k^2 > 0$ 에서 $(x-6k)(x+k) > 0$

이때, $k > 0$ 이므로 $x < -k$ 또는 $x > 6k$ $\quad \cdots$ ㉡

한편, k 는 양의 정수이므로 주어진 연립이차부등식의 해가 존재하려면

$-7 < -k < 0$에서 $0 < k < 7$이므로

구하는 양의 정수 k 의 값은 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 이다.

따라서 모든 양의 정수 k 의 합은 $1+2+3+4+5+6=21$ 이다.