6강. 점화식과 수학적 귀납법

※ 연습문제

문제 1. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \dfrac{2n}{n+1} a_n$ 을 만족시킬 때, $2a_4 + 3a_6$ 의 값은?

① $\dfrac{58}{3}$

② 20

③ $\dfrac{102}{5}$

④ 21

정답 : ②

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \dfrac{2n}{n+1} a_n$ 을 만족시킨다고 하므로 이 점화식에 n 대신 $1, 2, \cdots, 5$를 차례로 대입하여 각각 구하면

$$a_2 = \frac{2 \times 1}{2} a_1 = 1 \quad (\because\ a_1 = 1)$$

$$a_3 = \frac{2 \times 2}{3} a_2 = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = \frac{2 \times 3}{4} a_3 = \frac{2 \times 3}{4} \times \frac{4}{3} = 2$$

$$a_5 = \frac{2 \times 4}{5} a_4 = \frac{2 \times 4}{5} \times \frac{16}{5} = \frac{16}{3}$$

$$a_6 = \frac{2 \times 5}{6} a_5 = \frac{2 \times 5}{6} \times \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\therefore\ 2a_4 + 3a_6 = 2 \times 2 + 3 \times \frac{16}{3} = 20$$

문제 2. 다음은 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

자연수 n에 대하여 $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1}$이라 할 때, $a_n > 1$ 임을 보이면 된다.

(1) $n=1$ 일 때 $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ 이다.

(2) $n=k$ 일 때 $a_k > 1$ 이라고 가정하면 $n=k+1$일 때

$$a_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{3k+4} = a_k + \left(\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}\right) - (\text{가})$$

한편, $(3k+2)(3k+4) < (3k+3)^2$ 이므로 $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > (\text{나})$

그런데 $a_k > 1$이므로, $a_{k+1} > a_k + \left(\frac{1}{3k+3} + (\text{나}) - (\text{가})\right) > 1$

그러므로 (1), (2)에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 1$ 이다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 라 하면 $16f(7) + 9g(2)$ 의 값은?

① 13　　② 10

③ 7　　④ 4

정답 : ④

$$\sum_{i=1}^{2n+1}\frac{1}{n+i}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1$$

(1) $n=1$ 일 때 $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$

(2) $n=k$ 일 때 $a_k>1$ 이라고 가정하면 $n=k+1$일 때

$$a_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$$
$$=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

한편, $(3k+2)(3k+4)<(3k+3)^2$

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}>\frac{6k+6}{(3k+3)^2}=23k+3$$

$$\therefore\ \frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}>\left(\frac{2}{3k+3}\right)$$

$a_k>1$이므로, $a_{k+1}>a_k+\left(\frac{1}{3k+3}+\frac{2}{3k+3}\right)-\frac{1}{k+1}\Big)>1$

그러므로 (1), (2)에 의해서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>1$ 이다.

따라서 $f(k)=\frac{1}{k+1}$, $g(k)=\frac{2}{3k+3}$ 이다.

$$\therefore\ 16f(7)+9g(2)=16\times\frac{1}{8}+9\times\frac{2}{9}=2+2=4$$