09 강

[확률의 개념과 응용]

연속형 확률분포

통계·데이터과학과
이긍희 교수

학습목표

1. 연속형 균등분포를 이해할 수 있다.
2. 지수분포를 이해할 수 있다.
3. 정규분포를 이해할 수 있다.
4. 감마분포를 이해할 수 있다.

01

9강 연속형 확률분포

연속형 확률변수

연속형 확률변수

- 어떤 구간에 속하는 연속적인 값을 가지는 확률변수
- 확률밀도함수 : $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$

연속형 확률분포

확률분포 이름	확률밀도(질량)함수	기댓값	분산
연속형 균등분포 $U(a,\ b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x<a \text{ 혹은 } x>b\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
지수분포 $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\quad x>0\quad (\lambda>0)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
정규분포 $N(\mu,\ \sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],$ $-\infty<x<\infty$	μ	σ^2
감마분포 $\mathrm{Gamma}(\alpha,\ \lambda)$	$f(x)=\dfrac{\lambda^r}{\Gamma(\alpha)}x^{r-1}e^{-\lambda x},$ $x\ge 0\quad (\lambda>0)\quad (\alpha>0)$	$\dfrac{\alpha}{\lambda}$	$\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$
베타분포 $\mathrm{Beta}(\alpha,\ \beta)$	$f(x)=\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$ $0<x<1,\ \alpha,\ \beta>0$	$\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

02

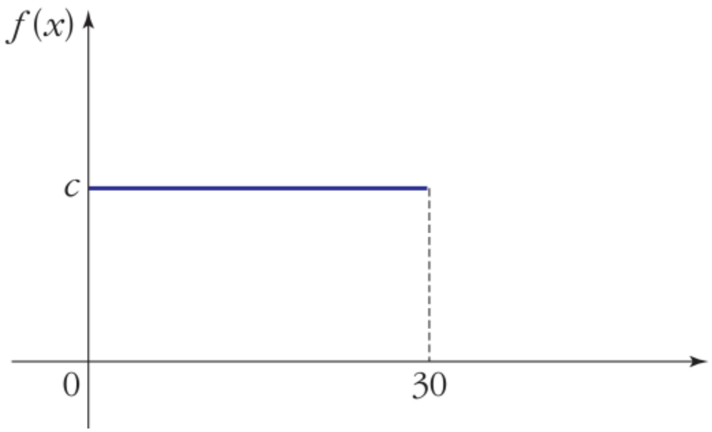
9강 연속형 확률분포

연속형 균등분포

연속형 균등분포의 예

예

30분 배차 간격인 버스 기다리는 시간에 대한 분포는?



연속형 균등분포의 예

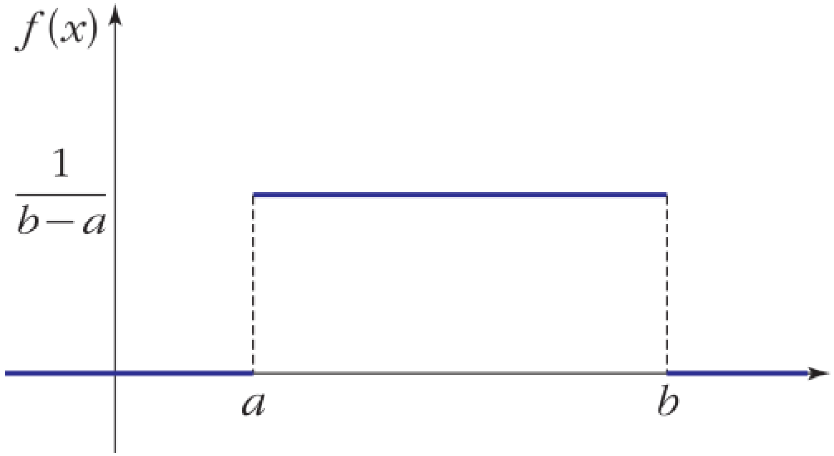
예

30분 배차 간격인 버스 기다리는 시간에 대한 분포는?

연속형 균등분포

◆ $X \sim U(a,b)$: 영역에서 균등한 가능성 가지는 확률분포

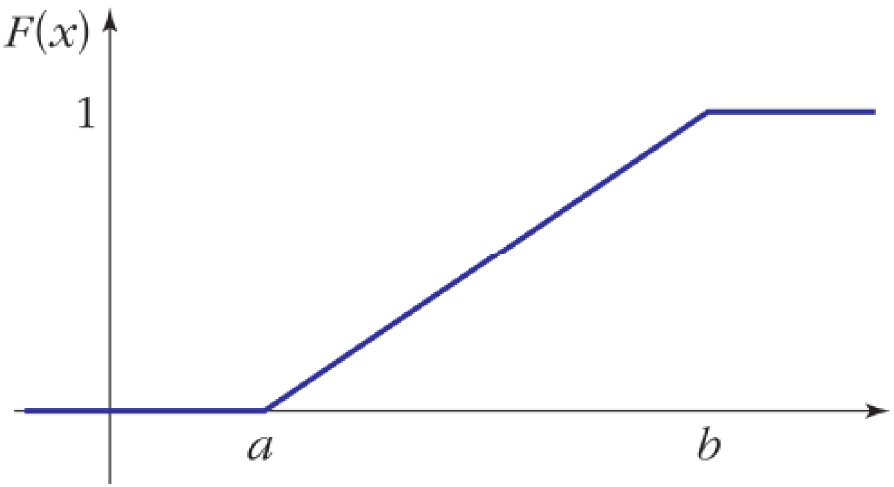
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ 혹은 } x > b \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \end{cases}$$



연속형 균등분포

- $U(a, b)$: 영역에서 균등한 가능성을 가지는 확률분포

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a\text{일 때} \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b\text{일 때} \\ 1, & x > b\text{일 때} \end{cases}$$



연속형 균등분포의 예

예

$X \sim U(1,5)$ 확률변수일 때

(1) X가 2보다 클 확률은?

연속형 균등분포 예

예

$X \sim U(1,5)$ 확률변수일 때

(2) X가 2보다 크고 4보다 작을 확률은?

연속형 확률변수 예

예

$X \sim U(1,5)$ 확률변수일 때

(3) X의 누적분포함수는?

03

9강 연속형 확률분포

지수분포

교체 부품의 수명

◆ 부품의 수명과 준비된 부품 수는 반비례

- 부품의 수명 : 지수분포

포아송분포와 지수분포

- Y : t 시간 동안 사건 발생 횟수 $\sim Poisson(\lambda t)$
- 다음 사건 일어날 때까지의 시간 : $X \sim Exp(\lambda)$

확률밀도함수

◆ $X \sim Exp(\lambda)$의 확률밀도함수 : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

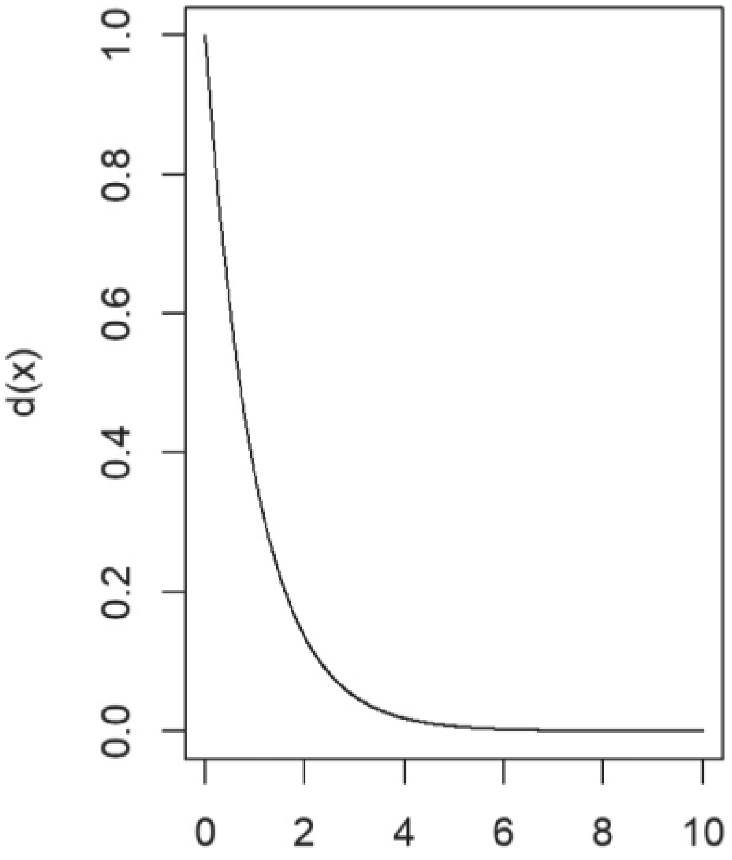
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \text{일 때} \\ 0, & x < 0 \text{일 때} \end{cases}$$

누적분포함수

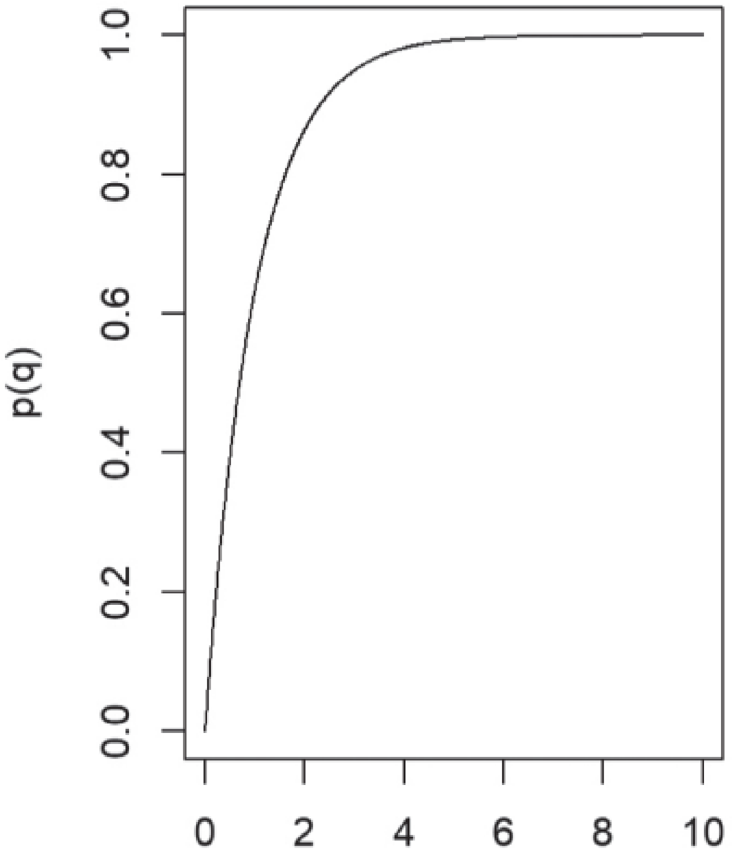
◆ $[0, x]$에서 확률밀도함수에 둘러싸인 부분의 넓이

◆ $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda x}$

확률밀도함수와 누적분포함수



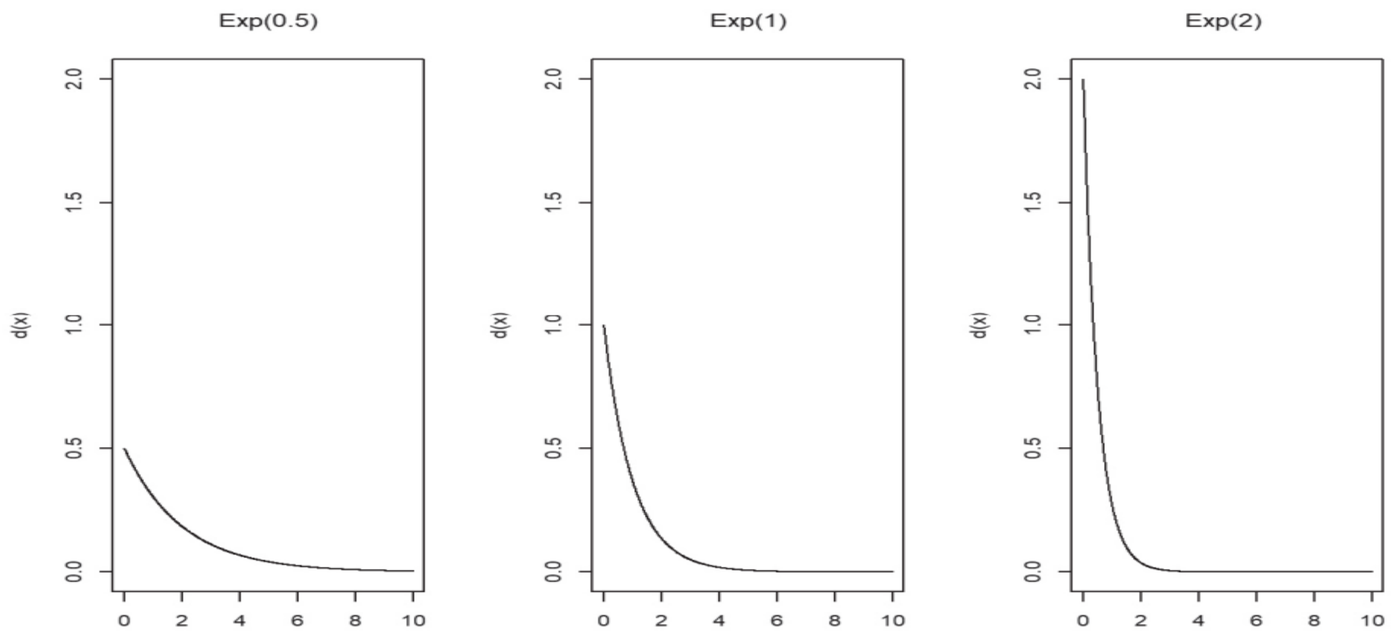
(a) 확률밀도함수



(b) 누적분포함수

확률밀도함수

- λ 값 커질수록 큰 값 나올 확률이 작아지는 경향



지수분포의 예

예

$X \sim Exp(3)$ 일 때 X가 1보다 작을 확률은?

지수분포의 예

예

$X \sim Exp(3)$ 일 때 X가 1보다 클 확률은?

지수분포의 무기억성

- 과거 사용기간은 앞으로의 수명에 대한 확률 분포에 관계없는 성질 :

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$$

(예) 다음 전화가 걸려올 때까지의 시간
어느 지역에서 다음 교통사고가 발생할 때까지의 시간

지수분포의 무기억성

- $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$의 증명

지수분포의 예

예

어느 지역에서 교통사고가 평균 5시간 간격으로 발생. 다음 교통사고가 5시간 이후에 발생할 확률은?

04

9강 연속형 확률분포

정규 분포

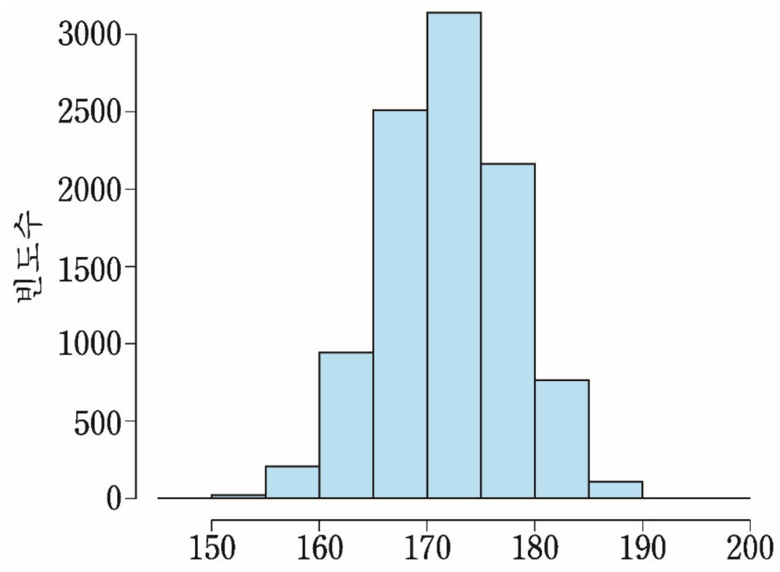
정규분포

- 정규분포(normal distribution)는 연속형 확률분포 중 가장 일반적으로 사용되는 분포

- 키, 몸무게, 제품의 무게 등의 확률분포
- 어떤 값을 중심으로 좌우 대칭적인 형태

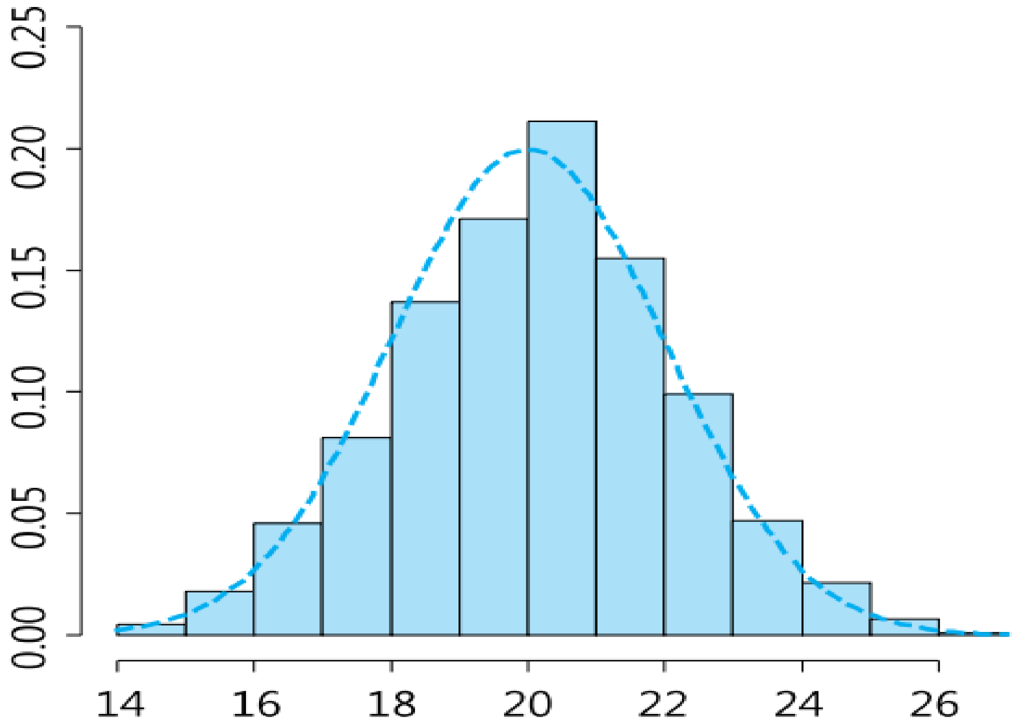
키의 히스토그램

◆ 172cm 중심 좌우 대칭, 중심에서 멀어질수록 자료 수 감소 경향 → 정규분포



실중량의 분포

◆ 어느 공장에서 20g으로 표기된 제품을 생산



정규분포

◆ 중심점 기준으로 좌우 대칭, 종모양

- 1733년 드 무아브르 : 이항분포 근사 함수
- 1809년 가우스 : 오차의 분포
- 1810년 라플라스 : 중심극한정리

확률밀도함수

◆ $N(\mu,\sigma^2)$: 평균 μ , 분산 σ^2

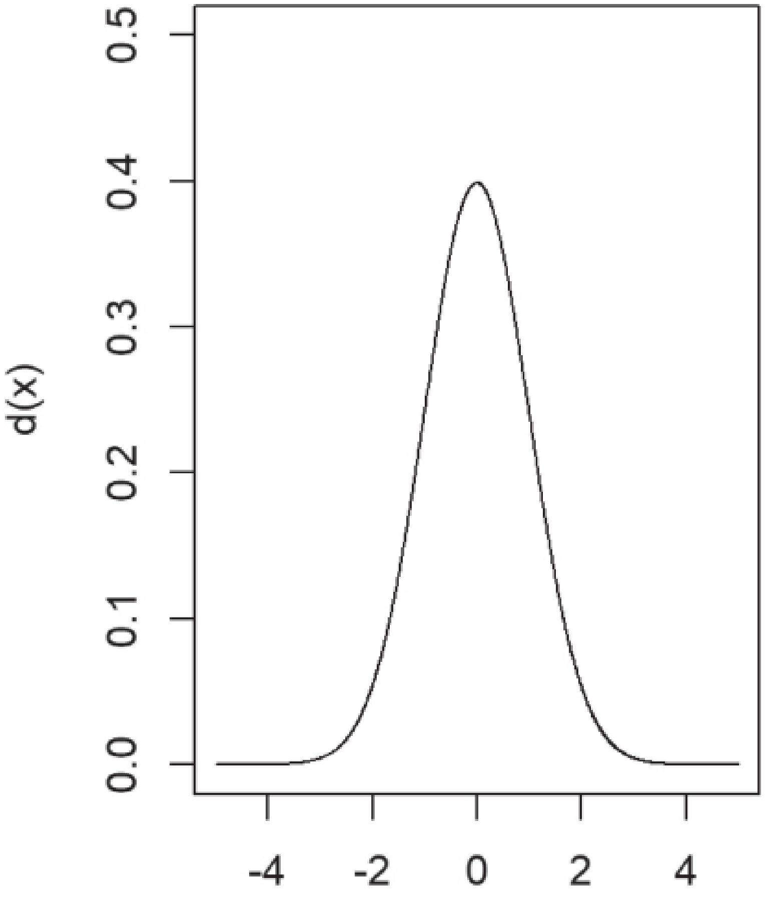
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

확률밀도함수

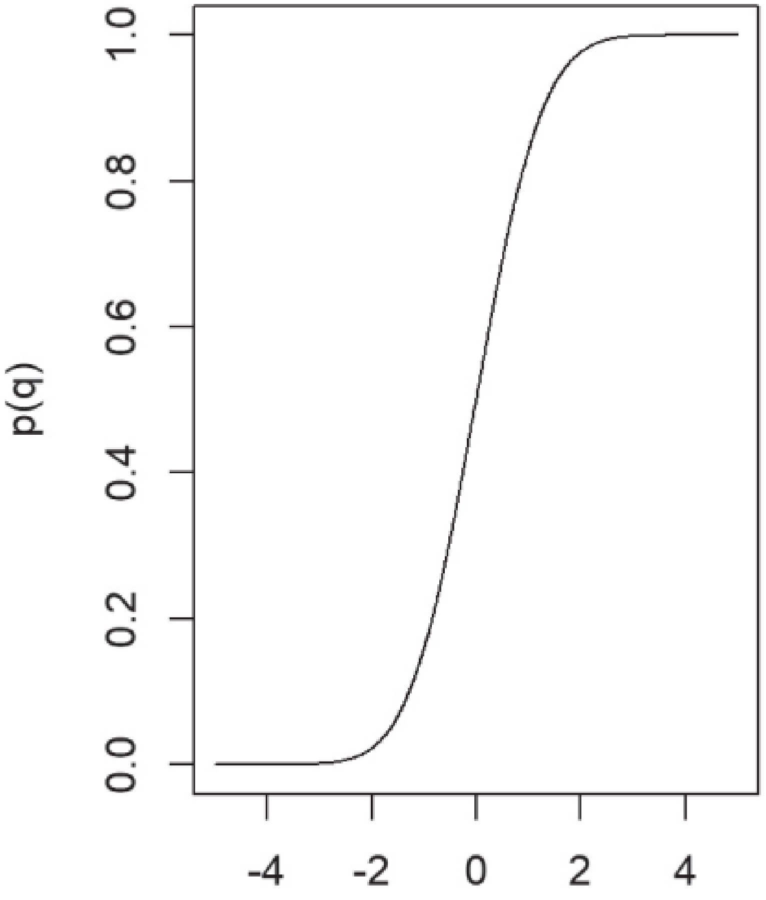
◆ $N(0,1)$: 평균 0 , 분산 1

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

확률밀도함수와 누적분포함수

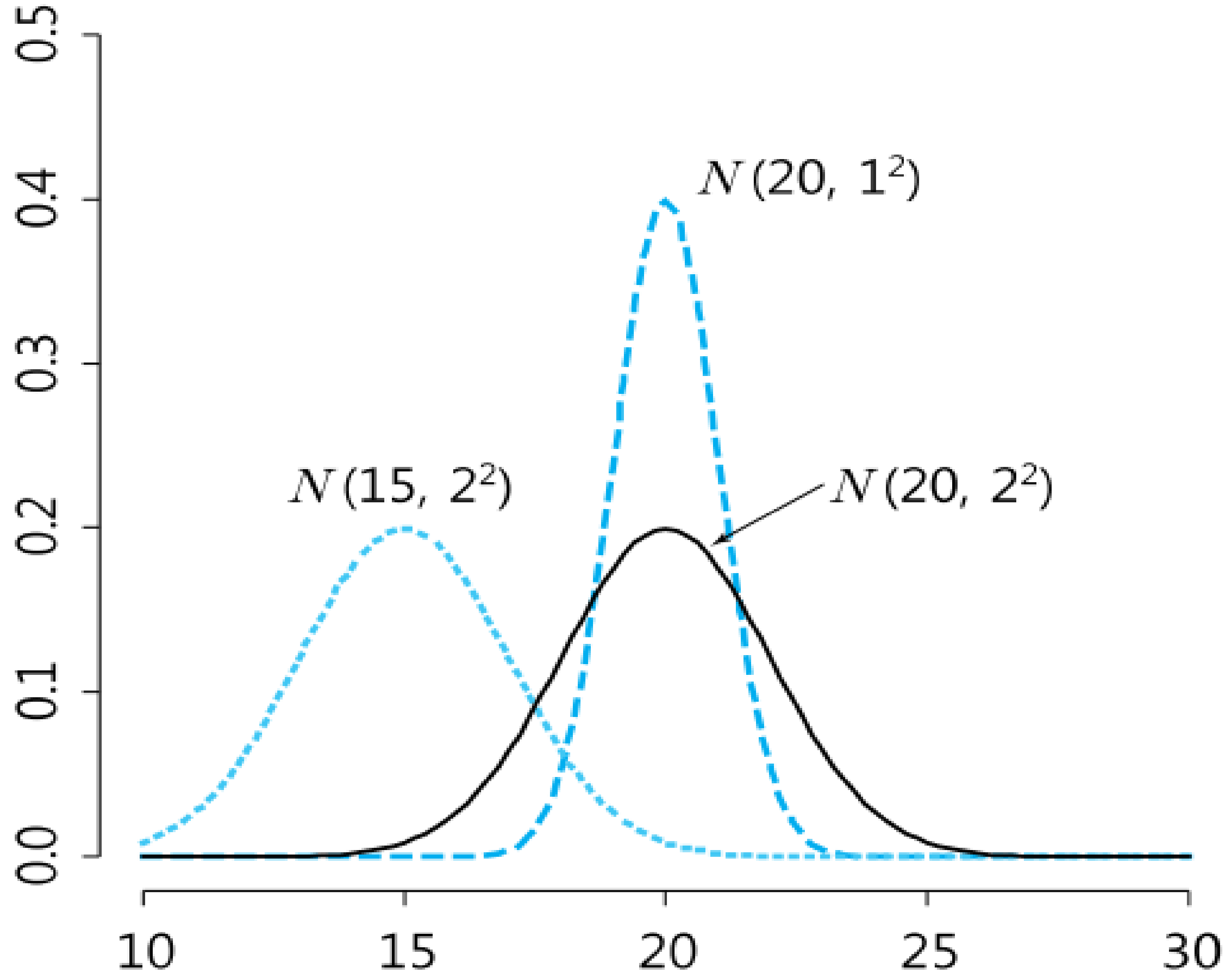


(a) 확률밀도함수



(b) 누적분포함수

확률밀도함수의 모습

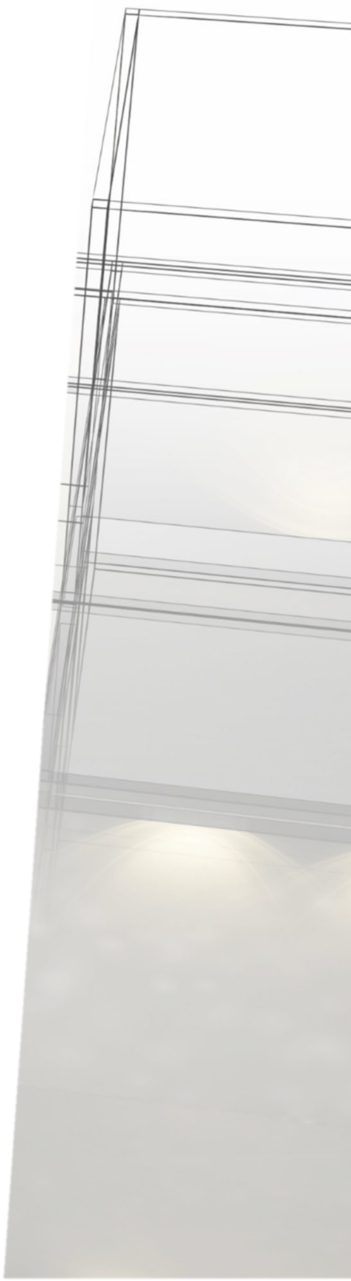


정규분포의 특성

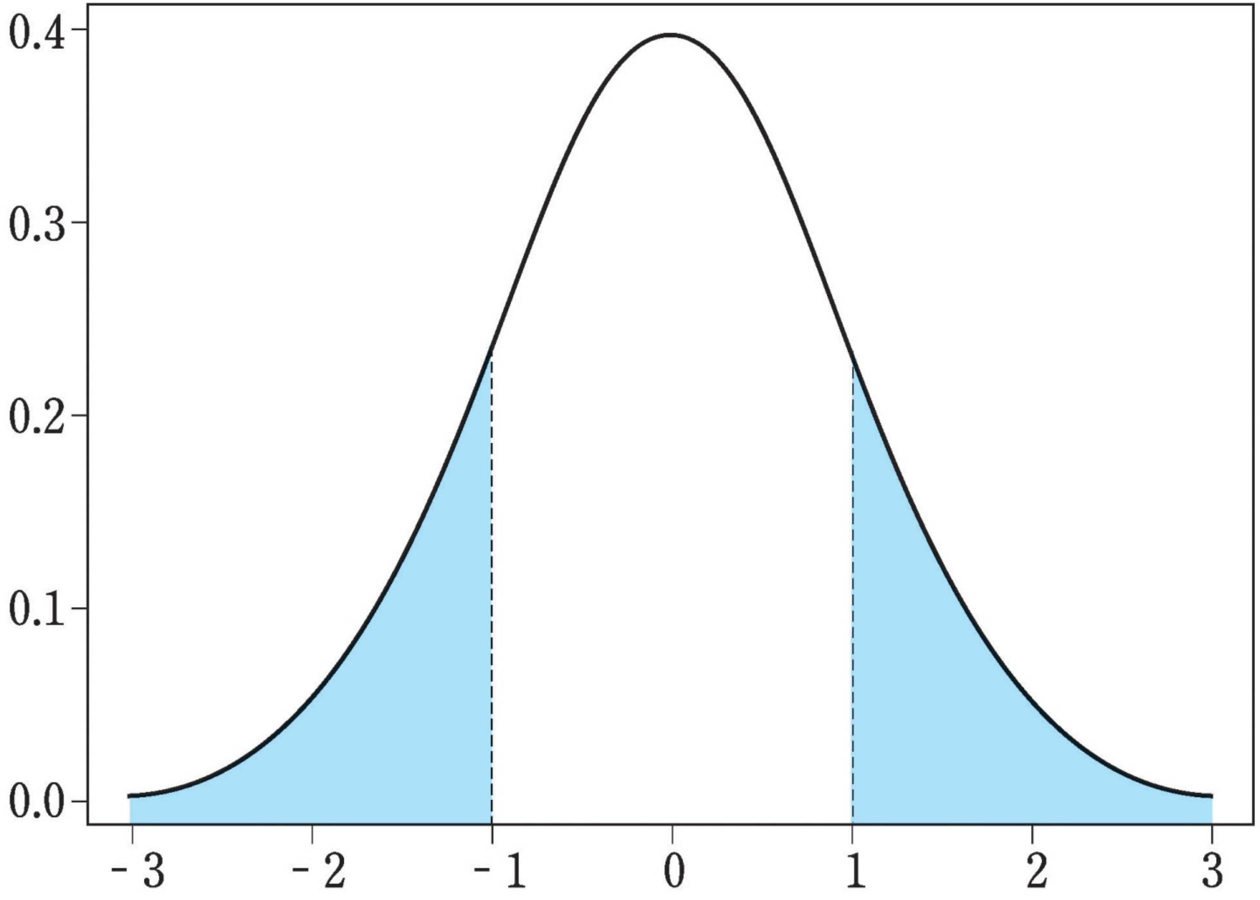
$$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = 0.6827$$

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = 0.9545$$

$$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



표준 정규분포의 특성



표준 정규분포의 특성

$$P(Z \le 1) = 0.8413$$

$$P(Z \le 0) = 0.5$$

$$P(Z \le -1) = P(Z \ge 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

정규분포의 예

예

확률 변수 Z는 표준 정규분포. 다음 확률은?

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96)$$

정규분포의 표준화

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$일 때 $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

정규분포의 표준화

- $X \sim N(\mu, \sigma^2)$일 때 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

정규분포의 예

예

확률변수 $X \sim N(15, 5^2)$

(1) X가 25보다 작을 확률은?

정규분포의 예

예

확률변수 $X \sim N(15, 5^2)$

(2) X가 10보다 크고 25보다 작을 확률은?

정규분포의 예

예

어느 과목의 시험 성적은 평균이 65, 표준편차 10인 정규분포

(1) 이 과목의 시험을 본 학생 중 50점 이하를 받은 학생의 비율은 얼마인가?

정규분포의 예

예

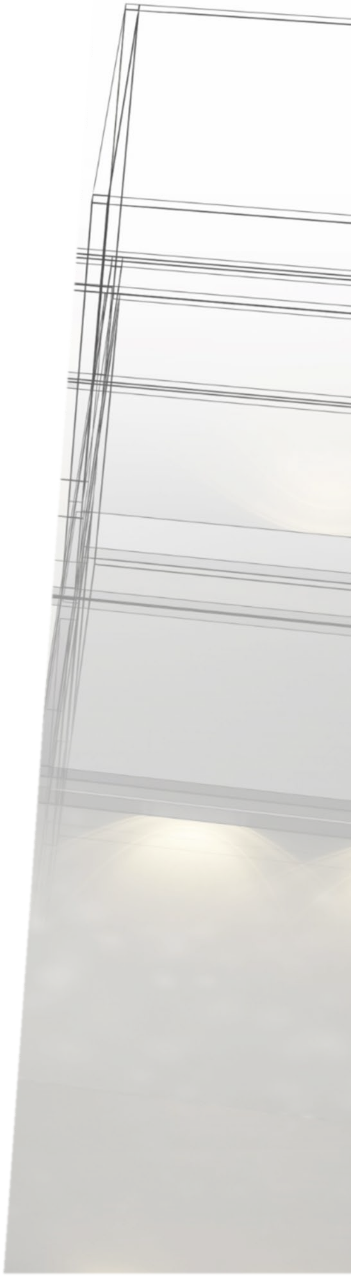
어느 과목의 시험 성적은 평균이 65, 표준편차 10인 정규분포

(2) 상위 20%에 드는 학생에게 A를 준다고 할 때,
A를 받기 위해서는 몇 점 이상이 되어야 하는가?

05

9강 연속형 확률분포

감마 분포



감마분포

- 감마분포(gamma distribution) : 지수분포를 일반화한 분포 : α번째 사건 일어날 때까지의 시간분포

확률밀도함수

- $X \sim Gamma(\alpha, \lambda), \alpha, \lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha - 1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

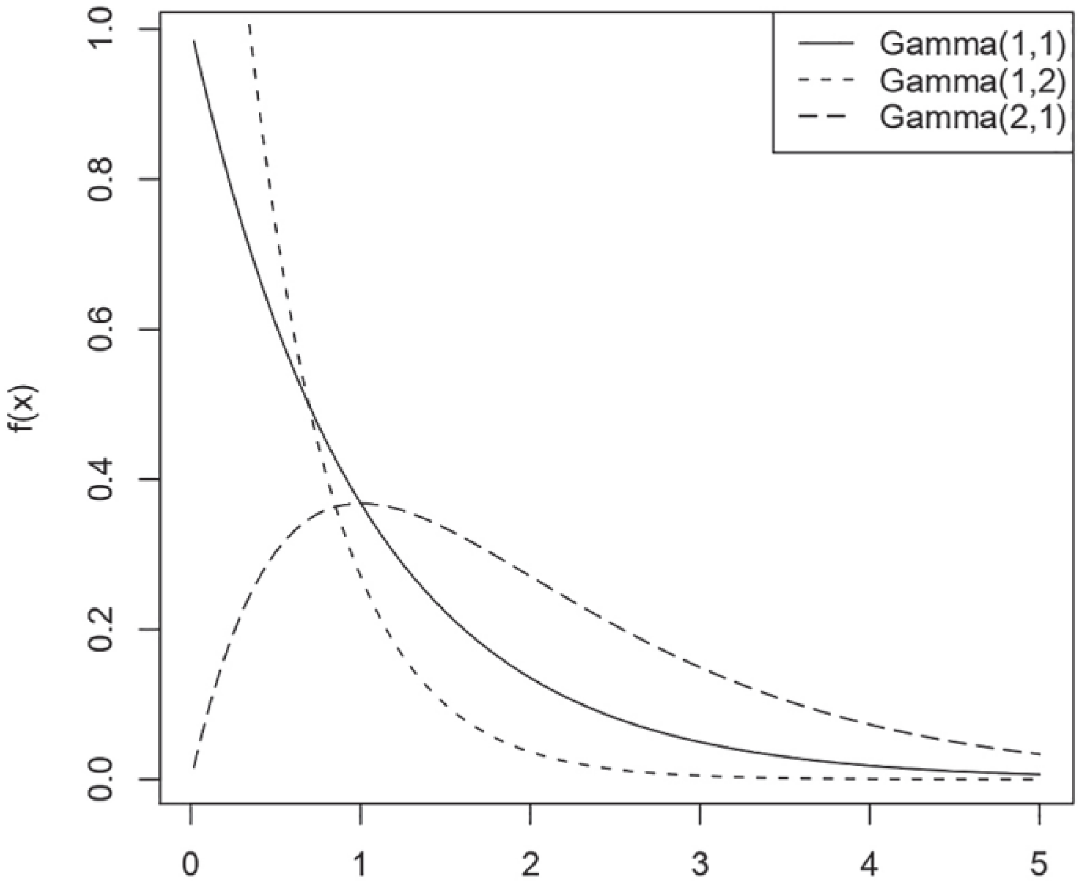
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha - 1} e^{-t} dt$$

기댓값

- $X \sim Gamma(\alpha, \lambda), \alpha, \lambda > 0$
- $E(X) = \dfrac{\alpha}{\lambda}$

확률밀도함수의 모습

- $X \sim Gamma(\alpha, \lambda), \alpha, \lambda > 0$



감마분포와 지수분포

- $Gamma(1, \lambda) = Exp(\lambda)$
- $Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(n)$
- $X_1 \sim Gamma(\alpha, \lambda), X_2 \sim Gamma(\beta, \lambda)$

$\rightarrow \frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim Beta(\alpha, \beta)$

학습정리

- 연속형 균등분포는 특정한 구간에서 각 값을 가질 가능성이 같을 때 사용되는 확률분포이다.
- 지수분포는 특정한 사건이 발생할 때까지 기다리는 시간의 확률분포이다.
- 정규분포는 중심점을 기준으로 좌우 대칭적인 종 모양의 확률분포이다.

정리하기

학습정리

- 감마분포는 지수분포를 일반한 분포로, 특정사건이 여러 번 발생할 때까지의 기다리는 시간의 분포이다.

정리하기

수고하셨습니다.

다음시간에는

09 강 연속형 확률분포

10 강 다변량 확률분포