# 14강. 벡터

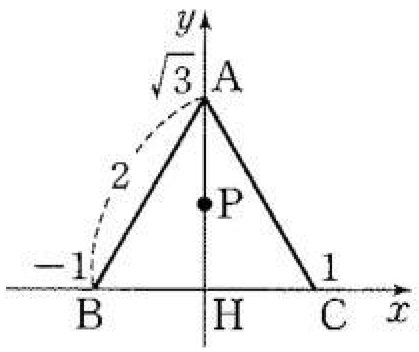
## ※ 연습문제

**문제 1. 한 변의 길이가 2인 정삼각형 $ABC$의 꼭짓점 $A$에서 변 $BC$에 내린 수선의 발을 $H$라 하자. 점 $P$가 선분 $AH$ 위를 움직일 때, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최댓값은 $-\dfrac{q}{p}$이다. $p^2+q^2$의 값은? (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.)**

① 25 ② 28
③ 31 ④ 34

**정답 : ④**

주어진 조건에 맞도록 좌표평면에 한 변의 길이가 2인 정삼각형을 점 $H$가 원점이 되도록 그리면 다음과 같다.




이때, 점 $P(0, y)$ $(단, 0 \le y \le \sqrt{3})$라 하면

$\overrightarrow{PA}=(0,\ \sqrt{3}-y)$, $\overrightarrow{PB}=(-1,\ -y)$이므로

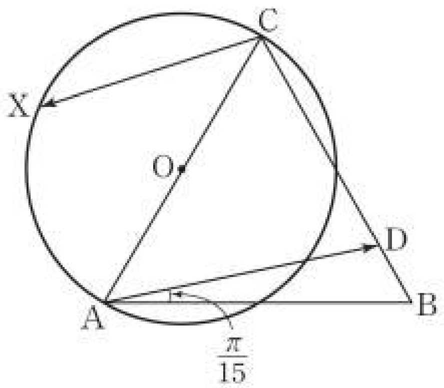
$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (0,\ \sqrt{3}-y) \bullet (-1,\ -y) = y^2 - \sqrt{3}\,y$

그런데 $0 \le y \le \sqrt{3}$에서 $y$에 대한 이차식

$y^2 - \sqrt{3}\,y = (y - \dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 - \dfrac{3}{4}$ 은 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$에서 최솟값 $-\dfrac{3}{4}$을 가진다.

$\therefore\ p^2+q^2 = 4^2+3^2 = 25$

**문제 2. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 $ABC$와 선분 $AC$를 지름으로 하는 원 $O$가 있다. 선분 $BC$ 위의 점 $D$를 $\angle D = \frac{\pi}{15}$ 가 되도록 정한다. 점 $X$가 원 $O$ 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 $X$를 점 $P$라 하자. $\angle ACP$의 값은?**

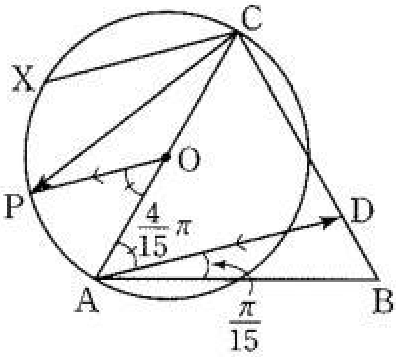



① $\frac{1}{3}\pi$　　② $\frac{1}{5}\pi$

③ $\frac{2}{15}\pi$　　④ $\frac{1}{15}\pi$

**정답 : ③**

$\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OC}$ 이므로 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$ 에서 $\overrightarrow{OX}$ 와 $\cos\theta$가 변수가 된다.
즉, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OC}$이므로 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OX}$의 최솟값을 구하면 된다. 두 벡터 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OX}$가 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하면 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OX} = |\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{OX}|\cos\theta$ 이고 두 벡터의 크기는 고정되어 있고 $\cos\theta$가 최소가 되는 경우는 $\theta = \pi$일 때이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$와 $\overrightarrow{OX}$가 방향이 반대이고 평행할 때이다.




즉, 위의 그림과 같이 점 가 점 가 될 때는 최소가 된다.

이때, $\triangle ABC$는 정삼각형이고 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$ 이므로

$\angle CAD = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15} = \frac{4}{15}\pi$이고

$\overrightarrow{AD}$ // $\overrightarrow{OP}$ 이므로 $\angle POA = \angle CAD$ ( $\because$ 엇각 )

$\angle POA$는 $\overset{\frown}{AP}$ 의 중심각이고 $\angle ACP$ 는 이 호의 원주각이므로

$\angle ACP = \frac{1}{2}\angle POA = \frac{1}{2} \times \frac{4}{15}\pi = \frac{2}{15}\pi$