[대학기초수학]

9차시 | 일차함수와 이차함수

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 일차함수의 정의와 그래프를 이해한다.
- 이차함수의 정의와 그래프를 이해한다.
- 절댓값이 포함된 함수의 그래프와 내림 정의된 함수의 그래프를 이해한다.

목차

1. 일차함수의 그래프
   1) 직선의 방정식
   2) 일차함수의 합성함수와 역함수

2. 이차함수의 그래프
   1) 포물선의 방정식
   2) 이차함수 그래프의 평행이동

3. 여러 가지 함수의 그래프
   1) 절댓값이 포함된 함수의 그래프
   2) 내림으로 정의된 함수의 그래프

1 일차함수의 그래프

1.1 직선의 방정식

◆ 직선의 방정식(linear equation)이란?

- 변수가 한 개인 일차방정식의 해
  - $2x - 3 = 1 \Rightarrow x = 2,\ 3x + 1 = 4 \Rightarrow x = 1$
- 변수가 여러 개인 일차방정식의 해
  - $2x + 3y = 6?$
  - $3x + 2y = 6?$
  - 해가 순서쌍으로 존재
- $ax + by + c = 0$이 직선의 방정식인 이유?
  - 해의 순서쌍을 좌표평면에 표시하면 직선이 되기 때문

1.1 직선의 방정식

◆ 일차함수와 직선의 방정식

- 일차함수: 다항함수 중에서 최고 차수가 1차인 것
  - $f(x) = 2x - 1$, $f(x) = x + 3$, $f(x) = 3x - 6$
- 일차함수의 일반적인 형태 $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$
  - 일차함수의 그래프: 기울기가 a이고 y절편이 b인 직선
    - $a > 0$: x값이 증가할수록 y값도 증가하는 (우상향하는) 직선
    - $a < 0$: x값이 증가할수록 y값은 감소하는 (우하향하는) 직선
    - $b > 0$: 원점보다 위(> 0)에서 y축($x = 0$)과 만나는 직선
    - $b = 0$: 원점을 지나는 직선
    - $b < 0$: 원점보다 아래(< 0)에서 y축($x = 0$)과 만나는 직선

1.1 직선의 방정식

- 일차함수의 그래프 예제
  - $f(x) = 2mx - m + 6$에 대하여
    - $-1 < x < 1$에서 함숫값이 항상 양(+)이 되게 하는 m의 범위
    - $-1 \le x \le 1$에서 함숫값이 양숫값과 음숫값을 모두 갖는 m의 범위

1.2 일차함수의 합성함수와 역함수

◆ 일차함수의 합성함수

- 일차항의 계수가 1인 $f(x) = x + b$의 합성함수
  - $f^2(x) = (f \circ f)(x) =$
  - $f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) =$
  - $\vdots$
  - $f^n(x) = (f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) =$
- $f(x) = ax + b$의 합성함수 $(a \neq 0)$
  - $f^2(x) = (f \circ f)(x) =$
  - $f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) =$
  - $f^n(x) = (f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) =$

1.2 일차함수의 합성함수와 역함수

◆ 일차함수의 역함수

- 일차항의 계수가 1인 $f(x) = x + b$의 역함수
  - $f(x) = x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) =$
  - $f(x) = x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) =$
  - $\vdots$
  - $f(x) = x + b \Rightarrow f^{-1}(x) =$
- $f(x) = ax + b$의 역함수 $(a \neq 0)$
  - $f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) =$
  - $f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) =$
  - $f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) =$

1.2 일차함수의 합성함수와 역함수

◆ 일차함수의 합성함수 예제

- $f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \le x \le 2) \\ 8 - 2x & (2 \le x \le 4) \end{cases}$에 대하여
  $h(x) = (f \circ f)(x)$의 그래프

2 이차함수의 그래프

2.1 포물선의 방정식

◆ 포물선(parabola)의 정의

- 고정된 점(fixed point, 초점)과 고정된 직선(준선)으로부터 거리가 같은 점의 집합
- 준선이 x축에 평행(가로)인 경우
  - 포물선의 모양은 위로 볼록 또는 아래로 볼록인 형태
  - 포물선의 방정식 $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$
- 준선이 y축에 평행(세로)인 경우
  - 포물선의 모양은 오른쪽 볼록 또는 왼쪽 볼록인 형태
  - 포물선의 방정식 $x = py^2 + qy + r \ (p \neq 0)$

2.1 포물선의 방정식

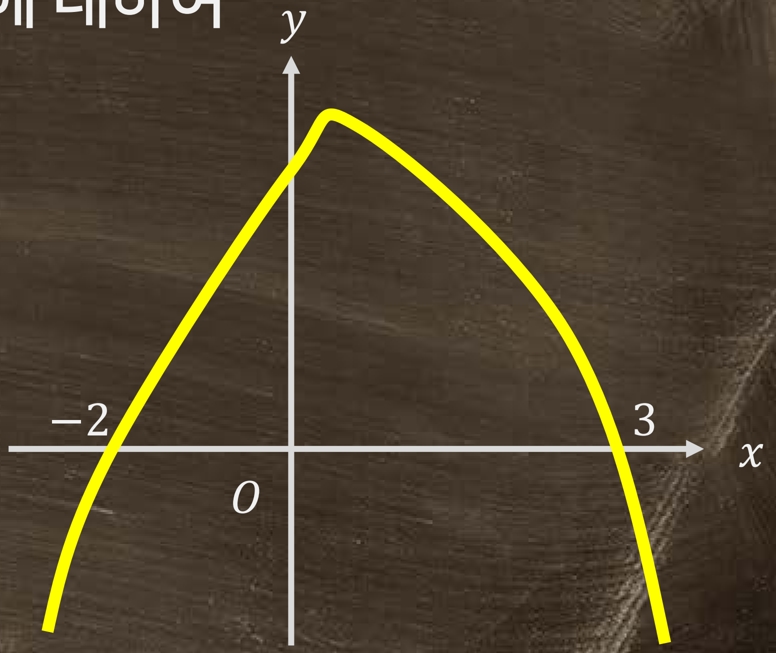
◆ 이차함수와 포물선의 방정식

- 이차함수: 다항함수 중에서 최고 차수가 2차인 것
  - $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $f(x) = -x^2 + 5x - 4$
  - 이차함수의 일반적인 형태 $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$
  - 이차함수의 그래프: 아래로 볼록 또는 위로 볼록인 포물선
    - $a > 0$: 아래로 볼록인 포물선, $a < 0$: 위로 볼록인 포물선
    - $ab > 0$: 대칭축이 y축$(x = 0)$의 왼쪽에 있는 포물선
    - $ab < 0$: 대칭축이 y축$(x = 0)$의 오른쪽에 있는 포물선
    - $c > 0$: 원점보다 위(> 0)에서 y축$(x = 0)$과 만나는 포물선
    - $c = 0$: 원점을 지나는 포물선
    - $c < 0$: 원점보다 아래(< 0)에서 y축$(x = 0)$과 만나는 포물선

2.1 포물선의 방정식

◆ 이차함수와 포물선의 방정식 예제

- $f(x) = ax^2 + bx + c$의 그래프에 대하여
  - a
  - b
  - c
  - $4a - 2b + c$
  - $9a + 6b + c$
  - $a + 3b + 9c$



2.2 이차함수 그래프의 평행이동

◆ 포물선의 꼭짓점과 완전제곱식

▫ 포물선의 꼭짓점

- 포물선 위에 있는 점 중에서 준선과의 거리가 가장 가까운 점
- 아래로 볼록한 포물선에서 가장 아래쪽에 위치한 점
- 위로 볼록한 포물선에서 가장 위에 위치한 점

▫ 완전제곱식

- $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$
- 꼭짓점의 좌표 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

2.2 이차함수 그래프의 평행이동

◆ 이차함수 그래프의 평행이동

- 포물선의 꼭짓점을 평행이동하여 식을 변환
  - $f(x) = a(x-1)^2 + 4 \Rightarrow$ 꼭짓점의 좌표 $(1, 4)$
  - x축으로 m, y축으로 n만큼 평행이동: 꼭짓점의 좌표 $(1+m, 4+n)$
  - $g(x) = a\left(x-(1+m)\right)^2 + (4+n)$
- 이차함수 그래프 평행이동의 결과
  - a값은 변하지 않으므로, 포물선의 구부러진 정도는 변하지 않음
  - b, c값은 변화할 가능성이 있으므로,
    포물선의 대칭축과 y절편은 변화할 가능성이 존재

2.2 이차함수 그래프의 평행이동

- 이차함수 그래프의 평행이동 예제
  - $p \geq 0$가 달라짐에 따라, 다음 포물선의 꼭짓점 자취는?

$$y = x^2 - 4px + 8p^2 - 6p$$

3 여러 가지 함수의 그래프

3.1 절댓값이 포함된 함수의 그래프

절댓값의 정의

- 수직선 위 원점과 실수 x 사이의 거리 $|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$
  - $|-2| = 2,\ |-3| = 3,\ |2| = 2,\ |3| = 3$

- 절댓값으로 정의된 함수 $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ -f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$
  - $|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1) \\ -(x-1) = -x+1 & (x-1 < 0 \Rightarrow x < 1) \end{cases}$

3.1 절댓값이 포함된 함수의 그래프

◆ 절댓값으로 정의된 함수의 그래프

- $y = |f(x)|$
  - $y = f(x)$의 그래프 중 $f(x) \geq 0$인 부분: 그대로 유지
  - $y = f(x)$의 그래프 중 $f(x) < 0$인 부분: x축 대칭하여 양수로 변환
- $y = f(|x|)$
  - $y = f(x)$의 그래프 중 $x \geq 0$인 부분: 그대로 유지
  - $y = f(x)$의 그래프 중 $x < 0$인 부분
    - $x < 0$인 부분은 제외하고, $x \geq 0$인 부분을 y축($x = 0$) 대칭

3.1 절댓값이 포함된 함수의 그래프

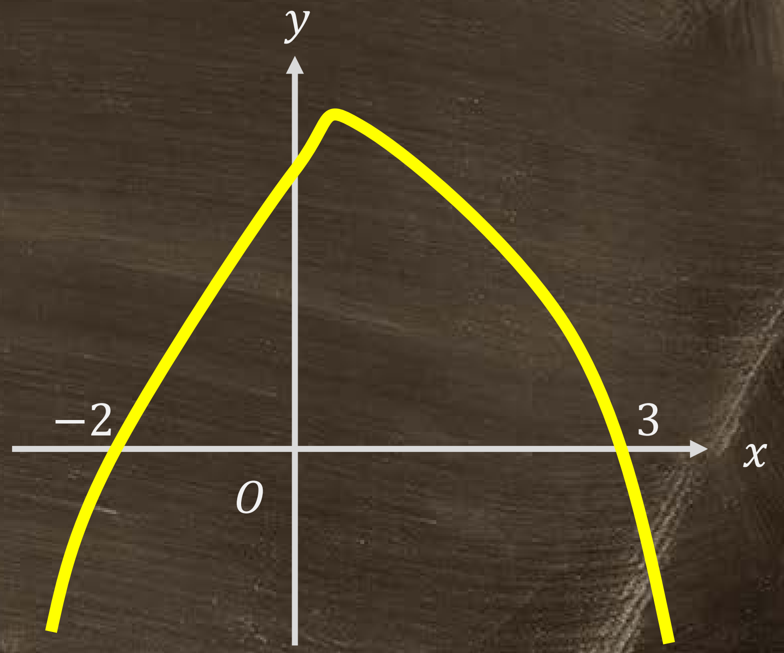
◆ 절댓값으로 정의된 함수의 그래프 (계속)

- $|y| = f(x)$
  - $y = f(x)$의 그래프 중 $y \geq 0$인 부분: 그대로 유지
  - $y = f(x)$의 그래프 중 $y < 0$인 부분
    - $y < 0$인 부분은 제외하고, $y \geq 0$인 부분을 x축($y = 0$) 대칭
- $|y| = f(|x|)$
  - $y = f(x)$의 그래프 중 $x \geq 0, y \geq 0$인 부분: 그대로 유지
  - $y = f(x)$의 그래프 중 $x \geq 0, y \geq 0$이 아닌 부분
    - $x \geq 0, y \geq 0$이 아닌 부분은 제외하고,
      $x \geq 0, y \geq 0$인 부분을 x축($y = 0$), y축($x = 0$), 원점(0,0) 대칭

3.1 절댓값이 포함된 함수의 그래프

◆ 절댓값이 포함된 함수의 그래프 예제 1

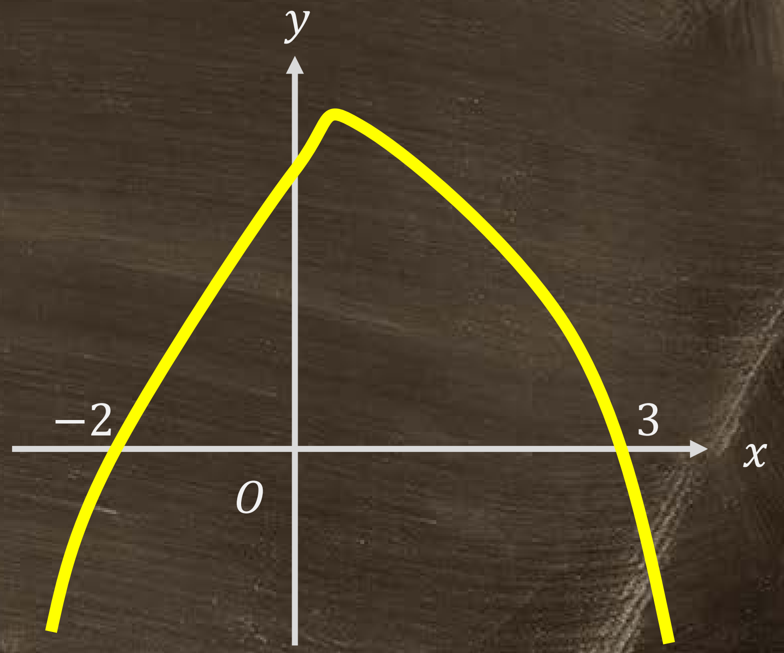
- $y = f(x)$ 그래프에 대하여
  - $y = |f(x)|$
  - $y = f(|x|)$



3.1 절댓값이 포함된 함수의 그래프

◆ 절댓값이 포함된 함수의 그래프 예제 2

- $y = f(x)$ 그래프에 대하여
  - $|y| = f(x)$
  - $|y| = f(|x|)$



3.2 내림으로 정의된 함수의 그래프

- 수학적 내림(flooring): $\lfloor x \rfloor$
  - x보다 작거나 같은 수 중에서 가장 큰 정수를 출력
  - $\lfloor 1.8 \rfloor = 1$, $\lfloor 3.2 \rfloor = 3$, $\lfloor -0.2 \rfloor = -1$, $\lfloor -3.8 \rfloor = -4$

- 내림으로 정의된 함수의 그래프
  - 내림된 값을 기준으로 함수의 정의역 범위를 역산!

3.2 내림으로 정의된 함수의 그래프

- 내림으로 정의된 함수의 그래프 예제 1
  - $f(x) = \lfloor x \rfloor \ (-2 \le x \le 3)$

3.2 내림으로 정의된 함수의 그래프

- 내림으로 정의된 함수의 그래프 예제 2
  - $f(x) = 2x - [2x]\ \ (-2 \leq x \leq 3)$

정리하기

- 직선의 방정식과 일차함수의 관계
- 포물선의 방정식과 이차함수의 관계
- 절댓값이 포함된 함수의 그래프
- 내림으로 정의된 함수의 그래프

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.