[대학기초수학]

3차시 | 인수분해와 나머지정리

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 다항식의 사칙연산을 이해한다.
- 다항식의 인수분해 방법을 이해한다.
- 항등식의 개념과 미정계수법을 이해한다.
- 나머지정리와 인수정리를 이해한다.

목차

1 다항식의 사칙연산

1. 다항식의 정리 (1/3)

◆ 다항식(polynomial)의 정의

- 숫자와 문자, 문자와 문자가 곱셈(×)으로만 연결된 식(단항식)들이 서로 덧셈(+)으로 연결된 식

- $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

- $\frac{3x^2}{y}$, $3x - 2\sqrt{x}$, $5x^2 + \sqrt{3}x$, $\frac{3}{2}x^3 + 4x^2$

1. 다항식의 정리 (2/3)

◆ 다항식의 차수(degree 또는 order)

- 어떤 단항식에 변수가 n개 곱해진 경우, n차 단항식
- $3a^2x^3y^4$: a에 대한 이차, x에 대한 삼차, y에 대한 사차
  x, y에 대한 칠차, a, x, y에 대한 구차 단항식

- 다항식의 차수는 각 항의 차수 중 가장 높은 항의 차수
- $x^5 + 6x^2y^3 + 3xy^4$: x에 대한 오차, y에 대한 사차 다항식
  x, y에 대한 오차식 (동차식)

1. 다항식의 정리 (3/3)

◆ 다항식을 정리하는 방법

- 내림차순(descending order)
  - 한 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 차례대로 나열
- 오름차순(ascending order)
  - 한 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 차례대로 나열

- $P = 3x^2 + 2xy + 4y^2 - 3x + 5y + 4$
  - x에 대한 내림차순
  - y에 대한 오름차순

2. 다항식의 덧셈·뺄셈 (1/3)

◆다항식 연산의 기본법칙

- 교환법칙: $A + B = B + A$ $\qquad A \times B = B \times A$
- 결합법칙: $(A + B) + C = A + (B + C)$

  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- 분배법칙: $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

  $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$

2. 다항식의 덧셈·뺄셈 (2/3)

다항식 연산의 기본법칙 예제

- $3a + b + 4(a + b) = 7a + 5b$ 정리할 때 사용된 기본법칙?

2. 다항식의 덧셈·뺄셈 (3/3)

◆ 다항식의 덧셈·뺄셈 연산

- 다항식을 한 문자에 관하여 내림차순/오름차순으로 정리
- 동류항(문자의 차수가 같은 항)의 덧셈·뺄셈 후 간략히 정리

- $P = 3x^2y + 2y^2 + x^3,\ Q = x^3 - 4y^2 + xy^2$
  - $P + Q =$
  - $Q - P =$

3. 다항식의 곱셈·나눗셈 (1/6)

◆ 지수법칙

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ 1/a^{n-m} & (m < n) \end{cases}$
- $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

3. 다항식의 곱셈·나눗셈 (2/6)

지수법칙 예제

- $(-a)^3 \times (-a)^7 =$
- $\left(\left(a^l\right)^m\right)^n =$
- $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^2 \div \left(\frac{a^2}{b}\right)^4 =$

3. 다항식의 곱셈·나눗셈 (3/6)

◆다항식의 곱셈

- $m(a+b) = ma + mb$
- $2x(3x^3 + 5x + 1) = 6x^4 + 10x^2 + 2x$

- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
- $(x^2 - 2)(3x^2 - 4x + 5) = 3x^4 - 10x^3 - x^2 + 8x - 10$

3. 다항식의 곱셈·나눗셈 (4/6)

◆ 다항식의 나눗셈

- $(a+b) \div m = (a+b) \times \frac{1}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$
- $(4x^3 + 6x^2 - 8x) \div (2x) = 2x^2 + 3x - 4$

- 다항식 A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면

  $A = BQ + R$ (단, (R의 차수) < (B의 차수))

- 다항식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$를 $x^2 + 2x - 2$로 나누면?

  $x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = (x^2 + 2x - 2)x + (-x + 4)$

3. 다항식의 곱셈·나눗셈 (5/6)

다항식의 나눗셈 예제 1

- $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$를 $x^2 + 2x - 2$로 나누면?

3. 다항식의 곱셈·나눗셈 (6/6)

다항식의 나눗셈 예제 2

- $4x^3 + 7x^2 - 13x + 4$를 $x + 3$으로 나누면? (조립제법)

2 곱셈공식과 다항식의 인수분해

1. 곱셈공식 (1/5)

◆ 기본적인 곱셈공식

- 다항식의 곱셈 연산의 결과를 간략하게 정리한 것

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) =$
- $(x+a)(x+b) =$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- $(a \pm b)^3 = a^3 \mp 3a^2b \pm 3ab^2 \mp b^3$
- $(x+a)(x+b)(x+c) =$

1. 곱셈공식 (2/5)

◆ 기본적인 곱셈공식 (계속)

- 다항식의 곱셈 연산의 결과를 간략하게 정리한 것
- $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$
- $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
  $= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
- $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = a^4 - a^2b^2 + b^4$

1. 곱셈공식 (3/5)

◆ 곱셈공식의 변형

- 합·차 또는 곱으로 거듭제곱을 표현

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$$\Rightarrow\ a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (a-b)^2 + 2ab$$

- $(a \pm b)^3 = a^3 \mp 3a^2b \pm 3ab^2 \mp b^3$

$$\Rightarrow\ a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b),$$
$$\Rightarrow\ a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$$

1. 곱셈공식 (4/5)

곱셈공식의 변형 예제 1

- $x+y=-4,\ xy=3$일 때, $x^2+y^2=?,\ x^3+y^3=?$

- $x-y=5,\ xy=3$일 때, $x^2-xy+y^2=?$

1. 곱셈공식 (5/5)

- 곱셈공식의 변형 예제 2
  - $x+y+z=4$, $xy+yz+zx=7$, $xyz=3$ 일 때, $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = ?$

2. 인수분해 (1/4)

◆ 인수분해 기본공식

- 곱셈공식과는 반대로 다항식을 여러 다항식의 곱으로 분해

- $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2, \;\; a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $x^2 + (a+b)x + ab =$
- $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a+b+c)^2$
- $a^3 \mp 3a^2b \pm 3ab^2 \mp b^3 = (a \pm b)^3$

2. 인수분해 (2/4)

◆ 인수분해 기본공식 (계속)

- 곱셈공식과는 반대로 다항식을 여러 다항식의 곱으로 분해

- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
  $= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

- $a^4 - a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

2. 인수분해 (3/4)

인수분해 예제 1

- $3x^2 - x^3 + 3 - x =$
- $ab + cd - ac - bd =$
- $bc^3 + ab^2c - b^2c^2 - abc^2 =$

2. 인수분해 (4/4)

- 인수분해 예제 2
  - $x^4 - 4x^2 + 3 =$
  - $4x^4 - 13x^2 + 9 =$
  - $x^4 - 7x^2y^2 + 9y^4 =$

3 항등식의 정의와 성질

1. 항등식의 정의 (1/3)

◆ 방정식과 항등식

- 등식(equality)이란?
  - 등호(=)가 포함된 식으로 (좌변) = (우변)으로 표현
  - 등식은 방정식(equation)과 항등식(identity)으로 분류
- 방정식이란?
  - 변수의 값에 따라 참/거짓이 결정되는 등식
  - 등식 $2x = 4$는 $x = 2$일 때 참, $x \neq 2$일 때 거짓
- 항등식이란?
  - 변수의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
  - 등식 $x + 2x = 3x$는 x값에 관계없이 항상 성립

1. 항등식의 정의 (2/3)

- 방정식과 항등식의 구분
  - 등식 $ax + b = 0$은 방정식일까? 항등식일까?

1. 항등식의 정의 (3/3)

◆ 항등식이 되기 위한 조건

- 항등식에서는 (좌변)과 (우변)의 차수와 계수가 동일

- 등식 $ax + b = 0$이 항등식 $\Leftrightarrow a = 0, b = 0$
- 등식 $ax + b = a'x + b'$이 항등식 $\Leftrightarrow a = a', b = b'$
- 등식 $ax^2 + bx + c = 0$이 항등식 $\Leftrightarrow a = 0, b = 0, c = 0$
- 등식 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = 0$이 항등식
  $\Leftrightarrow a_n = 0, a_{n-1} = 0, \cdots a_1 = 0, a_0 = 0$

2. 항등식의 미정계수 결정 (1/3)

◆ 계수비교법

- 항등식의 (좌변)과 (우변)의 차수와 계수가 동일한 성질 활용
- 동류항끼리 분류한 후 계수가 동일함을 활용

◆ 수치대입법

- 항등식은 x값에 관계없이 항상 성립하기 때문에 x에 임의의 값을 대입하고 (좌변)=(우변)임을 활용

2. 항등식의 미정계수 결정 (2/3)

- 항등식의 미정계수 결정 예제
  - 등식 $a(x-2)+b(x-3)=3x-4$, x에 대한 항등식
  - 계수비교법

2. 항등식의 미정계수 결정 (3/3)

- 항등식의 미정계수 결정 예제
  - 등식 $a(x-2)+b(x-3)=3x-4$, x에 대한 항등식
  - 수치대입법

3. 다항식의 나눗셈과 항등식 (1/3)

◆ 다항식의 나눗셈

- 다항식 A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R이라 하면

$$A = BQ + R \text{ (단, (}R\text{의 차수) < (}B\text{의 차수))}$$

- 다항식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$를 $x^2 + 2x - 2$로 나누면?

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 4 = (x^2 + 2x - 2)x + (-x + 4)$$

- $A = BQ + R$은 x에 대한 항등식

3. 다항식의 나눗셈과 항등식 (2/3)

다항식의 나눗셈 예제 1

- 다항식 $\boldsymbol{x^3+px-8}$을 $\boldsymbol{x^2+2x+q}$로 나눌 때,
  - 나누어떨어지기 위한 상수 p, q의 값?
  - 나머지가 $2x+4$가 되기 위한 상수 p, q의 값?

3. 다항식의 나눗셈과 항등식 (3/3)

다항식의 나눗셈 예제 2

- 다항식 $x^{2019}+1$을 x^2-1로 나눈 나머지는?

- 다항식 $x^{150}+x^{100}+x^{50}+x^{25}+x^2$을 x^3-x로 나눈 나머지는?

4 나머지정리와 인수정리

1. 나머지정리 (1/4)

◆ 다항식의 나머지정리

- 다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$이다.
- 다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나눈 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

◆ '다항식의 나머지정리' 증명

-
-

1. 나머지정리 (2/4)

- 다항식의 나머지정리 예제 1
  - $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 4x + 4$를
    - $x - 1$로 나눈 나머지는?
    - $x + 1$로 나눈 나머지는?
    - $2x - 1$로 나눈 나머지는?
    - $2x + 1$로 나눈 나머지는?

1. 나머지정리 (3/4)

- 다항식의 나머지정리 예제 2
  - $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지 3, $x-2$로 나눈 나머지 5일 때, $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눈 나머지는?

1. 나머지정리 (4/4)

- 다항식의 나머지정리 예제 3
  - $f(x)$를 $(x-1)^2$로 나눈 나머지가 $2x+1$,
    $x+2$로 나눈 나머지가 6일 때,
    $f(x)$를 $(x-1)^2(x+2)$로 나눈 나머지는?

2. 인수정리와 고차식의 인수분해 (1/2)

◆ 인수정리

- 다항식 $f(x)$에 대하여, 다음이 성립한다.
  - $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x)$는 $x - \alpha$로 나누어 떨어진다.
  - $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x)$는 $x - \alpha$를 인수(약수)로 갖는다.
  - $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(x) = (x - \alpha)Q(x)$

- $f(x) = x^3 - 8$에 대하여, $f(2) = 2^3 - 8 = 0$

- $f(\alpha) = 0$을 만족하는 α를 찾아 $Q(x)$의 차수를 낮춘다!

2. 인수정리와 고차식의 인수분해 (2/2)

- 인수정리를 활용할 인수분해 예제 1
  - $f(x) = x^3 - 7x + 6$을 인수분해 하면?

정리하기

- 다항식의 사칙연산과 동류항의 중요성
- 다항식의 전개식과 인수분해 사이의 관계
- 항등식의 결정, 계수비교법 / 수치대입법
- 나머지정리와 인수정리 사이의 관계

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.