[대학기초수학]

8차시 | 함수

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 함수의 정의와 특징을 이해한다.
- 함수의 그래프를 이해한다.
- 합성함수의 정의와 특징을 이해한다.
- 역함수의 정의와 특징을 이해한다.

목차

1. 함수의 정의와 특징
   1) 함수의 정의
   2) 일대일 함수와 일대일 대응

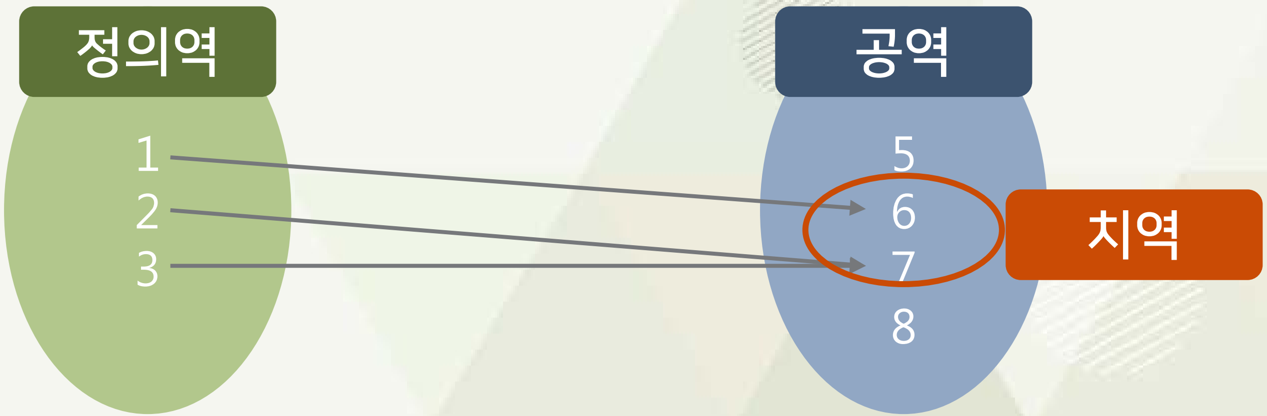
2. 함수의 그래프

3. 합성함수와 역함수
   1) 합성함수의 정의와 그래프
   2) 역함수의 정의와 그래프

1 함수의 정의와 특징

1.1 함수의 정의

- 함수(function)의 정의 $f: X \to Y$
  - 정의역(domain)의 각 원소와 공역(codomain)의 임의의 원소의 대응
    - 정의역 $X = \{1, 2, 3\}$, 공역 $Y = \{5, 6, 7, 8\}$,
    - 치역(range) $f(X) = \{6, 7\}$ (정의역 원소에 대응된 공역 원소의 집합)



1.1 함수의 정의

◆ 함수가 아닌 대응

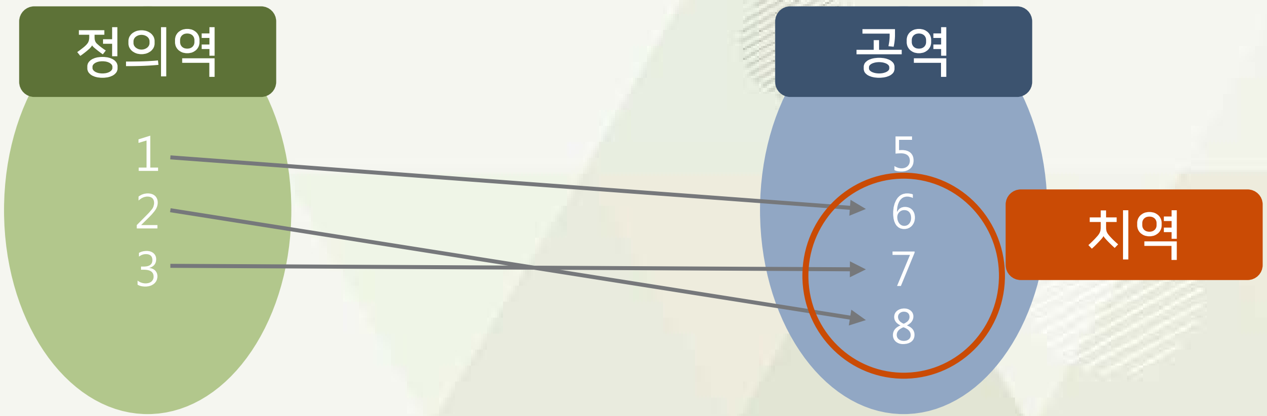
- 정의역 원소 중 대응되지 않은 원소가 존재
- 정의역의 원소 중 여러 번 대응된 원소가 존재

1.1 함수의 정의

- 함수의 정의 예제
  - 실수집합에서 실수집합으로 함수 f의 $f(1), f(2), f(3)$
    - $f(x) = 2x - 1$
    - $f: x \to x^3$
    - $x \xrightarrow{f} 2x^2$

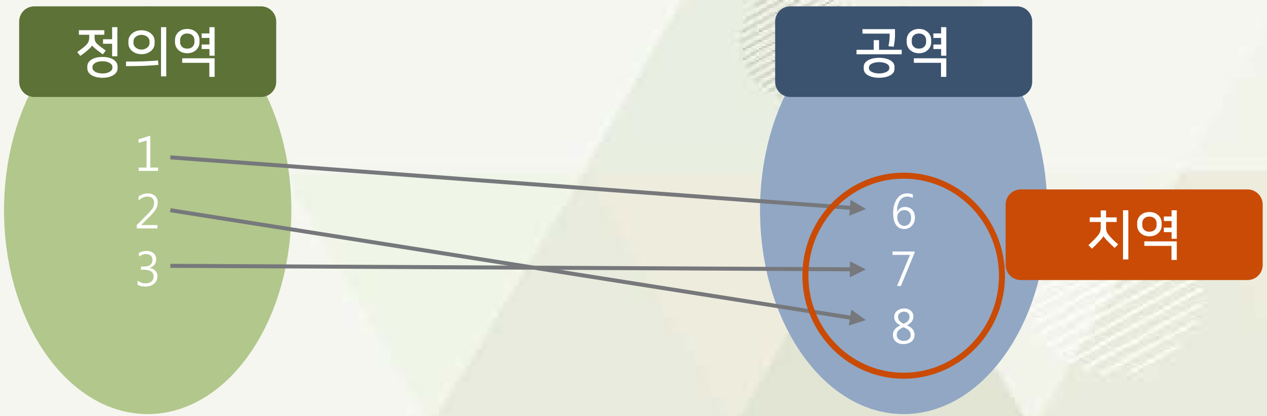
1.2 일대일 함수와 일대일 대응

- 일대일 함수(one-to-one function; injection)
  - 정의역의 각 원소가 서로 다른 공역의 원소에 대응되는 함수
  - $f(1) = 6, f(2) = 8, f(3) = 7$
  - 공역의 원소 중 대응되지 않는 원소가 존재 가능



1.2 일대일 함수와 일대일 대응

- 일대일 대응(one-to-one correspondence; bi-)
  - 정의역의 각 원소가 서로 다른 공역의 원소에 대응되고, 공역의 각 원소가 서로 다른 정의역의 원소에 대응되는 함수
  - (일대일 대응) ∧ (공역=치역) ⇒ (역함수가 존재)



1.2 일대일 함수와 일대일 대응

- 일대일 함수와 일대일 대응 예제
  - 정의역 X와 공역 Y에 대하여,
    $n(X) = m, n(Y) = n$ 일 때,
    - 함수의 개수
    - 일대일 함수의 개수
    - 일대일 대응의 개수

2 함수의 그래프

2.1 순서쌍과 곱집합

◆ 순서쌍(ordered pair)

- 두 집합의 원소들을 순서를 고려해 짝지은 것
- $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, 6, 7, 8\}$인 두 집합으로 만든 순서쌍
  - $(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8)$
    $(2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8)$
    $(3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8)$
- $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$인 두 집합으로 만든 순서쌍

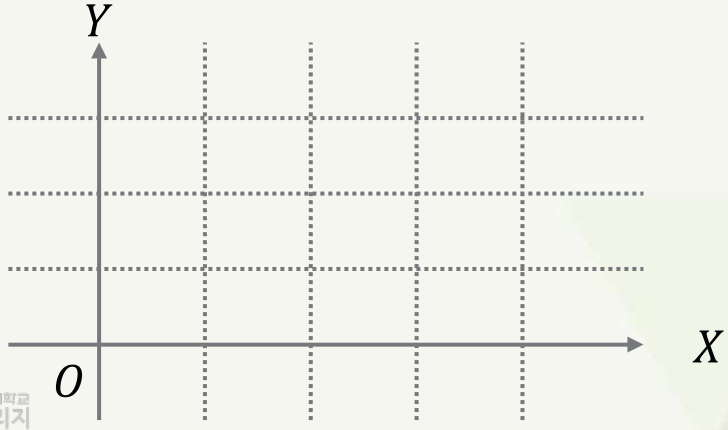
2.1 순서쌍과 곱집합

◆ 곱집합(product set)

- 두 집합의 원소로 만든 모든 순서쌍의 집합
- $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$
- $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$인 두 집합으로 만든 순서쌍
  - $(1, 5), (1, 6), (1, 7),$
    $(2, 5), (2, 6), (2, 7),$
    $(3, 5), (3, 6), (3, 7),$
    $(4, 5), (4, 6), (4, 7)$

2.2 함수의 그래프

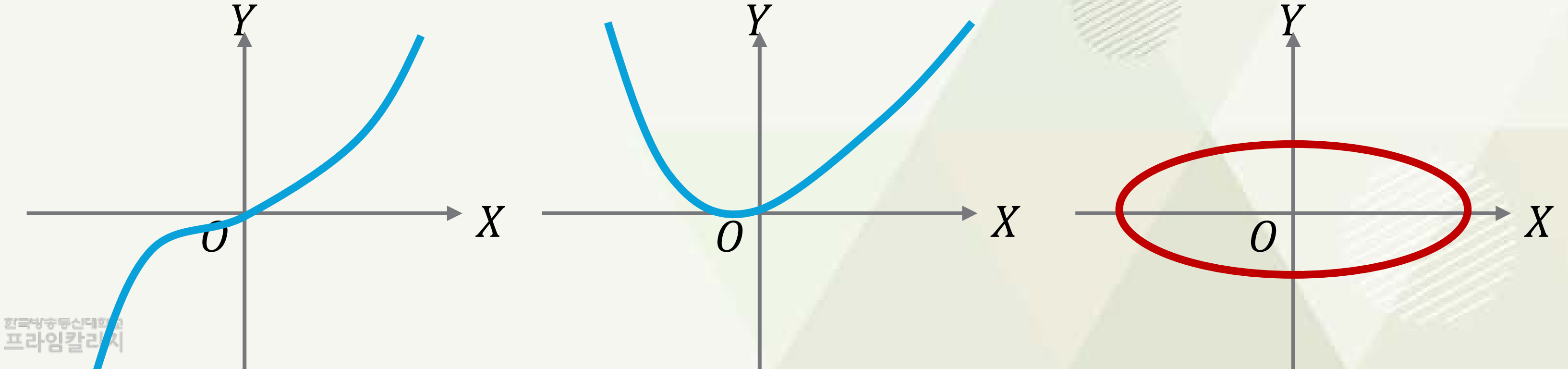
- 정의역 원소와 치역 원소가 대응된 순서쌍의 집합
  - $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$
  - 곱집합과 함수의 그래프 비교
    - $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6, 7\}$인 두 집합으로 만든 모든 순서쌍의 집합
    - $f(1) = 7$, $f(2) = 7$, $f(3) = 5$, $f(4) = 6$



2.2 함수의 그래프

◆ 함수의 그래프인 것과 함수의 그래프가 아닌 것

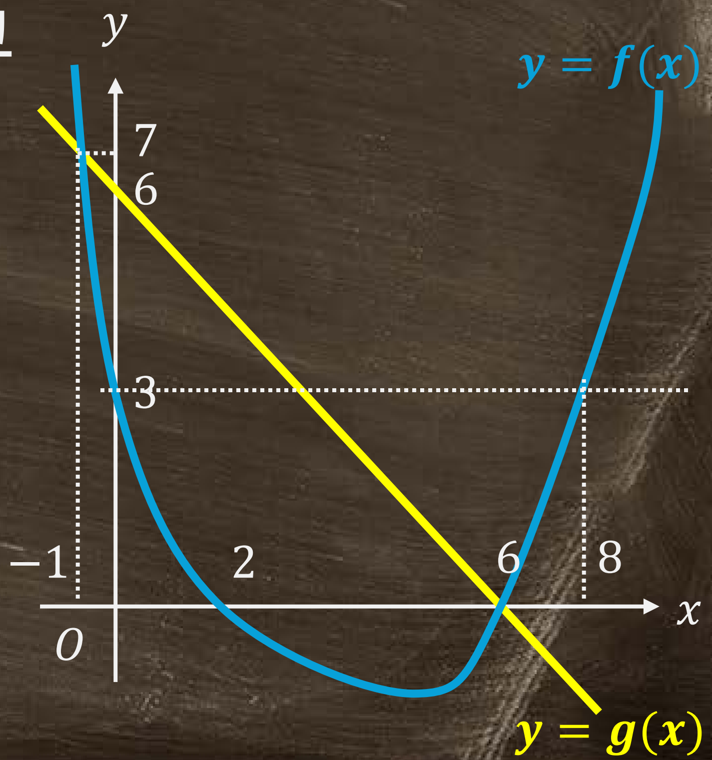
- 함수의 그래프
  - 임의의 정의역(가로축) 원소가 공역(세로축) 원소 하나에 대응
- 함수의 그래프가 아닌 것
  - 임의의 정의역(가로축) 원소가
공역(세로축) 원소에 대응되지 않거나 여러 가지 원소에 대응



2.2 함수의 그래프

함수의 그래프 예제 1

- 함수의 그래프를 활용한 함수의 비교

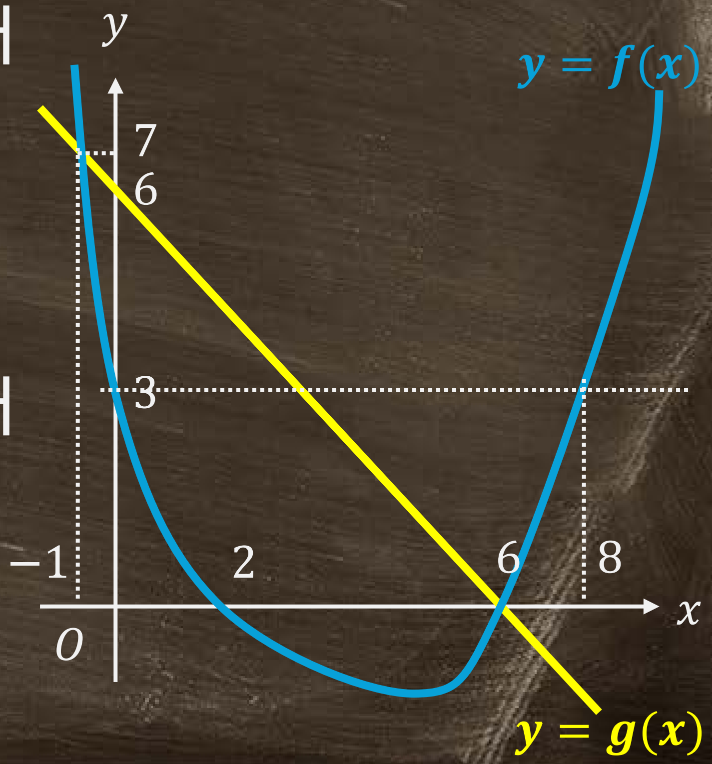


2.2 함수의 그래프

함수의 그래프 예제 2

- 함수의 그래프를 활용한 방정식의 해

- 함수의 그래프를 활용한 부등식의 해



3 합성함수와 역함수

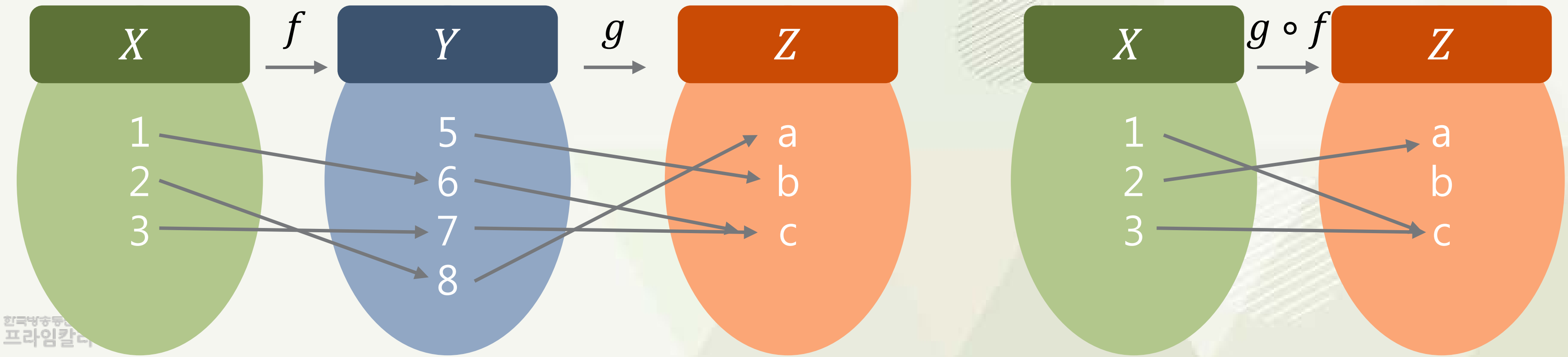
3. 함수의 상등

- '서로 같은' (상등) 함수
  - 함수가 정의된 정의역이 같다
  - 각 정의역 원소에 대응된 공역의 원소(치역)이 같다
  - 정의역과 치역이 대응되는 관계식은 달라도 무방
  - $X = \{0, 1\}$인 두 함수 f와 g에 대하여
    - $f(x) = x, g(x) = x^2$
    - $f(x) = 2x + 1, g(x) = 2x^2 + 1$
    - $f(x) = x, g(x) = |x|$
    - $f(x) = x^3 - x + 3, g(x) = 3$

3.1 합성함수의 정의와 그래프

◆ 합성함수 $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

- 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$에 대하여,
  X의 임의의 원소 x가 f에 의하여 $y \in Y$에 대응되고
  그 y가 g에 의하여 $z \in Z$에 대응되는 관계를 따라,
  X(f의 정의역)를 정의역, Z(g의 공역)를 공역으로 하는 함수



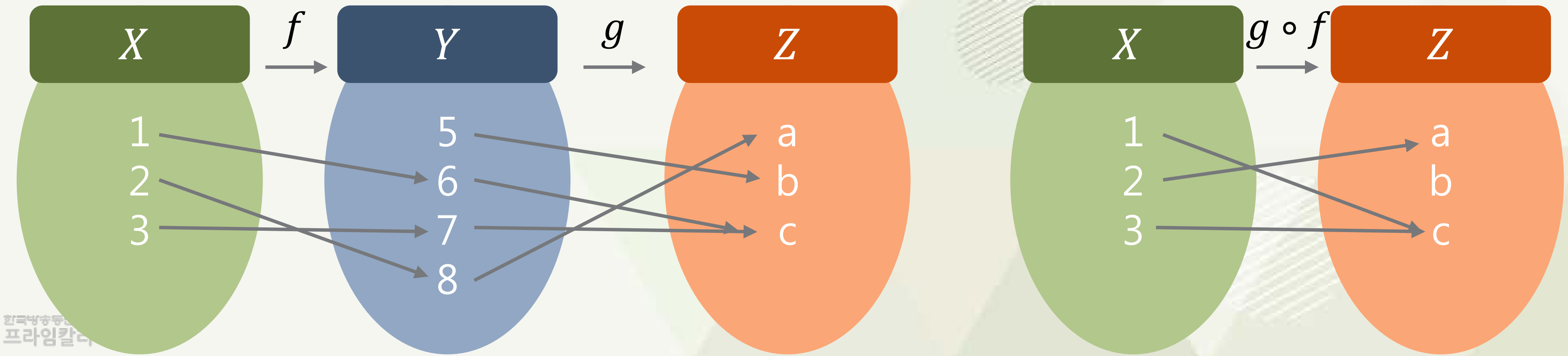
3.1 합성함수의 정의와 그래프

- 합성함수의 정의 예제
  - $f(x) = x - 1, g(x) = x^2$에 대하여
    - $g\big(f(x)\big)$
    - $g\big(f(2)\big)$
    - $g\big(f(4)\big)$
    - $f\big(g(x)\big)$
    - $f\big(g(2)\big)$
    - $f\big(g(4)\big)$

3.1 합성함수의 정의와 그래프

◆ 합성함수의 그래프

- $y = f(x)$와 $z = g(y)$로 정의된 두 함수
- 합성함수 $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$의 그래프
  - 가로축: (합성함수 $g \circ f$의 정의역) = (함수 f의 정의역)
  - 세로축: (합성함수 $g \circ f$의 치역) = (함수 g의 치역 또는 그 일부)



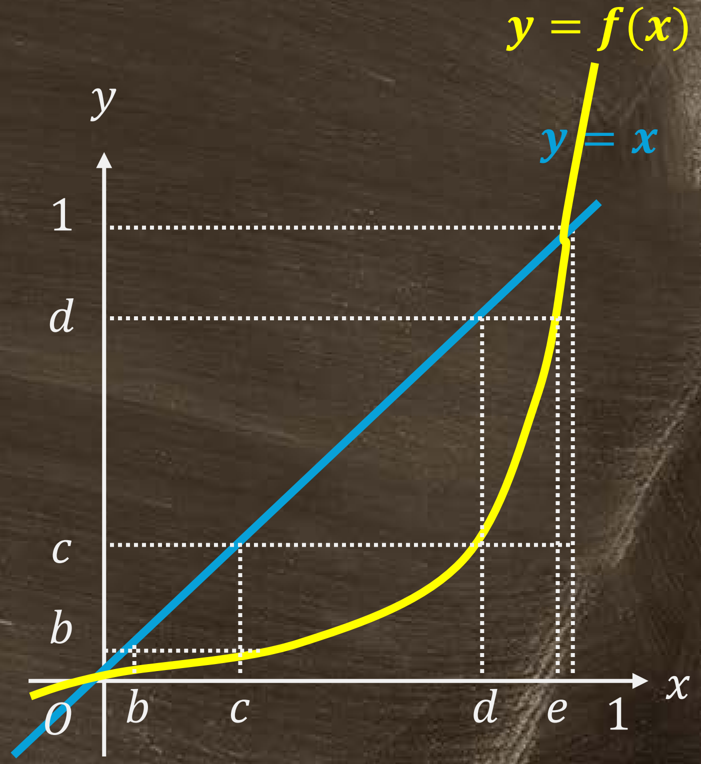
3.1 합성함수의 정의와 그래프

◆ 합성함수의 그래프 예제

- $(f \circ f \circ f)(e) =$

- $(f \circ f)(d) =$

- $(f \circ f \circ f)(1) =$



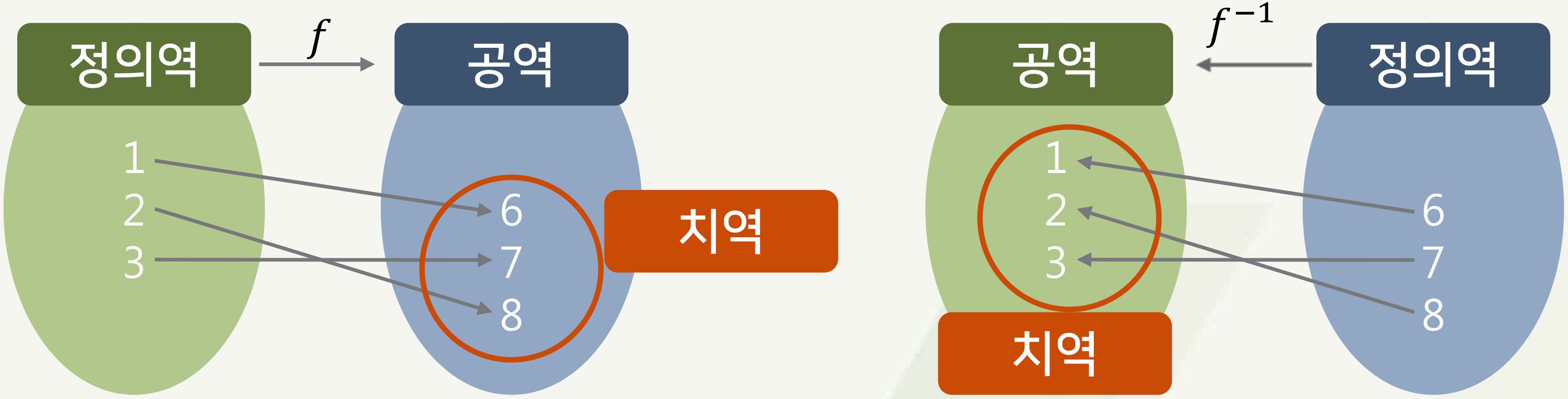
3.2 역함수의 정의와 그래프

- 함수 $f: X \to Y$의 역함수(inverse function)의 정의
  - 함수의 합성의 항등원 $I(x) = x$
    - 항등함수 $I(x) = x$는 어떤 함수와 합성하더라도 그 함수를 출력
    - $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$
  - 함수 $f: X \to Y$의 역함수 $f^{-1}: Y \to X$
    - 조건 1) 함수 f가 일대일대응(bijection)
    - 조건 2) 함수 f와 합성하였을 때, 항등함수를 출력하는 함수
    - $(f^{-1} \circ f)(x) = I_x = x$, $(f \circ f^{-1})(y) = I_y = y$

3.2 역함수의 정의와 그래프

◆ 역함수의 계산

- 일대일대응인 함수의 정의역과 치역의 대응 관계를 전환



◆ 역함수의 그래프

- $y = f(x)$의 그래프를 $y = x$에 대칭

3.2 역함수의 정의와 그래프

- 역함수의 계산 예제 1
  - 함수 $f(x) = 2x - 1$의 역함수

  - 함수 $f(x) = x - 1$의 역함수

3.2 역함수의 정의와 그래프

- 역함수의 계산 예제 2
  - 함수 $f(x) = 2x - 1$와 그 역함수의 그래프
  - 함수 $f(x) = x - 1$와 그 역함수의 그래프

정리하기

- 정의역 각 원소가 공역 임의의 원소에 대응되는 것이 함수의 정의
- 일대일 함수와 일대일 대응
- 합성함수와 역함수의 정의

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.