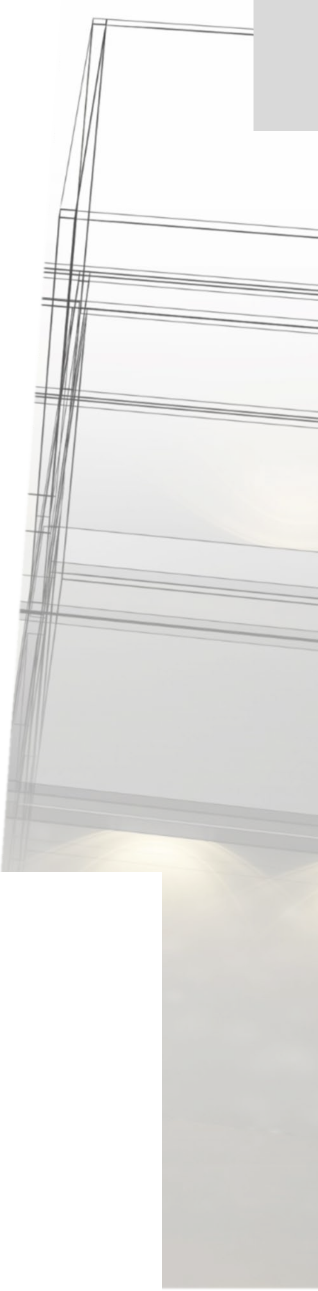
02 강

확률의 정의와 성질

통계·데이터과학과
이긍희 교수

학습목표

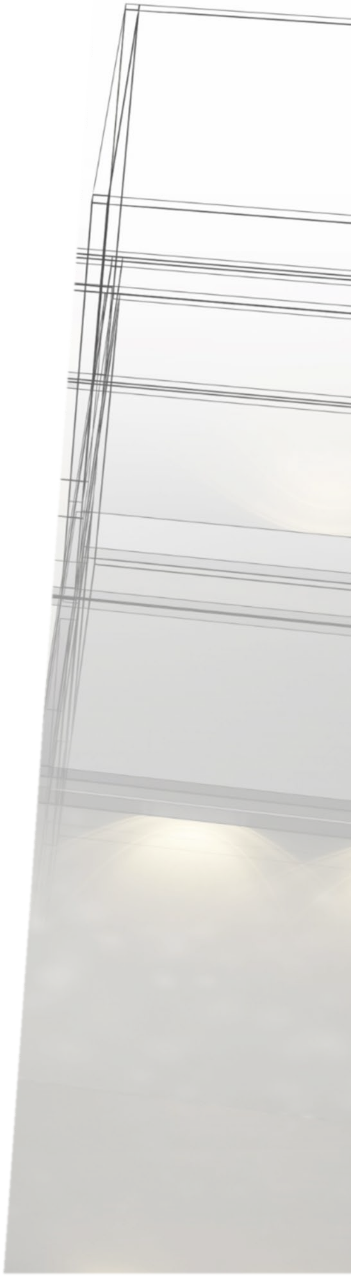
1. 표본공간과 사건을 이해할 수 있다.
2. 고전적 확률을 이해할 수 있다.
3. 기하학적 확률을 이해할 수 있다.
4. 공리적 확률을 이해할 수 있다.
5. 확률을 연산할 수 있다.



01

2강 확률의 정의와 성질

표본공간과 사건



집합

- 집합(set) : 서로 명확하게 구별되어 있는 원소(element)들을 정의하여 전체로 묶은 것

부분집합

◆ B는 A의 부분집합 : $A \supset B$ 집합

: 집합 B에 속한 모든 원소를 집합 A에 포함

집합연산의 예

예

$A \cup B$, $A \cap B$, $A-B$, B^C 을 구하시오.

A={1, 2, 3, 4} B={3, 4, 5}

U(전체집합)={1, 2, 3, 4, 5, 6}

표본공간과 사건

- 표본공간(Sample space)
  : 확률적 실험의 모 든 가능한 결과 집합

- 사건(Event) : 표본공간의 부분집합

표본공간과 사건

예

동전을 던져서 앞면(H)과 뒷면(T)이 나온다면
표본공간과 모든 사건을 나열하여라.

표본공간과 사건

예

엔진수명의 표본공간과 10년보다 긴 사건은?

표본공간과 사건

예

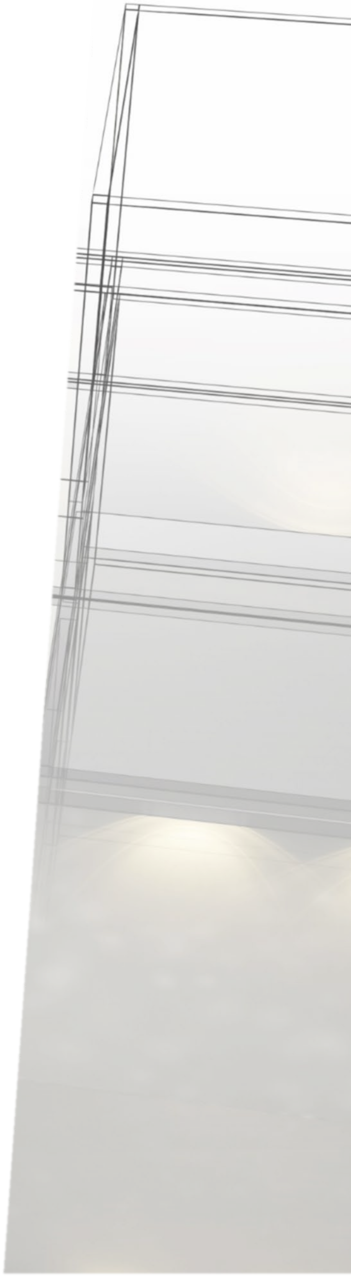
주사위 던지기. A : 짝수 사건, B : 3의 배수 사건.

$A^c, A \cup B, A \cap B, A - B$?

02

2강 확률의 정의와 성질

고전적 확률



고전적 확률

◆ 표본공간 : $S = \{ e_1, e_2, \cdots, e_i, \cdots, e_n \}$

◆ 사　　건 : $A = \{ e_1, e_2, \cdots, e_k \}$

고전적 확률

- 고전적 확률 :

$$P(A) = \frac{\text{사건 } A \text{ 원소의 수}}{\text{표본공간 } S \text{ 원소의 수}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

고전적 확률의 예

예

동전을 던져서 앞면이 나올 확률은?

고전적 확률의 예

예

주사위를 던져서 3의 배수가 나타날 확률은?

경우의 수

- 고전적 확률 계산 : 사건의 원소 개수를 세는 것이 중요
  → 경우의 수 : 사건에서 가능한 모든 결과의 수

경우의 수

- 확률적 실험 A_i : 경우의 수 n_i , $1 \leq i \leq r$
  $\rightarrow r$ 실험의 경우의 수 : $n_1 \times n_2 \cdots \times n_r$

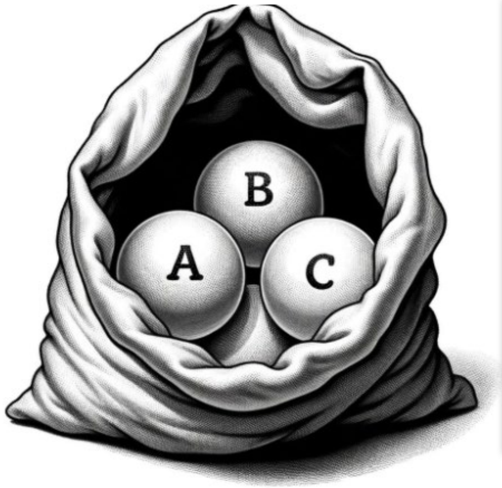
경우의 수

- 주머니(표본공간)에서 공(원소) 뽑는 것을 가정
- 복원 여부, 순서 고려 여부로 경우의 수 구분

복원 추출 / 순서 고려

◆ n 개중 r개를 복원 추출 : $_{n}\Pi_{r} = n^{r}$

❖ 주머니 (a, b, c)에서 2개를 복원 추출



$$\{a,\ a\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},$$
$$\{b,\ a\},\ \{b,\ b\},\ \{b,\ c\},$$
$$\{c,\ a\},\ \{c,\ b\},\ \{c,\ c\}$$

비복원 추출 / 순서 고려

◆ n개중 r개 비복원 추출(순서 고려) : $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

(예) 주머니(a, b, c)에서 2개를 비복원 추출(순서 고려)

$\{a, a\}, \{a, b\}, \{a, c\},$
$\{b, a\}, \{b, b\}, \{b, c\},$
$\{c, a\}, \{c, b\}, \{c, c\}$

비복원 추출 / 순서 비고려

- n개중 r개 비복원 추출(순서 고려하지 않음) : ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

❖ 주머니 (a, b, c)에서 2개 비복원 추출/순서 비고려

$$\{a,\ a\},\ \{a,\ b\},\ \{a,\ c\},$$
$$\{b,\ a\},\ \{b,\ b\},\ \{b,\ c\},$$
$$\{c,\ a\},\ \{c,\ b\},\ \{c,\ c\}$$

고전적 확률의 계산의 예

예

동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나오는 확률은?

고전적 확률의 계산의 예

예

로또 복권에서 5등에 당첨될 확률은?

03

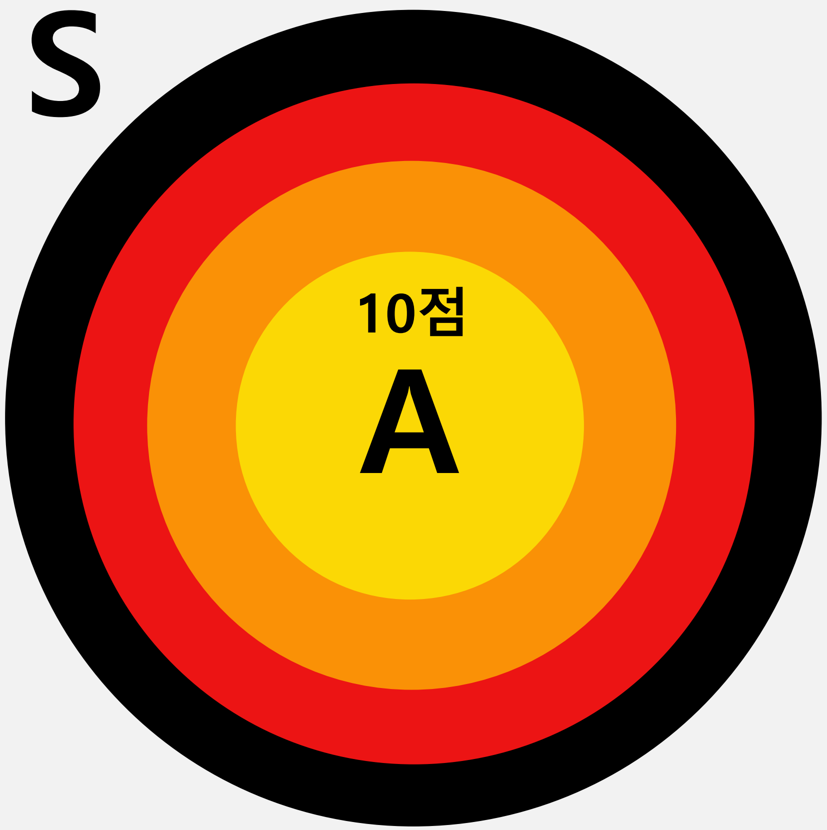
2강 확률의 정의와 성질

기하학적 확률

고전적 확률

- 고전적 정의 : 셀수 있는 유한 표본공간에서 정의
- 연속 표본공간에서의 확률은?

기하학적 확률의 개념



기하학적 확률의 정의

◆ 기하학적 확률 :

$$P(A) = \frac{\text{사건 } A \text{ 면적(또는 길이)}}{\text{표본공간 } S \text{ 면적(또는 길이)}}$$

기하학적 확률의 예

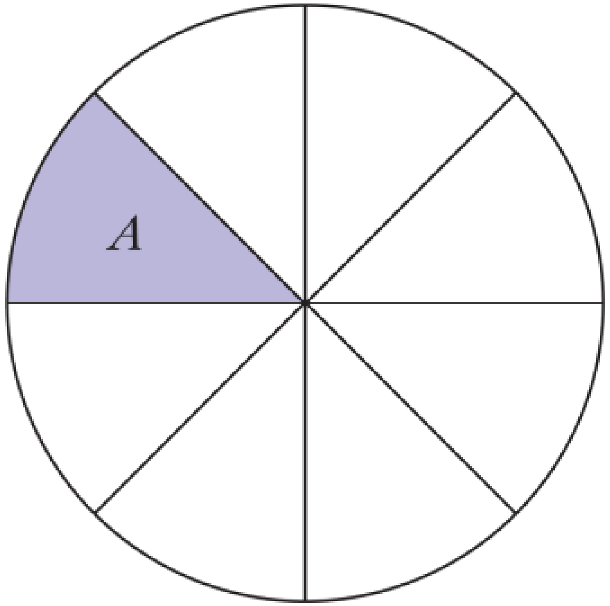
예

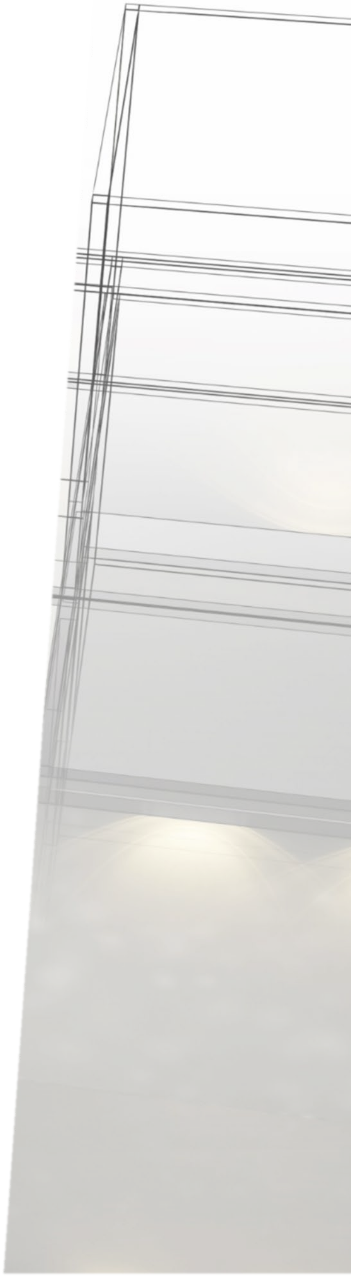
지하철은 120초 간격 배차. 어떤 사람이 지하철역에서 20초 이내 지하철을 탈 확률은? 정차시간은 무시.

기하학적 확률의 예

예

8개의 같은 크기로 나눠진 원판을 돌려서 한 지점을 선택하려고 한다. 이때의 A 지점이 선택될 확률은?





04

2강 확률의 정의와 성질

공리적 확률

기존 확률 정의의 한계

- 고전적 정의의 한계 : 표본공간 모든 원소가 발생할 가능성이 같다고 가정 → 성립되지 않는 경우 이용 불가

- 빈도론적 정의의 한계 : 상대도수의 극한이 존재하는 지 밝히거나 가정하는데 어려움

공리적 확률 : 콜모고로프

- 다음의 공리를 만족하는 측도 P를 확률로 정의

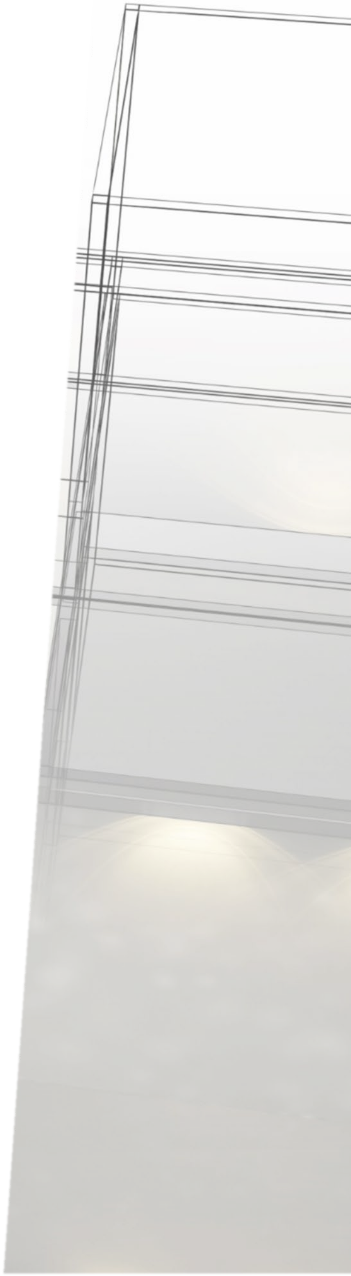
① $0 \leq P(A) \leq 1$

② $P(S) = 1$

③ $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, A_i 는 배반 사건

05

확률의 계산



여사건의 확률

- $P(A^c) = 1 - P(A)$

여사건 확률의 예

예

전체 표본공간의 부분집합인
공집합의 확률을 구하여라.

여사건 확률의 예

예

9개 제품(불량품 2개)에서 2개 제품을 구입

(1) 구입제품 중 불량품이 전혀 없을 확률은?

여사건 확률의 예

예

9개 제품(불량품 2개)에서 2개 제품을 구입

(2) 구입제품 중 불량품이 적어도 한 개 있을 확률은?

여사건 확률의 예

예

일년 365일. 임의로 만난 5명 중
적어도 두 사람의 생일이 같을 확률은?

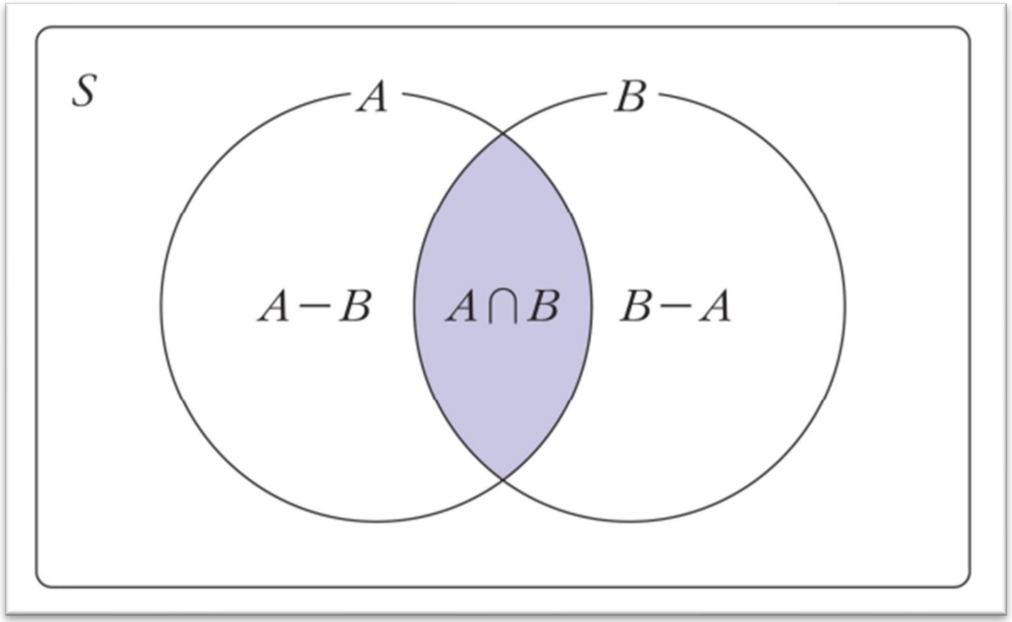
여사건 확률의 예

예

일년 365일. 임의로 만난 60명 중
적어도 두 사람의 생일이 같을 확률은?

확률의 덧셈정리

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



확률의 덧셈정리

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

확률의 덧셈정리

- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B)$
  $-P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

확률의 덧셈정리의 예

예

주사위를 던질 때 홀수의 눈이 나오거나
3의 배수가 나올 확률?

학습정리

정리하기

- 통계적 실험의 모든 가능한 결과의 집합을 표본공간이라 하고, 표본공간의 부분집합을 사건이라고 한다.
- 고전적 확률 : $P(A) = \dfrac{\text{사건 } A \text{ 원소의 수}}{\text{표본공간 } S \text{ 원소의 수}} = \dfrac{n(A)}{n(S)}$
- 기하학적 확률 : $P(A) = \dfrac{\text{사건 } A \text{ 면적(또는 길이)}}{\text{표본공간 } S \text{ 면적(또는 길이)}}$

학습정리

- 다음의 공리를 만족하는 측도 P를 확률로 정의
  ① $0 \le \mathrm{P(A)} \le 1$
  ② $\mathrm{P(S)} = 1$
  ③ $\mathrm{P}(\cup_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{A_i}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \mathrm{P(A_i)}$, $\mathrm{A_i}$ 는 배반 사건
- 여사건의 확률 : $P(A^c) = 1 - P(A)$
- 덧셈정리 : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

정리하기

수고했습니다.

다음시간에는

02 강 확률의 정의와 성질

03 강 조건부확률 (1)