4강. 수열과 수열의 합

※ 연습문제

문제 1. 세 수 $a, a+b, 2a-b$는 이 순서대로 등차수열을 이루고, 세 수 $1, a-1, 3b+1$은 이 순서대로 공비가 양수인 등비수열을 이룬다. $3a^2+2b^2$의 값은?

① 29　② 30
③ 31　④ 32

정답 : ①

세 수 $a, a+b, 2a-b$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2(a+b)=a+(2a-b)$　　$\therefore\ a=3b$ ⋯ ㉠

또, $1, a-1, 3b+1$이 순서대로 등비수열을 이루므로 $(a-1)^2=1\times(3b+1)$
㉠에서 구한 $3b=a$를 대입하면 $a^2-2a+1=a+1$, $a^2-3a=0$
$\therefore\ a=0$ 또는 $a=3$

$a=0$ 일 때, $b=0$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.
$a=3$ 일 때, $b=1$ 이고 이때 주어진 조건을 만족한다.
따라서 $3a^2+2b^2=3(3)^2+2(1)^2=27+2=29$ 이다.

문제 2. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫 항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이다. $a_2=1$ 일 때, a_8+a_{11} 의 값은?

① 7　② 2
③ -3　④ -8

정답 : ④

수열 $\{S_{2n-1}\}$은 S_1, S_3, S_5 ⋯ 이므로 첫째항이 S_1, 공차가 -3인 등차수열이다.

$\therefore S_{2n-1} = S_1 + (n-1) \times (-3) = a_1 + 3 - 3n$ ($\because$ $S_1 = a_1$)

또한, 수열 $\{S_{2n}\}$은 S_2, S_4, S_6 ⋯ 이므로 첫째항이 S_2, 공차가 2인 등차수열이다.

$$\therefore S_{2n} = S_2 + (n-1) \times 2 \equiv a_1 + a_2 + 2n - 2 \ (\because S_2 = a_1 + a_2)$$
$$\equiv a_1 + 1 + 2n - 2 \equiv a_1 - 1 + 2n \ (\because a_2 = 1)$$

$$a_8 = S_8 - S_7 = (a_1 - 1 + 8) - (a_1 + 3 - 12) = 7 + 9 = 16$$

$$a_{11} = S_{11} - S_{10} = (a_1 + 3 - 18) - (a_1 - 1 + 10) = -15 - 9 = -24$$

$$\therefore a_8 + a_{11} = 16 + (-24) = -8$$

※ 정리하기

1. 등차수열은 어떤 수(첫째 항)에 차례로 일정한 수를 더한 수열로, 등차수열을 정의하는 요소로는 첫째 항과 공차가 있다.

2. S_n 은 수열의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합을 나타내는 것으로, 등차수열의 합은
$$S_n = \frac{n(\text{첫째항} + \text{끝항})}{2} = \frac{n[a + \{a + (n-1)d\}]}{2} = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$$
이다.

3. 등비수열은 어떤 수(첫째 항)에 차례로 일정한 수를 곱한 수열로, 등차수열을 정의하는 요소로는 첫째 항과 공비가 있다.

4. 등차수열의 합은 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ $(r \neq 1)$ $S_n = an(r = 1)$이다.

5. 수열의 합으로부터 수열의 첫째 항과 일반항을 유도할 수 있고,
$an = S_n - S_{n-1}(n \geq 2), a_1 = S_1$이다.