06 강

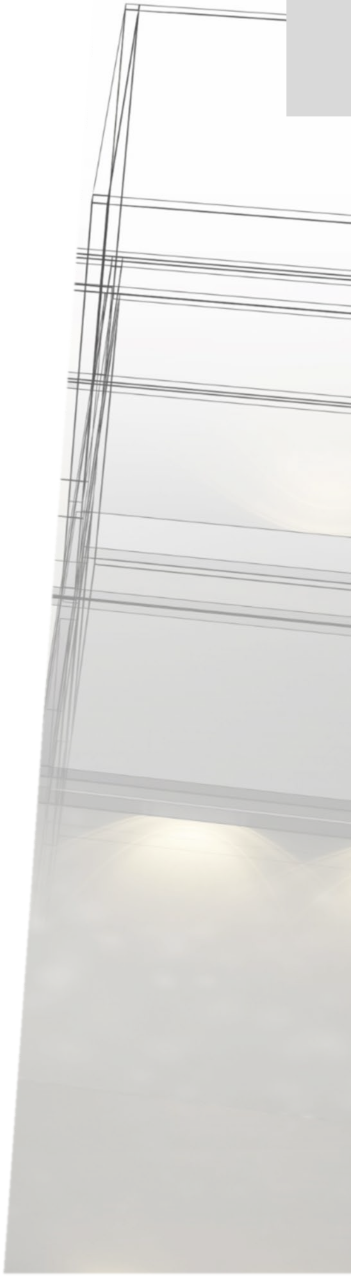
[확률의 개념과 응용]

확률분포와 기댓값 2

통계·데이터과학과
이긍희 교수

학습목표

1. 확률변수의 기댓값을 계산할 수 있다.
2. 확률변수의 분산과 표준편차를 계산할 수 있다.



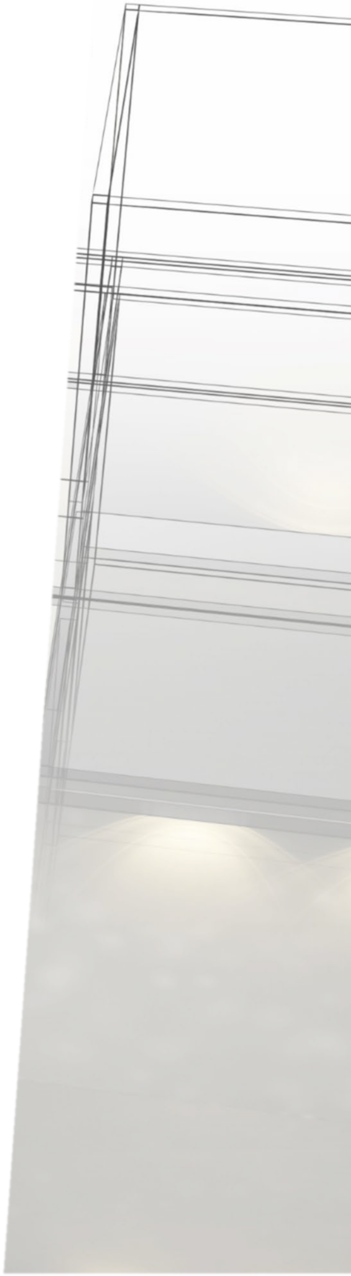
01

6강 확률분포와 기댓값 2

확률변수의 기댓값

파스칼의 의사결정

- 팡세(Pensées, 명상록)



복권의 기댓값

예

복권의 기대 당첨금은?

등수	상금	확률
1등	1,000	1/10,000
2등	50	1/1,000
3등	10	1/100
4등	5	1/50
5등	1	1/10

성적표의 평점

학점	A	B	C	D
학생수	20%	30%	40%	10%

기댓값

◆ 기댓값은 확률분포의 중심

- 확률변수의 기댓값 μ로 표시

기댓값

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n	합
P(X)	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n	1

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 \cdots + x_ip_i + \cdots + x_np_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

확률분포와 기댓값의 예

예

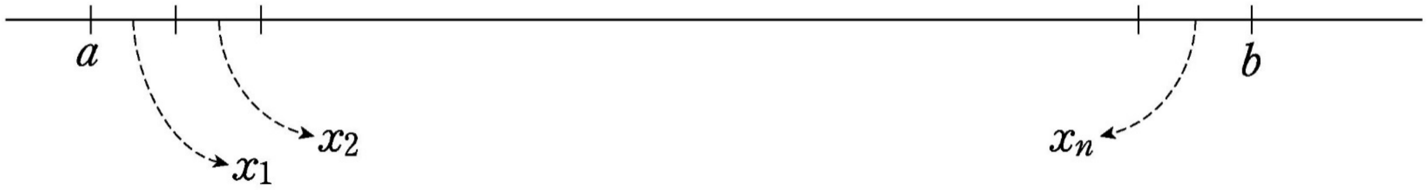
주사위의 눈금(X)의 기댓값은?

연속형 확률변수의 기댓값

◆ $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$

연속형 확률변수의 기댓값

◆ $E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k)$



연속형 확률변수의 기댓값

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

연속형 확률변수 기댓값의 예

예 X 의 확률밀도함수가 다음과 같을 때 X의 기댓값은?

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \text{일 때} \\ 0, & x<0 \text{ 혹은 } x>1 \text{일 때} \end{cases}$$

기댓값의 주요 특성

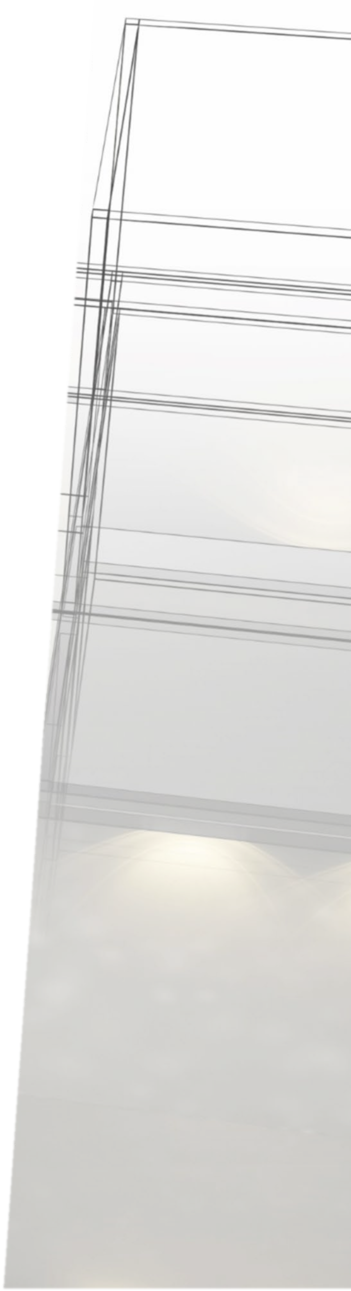
- $E(a) = a$

기댓값의 주요 특성

- $E(aX + b) = aE(X) + b$

기댓값의 주요특성

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$



기댓값의 주요특성

- $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

기댓값의 주요 특성의 예

예

주사위 눈금 X, Z=10X-35의 기댓값은?

02

6강 확률분포와 기댓값 2

확률변수의 분산과 표준편차

확률변수의 분산

- 분산 (Variance) : 확률변수 값이 기댓값을 중심으로 흩어져 있는 정도, σ^2으로 표현

$$\mathrm{Var}(X) = E(X-\mu)^2$$

확률변수의 분산

- $Var(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$

확률변수의 분산

- **이산형 확률변수의 분산**

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

확률변수의 분산

- **연속형 확률변수의 분산**

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

확률변수의 표준편차

- 표준편차는 분산을 제곱근하여 구함

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

이산형 확률변수의 분산 예

예

동전 한번 던져서 앞면이 나오는 수의 분산과 표준편차는?

이산형 확률변수의 분산 예

예

동전 한번 던져서 앞면이 나오는 수의 분산과 표준편차는?

이산형 확률변수의 분산 예

예

주사위의 눈금 변수의 분산과 표준편차는?

연속형 확률변수의 분산 예

예

X의 분산과 표준편차는?

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \text{일 때} \\ 0, & x < 0 \text{ 혹은 } x > 1 \text{일 때} \end{cases}$$

연속형 확률변수의 분산 예

예

X의 분산과 표준편차는?

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \text{일 때} \\ 0, & x < 0 \text{ 혹은 } x > 1 \text{일 때} \end{cases}$$

분산의 주요 특성

- $\mathrm{Var}(a) = 0$

분산의 주요특성

- $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

분산의 주요특성

- $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$

분산의 연산 예

예

주사위 눈금 변수 X, Y=2X+1의 분산은?

분산의 연산 예

예

$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ 의 기댓값과 분산은?

학습정리

- 확률변수의 기댓값은 다음과 같이 구한다.

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} x_k f(x_k), & X\text{: 이산형 확률변수}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx, & X\text{: 연속형 확률변수}\end{cases}$$

학습정리

- 확률변수의 변동성을 나타내는 분산과 표준편차는 다음과 같이 구한다.

$$Var(X) = E([X - E(X)])^2$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

정리하기

수고하셨습니다.

다음시간에는

06 강 확률분포와 기댓값 2

07 강 이산형 확률분포 1