13강

확률과정 1

통계·데이터과학과
이긍희 교수

학습목표

1. 확률과정을 이해할 수 있다.
2. 마코프 연쇄를 이해할 수 있다.
3. 전이확률을 이해할 수 있다.
4. 체프만-콜모고로프 방정식을 이해할 수 있다.

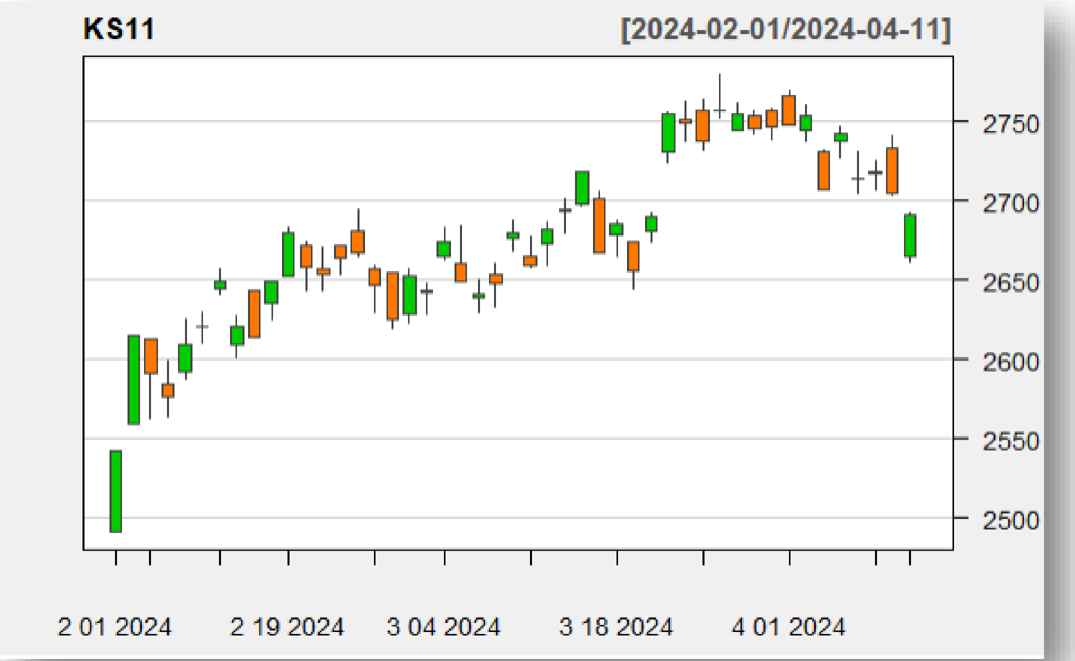
01

13강 확률과정 1

확률과정의 의미

시계열

◆ 시계열 : 시간의 흐름을 따라 관측되는 자료



확률과정

◆ 확률과정 (stochastic process)

어느 시점에서의 값은 어떤 한 값을 확률적으로 가지며, 순차적으로 관측되는 확률변수의 모임

- $\{X(t_1), X(t_2), X(t_3), \cdots,\}$ 또는 $\{X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \cdots,\}$

확률과정

◆ 확률과정 : 이산형, 연속형

- 연속형 : GDP, 기온
- 이산형 : 이용하는 손님의 수

확률과정 분석의 목적

◆ 확률과정 $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

→ 관심사항 : X_{n+1}이 어떤 상태에 있을 것인가?

02

13강 확률과정 1

마코프 연쇄

확률 과정의 예

예

어느 집안의 세대별 인구수

X_0 : 가계의 첫 번째 조상의 수

X_1 : 첫 번째 조상의 자식 수

X_2 : 그 다음 세대의 수

- 증손자의 수가 5명일 확률

나 → 자식 2명 → 손자 3명 → 증손자의 수 ?

X_0 X_1 X_2 X_3

확률 과정의 예

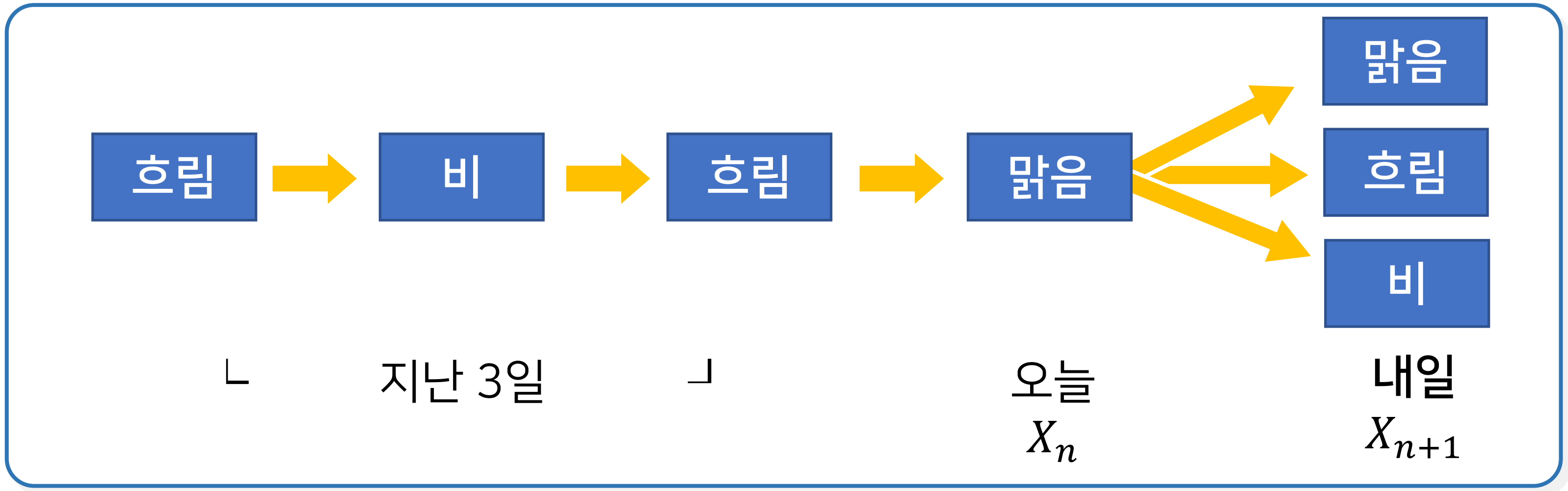
예

날씨 : {맑음, 흐림, 비} → {0, 1, 2}

X_0 : 맑음, X_1 : 흐림, X_2 : 비

→ X_0 : 0, X_1 : 1, X_2 : 2

- 내일 날씨가 맑을 확률



확률 과정의 특성

- 무기억성(memoryless)

  과거 $\{X_0, X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}\}$ 과 현재 X_n이 주어진 상황에서 미래 X_{n+1} 의 조건부 확률분포가 현재 상태 X_n에만 의존

마코프 연쇄

- **마코프 연쇄 (Markov Chain)**

  무기억성을 가지고 있는 확률과정

전이확률

- 전이확률 : 단계 n의 상태 i 로부터 다음 단계 n에 상태 j로 변화될 확률

  $\rightarrow P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

정상성

◆ 정상성

전이확률 $P_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$이
단계 n에 의존하지 않음

- $P(X_3 = 5 \mid X_2 = 3) = P(X_{11} = 5 \mid X_{10} = 3)$

마코프 연쇄의 예

예

오늘 날씨가 맑았을 때, 내일 날씨도 맑을 확률은 어제의 날씨가 흐린 날이건 비가 온 날이건 상관없다.

마코프 연쇄의 예

예

오늘의 날씨가 맑을 때 내일도 맑을 확률은 4일 후 맑을 때 5일 후에도 맑을 확률과 같다.

마코프 연쇄

◆ 전이확률의 성질

① P_{ij}는 확률을 나타내므로 0과 1 사이의 값

② $\sum_j P_{ij} = 1$

03

13강 확률과정 1

전이확률 행렬

전이확률 행렬

- 전이확률 행렬 : 일정 상태에서 다른 상태로 변화될 확률을 표현한 행렬

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.0 & 0.9 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

전이도

◆ **전이도** (transition diagram)

마코프 연쇄가 가질 수 있는 상태와 전이확률을 표현한 그림

- 전이도를 통하여 현재 상태에서 다음 단계의 어떤 상태로 변화할 수 있는지 파악

전이도의 예

예

$$p = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.0 & 0.9 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$ 의 전이도는?

전이확률 행렬과 전이도의 예

예

오늘 맑음 → 내일 맑음, 흐림, 비 확률 : 0.7, 0.2, 0.1
오늘 흐림 → 내일 맑음, 흐림, 비 확률 : 0.6, 0.2, 0.2
오늘 비 → 내일 맑음, 흐림, 비 확률 : 0.5, 0.2, 0.3

(1) 전이확률행렬은?

전이확률 행렬과 전이도의 예

예

오늘 맑음 → 내일 맑음, 흐림, 비 확률 : 0.7, 0.2, 0.1
오늘 흐림 → 내일 맑음, 흐림, 비 확률 : 0.6, 0.2, 0.2
오늘 비 → 내일 맑음, 흐림, 비 확률 : 0.5, 0.2, 0.3

(2) 전이도는?

전이확률 행렬과 전이도의 예

예

X_n: n 번째까지 던져 연속하여 나온 앞면 수

(1) X_n 이 마코프 연쇄인가?

전이확률 행렬과 전이도의 예

예

X_n : n 번째까지 던져 연속하여 나온 앞면 수

(2) 전이확률 행렬은?

전이확률 행렬과 전이도의 예

예

X_n : n 번째까지 던져 연속하여 나온 앞면 수

(2) 전이확률 행렬과 전이도는?

04

13강 확률과정 1

체프만-
콜모고로프 방정식

모레 비올 확률

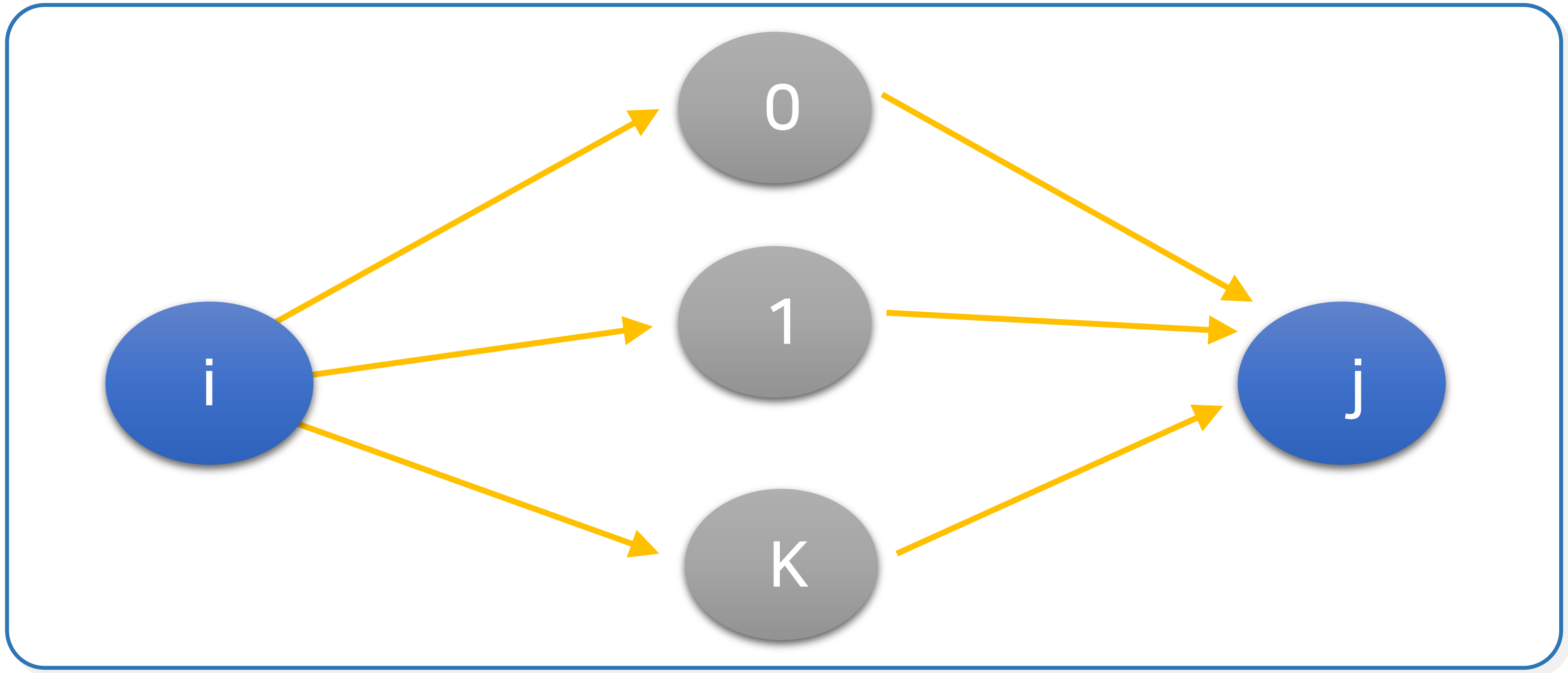
예

날씨의 세 가지 상태 {맑음, 흐림, 비}를 각각
0, 1, 2라 할 때, 주어진 조건에 의하여 전이
확률행렬은 다음과 같을 때 모레 비올 확률은?

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

2단계 후 확률

◆ $P_{ij}^{(2)} = P_{i0}\,P_{0j} + P_{i1}\,P_{1j} + \cdots + \,P_{iK}\,P_{Kj}$



2단계 전이확률

- $P_{ij}^{(2)} = P_{i0}\,P_{0j} + P_{i1}\,P_{1j} + \cdots + \,P_{iK}\,P_{Kj}$
- $P^{(2)} = PP$

2단계 전이확률의 예

예

{맑음, 흐림, 비}를 0, 1, 2라 할 때, 오늘 맑을 때 모레 비올 확률은?

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

2단계 전이확률의 예

예

{맑음, 흐림, 비}를 0, 1, 2라 할 때, 모레 비올 확률을 전이확률행렬을 이용하여 구하시오.

체프만-콜모고로프 방정식

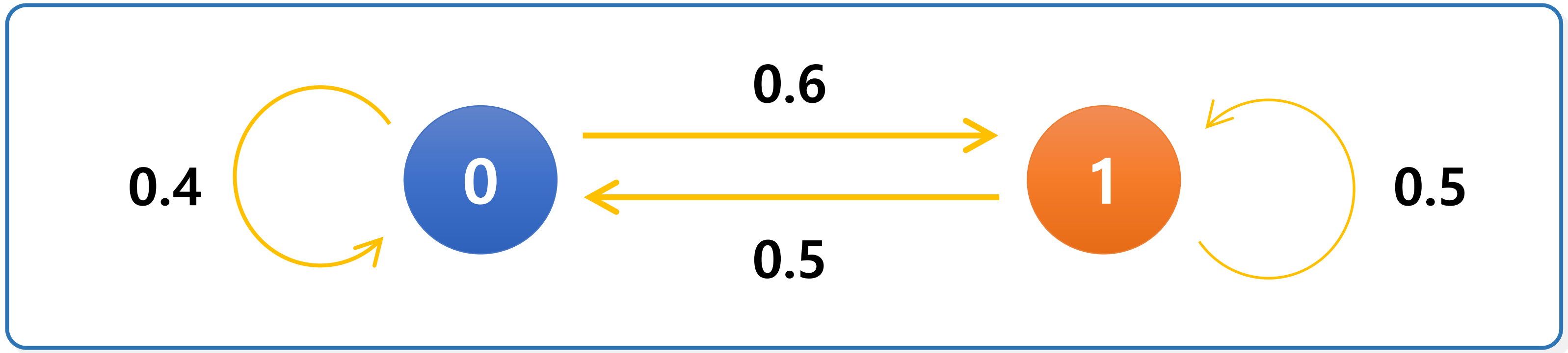
- $P^{(m)} = P^{(m-1)}P = \left(P^{(m-2)}P\right)P = PP\cdots P$

- $P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}$
  - $P_{ij}^{(m+n)} = P_{i0}^{(m)}P_{0j}^{(n)} + P_{i1}^{(m)}P_{1j}^{(n)} + \cdots + P_{iK}^{(m)}P_{Kj}^{(n)}$

체프만-콜모고로프 방정식의 예

예

다음 마코프 연쇄의 2단계 전이확률행렬은?



체프만-콜모고로프 방정식의 예

예

도박꾼의 파산 문제

: 두 사람이 공평한 게임. 갑과 을은 각각 100 원과 500원을 가지고 게임을 시작. 누가 승리할 것인가?

체프만-콜모고로프 방정식의 예

예

도박꾼의 파산 문제

체프만-콜모고로프 방정식의 예

예

도박꾼의 파산 문제

체프만-콜모고로프 방정식의 예

예

도박꾼의 파산 문제

체프만-콜모고로프 방정식의 예

예

도박꾼의 파산 문제

학습정리

- 확률과정은 시간의 흐름에 따라 순차적으로 관측되는 확률변수의 모임이다.

- 마코프 연쇄는 미래의 확률분포가 현재의 상태에만 의존하는 확률과정이다.

정리하기

학습정리

정리하기

- 전이확률은 마코프 연쇄에서 상태 i로부터 그 다음 단계에서 상태 j로 변화될 확률이다.

- 체프만-콜모고로프 방정식은 마코프 연쇄에서 한 상태에서 다른 상태로 변화할 확률이 중간에 다른 상태들을 거치는 모든 경로를 통해 계산될 수 있다는 것이다.

수고하셨습니다.

다음시간에는

13강 확률과정 1

14강 확률과정 2