2강. 실수와 복소수

※ 연습문제

문제 1. 등식 $i-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2019}=a+bi$ **를 만족하는 두 실수** a**,** b**에 대하여** a^2+b^2**의 값은?**

① -2　　② 0
③ 2　　④ 4

정답 : ②

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$ 이므로

$$i-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2019}=i-(-i)^{2019}=i-i=0$$

따라서 $a=0$, $b=0$ 이므로 $a^2+b^2=0$ 이다.

문제 2. $\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{1-x}}=-\sqrt{\frac{x-3}{1-x}}$ **일 때,** $|x-2|+|1-2x|+|2x-1|$**을 간단히 한 식을** $f(x)$**라 하면,** $f(17)$**의 값은?**

① 81　　② 82
③ 83　　④ 84

정답 : ①

$$\frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{1-x}}=-\sqrt{\frac{x-3}{1-x}}$$ 이므로

$x-3=0$, $1-x\neq 0$ 또는 $x-3>0$, $1-x<0$ 이다. $\therefore\ x\geq 3$

$\therefore |x-2|+|1-2x|+|2x-1|=x-2-(1-2x)+2x-1=5x-4$

$f(x)=5x-4$ 이므로 $f(17)=5\times 17-4=81$ 이다.

문제 3. 복소수 $z=a^2(1+i)-a(1-i)-2(3+i)$**가 0이 아닌 실수가 되도록 하는 실수** a**의 값을** p**, 순허수가 되도록 하는 실수** a**의 값을** q**라 할 때,** p^2+q^2**의 값은?**

① 1 ② 4
③ 7 ④ 10

정답 : ①

$$z=a^2(1+i)-a(1-i)-2(3+i)$$
$$=(a^2-a-6)+(a^2+a-2)i$$
$$=(a-3)(a+2)+(a-1)(a+2)i$$

$a=1$ 일 때, $z=-6$ 으로 실수이다. $\therefore\ p=1$

$a=3$ 일 때, $z=10i$ 로 순허수이다. $\therefore\ q=3$

$\therefore\ p^2+q^2=1^2+3^2=10$

※ 정리하기

1. 자연수 집합 $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$에 대하여 $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}$ 이면 $a+b\in\mathbb{N}$이므로 '자연수 집합'은 '덧셈'에 대하여 닫혀있다.

2. 덧셈에 대한 항등원(identity element)은 임의의 $a\in R$에 대하여, $a+e=e+a=a$를 만족시키는 $e=0\in R$ 이므로, $\mathbb{R}$의 덧셈에 대한 항등원은 0이다. 반면, 덧셈에 대한 역원(inverse element)은 어떤 $a\in R$에 대하여, $a+x=x+a=0$(항등원)을 만족시키는 $x=-a\in\mathbb{R}$이므로 $\mathbb{R}$의 덧셈에 대한 a의 역원은 $-a$ 이다.

3. 2, 3, 5, 7, 11, 13, ⋯ 와 같이 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자신 이외에는 양의 약수를 갖지 않는 수를 소수(prime number)라 하고, 소수가 아닌 수를 합성수(composite number)라 한다.

4. 두 개 이상의 정수의 공통인 약수(인수)를 공약수라 하고, 공약수 중에서 가장 큰 값을 최대공약수(GCD)라 한다. 또한 두 개 이상의 정수의 공통인 배수를 공배수라 하고, 공배수 중에서 가장 작은 양수 값은 최소공배수(LCM)라 한다.

5. $x^2=-1$을 만족하는 수를 i로 나타내고 이를 허수단위로 정의한다. 즉 $i^2=-1$이다.

6. 실수 a, b에 대하여, $a+bi$꼴의 수를 복소수로 정의하고, a를 실수부, b를 허수부라 한다. 특히 $b\neq0$인 복소수를 허수라 하고, $a=0$, $b\neq0$인 복소수를 순허수라 한다. 또한 복소수 $z=a+bi$에 대하여, $\overline{z}=a-bi$를 켤레복소수라 한다.