[대학기초수학]

14차시 | 벡터

정 세 윤 교수

오늘의 목표

- 벡터와 스칼라의 차이를 이해한다.
- 벡터의 덧셈·뺄셈·실수배를 이해한다.
- 벡터의 내적과 외적을 이해한다.
- 성분으로 표현된 벡터의 성질을 이해한다.

목차

1 벡터의 뜻과 연산

1.1 벡터의 정의

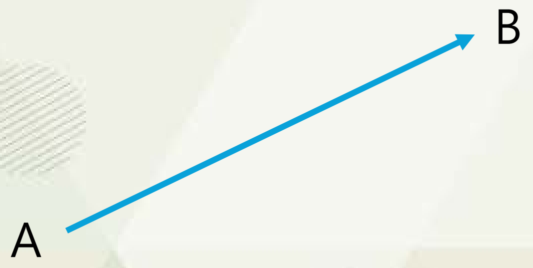
◆ 스칼라(scalar)의 정의와 성질

- 스칼라: '크기'만을 가지고 있는 물리량
  - 예) 키, 몸무게, 길이, 넓이 등
- 스칼라의 덧셈과 곱셈
  - 실수에서의 덧셈과 곱셈
  - 교환법칙, 결합법칙, 항등원, 역원

1.1 벡터의 정의

◆ 벡터(vector)의 정의와 성질

- 벡터: '크기'와 '방향'을 가지고 있는 물리량
  - 예) 속도, 가속도, 힘, 도형의 평행이동 등
- 벡터의 표현: 시점과 종점을 연결한 화살표(선분)
  - $\overrightarrow{AB}$: 시점 A, 종점 B인 벡터
  - $|\overrightarrow{AB}|$: $\overrightarrow{AB}$의 크기, 화살표(선분)의 길이
  - $\overrightarrow{AB}$의 방향: 선분이 가리키는 방향

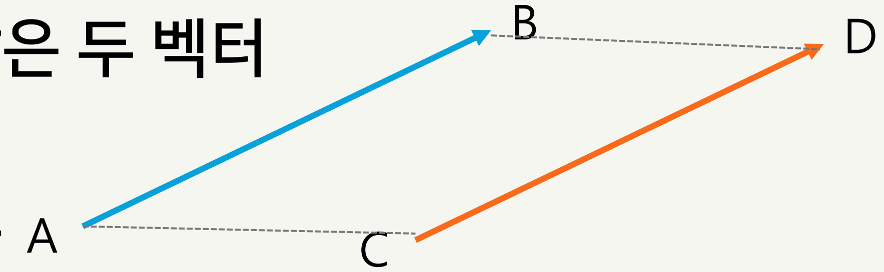


- 벡터의 덧셈과 곱셈
  - 크기만을 고려했던 스칼라에서 연산과는 달리 '방향'도 고려

1.1 벡터의 정의

◆ 벡터(vector)의 상등

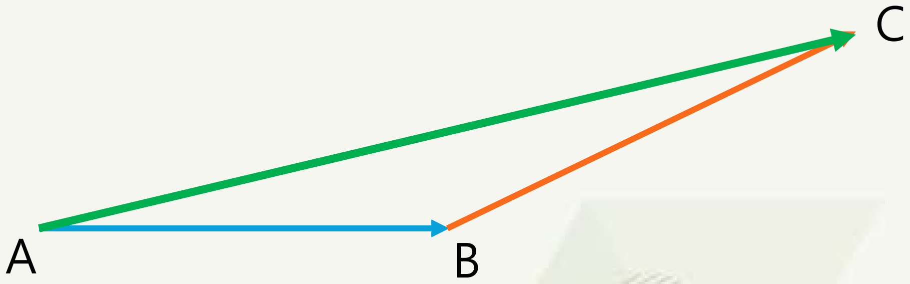
- 상등: ‘크기’와 ‘방향’이 모두 같은 두 벡터
  - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- 두 벡터가 서로 같지 않은 경우
  - 크기는 같지만 방향이 다른 경우
  - 크기가 다르고 방향은 같은 경우
  - 크기와 방향 모두 다른 경우



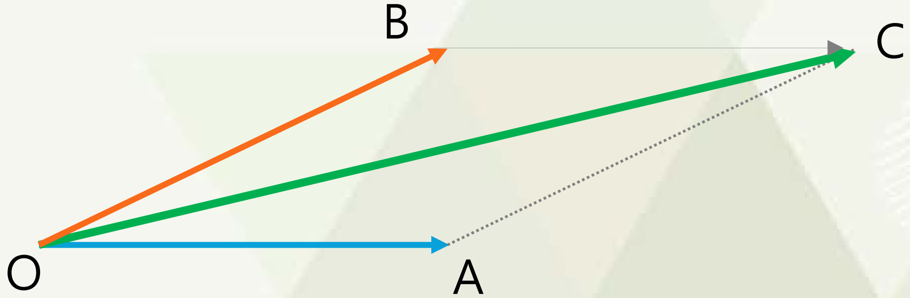
1.2 벡터의 덧셈과 뺄셈

◆ 벡터의 덧셈

- 삼각형 법칙: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



- 평행사변형 법칙: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

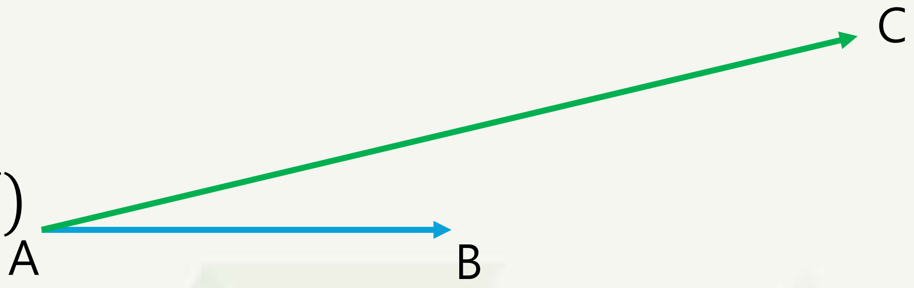


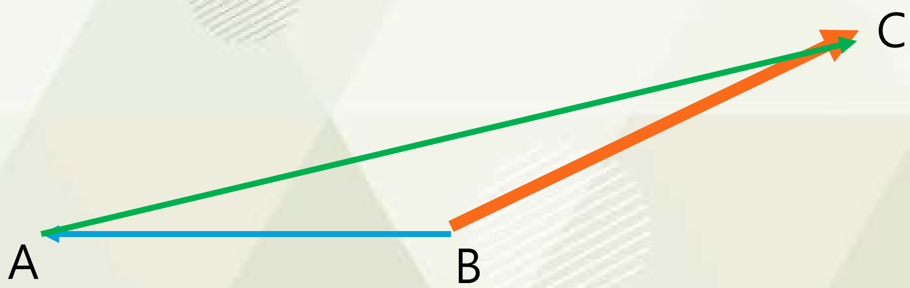
1.2 벡터의 덧셈과 뺄셈

◆ 벡터의 뺄셈

벡터 덧셈의 변형

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \left(-\overrightarrow{AB}\right)$
  $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$



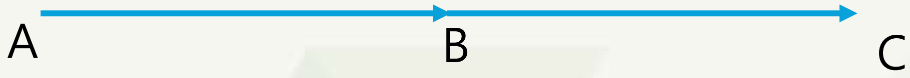


1.2 벡터의 덧셈과 뺄셈

◆ 벡터의 실수배

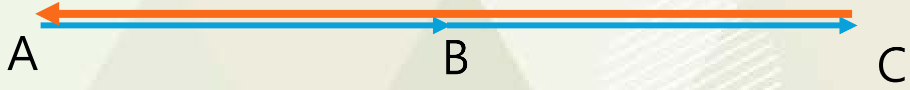
벡터 덧셈의 변형

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$
- $2\overrightarrow{AB}$
  - 방향: $\overrightarrow{AB}$와 같은 방향
  - 크기: $|\overrightarrow{AB}|$의 2배



음의 실수배

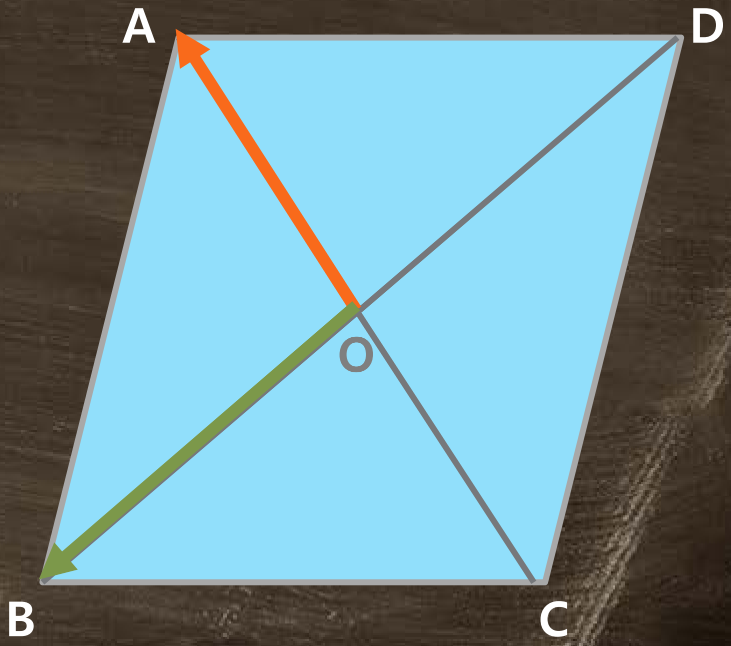
- $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB}$
  - 방향: $\overrightarrow{AB}$의 반대 방향
  - 크기: $|\overrightarrow{AB}|$의 2배



1.2 벡터의 덧셈과 뺄셈

벡터의 덧셈과 뺄셈 예제

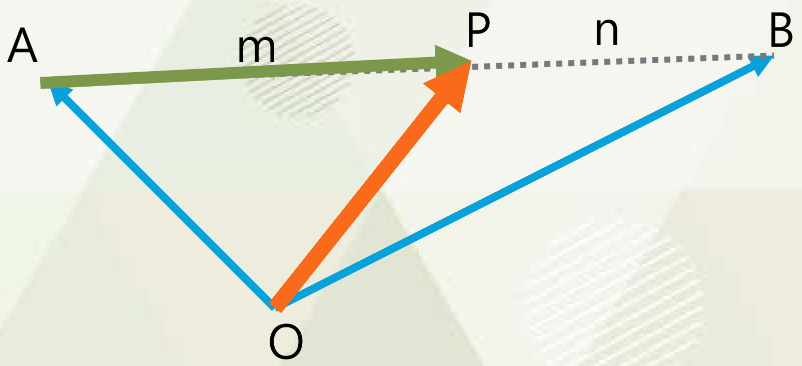
- 오른쪽 도형을 보고 다음 벡터를 표현하시오.
  - $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$
  - $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$
  - $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$
  - $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}$
  - $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}$
  - $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}$



1.2 벡터의 덧셈과 뺄셈

◆ 위치벡터와 내분점·외분점

- 위치벡터
  - 시점이 원점 O인 벡터
  - 벡터의 종점이 좌표에 대응
- 벡터의 덧셈과 실수배를 활용한 내분점 표현
  - $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$
    $= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$
    $= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right)$
    $= \left(\frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{OB}$
    $= \frac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}$



1.2 벡터의 덧셈과 뺄셈

◆ 위치벡터와 내분점·외분점

벡터의 덧셈과 실수배를 활용한 외분점 표현

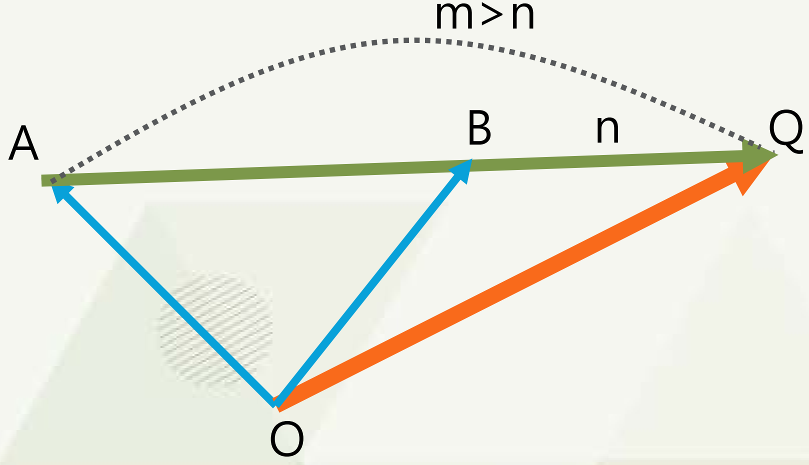
- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$

$$= \overrightarrow{OA} + \left(\frac{m}{m-n}\right)\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \left(\frac{m}{m-n}\right)\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \left(\frac{-n}{m-n}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{m}{m-n}\right)\overrightarrow{OB}$$

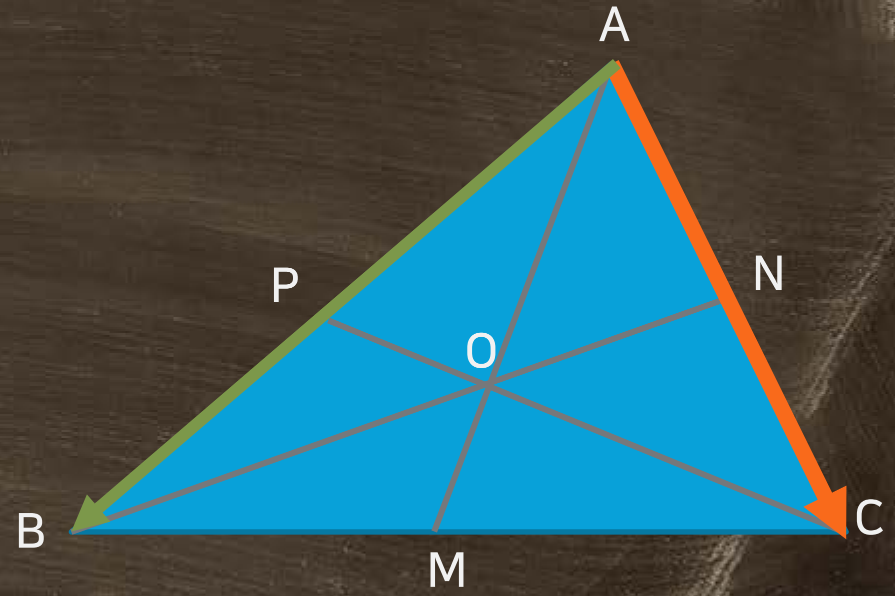
$$= \frac{m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OA}}{m-n}$$



1.2 벡터의 덧셈과 뺄셈

벡터의 덧셈과 뺄셈 예제 2

- 오른쪽 도형을 보고 다음 벡터를 표현하시오.
  - $\overrightarrow{BM}$
  - $\overrightarrow{OM}$
  - $\overrightarrow{ON}$



2 벡터의 곱셈

2.1 벡터의 내적

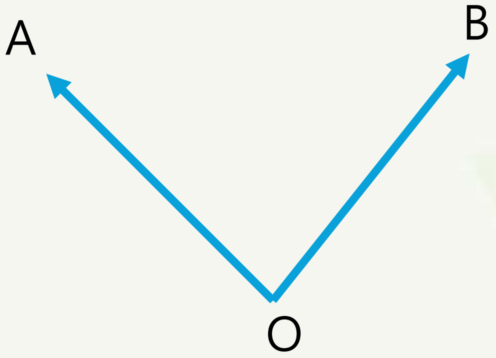
- 벡터의 곱셈: 내적과 외적
  - ‘크기’와 ‘방향’을 고려한 곱셈

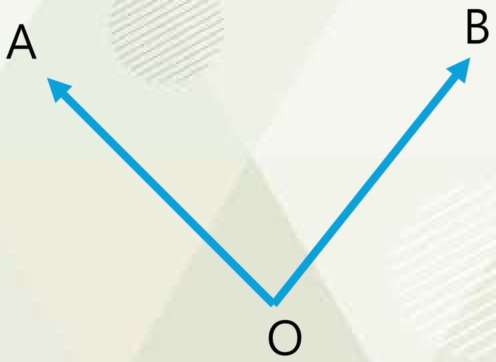
- 벡터의 내적(inner product, dot product) 개념
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos\theta$
    $= \left(|\overrightarrow{OA}| \cos\theta\right)|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}|\left(|\overrightarrow{OB}| \cos\theta\right)$
  - $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$의 방향 중에서 한 방향을 선택하여 그 방향의 크기만 고려하여 곱셈 (스칼라)

2.1 벡터의 내적

◆ 벡터 내적의 이해

- $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos\theta$
  $= \left(|\overrightarrow{OA}| \cos\theta\right)|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}|\left(|\overrightarrow{OB}| \cos\theta\right)$
- $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$의 방향 중에서 한 방향을 선택하여 그 방향의 크기만 고려하여 곱셈 (스칼라)

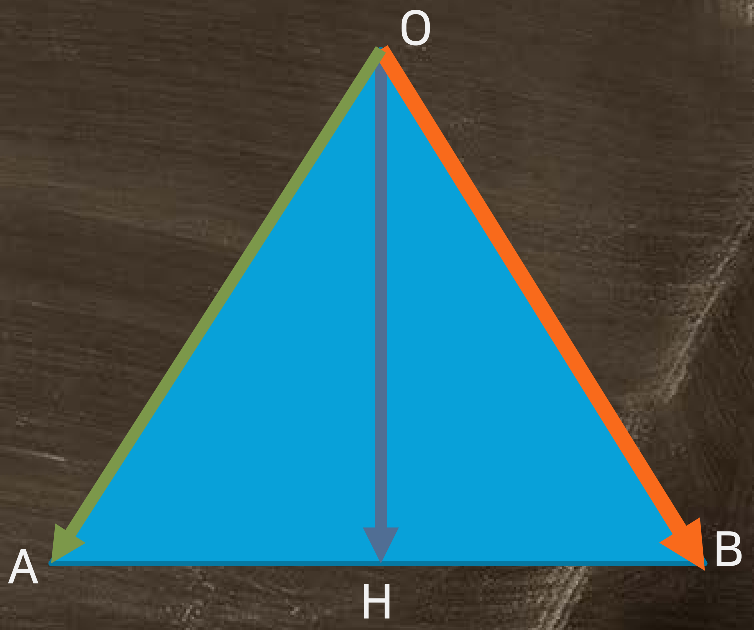




2.1 벡터의 내적

벡터의 내적 예제

- 한 변의 길이가 2인 정삼각형 △OAB에서 내적 계산
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB}$
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OH}$
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{AB}$
  - $\overrightarrow{OH} \circ \overrightarrow{AB}$
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OA}$



2.1 벡터의 내적

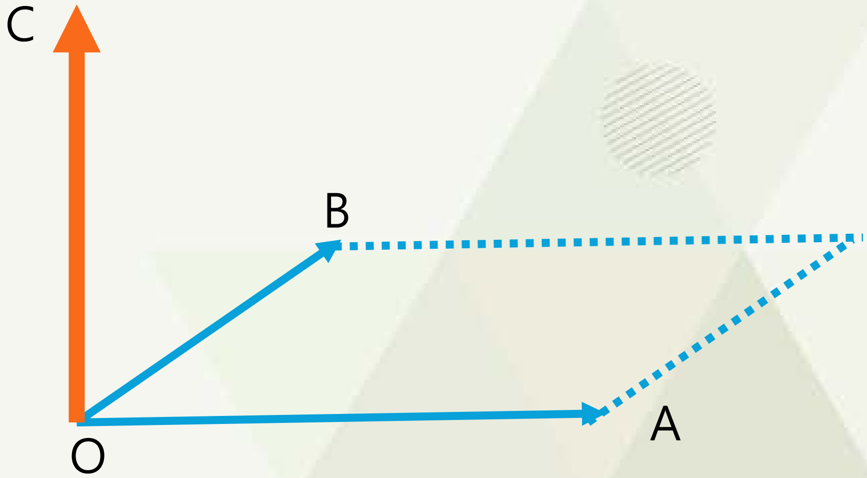
◆ 벡터의 내적과 끼인각

- $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos\theta$
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} > 0$
    - $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각이 예각 $(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2})$
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = 0$
    - $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 수직 $(\theta = \frac{\pi}{2})$; 필요충분조건
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} < 0$
    - $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각이 둔각 $(\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi)$

2.2 벡터의 외적

◆ 벡터의 외적(outer product, cross product)

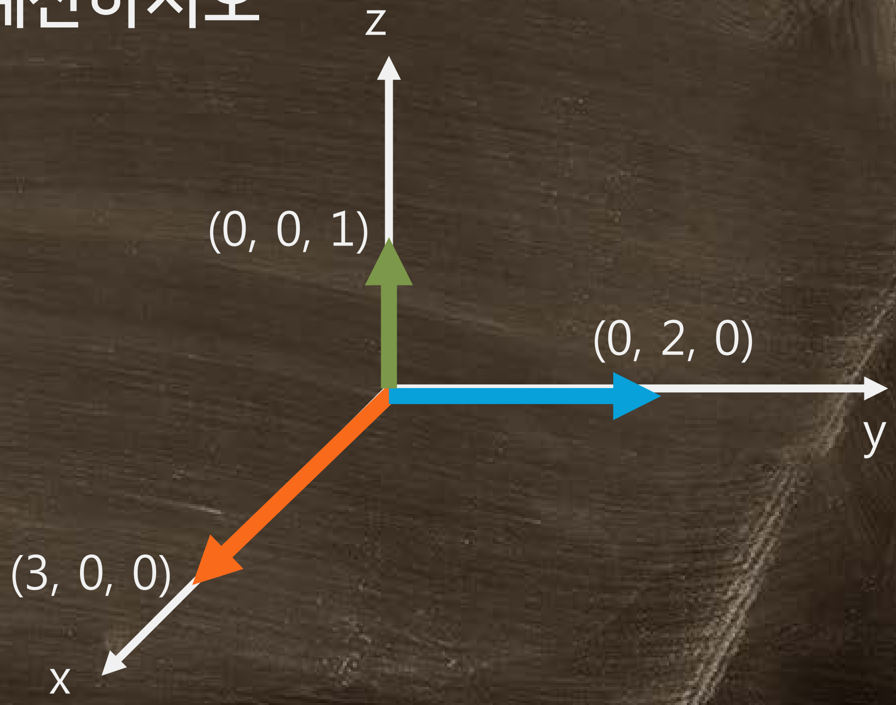
- $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$
  - $\overrightarrow{OC}$의 크기: 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 평행사변형의 넓이
  - $\overrightarrow{OC}$의 방향: 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$와 모두 수직인 방향 (오른손 법칙)



2.2 벡터의 외적

벡터의 외적 예제

- 오른쪽 그림을 보고 외적을 계산하시오
  - $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$
  - $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA}$
  - $\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}$
  - $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OB}$
  - $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OC}$
  - $\overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{OA}$

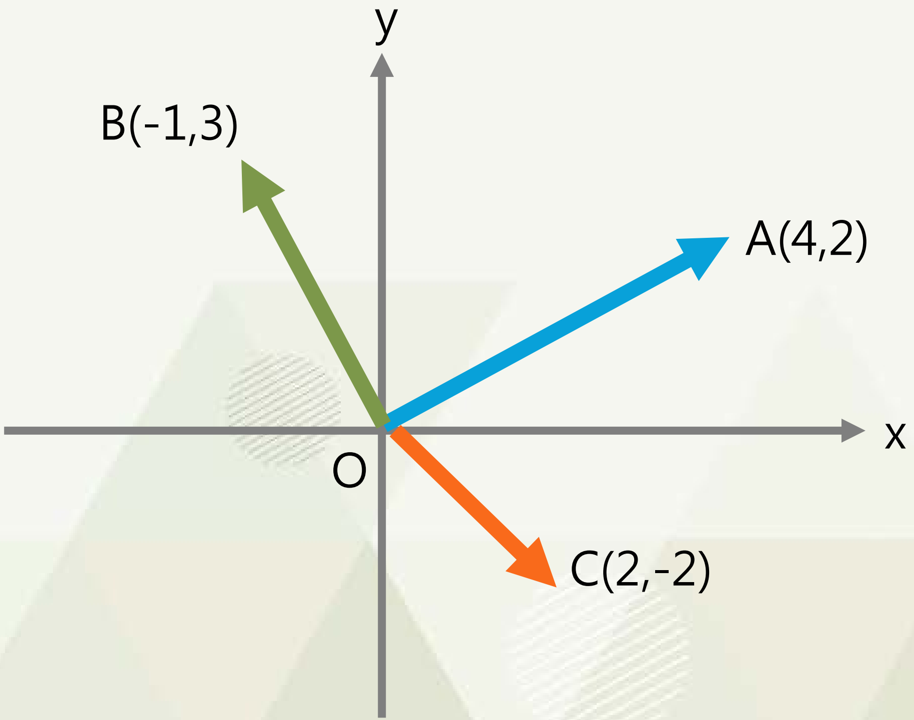


3 벡터의 성분

3.1 평면벡터의 성분

◆ 평면벡터의 성분과 연산

- 성분 = 위치벡터의 x,y 좌표
  - $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2) = (4,2)$
  - $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2) = (-1,3)$
  - $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = (c_1, c_2) = (2,-2)$
- 벡터의 덧셈·뺄셈·실수배
  - $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$
  - $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$
  - $k\vec{a} = (ka_1, ka_2)$



3.1 평면벡터의 성분

◆성분을 활용한 평면벡터의 내적

- $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos\theta$
  - $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2), \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- 두 벡터가 이루는 각의 크기 계산
  - $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

3.1 평면벡터의 성분

- 성분을 활용한 벡터의 내적 예제
  - $\overrightarrow{OA} = (3,1), \overrightarrow{OB} = (1,3)$
    - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} =$
  - $\overrightarrow{OA} = (4,2), \overrightarrow{OB} = (1,3)$
    - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} =$

3.1 평면벡터의 성분

성분을 활용한 벡터의 내적 증명

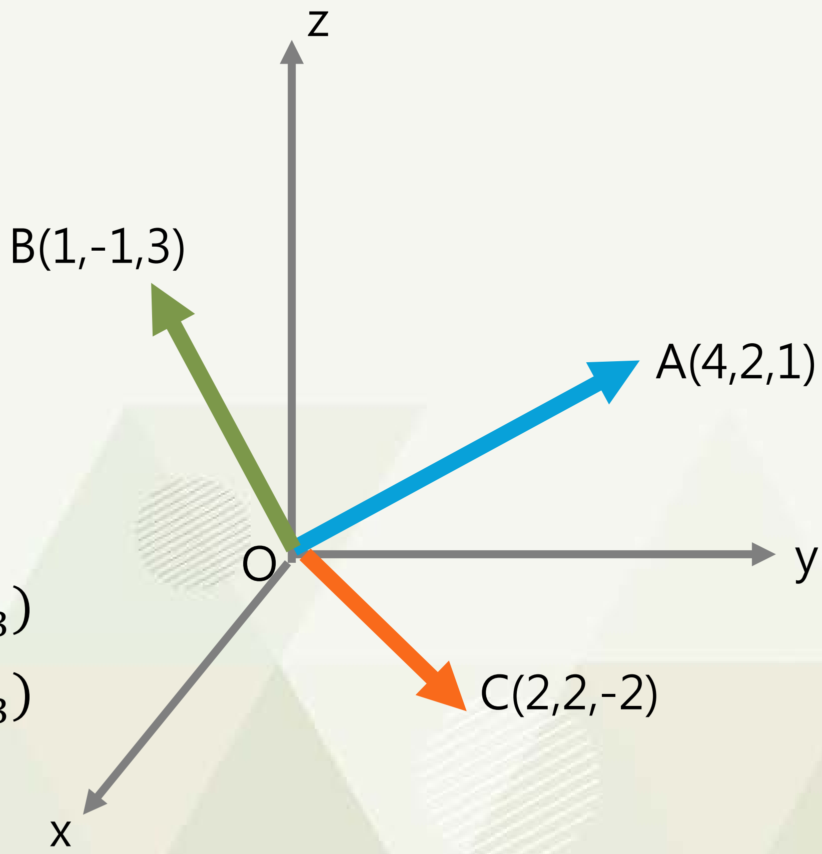
- $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2), \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$

$$\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

3.2 공간벡터의 성분

◆ 공간벡터의 성분과 연산

- 성분 = 위치벡터의 x,y,z 좌표
  - $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = (4,2,1)$
  - $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = (1,-1,3)$
  - $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) = (2,2,-2)$
- 벡터의 덧셈·뺄셈·실수배
  - $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
  - $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
  - $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$



3.2 공간벡터의 성분

◆ 성분을 활용한 평면벡터의 내적과 외적

- $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3), \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, b_3)$
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \cos\theta$
  - $\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
  - $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$

$$= det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

3.2 공간벡터의 성분

- 성분을 활용한 벡터의 외적 예제
  - $\overrightarrow{OA} = (3,0,0), \overrightarrow{OB} = (0,2,0)$
    - $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} =$

정리하기

- 벡터는 크기와 방향을 가진 물리량
- 벡터의 덧셈은 최종 시점과 종점의 결정
- 벡터의 곱셈: 내적과 외적
- 벡터의 성분을 활용한 벡터의 연산

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.