[대학기초수학]

15차시 | 벡터 방정식

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 직선의 벡터 방정식을 이해한다.
- 평면의 벡터 방정식을 이해한다.
- 구의 벡터 방정식을 이해한다.
- 도형의 관계를 벡터 방정식으로 설명한다.

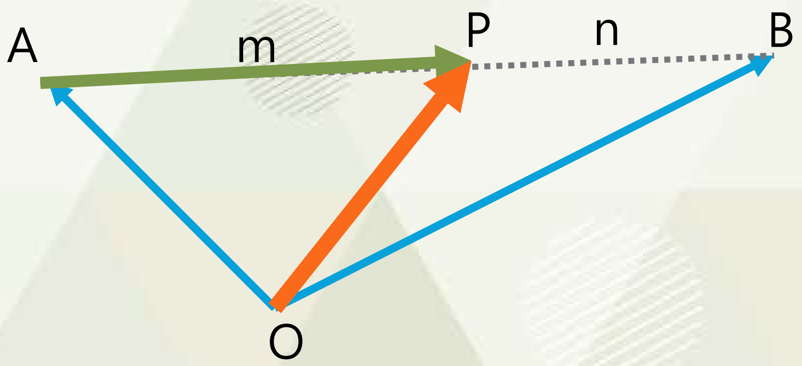
목차

1 직선의 벡터 방정식

1. 배경: 위치벡터와 내분점·외분점

◆ 위치벡터와 내분점

- 위치벡터
  - 시점이 원점 O인 벡터
  - 벡터의 종점이 좌표에 대응
- 벡터의 덧셈과 실수배를 활용한 내분점 표현
  - $$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}\\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right)\\ &= \left(\frac{n}{m+n}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{OB}\\ &= \frac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n}\end{aligned}$$



1. 배경: 위치벡터와 내분점·외분점

◆ 위치벡터와 외분점

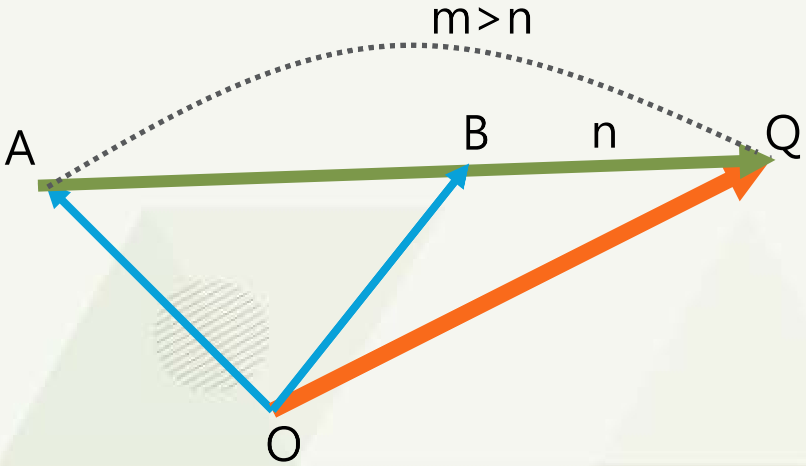
- 벡터의 덧셈과 실수배를 활용한 외분점 표현
  - $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$

$$= \overrightarrow{OA} + \left(\frac{m}{m-n}\right)\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{OA} + \left(\frac{m}{m-n}\right)\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \left(\frac{-n}{m-n}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{m}{m-n}\right)\overrightarrow{OB}$$

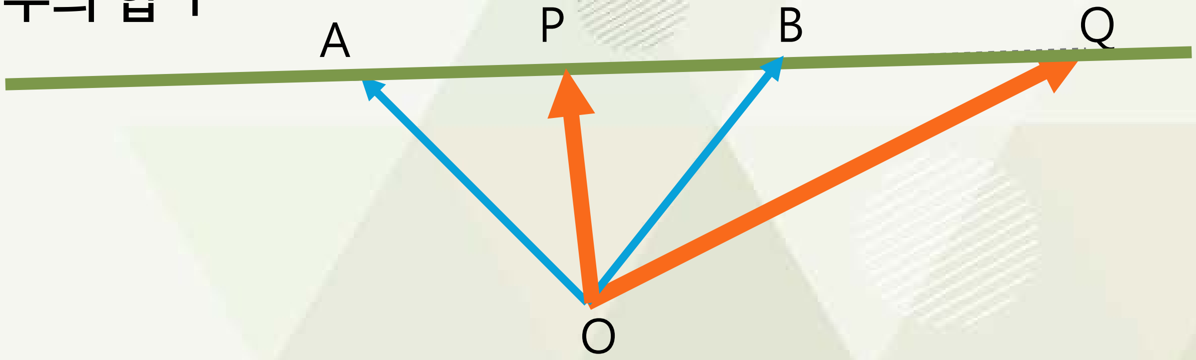
$$= \frac{m\overrightarrow{OB} - n\overrightarrow{OA}}{m-n}$$



1. 배경: 위치벡터와 내분점·외분점

◆ 내분점과 외분점의 관계

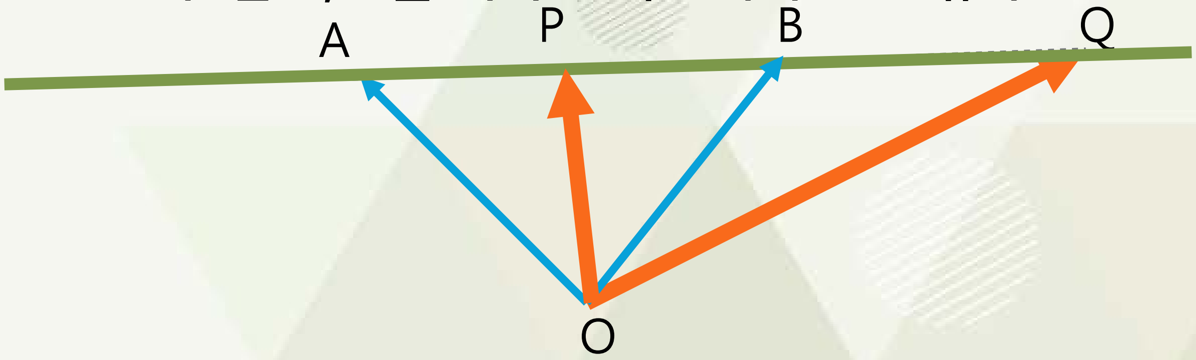
- 내분점: $\overrightarrow{OP} = \dfrac{m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OA}}{m+n} = \dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$
- 외분점: $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{m\overrightarrow{OB}-n\overrightarrow{OA}}{m-n} = \dfrac{-n}{m-n}\overrightarrow{OA} + \dfrac{m}{m-n}\overrightarrow{OB}$
- 내분점과 외분점의 공통점
  - $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$의 계수의 합 1



1.1 내분점과 외분점의 확장

◆ 내분점과 외분점의 공통점

- 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OB}$의 실수배·덧셈 & 계수의 합 1
- $\overrightarrow{OX} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$
  - $m + n = 1$: 두 점 A, B를 지나는 직선
  - $m + n = 1, m \geq 0, n \geq 0$: 두 점 A, B를 연결한 선분
  - $m + n = 1, mn < 0$: 두 점 A, B를 지나는 직선에서 선분 밖 부분



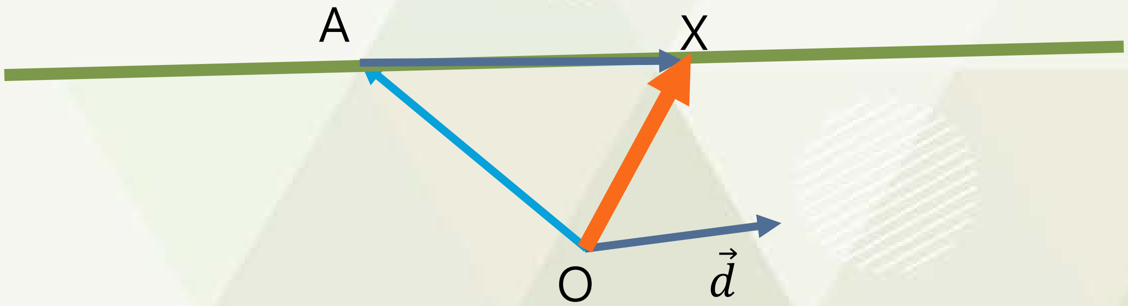
1.1 내분점과 외분점의 확장

- 두 점을 지나는 직선 예제
  - $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB}$에 대하여
    - $t < 0$일 때, P의 자취
    - $0 \leq t \leq 1$일 때, P의 자취
    - $t > 1$일 때, P의 자취

1.2 방향벡터와 직선이 지나는 점

◆ 방향벡터의 의미

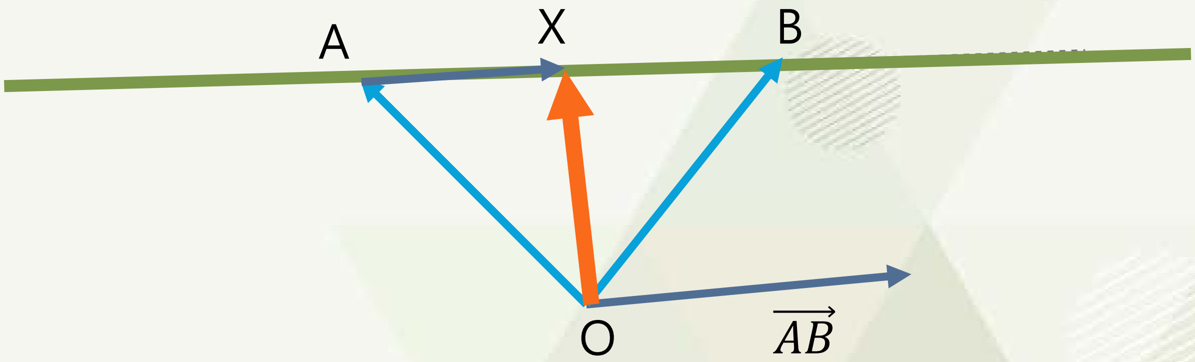
- 공간에서 하나의 직선을 정의하기 위해서는 직선이 지나는 정점과 직선이 진행하는 방향이 필요
- 방향벡터: 직선이 진행하는 방향을 가리키는 벡터
- $\overrightarrow{OA}$: 직선이 지나는 정점의 위치벡터
- $\vec{d}$: 직선이 진행하는 방향을 가리키는 방향벡터
  - $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$



1.2 방향벡터와 직선이 지나는 점

◆ 두 점을 지나는 직선의 방정식

- $\overrightarrow{AB}$ 방향벡터: 직선이 진행하는 방향을 가리키는 벡터
- $\overrightarrow{OA}$: 직선이 지나는 정점의 위치벡터
  - $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + t\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$



1.2 방향벡터와 직선이 지나는 점

두 점을 지나는 직선 예제

- $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + 2(1-t)\overrightarrow{OB}$에 대하여 점 P의 자취
- $\overrightarrow{OA} = (1,2,3)$에 대하여
  - $\vec{d} = (2,1,-1)$
  - $\overrightarrow{OB} = (4,3,5)$

1.2 방향벡터와 직선이 지나는 점

◆ 두 직선의 위치 관계

- 두 직선 l과 m이 평행
  - $l \parallel m \Leftrightarrow \overrightarrow{d_l} \parallel \overrightarrow{d_m} \Leftrightarrow \overrightarrow{d_l} = k\overrightarrow{d_m}$
- 두 직선 l과 m이 서로 수직
  - $l \perp m \Leftrightarrow \overrightarrow{d_l} \perp \overrightarrow{d_m} \Leftrightarrow \overrightarrow{d_l} \cdot \overrightarrow{d_m} = 0$
- 두 직선 l과 m이 이루는 각의 크기 θ
  - 두 직선의 방향벡터가 이루는 각의 크기
  - $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{d_l}\cdot\overrightarrow{d_m}}{|\overrightarrow{d_l}||\overrightarrow{d_m}|}\right)$

1.2 방향벡터와 직선이 지나는 점

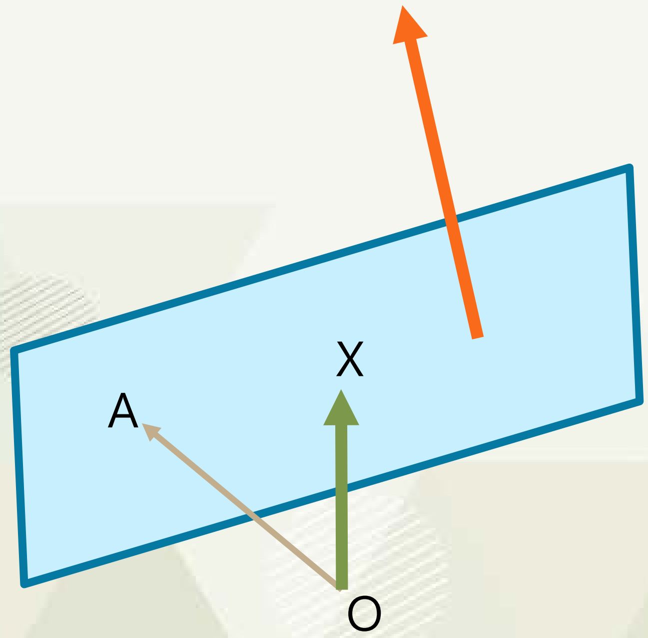
- 두 직선의 위치관계 예제
  - 두 직선 l과 m의 위치관계?
    - $l: x = 3t, y = 4t - 1, z = 5t + 3$
    - $m: x = -t, y = 7t + 3, z = 10t - 2$

2 평면의 벡터 방정식

2.1 평면의 정의와 벡터 방정식

◆ 평면의 정의

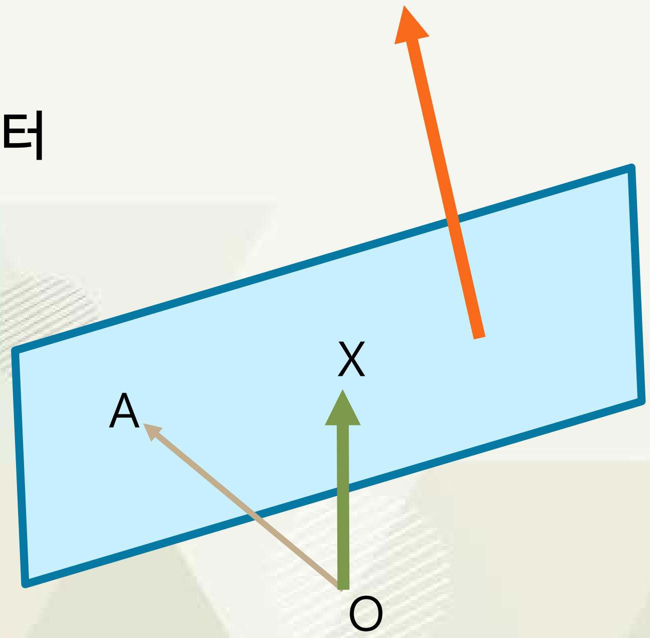
- 무한히 펼쳐진 평평한 2차원 도형
- 3차원 공간에서 평면을 정의하려면?
  - 평면이 지나는 한 정점
  - 평면이 바라보는 방향 (법선벡터)
- 법선벡터
  - 평면에 수직인 벡터
  - 평면 위 임의의 직선과 수직



2.1 평면의 정의와 벡터 방정식

◆ 평면의 벡터 방정식

- 평면이 지나는 한 정점 $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$
- 평면에 수직인 법선벡터 $\vec{h} = (a, b, c)$
  - $\overrightarrow{OX}$: 평면 위 임의의 점을 나타내는 위치벡터
  - $\overrightarrow{AX}$: 평면 위 임의의 직선의 위치 벡터
  - $\overrightarrow{AX} \perp \vec{h}$: 법선벡터는 평면 위 직선과 수직
    - $\overrightarrow{AX} \cdot \vec{h} = 0$
  - $\{(x, y, z) - (x_1, y_1, z_1)\} \cdot (a, b, c) = 0$
    - $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$
    - $ax + by + cz + d = 0$



2.1 평면의 정의와 벡터 방정식

- 평면의 방정식 예제
  - 정점과 법선벡터로 정의되는 평면
    - $A(1,2,3); \vec{h} = (4, 2, -3)$
    - $A(1,2,3); \vec{h} = (2, 1, 1)$

2.2 여러 가지 평면의 방정식

◆ 두 평면의 위치 관계

- 두 평면 α와 β가 서로 수직
  - $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \overrightarrow{h_\alpha} \perp \overrightarrow{h_\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{h_\alpha} \cdot \overrightarrow{h_\beta} = 0$
- 두 평면 α와 β가 서로 평행
  - $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \overrightarrow{h_\alpha} \parallel \overrightarrow{h_\beta} \Leftrightarrow \overrightarrow{h_\alpha} = k\overrightarrow{h_\beta}$
- 두 평면 α와 β가 이루는 각
  - 두 평면의 법선벡터가 이루는 각
  - $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{h_\alpha} \cdot \overrightarrow{h_\beta}}{|\overrightarrow{h_\alpha}||\overrightarrow{h_\beta}|}\right)$

2.2 여러 가지 평면의 방정식

- 축에 수직인 평면의 방정식
  - x축에 수직인 평면의 방정식
    - $x = 0$: yz-평면의 방정식
    - $x = a$: x축에 수직인 평면 또는 yz-평면에 평행한 평면의 방정식
  - y축에 수직인 평면의 방정식
    - $y = 0$: zx-평면의 방정식
    - $y = b$: y축에 수직인 평면 또는 zx-평면에 평행한 평면의 방정식
  - z축에 수직인 평면의 방정식
    - $z = 0$: xy-평면의 방정식
    - $z = c$: z축에 수직인 평면 또는 xy-평면에 평행한 평면의 방정식

2.2 여러 가지 평면의 방정식

- 두 평면의 위치관계 예제
  - 두 평면이 이루는 예각의 크기
    - $3x - 2y - z + 3 = 0; 2x + y - 3z + 1 = 0$
    - $x - 5y + 3z - 2 = 0; 4x - y - 3z + 3 = 0$

2.2 여러 가지 평면의 방정식

◆ 점과 평면 사이의 거리

- 좌표평면에서 점과 직선 사이의 거리
  - 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax + by + c = 0$
  - (거리) $= \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
- 공간좌표에서 점과 평면 사이의 거리
  - 점 (x_1, y_1, z_1)과 평면 $ax + by + cz + d = 0$
  - (거리) $= \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

2.2 여러 가지 평면의 방정식

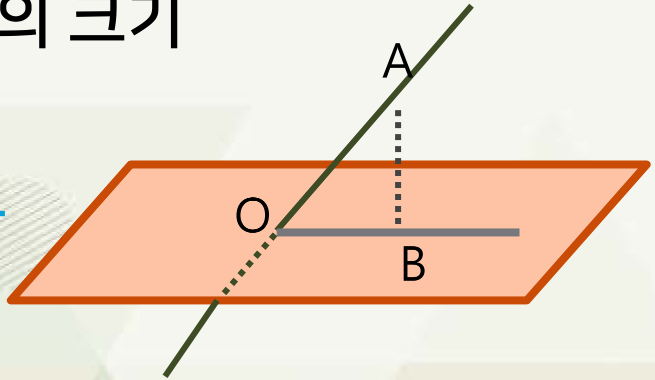
- 점과 평면 사이의 거리 예제
  - 두 점 $A(1,2,3)$와 $B(3,6,11)$을 지나는 직선 위의 점 P에서 평면 $3x-2y+6z=5$에 내린 수선의 길이가 5 수선을 내린 직선 위의 점 P의 좌표

3 벡터 방정식의 활용

3.1 직선과 평면 사이의 관계

◆ 직선과 평면이 이루는 각

- 직선과 평면의 교점(O)이 아닌 임의의 점(A)에서 평면에 내린 수선의 발(B)에 대하여 직선 OA와 직선 OB가 이루는 각 AOB의 크기
- 직선의 방향벡터 $\vec{d}$와 평면의 법선벡터 $\vec{h}$가 이루는 각을 **활용**



3.1 여러 가지 평면의 방정식

- 직선과 평면이 이루는 각 예제
  - 직선 $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{4}$과 평면 $4x-5y-3z-2=0$이 이루는 예각의 크기

3.2 구와 직선·평면 사이의 관계

- 구에 접하는 평면
  - 구와 평면이 접하는 점
    - 구 위의 점 & 평면이 지나는 점
  - 구와 접하는 평면의 법선벡터
    - 구의 중심과 접점(구 위의 점)을 지나는 직선의 방향벡터
  - 평면좌표에서 원과 직선 사이의 관계
    → 공간좌표에서 구와 평면 사이의 관계로 확장

3.2 구와 직선·평면 사이의 관계

- 구에 접하는 평면 예제 1
  - 구 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 위의 점 $T(a, b, c)$에서 이 구에 접하는 평면의 방정식

3.2 구와 직선·평면 사이의 관계

- 구에 접하는 평면 예제 2
  - 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$와 평면 $x + y + z = 1$이 만나서 이루는 교선(원)의 중심과 반지름

정리하기

- 방향벡터와 지나는 점으로 이루어진 직선
- 법선벡터와 지나는 점으로 이루어진 평면
- 벡터의 뺄셈과 그 크기로 이루어진 구
- 벡터 방정식의 풀이와 도형 사이의 관계

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.