15강. 벡터 방정식

※ 연습문제

문제 1. 좌표공간에 네 점 $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(-3,0,0)$, $D(0,0,2)$를 꼭짓점으로 하는 사면체 $ABCD$가 있다. 모서리 BD 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$의 값을 최소로 하는 점 P의 좌표를 (a,b,c) 라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

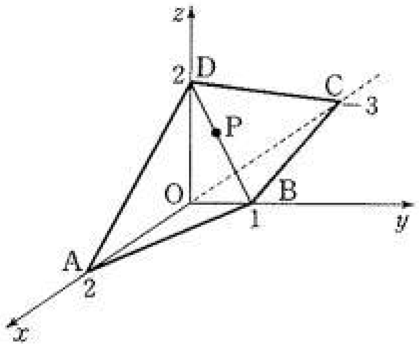
① $\frac{6}{5}$

② 1

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{3}{5}$

정답 : ①



$B(0,1,0)$, $D(0,0,2)$를 지나는 직선 BD의 방정식은 $\frac{y}{1} = \frac{z-2}{-2}$, $x=0$

이고, 직선 위의 임의의 점 P 의 좌표를 $(0, t, -2t+2)$로 놓으면

$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= 2^2 + (-t)^2 + (2t-2)^2 + (-3)^2 + (-t)^2 + (2t-2)^2 \\ &= 10t^2 - 16t + 21 \\ &= 10\left(t - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{73}{5} \end{aligned}$$

$t = \frac{4}{5}$일 때, $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2$의 값은 최소이고, 점 P의 좌표는 $(0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5})$이므로

점 P는 선분 BD 위에 있다.

$\therefore\ a+b+c = 0 + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

문제 2. 좌표공간에 점 $A(2,2,1)$과 평면 $\alpha : x+2y+2z-14=0$ 이 있다. 평면 α 위의 점 P 가 $\overline{AP} \leq 3$ 을 만족시킬 때, 점 P 가 나타내는 도형의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$의 값은? (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 13　　② 18

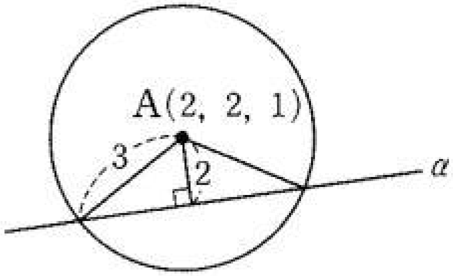
③ 21　　④ 24

정답 : ①

점 $A(2,2,1)$과 평면 $\alpha : x+2y+2z-14=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|1\times2+2\times2+2\times1-14|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{6}{3}=2$$

이때, 점 P가 $\overline{AP}\leq3$ 을 만족시키므로 점 P가 나타내는 도형은 아래 그림과 같이 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구와 평면 α의 교선인 원의 경계 및 내부이다.



따라서 점 P가 나타내는 도형의 넓이는 반지름의 길이가 $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ 인 원의 넓이이므로 $(\sqrt{5})^2\pi=5\pi$ 이다.

한편, 평면 α의 법선벡터는 $(1,2,2)$, xy평면의 법선벡터는 $(0,0,1)$이므로 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos\theta=\frac{|1\times0+2\times0+2\times1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}\times\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{2}{3}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S 라 하면

$$S=5\pi\times\cos\theta=5\pi\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}\pi=\frac{q}{p}\pi$$

$\therefore\ p+q=3+10=13$