1강. 집합과 명제

※ 연습문제

문제 1. 전체집합 $U=\{1,2,3,4,5\}$ 의 두 부분집합 A, B에 대하여, $A^c \cup B^c = \{1,2,3,5\}$, $(B-A)^c \cap \{A \cap (A \cap B)^c\} = \{1,3\}$일 때, 집합 A의 모든 원소의 제곱의 합은 얼마인가?

① 26 ② 27
③ 28 ④ 29

정답 : ①

$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ 이므로 $A^c \cup B^c = \{1,2,3,5\}$ 이다.
따라서 $(A \cap B) = \{4\}$ 이다.

$$
\begin{aligned}
&(B-A)^c \cap \{A \cap (A \cap B)^c\} \\
&= (B-A)^c \cap \{A \cap (A^c \cup B^c)\} \\
&= (B \cap A^c)^c \cap \{(A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)\} \\
&= (B^c \cup A) \cap \{\varnothing \cup (A \cap B^c)\} \\
&= \{(A \cup B^c) \cap A\} \cap B^c \\
&= A \cap B^c \\
&= A - B \\
&= \{1,3\} \\
&\therefore\ A = \{1,3,4\}
\end{aligned}
$$

그러므로 집합 A의 모든 원소의 제곱의 합은 $1^2+3^2+4^2=26$ 이다.

문제 2. 다음은 $4k+3$꼴의 소수가 무수히 많음을 증명한 것이다. (단, k는 음이 아닌 정수이다.)

> $4k+3$ 꼴의 소수가 유한개 있다고 가정하고, 이것을 $3,7,11,19,\cdots,p$라 하자.
> $n=4(7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot p)+3$ 이라 하면 n은 $3,7,11,19,\cdots,p$로 나누어떨어지지 않는다.
> n의 모든 소인수는 $4k+1$또는 $4k+3$꼴의 정수이고, $4k+1$꼴의 두 정수를 곱하면 (가) 꼴의 정수이다. 그러므로 n의 모든 소인수가 (가) 꼴이면, n도 (가) 꼴이다.
> 이것은 모순이므로 n은 (나) 꼴의 소인수 q를 갖는다. m은 q로 나누어떨어지므로, q는 $3,7,11,19,\cdots,p$가 아닌 소수이다.
> 즉, $3,7,11,19,\cdots,p$가 아닌 $4k+3$꼴의 소수가 존재한다. 이것은 가정에 모순이다.
> 따라서 $4k+3$꼴의 소수는 무수히 많다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k),g(k)$라 할 때, $f(7)+g(12)$의 값은?

① 71 ② 74
③ 77 ④ 80

정답 : ④

위의 증명에서 $7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot p$은 3의 배수가 아니다. 또한, 3은 $7,11,19,\cdots,p$로 나누어떨어지지 않는다. $n=4(7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot \cdots \cdot p)+3$ 이므로 n은 $7,11,19,\cdots,p$로 나누어떨어지지 않는다.

또한, $(4k+1)(4k+1)=4(4k^2+2k)+1$이고, $4k^2+2k$는 정수이므로 곱은 $[4k+1]$ 꼴의 정수가 된다. 이것은 가정에 모순이므로 n은 $[4k+3]$꼴의 소인수를 갖는다. 따라서 $f(k)=4k+1$이고, $g(k)=4k+3$이다.

$\therefore\ f(7)+g(12)=(4\times7+1)+(4\times12+3)=29+51=80$