

5강. 여러 가지 수열의 합

※ 연습문제

문제 1. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 = 32$, $\sum_{k=1}^{10} a_k(a_k + 1) = 18$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 3 \sum_{k=1}^{10} a_k \text{의 값은?}$$

① 25

② 26

③ 27

④ 28

정답 : ②

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^2 = 32 \text{ 에서, } \sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 + 2a_k + 1\} = 32$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1 = 32, \quad \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 22 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또, } \sum_{k=1}^{10} a_k(a_k + 1) = 18 \text{ 에서, } \sum_{k=1}^{10} \{(a_k)^2 + a_k\} = 18$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + \sum_{k=1}^{10} a_k = 18$$

$$\text{이 식의 양변에 2를 곱하면 } 2 \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 2 \sum_{k=1}^{10} a_k = 36 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \textcircled{㉠} \text{을 변끼리 빼면, } \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 = 14, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k = 4 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 + 3 \sum_{k=1}^{10} a_k = 14 + 3 \times 4 = 26$$

문제 2. 좌표평면 위에 다음 <단계>와 같은 순서로 점을 찍는다.

<단계 1> (0,1)에 점을 찍는다.

<단계 2> (0,3), (1,3), (2,3)에 이 순서대로 3개의 점을 찍는다.

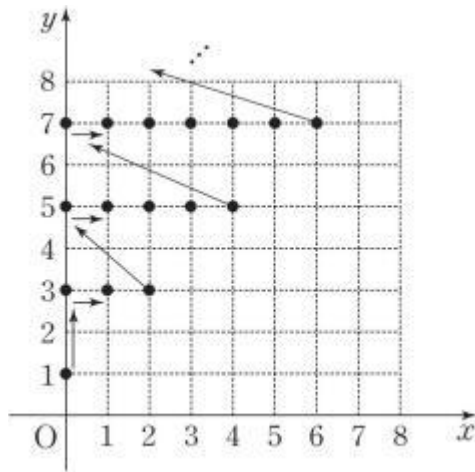
⋮

<단계 k> (0,2k-1), (1,2k-1), (2,2k-1), ..., (2k-2,2k-1)에

이 순서대로 (2k-1)개의 점을 찍는다. (단, k는 자연수이다.)

⋮

이와 같은 과정으로 <단계 1>부터 시작하여 점을 찍어 나갈 때, 100번째 찍히는 점의 좌표는 (p, q) 이다. $p^2 + q^2$ 의 값은?



① 648

② 685

③ 708

④ 722

정답 : ②

y좌표가 같은 점끼리 군으로 묶으면

$((0,0)), ((0,3), (1,3), (2,3)), ((0,5), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5)), \dots$

제n군까지의 항수는 $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ 이므로

100번째 항은 제10군의 마지막 항이다.

제10군은 $(0,19), (1,19), (2,19), \dots, (18,19)$ 이므로

100번째 항은 $(18,19)$ 이다.

$$\therefore p^2 + q^2 = 18^2 + 19^2 = 685$$

※ 정리하기

1. \sum (Sigma, summation)는 수열의 합을 나타내는 기호로, \sum 에 대하여 분배법칙과 실수 배가 가능하다.
2. S_n 은 수열의 첫 번째 항부터 n 번째 항까지의 합을 말하며, $\sum_{k=1}^n a_k$ 로 표현된 수열의 합 으로부터 일반항 a_n 을 도출할 수 있다.
3. 등차수열×등차수열, 등비수열×등비수열, 수열과 수열의 차(계차)로 이루어진 수열도 존재한다.