[대학기초수학]

6차시 | 점화식과 수학적 귀납법

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 귀납법과 연역법의 차이를 이해한다.
- 수열의 귀납적 정의를 이해한다.
- 점화식에서 수열의 일반항을 구한다.
- 수학적 귀납법을 활용해 증명할 수 있다.

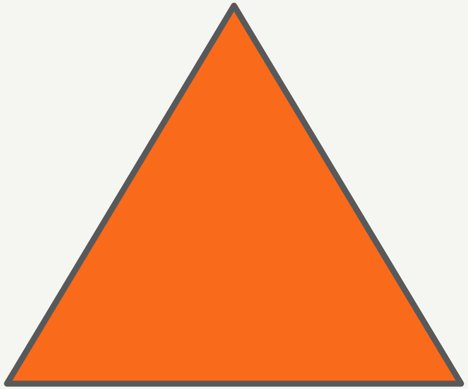
목차

1 수열의 귀납적 정의

1. 귀납법과 연역법

◆ 귀납법과 연역법 비교

- 귀납법(induction)
  - 구체적 사실 → 일반적 결론



예) 공자도 늙었다,
맹자도 늙었다, 이들은 사람이다.
→ 사람은 모두 늙는다

- 연역법(deduction)
  - 일반적 가설 → 구체적 검증

예) 사람은 모두 늙는다
공자와 맹자는 사람이다
→ 공자와 맹자는 늙는다.

1.1 수열의 규칙 발견

◆ 여러 가지 수열의 규칙 존재 가능성

- 수열의 정의
  - 자연수 집합 → 실수 집합으로 정의된 함수 $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
- 함수의 정의
  - 정의역의 각 원소가 공역의 임의의 원소에 대응 (특정 규칙 X)
- $\{a_n\}: 1, 3, 5, \quad , \cdots$
  - 가능성 1) 홀수인 자연수로 이루어진 수열, $a_n = 2n - 1$

    $$a_4 = 2 \times 4 - 1 = 7$$
  - 가능성 2) 복잡한 수열, $a_n = 2n - 1 + (n-1)(n-2)(n-3)$

    $$a_4 = 2 \times 4 - 1 + (4-1)(4-2)(4-3) = 13$$

1.1 수열의 규칙 발견

- 여러 가지 수열의 규칙 존재 가능성 예제
  - $\{a_n\}$: $1, 4, 1, 4, \square, \cdots$
  - $\{b_n\}$: $3, 1, 4, 1, 5, \square, \cdots$

1.2 수열의 귀납적 정의

◆ 수열을 정의하는 방법

- 일반항을 n에 대한 식(관계식)으로 표현
  - $a_n = 2n$: 2, 4, 6, 8, 10, ⋯
  - $b_n = 3^{n-1}$: 1, 3, 9, 27, 81, ⋯
- 수열의 귀납적 정의
  :첫 번째 항(또는 처음 몇 개 항)과 이웃한 항 사이의 관계식
  - $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2$: $2, 4, 6, 8, 10, \cdots$
  - $b_1 = 1,\ b_{n+1} = 3b_n$: $1, 3, 9, 27, 81, \cdots$
  - $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_{n+1} = 3c_n (n = 2, 3, \cdots)$: $1, 2, 6, 18, 54, \cdots$

1.2 수열의 귀납적 정의

◆ 기본적인 점화식

▫ 등차수열의 귀납적 정의

- $a_{n+1} - a_n = d$ (일정) $\Leftrightarrow\ a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$
  $\Leftrightarrow\ 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ (등차중항)

▫ 등비수열의 귀납적 정의

- $a_{n+1} \div a_n = r$ (일정) $\Leftrightarrow\ a_{n+2} \div a_{n+1} = a_{n+1} \div a_n$
  $\Leftrightarrow\ (a_{n+1})^2 = a_n \times a_{n+2}$ (등비중항)

▫ 조화수열의 귀납적 정의

- $\dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = d'$ (일정) $\Leftrightarrow\ \dfrac{1}{a_{n+2}} - \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n}$
  $\Leftrightarrow\ \dfrac{2}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_{n+2}}$ (조화중항)

1.2 수열의 귀납적 정의

기본적인 점화식 예제

- 다음 점화식을 만족하는 수열의 일반항은?
  - $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$
  - $b_1 = 3, b_2 = 4,\ b_{n+2} - b_n = b_{n+1} - b_n$
  - $c_1 = 1, c_2 = 3,\ (c_{n+1})^2 = c_n \times c_{n+2}$
  - $d_1 = 1, \frac{1}{d_{n+1}} - \frac{1}{d_n} = 1$

2 여러 가지 점화식

2.1 수열의 차를 활용한 수열

◆ 수열의 차가 기본적인 수열인 경우

- $a_1, a_{n+1} = a_n + f(n)\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$
  - 점화식에 $n = 1, 2, 3, \cdots, n-1$을 대입한 후 양변을 모두 더한다.

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

  - $f(n)$이 n에 대한 일차식 ➔ 수열의 차가 등차수열
  - $f(n)$이 n에 대한 거듭제곱 ➔ 수열의 차가 등비수열

2.1 수열의 차를 활용한 수열

- 수열의 차가 등차수열인 경우
  - $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2n$

- 수열의 차가 등비수열인 경우
  - $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3^n$

2.2 수열의 비를 활용한 수열

◆ 수열의 비(比)가 알려진 수열인 경우

- $a_1, a_{n+1} = a_n \times f(n)\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$
  - 점화식에 $n = 1, 2, 3, \cdots, n-1$을 대입한 후 양변을 모두 곱한다.

$$a_n = a_1 \times f(1) \times f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(n-1) = a_1 \prod_{k=1}^{n-1} f(k)$$

  - $f(n)$이 n에 대해 곱하면 소거되는 형태
  - $f(n)$이 n에 대한 거듭제곱 ➔ 수열의 비가 등비수열

2.2 수열의 차를 활용한 수열

- 수열의 비가 곱하면 소거되는 형태
  - $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

- 수열의 비가 등비수열인 경우
  - $a_1 = 1, a_{n+1} = 2^n a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

3 수학적 귀납법

3. 수학적 귀납법의 개념

◆ 일반적인 수학적 귀납법

- 증명의 목적:

  명제 $p(n)$이 임의의 $n \in \mathcal{N}$에 대하여 성립한다.

- 증명의 방법
  - $p(n_1)$이 성립함을 보인다 $n_1 \in \mathcal{N}$ (일반적으로 $n_1 = 1$)
  - $p(k)$일 때 성립한다고 가정하면, $(k \geq n_1)$
    $p(k+1)$일 때도 성립함을 보인다.
  - 위 두 가지를 증명을 종합하여
    명제 $p(n)$이 임의의 $n \in \mathcal{N}$에 대하여 성립함을 보인다.

3. 수학적 귀납법의 개념

◆ 일반적인 수학적 귀납법 예제

- 모든 자연수 n에 대하여, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ 성립
  - $n = 1$일 때
  - $n = k \geq 1$일 때, 성립한다고 가정하고 $n = k + 1$일 때도 성립 증명
  - 결론

3. 수학적 귀납법의 개념

◆ 강한(strong) 수학적 귀납법

- 증명의 목적:

  명제 $p(n)$이 임의의 $n \in \mathcal{N}$에 대하여 성립한다.

- 증명의 방법
  - $p(n_1)$이 성립함을 보인다 $n_1 \in \mathcal{N}$ (일반적으로 $n_1 = 1$)
  - $p(n_1),\ p(n_1+1), \cdots,\ p(k)$일 때 성립한다고 가정하면, $(k \geq n_1)$ $p(k+1)$일 때도 성립함을 보인다.
  - 위 두 가지를 증명을 종합하여 명제 $p(n)$이 임의의 $n \in \mathcal{N}$에 대하여 성립함을 보인다.

3. 수학적 귀납법의 개념

- 강한 수학적 귀납법 예제
  - 피보나치 수열 $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$의 일반항 증명

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\ \forall n \in \mathbb{N}$$

    - $n = 1$일 때
    - $n = 2$일 때

3. 수학적 귀납법의 개념

강한 수학적 귀납법 예제

- 피보나치 수열 $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$의 일반항 증명 (계속)

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]\ \forall n \in \mathbb{N}$$

  - $n = k-1, k$일 때, 성립한다고 가정하고 $n = k+1$일 때도 성립 증명

3.1 등식을 포함한 명제

- 명제 $p(n)$에 등호(=)가 포함된 경우
  - $n = n_1$일 때, $p(n_1)$의 (좌변)=(우변)을 보인다.
  - $n = k$일 때, $p(k)$의 (좌변)=(우변)임을 가정하고 $n = k + 1$일 때, $p(k + 1)$의 (좌변)=(우변) 증명
    - $p(k)$의 (좌변) → $p(k + 1)$의 (좌변)으로 만드는 식 확보
    - 앞에서 확보한 식을 $p(k)$ 등식의 양변에 추가
    - $p(k + 1)$의 (좌변) = $p(k)$에서 변환된 (우변)
      = $p(k + 1)$의 (우변)임을 확인

3.1 등식을 포함한 명제

◆ 등식을 포함한 명제의 증명 예제

- 모든 자연수 n에 대하여,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

  - $n = 1$일 때
  - $n = k \geq 1$일 때, 성립한다고 가정하고 $n = k + 1$일 때도 성립 증명
  - 결론

3.2 부등식을 포함한 명제의 증명

- 명제 $p(n)$에 부등호(≥)가 포함된 경우
  - $n = n_1$일 때, $p(n_1)$의 (좌변)≥(우변)을 보인다.
    - (좌변)−(우변) ≥ 0,
    - (좌변)과 (우변) 모두 양수인 경우, (좌변)/(우변)≥ 1
  - $n = k$일 때, $p(k)$의 (좌변)≥(우변)임을 가정하고
    $n = k + 1$일 때, $p(k+1)$의 (좌변)≥(우변) 증명
    - $p(k)$의 (좌변) → $p(k+1)$의 (좌변)으로 만드는 식 확보
    - 앞에서 확보한 식을 $p(k)$ 등식의 양변에 추가
    - $p(k+1)$의 (좌변) $\geq$ $p(k)$에서 변환된 (우변)
      $\geq$ $p(k+1)$의 (우변) 임을 확인

3.2 부등식을 포함한 명제의 증명

부등식을 포함한 명제의 증명 예제

- 모든 자연수에 대하여,

$$H(n) := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \frac{2n}{n+1}$$

  - $n = 1$일 때
  - $n = k \geq 1$일 때, 성립한다고 가정하고 $n = k + 1$일 때도 성립 증명
  - 결론

정리하기

- 귀납법: 구체적 사실 → 일반적 결론
- 연역법: 일반적 가설 → 구체적 검증
- 수열의 귀납적 정리와 점화식
- 수학적 귀납법을 활용한 증명법

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.