13강. 공간좌표

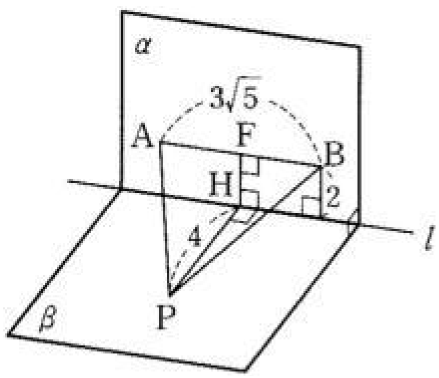
※ 연습문제

문제 1. 좌표공간에 서로 수직인 두 평면 α와 β가 있다. 평면 α 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AB}=3\sqrt{5}$ 이고 직선 AB는 평면 β에 평행하다. 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고, 평면 β 위의 점 P와 평면 α 사이의 거리는 4일 때, 삼각형 PAB의 넓이를 S라 하면 $\frac{1}{3}S^2$ 의 값은?

① 72　　② 75
③ 78　　④ 81

정답 : ④

두 평면 α와 β가 서로 수직이고 평면 α 위에 있는 직선 AB와 평면 β가 서로 평행하므로, 조건을 만족시키는 선분 AB와 점 P를 좌표공간에 나타내면 아래 그림과 같다.



이때, 두 평면이 만나서 생기는 교선을 l이라 하자. 교선 l과 선분 AB는 평행하고, 평면 β 위의 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 F라 하면 점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로 $\overline{PH}=4$이고, 점

A와 평면 β 사이의 거리가 2이므로 $\overline{PH}=2$이다.

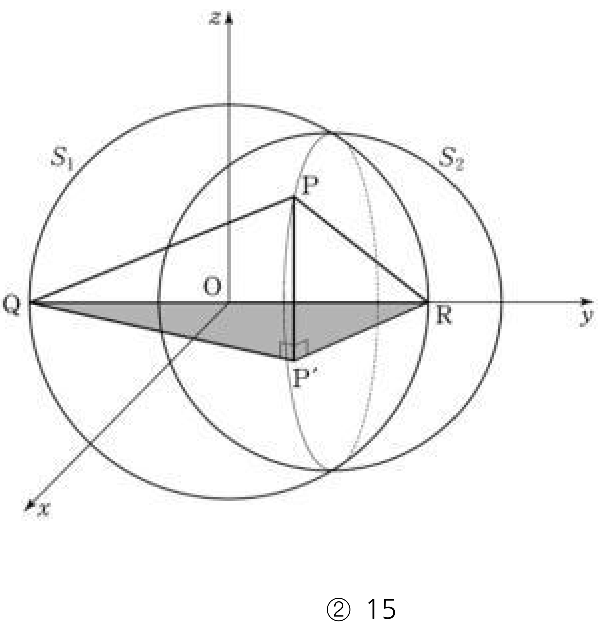
선분 AB 위의 점 F에 대하여 $\overline{AB}\perp\overline{FH}$ 이고, $\overline{PH}\perp(\text{평면}\alpha)$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AB}\perp\overline{PF}$ 이다. 즉, 직각삼각형 FPH에서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{PF}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{FH}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

따라서 삼각형 PAB의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면 높이는 $\overline{PF}$ 이므로

$\triangle PAB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PF}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=15$

$\therefore\ \frac{1}{3}S^2=\frac{1}{3}(15)^2=75$

문제 2. 두 구 $x^2+y^2+z^2=81$, $x^2+(y-5)^2+z^2=56$ 을 각각 S_1, S_2라 하자. 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하고, 점 P의 평면 xy위로의 정사영을 P'이라 하자. 구 S_1과 y축이 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, 사면체 $PQP'R$의 부피의 최댓값을 M이라 하자. $\frac{1}{6}M$의 값은?



① 14　　② 15

③ 16　　④ 17

정답 : ①

$x^2+y^2+z^2=81$ ··· ㉠ $x^2+(y-5)^2+z^2=56$ ··· ㉡

에서 ㉠ - ㉡을 계산하여 정리하면

$y=5$

따라서 두 구가 만나는 원은 평면 $y=5$ 위에 있다

.

구의 방정식 ㉠에 $y=5$를 대입하면

$x^2+z^2=56$ ··· ㉢

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 방정식은 $x^2+z^2=56$, $y=5$

이 원 위의 점 $P(x,0,z)$의 xy평면 위로의 정사영은 $P'(x,5,0)$이고, 두 점 Q, R의 좌표는 각각 $(0,9,0)$, $(0,-9,0)$이므로 삼각형 $QP'R$의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{QR}\cdot|x|=9|x|$$

이 때, 사면체 $PQP'R$의 높이는 $|z|$이므로 이 사면체의 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot|z|=3|xz|$$

그런데, 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의해

$$x^2+z^2=56\geq 2\sqrt{x^2z^2}=2|xz|$$

이므로 $|xz|\leq 28$

$\therefore\ V=3|xz|\leq 3\cdot 28=84$

따라서 구하는 사면체의 부피의 최댓값 M은 84이다.

$$\therefore\ \frac{1}{6}M=\frac{1}{6}\times 84=14$$