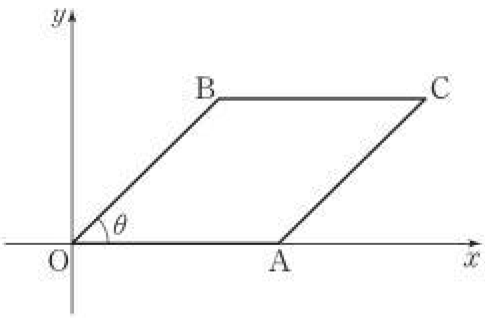
12강. 삼각함수 (2)

※ 연습문제

문제 1. 좌표평면에서 점 A의 좌표는 (1,0)이고, 0 < θ < $\frac{\pi}{2}$ 인 θ 에 대하여 점 B의 좌표는 ($\cos\theta$, $\sin\theta$)이다. 사각형 $OACB$가 평행사변형이 되도록 하는 제 1사분면 위의 점 C에 대하여 사각형 $OACB$의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 OC의 길이의 제곱을 $g(\theta)$ 라 하자. $f(\theta)+g(\theta)$의 최댓값이 $p+q\sqrt{5}$일 때 p^2+q^2의 값은? (단 O 는 원점이다.)



① 5　　② 6
③ 7　　④ 8

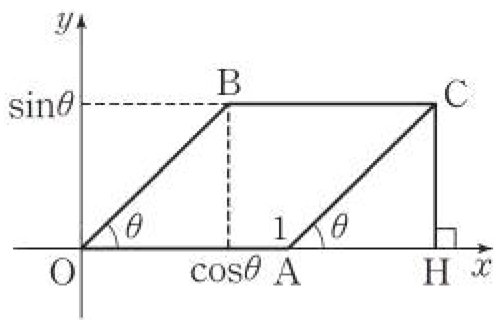
정답 : ①

사각형 $OACB$가 평행사변형이므로 $\overline{BC}=\overline{OA}=1$ 이고,점 B($\cos\theta$, $\sin\theta$)이므로 $f(\theta)=\overline{OA}\times(\text{점}B\text{의 }y\text{좌표})=1\times\sin\theta=\sin\theta$

평행사변형의 성질에 의하여 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 평행사변형에서 $\angle CAH$ = $\angle BOA$ = θ 에 대하여

$$\overline{AH}=\overline{CA}\cos\theta=\overline{OB}\cos\theta=(\text{점}B\text{의 }x\text{좌표})=\cos\theta$$

즉, 점 C의 y좌표는 $\sin\theta$이고, x좌표는 $\overline{OA}+\overline{AH}=1+\cos\theta$ 이다.



따라서 점 $C(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$ 에 대하여

$$g(\theta)=\overline{OC}^2=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta=1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=2+2\cos\theta$$

$$f(\theta)+g(\theta)=\sin\theta+2\cos\theta+2=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+2$$

$$(\text{단}, \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}})$$

이때, $-1\le\sin(\theta+\alpha)\le 1$ 에서

$2-\sqrt{5}\le\sqrt{5}sin(\theta+\alpha)+2\le 2+\sqrt{5}$ 이므로

$f(\theta)+g(\theta)$ 의 최댓값은 $2+\sqrt{5}$ 이다.

$\therefore\ p^2+q^2=2^2+1^2=5$

문제 2. 좌표평면에서 직선 $y=mx\ (0<m<\sqrt{3})$ 가 x축과 이루는 예각의 크기를 θ_1, 직선 $y=mx$가 직선 $y=\sqrt{3}x$ 와 이루는 예각의 크기를 θ_2라 하자. $3\sin\theta_1+4\sin\theta_2$ 의 값이 최대가 되도록 하는 m이 존재할 때 m^2의 값은?

① $\frac{2}{3}$　　② $\frac{3}{8}$

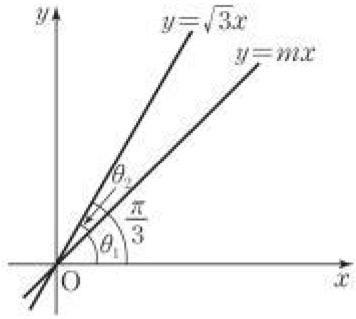
③ $\frac{1}{6}$　　④ $\frac{1}{12}$

정답 : ②

직선 $y=\sqrt{3}x$는 x축과 양의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼의 각의 크기를 이루고 있으므로

직선 $y=mx$ 와 $y=\sqrt{3}x$가 이루는 예각의 크기 θ_2에 대하여

$\theta_2=\frac{\pi}{3}-\theta_1$　… ㉠



$$3\sin\theta_1+4\sin\theta_2=3\sin\theta_1+4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right) \qquad (\because ㉠)$$

$$=3\sin\theta_1+4\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta_1-\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta_1\right)$$

$$=3\sin\theta_1+4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_1-\frac{1}{2}\sin\theta_1\right)$$

$$=\sin\theta_1+2\sqrt{3}\cos\theta_1$$

$$=\sqrt{13}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{13}}\sin\theta_1+2\sqrt{3}}{\sqrt{13}\cos\theta_1}\right)$$

$$=\sqrt{13}(\cos\alpha\sin\theta_1+\sin\alpha\cos\theta_1)$$

$$=\sqrt{13}\sin(\theta_1+\alpha)$$

$$(\text{단}, \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{13}}, \sin\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}})$$

사인함수가 최대가 되는 경우의 함숫값이 1이므로

$\sin(\theta_1+\alpha)=1$ ($\because$ $(0<m<\sqrt{3})$)일 때, $3\sin\theta_1+4\sin\theta_2$ 가 최대가 된다. 즉, $\theta_1+\alpha=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 이고 직선 $y=mx$가 x축과 이루는 예각의 크기가 θ_1이므로

$$m=\tan\theta_1=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{13}}}{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore\ m^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{1}{12}$$