

확률과정 2



통계·데이터과학과
이금희 교수

학습목표

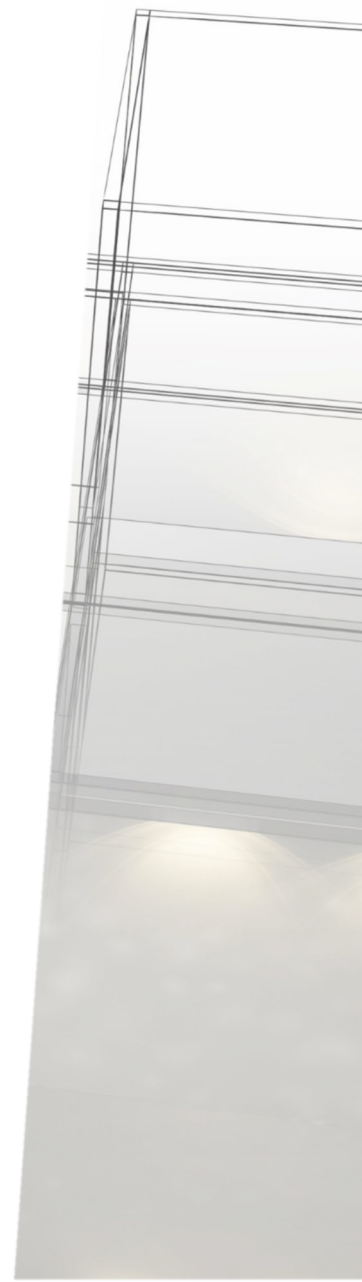
1. 포아송 과정을 이해할 수 있다.
2. 이항분포 과정을 이해할 수 있다.
3. 강화학습을 이해할 수 있다.



01

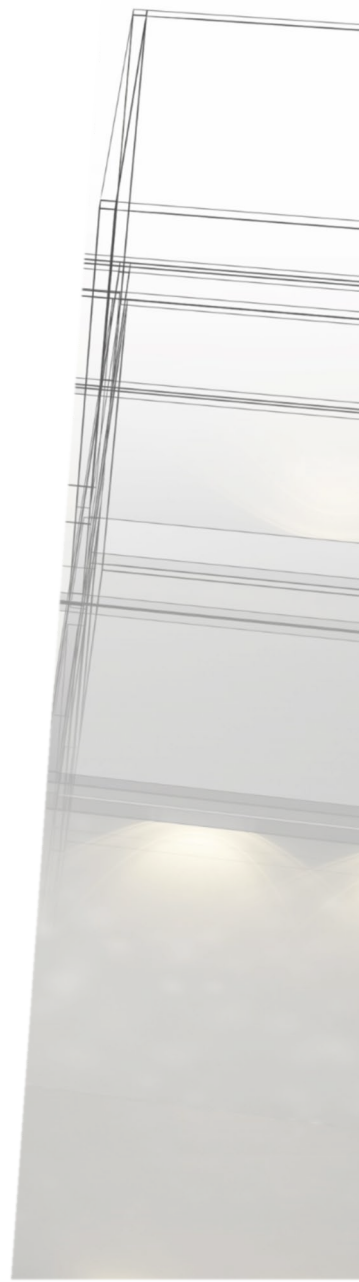
14강 확률과정 2

포아송 과정



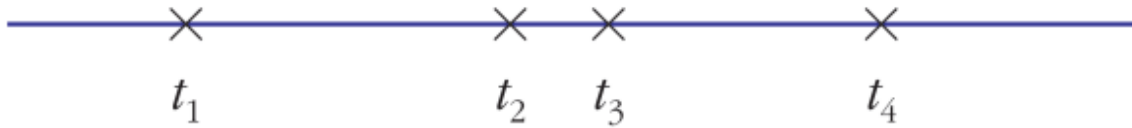
교통사고 발생과 지진 발생의 특징

- ◆ 짧은 시간 동안 사건 발생 확률 매우 낮음
- ◆ 짧은 기간 동안 사건 발생 확률은 기간에 비례
- ◆ 서로 다른 기간 동안 발생 사건들은 서로 영향을 주지 않음



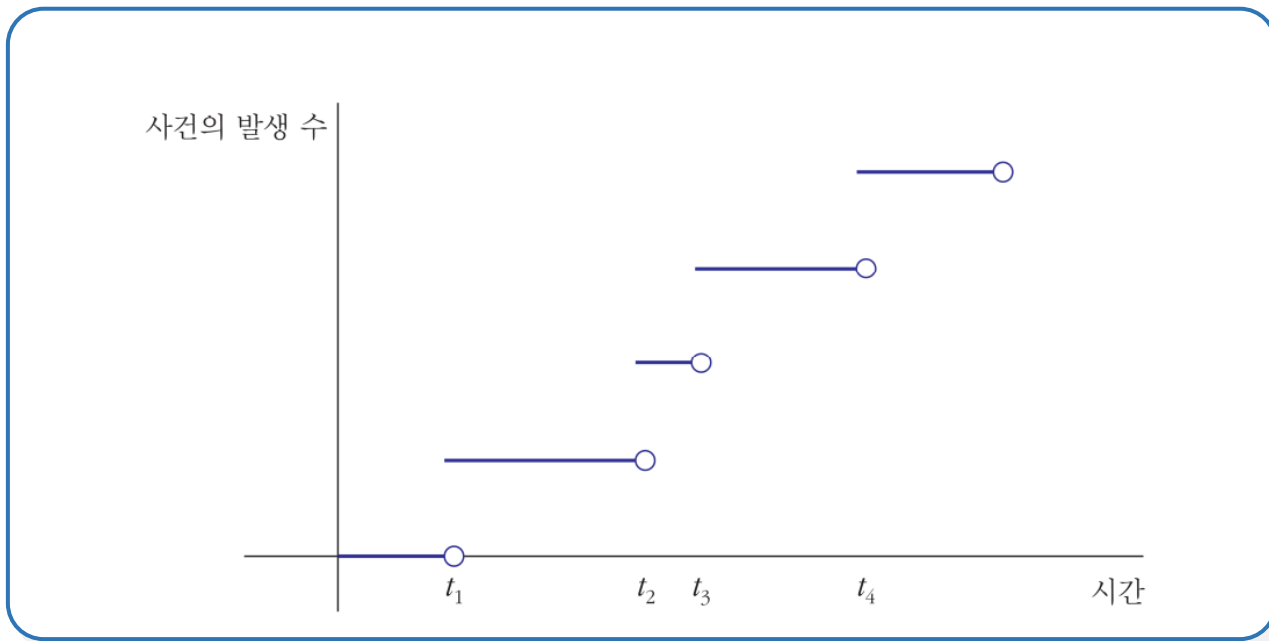
사고 발생 수와 시간

◆ 사건 발생 시간



사고 발생 수와 시간

◆ 사건의 발생 수



포아송 과정

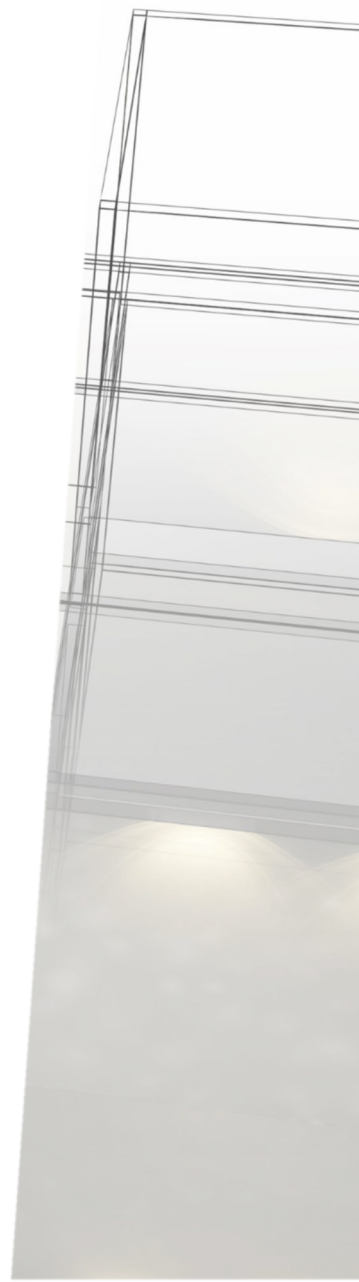
- ◆ 시간 t 까지 발생 사건 수 $N(t)$: 평균 λt 인 포아송 분포

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

- ◆ 시간 s 와 t 사이 발생 사건 수 : 평균 $\lambda(t - s)$ 인 포아송 분포

- ◆ 사건과 사건 사이 시간 간격 : 평균 $\frac{1}{\lambda}$ 인 지수 분포

→ $N(t)$: 포아송(Poisson) 과정



포아송 과정의 예

◆ 어느 지역 지진의 수

: 평균적으로 1년에 4번 발생

- 향후 6개월 동안 발생 지진의 수
→ 평균 2인 포아송분포
- 지진과 다음 지진 사이 시간 : 평균 1/4년 지수분포



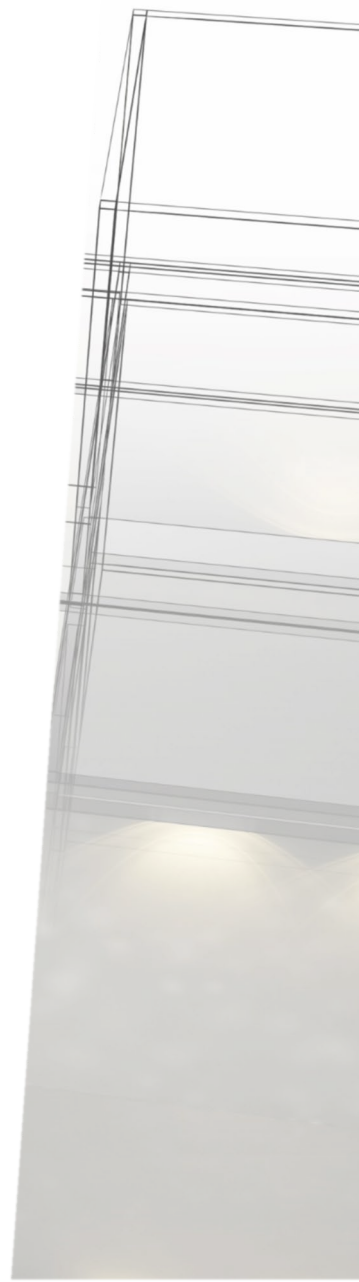
포아송 과정의 예

예

화재 신고의 수

: 시간당 발생비율이 2건인 포아송과정

(1) 10시와 12시 사이 화재 신고의 수가 2건일 확률은?



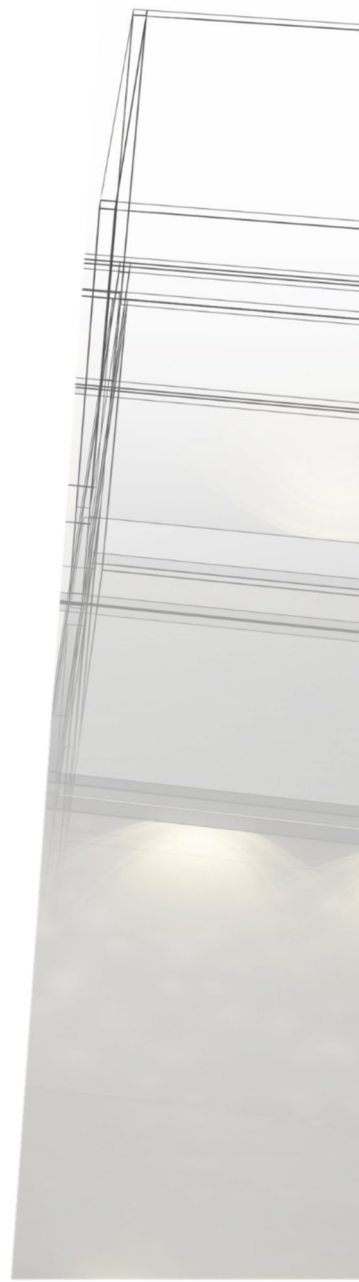
포아송 과정의 예

예

화재 신고의 수

: 시간당 발생비율이 2건인 포아송과정

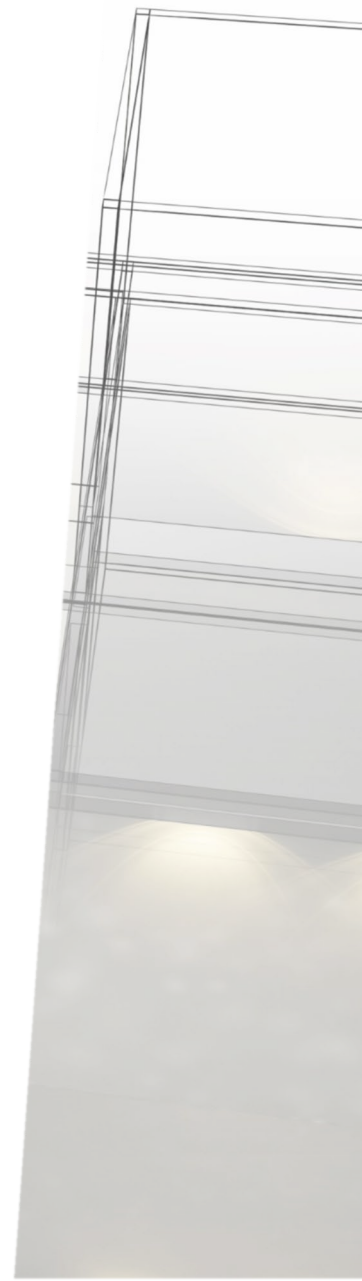
- (2) 10시와 11시 사이 화재 신고 수가 평일보다 많은 5건.
이날 오후 1시부터 2시 사이에 화재 신고가 한 건도
없을 확률은?



02

14강 확률과정 2

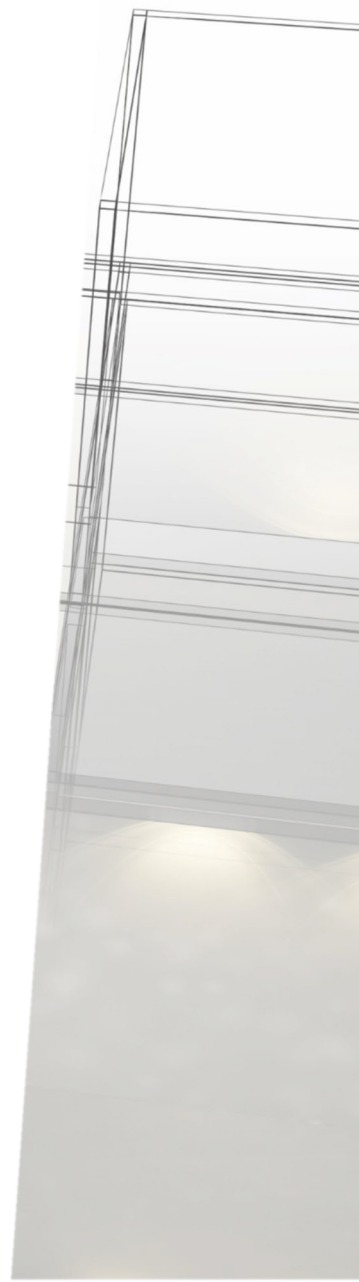
금융 파생상품



파생상품

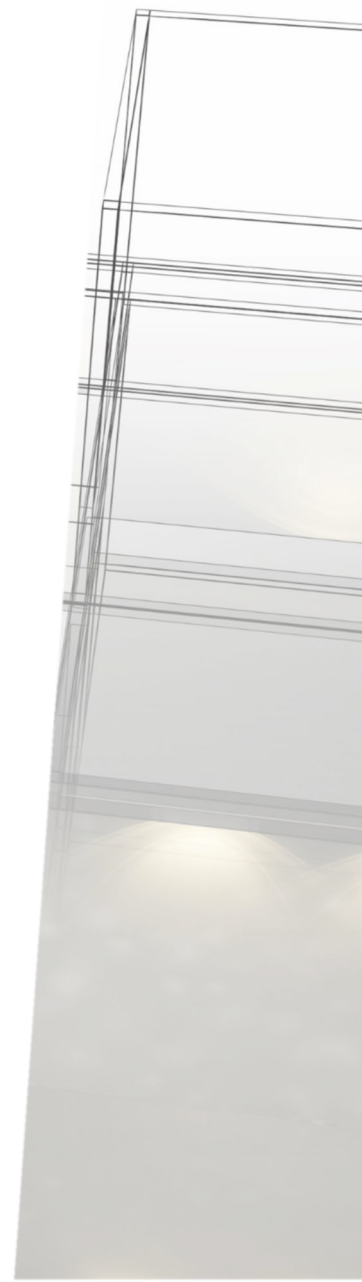
◆ 주식이나 외국 통화 기초자산에서 파생되어 나온 상품

- ① 한 달 후 미국 달러 \$10,000을 1,360원 / 달러에 사는 계약
- ② 한 달 후 미국 달러 \$10,000을 1,360원/ 달러에 살 수 있는 권리



파생상품의 예

- ◆ 선물 : 특정상품의 어느 시점에 일정한 가격으로 사거나 파는 계약
- ◆ 콜옵션 : 특정상품을 어느 시점에 일정한 가격으로 살 수 있는 권리
- ◆ 풋옵션 : 특정상품을 어느 시점에 일정한 가격으로 팔 수 있는 권리



파생상품

◆ 미국 1 달러 : 현재 1,350원, 한 달 후 1,400원

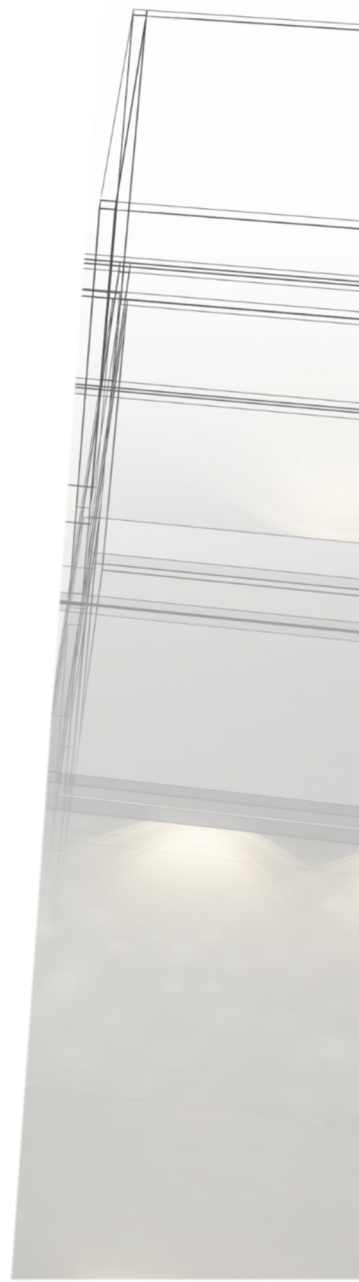
- ① 한 달 후 \$10,000을 1,360원 / 달러에 사는 계약
- ② 한 달 후 \$10,000을 1,360원 / 달러에 살 수 있는 권리
- ② 한 달 후 \$10,000을 1,360원 / 달러에 팔 수 있는 권리



파생상품

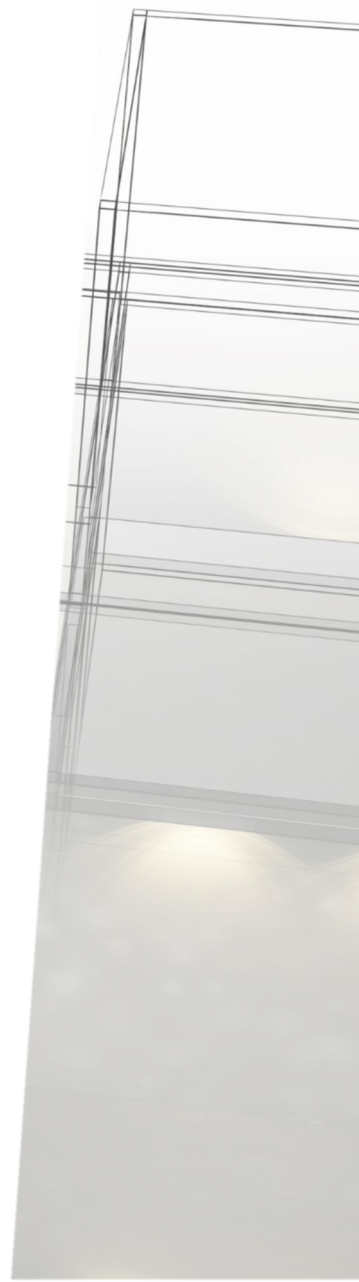
◆ 미국 1 달러 : 현재 1,350원, 한 달 후 1,300원

- ① 한 달 후 \$10,000을 1,360원 / 달러에 사는 계약
- ② 한 달 후 \$10,000을 1,360원 / 달러에 살 수 있는 권리
- ② 한 달 후 \$10,000을 1,360원 / 달러에 팔 수 있는 권리



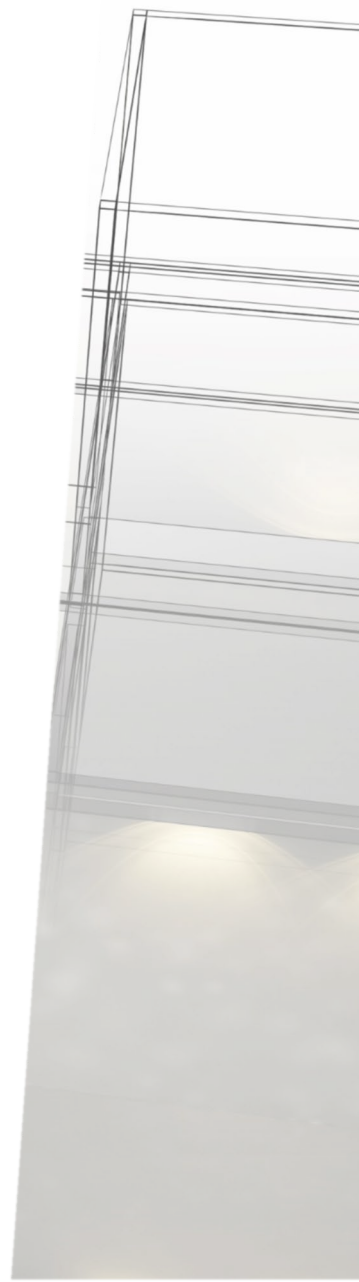
파생상품의 기능

- ◆ 가격등락에 따른 위험을 회피 (hedging)
- ◆ 위험을 감수하고 이익을 얻으려 하는 것



파생상품

◆ 콜옵션의 가치는 얼마일까?



금리

◆ 금리가 연 4%인 경우 복리 계산

-6개월 복리 : $a(1 + 0.02)^2 = 1.0404a$

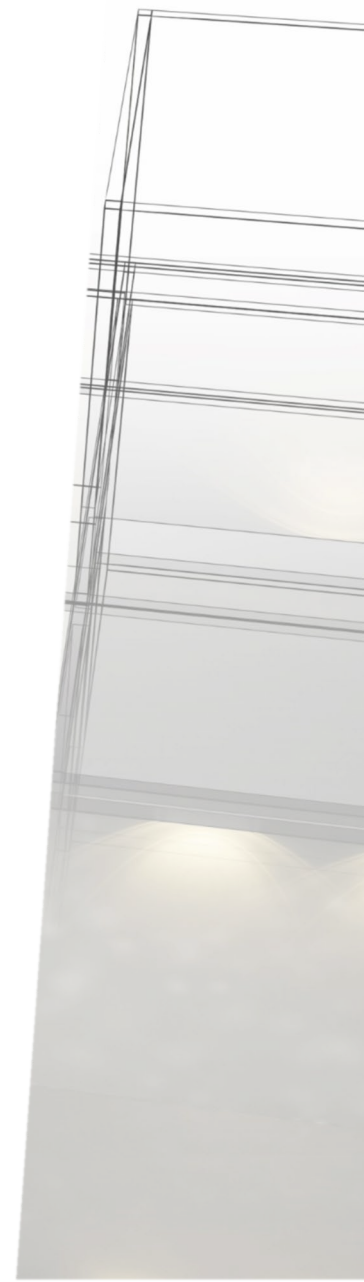
-3개월 복리 : $a(1 + 0.01)^4 = 1.040604a$

-연속복리 : $ae^{0.04} = 1.040811a$

금리

◆ 금리를 이용, 미래 금액을 현재의 가치로 환원

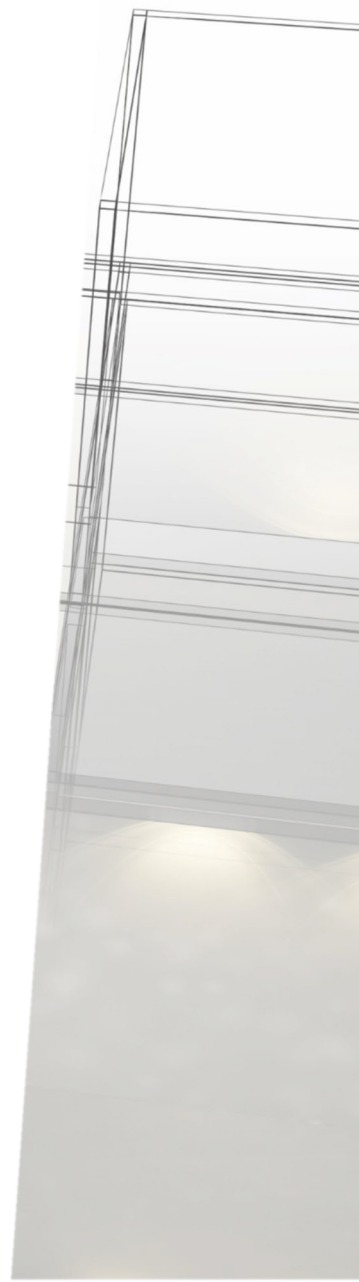
- 현재 금액 a , t 년 동안 예금한 후 금액 : ae^{rt}
- t 년 후 금액 a , 현재의 가치로 환원 : ae^{-rt}



03

14강 확률과정 2

이항분포 과정을
이용한 옵션가격

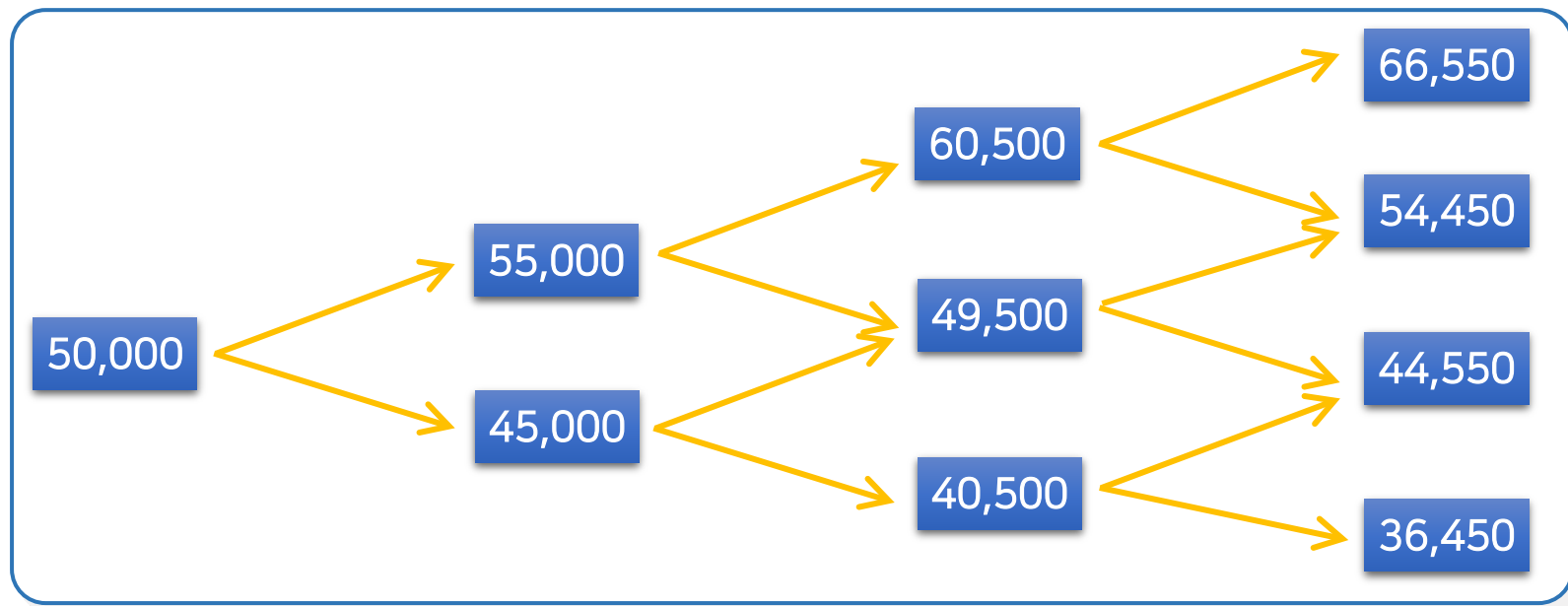


이항분포 과정

3. 이항분포 과정을 이용한 옵션가격

◆ 이항분포 과정 (binomial tree)

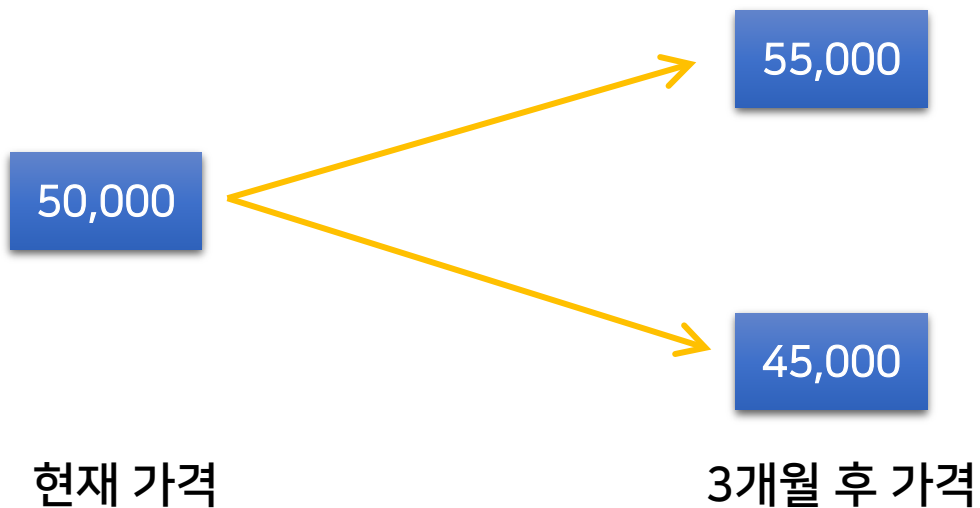
시점별 배반적인 두 가지 가능성 고려된 확률과정



이항분포 과정

3. 이항분포 과정을 이용한 옵션가격

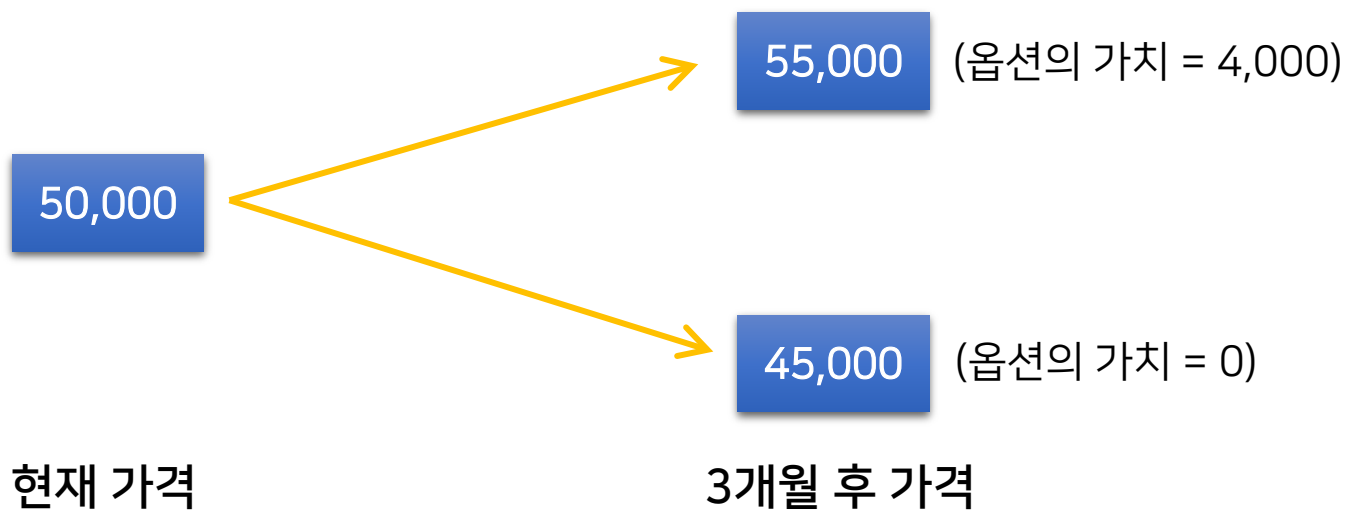
- ◆ 현재가격 50,000원인 주식은 3개월 후 10% 상승하거나 10% 하락



옵션 가치

3. 이항분포 과정을 이용한 옵션가격

◆ 콜옵션의 행사가격이 51,000원일 때



옵션 가치

3. 이항분포 과정을 이용한 옵션가격

◆ 주식 Δ 주 소유, 콜옵션 하나 매도

- 현재 콜 옵션의 가치 : f
- 투자자 현재 자산가치 : $50,000 \times \Delta - f$



(투자자의 가치 = $50,000 \times \Delta - f$)

옵션 가치

3. 이항분포 과정을 이용한 옵션가격

- ◆ 투자자 자산이 옵션 만기일에 주가에 상관없이 일정하기 위한 주식 수

$$55,000 \times \Delta - 4,000 = 45,000 \times \Delta$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{4,000 - 0}{55,000 - 45,000} = 0.4$$

- 옵션 만기일에 투자자의 자산가치

$$55,000 \times \Delta - 4,000 = 55,000 \times 0.4 - 4,000 = 18,000 \text{원}$$

옵션 가치

3. 이항분포 과정을 이용한 옵션가격

- ◆ 이자율을 연 4%라 할 때, 3개월 후 자산가치인 18,000원의 현재가치

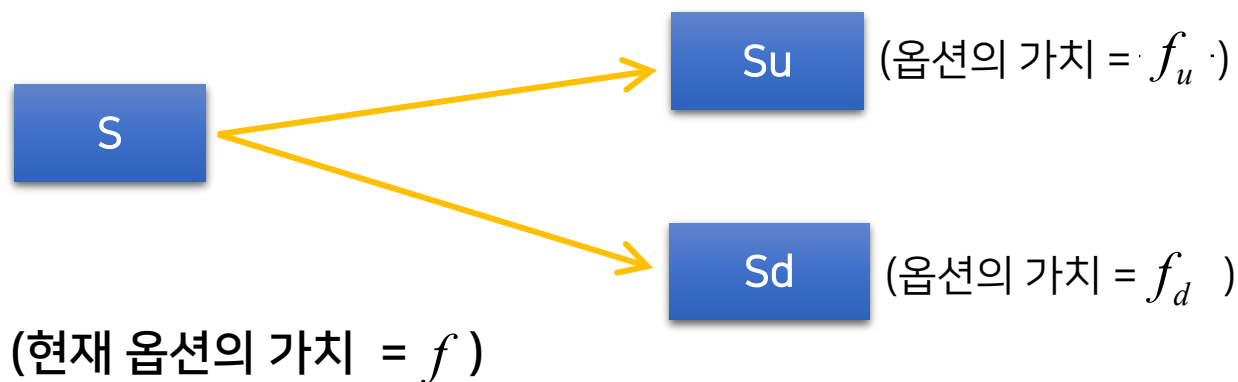
$$18,000 \times e^{-0.04 \times \frac{1}{4}} = 17,820.9$$

$$50,000 \times 0.4 - f = 17,820.9$$

- 콜옵션의 현재가치 : $f = 2,179.1$ 원

옵션 가치의 일반화

3. 이항분포 과정을 이용한 옵션가격



$$\blacklozenge f = e^{-rt} \left[\frac{e^{rt} - d}{u - d} f_u + \left(1 - \frac{e^{rt} - d}{u - d} \right) f_d \right]$$
$$f = e^{-0.04 \times \frac{1}{4}} \left[\left(\frac{e^{0.04 \times \frac{1}{4}} - 0.9}{1.1 - 0.9} \right) \times 4,000 - \left(1 - \frac{e^{0.04 \times \frac{1}{4}} - 0.9}{1.1 - 0.9} \right) \times 0 \right]$$

옵션의 가치의 예

3. 이항분포 과정을 이용한 옵션가격

예

현재가격 10,000원 주식, 4개월 후 가격이
5% 상승 또는 하락. 금리 6%, 4개월 만기
행사가격 11,000원인 풋옵션 가치는?

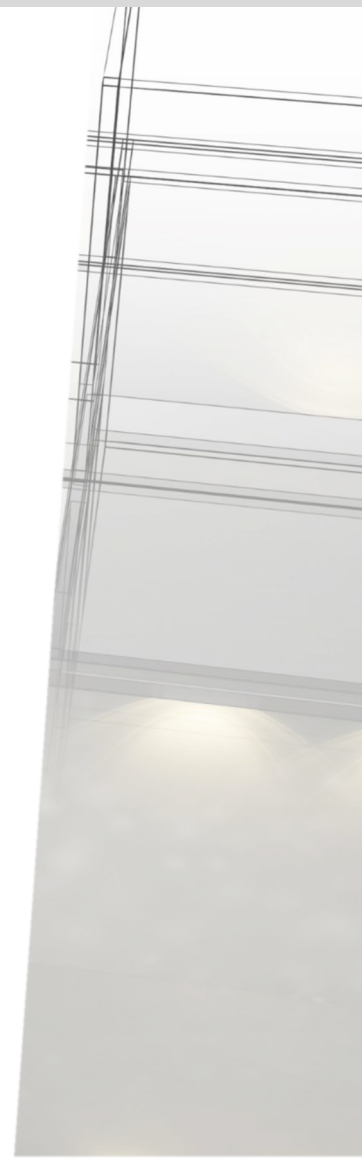


옵션의 가치의 예

3. 이항분포 과정을 이용한 옵션가격

예

현재가격 10,000원 주식, 4개월 후 가격이
5% 상승 또는 하락. 금리 6%, 4개월 만기
행사가격 11,000원인 풋옵션 가치는?



04

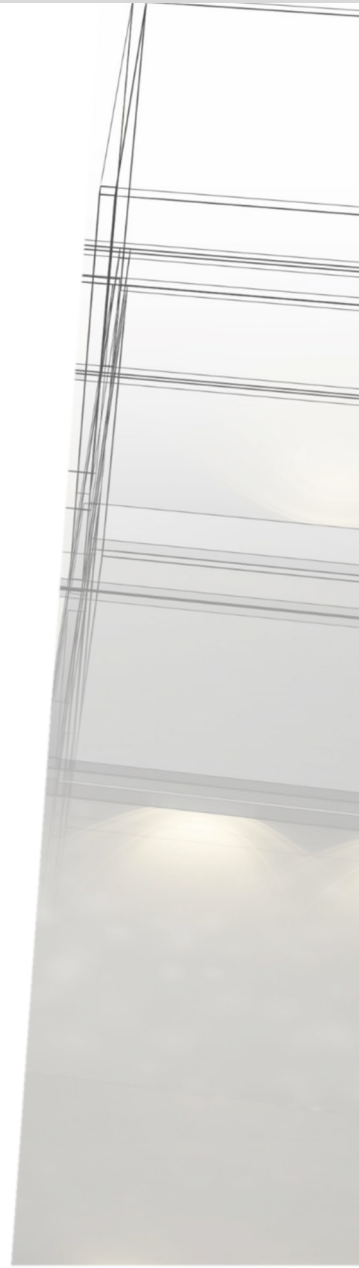
14강 확률과정 2

마코프 연쇄와 강화학습



기계학습

- ◆ 컴퓨터 스스로 학습을 통해 최적의 결과를 찾는 알고리즘을 개발하는 분야



강화학습

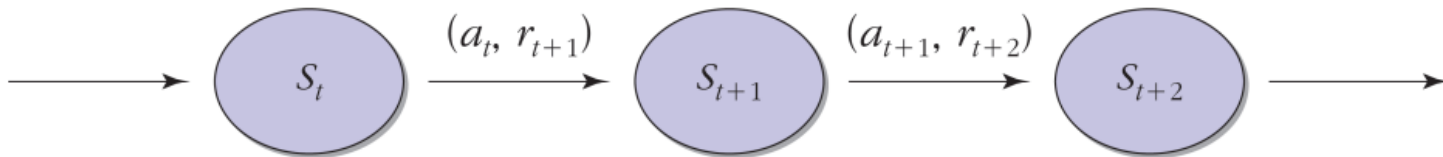
- ◆ 여러 선택 가능한 행동(action) 중에서 최적의 행동이나 행동 순서 구하는 방법과 관련

강화학습

- ◆ 마코프 연쇄 이용, 어떤 상태에서 다음 상태로 전이할 때 보상 개념 도입
→ 마코프 보상 과정(Markov reward process)

마코프 결정과정

- ◆ 마코프 보상 과정에 행동(action)이라는 개념 추가



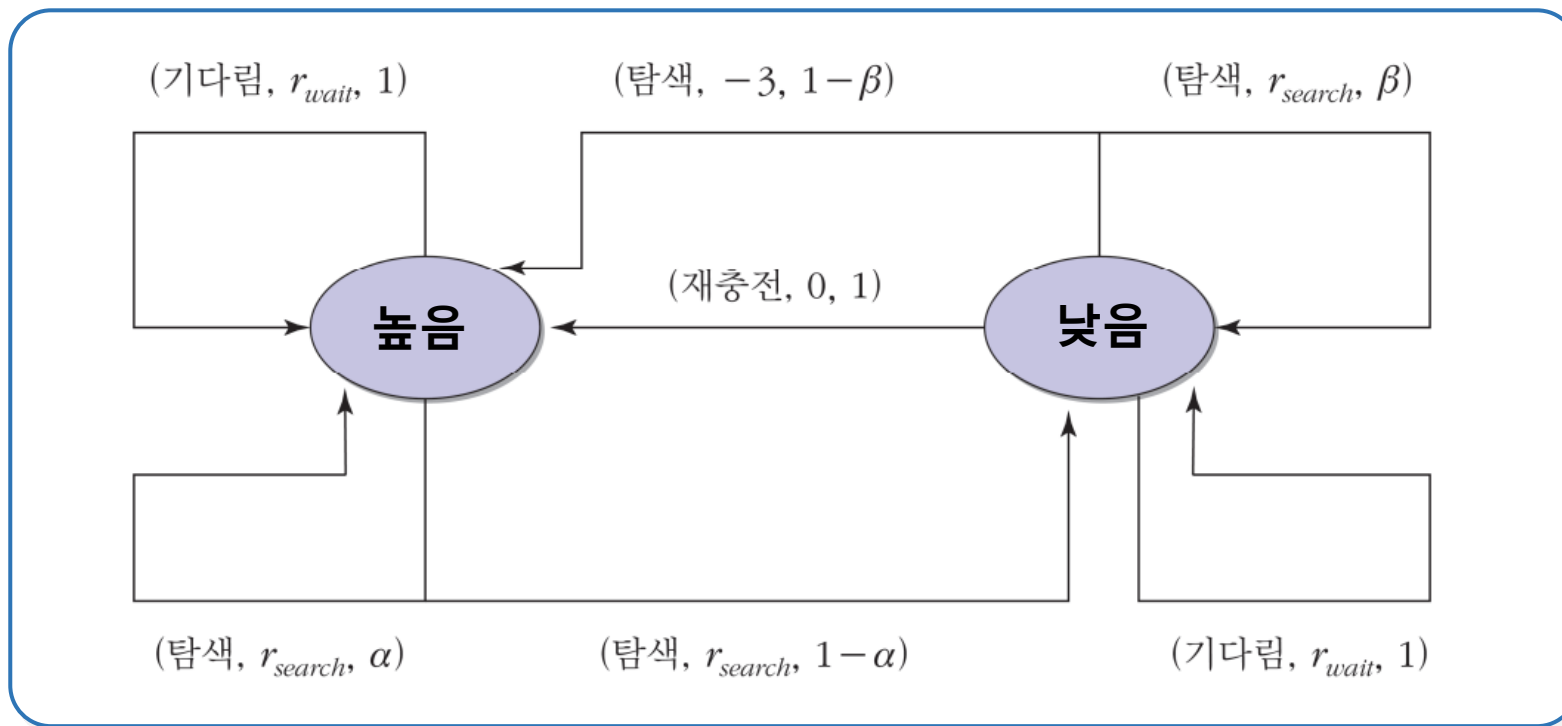
마코프 결정과정의 예

◆ 재활용 캔을 수거하는 로봇



마코프 결정과정의 예

◆ 재활용 캔을 수거하는 로봇



학습정리

- 지진과 같은 특정한 사건의 발생 횟수를 시간의 흐름에 따라 관측한 확률과정을 포아송 과정이라 한다.
- 각 시점 별 두 가지만 가능할 때 시간 흐름에 따라 관측한 확률과정을 이항분포 과정이라 한다.

학습정리

- 마코프 연쇄를 활용한 강화학습은 여러 선택 가능한 행동 중에서 최적의 행동이나 행동 순서를 구하는 알고리즘을 구현하는 인공지능의 한 분야이다

수고하셨습니다.

14강

확률과정 2

15강

몬테카를로 시뮬레이션

