[대학기초수학]

4차시 | 수열과 수열의 합

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 수열의 정의를 이해한다.
- 등차수열의 일반항과 합을 계산한다.
- 등비수열의 일반항과 합을 계산한다.
- 수열의 합과 일반항의 관계를 이해한다.

목차

1 수열의 정의와 일반항

1. 수열의 정의와 일반항

◆ 수열(sequence, progression)의 정의

- 수를 일정한 규칙으로 나열한 것
  - $1, 2, 3, 4, \cdots, 10$
  - $2, 4, 6, 8, 10$
  - $1, 3, 5, 7, 9$
- 자연수 집합에서 정의된 함수
  - 공역이 실수인 경우 실수열 $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
  - $a_1 := a(1), a_2 := a(2), a_3 := a(3), \cdots$
  - $\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$

1. 수열의 정의와 일반항

◆ 수열의 일반항

▫ 수열의 정의역과 치역 사이의 관계식

- $1, 2, 3, 4, \cdots, 10 \Rightarrow a_n = n \ (n = 1, 2, \cdots, 10)$
- $2, 4, 6, 8, 10 \Rightarrow b_n = 2n \ (n = 1, 2, 3, 4, 5)$
- $1, 3, 5, 7, 9 \Rightarrow c_n = 2n - 1 \ (n = 1, 2, 3, 4, 5)$

▫ 함수(일반항)로 정의된 수열

- $\{n^2 - 1\}$:
- $\{-2n + 1\}$:
- $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$:

1. 수열의 정의와 일반항

◆ 유한수열과 무한수열

- 유한수열: 항의 수가 유한한 경우
  - $1, 2, 3, 4, \cdots, 10 \Rightarrow a_n = n \ (n = 1, 2, \cdots, 10)$
  - $2, 4, 6, 8, 10 \Rightarrow b_n = 2n \ (n = 1, 2, 3, 4, 5)$
  - $1, 3, 5, 7, 9 \Rightarrow c_n = 2n - 1 \ (n = 1, 2, 3, 4, 5)$
- 무한수열: 항의 수가 무한한 경우
  - $\{n^2 - 1\}$:
  - $\{-2n + 1\}$:
  - $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$:

2 등차수열의 일반항과 합

2.1 등차수열의 일반항

- 등차수열(arithmetical progression, AP)의 정의
  - 어떤 수(첫째 항)에 차례로 일정한 수를 더한 수열
  - 공차(common difference): 차례로 더하는 일정한 수
    - $1, 2, 3, 4, \cdots, 10$ → 첫째 항: 1, 끝 항: 10, 공차: 1, 항의 개수: 10
    - $2, 4, 6, 8, 10$ → 첫째 항: 2, 끝 항: 10, 공차: 2, 항의 개수: 5
    - $1, 3, 5, 7, 9$ → 첫째 항: 1, 끝 항: 9, 공차: 2, 항의 개수: 5
  - 등차수열을 정의하는 요소: 첫째 항과 공차
    - 첫째 항: 10, 공차: -1 → $10, 9, 8, 7, \cdots, 1, 0, -1, \cdots$
    - 첫째 항: -5, 공차: 3 → $-5, -2, 1, 4, \cdots, 10, 13, 16, \cdots$

2.1 등차수열의 일반항

◆등차수열의 일반항 유도

- 첫째 항 a, 공차 d인 등차수열의 일반항
  - $\{a_n\}$: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots, a_n, \cdots$
  - $a_1 = a$, $a_2 = a_1 + d = a + d$, $a_3 = a_2 + d = a + 2d$,
    $a_4 = a_3 + d = a + 3d$, $a_5 = a_4 + d = a + 4d$,
    $\vdots$
  - 이러한 규칙으로부터, $a_n = a + (n-1)d$
- "일반항"의 이해
  - 함수로서 수열의 정의역과 치역의 관계식
  - 일정한 규칙으로 수열이 정의될 때, 수열의 n번째 항!

2.1 등차수열의 일반항

- 등차수열의 일반항 유도
  - $4, 7, 10, 13, 16, \cdots$
  - $9, 2, -5, -12, -19, \cdots$
  - $3, 3, 3, 3, 3, \cdots$

2.2 등차중항과 조화수열

- 등차중항: 등차수열을 이루는 수 중에서 가운데 항
  - a_n, a_{n+1}, a_{n+2}가 이 순서로 등차수열
    $\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ (a_n과 a_{n+2}의 산술평균)
    - 1, , 5, , 9가 이 순서로 등차수열?
    - 3, , , , 15가 이 순서로 등차수열?
  - 등차수열을 이루는 수의 표현
    - 등차수열을 이루는 세 개의 수: $a-d,\ a,\ a+d$
    - 등차수열을 이루는 네 개의 수:
    - 등차수열을 이루는 다섯 개의 수:

2.2 등차중항과 조화수열

- 등차수열을 이루는 수의 표현 예제
  - 등차수열을 이루는 네 개의 수가 있을 때,
    합 60, 가운데 두 항의 곱이 첫째 항과 끝 항의 곱보다 8만큼
    큰 경우 이 네 개의 수는?

2.2 등차중항과 조화수열

- 조화수열(harmonic progression)
  - 역수가 등차수열을 이루는 수열
  - $\{a_n\}$: $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n$ 조화수열

    $\Leftrightarrow \left\{\frac{1}{a_n}\right\}: \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots, \frac{1}{a_n}$ 등차수열
- 조화중항
  - 조화수열을 이루는 수 중에서 가운데 항
  - $\{a_n\}$: $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n$ 조화수열

    $\Leftrightarrow \left\{\frac{1}{a_n}\right\}: \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \cdots, \frac{1}{a_n}$ 등차수열 $\Leftrightarrow \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}$

2.2 등차중항과 조화수열

조화수열의 일반항 예제

- $a_1 = 12$, $a_2 = 6$, $a_{n+1}a_{n+2} - 2a_n a_{n+2} + a_n a_{n+1} = 0$ 을 만족할 때, 일반항 a_n은? (단, $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$)

2.3 등차수열의 합

◆ 등차수열의 합의 공식

- S_n: 수열의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합
  - $\{n\}$: $1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 10$
  - $S_{10} = \ \ 1 + 2 + 3 + \cdots + 10$
    $S_{10} = 10 + 9 + 8 + \cdots + 1$ 양변을 더하면,
    $2S_{10} = 11 + 11 + 11 + \cdots + 11 = 11 \times 10 \rightarrow S_{10} = \frac{10\times11}{2} = 55$
- $S_n = \frac{n[\text{첫째 항}+\text{끝 항}(n\text{번째 항})]}{2}$
  $= \frac{n[a+\{a+(n-1)d\}]}{2} = \frac{n[2a+(n-1)d]}{2}$

2.3 등차수열의 합

- 등차수열의 합의 공식 유도
  - 첫째 항이 a, 공차가 d인 등차수열의
    첫째 항부터 n번째 항까지의 합 S_n을 유도하면?

2.3 등차수열의 합

- 등차수열의 합의 공식 예제
  - 등차수열 $4, a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n,\ 40$의 합이 220일 때,
    이 등차수열의 공차와 사이에 포함된 항의 개수 n

3 등비수열의 일반항과 합

3.1 등비수열의 일반항

- 등비수열(geometric progression, GP)의 정의
  - 어떤 수(첫째 항)에 차례로 일정한 수를 곱한 수열
  - 공비(common ratio): 차례로 곱하는 일정한 수
    - $1, 2, 4, 8, \cdots, 64$ → 첫째 항: 1, 끝 항: 64, 공비: 2, 항의 개수: 7
    - $2, -4, 8, -16$ → 첫째 항: 2, 끝 항: -16, 공비: -2, 항의 개수: 4
    - $1, 3, 9, 27, 81$ → 첫째 항: 1, 끝 항: 81, 공비: 3, 항의 개수: 5
  - 등비수열을 정의하는 요소: 첫째 항과 공비
    - 첫째 항: -1, 공비: -1 → $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \cdots$
    - 첫째 항: 4, 공비: 1/3 → $4,\ {}^4/_3, {}^4/_9, {}^4/_{27}, {}^4/_{81}, \cdots$

3.1 등비수열의 일반항

◆ 등비수열의 일반항 유도

- 첫째 항 a, 공비 r인 등비수열의 일반항
  - $\{a_n\}$: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \cdots, a_n, \cdots$
  - $a_1 = a$, $a_2 = a_1 \times r = ar$, $a_3 = a_2 \times r = ar^2$, $a_4 = a_3 \times r = ar^3$, $a_5 = a_4 \times r = ar^4$,
    $$\vdots$$
  - 이러한 규칙으로부터, $a_n = ar^{n-1}$

3.1 등비수열의 일반항

등비수열의 일반항 유도

- $3, 0, 0, 0, 0, \cdots$
- $3, \ -6, \ 12, -24, 48, -96, \cdots$
- n번째 항이 $a_n = 2 \cdot 3^{2n-1}$인 등비수열의 첫째 항과 공비

3.2 등비중항과 산술기하조화평균

- 등비중항: 등비수열을 이루는 수 중에서 가운데 항
  - a_n, a_{n+1}, a_{n+2}가 이 순서로 등비수열
    $\Leftrightarrow a_{n+1} = \pm\sqrt{a_n a_{n+2}}$ (a_n과 a_{n+2}의 기하평균)
    - $1, \quad, 4, \quad, 16$가 이 순서로 등비수열?
    - $3, \quad, \quad, \quad, 243$가 이 순서로 등비수열?
  - 두 양수 a와 b의 산술기하조화평균의 관계
    - 산술평균$\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq$ 기하평균$\left(\sqrt{ab}\right) \geq$ 조화평균$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$
    - 산술평균, 기하평균, 조화평균은 이 순서대로 등비수열

3.2 등비중항과 산술기하조화평균

- 등비중항 예제
  - $x > 0$에 대하여, $x, x + 8, 9x, \cdots$ 등비수열을 이룰 때, 등비수열의 일반항은?

3.3 등비수열의 합

◆ 등비수열의 합 공식

- S_n: 수열의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합
  - $\{n\}$: 1, 2, 4, ⋯ , 512
  - $S_{10} = 1 + 2 + 4 + \cdots + 512$
    $2S_{10} = 2 + 4 + 8 + \cdots + 1024$ 두 식을 서로 빼면,
    $(1-2)S_{10} = 1 - 1024 \rightarrow S_{10} = \frac{1-1024}{1-2} = 1023$
- $S_n = \frac{a[1-r^n]}{1-r} = \frac{a[r^n-1]}{r-1}\ (r \neq 1),\ S_n = an\ (r = 1)$

3.3 등비수열의 합

- 등비수열의 합 공식 예제 1
  - 첫째 항이 a, 공비가 $r(\neq 1)$인 등비수열의 첫째 항부터 n번째 항까지의 합
  - $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{200} = ?$

3.3 등비수열의 합

- 등비수열의 합 공식 예제 2
  - 매월 초 10만 원씩 월이율 5%로 적립할 때, 1년 후 원리합계
  - 올해 말부터 매년 2,000만 원씩 받는 연금의 올해 초 현재가치는? 월이율 5%

4 수열의 합과 일반항의 관계

4. 수열의 합과 일반항의 관계

◆ 수열의 합으로부터 일반항을 유도

- S_n: 첫 번째 항부터 n번째 항까지의 합
- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$
  $S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$ 두 식을 서로 빼서 정리
- $S_n - S_{n-1} = a_n \ (n \geq 2)$, $S_1 = a_1$
  - 수열의 합으로부터 수열의 첫째 항과 일반항 유도 가능

4. 수열의 합과 일반항의 관계

수열의 합으로부터 일반항 유도 예제 1

- $S_n = n^2 + 4n$

- $S_n = n^2 + 4n + 3$

4. 수열의 합과 일반항의 관계

- 수열의 합으로부터 일반항 유도 예제 2
  - $S_n = 3 \cdot 4^n - 3$
  - $S_n = 2 \cdot 3^n + 1$

정리하기

- 수열은 자연수 집합과 실수 집합의 함수
- 어떤 수에 일정한 수를 더하는 등차수열
- 어떤 수에 일정한 수를 곱하는 등비수열
- 수열의 합으로부터 일반항 유도

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.