[대학기초수학]

10차시 | 부등식의 영역

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 좌표평면에서 부등식이 영역으로 표현되는 과정을 이해한다.
- 연립부등식의 영역과 곱으로 표현된 부등식의 영역을 이해한다.
- 부등식의 영역에서 최대·최소를 구한다.

목차

1 좌표평면과 부등식

1.1 도형의 방정식

- 직선의 방정식(linear equation)
  - 변수가 한 개인 일차방정식의 해
    - $2x - 3 = 1 \Rightarrow x = 2$, $3x + 1 = 4 \Rightarrow x = 1$
  - 변수가 여러 개인 일차방정식의 해
    - $2x + 3y = 6$?
    - $3x + 2y = 6$?
    - 해가 순서쌍으로 존재
  - $ax + by + c = 0$이 직선의 방정식인 이유?
    - 해의 순서쌍을 좌표평면에 표시하면 직선이 되기 때문에

1.1 도형의 방정식

◆ 포물선의 방정식(parabola equation)

- 포물선의 정의
  - 고정된 점(fixed point, 초점)과
    고정된 직선(준선)으로부터 거리가 같은 점의 집합
- 준선이 x축에 평행(가로)인 경우
  - 포물선의 모양은 위로 볼록 또는 아래로 볼록인 형태
  - 포물선의 방정식 $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$
- 준선이 y축에 평행(세로)인 경우
  - 포물선의 모양은 오른쪽 볼록 또는 왼쪽 볼록인 형태
  - 포물선의 방정식 $x = py^2 + qy + r \ (p \neq 0)$

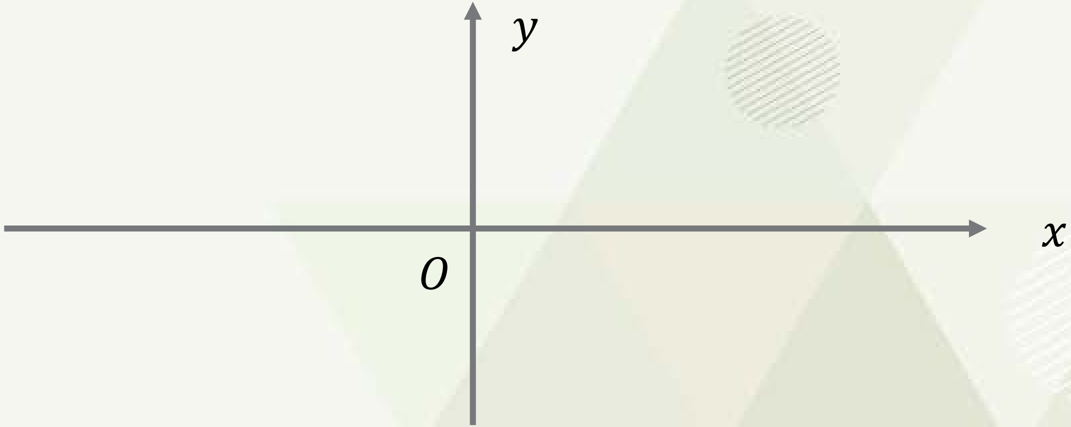
1.1 도형의 방정식

◆ 원의 방정식(circle equation)

- 원의 정의
  - 한 정점(중심)으로부터 떨어진 거리가 같은(반지름) 점들의 집합
- 원을 정의하려면?
  - 중심과 반지름 필요
  - 삼각형의 외접원은 유일 → 같은 직선 위에 있지 않은 세 점 필요
- 원의 방정식
  - $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
  - $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

1.2 부등식의 영역

- $y > f(x)$ 또는 $y < f(x)$ 꼴의 부등식의 영역
  - 좌표평면 임의의 점 (x, y) 중
    - 도형의 방정식 $y = f(x)$을 만족시키지 않고
    - 부등식 $y > f(x)$ 또는 $y < f(x)$를 만족시키는 해(또는 근)들의 집합
  - 부등식 $y > x + 1$ $(x - y + 1 < 0)$의 영역

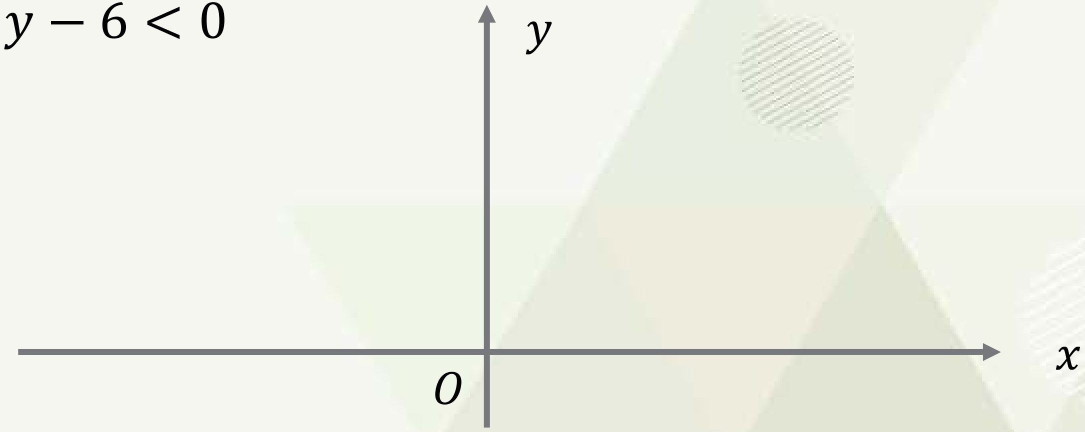


1.2 부등식의 영역

◆ 직선의 방정식과 부등식의 영역

부등식 $ax + by + c > 0$의 영역

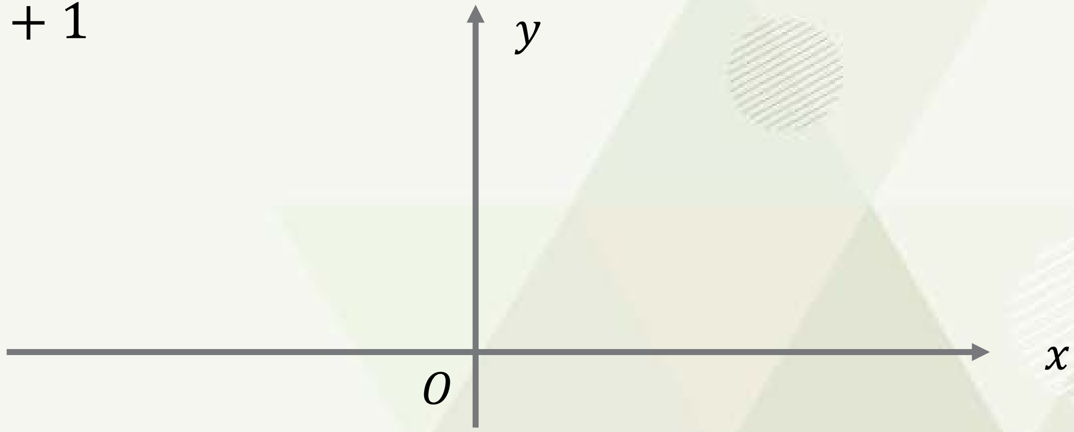
- 좌표평면의 점 중에서 직선의 방정식 $ax + by + c = 0$의 해가 아니며
- 부등식 $ax + by + c > 0$을 만족시키는 점
- 방정식 $ax + by + c = 0$이 나타내는 직선의 위 또는 아랫부분
- $2x + 3y - 6 < 0$



1.2 부등식의 영역

◆ 포물선의 방정식과 부등식의 영역

- 부등식 $y > ax^2 + bx + c$의 영역
  - 좌표평면의 점 중에서 포물선의 방정식 $y = ax^2 + bx + c$이 아닌
  - 부등식 $y > ax^2 + bx + c$을 만족시키는 점
  - 방정식 $y = ax^2 + bx + c$이 나타내는 포물선의 위 (<, 아래) 부분
  - $y < x^2 + 1$

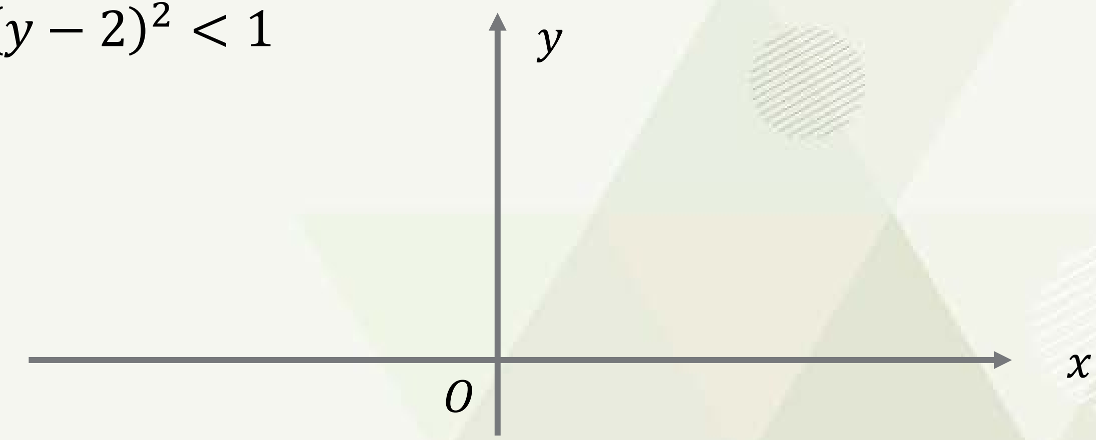


1.2 부등식의 영역

◆ 원의 방정식과 부등식의 영역

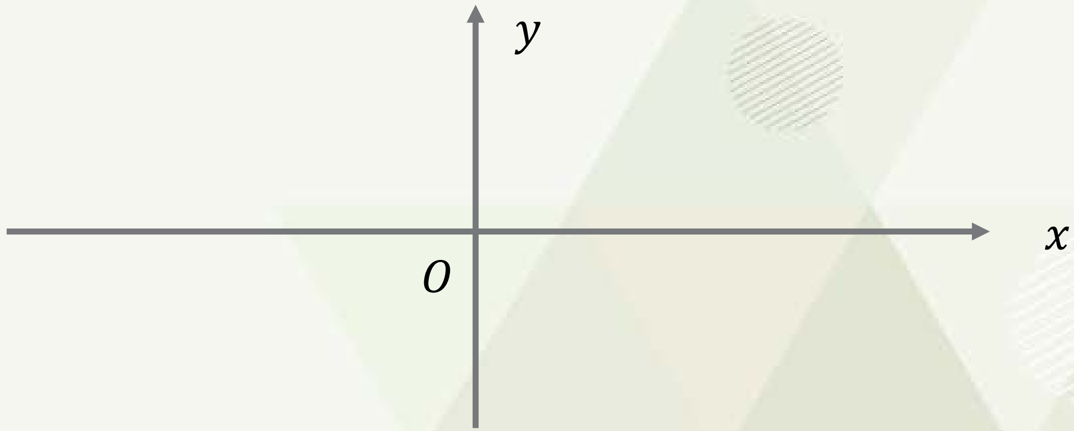
부등식 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$의 영역

- 좌표평면의 점 중에서 원의 방정식 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이 아닌
- 부등식$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$을 만족시키는 점
- 방정식$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이 나타내는 원의 내부 (>, 외부)
- $x^2+(y-2)^2<1$



1.2 부등식의 영역

- $y > f(x)$ 또는 $y < f(x)$ 꼴의 부등식의 영역
  - 좌표평면 임의의 점 (x, y) 중
    - 도형의 방정식 $y = f(x)$ 을 만족시키지 않고
    - 부등식 $y > f(x)$ 또는 $y < f(x)$를 만족시키는 해(또는 근)들의 집합
  - 부등식 $y > x + 1$ $(x - y + 1 < 0)$의 영역

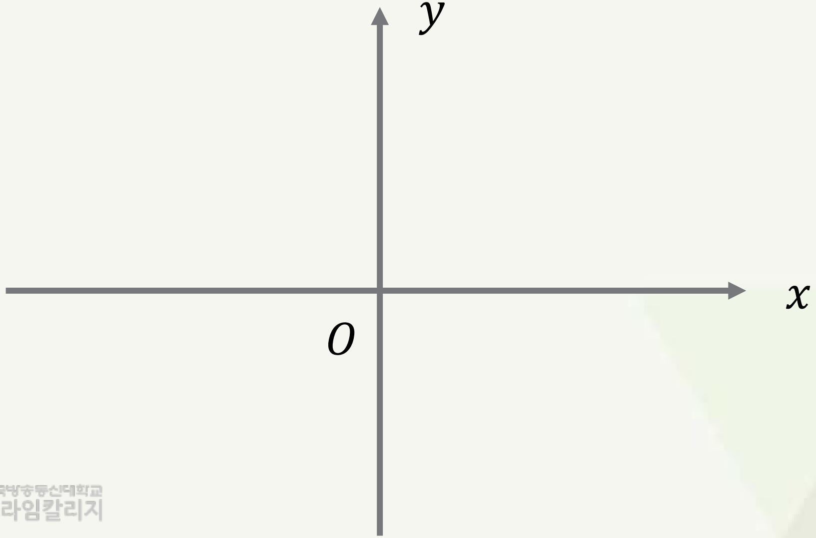


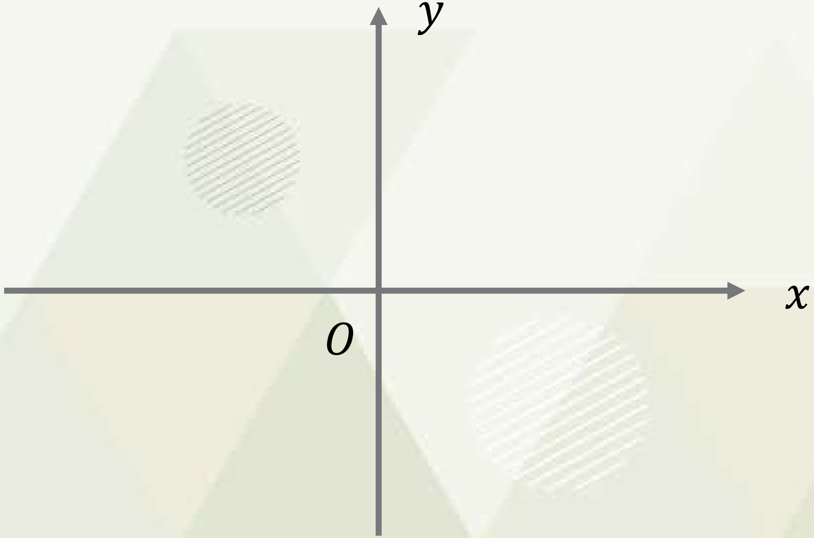
2 여러 가지 부등식의 영역

2.1 연립부등식의 영역

◆ 연립부등식의 해집합

- 부등식 $f(x) < 0$의 해집합과
  부등식 $g(x) > 0$의 해집합의 교집합(intersection)
- $x > 1$ and $y > 2$ $\qquad$ $x > 1$ or $y > 2$





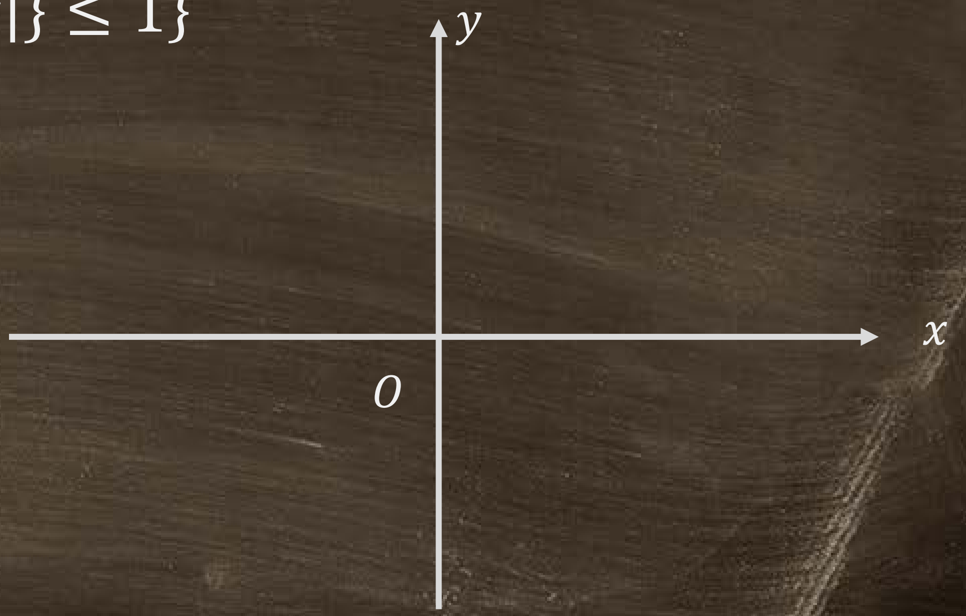
2.1 연립부등식의 영역

◆ 연립부등식의 해집합 예제 1

- $A = \{(x, y) | y \le x^2 + 1\}, B = \{(x, y) | y > 2x\}$
  - $A \cap B$
  - $A \cup B$
  - $A \cap B^c$
  - $A^c \cap B^c$

2.1 연립부등식의 영역

- 연립부등식의 해집합 예제 2
  - $A = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$,
    $B = \{(x, y) \mid \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$
    사이의 포함관계



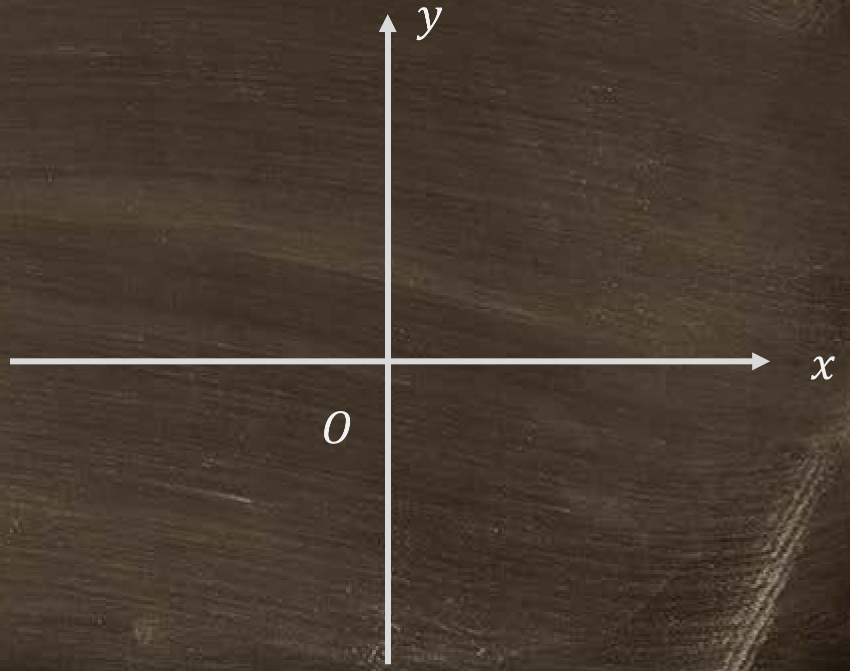
2.2 곱으로 표현된 부등식의 영역

◆ 곱으로 표현된 부등식의 해

- $f(x)g(x) < 0$의 해집합
  - ($f(x) > 0$ and $g(x) < 0$) 또는 ($f(x) < 0$ and $g(x) > 0$)
  - ($f(x) > 0$의 해집합)과 ($g(x) < 0$의 해집합)의 교집합과
    ($f(x) < 0$의 해집합)과 ($g(x) > 0$의 해집합)의 교집합의 합집합
- $f(x)g(x) > 0$의 해집합
  - ($f(x) > 0$ and $g(x) > 0$) 또는 ($f(x) < 0$ and $g(x) < 0$)
  - ($f(x) > 0$의 해집합)과 ($g(x) > 0$의 해집합)의 교집합과
    ($f(x) < 0$의 해집합)과 ($g(x) < 0$의 해집합)의 교집합의 합집합

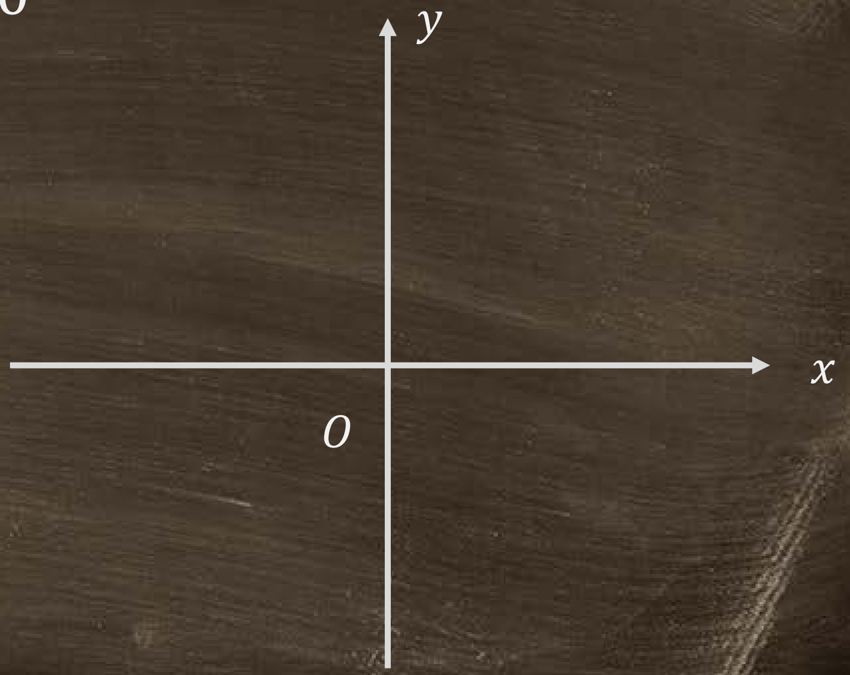
2.2 곱으로 표현된 부등식의 영역

- 곱으로 표현된 부등식의 해집합 예제 1
  - $y^2 > (x-1)^2$



2.2 곱으로 표현된 부등식의 영역

- 곱으로 표현된 부등식의 해집합 예제 2
  - $(y - x^2)(x^2 + y^2 - 4) \geq 0$

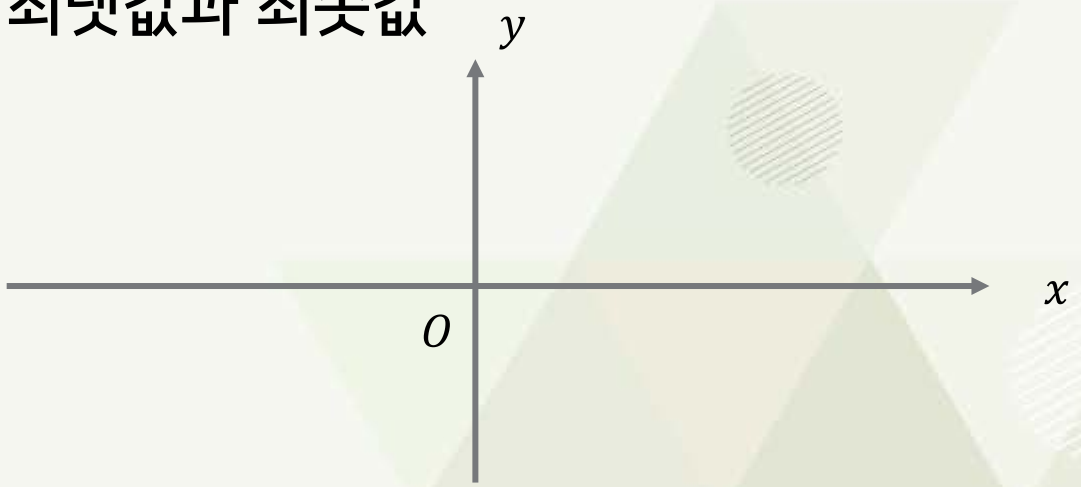


3 부등식의 영역과 최대·최소

3.1 기하학적 해법

◆ 부등식의 영역에서 최대·최소

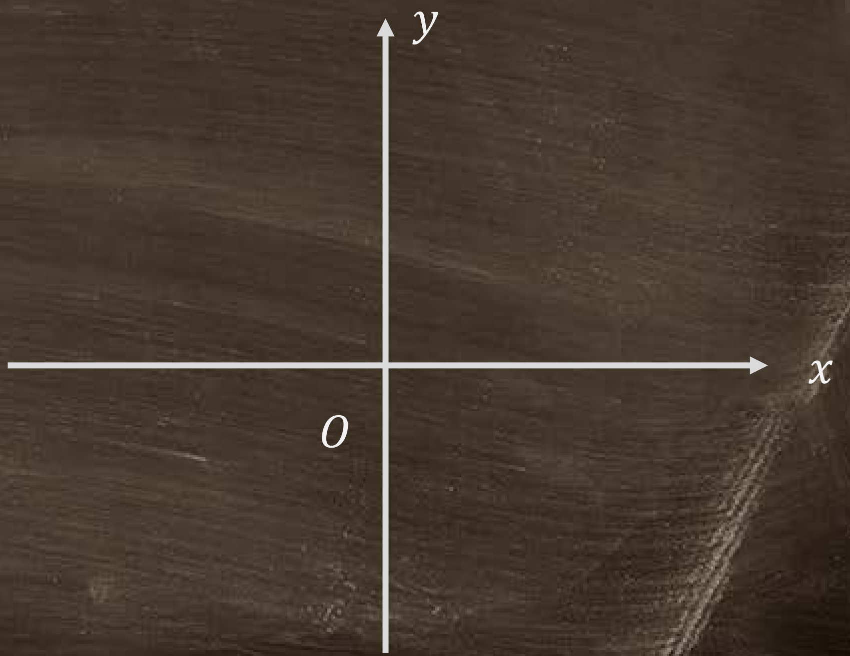
- 부등식의 영역에 포함된 점 (x, y) 중에서
  주어진 함수의 함숫값을 최대화 또는 최소화하는 점
- $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$이 나타내는 부등식 영역에서
  $x + y$의 최댓값과 최솟값



3.1 기하학적 해법

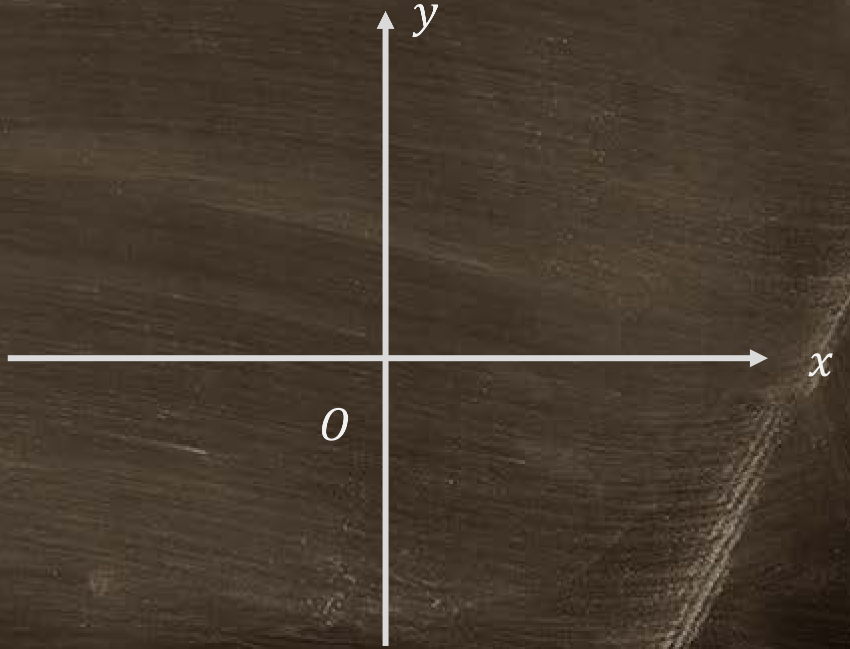
부등식의 영역에서 최대·최소 예제 1

- $x^2 + y^2 \leq 9$를 만족시키는 점 (x, y)에 대하여 $x + y$의 최댓값과 최솟값



3.1 기하학적 해법

- 부등식의 영역에서 최대·최소 예제 2
  - $(x-3)^2+(y-3)^2 \le 9$를 만족시키는 점 (x, y)에 대하여 x^2+y^2의 최댓값과 최솟값



3.2 선형계획법

- 직선으로만 이루어진 부등식의 영역에서 최대·최소
  - 부등식의 영역을 제한하는 관계식이 직선(일차식)이고
  - 최대화 또는 최소화하는 관계식도 직선(일차식)인 경우
    - 목적함수와 제약조건 모두 직선인 최적화 문제
  - 문제 예시
    - A, B 두 제품을 생산하는 공장의 최대이익은?
    - 원료 $p \leq 150$의 소요량: A 제품 3단위; B 제품 1단위
    - 원료 $q \leq 100$의 소요량: A 제품 1단위; B 제품 2단위
    - 판매이익: A 제품 3000원; B 제품 2000원

3.2 선형계획법

선형계획법 예제

- A, B 두 제품을 생산하는 공장의 최대이익은?
- 원료 $p \leq 150$의 소요량: A 제품 3단위; B 제품 1단위
- 원료 $q \leq 100$의 소요량: A 제품 1단위; B 제품 2단위
- 판매이익: A 제품 3000원; B 제품 2000원

정리하기

- 도형의 방정식과 부등식의 영역
- 좌표평면에서 연립부등식의 표현
- 곱으로 표현된 부등식의 영역
- 부등식의 영역 최대·최소, 선형계획법

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.