

8강. 함수

※ 연습문제

문제 1. 함수 $f(x) = x^2 - x - 6$, $g(x) = x^2 - ax + 4$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $(f \circ g)(x) \geq 0$ 이 되는 실수 a 의 범위는 $p \leq a \leq q$ 이다. $p^2 + q^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

정답 : ①

$$f(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2), \quad g(x) = x^2 - ax + 4 \text{ 에서}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x)-3)(g(x)+2) \geq 0$$

$$\therefore g(x) \geq 3 \text{ 또는 } g(x) \leq -2$$

$$(i) \quad g(x) \geq 3 \text{ 에서 } x^2 - ax + 4 \geq 3 \rightarrow x^2 - ax + 1 \geq 0$$

$$\text{이것이 모든 } x \text{에 대하여 성립하므로 } a^2 - 4 \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 2$$

$$(ii) \quad g(x) \leq -2 \text{ 에서 } x^2 - ax + 4 \leq -2 \rightarrow x^2 - ax + 6 \leq 0$$

$h(x) = x^2 - ax + 6$ 은 아래로 볼록한 포물선이므로
모든 x 에 대하여 $h(x) \leq 0$ 일 수 없다.

(i), (ii)에서 구하는 a 의 값의 범위는 $-2 \leq a \leq 2$ 이다.

$$\therefore p^2 + q^2 = (-2)^2 + (2)^2 = 8$$

문제 2. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{1, 3, 7, 9\}$ 로의 두 함수 f, g 를 각각 $f(n) = (3^n \text{의 일의 자릿수})$, $g(n) = (7^n \text{의 일의 자릿수})$ 로 정의할 때, $(f \circ g^{-1})(9) + (g \circ f^{-1})(1)$ 의 값은?

① 4

② 8

③ 10

④ 12

정답 : ③

두 함수 f, g 의 정의에 의해서

$$f(1) = 3, f(2) = 9, f(3) = 7, f(4) = 1 \text{ 이고,}$$

$$g(1) = 7, g(2) = 9, g(3) = 3, g(4) = 1 \text{ 이다.}$$

함수와 역함수 정의에 의하여 문제를 해결하면,

$$(f \circ g^{-1})(9) + (g \circ f^{-1})(1)$$

$$= f(g^{-1}(9)) + g(f^{-1}(1))$$

$$= f(2) + g(4) = 9 + 1 = 10$$