7강. 평면좌표

※ 주요용어

· **내분점**

선분 $\overline{AB}$ 위에 점 P 가 존재할 때 선분 $\overline{AB}$를 내부에서 $m : n$으로 나누는 점 P

· **외분점**

선분 $\overline{AB}$의 연장선 위에 점 Q가 존재할 때 선분 $\overline{AB}$를 외부에서 $m : n$으로 나누는 점 Q

· **무게중심(centroid)**

도형을 이루는 모든 점의 산술평균
도형을 균일한 재료로 만들었을 때, 균형이 맞춰지는 점

※ 연습문제

문제 1. 점 $A(1,6)$을 한 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 두 변 AB, AC의 중점을 각각 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$라 하자. $x_1 + x_2 = 2$, $y_1 + y_2 = 4$ 일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표를 $G(x_g, y_g)$라 하면 $5x_g + 9y_g$ 의 값은?

① 9	② 10
③ 11	④ 12

정답 : ③

두 꼭짓점 B, C 의 좌표를 각각 $B(a_1, b_1)$, $C(a_2, b_2)$ 라 하면

두 점 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$는 두 변 AB, AC의 중점이므로

점 $A(1, 6)$에 대하여

$$\frac{1+a_1}{2}=x_1, \frac{1+a_2}{2}=x_2$$

$$1+a_1=2x_1, 1+a_2=2x_2$$

변변 더하면 $2+a_1+a_2=2(x_1+x_2)$

$\therefore a_1+a_2=2$ ($\because x_1+x_2=2$) … ㉠

$$\frac{6+b_1}{2}=y_1, \frac{6+b_2}{2}=y_2$$

$$6+b_1=2y_1, 6+b_2=2y_2$$

변변 더하면 $12+b_1+b_2=2(y_1+y_2)$

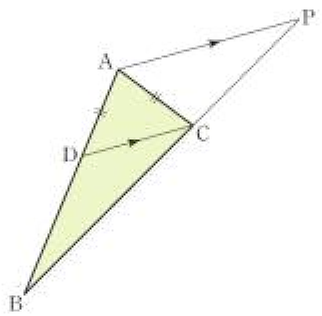
$\therefore b_1+b_2=-4$ ($\because y_1+y_2=4$) … ㉡

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+a_1+a_2}{3}, \frac{6+b_1+b_2}{3}\right)=\left(1, \frac{2}{3}\right) \quad (\because ㉠, ㉡)$$

$$\therefore 5x_g+9y_g=5\times 1+9\times \frac{2}{3}=11$$

문제 2. 세 꼭짓점의 좌표가 $A(0, 3)$, $B(-5, -9)$, $C(4, 0)$ 인 삼각형 ABC 가 있다. 그림과 같이 $\overline{AC}=\overline{AD}$ 가 되도록 점 D 를 선분 AB 위에 잡는다. 점 A 를 지나면서 선분 DC 와 평행인 직선이 선분 BC 의 연장선과 만나는 점을 $P(p, q)$ 라 하자. 이때, $p+q$ 의 값은?



① $\frac{57}{4}$ ② $\frac{29}{2}$

③ $\frac{121}{8}$ ④ $\frac{61}{4}$

정답 : ④

세 점 $A(0,3)$, $B(-5,\ -9)$, $C(4,0)$ 에 대하여

$\overline{AB} = \sqrt{(-5-0)^2+(-9-3)^2} = \sqrt{169} = 13$

$\overline{AC} = \overline{AD} = \sqrt{(0-4)^2+(3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$

한편, $\overline{AP} // \overline{DC}$ 이므로 두 삼각형 ABP, DBC 는 AA닮음이다.

($\because$ $\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{BA} : \overline{AD} = 13:5$)

즉 점 P 는 $\overline{BC}$ 를 $13:5$ 로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$P(\frac{13\times4-5\times(-5)}{13-5}, \frac{13\times0-5\times(-9)}{13-5}) = (\frac{77}{8}, \frac{45}{8})$

$\therefore\ p+q = \frac{77}{8} + \frac{45}{8} = \frac{61}{4}$

※ 정리하기

1. 수직선에서 두 점 $A(x_a), B(x_b)$ 사이의 거리는 선분 $\overline{AB}$ 의 길이로 $\left|x_a - x_b\right|$ 이다.

2. 평면좌표에서 두 점 $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b)$ 사이의 거리는 선분 $\overline{AB}$ 의 길이로 $\sqrt{(x_a-x_b)^2+(y_a-y_b)^2}$ 이다.

3. 수직선과 평면에서의 두 점 사이의 내분점과 외분점을 구하는 공식을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

4. 파푸스의 중선정리와 각 이등분선의 정리를 활용하여 삼각형 성질의 문제를 해결할 수 있다.