4강

확률 및 확률분포함수1

통계·데이터과학과 이기재 교수

한국방송통신대학교

목차

01

확률의 정의

확률(probability)의 개념

- 공정한 주사위를 던질 때 6의 눈이 나올 확률은?
- 윷놀이를 할 때 윷이 나올 확률은 얼마일까?
- 확률이란 '어떤 사건이 일어날 가능성을 0과 1사이의 실수로 표시'한 것
- 확률이란 동일한 상태에서 동일한 시행을 무한 번 반복한다고 할 때 궁극적으로 전체 시행 중에서 특정 사건이 발생할 비율을 나타냄

확률적 실험(통계적 실험)

- 실험의 결과가 구체적으로 어떤 것인가는 알 수 없지만 전체 가능한 모든 결과들을 알고 있고 반복이 가능한 경우를 확률적(통계적)실험 이라고 함

실생활 사례

▪ 사례 1

어느 생산공정에서 제품을 반복 생산하고 있다. 제품은 정상품 또는 불량품이지만 무엇이 될지는 알 수 없다.

▪ 사례 2

피자를 주문하면 피자 배달 시간은 대개 30분 이내지만 정확히는 알 수 없다.

표본공간, 사건

- 표본공간(sample space)
  - 통계적 실험이나 조사에서 일어날 수 있는 모든 가능한 결과의 모임
  - 대개 S로 표시

- 사건(또는 사상, event)
  - 일어날 수 있는 모든 가능한 결과 중에서 특정한 성질을 갖는 결과의 모임
  - 대개 $A, B, C, \dots$ 등으로 표시

확률실험의 예

▪ 동전을 한 번 던지는 실험

- 원소 : $H(=$ 앞면$)$ 또는 $T(=$ 뒷면$)$
- 표본공간 : $S = \{H, T\}$

▪ 주사위를 한 번 던지는 실험

- 원소 : 1, 2, 3, 4, 5, 6
- 표본공간 : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 사상 : 실험의 결과 짝수 눈이 나오는 경우

$$A = \{2, 4, 6\}$$

확률실험 사례1

1 생산품을 품질검사 하는 경우

- 표본공간

  S = {정상품, 불량품}

- 한 개 제품을 검사할 때 불량품일 사건

  A = {불량품}

확률실험 사례2

2 피자 배달의 예

- 표본공간

$S = \{t : t > 0\}$

- 배달시간이 20분 이내일 사건

$A = \{t : 0 < t < 20\}$

확률의 고전적 정의

- 표본공간 내 모든 원소의 발생 가능성이 같은 경우

  - 이산형 표본공간의 경우

$$P(A) = \frac{\text{사건 } A\text{에 속하는 원소의 개수}}{\text{표본공간의 전체 원소의 개수}}$$

  - 연속형 표본공간의 경우

$$P(A) = \frac{\text{사건 } A\text{에 속하는 원소에 대한 측도}}{\text{표본공간의 전체 원소에 대한 측도}}$$

(사례1) 주사위를 던지는 실험

- 표본공간 : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 홀수가 나올 확률은?

풀이

-홀수가 나올 사건, $A = \{1, 3, 5\}$

-표본공간 내 모든 원소의 발생 가능성이 같은가?

$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(사례2) 피자 배달시간의 예

- 표본공간 : $S = \{(10, 30)\}$

  “배달 시간은 10분에서 30분까지 같은 가능성”
- 20분에서 25분 사이에 배달되는 사건 : $B = \{(20,25)\}$
- 배달시간이 20분에서 25분 사이일 확률

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}}$$

확률의 상대도수적 정의

- 사건 A가 발생할 확률($P(A)$로 표시)

  같은 조건하에서 통계적 실험을 수없이 많이 반복시행 하였을 때 사건 A가 발생하는 비율(즉, 상대도수)

- $P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{n}$

확률의 공리적 정의

- 확률을 상대도수의 극한개념으로 파악하기 위해 콜모고로프(Kolmogorov, 1903-1987)는 확률을 다음과 같이 정의함
- 확률의 공리적 정의

1. 표본공간 S 에서 임의의 사건 A에 대하여 $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S)$=1
3. 서로 배반인 사건 A_1, A_2,⋯에 대하여

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

를 만족할 때, $P(A)$를 사건 A의 확률이라고 한다.

02

확률의 계산

순열과 조합(1)

- 이산형 표본공간에서 확률 계산을 위해서 원소의 수를 세는 방법
- 순열(permutation)

- n개의 사물 중 r개를 선택하여 순서를 고려하여 나열하는 방법의 수

- $_nP_r = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)\cdots\cdots(n\text{-}r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

- $_nP_n = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)\cdots\cdots 1 = n!$

- <예제> 네 사람(A, B, C, D)을 나란히 있는 4개 의자에 배치하고자 한다.
  - 네 사람을 배치하는 전체 경우의 수?
  - 이 중 A가 가장 왼쪽에 배치될 경우의 수? 그 확률은?

순열과 조합(2)

조합(combination)

- n개의 사물 중 r개를 순서를 고려하지 않고 추출하는 방법의 수
- $\binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

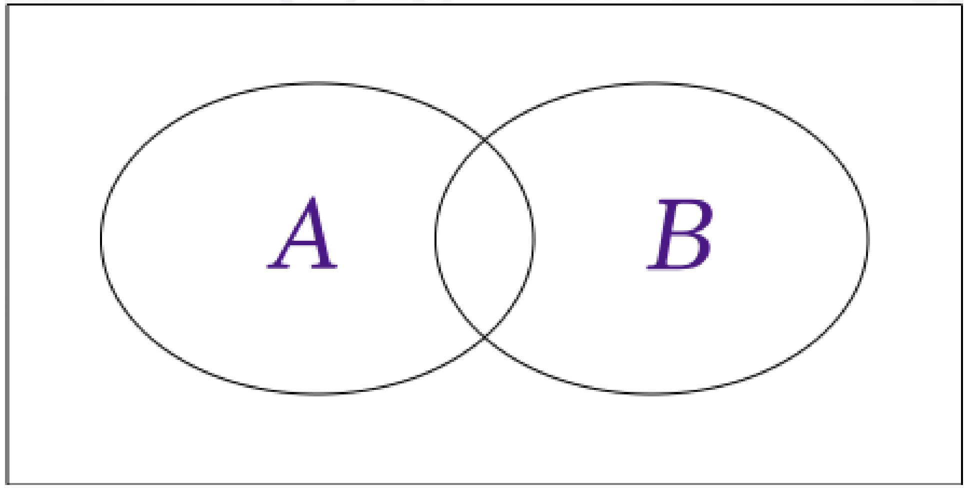
<예제> 다섯 사람(A, B, C, D, E) 중 두 명을 뽑아서 아침 청소를 하고자 한다.

- 다섯 사람 중 두 명을 뽑는 전체 경우의 수?
- 이 중 A가 아침 청소를 하게 될 경우의 수? 그 확률은?

확률의 덧셈법칙

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- $A \cap B = \emptyset$인 경우 $\Leftrightarrow$ "사건 A, B는 서로 배반사건"



확률 덧셈법칙 예제

- 통계·데이터과학과 2학년 학생 40명 대상
  - 경제학 수강 학생 : 25명
  - 경영학 수강 학생 : 30명
  - 두 과목 동시수강 학생 : 20명

→ 통계·데이터과학과 2학년 학생 중 어느 사람이 경제학 또는 경영학을 수강할 확률은?

예제 풀이

풀이

A : 경제학을 수강하는 사건
B : 경영학을 수강하는 사건

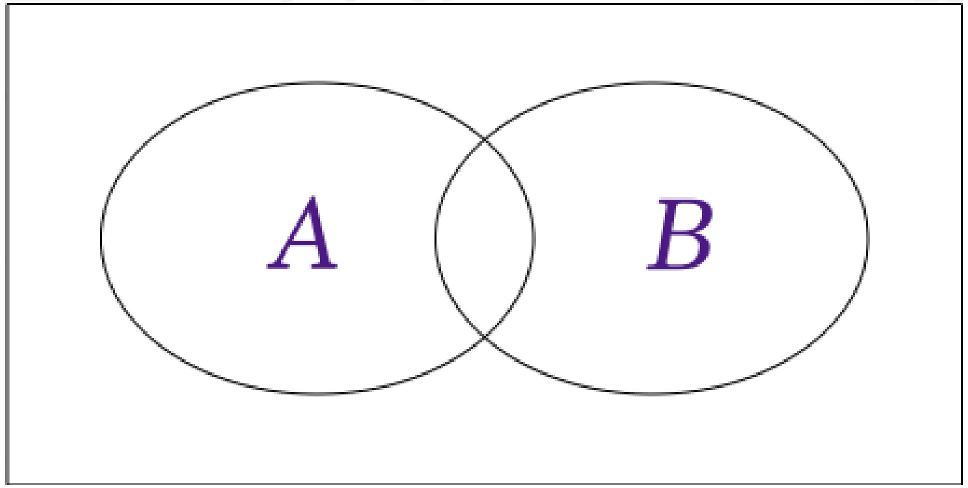
$$P(A) = \frac{25}{40}, \quad P(B) = \frac{30}{40}, \quad P(A \cap B) = \frac{20}{40}$$

➔경제학 또는 경영학을 수강할 확률은?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{25}{40} + \frac{30}{40} - \frac{20}{40} = \frac{35}{40}$$

조건부확률(conditional probability)

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (\text{단, } P(B) > 0)$$



조건부확률 예제

- 어느 학과 : 남자가 30명, 여자가 20명
- 남자 중 10명, 여자 중 8명이 안경 착용

	안경 미착용(N)	안경 착용(G)	계
남자(M)	20	10	30
여자(F)	12	8	20
계	32	18	50

문제1 한 명을 뽑았더니 여자였다. 이 학생이 안경을 쓴 학생일 확률은?

조건부확률 예제 풀이

풀이

M : 남자, F : 여자
N : 안경미착용, G : 안경 착용

$$P(G|F) = \frac{P(G \cap F)}{P(F)} = \frac{8/50}{20/50} = \frac{2}{5}$$

	안경 미착용(N)	안경 착용(G)	계
남자(M)	20	10	30
여자(F)	12	8	20
계	32	18	50

확률의 곱셈법칙

- $P(A) > 0, P(B) > 0$이면,

  $$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

☞ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\Longrightarrow P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

독립사건(independent event)

- 사건 A와 B : 서로 독립사건(independent event)

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

독립사건 예제

- 주사위를 두 번 던지는 실험
  - A : 첫 번째 눈이 2가 되는 사건
  - B : 두 번 던져 나온 눈의 수의 합이 5인 사건

사건 A, B는 서로 독립인가?

독립사건 예제 풀이

- 표본공간 : S : $\{(1,1),(1,2),(1,3),\dots(6,5),(6,6)\}$
- $A=\{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$

  $B=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$\Longrightarrow A\cap B=\{(2,3)\}$

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},P(A\cap B)=\frac{1}{36}$$

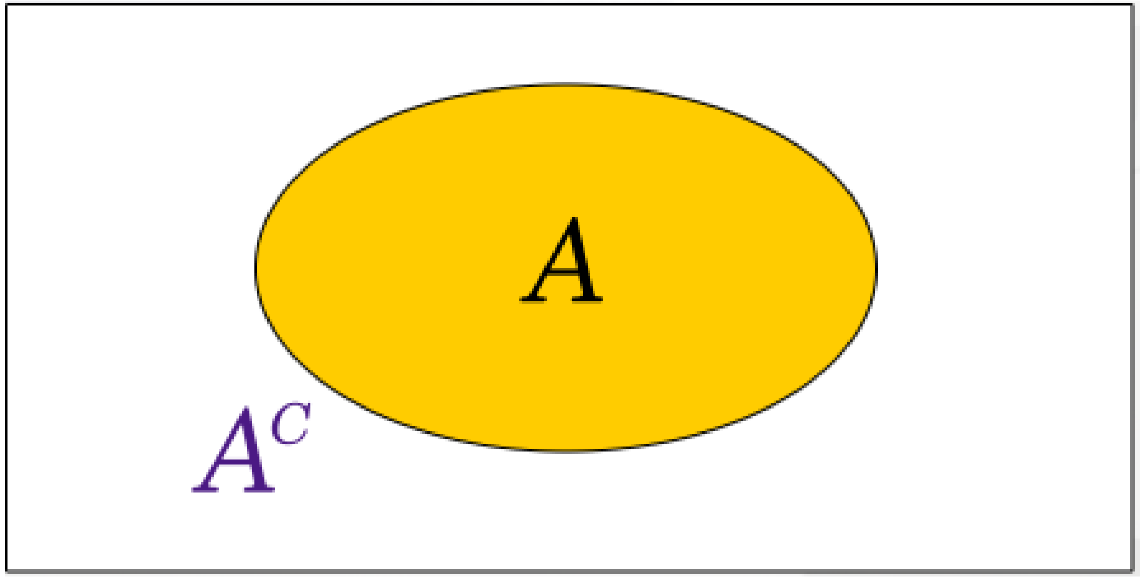
$\Longrightarrow P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

$\Longleftrightarrow$ "사건 A와 B는 서로 독립이 아니다"

여사건의 확률 계산

- A^c를 사건 A의 여사건이라고 할 때

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$



여사건 예제

- 상자 속의 6개 제품 중에서 2개가 불량품이다. 제품검사를 위해 3개를 추출할 때, 적어도 1개의 불량품이 뽑힐 확률은?

A : 적어도 1개의 불량품이 발견될 사건

A^c : 불량품이 하나도 없을 사건

$$\Rightarrow P(A^c) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \mathrm{P(A)} = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

다음시간 안내

5강

확률 및 확률분포함수2