[대학기초수학]

1차시 | 집합과 명제

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 집합의 정의와 연산을 이해한다.
- 명제의 정의와 참/거짓을 이해한다.
- 집합과 명제의 관계를 이해한다.

목차

1 집합의 정의와 연산

1. 집합과 원소 (1/3)

- 집합(set)의 정의
  - 명확한 조건을 만족시키는 것(원소)의 모임

- 집합인 것과 집합이 아닌 것
  - 공부를 잘하는 학생의 모임 (집합 X)
  - 평점(GPA)이 4.0 이상인 학생의 모임 (집합 O)
  - 요리를 잘하는 학생의 모임 (집합 X)
  - 조리 자격증을 취득한 학생의 모임 (집합 O)

1. 집합과 원소 (2/3)

◆ 집합과 원소(element)의 표현

- 집합을 문자로 표현할 때 알파벳 대문자를 사용

$$A, B, C, D, \cdots, X, Y\ Z$$

- 원소를 문자로 표현할 때 알파벳 소문자를 사용

$$a, b, c, d, \cdots, x, y\ , z$$

- 원소 b가 집합 S의 원소일 때?

  원소 b가 집합 S의 원소가 아닐 때?

1. 집합과 원소 (3/3)

예제 다음 중 집합인 것은?

- 공부를 잘하는 학생의 모임 / 프라임칼리지 등록생의 모임
- 성실한 학생의 모임 / <대학기초수학>을 수강생의 모임
- 맛있는 과일의 모임 / 스터디에 등록된 학생의 모임

예제 자연수 집합 $\mathbb{N}$, 정수 집합 $\mathbb{Z}$, 유리수 집합 $\mathbb{Q}$, 실수 집합 $\mathbb{R}$

- -2 3 0.4 $\sqrt{2}$ $3+2i$

2. 집합의 표시법

◆ 원소나열법

- 집합에 속하는 모든 원소를 중괄호(brace, {}) 안에 나열
- 원소가 $a, b, c, \cdots$ 인 집합을 P라 정의하면?

◆ 조건제시법

- 집합에 속하는 원소가 만족해야 성질을 $\{x|\Omega\}$의 Ω에 제시하는 방법
- 조건 $f(x)$를 만족하는 x의 집합을 Q라 정의하면?

3. 집합의 종류

◆ 유한집합, 무한집합, 공집합

- $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1, 2, 3, 6}\}$ 같이 유한한 원소가 속한 집합을 유한집합
- $\boldsymbol{B} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \geq \mathbf{2}, \boldsymbol{x}$는 자연수$\}$같이 무수히 많은 원소가 속한 집합을 무한집합
- $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} < -\mathbf{1},\ \boldsymbol{x}$는 자연수$\}$ 같이 단 하나의 원소도 속하지 않은 집합을 공집합 $\boldsymbol{\phi}$ 또는 $\{\ \}$

- $\{1, 2, 4\}$ $\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$ $\{x | x^2 - 2x + 3 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

4. 집합의 연산 (1/8)

합집합, 교집합, 차집합

- 합집합 $A \cup B := \{x | x \in A \text{ 또는(or) } x \in B\}$
- 교집합 $A \cap B := \{x | x \in A \text{ 그리고(and) } x \in B\}$
  $A \cap B = \phi$인 경우, A와 B를 서로소(disjoint)
- 차집합 $A \setminus B := \{x | x \in A \text{ 그리고(and) } x \notin B\}$

4. 집합의 연산 (2/8)

◆ 합집합, 교집합, 차집합 예제

- $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$
  $A \cup B =$ $\qquad$ $A \cap B =$
  $A \setminus B =$ $\qquad$ $B \setminus A =$

- $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{5, 6, 7, 8\}$
  $A \cup B =$ $\qquad$ $A \cap B =$
  $A \setminus B =$ $\qquad$ $B \setminus A =$

4. 집합의 연산 (3/8)

- 합집합, 교집합, 차집합 예제 (벤 다이어그램)
  - $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}$
  - $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{5, 6, 7, 8\}$

4. 집합의 연산 (4/8)

◆ 전체집합과 여집합

- 전체집합(Universe, U)은
  문제의 고려대상 되는 모든 원소의 집합
- 여집합(complement) $A^c := \{x | x \in U \text{ 그리고(and) } x \notin A\}$
- $U = \{x | x \in \mathbb{N}\}, A = \{x | x\text{는 2의 배수}\}$
  $A^c =$

4. 집합의 연산 (5/8)

◆ 대칭 차집합과 드모르간의 법칙

- 대칭 차집합(symmetric difference)
  $A \oplus B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- 드모르간(De Morgan)의 법칙
  - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $U = \{1, 2, \cdots, 8\}, A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$

4. 집합의 연산 (6/8)

- 대칭차집합과 드모르간의 법칙 (벤 다이어그램)
  - $U = \{1, 2, \cdots, 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

4. 집합의 연산 (7/8)

◆ 유한집합 원소의 개수(cardinality), $n(A)$

- 합집합 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- 서로소($A \cap B = \phi$)인 경우, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

$$n(A \cup B) \leq n(A) + n(B)$$

- 차집합 $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$
- 여집합 $n(A^c) = n(U) - n(A)$

4. 집합의 연산 (8/8)

유한집합 원소의 개수 예제

- $U = \{1, 2, \cdots, 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$
- $n(A \cup B) =$
- $n(A \setminus B) =$
- $n(A^c) =$
- $n(B^c) =$

2 부분집합과 진부분집합

1. 부분집합의 정의와 성질 (1/3)

◆ 부분집합(subset)의 정의

- 집합 A의 모든 원소가 집합 B의 원소일 때,
  집합 A를 집합 B의 부분집합이라 하고 $A \subseteq B$로 나타낸다.

- $A = \{2,\ 3,\ 4\}, B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

- $C = \{1,\ 2\}, D = \{2,\ 3,\ 4\}$

1. 부분집합의 정의와 성질 (2/3)

◆부분집합의 성질

- 공집합은 모든 집합의 부분집합이다. $\phi \subseteq A$, $\phi \subseteq \phi$
- 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다. $A \subseteq A$

◆부분집합의 개수

- 원소가 n개인 집합 A의 부분집합의 개수는 2^n개이다.
- 집합 A의 모든 부분집합을 원소로 가진 집합을 집합 A의 멱집합(power set)이라하고 $\mathcal{P}(A)$라 나타낸다.

1. 부분집합의 정의와 성질 (3/3)

◆ 부분집합의 개수 예제

- $A = \{1, 2, 3\}, B = \{\ \} = \phi$

- $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$

2. 집합의 상동과 진부분집합 (1/3)

◆ 집합의 상동(equivalence)의 정의

- 집합 A가 집합 B의 부분집합이고
  동시에 집합 B가 집합 A의 부분집합일 때,
  집합 A와 집합 B는 상동(서로 같다, $A = B$)이라 한다.

- $A = \{2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{x \mid 1 < x < 5,\ x\text{는 자연수}\}$

2. 집합의 상동과 진부분집합 (2/3)

◆ 진부분집합(proper subset)의 정의

- 집합 A가 집합 B의 부분집합이고
  집합 A와 집합 B가 서로 같지 않을 때,
  즉, $A \subseteq B$ 그리고 $A \neq B$ 일 때,
  집합 A를 집합 B의 진부분집합이라 하고 $A \subsetneq B$로 나타낸다.

2. 집합의 상동과 진부분집합 (3/3)

- 진부분집합 예제
  - $A = \{2, 3, 4\}$의 부분집합과 진부분집합
  - $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$의 진부분집합의 개수 $2^n - 1$

3 명제의 정의와 부정

1. 명제의 정의와 성질 (1/2)

- 명제(proposition)의 정의
  - 참/거짓을 명확하게 구별할 수 있는 문장 또는 식, p

- 명제인 것과 명제가 아닌 것
  - 3은 6의 약수이다. (참, 명제 O)
  - 3은 5의 배수이다. (거짓, 명제 O)
  - 수학은 재미있다. (명제 X)
  - 음악은 아름답다. (명제 X)

1. 명제의 정의와 성질 (2/2)

◆ 조건명제 또는 명제함수

- 변수의 값에 따라 참/거짓이 판정되는 경우
- 어떤 전체집합 U의 각 변수 x를 대입하면 명제가 되는 것을 집합 U에서의 조건명제라 하고 $p(x)$라 나타낸다.

- 'x는 6의 약수이다.' 'y는 2의 배수이다.'

2. 명제의 부정과 성질 (1/5)

◆ 명제(proposition)의 부정

- 명제 '3은 6의 약수이다'를 p로 나타낼 때,
  명제 '3은 6의 약수가 아니다'를
  p의 부정(negation)이라 하고 $\neg p$로 나타낸다.

- p의 부정의 부정은 p이다. $\neg(\neg p) = p$
- 조건명제 $p(x)$의 부정은 $\neg p(x)$로 나타낸다.

2. 명제의 부정과 성질 (2/5)

◆ 논리합과 논리곱의 부정

- $p \vee q$: 두 조건 p, q의 논리합(disjunction)
  ($p \vee q$가 참) = (p가 참) 또는 (q가 참)
- $p \wedge q$: 두 조건 p, q의 논리곱(conjunction)
  ($p \wedge q$가 참) = (p가 참) 그리고 (q가 참)
- $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$, $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$

2. 명제의 부정과 성질 (3/5)

- 논리합과 논리곱의 부정 예제
  - $x = 1$ 또는 $y = 2$의 부정 / $x = \pm 1$의 부정
  - $x = 1$ 그리고 $y = 2$의 부정
  - $x \leq 2$ 또는 $x > 4$의 부정
  - $3 < x \leq 5$의 부정

2. 명제의 부정과 성질 (4/5)

◆ ‘어떤’과 ‘모든’의 부정

- 어떤(for some) = ~이 존재한다(There exist(s) ~)
- 모든(for all) = 모든 ~에 대해 …하다

- ¬ ‘어떤 학생의 총점은 95점이다.’
  = ‘모든 학생의 총점은 95점이 아니다.’
- ¬ ‘모든 정삼각형은 이등변삼각형이다.’
  = ‘어떤 정삼각형은 이등변삼각형이 아니다.’

2. 명제의 부정과 성질 (5/5)

- '어떤'과 '모든'의 부정 예제
  - '모든 실수 x에 대하여, $x^2 + 2 > 0$ 이고 $x \geq -1$이다.'의 부정
  - '어떤 실수 x에 대하여, $x \leq 3$ 이거나 $x > 4$이다.'의 부정

4 진리집합과 명제의 참/거짓

1. 진리집합의 정의와 성질 (1/4)

◆ 진리집합(truth set)의 정의

- 어떤 조건명제 $p(x)$가 정의된 전체집합 U의 부분집합 중에서, $p(x)$를 참으로 만드는 모든 $x \in U$의 집합을 $p(x)$의 진리집합이라 하고 P로 나타낸다.

- 진리집합 $P = \{x \mid x \in U,\ p(x)\}$ 또는 간단히 $P = \{x \mid p(x)\}$

1. 진리집합의 정의와 성질 (2/4)

진리집합 예제

- $U = \{x \mid x$는 자연수$\}$, $p(x)$: x는 12의 약수이다.
- $U = \{x \mid x$는 실수$\}$, $q(x)$: $x^2 - 4x + 4 \leq 0$

1. 진리집합의 정의와 성질 (3/4)

◆ 조건으로 이루어진 명제

- p이면 q이다 (If p, then q): $p \to q$

- p: 가정(hypothesis, antecedent)
  q: 결론(conclusion, consequent)

- $p \to q$가 참이면 $p \Rightarrow q$, $p \to q$가 거짓이면 $p \nRightarrow q$

1. 진리집합의 정의와 성질 (4/4)

- 조건으로 이루어진 명제 예제
  - ‘2를 세제곱하면 8이다.’ (참)
  - ‘제곱한 값이 4인 수는 -2이다.’ (거짓)

2. 명제의 참/거짓 판정 (1/2)

◆ 진리집합과 명제의 참/거짓

- 명제 $p \rightarrow q$가 주어졌을 때,
  두 진리집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이에는
  $p \Rightarrow q$(참) 이면 $P \subseteq Q$ 또는 $p \nRightarrow q$(거짓) 이면 $P \nsubseteq Q$

- 명제 $p \rightarrow q$가 참임을 증명: $P \subseteq Q$임을 증명
- 명제 $p \rightarrow q$가 거짓임을 증명: $P \nsubseteq Q$임을 증명

- 반례(counter example): $x \in P$ 그리고 $x \notin Q$

2. 명제의 참/거짓 판정 (2/2)

진리집합과 명제의 참/거짓 예제

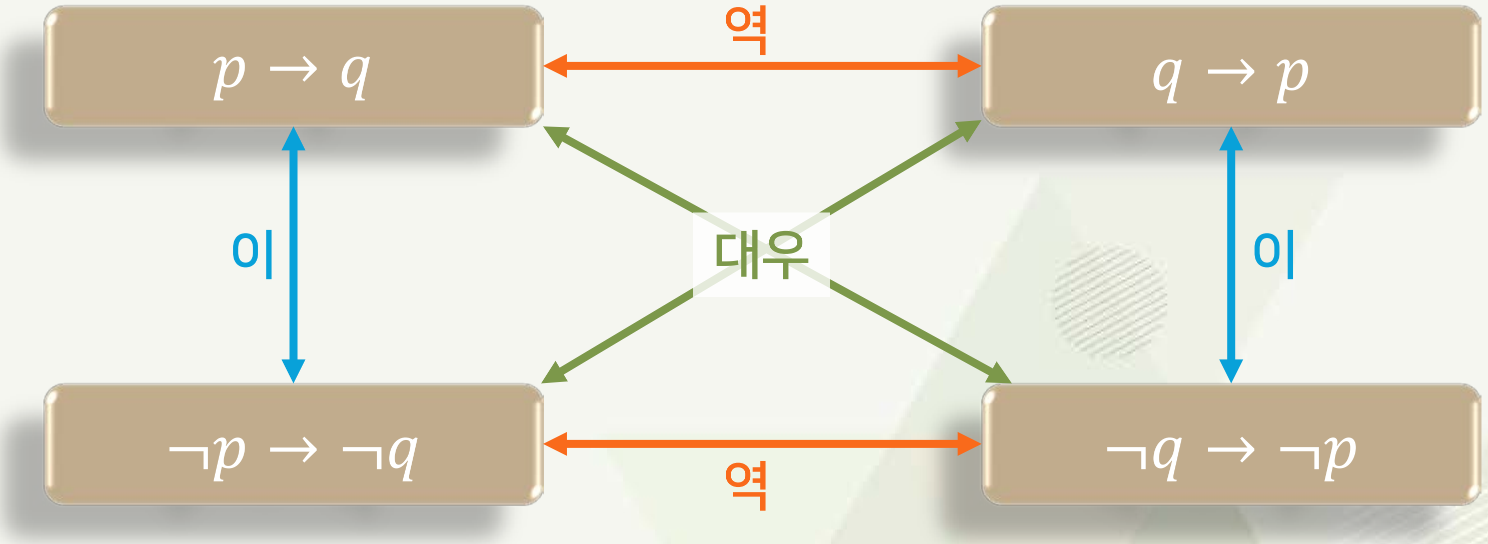
- $p: x > 6 \rightarrow q: x \geq 2$
- $p: x^2 = 4 \rightarrow q: x = -2$

3. 명제의 역, 이, 대우와 참/거짓 (1/4)

- 명제 $p \rightarrow q$의 역, 이 , 대우
  - (예) $\boldsymbol{x^2 = 4 \rightarrow x = -2}$
  - 역(conversion): $\boldsymbol{q \rightarrow p}$
  - 이(obversion): $\boldsymbol{\neg p \rightarrow \neg q}$
  - 대우(contraposition): $\boldsymbol{\neg q \rightarrow \neg p}$

3. 명제의 역, 이, 대우와 참/거짓 (2/4)

◆ 명제 $p \to q$의 역, 이 , 대우 사이의 관계



3. 명제의 역, 이, 대우와 참/거짓 (3/4)

◆ 명제와 대우의 참/거짓 관계

- 명제 $p \to q$가 참이면, 대우 $\neg q \to \neg p$도 참이다.
- 명제 $p \to q$가 거짓이면, 대우 $\neg q \to \neg p$도 거짓이다.

- 명제 $p \to q$의 역 $q \to p$가 참이면,
  명제 $p \to q$의 이 $\neg p \to \neg q$도 참이다.

- 명제 $p \to q$의 역 $q \to p$가 거짓이면,
  명제 $p \to q$의 이 $\neg p \to \neg q$도 거짓이다.

3. 명제의 역, 이, 대우와 참/거짓 (4/4)

- 명제와 대우의 참/거짓 관계 예제
  - 명제: $xy = 0$ 이면 $x = 0$ 또는 $y = 0$이다. (참)
  - 역:
  - 이:
  - 대우:

4. 충분조건과 필요조건 (1/3)

◆ 충분조건과 필요조건의 정의

- 어떤 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, 즉 $p \Rightarrow q$일 때,
  조건 p(가설)는 조건 q(결론)이기 위한 충분조건이고,
  조건 q(결론)는 조건 p(가설)이기 위한 필요조건이다.

- 명제: 인간은 포유류이다 (참)
- 인간은 포유류이기 위한 충분조건
  포유류는 인간이기 위한 필요조건

4. 충분조건과 필요조건 (2/3)

◆ 필요충분조건의 정의

- 어떤 명제 $p \rightarrow q$와 그 역 $q \rightarrow p$이 모두 참일 때, 즉 $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$일 때, 조건 p(가설)와 조건 q(결론)는 서로에 대한 필요충분조건이라 하며 $p \Leftrightarrow q$로 나타낸다.

◆ 충분·필요·필요충분조건과 진리집합

- $p \Rightarrow q$: p는 q이기 위한 충분조건, $P \subseteq Q$
- $p \Rightarrow q$:q는 p이기 위한 필요조건, $P \subseteq Q$
- $p \Leftrightarrow q$: p와 q는 서로에 대한 필요충분조건, $P = Q$

4. 충분조건과 필요조건 (3/3)

충분·필요·필요충분조건과 진리집합 예제

- $x = -2$는 $x^2 = 4$이기 위한
  $x^2 = 4$는 $x = -2$이기 위한
- $x \geq 3$은 $x > 5$이기 위한
  $x > 5$는 $x \geq 3$이기 위한
- $x = 0$은 $x^2 = 0$이기 위한
  $x^2 = 0$은 $x = 0$이기 위한

5 명제의 증명

1. 직접 증명법 (1/2)

◆ 진리집합과 명제의 참/거짓

- 명제 $p \rightarrow q$가 주어졌을 때,
  두 진리집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이에는
  $p \Rightarrow q$(참) 이면 $P \subseteq Q$ 또는 $p \nRightarrow q$(거짓) 이면 $P \nsubseteq Q$

- 명제 $p \rightarrow q$가 참임을 증명: $P \subseteq Q$임을 증명
- 명제 $p \rightarrow q$가 거짓임을 증명: $P \nsubseteq Q$임을 증명

- 반례(counter example): $x \in P$ 그리고 $x \notin Q$

1. 직접 증명법 (2/2)

- 직접 증명법 예제
  - 실수 a, b, x, y에 대하여, $\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right) \geq (ax+by)^2$
  - 두 양수 a, b에 대하여, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (등호 $a=b$ 성립)

2. 간접 증명법 - 귀류법 (1/2)

◆ 귀류법(contradiction)의 정의

- 어떤 명제가 참임을 증명하고자 할 때,
  명제 자체 또는 결론을 부정함으로써
  공리(axiom),정의(definition), 가정(assumption) 등에
  모순됨을 보여 주어진 명제가 성립하는 보이는 간접증명법

- 명제 $p \rightarrow q$가 참임을 간접적으로 보이고자 할 때,
  명제의 대우 $\neg q \rightarrow \neg p$가 참임을 증명

2. 간접 증명법 - 귀류법 (2/2)

- 귀류법 예제
  - $\sqrt{2}$는 무리수이다.
  - 자연수 n에 대하여, n^2이 홀수이면 n도 홀수이다.

정리하기

- 집합이란 명확한 조건을 만족시키는 원소들의 모임
- 교집합, 합집합, 차집합, 여집합, 부분집합
- 명제의 참/거짓 판별과 진리집합의 포함관계

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.