[대학기초수학]

2차시 | 실수와 복소수

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 실수의 분류 체계를 이해한다.
- ‘닫혀있음’과 항등원, 역원을 이해한다.
- 약수/배수, 공약수/공배수를 이해한다.
- 복소수의 정의와 성질, 연산을 이해한다.

목차

1 실수와 사칙연산

1. 실수의 구성 (1/3)

◆ 실수(연속한 수직선에 존재)의 분류 체계

- 자연수(natural number, $\mathbb{N}$): 1, 2, 3, ⋯
  물건을 셀 때, 순서를 정할 때 사용
- 정수(integer, $\mathbb{Z}$): ⋯, -2, -1, 0, 1, 2, ⋯
  양의 정수(자연수), 0, 음의 정수
- 유리수(rational number, $\mathbb{Q}$): $-{}^{1}/_{2}, {}^{0}/_{5}, {}^{4}/_{3}, 0.\dot{3}, \cdots$
  분수꼴 ${}^{a}/_{b}$ 표현이 가능한 수 ($a, b(\neq 0)$는 정수)
- 무리수(irrational number, $\mathbb{I}$): $\pi, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, e, \cdots$
  분수꼴 ${}^{a}/_{b}$ 표현이 불가능한 수 ($a, b(\neq 0)$는 정수)

1. 실수의 구성 (2/3)

◆ 실수의 분류 체계 벤 다이어그램

1. 실수의 구성 (3/3)

◆ 실수의 특성

- 유리수의 조밀성(density)
  임의의 두 실수 사이에는 무수히 많은 유리수가 존재
- 무리수의 조밀성(density)
  임의의 두 실수 사이에는 무수히 많은 무리수가 존재
- 실수의 연속성(continuity)
  - 실수 집합 $\mathbb{R}$ = 유리수 집합 $\mathbb{Q} \cup$ 무리수 집합 $\mathbb{I}$
  - 유리수와 무리수는 서로소 $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \boldsymbol{\phi}$
  - $\mathbb{Q}$와 $\mathbb{I}$ 모두 무한집합이지만, $\boldsymbol{n}(\mathbb{Q}) < \boldsymbol{n}(\mathbb{I})$

2. 실수와 ‘닫혀있다’ (1/6)

◆ 사칙연산과 닫혀있다

- 사칙연산: 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈
- ‘집합’이 ‘연산’에 대하여 닫혀있다(closed)
- 자연수 집합 $\mathbb{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \cdots\}$에 대하여
  - 덧셈: $\boldsymbol{a} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{N}$ 이면 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in \mathbb{N}$ 이므로
    ‘자연수 집합’은 ‘덧셈’에 대하여 닫혀있다
  - 뺄셈: $\mathbf{1} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{2} \in \mathbb{N}$ 이면 $\mathbf{1} - \mathbf{2} = -\mathbf{1} \notin \mathbb{N}$ (반례)
    ‘자연수 집합’은 ‘뺄셈’에 대하여 닫혀있지 않는다(open)
  - 곱셈: 닫혀 있다 / 나눗셈: 닫혀있지 않다

2. 실수와 ‘닫혀있다’ (2/6)

◆ 사칙연산과 닫혀있다 (계속)

	자연수 $\mathbb{N}$	정수 $\mathbb{Z}$	유리수 $\mathbb{Q}$	무리수 $\mathbb{I}$	실수 $\mathbb{R}$
덧셈	O	O	O	X	O
뺄셈	X	O	O	X	O
곱셈	O	O	O	X	O
나눗셈	X	X	O	X	O

2. 실수와 ‘닫혀있다’ (3/6)

◆ 연산의 기본법칙

- 실수 집합 $\mathbb{R}$은 사칙연산 모두에 대하여 닫혀있으므로 임의의 실수 a, b, c에 대하여 다음이 성립

- 교환법칙: $a + b = b + a$
  결합법칙: $(a + b) + c = a + (b + c)$
  분배법칙: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

2. 실수와 '닫혀있다' (4/6)

◆ 덧셈에 대한 항등원과 역원

- 덧셈에 대한 항등원(identity element)
  임의의 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$에 대하여, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$를 만족시키는
  $\boldsymbol{e}=\mathbf{0} \in \boldsymbol{R}$ 이므로, $\mathbb{R}$의 덧셈에 대한 항등원은 0이다.

- 덧셈에 대한 역원(inverse element)
  어떤 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$에 대하여, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$(항등원)
  만족시키는 $\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$이므로,
  $\mathbb{R}$의 덧셈에 대한 $\boldsymbol{a}$의 역원은 $-\boldsymbol{a}$ 이다.

2. 실수와 '닫혀있다' (5/6)

◆ 곱셈에 대한 항등원과 역원

- 곱셈에 대한 항등원

  임의의 $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}$에 대하여, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$를 만족시키는 $\boldsymbol{e} = \mathbf{1} \in \boldsymbol{R}$ 이므로, $\mathbb{R}$의 곱셈에 대한 항등원은 1이다.

- 곱셈에 대한 역원

  어떤 $\boldsymbol{a}(\neq \mathbf{0}) \in \boldsymbol{R}$에 대하여, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a} = \mathbf{1}$(항등원)
  만족시키는 $\boldsymbol{x} = {}^{1}/_{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}$이므로,
  $\mathbb{R}$의 곱셈에 대한 $\boldsymbol{a}(\neq \mathbf{0})$의 역원은 ${}^{1}/_{\boldsymbol{a}}$ 이다.

2. 실수와 '닫혀있다' (6/6)

◆ 자연수 집합의 덧셈·곱셈에 대한 항등원과 역원

- 덧셈에 대한 항등원 (없음, $\because \mathbf{0} \notin \mathbb{N}$)
  덧셈에 대한 역원 (없음, ∵ 항등원 없음)
- 곱셈에 대한 항등원 ($\mathbf{1} \in \mathbb{N}$)
  곱셈에 대한 역원 (없음, $^{1}/_{a} \notin \mathbb{N}$)

◆ 일반적인 연산에 대한 항등원과 역원

- 주어진 집합이 그 연산에 대해 닫혀있고
  항등원과 역원이 그 집합의 원소인 경우

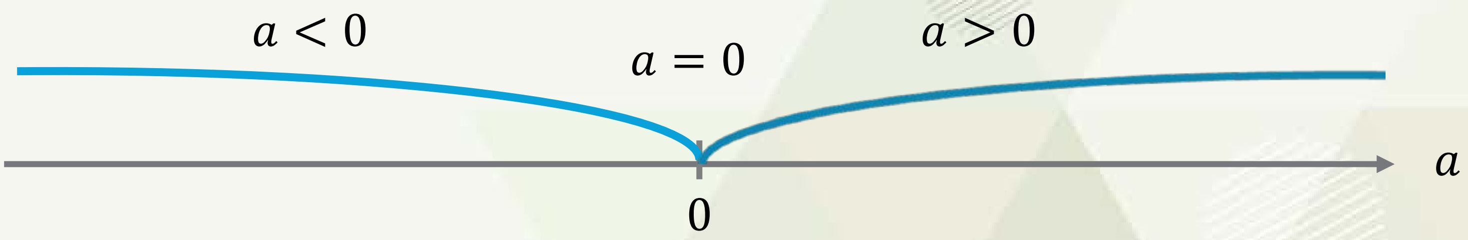
2 대소관계와 절댓값

1. 실수의 대소관계 (1/3)

◆ 실수의 대소관계에 대한 기본 성질

- 임의의 실수 $\boldsymbol{a}$에 대하여,
  $\boldsymbol{a > 0}$, $\boldsymbol{a = 0}$, $\boldsymbol{a < 0}$ 중 어느 한 경우만 성립

- 수직선에서 표현



1. 실수의 대소관계 (2/3)

◆ 실수의 대소관계에 대한 기본 정리

- 임의의 실수 a에 대하여,
  $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ 중 어느 한 경우만 성립
- $a > 0$, $b > 0$ 이면 $a + b > 0$, $ab > 0$
- $a > b$, $b > c$ 이면 $a > c$
- $a > b$ 이면, 임의의 실수 c에 대하여 $a \pm c > b \pm c$
- $a > b$, $c > 0$ 이면, $ac > bc$
  $a > b$, $c < 0$ 이면, $ac < bc$

한국방송통신대학교 프라임칼리지

1. 실수의 대소관계 (3/3)

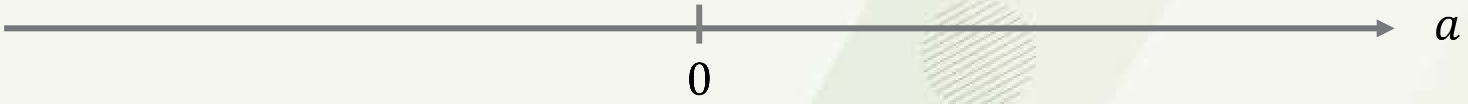
◆ 실수의 대소관계에 대한 기본 정리 활용

- 두 실수 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$의 대소관계를 비교하면
  $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} > \boldsymbol{0}$,
  $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$,
  $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} < \boldsymbol{0}$ 중 어느 한 경우만 성립
- $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} > \boldsymbol{0}$ 인 경우,
  ${}^{\boldsymbol{a}}/_{\boldsymbol{b}} > \boldsymbol{1}, {}^{\boldsymbol{a}}/_{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{1}, {}^{\boldsymbol{a}}/_{\boldsymbol{b}} < \boldsymbol{1}$ 중 어느 한 경우만 성립

2. 실수의 절댓값 (1/3)

◆ 절댓값(absolute value)의 정의

- 수직선 위에서 실수 a와 원점 사이의 거리, $|a|$
- 수직선에서 표현



2. 실수의 절댓값 (2/3)

실수와 절댓값의 성질

- $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$, $|a| \geq 0$

- $|a|^2 = a^2$, $|ab| = |a||b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\,(b \neq 0)$

- 임의의 실수 a에 대하여, $a^2 \geq 0$이다.

2. 실수의 절댓값 (3/3)

- 절댓값의 정의 예제
  - $a = 3$일 때,
    $|a-1| + |a-2| + |a-3| + |a-4| + |a-5| = ?$
  - 실수 a에 대하여, $A = \big|a + |a|\big| - \big|a - |a|\big| = ?$

3 정수의 약수와 배수

1. 정수의 나눗셈과 나머지 (1/3)

◆ 정수의 나눗셈

- 정수 $\boldsymbol{a}$를 자연수 $\boldsymbol{n}$으로 나눈 몫이 $\boldsymbol{q}$, 나머지가 $\boldsymbol{r}$일 때,
  $\boldsymbol{a = nq + r,\ a\ mod\ n = r}$ (단, $\boldsymbol{r \in \{0, 1, , \cdots n - 1\}}$)

- 다음 정수를 7로 나누고 몫과 나머지는 구하자.
  - -15 =
  - -11 =
  - -7 =
  - 9 =

1. 정수의 나눗셈과 나머지 (2/3)

◆ 정수의 분류

- 모든 정수는 자연수 k로 나눈 나머지에 의하여, 다음과 같이 분류된다.

  $$kn,\ kn+1,\ kn+2,\ \cdots,\ kn+(k-1)$$

- 임의의 정수 a를 $a\ mod\ 2$으로 분류하면?

- 임의의 정수 a를 $a\ mod\ 3$ 으로 분류하면?

1. 정수의 나눗셈과 나머지 (3/3)

- 정수의 분류 예제
  - 정수 a에 대하여, a^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.

2. 소수와 소인수분해 (1/3)

◆ 소수(prime number)의 정의

- 2, 3, 5, 7, 11, 13, … 와 같이 1보다 큰 자연수 중에서 1과 자신 이외에는 양의 약수를 갖지 않는 수
- 4, 6, 8, 9, 10, 12, … 와 같이 1보다 큰 자연수 중에서 소수가 아닌 수를 합성수(composite number)
- 1은 소수도 아니고 합성수도 아니다.

2. 소수와 소인수분해 (2/3)

◆ 소인수분해

- 임의의 합성수는 소수의 곱으로 유일하게 표현 가능
- 자연수를 소수인 인수(약수)의 곱으로 표현하는 것
- $\mathbf{120 = 2^3 \times 3 \times 5,} \qquad \mathbf{96 = 2^5 \times 3}$

2. 소수와 소인수분해 (3/3)

◆약수의 개수와 총합

- 소인수 분해된 자연수 $N = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$에 대하여,
- (양의 약수의 개수) $= (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$,
  (양의 약수의 총합)
  $= (1 + a + \cdots + a^{\alpha})(1 + b + \cdots + b^{\beta})(1 + c + \cdots + c^{\gamma})$
- $12 = 2^2 \times 3$

3. 공약수와 공배수 (1/3)

◆ 공약수와 최대공약수

- 두 개 이상의 정수의 공통인 약수(인수)를 공약수,
  공약수 중에서 가장 큰 값은 최대공약수(GCD)

- 18과 24의 공약수와 최대공약수
  공약수: -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6; 최대공약수: 6

- 공약수는 최대공약수의 약수이다.
  *서로소: 두 정수의 공약수가 1밖에 없는 경우

3. 공약수와 공배수 (2/3)

◆ 공배수와 최소공배수

- 두 개 이상의 정수의 공통인 배수를 공배수,
  공배수 중에서 가장 작은 양수 값은 최소공배수(LCM)

- 18과 24의 공배수와 최소공배수
  공배수: ⋯, -144, -72, 0, 72, 144, ⋯; 최소공배수: 72

- 공배수는 최소공배수의 배수이다.

3. 공약수와 공배수 (3/3)

◆ 최대공약수와 최소공배수의 관계

- 두 자연수 A, B의 최대공약수 G, 최소공배수 L일 때,
- $A=aG$, $B=bG$ (단, a, b는 서로소)
  $L = abG = Ab = aB, LG = AB$
- $G = 6, L = 36$인 두 자연수의 합과 곱은?

4. 정수의 p진법 표현 (1/3)

- $\boldsymbol{p}$진법 $(a_i \in \{0, 1, \cdots, p-1\})$
  - $\boldsymbol{p}$진법으로 표현된 양의 정수 $\boldsymbol{N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0}$

$$\boldsymbol{N = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0 p^0}$$

  - $\boldsymbol{p}$진법으로 표현된 양의 소수 $\boldsymbol{M = 0.a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n}$

$$\boldsymbol{M = \frac{a_1}{p} + \frac{a_2}{p^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{p^{n-1}} + \frac{a_n}{p^n}}$$

4. 정수의 p진법 표현 (2/3)

- p진법 예제 1
  - $N = 15$를 2진법으로 표현하면?
  - $M = \frac{1}{3} = 0.\dot{3}$을 2진법으로 표현하면?

4 복소수의 정의와 성질

1. 허수와 복소수 (1/4)

◆ 허수(imaginary number)의 정의

- 임의의 실수 a에 대하여, $a^2 \geq \mathbf{0}$
- $x^2 = -\mathbf{1}$을 만족하는 실수는 존재하지 않음

- $x^2 = -\mathbf{1}$을 만족하는 수를 i로 나타내고 허수단위로 정의, 즉 $i^2 = -\mathbf{1}$

1. 허수와 복소수 (2/4)

◆ 복소수(complex number)의 정의

- 실수 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$에 대하여, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$ 꼴의 수를 복소수로 정의
- $\boldsymbol{a}$를 실수부, $\boldsymbol{b}$를 허수부로 정의

- 허수($\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$), 순허수($\mathbf{a} = \mathbf{0}, \boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$)
  $\mathbf{2} + \mathbf{2}\boldsymbol{i}$, $\mathbf{2} + \mathbf{0}\boldsymbol{i}$, $\mathbf{0} + \mathbf{3}\boldsymbol{i}$, $\mathbf{0} + \mathbf{0}\boldsymbol{i}$

- (복소수 집합) = (실수 집합) ∪ (허수 집합)

1. 허수와 복소수 (3/4)

◆ 켤레복소수(complex conjugate)의 정의

- 복소수 $\boldsymbol{z = a + bi}$에 대하여, $\boldsymbol{\bar{z} = a - bi}$를 켤레복소수
- $\boldsymbol{\bar{\bar{z}} = z,\ z + \bar{z} = 2a,\ z - \bar{z} = 2bi}$
- $\boldsymbol{i - 2,}$ $\boldsymbol{4 - 3i,}$ $\boldsymbol{-5i,}$ $\boldsymbol{4}$

1. 허수와 복소수 (4/4)

◆ 복소수(complex number)의 상등

- 실수 a, b, c, d에 대하여,

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$$

- 실수 a, b에 대하여, $a + bi = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0$

- a, b가 실수가 아니라면?
- 무리수의 상등?

2. 복소수의 연산 (1/4)

◆ 복소수의 사칙연산

- 덧셈·뺄셈 $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$
- 곱셈 $(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- 나눗셈 $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

- 사칙연산에 대하여 닫혀있으며, 항등원과 역원이 존재
- 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙 성립

2. 복소수의 연산 (2/4)

◆ 허수단위의 거듭제곱

- $i = \sqrt{-1},\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ \cdots$
- $i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ i^{4n} = 1,\ \cdots$

- i^{16} i^{101} i^{98} i^{9}

2. 복소수의 연산 (3/4)

◆ 허수단위의 연산

- $x^2 = -2$이면, $x = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}i$
- 두 실수 a, b에 대하여 다음 성질이 성립
  - $a > 0,\ b > 0$: $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab},\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
  - $a > 0,\ b < 0$: $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab},\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$
  - $a < 0,\ b > 0$: $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab},\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
  - $a < 0,\ b < 0$: $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab},\ \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

2. 복소수의 연산 (4/4)

복소수 연산 예제

- $x = 1 + 2i$일 때, $x^3 - 2x^2 + 3x + 2$의 값은?

- $x = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$일 때, $\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y}$의 값은?

정리하기

- 자연수, 정수, 유리수, 무리수로 구성된 실수
- 특정 집합이 특정 연산에 대해 ‘닫혀 있다’
- 나머지를 기준으로 정수의 분류와 소인수분해
- 대소비교가 가능한 실수, 제곱이 음수인 허수

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.