[대학기초수학]

12차시 | 삼각함수 (2)

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 삼각함수 사이의 관계를 이해한다.
- 삼각함수의 각 변환 공식을 이해한다.
- 사인법칙과 코사인법칙을 이해한다.
- 덧셈정리와 그 변형을 이해한다.

목차

1. 삼각함수의 기본 성질
   1) 삼각함수 사이의 관계
   2) 각 변환 공식

2. 사인법칙과 코사인법칙
   1) 사인법칙과 그 활용
   2) 코사인법칙과 그 활용

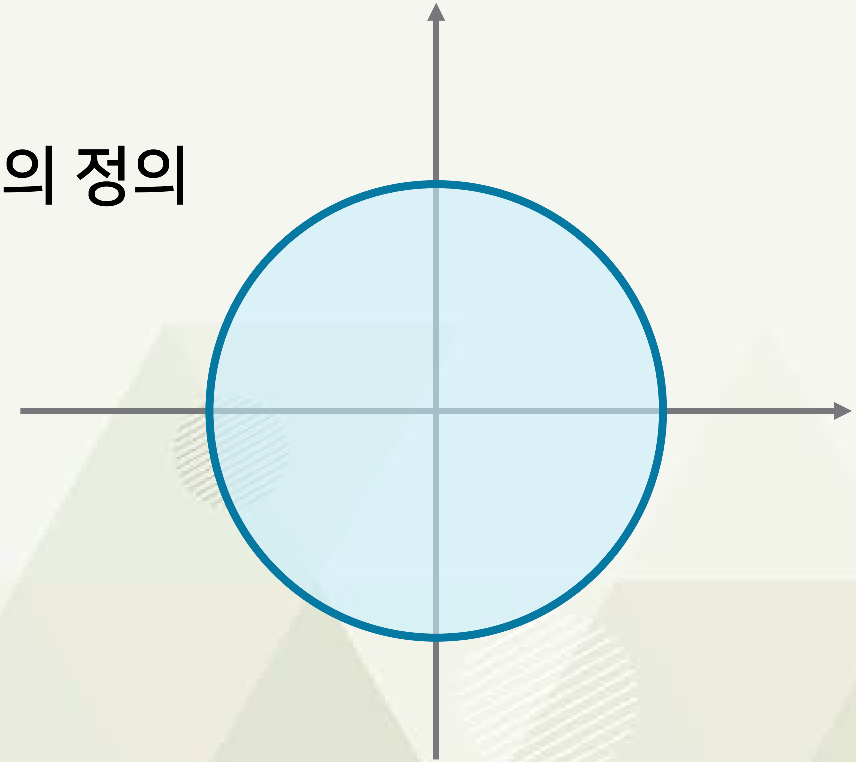
3. 덧셈정리
   1) 삼각함수의 덧셈정리
   2) 덧셈정리의 활용

1 삼각함수의 기본 성질

1. 삼각함수의 정의

◆ 원운동과 삼각함수 표현

- 원의 방정식: $x^2 + y^2 = r^2$
- 원 위의 점 $P(x, y)$과 삼각함수의 정의
  - $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$
    - 1사분면 & 2사분면 양의 값
  - $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$
    - 1사분면 & 4사분면 양의 값
  - $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
    - 1사분면 & 3사분면 양의 값



1.1 삼각함수 사이의 관계

◆ 삼각함수의 역수 관계

- $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{r}{y}$
  - $\csc 30°$ $\csc 45°$ $\csc 60°$
- $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{r}{x}$
  - $\sec 30°$ $\sec 45°$ $\sec 60°$
- $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{x}{y}$
  - $\cot 30°$ $\cot 45°$ $\cot 60°$

1.1 삼각함수 사이의 관계

◆ 삼각함수의 제곱관계

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
  - 증명) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2} = 1$
- $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$
  - 증명)
- $1 + \cot^2\theta = csc^2\theta$
  - 증명)

1.1 삼각함수 사이의 관계

삼각함수의 사이의 관계 예제

- $\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5}\left(0 < \theta < \frac{\pi}{4}\right)$ 일 때
  - $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$

1.2 각 변환 공식

◆ 일반각과 삼각함수 변환

- 일반각 표현: $\theta = 360° \times n + \alpha$ 또는 $\theta = 2n\pi + \alpha$
  - $n \in \mathbb{Z}$: θ를 표현하기 위한 각 회전수
  - $\alpha \in [0, 2\pi)$: θ에 대응되는 최소 크기의 양(+, positive) 각
- $\alpha = 90° \pm \beta$ 또는 $270° \pm \beta$ (β는 예각)인 경우
  - $\sin\alpha \to \pm\cos\beta$; $\cos\alpha \to \pm\sin\beta$; $\tan\alpha \to \pm\cot\beta$;
    - 변환 後 부호는 변환 前 삼각함수의 부호에 따라 결정
- $\alpha = 180° \pm \beta$ (β는 예각)인 경우
  - $\sin\alpha \to \pm\sin\beta$; $\cos\alpha \to \pm\cos\beta$; $\tan\alpha \to \pm\tan\beta$;
    - 변환 後 부호는 변환 前 삼각함수의 부호에 따라 결정

1.2 각 변환 공식

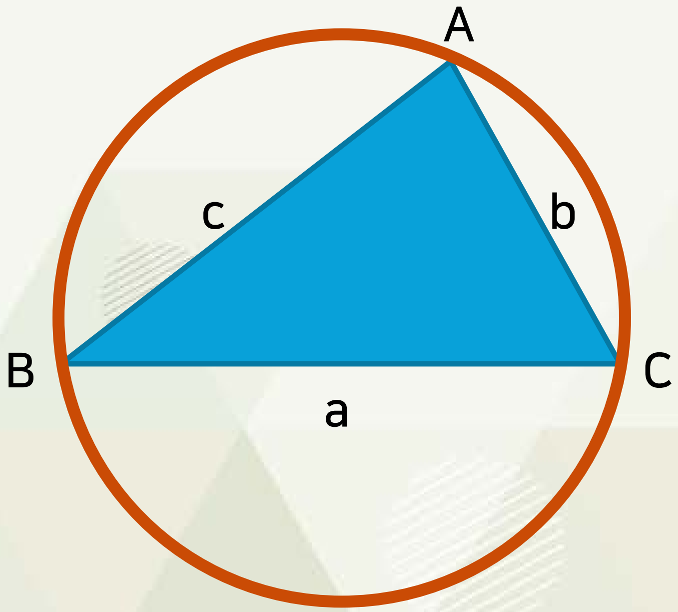
- 각 변환 공식 예제
  - $\tan(\theta + 40°)\tan(\theta - 50°)$

2 사인법칙과 코사인법칙

2.1 사인법칙과 그 활용

◆ 사인(sine) 법칙

- 삼각형 $\triangle ABC$와 반지름이 R인 외접원에 대하여
  - $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$
  - $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
- $\triangle ABC$의 넓이
  - $\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{abc}{4R}$
  - $\frac{1}{2} ab \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$



2.1 사인법칙과 그 활용

◆사인법칙 예제

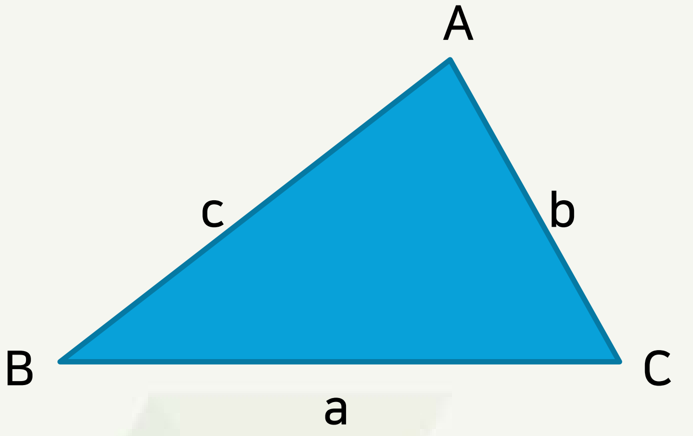
- △ABC의 세 각의 크기의 비가 $A:B:C = 3:4:5$일 때, 세 변의 길이의 비 $a:b:c$ (단, $\sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$)

2.2 코사인법칙과 그 활용

코사인(cosine) 법칙

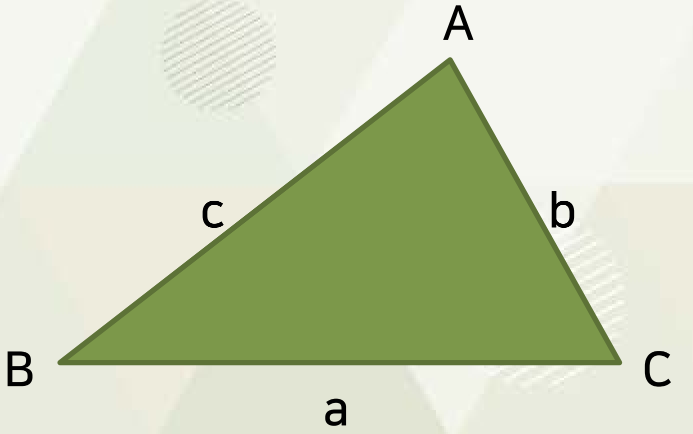
제1코사인 법칙

- $a = b\cos C + c\cos B$
- $b = a\cos C + c\cos A$
- $c = a\cos B + b\cos A$



제2코사인 법칙

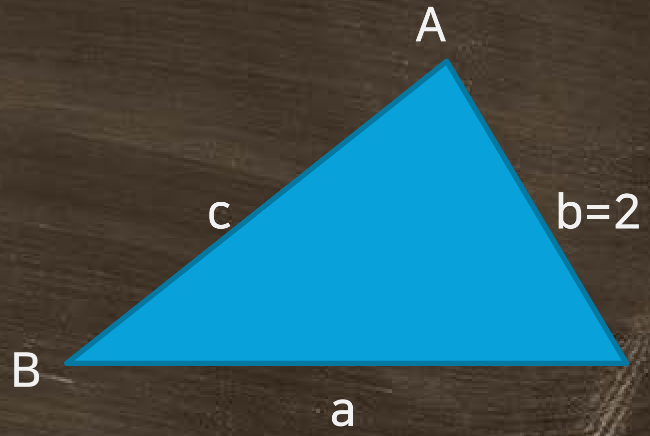
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



2.2 코사인법칙과 그 활용

코사인법칙 예제

- $\triangle$ABC에 대하여 $A = 60°, B = 45°, b = 2$일 때 삼각형의 나머지 각의 크기와 변의 길이는?



3 덧셈정리

3.1 삼각함수의 덧셈정리

◆ 덧셈정리의 기본 법칙

- 일반적인 각에 대응되는 삼각함수의 함숫값을 특수각의 합 또는 차로 표현하여 계산하는 방법
- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
  $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
  $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
- $\tan(\alpha+\beta)={}^{[\tan\alpha+\tan\beta]}/_{[1-\tan\alpha\tan\beta]}$
  $\tan(\alpha-\beta)={}^{[\tan\alpha-\tan\beta]}/_{[1+\tan\alpha\tan\beta]}$

3.1 삼각함수의 덧셈정리

◆ 덧셈정리의 기본법칙 활용

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
  $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
  - $\sin 15°$ $\sin 75°$ $\sin 105°$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
  $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
  - $\cos 15°$ $\cos 75°$ $\cos 105°$
- $\tan(\alpha+\beta) = {}^{[\tan\alpha+\tan\beta]}/_{[1-\tan\alpha\tan\beta]}$
  $\tan(\alpha-\beta) = {}^{[\tan\alpha-\tan\beta]}/_{[1+\tan\alpha\tan\beta]}$
  - $\tan 15°$ $\tan 75°$ $\tan 105°$

3.1 삼각함수의 덧셈정리

덧셈정리의 증명

- $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

3.2 덧셈정리의 활용

◆ 삼각함수의 합성

- 서로 다른 두 삼각함수(사인과 코사인)의 합으로 표현된 함수를 사인 또는 코사인 함수 중 하나로 표현하는 방법
- $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\theta + \alpha)$

$$\cos\alpha = {}^{a}\!/\!_{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = {}^{b}\!/\!_{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\theta - \alpha)$

$$\cos\alpha = {}^{b}\!/\!_{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = {}^{a}\!/\!_{\sqrt{a^2+b^2}}$$

3.2 덧셈정리의 활용

◆ 삼각함수의 합성 예제

- $3\sin\theta + 4\cos\theta$

- $3\sin\theta - 4\cos\theta$

3.2 덧셈정리의 활용

◆ 배각공식과 반각공식

- $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
  $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
  $= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
  $\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = {}^{2\tan\alpha}/_{[1-\tan^2\alpha]}$
- $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$
  $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$
  $\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

3.2 덧셈정리의 활용

- 배각공식과 반각공식 예제
  - $\cos\theta = \frac{4}{5}\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$에 대하여
    - $\sin 2\theta$
    - $\cos 2\theta$
    - $\tan 2\theta$
  - $\cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$
    - $\sin 22.5°$
    - $\cos 22.5°$
    - $\tan 22.5°$

3.2 덧셈정리의 활용

◆ 곱을 합 또는 차로 변형하는 공식

- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

3.2 덧셈정리의 활용

- 곱을 합 또는 차로 변형하는 공식 예제
  - $\sin 75° \cos 15°$
  - $\cos 75° \sin 15°$
  - $\cos 37.5° \cos 7.5°$
  - $\sin 37.5° \sin 7.5°$

3.2 덧셈정리의 활용

◆ 합 또는 차를 곱으로 변형하는 공식

- $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$
- $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

3.2 덧셈정리의 활용

- 합 또는 차를 곱으로 변형하는 공식 예제
  - $\sin 3\theta + \sin\theta$
  - $\sin 3\theta - \sin\theta$
  - $\cos 3\theta + \cos\theta$
  - $\cos 3\theta - \cos\theta$

정리하기

- 삼각함수의 역수관계, 제곱관계
- 사인법칙과 코사인 제1법칙&제2법칙
- 삼각함수의 덧셈정리와 합성
- 배각공식, 반각공식, 합과 곱의 변환

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.