[대학기초수학]

11차시 | 삼각함수 (1)

정 세 윤 교수

한국방송통신대학교 프라임칼리지

오늘의 목표

- 원의 방정식을 이해한다.
- 60분법과 호도법의 차이를 이해한다.
- 삼각비의 정의를 이해한다.
- 삼각함수의 정의와 그래프를 이해한다.

목차

1. 삼각함수의 배경
   1) 원의 방정식
   2) 60분법과 호도법

2. 삼각비
   1) 직각삼각형의 변의 길이
   2) 삼각비의 활용

3. 삼각함수의 정의와 그래프
   1) 삼각함수의 정의
   2) 삼각함수의 그래프

1 삼각함수의 배경

1.1 원의 방정식

- 원의 방정식(circle equation)이란?
  - 원의 정의
    - 한 정점(중심)으로부터 떨어진 거리가 같은(반지름) 점들의 집합
  - 원을 정의하려면?
    - 중심과 반지름 필요
    - 삼각형의 외접원은 유일 → 같은 직선 위에 있지 않은 세 점 필요
  - 원의 방정식
    - $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
    - $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

1.1 원의 방정식

원의 방정식 예제

- $x^2 + y^2 = 4$

- $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

1.1 원의 방정식

- 원 운동하는 물체의 움직임을 표현
  - 원을 따라 움직이는 물체
    - 한 정점으로부터 일정한 거리를 유지하며 회전
    - 평면 위에서 수평 방향 운동과 수직 방향 운동으로 분해
  - 원 운동하는 물체의 수평 방향 운동
    - x/r: 회전 반지름(r)과 수평 방향 위치(x)의 비 → 코사인 함수
  - 원 운동하는 물체의 수직 방향 운동
    - y/r: 회전 반지름(r)과 수직 방향 위치(y)의 비 → 사인 함수
  - 원 운동하는 물체의 수평·수직 방향 운동 비율
    - y/x: 수평 방향 위치(x)에 따른 수직 방향 위치(y)의 비 → 탄젠트 함수

1.2 60분법과 호도법

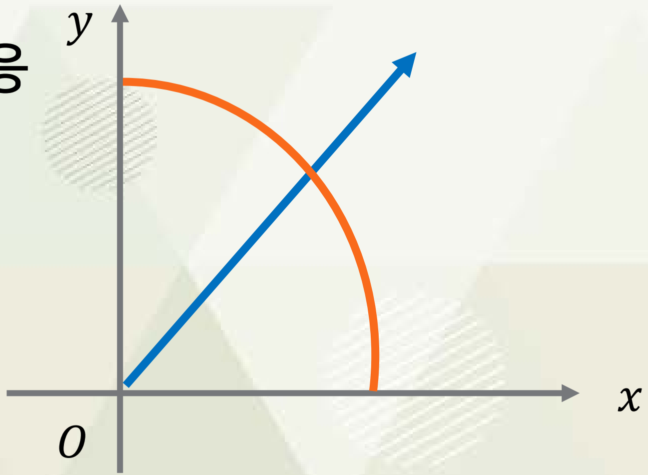
◆ 각을 표현하는 흔한 방법

- 60분법
  - 일상적으로 흔히 사용하는 단위
  - 한 바퀴 회전을 $360°$로 표현
    - $1°$를 60 등분 = 1′(분, minute) / 1′(분)을 60등분 = 1″(초, second)
    - (지구과학) 연주시차가 1″인 별까지의 거리 = 1pc
      $1\text{pc} = 206{,}265\text{AU},\ 1\text{AU} = 150{,}000{,}000\text{km}$ (태양과 지구 사이 거리)
- 60분법의 장단점
  - 장점: 일상적으로 흔히 사용되기 때문에 직관적으로 이해 용이
  - 단점: 1″, 1′, $1°$는 실수(real number)가 아니라 그래프 축 사용 불가

1.2 60분법과 호도법

◆ 실수로 각을 표현하는 방법

- 호도법(호의 길이로 각을 표현하는 방법)
  - 실수 ‘1’에 대응되는 각을 정의하고 이 각에 비례하도록 각을 결정
  - 1 := 반지름의 길이와 호의 길이가 같아지는 각의 크기
  - 실수 ‘2’에 대응되는 각의 크기
    = 호의 길이가 반지름 길이의 2배에 대응
- 원과 호도법의 관계
  - 원의 둘레(원주): $2\pi r$
    - 호의 길이가 반지름의 길이의 2π배



1.2 60분법과 호도법

◆ 부채꼴의 호의 길이와 넓이

부채꼴의 호의 길이

- 60분법 기준: (원의 둘레) × $(부채꼴의 중심각) / 360°$
- 호도법 기준: (실수에 대응시킨 각의 크기)= $(호의 길이) / (반지름)$

  → (호의 길이) = (반지름) × (실수 대응각의 크기), $l = r\theta$

부채꼴의 넓이

- 60분법 기준: (원의 넓이) × $(부채꼴의 중심각) / 360°$
- 호도법 기준: $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

1.2 60분법과 호도법

- 부채꼴의 호의 길이와 넓이 예제
  - 60분법 각도를 호도법으로 변환
    - $30°$
    - $45°$
    - $60°$
    - $90°$
  - 반지름 $r = 3$(cm), 호의 길이 $l = 6$(cm)
    - 중심각 θ
    - 부채꼴의 넓이 S

2 삼각비

2.1 직각삼각형의 변의 길이

- (복습) 원 운동하는 물체의 움직임을 표현
  - 원을 따라 움직이는 물체
    - 한 정점으로부터 일정한 거리를 유지하며 회전
    - 평면 위에서 수평 방향 운동과 수직 방향 운동으로 분해
  - 원 운동하는 물체의 수평 방향 운동
    - x/r: 회전 반지름(r)과 수평 방향 위치(x)의 비 → 코사인 함수
  - 원 운동하는 물체의 수직 방향 운동
    - y/r: 회전 반지름(r)과 수직 방향 위치(y)의 비 → 사인 함수
  - 원 운동하는 물체의 수평·수직 방향 운동 비율
    - y/x: 수평 방향 위치(x)에 따른 수직 방향 위치(y)의 비 → 탄젠트 함수

2.1 직각삼각형의 변의 길이

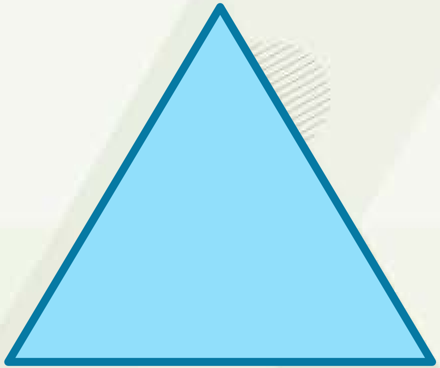
- 닮음인 직각삼각형의 변의 길이 비는 일정
  - 직각삼각형은 변의 길이를 계산하기 용이(피타고라스 정리)
    - 직각삼각형에서 한 변의 길이와
      변의 길이 비를 알면 모든 변의 길이 파악 가능
    - 높이: 빗변 → 높이/빗변 (사인, sine)
    - 밑변: 빗변 → 밑변/빗변 (코사인, cosine)
    - 높이: 밑변 → 높이/밑변 (탄젠트, tangent)

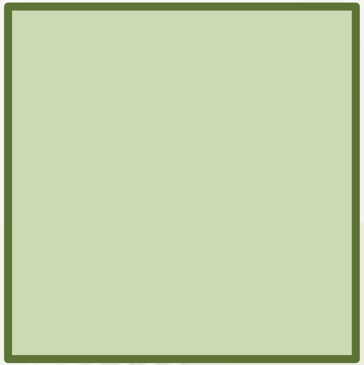
2.1 직각삼각형의 변의 길이

◆ 특수각의 삼각비 값

- 정삼각형과 정사각형의 성질로 만들 수 있는 삼각비
  - 30°, 45°, 60°로 이루어진 삼각비 값

	30°	45°	60°
sin	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tan	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$





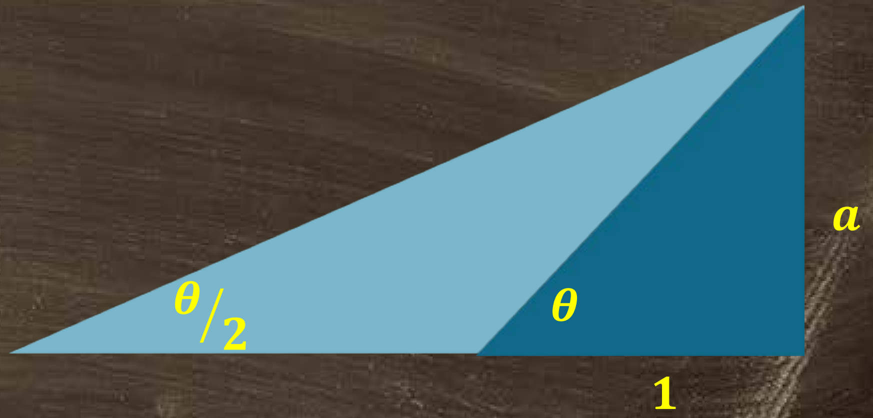
2.2 삼각비의 활용

- 삼각비를 활용하여 직각삼각형의 변의 길이 계산
  - 직각삼각형은 변의 길이를 계산하기 용이(피타고라스 정리)
    - 직각삼각형에서 한 변의 길이와
      변의 길이 비를 알면 모든 변의 길이 파악 가능
    - 높이: 빗변 → 높이/빗변 (사인, sine)
    - 밑변: 빗변 → 밑변/빗변 (코사인, cosine)
    - 높이: 밑변 → 높이/밑변 (탄젠트, tangent)

2.2 삼각비의 활용

삼각비의 활용 예제

- $\tan\frac{\theta}{2}$를 a의 함수로 표현



3 삼각함수의 정의와 그래프

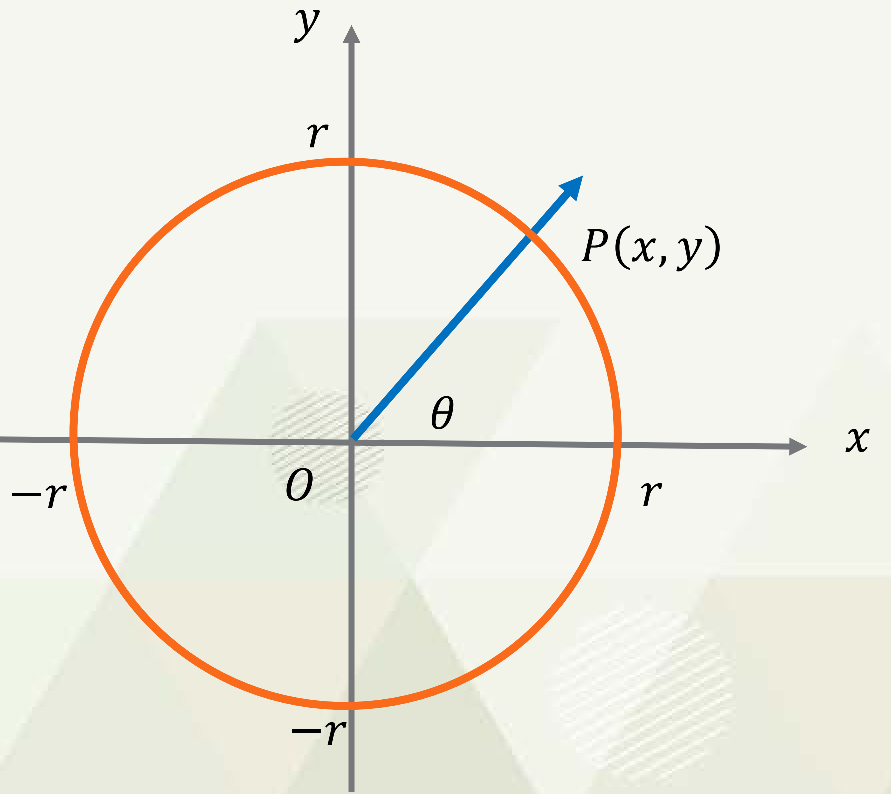
3.1 삼각함수의 정의

- (복습) 원 운동하는 물체의 움직임을 표현
  - 원을 따라 움직이는 물체
    - 한 정점으로부터 일정한 거리를 유지하며 회전
    - 평면 위에서 수평 방향 운동과 수직 방향 운동으로 분해
  - 원 운동하는 물체의 수평 방향 운동
    - $^{x}/_{r}$: 회전 반지름(r)과 수평 방향 위치(x)의 비 → 코사인 함수
  - 원 운동하는 물체의 수직 방향 운동
    - $^{y}/_{r}$: 회전 반지름(r)과 수직 방향 위치(y)의 비 → 사인 함수
  - 원 운동하는 물체의 수평·수직 방향 운동 비율
    - $^{y}/_{x}$: 수평 방향 위치(x)에 따른 수직 방향 위치(y)의 비 → 탄젠트 함수

3.1 삼각함수의 정의

◆ 삼각함수의 정의와 부호

- $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$
  - y의 부호로 결정;
    - 1,2 사분면 +; 3,4 사분면 -
- $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$
  - x의 부호로 결정;
    - 1,4 사분면 +; 2,3 사분면 -
- $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
  - x, y의 부호 일치 여부로 결정;
    - 1,3 사분면 +; 2,4 사분면 -



3.1 삼각함수의 정의

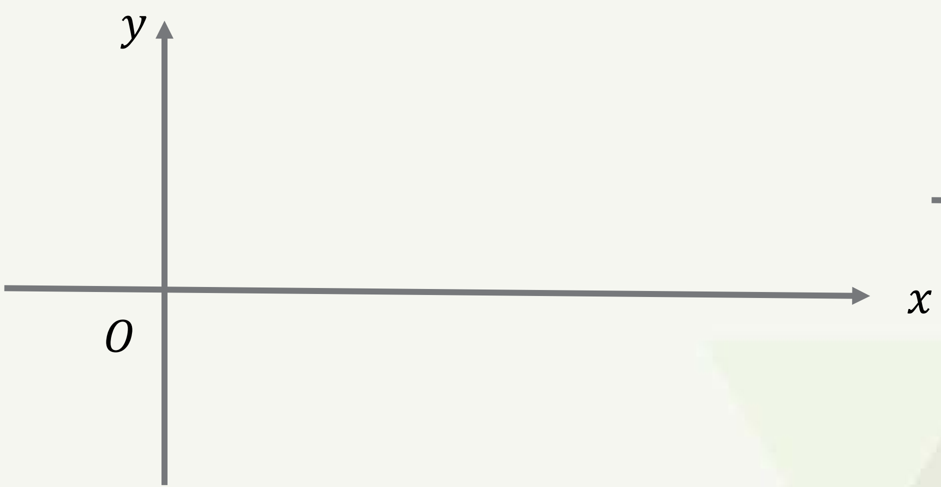
◆ 삼각함수의 정의 예제

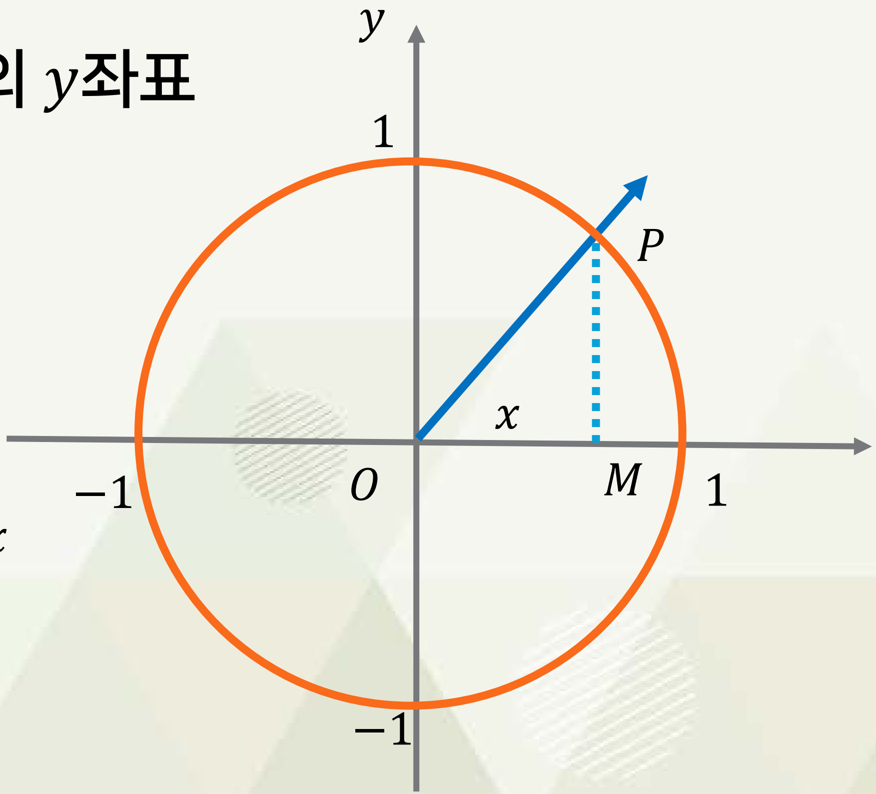
- 원점과 $P(-3,-4)$을 잇는 선분을 동경과 x축의 양의 방향이 이루는 각을 θ라 할 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값

3.2 삼각함수의 그래프

◆사인함수의 그래프

- 단위 원에서 회전하는 물체의 y좌표
- $\sin x = \overline{\mathrm{MP}}$의 y좌표

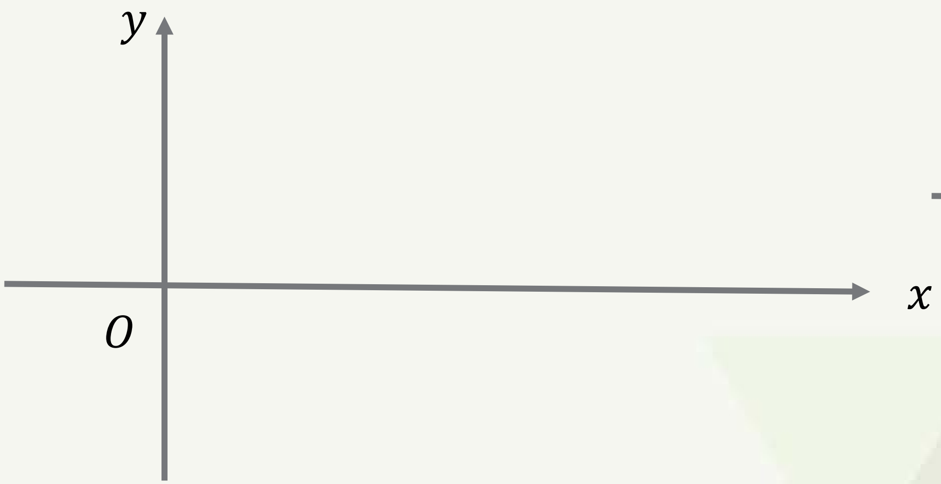


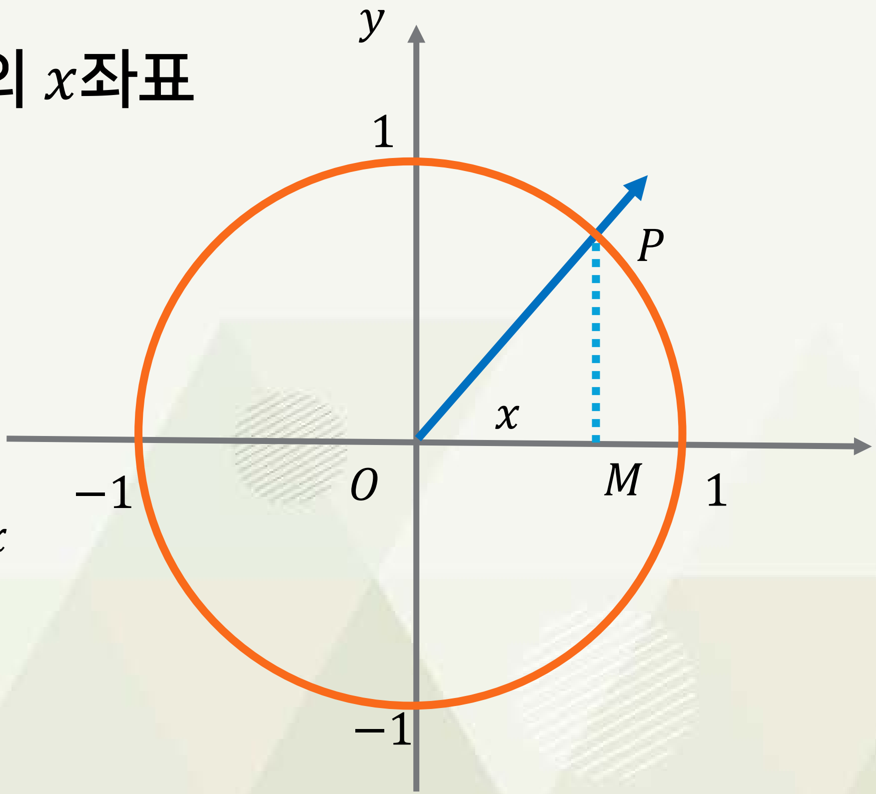


3.2 삼각함수의 그래프

◆ 코사인함수의 그래프

- 단위 원에서 회전하는 물체의 x좌표
- $\cos x = \overline{OM}$의 x좌표

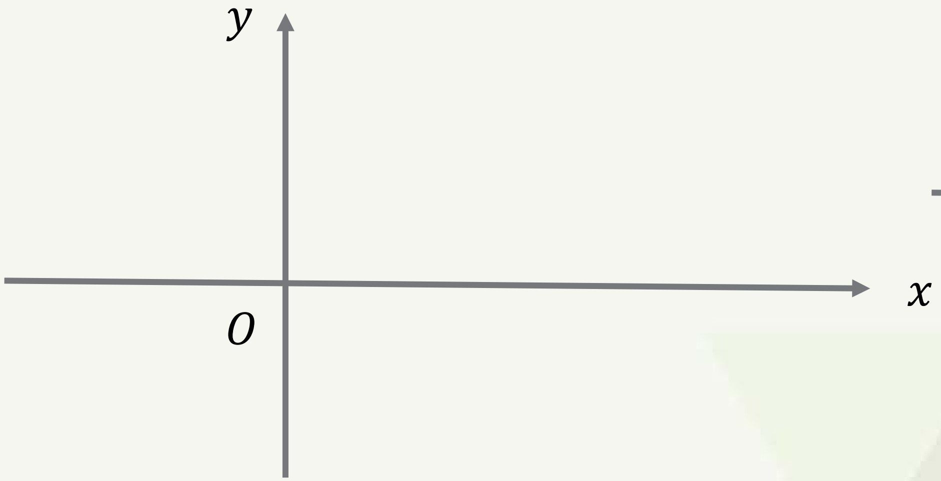


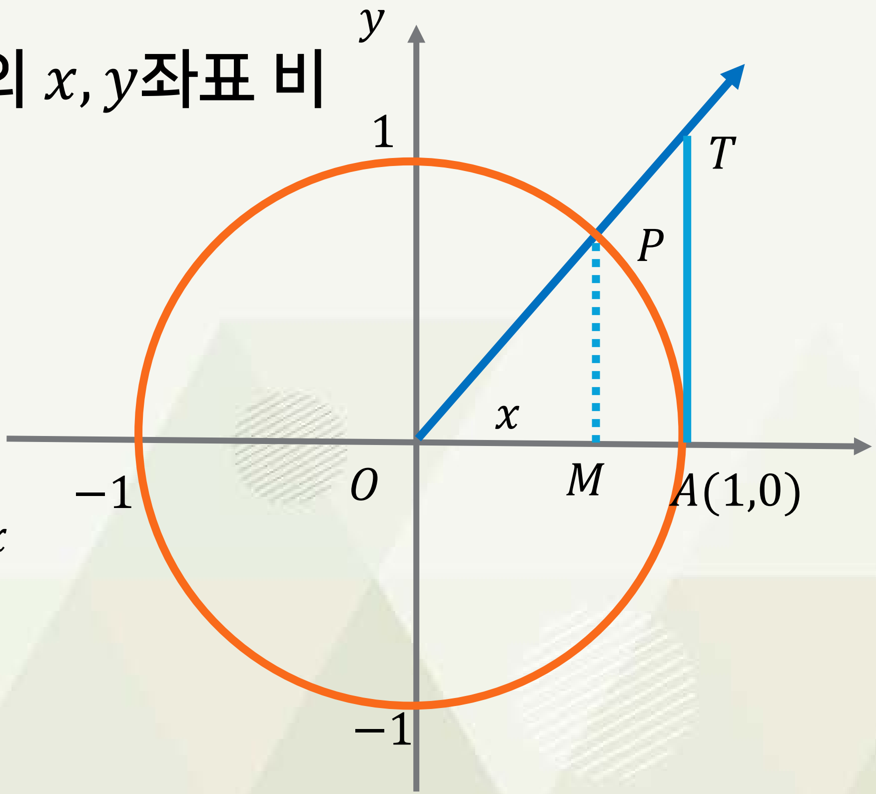


3.2 삼각함수의 그래프

◆ 탄젠트함수의 그래프

- 단위 원에서 회전하는 물체의 x, y좌표 비
- $\tan x = \overline{\mathrm{AT}}$의 y좌표





3.2 삼각함수의 그래프

◆ 삼각함수 그래프의 성질

- 정의역
  - $y = \sin x,\ y = \cos x$ → $\{x \mid -\infty < x < \infty\} = \mathbb{R}$
  - $y = \tan x$ → $\left\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ and } x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$
- 치역
  - $y = \sin x,\ y = \cos x$ → $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
  - $y = \tan x$ → $\{y \mid -\infty < y < \infty\} = \mathbb{R}$
- 주기
  - $y = \sin x,\ y = \cos x$ → 한 바퀴 회전마다 반복 (주기 2π)
  - $y = \tan x$ → 반 바퀴 회전마다 반복 (주기 π)

3.2 삼각함수의 그래프

◆ 삼각함수의 그래프 예제

- $y = \sin|x|$의 그래프

- $y = |\cos x|$의 그래프

- $y = |\tan x|$의 그래프

정리하기

- 원의 정의와 성질, 그리고 원의 방정식
- 각을 표현하는 60분법과 호도법
- 직각삼각형의 변의 길이 비, 삼각비
- 삼각함수의 정의와 그래프

강의를 마쳤습니다.

수고하셨습니다.