### **1. Εισαγωγή**

Το Πρόβλημα του Περιπλανώμενου Πωλητή (Traveling Salesperson Problem - TSP) αποτελεί μία από τις πιο εντατικά μελετημένες προκλήσεις στον τομέα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης, τόσο στην επιστήμη των υπολογιστών όσο και στην έρευνα επιχειρησιακών διαδικασιών. Στην ουσία, το πρόβλημα θέτει την εξής απλή ερώτηση. Δίνοντας μια λίστα πόλεων και τις αποστάσεις μεταξύ τους, ποια είναι η συντομότερη δυνατή διαδρομή που επισκέπτεται κάθε πόλη ακριβώς μία φορά και επιστρέφει στην αρχική πόλη; Παρά την απλή του διατύπωση, η υπολογιστική πολυπλοκότητα του TSP το καθιστά μια διαρκή πρόκληση και σημείο αναφοράς για την ανάπτυξη αλγορίθμων. Συγκεκριμένα, ο χώρος των εφικτών λύσεων του TSP αυξάνεται παραγοντικά με τον αριθμό των πόλεων (n), ακόμη και στην συμμετρική εκδοχή του προβλήματος, όπου απαιτείται η εξέταση (n−1)!/2​ πιθανών διαδρομών. Με τον χαρακτηρισμό **συμμετρική εκδοχή ενός TSP** δεχόμαστε την υπόθεση ότι το κόστος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β ισούται με το κόστος μετάβασης από το σημείο Β στο σημείο Α. Μολονότι η υπόθεση αυτή συνεπάγεται μείωση των μεταβλητών απόφασης στο μισό, ο χώρος τον εφικτών λύσεων συνεχίζει να αυξάνεται παραγοντικά ως προς τον αριθμό των πόλεων καθιστώντας την ακριβή επίλυση μέσω πλήρους εξάντλησης πρακτικά αδύνατη ακόμα και για σχετικά μικρούς αριθμούς πόλεων. Για να αποδώσουμε το μέγεθος του προβλήματος, στην συμμετρική μορφή του TSP, ο αριθμός των εφικτών διαδρομών για 10 πόλεις είναι 181.440, ενώ για 15 πόλεις αυξάνεται σε 43.589.145.600.

Μέθοδοι γραμμικού προγραμματισμού, όπως η προσέγγιση με cutting-plane και δυναμική αποκοπή διαδρομών που υλοποιούμε στην παρούσα εργασία, προσφέρουν πιο αποδοτικά πλαίσια επίλυσης. Ωστόσο, ακόμα και αυτές οι προηγμένες μαθηματικές τεχνικές δεν ξεφεύγουν από τη βασική NP-hard φύση του προβλήματος. Ο χειρότερος χρόνος εκτέλεσης παραμένει εκθετικός, περιορίζοντας τη χρήση τους σε μεσαίου μεγέθους προβλήματα παρά τις δεκαετίες βελτιώσεων.

#### **1.1 Μια Προσέγγιση με Μηχανική Μάθηση**

Η παρούσα εργασία εξετάζει ένα εναλλακτικό παράδειγμα: Μπορούν τα νευρωνικά δίκτυα γράφων (Graph Neural Networks - GNNs) να μάθουν τα μοτίβα των βέλτιστων λύσεων του TSP από μικρά παραδείγματα και να γενικεύσουν αυτή τη γνώση σε μεγαλύτερα προβλήματα; Η προσέγγισή μας βασίζεται σε τρεις βασικές παρατηρήσεις:

* **Δομική Ομοιότητα:** Μικρά και μεγάλα παραδείγματα του TSP παρουσιάζουν κοινά τοπολογικά χαρακτηριστικά στις βέλτιστες λύσεις τους.
* **Τοπικά Μοτίβα:** Οι βέλτιστες διαδρομές συχνά εμφανίζουν αναγνωρίσιμα τοπικά μοτίβα επιλογής ακμών, τα οποία τα GNN μπορούν να μάθουν.
* **Ανοχή σε υποβέλτιστες λύσεις:** Αν και δεν εγγυώνται βέλτιστες λύσεις, οι νευρωνικές προσεγγίσεις μπορεί να προσφέρουν κοντινές στη βέλτιστη λύσεις με σημαντικά μειωμένο χρόνο υπολογισμού.

Αυτό υλοποιείται μέσω ενός υβριδικού πλαισίου όπου:

* Ένα GNN μαθαίνει να προβλέπει τις πιθανότητες επιλογής ακμών από βέλτιστες λύσεις μικρών παραδειγμάτων (20-50 κόμβοι).
* Οι προβλέψεις αυτές καθοδηγούν έναν αλγόριθμο beam search για την κατασκευή εφικτών διαδρομών.

#### **1.2 Συνεισφορές**

Η εργασία αυτή προσφέρει τρεις βασικές συνεισφορές:

* **Υλοποίηση:** Ανάπτυξη τόσο παραδοσιακών λύσεων γραμμικού προγραμματισμού όσο και νέων GNN-based λύσεων με ανοικτή πρόσβαση στον κώδικα.
* **Υβριδική Μεθοδολογία:** Επίδειξη του πώς η μηχανική μάθηση μπορεί να συμπληρώσει τον μαθηματικό προγραμματισμό στην επίλυση συνδυαστικών προβλημάτων.
* **Εμπειρική Επιβεβαίωση:** Συστηματική αξιολόγηση που αποδεικνύει ότι τα GNN μπορούν να συλλάβουν ουσιαστικά μοτίβα λύσεων, θέτοντας θεμέλια για μελλοντική έρευνα.

**2 Διατύπωση του Προβλήματος**

Το Πρόβλημα του Περιπλανώμενου Πωλητή αποτελεί ένα κλασικό και ευρέως μελετημένο πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού και μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Δίνεται ένα σύνολο πόλεων και οι αποστάσεις μεταξύ κάθε πιθανού ζεύγους αυτών. Στόχος είναι να βρεθεί η συντομότερη διαδρομή που:

* επισκέπτεται κάθε πόλη ακριβώς μία φορά (1)
* αποτελεί έναν ενιαίο κύκλο που περικλείει όλες τις πόλεις (2)
* και ελαχιστοποιεί το συνολικό μήκος ή κόστος της διαδρομής (3)

**2.1 Προσεγγίσεις Μαθηματικής Μοντελοποίησης**

Στη βιβλιογραφία έχουν αναπτυχθεί διάφορες μαθηματικές διατυπώσεις για τη μοντελοποίησης του Προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή (TSP), με δύο από τις πιο διαδεδομένες να είναι εκείνες των **Miller–Tucker–Zemlin (MTZ)** και **Dantzig–Fulkerson–Johnson (DFJ)**. Αμφότερες οι προσεγγίσεις ξεκινούν εισάγοντας **δυαδικές μεταβλητές** xij οι οποίες λαμβάνουν τιμή 1 αν η ακμή από την πόλη i προς την πόλη j περιλαμβάνεται στη λύση, και 0 διαφορετικά. Με αυτόν τον τρόπο, το πρόβλημα μετασχηματίζεται σε ένα πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού, όπου στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους των επιλεγμένων διαδρομών.

Ωστόσο, παρά τον κοινό αυτό κορμό, οι δύο μοντελοποιήσεις διαφέρουν σημαντικά στον τρόπο με τον οποίο διασφαλίζουν την **εγκυρότητα της δεύτερης συνθήκης** του προβλήματος, δηλαδή την ύπαρξη ενός και μόνο ενιαίου κύκλου που να περιλαμβάνει όλες τις πόλεις.

Σε αυτό το σημείο είναι κρίσιμο να αποσαφηνιστεί ο όρος **«επιμέρους κύκλοι»** , καθώς πρόκειται να χρησιμοποιηθεί συστηματικά στη συνέχεια της εργασίας. Ως επιμέρους κύκλοι ορίζονται **ανεξάρτητοι κλειστοί κύκλοι** που ενδέχεται να προκύψουν σε μία λύση. Αυτοί οι κύκλοι μπορεί να ικανοποιούν τη **συνθήκη (1)** —δηλαδή κάθε πόλη να επισκέπτεται μία μόνο φορά— αλλά **παραβιάζουν τη συνθήκη (2)**, αφού το σύνολο των ακμών δεν σχηματίζει ένα συνεκτικό μονοπάτι που διατρέχει όλες τις πόλεις. Στο πλαίσιο της θεωρίας γράφων, η παρουσία επιμέρους κύκλων συνεπάγεται ότι η επιλεγμένη υποδομή ακμών αντιστοιχεί σε **μη συνεκτικό γράφο**.

Η **προσέγγιση MTZ** επιχειρεί να εξαλείψει τις επιμέρους διαδρομές εισάγοντας **βοηθητικές μεταβλητές** ui και uj, οι οποίες εκφράζουν τις «θέσεις» των πόλεων i και j εντός της συνολικής διαδρομής. Μεταξύ αυτών των μεταβλητών θέσεων επιβάλλεται ο ανισοτικός περιορισμός της μορφής:

ui - uj+1 ≤ (n -1) (1 – xij) ∀ i ε [2, n-1] και ι ≠j

οι οποίες διασφαλίζουν την αδυναμία σχηματισμού κυκλικών ακολουθιών όπως ui<uj<⋯<uι, οι οποίες θα οδηγούσαν σε επιμέρους κύκλους. Οι τιμές των ui περιορίζονται εντός ενός καθορισμένου εύρους, εξασφαλίζοντας έτσι ότι δεν μπορεί να σχηματιστεί κύκλος σε υποσύνολο πόλεων S.

Αντίθετα, η **προσέγγιση DFJ** βασίζεται περισσότερο στη **συνδεσιμότητα** του γράφου. Σε αυτήν, η ύπαρξη ενός ενιαίου κύκλου που διατρέχει όλες τις πόλεις αποτυπώνεται στο γεγονός ότι το πλήθος των επιλεγμένων ακμών πρέπει να είναι ίσο με το πλήθος των πόλεων. Η απουσία συνδεσιμότητας αντιμετωπίζεται μέσω της κατασκευής **περιορισμών-επιπέδων που περιορίζουν τον χώρο των εφικτών λύσεων** (*cutting planes*), αποτρέποντας οποιοδήποτε κυκλικό μονοπάτι μήκους μικρότερου από τον αριθμό των πόλεων.

Συνοψίζοντας, και οι δύο προσεγγίσεις επιδιώκουν τη δημιουργία ενός μοναδικού, συνεκτικού κύκλου. Η μέθοδος MTZ επιτυγχάνει αυτόν τον στόχο με τη χρήση επιπλέον μεταβλητών και περιορισμών τύπου θέσης, ενώ η μέθοδος DFJ υιοθετεί μια πιο δυναμική προσέγγιση, εξαλείφοντας τις ανεπιθύμητες λύσεις με βάση το μήκος του κυκλικού μονοπατιού που αντιπροσωπεύει την λύση. Οι διαφορές αυτές έχουν σημαντικές επιπτώσεις στην αποδοτικότητα και την πολυπλοκότητα του μοντέλου, όπως θα παρουσιαστεί αναλυτικότερα στη συνέχεια της εργασίας.

**2.1.1** **Μαθηματική Διατύπωση του Μοντέλου MTZ**

Μία από τις πρώτες και πιο κλασικές μαθηματικές διατυπώσεις του προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή (TSP) προτάθηκε από τους Miller, Tucker και Zemlin (**MTZ**). Η συγκεκριμένη προσέγγιση βασίζεται στην ιδέα ότι μπορούμε να περιγράψουμε το πρόβλημα μέσω ενός μικρού αριθμού γραμμικών περιορισμών και δυαδικών μεταβλητών, με σκοπό να αποκλείσουμε τους λεγόμενους υποκύκλους χωρίς να χρειαστεί να τους καταγράψουμε ρητά.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα πλήρως συνδεδεμένο γράφημα G = (V,E) όπου κάθε κόμβος i ∈ V αντιπροσωπεύει μία πόλη και κάθε ακμή (i,j) ∈ E έχει ένα αντίστοιχο κόστος μετακίνησης cij. Ο στόχος είναι να επισκεφθούμε κάθε πόλη ακριβώς μία φορά και να επιστρέψουμε στο σημείο εκκίνησης, ελαχιστοποιώντας το συνολικό κόστος.

Η διατύπωση MTZ χρησιμοποιεί τις εξής μεταβλητές:

* xij ∈ {0,1): είναι 1 αν ο πωλητής μετακινηθεί από την πόλη i στην πόλη j, αλλιώς 0.
* ui ∈ ℜ: βοηθητικές μεταβλητές που εισάγονται για την εξάλειψη των **επιμέρους κύκλων** (μόνο για κόμβους i=1,…,n).

Η διατύπωση του προβλήματος γίνεται ως εξής:

**Στόχος:**

(1)

**υπό τους περιορισμούς:**

(2)

(3)

(4)

Οι περιορισμοί **(2)** και **(3)** αποτελούνται από σύνολο n περιορισμών ο καθένας και επιβάλλουν τα εξής: κάθε πόλη να επισκέπτεται ακριβώς μία φορά ως πόλη αναχώρησης και μία φορά ως πόλη άφιξης, αντίστοιχα. Δηλαδή, από κάθε πόλη φεύγει ακριβώς μία διαδρομή και προς κάθε πόλη καταλήγει ακριβώς μία διαδρομή.

Ο τελευταίος περιορισμός **(4)** έχει ως στόχο να αποτρέψει την ύπαρξη επιμέρους διαδρομών — δηλαδή, κύκλων που δεν περιλαμβάνουν όλες τις πόλεις. Γι' αυτόν τον λόγο, οι δείκτες σε αυτόν τον περιορισμό ξεκινούν από το 2 και φτάνουν έως το n−1.

**Αναλυτικότερα:**

* Η πόλη 1 θεωρείται η αρχική πόλη εκκίνησης και δεν χρειάζεται να περιοριστεί εδώ.
* Οι βοηθητικές μεταβλητές ui​ ορίζουν τη θέση επίσκεψης κάθε πόλης στη διαδρομή.
* Με αυτόν τον περιορισμό διασφαλίζουμε ότι η σειρά των επισκέψεων δεν σχηματίζει **επιμέρους κύκλους**, επιτρέποντας όμως την επιστροφή από την τελευταία πόλη πίσω στην αρχική.

Για παράδειγμα, αν έχουμε 4 πόλεις, ο περιορισμός αυτός επιτρέπει μια διαδρομή της μορφής 1→2→3→4→1, δηλαδή επιστροφή από την τελευταία πόλη στην πρώτη, χωρίς να επιτρέψει κύκλους όπως 1→2→3→2 που δεν περνούν από όλες τις πόλεις.

**2.1.2 Μαθηματική Διατύπωση του Μοντέλου DFJ**

Η προσέγγιση του Dantzig–Fulkerson–Johnson (DFJ) αποτελεί μία από τις κλασικές και ακριβείς μαθηματικές διατυπώσεις του προβλήματος του Πλανόδιου Πωλητή (TSP). Όπως και στην περίπτωση της MTZ, το πλήρως συνδεδεμένο γράφημα G=(V,E) έχει κόμβους i ∈ V που αντιστοιχούν σε πόλεις, και ακμές (i, j) ∈ E με αντίστοιχο κόστος μετακίνησης cij​.

Οι δυαδικές μεταβλητές ορίζονται ως εξής:

* xij ∈ {0,1): είναι 1 αν ο πωλητής μετακινηθεί από την πόλη i στην πόλη j, αλλιώς 0.

Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

(1)

**Υπό τους περιορισμούς:**

Κάθε πόλη πρέπει να επισκεφθεί ακριβώς μία φορά ως πόλη άφιξης

(2)

Κάθε πόλη πρέπει να επισκεφθεί ακριβώς μία φορά ως πόλη αναχώρησης

(3)

Αποτροπή επιμέρους κύκλων

(4)

Η διαφορά με το μοντέλο MTZ είναι ο τρόπος αντιμετώπισης των επιμέρους κύκλων, ενώ η MTZ χρησιμοποιεί βοηθητικές μεταβλητές για τη σειρά επίσκεψης, το μοντέλο DFJ τους αποτρέπει ρητά επιβάλλοντας το μήκος του κύκλου που αντιπροσωπεύει την βέλτιστη λύση να ισούται με τον αριθμό των πόλεων που πρέπει να επισκεφτεί ο πωλητής. Ωστόσο, ακόμη και σε αυτή την προσέγγιση, ο αριθμός των περιορισμών που απαιτούνται για την αποτροπή όλων των επιμέρους κύκλων αυξάνεται εκθετικά με τον αριθμό των πόλεων. Συγκεκριμένα, για ένα πρόβλημα με n πόλεις, θα πρέπει να εισαχθούν περιορισμοί για όλους τους δυνατούς κύκλους που περιλαμβάνουν από 2 έως n−1 πόλεις, δηλαδή για κάθε υποσύνολο κόμβων που ενδέχεται να σχηματίσει ανεξάρτητο κύκλο. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα με 5 πόλεις, απαιτείται η αποτροπή όλων των δυνατών κύκλων με 2, 3 και 4 κόμβους, γεγονός που οδηγεί σε έναν εκθετικά αυξανόμενο αριθμό περιορισμών καθώς μεγαλώνει το πλήθος των πόλεων.

Για την παρούσα εργασία, ο επιλυτής του προβλήματος TSP που υλοποιήθηκε σε γλώσσα Python πραγματοποιήθηκε με χρήση τεχνικών άμεσης ανίχνευσης επιμέρους κύκλων και προσθήκης των αντίστοιχων περιορισμών. Το συγκεκριμένο μοντέλο χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή βέλτιστων λύσεων, οι οποίες αποτέλεσαν τη βάση εκπαίδευσης του Νευρωνικού Δικτύου Γράφων(GNN). Η λεπτομέρειες αναφορικά με την υλοποίηση του επιλυτή καθώς η αρχιτεκτονική και τα χαρακτηριστικά του νευρωνικού μοντέλου θα αναλυθούν σε επόμενο τμήμα της εργασίας.

**2.2 Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός**

Ο Ακέραιος Γραμμικός Προγραμματισμός (Integer Linear Programming - ILP) αποτελεί μια υποκατηγορία του γραμμικού προγραμματισμού, στην οποία επιλύεται ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με **γραμμική αντικειμενική συνάρτηση** και **γραμμικούς περιορισμούς**, με τη διαφορά ότι ορισμένες ή όλες οι μεταβλητές απόφασης πρέπει να λάβουν **ακέραιες τιμές**.

Αν όλες οι μεταβλητές είναι ακέραιες, τότε το πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως **αμιγώς ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός (Pure ILP ή PILP)**, ενώ αν κάποιες μεταβλητές επιτρέπεται να λάβουν συνεχείς τιμές, τότε πρόκειται για **μικτό ακέραιο γραμμικό προγραμματισμό (Mixed-Integer Linear Programming - MILP)**.

Μια ειδική περίπτωση του ILP είναι ο **δυαδικός ακέραιος προγραμματισμός**, κατά τον οποίο οι μεταβλητές μπορούν να λάβουν **μόνο τις τιμές 0 ή 1**. Η μορφή αυτή είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη σε προβλήματα όπου απαιτούνται **δυαδικές αποφάσεις**, όπως επιλογή/απόρριψη, ενεργοποίηση/απενεργοποίηση, ή ύπαρξη/απουσία σχέσης μεταξύ οντοτήτων. Το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή (TSP), το οποίο αποτελεί το αντικείμενο της παρούσας εργασίας, ανήκει ακριβώς σε αυτήν την κατηγορία.

Η γενική μαθηματική διατύπωση ενός ILP προβλήματος είναι η εξής:

Ελαχιστοποίηση:

Υπό τους περιορισμούς:

Σε περίπτωση δυαδικού ILP, ισχύει:

Η κύρια πρόκληση του ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού έγκειται στο ότι ο περιορισμός της ακεραιότητας κάποιων μεταβλητών απόφασης **καθιστά το σύνολο εφικτών λύσεων μη κυρτό**. Στον κλασικό γραμμικό προγραμματισμό, οι λύσεις βρίσκονται σε ένα **κυρτό πολύεδρο** – δηλαδή, οποιοδήποτε σημείο μεταξύ δύο εφικτών λύσεων είναι επίσης εφικτό. Ωστόσο, όταν απαιτείται οι λύσεις να είναι ακέραιες, το σύνολο εφικτών λύσεων **αποτελείται από διακριτά σημεία**, γεγονός που **αναιρεί την ιδιότητα της κυρτότητας**.

Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι αλγόριθμοι όπως ο **Simplex** ή οι **μέθοδοι εσωτερικού σημείου (Interior Point Methods)**, παρότι επιλύουν αποδοτικά προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, **δεν εγγυώνται ότι η λύση τους θα ανήκει στο σύνολο των εφικτών λύσεων του αρχικού προβλήματος ILP**. Ο λόγος είναι ότι το αποτέλεσμα αυτών των μεθόδων ενδέχεται να είναι **μερικώς ή πλήρως μη ακέραιο**, καθώς επιλύουν το συνεχές χαλαρωμένο πρόβλημα και όχι το διακριτό.

Η **τυπική διαδικασία επίλυσης ενός ILP** προβλήματος ακολουθεί επομένως δύο στάδια:

1. **Χαλάρωση (Relaxation)**: Επίλυση της συνεχούς εκδοχής του προβλήματος (LP Relaxation), όπου οι περιορισμοί ακεραιότητας αγνοούνται. Το πρόβλημα επιλύεται μέσω καθιερωμένων αλγορίθμων γραμμικού προγραμματισμού (π.χ. Simplex, Interior Point), και η βέλτιστη τιμή του παρέχει ένα **θεωρητικό φράγμα** (κάτω φράγμα σε προβλήματα ελαχιστοποίησης ή άνω φράγμα σε προβλήματα μεγιστοποίησης) για το αρχικό ακέραιο πρόβλημα.
2. **Αποκατάσταση της Ακεραιότητας (Restoring Integrality)**: Εφόσον η λύση του LP Relaxation δεν ικανοποιεί τους ακέραιους περιορισμούς, απαιτείται περαιτέρω διαδικασία ώστε να εντοπιστεί η βέλτιστη λύση εντός του συνόλου των ακέραιων εφικτών σημείων.

Μαθηματικά, έστω το γενικό πρόβλημα Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού (ILP):

(1)

Ορίζουμε το πολύεδρο εφικτών λύσεων του LP Relaxation:

Το σύνολο των ακέραιων εφικτών λύσεων είναι:

*X =* P ∩

H κυρτή θήκη των ακέραιων λύσεων είναι:

Px = conv(X)

Τότε ισχύει:

X ⊆ Px​ ⊆ P

και για τις βέλτιστες τιμές των προβλημάτων:

Αυτό σημαίνει ότι το LP Relaxation παρέχει:

* ένα **κάτω φράγμα** (σε προβλήματα ελαχιστοποίησης), και
* μία **καλή προσέγγιση της γεωμετρίας** του συνόλου των ακέραιων λύσεων.

Τα παραπάνω αποτελούν αναγκαία στοιχεία για όλες τις σύγχρονες μεθόδους αποκατάστασης της ακεραιότητας. Είτε πρόκειται για **δέντρα διακλάδωσης και φραγμών** (Branch and Bound) είτε για **τέμνοντα επίπεδα** (Cutting Planes), οι μέθοδοι αυτές βασίζονται στα αποτελέσματα του LP Relaxation τόσο για την παραγωγή φραγμάτων όσο και για την παραγωγή πρόσθετων περιορισμών ή την επιλογή υπό-προβλημάτων.

**2.3 Ανασκόπηση Μεθόδων Αποκατάστασης Ακεραιότητας**

Η πλέον άμεση —και θεωρητικά ακριβής— προσέγγιση για την επίλυση ενός προβλήματος Ακέραιου Γραμμικού Προγραμματισμού (ILP) είναι η **πλήρης απαρίθμηση** όλων των δυνατών ακέραιων λύσεων και η επιλογή της βέλτιστης μεταξύ αυτών. Ωστόσο, η μέθοδος αυτή καθίσταται **υπολογιστικά μη εφαρμόσιμη** στην πράξη, εξαιτίας της **παραγοντικής αύξησης του χώρου λύσεων** . Η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι συνάρτηση του **πλήθος των τιμών που μπορεί να λάβει κάθε ακέραια μεταβλητή**, αλλά κυρίως από το **πλήθος των μεταβλητών που υπόκεινται σε ακέραιο περιορισμό**. Αναλυτικότερα αν ένα γραμμικό πρόβλημα έχει:

* n ακέραιες μεταβλητές
* και κάθε μεταβλητή xι​ μπορεί να πάρει κι​ διακριτές τιμές

Το πλήθος των λύσεων είναι:

Ακόμη και σε προβλήματα δυαδικού προγραμματισμού, όπου κάθε μεταβλητή μπορεί να λάβει μόνο τις τιμές 0 ή 1, το πλήθος των δυνατών λύσεων αυξάνεται ραγδαία με τον αριθμό των ακέραιων μεταβλητών. Για παράδειγμα, σε ένα συμμετρικό TSP με n πόλεις, το πλήθος των πιθανών διατάξεων είναι (n−1)!/2, αριθμός που καθιστά την εξαντλητική απαρίθμηση απαγορευτική ήδη για n > 15.Για τον λόγο αυτό, έχουν αναπτυχθεί **αποδοτικότερες μέθοδοι αποκατάστασης της ακεραιότητας**, οι οποίες βασίζονται στην προηγούμενη επίλυση του αντίστοιχου συνεχούς γραμμικού προβλήματος **(LP Relaxation)**. Οι μέθοδοι αυτές αξιοποιούν τη λύση του συνεχούς προβλήματος είτε για την κατασκευή φραγμάτων είτε για την καθοδήγηση της αναζήτησης κατάλληλων πρόσθετων περιορισμών. Δύο από τις σημαντικότερες τεχνικές είναι:

* η μέθοδος **Διακλάδωσης και Φραγμού (Branch and Bound)** και
* η μέθοδος **Τεμνόντων Επιπέδων (Cutting Planes)**.

**2.3.1 Διακλάδωση και Φραγμός**

Η μέθοδος **Διακλάδωσης και Φραγμού (Branch and Bound)** αποτελεί μια ευρέως χρησιμοποιούμενη τεχνική για την επίλυση προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού. Η βασική της αρχή βασίζεται στην **επαναληπτική** και **αναδρομική** επίλυση χαλαρωμένων (δηλαδή χωρίς τους περιορισμούς ακεραιότητας) γραμμικών υποπροβλημάτων.

Ύπό το πλαίσιο της μεθόδου, ο όρος **υποπρόβλημα** αναφέρεται σε ένα νέο πρόβλημα που προκύπτει από το αρχικό μέσω της προσθήκης ενός επιπλέον περιορισμού. Κατά τη διαδικασία της **διακλάδωσης (branching)**, δημιουργούνται τέτοια υποπροβλήματα, με στόχο τη σταδιακή επιβολή της ακεραιότητας σε όλες τις μεταβλητές απόφασης. Κάθε υποπρόβλημα ορίζει έναν μικρότερο υποχώρο εφικτών λύσεων του αρχικού προβλήματος και επιλύεται ως ένα νέο χαλαρωμένο γραμμικό πρόβλημα.

Η λύση του χαλαρωμένου προβλήματος χρησιμοποιείται ως **φράγμα (bound)** για τα υποπροβλήματα:

* Σε προβλήματα ελαχιστοποίησης, η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης αυτής της λύσης αποτελεί **κάτω φράγμα** για τις λύσεις τών υποπροβλημάτων.
* Η **καλύτερη** ακέραια λύση που έχει βρεθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή λειτουργεί ως **άνω φράγμα**.

\*Τα αντίθετα ισχύουν για προβλήματα μεγιστοποίησης.

Συνοψίζοντας η λύση ενός ακεραίου γραμμικού προβλήματος ξεκινάει με την λύση του χαλαρωμένου προβλήματος. Αν αυτή είναι ακέραια, τότε αποτελεί έγκυρη λύση του αρχικού προβλήματος. Αν όχι, ξεκινά η διαδικασία διακλάδωσης με βάση μια μεταβλητή απόφασης που έχει μη ακέραια τιμή: δημιουργούνται δύο νέα υποπροβλήματα, το καθένα εκ των οποίων περιλαμβάνει έναν επιπλέον περιορισμό που αναγκάζει τη μεταβλητή να λάβει ακέραια τιμή (π.χ).

Η διαδικασία συνεχίζεται αναδρομικά, μέχρι να ισχύσει ένα από τα εξής:

1. Το υποπρόβλημα είναι **μη εφικτό** (infeasible).
2. Η λύση του υποπροβλήματος είναι **χειρότερη από το άνω φράγμα**, δηλαδή έχει υψηλότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης από την καλύτερη ακέραια λύση που έχει βρεθεί.
3. Η λύση είναι **ακέραια και βελτιώνει** το άνω φράγμα, οπότε ενημερώνεται το άνω φράγμα.

Μέσω της διαδικασίας του φραγμού διασφαλίζεται η εύρεση της **βέλτιστης ακέραιας λύσης** χωρίς να απαιτείται η εξαντλητική εξέταση όλων των δυνατών συνδυασμών. Αυτό επιτυγχάνεται, περιορίζοντας το εύρος αναζήτησης μόνο στις υποπεριπτώσεις που έχουν προοπτική βελτίωσης της βέλτιστης λύσης.

**Βιβλιογραφικές Αναφορές**

Lancia, G., & Serafini, P. (2018). Integer linear programming. In M. Di Summa, L. Liberti, & A. Sartenaer (Eds.), \*Compact extended linear programming models\* (pp. 43–66). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63976-5\_4

Clausen, J**.** (1999). *Branch and Bound Algorithms – Principles and Examples*. Department of Computer Science, University of Copenhagen. Retrieved from [https://web.archive.org/web/20150923214803/http://www.diku.dk/OLD/undervisning/2003e/datV-optimer/JensClausenNoter.pdf](https://web.archive.org/web/20150923214803/http:/www.diku.dk/OLD/undervisning/2003e/datV-optimer/JensClausenNoter.pdf)