PROBABILIDADE CONDICIONAL E INDEPENDÊNCIA

Anne Magaly de Paula Canuto

Introdução

- Em muitos casos práticos, um problema pode ser dividido em etapas
  - A informação de uma etapa pode influenciar nas etapas sucessivas
  - Podemos recalcular as probabilidades de interesses
  - Probabilidade condicional

Exemplo

- Suponha que em uma sala de aula com 15 meninos e 10 meninas, um aluno é escolhido ao acaso para realizar uma tarefa na aula de 4a. feira.

- Um outro aluno é escolhido aleatoriamente para realizar a mesma tarefa na aula de 6a. feira.

- Dado o resultado da escolha de 4a. feira, qual a probabilidade de que na 6a. feira o aluno escolhido seja do sexo masculino?

Exemplo

- Duas respostas são possíveis, dependendo do resultado de 4a. feira:
- 1. Um menino foi escolhido na 4a. feira

  P[outro menino ser escolhido na 6a. feira] = 14/24
- 2. Uma menina foi escolhida na 4a. feira

  P[um menino ser escolhido na 6a. feira] = 15/24

- Estas são probabilidades condicionais!

- Nota: Se não tivéssemos nenhuma informação sobre o resultado de 4a. feira, a resposta seria 15/25

Introdução

- Se sabemos que um determinado evento B ocorreu, então o espaço amostral para outro evento subsequente é reduzido para os resultados possíveis à luz desta informação, ou seja, os resultados pertencentes a B.

- Para determinar a probabilidade da ocorrência de um outro evento A, devemos considerar o conjunto de resultados em B que também resultam na ocorrência de A $\Rightarrow$ este é o evento AB.

Probabilidade condicional

A probabilidade condicional do evento A ocorrer, dado que B já tenha ocorrido, pode ser determinada dividindo-se a probabilidade de ocorrência de ambos os eventos A e B pela probabilidade do evento B.

Probabilidade condicional

- Dados dois eventos A e B associados a um experimento aleatório E, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por P(A | B) e definida por

$$\mathbf{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}}, \quad \mathbf{P(B) > 0}.$$

- Caso P(B) = 0, P(A|B) pode ser definida arbitrariamente (P(A|B) = P(A))

Probabilidade condicional

- Da definição de probabilidade condicional, obtemos a *regra do produto de probabilidades*

$$\boxed{\mathbf{P(A \cap B) = P(B) \times P(A \mid B).}}$$

- Analogamente, se P(A) >0,

$$\boxed{\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A).}}$$

Probabilidade condicional

- Probabilidade condicional é função probabilidade
- (satisfaz os três axiomas):
  - $P[A|B] \geq 0$
  - $P[\Omega|B] = 1$
  - $A_1, A_2, \ldots$ tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$; $\forall i \neq j \Rightarrow P[\cup_i A_i |B] = \Sigma_i P[A_i |B]$

Probabilidade condicional

- e, portanto, também satisfaz as propriedades decorrentes dos axiomas:
- $P[A^c|B] = 1 - P[A|B]$
  - No entanto, geralmente, $P[A|B^c] \neq 1 - P[A|B]$
- $P[A \cup B|C] = P[A|C] + P[B|C] - P[A \cap B|C]$; $P[C] > 0$
- $AB = \emptyset \Rightarrow P[A|B] = 0$
- $B \subset A \Rightarrow P[A|B] = 1$
- Podemos ter:

- $P[A|B] < P[A]$ ou $P[A|B] > P[A]$ ou $P[A|B] = P[A]$
- Não existe relação entre as probabilidades condicionais e as probabilidades marginais correspondentes.
- ...

Exemplo

- Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado sabendo-se que é do sexo masculino?

Sexo	Alfabetizada		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	56.601
Total	85.881	15.969	101.850

- temos $P(S \mid M) = 39.577 / 48.249 = 0{,}82$

Exemplo

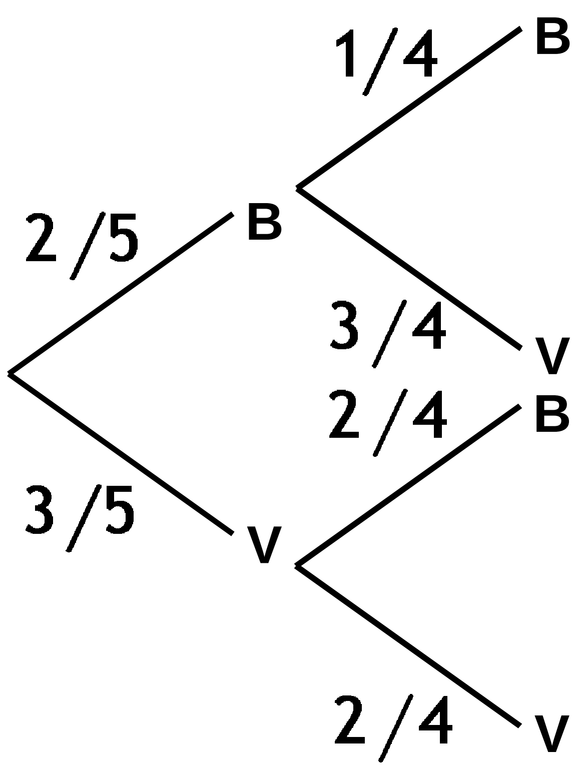
- Pela definição

$$P(S \mid M) = \frac{P(S \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{39.577}{101.850}}{\frac{48.249}{101,850}} = 0,82$$

Exemplo 2

- Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, sem reposição.
  - A: 2ª bola sorteada é branca
  - C: 1ª bola sorteada é branca
  - P(A) = ???

- Para representar todas as possibilidades, utilizamos, um diagrama conhecido como *diagrama de árvores* ou *árvore de probabilidades*.



Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$
BV	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$
VB	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$
V V	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$
Total	1

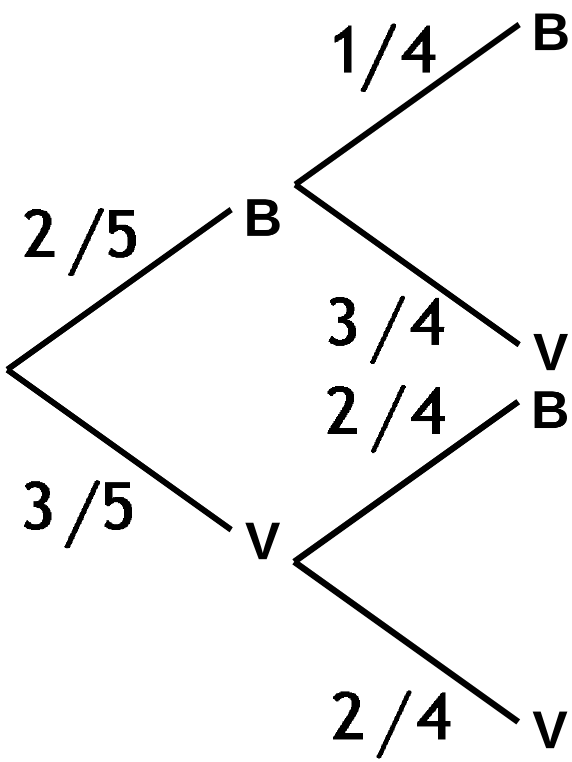
- Temos:

$$P(A)=\frac{2}{20}+\frac{6}{20}=\frac{2}{5}\quad \text{e}$$

$$P(A\,|\,C)=\frac{1}{4}\,.$$

Exemplo 2

- Considere agora que as extrações são feitas *com reposição*, ou seja, a 1ª bola sorteada é reposta na urna antes da 2ª extração. Nesta situação, como seria??



Resultados	Probabilidade
BB	$\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$
BV	$\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$
VB	$\frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
VV	$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$
Total	1

Exemplo 2

- Neste caso,
- P(A) = P(branca na 2ª) = $\frac{4}{25}+\frac{6}{25}=\frac{2}{5}$ **e**
- P(A | C) = P(branca na 2ª |branca na 1ª) = $\frac{2}{5}=\mathbf{P(A)}$
- P(A | C^c) = P(branca na 2ª |vermelha na 1ª) =

$$\frac{2}{5}=\mathbf{P(A)}$$

- ou seja, o resultado na 2ª extração *independe* do que ocorre na 1ª extração.

Outro exemplo

Com uma roleta russa, qual a probabilidade da sexta rodada cair numa casa preta, dada que as cinco primeiras rodadas caíram numa casa preta?

Independência de Eventos

- **Independência de eventos:** Dois eventos A e B são <u>independentes</u> se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$\boxed{\mathbf{P(A|B)=P(B),\quad P(B)>0.}}$$

- Temos a seguinte forma equivalente:

$$\boxed{\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B).}}$$

Propriedades

- $\forall$ A, B $\subset \Omega$, com A e B independentes:
  - A^c e B^c
  - A e B^c
  - A^c e B

... também são independentes.

Propriedades

- $A_1, A_2, \ldots A_n$ são independentes aos pares se

$$P[A_i A_j] = P[A_i]P[A_j], \quad \forall i \neq j$$

- $A_1, A_2, \ldots A_n$ são globalmente independentes se
  $\forall k \leq n$, quaisquer que sejam os eventos $A_{i(1)}, A_{i(2)}, \ldots, A_{i(k)}$, temos:

$$P[A_{i(1)} A_{i(2)} \ldots A_{i(k)}] = P[A_{i(1)}] \cdots P[A_{i(k)k}],$$

  onde $i(j) \neq i(m)$ se $i \neq j$.

Isto significa que podemos tomar eventos 2-a-2, 3-a-3, ..., n-a-n e a probabilidade de interseção é o produto das probabilidades marginais.

Número de condições para verificar:
$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - n - 1$ (T.Bin. de Newton)

Propriedades

- Independência Condicional:
  - Dois eventos A e B são ditos condicionalmente independentes com relação a um evento C se

$$P[AB|C] = P[A|C]P[B|C]$$

- Não confundir: Eventos Independentes com Eventos Disjuntos

Exemplo esclarecedor

- Uma empresa produz peças em duas máquinas, I e II, que podem apresentar desajustes com probabilidades 0,05 e 0,10 respectivamente.
  - No inicio do dia, um teste é realizado e caso a maquina apresente problemas, ela fica parada.
  - O nível mínimo de produção é pelo menos uma máquina funcionando

Exemplo esclarecedor

- Para este exemplo:
  - Os eventos O_i da máquina i estar operando, $i=1,2$: são independentes
  - Os eventos relacionados ao nível mínimo de produção são independentes

Exemplo

- A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

- A: Jonas é aprovado
- B: Madalena é aprovada

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 1/3 \times 2/3 = 2/9$$

→ **Qual foi a suposição feita?**

Exercício

- Dos pacientes de uma clinica cardíaca acima de 40 anos, 60% são ou foram casados e 40% são solteiros. Sendo solteiro, a probabilidade de ter tido um problema cardíaco no ultimo ano é de 10%, enquanto que para os demais essa probabilidade aumenta para 30%. Pergunta:
  - Qual a probabilidade de um paciente escolhido ao acaso ter problema cardíaco?
  - Se o paciente tiver problema cardíaco, qual a probabilidade de ser solteiro?
  - Se escolhermos dois pacientes ao acaso e com reposição, qual é a probabilidade de pelo menos um ter problema cardíaco?

Exercícios

- Carlos chega atrasado à universidade 25% das vezes, e esquece o material da aula 20% das vezes. Admitindo que essas ocorrências sejam independentes, determine a probabilidade de :
  - Carlos chegar atrasado 2 dias seguidos;
  - Carlos chegar atrasado e sem o material de aula;
  - Carlos chegar na hora e com o material de aula;
  - Carlos chegar na hora e sem o material de aula.