Aula 04

Linguagem de Conjuntos

Introdução

- O que os seguintes objetos têm em comum?
  - um grupo de pessoa
  - um rebanho de animais
  - um buquê de flores
  - uma dúzia de ovos

Introdução

- O que os seguintes objetos têm em comum?
  - um grupo de pessoa
  - um rebanho de animais
  - um buquê de flores
  - uma dúzia de ovos

- Conjunto: coleção de objetos bem definidos, denominados elementos ou membros do conjunto.

Introdução

- O que os seguintes objetos têm em comum?
  - um grupo de pessoa
  - um rebanho de animais
  - um buquê de flores
  - uma dúzia de ovos

- Conjunto: coleção de objetos bem definidos, denominados elementos ou membros do conjunto.
  - As palavras “conjunto” e “elementos” são termos indefinidos da teoria dos conjuntos.

Introdução

- Teoria dos conjuntos: base do pensamento matemático.
  – Todos objetos matemáticos podem ser definidos em termos de conjuntos.
- Notação:
  – Seja S um conjunto e a um elemento de S.
    - $a \in S$: a pertence a S
    - $a \notin S$: a não pertence a S

Introdução

- Axioma da extensão:
  - Um conjunto é completamente determinado pelos seus elementos.
  - A ordem na qual os elementos são listados é irrelevante.
  - Elementos podem aparecer mais de uma vez no conjunto.

Formas de definir um conjunto

- Listar seus elementos entre chaves:
  - {Ana, Roberto, Carlos}
  - {Roberto, Carlos, Ana}
  - {Roberto, Roberto, Ana, Carlos, Ana}

- Especificar uma propriedade que define um conjunto como $S = \{x | P(x)\}$:
  - $\{x \in Z | -2 < x < 5\}$
  - $\{x \in R | -2 < x < 5\}$

Formas de definir um conjunto

- Listar seus elementos entre chaves:
  - {Ana, Roberto, Carlos}
  - {Roberto, Carlos, Ana}
  - {Roberto, Roberto, Ana, Carlos, Ana}

- Especificar uma propriedade(predicado) que define um conjunto como $S = \{x|P(x)\}$:
  - $\{x \in Z| -2 < x < 5\}$
  - $\{x \in R| -2 < x < 5\}$

P(x) não pode ser uma propriedade qualquer.

- Exemplo:

  $S = \{A|A$ é um conjunto e $A \notin A\}$; $S \in S$? [Paradoxo de Russel]

- Usar operações sobre conjuntos para criar novos conjuntos:
  - $S = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup P$

- Especificar uma função característica:
  - $\mu_A(x) = \begin{cases} k & \text{para } x = 1, 3, 5, 7, 9 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$

  Obs: Nem sempre é possível utilizar todos os tipos de definição.

  $$S = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$$

Relações entre conjuntos: Subconjuntos

- Definição: Se A e B são conjuntos, A é chamado subconjunto de B, escrito $A \subseteq B$, sse cada elemento de A também é um elemento de B.
- Simbolicamente:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x, \text{ se } x \in A \text{ então } x \in B$$

- As frases “A está contido em B” e “B contém A” são formas alternativas de dizer que A é um subconjunto de B.

Relações entre conjuntos: Subconjunto próprio

- Definição: Se A e B são conjuntos, A é <u>subconjunto próprio</u> de B sse cada elemento de A está em B mas existe <u>pelo menos um elemento</u> de B que não está em A.

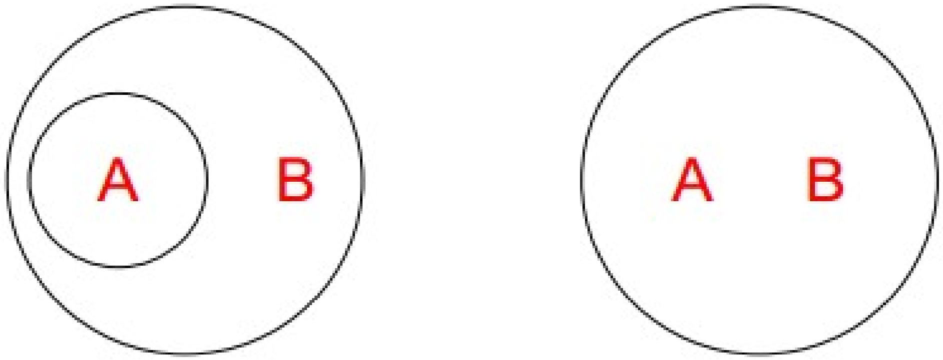
- Simbolicamente:

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } A \neq B.$$

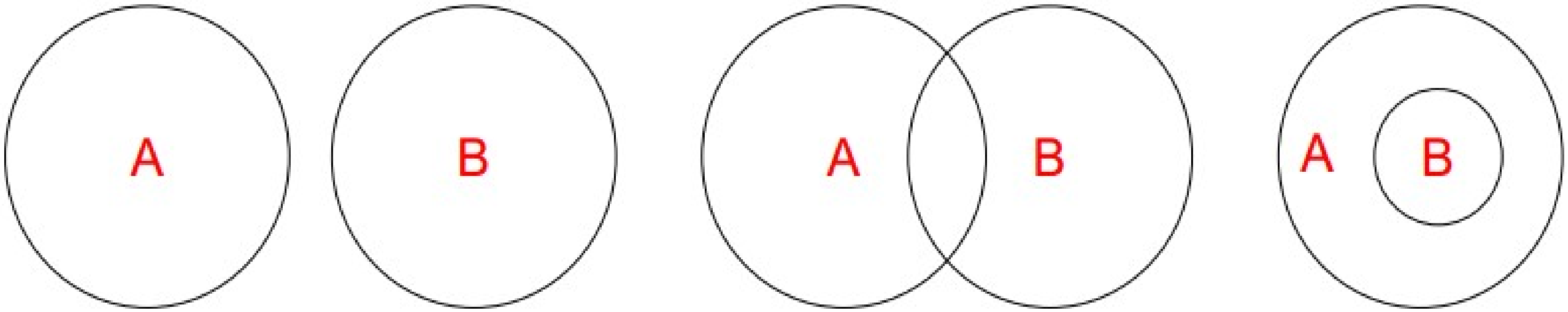
Relações entre conjuntos: Diagramas de Venn

- Se os conjuntos A e B forem representados por regiões no plano, relações entre A e B podem ser representadas por desenhos chamados de Diagramas de Venn.
- Exemplo:

$A \subseteq B$



$\boxed{\text{Exemplo 2:}}$ $A \not\subseteq B$.



Relações entre conjuntos: Igualdade

- Definição: Dados os conjuntos A e B, A = B sse cada elemento de A está em B e cada elemento de B está em A.

- Simbolicamente:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ e } B \subseteq A.$$

Operações sobre conjuntos

- Sejam A e B subconjuntos do conjunto universal U.

- <u>União</u>: $A \cup B = \{x \in U | x \in A \text{ ou } x \in B\}$

  Notação: $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \cup_{i=1}^{n} A_i$

- <u>Interseção</u>: $A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ e } x \in B\}$

  Notação: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \cap_{i=1}^{n} A_i$

- <u>Diferença</u>: $B - A = \{x \in U | x \in B \text{ e } x \notin A\}$

- <u>Complemento</u>: $A^c = \{x \in U | x \notin A\}$

Propriedades de subconjuntos

- Inclusão da interseção: para todos conjuntos A e B.
  - $A \cap B \subseteq A$
  - $A \cap B \subseteq B$

- Inclusão na união: para todos conjuntos A e B.
  - $A \subseteq A \cup B$
  - $B \subseteq A \cup B$

Propriedades de subconjuntos

- Propriedade transitiva dos subconjuntos: para todos conjuntos A, B e C.
  - se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$

Identidades de conjuntos

- Comutatividade:

$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$

- Associatividade:

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

- Distributividade:

$A \cup (B \cap C) =$ $(A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) =$ $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

- Intersecção com U:

$A \cap U = A$

- União com U:

$A \cup U = U$

Identidades de conjuntos

- Complemento duplo:

$(A^c)^c = A$

- Idempotência:

$A \cap A = A$	$A \cup A = A$

- De Morgan:

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$A - (B \cap C) =$ $(A - B) \cup (A - C)$	$A - (B \cup C) =$ $(A - B) \cap (A - C)$

- Absorção:

$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$

- Representação alternativa para diferença de conjuntos:

$A - B = A \cap B^c$

Propriedades de conjuntos que envolvem ∅

- União com $\emptyset$:

$A \cup \emptyset = A$

- Intersecção e união com o complemento:

$A \cap A^c = \emptyset$	$A \cup A^c = U$

- Intersecção com $\emptyset$:

$A \cap \emptyset = \emptyset$

- Complementos de U e $\emptyset$:

$U^c = \emptyset$	$\emptyset^c = U$