CAPÍTULO 5. Dedução Natural

Iniciamos este capítulo com as seguintes perguntas:

O que é a dedução natural?

É o processo para estabelecer de maneira rigorosa a validade dos argumentos, derivando a conclusão do argumento a partir das premissas usando um sistema de regras.

Porque argumentamos?

Se há certa afirmação (ou negação) que aceitamos como verdadeira, argumentamos para justificar porque é que todos devem aceitá-la como verdadeira. Em outras palavras, acreditamos em alguma coisa e queremos provar que aquilo em que acreditamos é verdadeiro.

O que é uma prova?

A construção de uma prova (no sentido de um argumento demonstrativo) é um ato criativo, que envolve pelo menos duas coisas:

1) *encontrar um conjunto de premissas que seja suficiente para apoiar aquilo que queremos provar;*
2) *elaborar uma cadeia de raciocínio que nos conduza, passo a passo, desde as premissas inicialmente aceitas até à conclusão que queremos provar.*

As premissas de uma prova corresponderão ou a coisas que já foram provadas ou a coisas que são aceites como verdadeiras *sem prova por serem imediatamente óbvias* ou por alguma outra razão igualmente forte.

Numa prova, como em qualquer argumento dedutivamente válido, a conclusão será uma conseqüência lógica das premissas, e a cadeia de raciocínio que nos conduz das premissas à conclusão é uma sucessão de pequenos passos em que, em cada passo, se deduz uma conseqüência imediata daquilo que já foi estabelecido nos passos anteriores ou daquilo que foi inicialmente dado nas premissas. Desde que cada passo seja logicamente impecável, essa sucessão de passos, que começa com a afirmação de cada uma das premissas e termina com a dedução da conclusão, constitui uma *demonstração da conclusão a partir das premissas*, ou seja, uma prova.

5.1 **O sistema de Dedução Natural**

O sistema de dedução natural que iremos descrever em seguida é composto por dois elementos fundamentais:

1) um conjunto de regras de inferência;
2) um formato para apresentar as provas ou demonstrações.

5.1.1 Formato das Demonstrações

Cada demonstração será apresentada sob a forma de uma tabela com um número variável (mas finito) de linhas e com três colunas, onde:

1. Cada linha corresponde a um passo na demonstração. Nas primeiras linhas são escritas as premissas e na última linha será escrita a conclusão. Entre as primeiras linhas e a última linha são escritos os passos intermédios que, autorizados pelas regras, nos conduzem dedutivamente das premissas à conclusão.

2. A primeira coluna é reservada à numeração sucessiva das linhas. Isso nos permite em qualquer momento, referirmo-nos à fórmula inscrita numa certa linha indicando apenas o número dessa linha.

3. A segunda coluna (a contar da esquerda) é a principal: é nela que, em cada linha, é escrita a fórmula que exibe a forma lógica cuja verdade está sendo afirmada.

4. A terceira coluna é a coluna das justificações. Uma vez que em cada linha estamos afirmando que certa frase é verdadeira, na terceira coluna temos de indicar o que é que nos autoriza a fazer essa afirmação. Há apenas três gêneros de justificação possíveis. Em primeiro lugar, a afirmação pode estar sendo feita porque se trata de uma premissa da demonstração. Em segundo lugar, a afirmação pode justificar-se porque existe uma regra que permite inferi-la a partir do que está escrito nas linhas anteriores. Note-se que, em cada passo, podemos aplicar somente uma regra. Em terceiro e último lugar, pode tratar-se de uma suposição que estamos fazendo para ver que conseqüências se seguiriam daí. No primeiro tipo de caso, escrevemos *premissa* na quarta coluna da linha em causa. No segundo tipo de caso, temos de indicar a regra que estamos aplicando e a linha ou as linhas às quais essa aplicação é feita. No terceiro tipo de caso, escrevemos simplesmente *suposição*.

5.2 Regras da dedução natural

As regras serão apresentadas sob a forma de um seqüente.

$$\frac{\begin{array}{l}\textbf{premissa}1\\ \textbf{premissa}2\\ \dots\\ \textbf{premissaN}\end{array}}{\textbf{conclusão}}$$

Regra: Introdução da conjunção (I$\wedge$) :

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{p}\\ \mathbf{q}\end{array}}{\mathbf{p \wedge q}}$$

Regra: Eliminação da conjunção (E$\wedge$):

$$\frac{p \wedge q}{p} \qquad\qquad \frac{p \wedge q}{q}$$

Regra: Eliminação da dupla negação (E ~ ~):

$$\frac{\sim\sim p}{p}$$

Regra: Introdução da dupla negação(I ~ ~):

$$\frac{p}{\sim\sim p}$$

Regra: Eliminação da implicação (E$\rightarrow$):

Modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

Modus tollens

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

Regra: Introdução da disjunção (I$\vee$):

$$\frac{p}{p \vee q} \qquad\qquad \frac{p}{q \vee p}$$

Regra: Introdução do bicondicional (I$\leftrightarrow$):

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow p \end{array}}{p \leftrightarrow q}$$

Regra: Eliminação do bicondicional (E$\leftrightarrow$):

$$\frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q} \qquad\qquad \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p}$$

5.3 Exemplo

1. Prove que os seguintes argumentos são válidos.

a)

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \underline{r \qquad} \\ q \wedge r \end{array}$$

1.	$p \wedge q$	premissa
2.	r	premissa
3.	q	E$\wedge$ 1
4.	$q \wedge r$	I$\wedge$ 2,3

b)

$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \wedge r \\ \underline{s \wedge t \qquad} \\ q \wedge s \end{array}$$

1.	$(p \wedge q) \wedge r$	premissa
2.	$s \wedge t$	premissa
3.	$(p \wedge q)$	E$\wedge$ 1
4.	q	E$\wedge$ 3
5.	s	E$\wedge$ 2
6.	$q \wedge s$	I$\wedge$ 4,5

5.4 Exercícios

1. Usar a regra "Modus Ponens" (MP) para deduzir, das premissas dadas, a conclusão indicada.

a)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \underline{p \qquad} \\ \quad r \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} p \to \sim q \\ \sim q \to r \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \quad r \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} p \to (q \wedge r) \\ (q \wedge r) \to s \\ \underline{p \qquad\qquad} \\ \quad s \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{l} (s \vee t) \to \sim p \\ \sim p \to (q \vee r) \\ \underline{s \vee t \qquad\qquad} \\ \quad q \vee r \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{l} p \to \sim q \\ \sim q \to r \\ \underline{r \to \sim t \qquad} \\ \quad \sim t \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{l} p \vee q \to \sim r \\ \sim r \to (s \wedge \sim t) \\ \underline{(s \wedge \sim t) \to (m \vee n)} \\ \quad m \vee n \end{array}$$

2. Usar as regras "Modus Ponens" ou "Modus Tollens" para deduzir, das premissas dadas, a conclusão indicada.

a)

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \rightarrow q} \\ \mathbf{\sim p \rightarrow s} \\ \underline{\mathbf{\sim q}} \\ \mathbf{s} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \rightarrow q} \\ \mathbf{q \rightarrow \sim\sim r} \\ \mathbf{s \rightarrow \sim r} \\ \underline{\mathbf{p}} \\ \mathbf{\sim s} \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \rightarrow \sim q} \\ \mathbf{\sim\sim q} \\ \underline{\mathbf{\sim p \rightarrow (s \wedge r)}} \\ \mathbf{s \wedge r} \end{array}$$

3. Usar as regras da Introdução e Eliminação da Conjunção, "Modus Ponens" ou "Modus Tollens" para verificar que são válidos os seguintes argumentos :

a)

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \wedge q} \\ \underline{\mathbf{p \rightarrow r}} \\ \mathbf{q \wedge r} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} \mathbf{r \rightarrow p} \\ \underline{\mathbf{\sim p \wedge q}} \\ \mathbf{\sim p \wedge \sim r} \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \rightarrow q} \\ \mathbf{p \rightarrow r} \\ \underline{\mathbf{p}} \\ \mathbf{q \wedge r} \end{array}$$

4. Usar a regra da Introdução da Disjunção ou outras regras para verificar que são válidos os seguintes argumentos:

a)

$$\begin{array}{l} \mathbf{r \rightarrow \sim q} \\ \mathbf{\sim r \rightarrow s} \\ \underline{\mathbf{p \wedge \sim\sim q}} \\ \mathbf{\sim p \vee s} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} \mathbf{q \rightarrow p} \\ \mathbf{\sim q \vee r \rightarrow s} \\ \underline{\mathbf{\sim p}} \\ \mathbf{s} \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l} \mathbf{p \wedge q \rightarrow s} \\ \mathbf{r \rightarrow p \wedge q} \\ \underline{\mathbf{r}} \\ \mathbf{q \vee s} \end{array}$$

5. Prove que os seguintes argumentos são válidos.

1)

$$\begin{array}{l} \sim p \to (q \to r) \\ \sim p \\ q \\ \hline \quad r \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l} \sim p \to \sim\sim q \\ \sim\sim\sim p \\ \hline \quad q \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{l} p \to (q \wedge r) \\ p \\ \hline \quad p \wedge q \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ p \\ \hline p \to r \end{array}$$

5)

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline q \wedge p \end{array}$$

6)

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \wedge r \\ \hline p \wedge (q \wedge r) \end{array}$$

7)

$$\begin{array}{l} (p \wedge q) \to (r \wedge s) \\ \sim\sim p \\ q \\ \hline \quad s \end{array}$$

8)

$$\begin{array}{l} p \\ \sim\sim (p \to q) \\ \hline (r \wedge s) \vee q \end{array}$$

9)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ (p \to q) \to (q \to p) \\ \hline \quad p \leftrightarrow q \end{array}$$

10)

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \to q \\ p \\ \hline \quad r \end{array}$$

11)

$$\begin{array}{l} p \to (p \to q) \\ p \\ \hline \quad q \end{array}$$

12)

$$\begin{array}{l} p \\ \sim\sim (q \wedge r) \\ \hline \sim\sim p \wedge r \end{array}$$