Probabilidades: definições e propriedades

Anne Magaly de Paula Canuto

Probabilidades

- Medida da incerteza associada aos resultados do experimento aleatório
- Deve fornecer a informação de quão verossímil é a ocorrência de um particular evento

- Probabilidade: Uma função $P(\bullet)$ que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral, conforme a definição:

Probabilidade

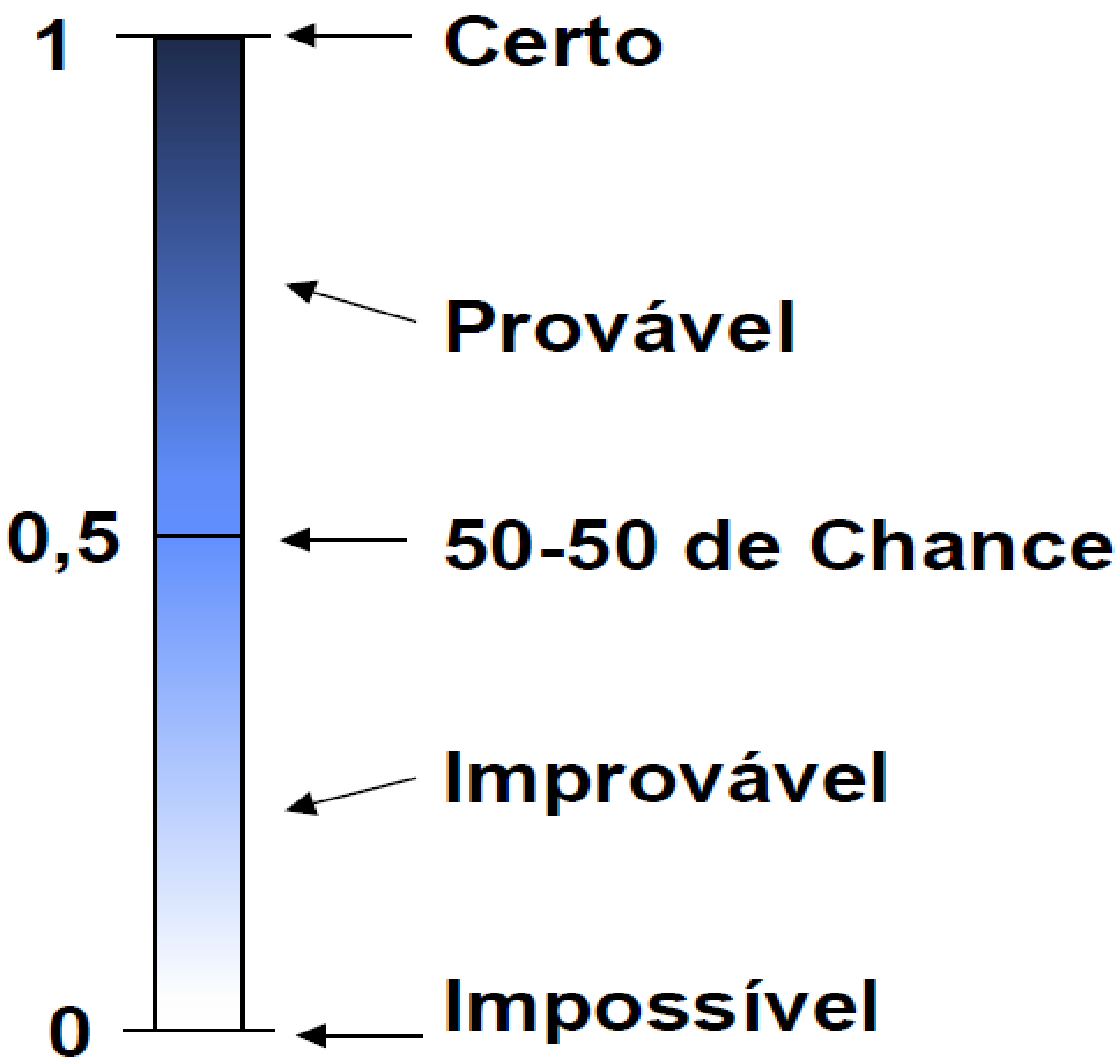
- Definição: Uma função P(•) é denominada probabilidade se satisfaz as condições:

$$1.\ 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$2.\ P(\Omega) = 1$$

$$3.\ P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j), A_{j's}\, disjuntos$$

Valores Possíveis para Probabilidades



Como atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral?

- Duas abordagens possíveis:
  1. Suposições teóricas
  2. Frequências de ocorrências

Probabilidade

1. Através de suposições teóricas.

- Suposições teóricas da realização do fenômeno
- Exemplo: Lançamento de um dado
- Admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado

$$P(\text{face } 1) = \cdots = P(\text{face } 6) = 1/6.$$

Probabilidade

2. Através das frequências de ocorrências

- O experimento aleatório é repetido *n* vezes e anota o número de vezes que cada valor ocorreu

- Calcula-se a frequência relativa com que cada resultado ocorre.

- Para um número grande de realizações, a frequência relativa aproxima-se da probabilidade.

Probabilidade

- Exemplo: queremos definir a probabilidade de cada face de um dado sem fazer nenhuma suposição teórica. Passos:
  - Jogamos o dados várias vezes
  - Anotamos a frequência de cada valor
  - Calculamos a probabilidade

- Quantas vezes jogar o dado?

  - Quanto maior, mais se aproxima de probabilidade

Como calcular a probabilidade de um evento

- Se A é um evento, então

$$P(A) = \sum_{w_j \in A} P(w_j)$$

- Se

$$\Omega = \{W_1, W_2, .., W_N\}$$

$P(w_i) = \frac{1}{N}$ **(*pontos equiprováveis – caso 1*), ou**

$$P(A) = \frac{n^o \text{ de elementos de } A}{n^o \text{ de elementos de } \Omega}$$

Exemplo de probabilidade

- A tabela a seguir apresenta dados relativos à distribuição de sexo e alfabetização em habitantes de Sergipe com idade entre 20 e 24 anos

Sexo	Alfabetizado		Total
	Sim	Não	
Masc.	39.577	8.672	48.249
Fem.	46.304	7.297	56.601
Total	85.881	15.969	101.850

Fonte: IBGE- Censo 1991

Exemplo de probabilidade

- Um jovem entre 20 e 24 anos é escolhido ao acaso em Sergipe.
- Qual a probabilidade deste jovem ser analfabeto?
- E qual a probabilidade dele ser afalbetizado?

Exemplo de probabilidade

- Ω : conjunto de 101.850 jovens de Sergipe, com idade entre 20 e 24 anos.

- Definimos os eventos
  - M: jovem sorteado é do sexo masculino;
  - F : jovem sorteado é do sexo feminino;
  - S : jovem sorteado é alfabetizado;
  - N : jovem sorteado não é alfabetizado.

Exemplo de probabilidade

$$P(M) = \frac{48.249}{101.850} = 0{,}474 \qquad P(F) = \frac{56.601}{101.850} = 0{,}526$$

$$P(S) = \frac{85.881}{101.850} = 0{,}843 \qquad P(N) = \frac{15.969}{101.850} = 0{,}157$$

- E a soma das probabilidades é 1??

Exemplo de probabilidade

- *Qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado <u>e</u> ser do sexo masculino?*
- $M \cap S$: jovem é alfabetizado e do sexo masculino

$$P(M \cap S) = \frac{n^o \text{ de elementos em } M \cap L}{n^o \text{ de elementos em } \Omega}$$

$$= \frac{39577}{101850} = 0{,}389$$

E se eu quiser saber qual é a probabilidade do jovem escolhido ser alfabetizado ou ser do sexo masculino?

Regra de adição das probabilidades

- A probabilidade que gostaríamos de determinar pode ser representada por: $P(M \cup S)$. Como temos

$$P(M) = 0{,}474 \qquad P(F) = 0{,}526$$

$$P(S) = 0{,}843 \qquad P(N) = 0{,}157$$

- Como calcular: se somarmos, o resultado será maior que 1 (Não pode)
- Podemos perceber que estamos somando alguns elementos (jovens) duas vezes

Regra de adição das probabilidades

- Se considerarmos jovens alfabetizados, temos jovens do sexo feminino e do sexo masculino
- Já se considerarmos jovens do sexo masculino, temos alfabetizados e analfabetos
- Desta forma, o evento $M \cup S$ está incluso no evento M e no evento S

- Então, como obter esta probabilidade??

Regra de adição das probabilidades

Ao determinar a probabilidade da ocorrência do evento A ou do evento B, devemos achar o total de maneiras como A pode ocorrer e o total de maneiras como B pode ocorrer, mas de modo que nenhum resultado seja contado mais de uma vez.

Regra de adição das probabilidades

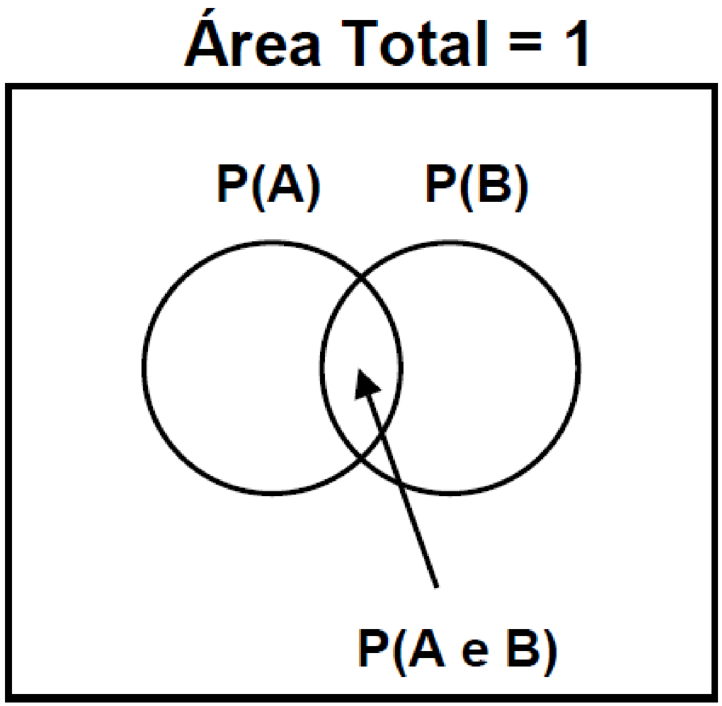
- Sejam A e B eventos de Ω. Então,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

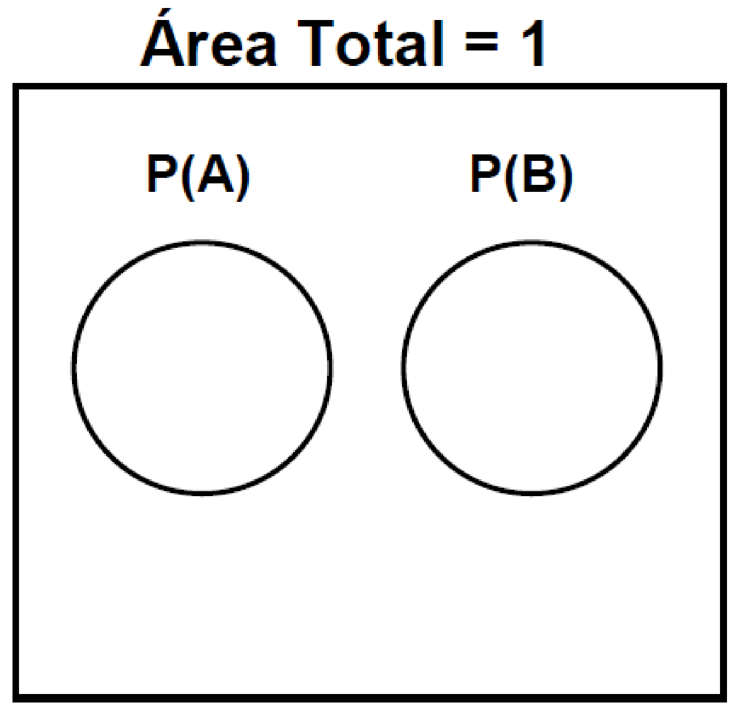
- Caso os eventos sejam disjuntos, temos então apenas as somas das probabilidades
  - Interseção é vazia

- E se eu quiser escrever a expressão acima para tres eventos, A, B e C: $P(A \cup B \cup C)$?

Graficamente



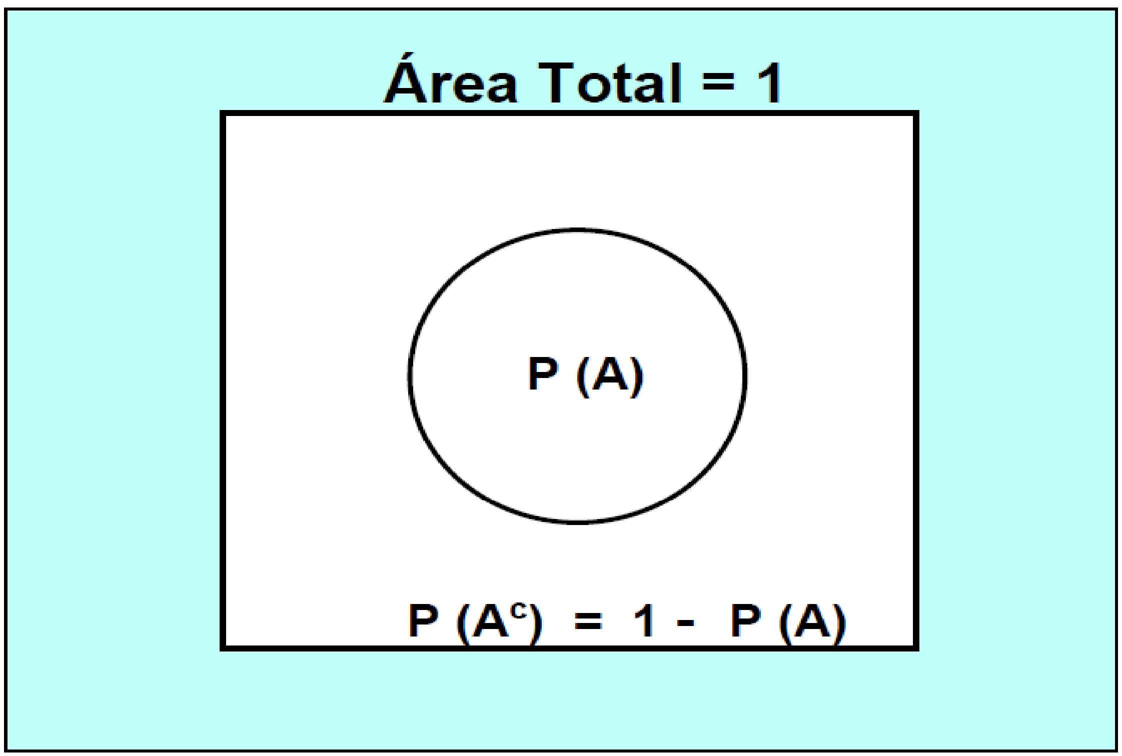
Eventos superpostos



Eventos não superpostos

Eventos Complementares

- Como consequencia da regra de adição
  - Eventos complementares
  - $P(A) = 1 - P(A^c)$



Exercícios

Uma universidade tem 10 mil alunos dos quais 4 mil são considerados esportistas. Temos ainda que 500 alunos são do curso de biologia diurno, 700 da biologia noturno, 100 são esportistas e da biologia diurno e 200 são esportistas e da biologia noturno. Um aluno é escolhido por acaso, qual a probabilidade de:

- Ser esportista
- Ser esportista e aluno da biologia noturno
- Não ser da biologia
- Ser esportista ou aluno da biologia
- Não ser desportista, nem aluno da biologia

Exercícios

- Sejam dois eventos em um dado espaço amostral, tais que P(A) = 0,2, P(B) = p, P(AUB)= 0,5 e $P(A \cap B)=0,1$. Qual o valor de P?
- Dois processadores tipos A e B são colocados em teste por 50 mil horas. A probabilidade de que um erro de cálculo aconteça em um processador do tipo A é de 1/30 e no tipo B 1/80 e, em ambos, 1/1000. Qual a probabilidade:
  - Pelo menos um dos processadores apresentem erro?
  - Nenhum processador tenha apresentado erro?
  - Apenas o processador A tenha apresentado erro