EXERCÍCIO

- Dos pacientes de uma clinica cardíaca acima de 40 anos, 60% são ou foram casados e 40% são solteiros. Sendo solteiro, a probabilidade de ter tido um problema cardíaco no ultimo ano é de 10%, enquanto que para os demais essa probabilidade aumenta para 30%. Pergunta:
  - Qual a probabilidade de um paciente escolhido ao acaso ter problema cardíaco?
  - Se o paciente tiver problema cardíaco, qual a probabilidade de ser solteiro?
  - Se escolhermos dois pacientes ao acaso e com reposição, qual é a probabilidade de pelo menos um ter problema cardíaco?

EXERCÍCIO

- Carlos chega atrasado à universidade 25% das vezes, e esquece o material da aula 20% das vezes. Admitindo que essas ocorrências sejam independentes, determine a probabilidade de :

  - Carlos chegar atrasado 2 dias seguidos;
  - Carlos chegar atrasado e sem o material de aula;
  - Carlos chegar na hora e com o material de aula;
  - Carlos chegar na hora e sem o material de aula.

Variáveis Aleatórias Discretas

Anne Magaly de Paula Canuto

Introdução

- Independente de um experimento gerar resultados quantitativo ou qualitativo, os métodos de análise estatística enfocam certos aspectos numéricos dos dados
  - O conceito de variável aleatória: passar dos resultados para uma função numérica dos resultados
- Dois tipos de variáveis aleatórias
  - Discretas
  - Contínuas

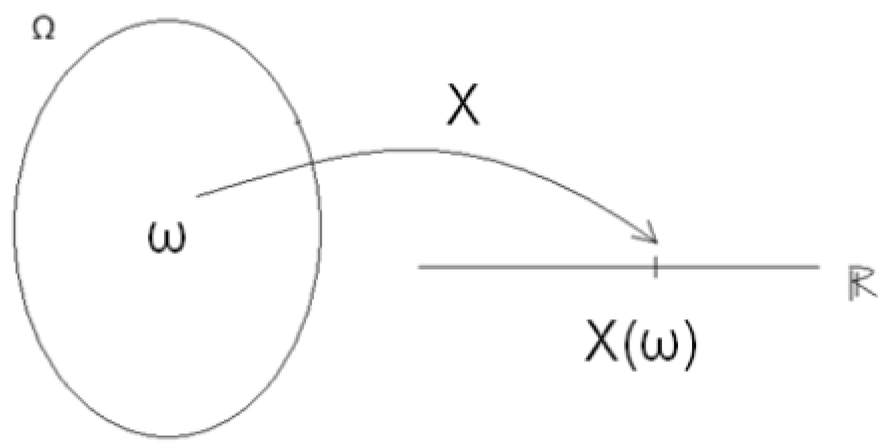
Variáveis aleatórias discretas

- Devemos associar o resultado do objeto de estudo a um número, especificando a regra de associação
  - Peso total das bagagens dos passageiros de um voo
  - Esta regra é denominada variável aleatória
    - Variável: é possível obter diferentes valores numéricos
    - Aleatória: o valor observado depende de qual dos resultados possíveis do experimento é obtido

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

- Para um dado espaço amostral (Ω) de um experimento, uma variável aleatória (va) é qualquer regra que associe um valor a cada resultado de Ω

Se X é uma variável aleatória, então a cada elemento ω do espaço amostral Ω corresponde um único número real X(ω)



VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

- Representada por letras maiúsculas
  - Letras minúsculas para representar um valor específico da variável correspondente
- Diremos que uma variável aleatória X é discreta se o número de valores que ela pode assumir é finito ou infinito enumerável
  - Uma função X que associa a cada elemento do espaço amostral um valor num conjunto enumerável de pontos da reta é denominada variável aleatória discreta.
  - Se o conjunto de valores é qualquer intervalo de números reais, X é denominada variável aleatória contínua.

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

- Exemplos de Variáveis Aleatórias Discretas são:
  - Número de bits transmitidos com erro em um canal de comunicação
  - Número de lançamentos de uma moeda até a obtenção da primeira cara
  - Número de consumidores que chegam em uma determinada fila

Exemplo

- Em uma linha de produção, são examinadas as peças produzidas até se encontrar 10 peças defeituosas e o número total de peças examinadas é anotada
  - A v.a. X é o número total de peças examinadas
  - Os valores possíveis de X são: 10, 11, 12,...
  - X é uma v.a. discreta com um número infinito de valores (infinito enumerável)

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

- O que nos interessa nas variáveis aleatórias são suas distribuições de probabilidade, isto é, as probabilidades dos diversos eventos envolvendo tais variáveis.

- Suponha que X é uma v.a. cujos valore possíveis são os elementos do conjunto $\Omega_X = \{x_1, x_2, x_3,...,x_k\}$ de números reais

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE

- Função de probabilidade (f.p.): É a função que atribui a cada valor x_i da v. a. discreta X sua probabilidade de ocorrência e pode ser apresentada pela tabela:

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(X=x)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	...	$P(X=x_n)$

- Em outras palavras, para cada ponto x_i de, está definida uma probabilidade $p(x_i) = P(X=x_i)$

Função de probabilidade

- Obedecendo as condições:
  - $p(x_i) \geq 0$, para todo i (i=1,2,3,..,N)
  - $\Sigma p(x_i) = 1$
- Neste caso $p: x_i \rightarrow p(x_i) = P(X=x_i)$ é chamada de função de probabilidade de X
- A função de probabilidade determina a distribuição de va discreta X
  - O seu modelo probabilístico

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

- Se X for uma va discreta com um conjunto infinito de valores possíveis , a definição é a mesma, somente fazendo com que a segunda propriedade passa a ser:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1}$$

Função de Probabilidade – Exemplo 1

- O Departamento de Estatística é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída sorteando, ao acaso, três membros do departamento. Qual é a probabilidade da comissão ser formada por pelo menos duas mulheres?

Vamos definir a v.a.

- X: nº de mulheres na comissão.

FUNÇÃO DE PROBABILIDADE – EXEMPLO 1

Espaço Amostral	Probabilidade	X
(HHH)	$\frac{21}{35} * \frac{20}{34} * \frac{19}{33} = 0{,}203$	0
(HHM)	$\frac{21}{35} * \frac{20}{34} * \frac{14}{33} = 0{,}150$	1
(HMH)	$\frac{21}{35} * \frac{20}{34} * \frac{14}{33} = 0{,}150$	1
(MHH)	$\frac{21}{35} * \frac{20}{34} * \frac{14}{33} = 0{,}150$	1
(HMM)	$\frac{21}{35} * \frac{14}{34} * \frac{13}{33} = 0{,}097$	2
(MHM)	$\frac{21}{35} * \frac{14}{34} * \frac{13}{33} = 0{,}097$	2
(MMH)	$\frac{21}{35} * \frac{14}{34} * \frac{13}{33} = 0{,}097$	2
(MMM)	$\frac{14}{35} * \frac{13}{34} * \frac{12}{33} = 0{,}056$	3

Função de Probabilidade – Exemplo 1

X	0	1	2	3
P(X=x)	0,203	0,450	0,291	0,056

- Neste caso, $P(x \geq 2) = P(x=2)+P(x=3) = 0{,}291+0{,}056 = 0{,}347$

Função de Probabilidade – Exemplo 2

Um dado é lançado duas vezes de forma independente. Qual é a probabilidade da soma dos pontos ser menor do que 6?

Função de Probabilidade – Exemplo 2

- **Ω= {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}.**

- ***Qual é a probabilidade de cada ponto w_i de Ω ?***
- **Admitindo que o dado é perfeitamente homogêneo e sendo os lançamentos independentes, então**

$$P(w_i) = 1/36 \text{ , } \forall\ w_i \in \Omega.$$

Função de Probabilidade – Exemplo 2

- Defina X: soma dos pontos

- Função de probabilidade de X:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X=x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

- Então
- $P(X<6) = P(X=5)+P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)$

$$= 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36$$

$$= 10/36 = 0{,}278$$

EXERCÍCIOS

- Exercícios: Outras v.a.'s
  - Y: Valor máximo obtido dentre dois lançamentos
  - Z: diferença entre os pontos do 2º e do 1º lançamento

- Qual a função de probabilidade destas variáveis?

EXERCÍCIOS

- Com os dados do ultimo senso, a assistente de um centro de Saúde constatou que 20% das famílias da região não tem filhos, 30% têm um filho, 35% tem dois e as restantes se dividem igualmente entre três, quatro e cinco filhos.
  - N é a variável que representa o número de filhos
  - Qual a função de probabilidade desta variável?

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

- Em geral, podemos grupos ordenados de valores dentro do espaço amostral.

- Com isso, além da função de probabilidade, há uma outra função que também é usada para caracterizar a distribuição de uma variável aleatória
  - Função de Distribuição acumulada

- Deste modo, temos que para qualquer valor do grupo ordenado A, podemos calcular $P(X \in A)$ somando as probabilidades de todos os valores x_i que estão em A.

FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

- A função de distribuição ou função de distribuição acumulada de uma variável aleatória discreta X é definida, para qualquer valor real x, pela seguinte expressão:

$$F(x) = P(X \leq x),\ x \in R.$$

EXEMPLO 1

- Assuma que X é uma variável aleatória discreta que assume os valores 2, 5, e 7 com probabilidades 1/2, 1/3, e 1/6, então sua função de distribuição acumulada é:

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 2 \\ 1/2, & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \\ 5/6, & \text{se } 5 \leq x < 7 \\ 1, & \text{se x} \geq 7 \end{cases}$$

EXEMPLO 2

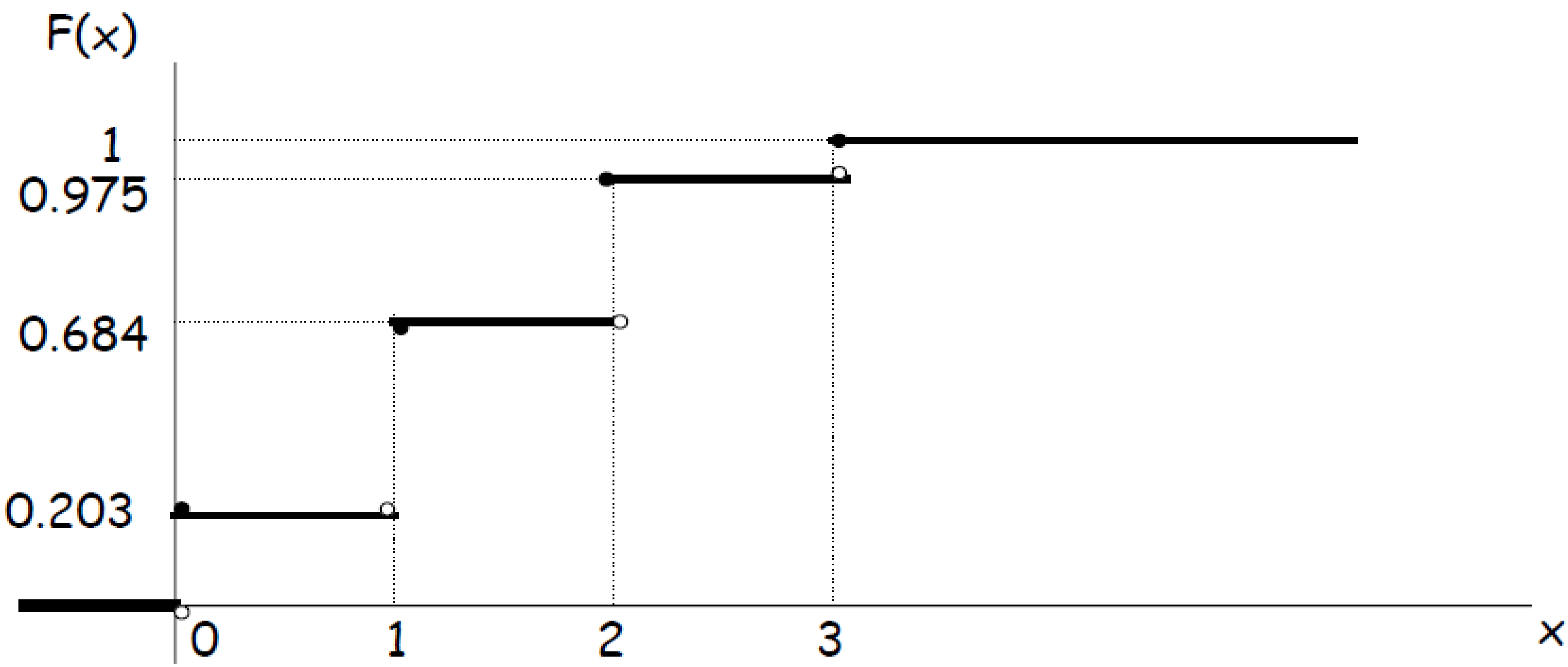
- O exemplo onde X: número de mulheres na comissão

X	0	1	2	3
P(X=x)	0,203	0,450	0,291	0,056

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 0{,}203, & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 0{,}684, & \text{se } 1 \le x < 2 \\ 0{,}975, & \text{se } 2 \le x < 3 \\ 1, & \text{se } x \ge 3 \end{cases}$$

EXEMPLO 2

- Se estivermos interessados na probabilidade de se ter até duas mulheres, a resposta é



$$F(2) = P(X \leq 2) = 0,975$$

EXERCÍCIO

- Um jogador paga 5 fichas para participar de um jogo de dados, num cassino. O jogador e a banca lançam cada um o seu dado e a seguinte regra de premiação é estabelecida:
  - Se o ponto do jogador é maior, ele ganha duas vezes a diferença entre o seu ponto e o obtido pelo oponente
  - Se o ponto do jogador é menor ou igual a banca, ele não ganha nada

Exercicio

- Suponha que uma variável G define o ganho bruto do jogador
  - Defina a função de probabilidade de G
  - Defina a função de probabilidade acumulada de G
- Qual a probabilidade do jogador não ter prejuízo?

CARACTERIZAÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

- Algumas informações podem ser calculada de uma variável aleatória
  - Esperança
  - Variancia
  - Desvio padrão
  - Variancia relativa e coeficiente de variação

MÉDIA OU ESPERANÇA DE UMA V.A.

- Considere o cálculo do resultado médio de 1000 lançamentos de um dado. Uma maneira de calcular este resultado médio seria somar todos os resultados e dividir por 1000.
- Existe uma outra maneira:
- Esperança (média): Dada a v. a. X, assumindo os valores x1, x2, ..., xn, chamamos de *valor médio ou valor esperado ou esperança matemática de X o valor*

  $E(X)= x_1.P(X=x_1) +...+ x_n.P(X=x_n) = \Sigma_{i=1,..,n}x_i.P(X=xi)$

MÉDIA OU ESPERANÇA DE UMA V.A.

- No exemplo da comissão,

- E(X) = 2.(1/36) + 3. (2/36) + ... + 11. (2/36) + 12. (1/36) = 252/36 = 7

- ou seja, em média, a soma dos pontos no lançamento dos dois dados é 7.

MÉDIA OU ESPERANÇA DE UMA V.A.

- A esperança de uma variável discreta é calculada como a média ponderada dos valores que essa variável assume, sendo o peso de cada valor igual a probabilidade

- Interpretação física da esperança: se pensarmos na função p como uma distribuição discreta de massa, onde a massa localizada no ponto de abscissa xi é p(xi), então E(X) corresponde a abscissa do centro de gravidade dessa distribuição

MÉDIA OU ESPERANÇA DE UMA V.A.

- Importante: a esperança não é necessariamente um valor possível da variável X
  - Na analogia com a física, é o mesmo qe dizer que o centro de gravidade não se encontra necessariamente em algum ponto em que a força é aplicada

PROPRIEDADES DA ESPERANÇA MATEMÁTICA

- As propriedades operatórias apresentadas a seguir são válidas para v. a.'s discretas e contínuas.
  1. Se a é uma constante, então: $E(a) = a$
  2. Se a e b são constantes, então: $E(aX + b) = a\,E(X) + b$
  3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
     1. Sejam n variáveis aleatórias $X_1, X_2, \dots, X_n$. Então, $E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$.
  4. Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes, então $E(XY) = E(X).E(Y)$

VARIANCIA DE UMA V.A.

- Dada a média de uma v.a., definida como μ=E(X), a variância de X, definida por V(X) ou σ^2, pode ser descrita assim:

$$V(X) = (x_1 - \mu)^2 . P(X = x_1) + \ldots + (x_n - \mu)^2 . P(X = x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 . P(X = x_i)$$

- Calcule a variância para o exemplo da comissão

PROPRIEDADES DA VARIANCIA

1. Var(X) = E(X2) – [E(X)]2.
2. Se C for uma constante, então Var(CX) = C2 . Var(X).
3. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias quaisquer. Tem-se que

Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2.Cov(X,Y),

onde Cov(X,Y) = E(XY) – E(X).E(Y).

1. Var(X+C), onde C é uma constante, é igual a Var(X).

Outras funções

- Desvio padrão:
  - A raiz quadrada da variância
- Variância relativa

$$\gamma^2 = \frac{\sigma^2}{\mu^2}$$

- Coeficiente de variação: a raiz quadrada da variância relativa

Exercício

- Um vendedor de carros recebe uma comissão de R$ 1.000,00 por carro. Baseado em sua experiência, ele definiu um distribuição para a variável X, que descreve a quantidade de carros vendidos em uma semana, apresentada a seguir:

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	0,10	0,20	0,40	0,20	0,10

- Qual o valor esperado que este vendedor vai receber de comissão por semana?
- Qual é a probabilidade dele ganhar, pelo menos, R$ 3.000,00 por semana?
- Qual o desvio padrão das vendas semanais?
- Qual o coeficiente de variância das vendas semanais?