习题 (序列的极限)

Q0:

- 1. 如果序列 $\{x_n\}$ 的每一项都为整数，且该序列收敛于 a，那么 a 一定是整数吗？

  2. 如果序列 $\{x_n\}$ 的每一项都为有理数，且该序列收敛于 a，那么 a 一定是有理数吗？

  3. 序列 $\{x_n\}$ 有界，那么一定收敛吗？

  4. 证明：

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}=\frac{1}{3}$$

- 1. 证明一个序列 $\{x_n\}$，改变其有限项，其敛散性不变。
  2. 证明 $\{x_n\}$ 是无穷小量的充分必要条件是 $\{1/x_n\}$ 是无穷大量，这里假定对任意的正整数 n，有 $x_n \neq 0$。
  3. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1+\cdots+x_n)/n = a$，这里 a 可以是有限实数，$+\infty$ 或 $-\infty$。
  4. 试构造发散序列 $\{x_n\}$，使得序列 $\{(x_1+\cdots+x_n)/n\}$ 收敛。

- 1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}$。
  2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n}$。
  3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)^{1/n}$ $(a_i>0, i=1,2,\cdots,m)$。

- 1. 定义序列 $\{S_n\}$ 的通项公式为

  $$S_n = 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^{[n/2]}\frac{1}{n}$$

  判断 $\{S_n\}$ 是否收敛。如果收敛，则求其极限。

  2. 我们知道自然对数的定义为 $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，求证：

$$e^a = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$
$$e^a = \lim_{n\to\infty} 1+a+\frac{a^2}{2!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}$$

对任意 $a\in\mathbb{R}$ 成立。

- 1. 设序列 $\{x_n\}$ 有界，证明：
  $l=\varliminf_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} l_n, h=\varlimsup_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty} h_n$。

  2. 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中的一个子集。若 x 是 E 的一个聚点，证明： $\forall\delta>0$ ， $U(x_0,\delta)\cap E$ 中有无穷多个元素。

  3. 利用上下极限证明 $\{\sin n\}$ 发散。

  4. (a). 序列 $\{x_n\}$ 的上极限为 h_1，序列 $\{y_n\}$ 的上极限为 h_2，那么序列 $\{x_n+y_n\}$ 的上极限是 $h1+h2$ 吗，$\{x_ny_n\}$ 的上极限是 $h_1\cdot h_2$ 吗?

     (b). 若序列 $\{x_n\}$ 是非负收敛序列，(a) 的命题成立吗?

Q1：证明以下 $\{x_n\}$ 收敛

(1) $x_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

(2) $x_n=\sum_{i=0}^{n}a_iq^i$，其中 $\{a_n\}$ 为有界序列，且 $|q|<1$

(3) $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin ix}{i^2}$

Q2：证明，若 $\{x_n\}$ 有界，$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\varliminf_{n\to\infty} a_n}$。

Q3：求 $\lim_{n\to\infty}(1^k+2^k+\cdots+n^k)/n^{k+1}$，$(k\in\mathbb{N})$。

Q4：设 $\{x_n\}$ 为单调数列。证明：若 $\{x_n\}$ 存在聚点，则必是唯一的，且为 $\{x_n\}$ 的确界。

Q5：设序列 $\{x_n\}$，满足条件：$0 \leq x_{n+m} \leq x_n + x_m, \forall n, m > 0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$ 存在。

Q6：$\{a_k\}$ 是递减正实数列，$\{k_i\}$ 是严格递增正整数序列，设 c_n 是 $\{k_i\}$ 中不超过 n 的数的个数，已知：$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = +\infty, \lim\limits_{n\to\infty} c_n/n > 0$。求证：$\lim\limits_{n\to-\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{k_i} = +\infty$。

Q7：证明以下两个命题：

(1) 正实数序列 $\{a_n\}$ 满足：$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n (n/(n+1))^s$，其中 $s > 1$。则序列 $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}$ 收敛。

(2) 正实数序列 $\{a_n\}$ 满足：$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n (1 - \frac{1+\epsilon}{1+n})$。当 $\epsilon > 0$，序列 $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}$ 收敛。若 $\epsilon \leq 0$，序列 $\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}$ 不一定收敛。

Q8：若序列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$，则证明此数列的聚点的集合是闭区间 $[l, r]$，其中 l 是该序列的下极限，r 是上极限。