1 Preface

在此要感谢 b 站上西安交通大学交换代数讨论班的视频，还有树洞小伙伴们的帮助。本文主要对 GTM256、交换代数基础・冯克勤、西安交通大学的视频做了一次整合总结，并混入了些自己的想法。由于不同的书符号不相同，证明方式不同，本文的符号更偏向于个人喜好，在 Introduction 中约定了这些符号与定义，并对各种证明加以修改（简化）和评注。

2 Introduction

希尔伯特零点定理（Hilbert's Nullstellensatz）是代数几何的基石，它给出了仿射空间的代数集与多项式环的根理想之间的双射关系。
在本文中，环均指**含幺交换环**。设 R 是环，若 $S \subset R$ ，若 S 在 R 的加法、乘法运算下也称为环，**且** $1_R \in S$ ，则称 S 是 R 的子环， R 是 S 的扩环。
下面是一些基本的定义：

Definition 2.1. R-代数：设 R 是一个环，环 A 以及从 R 到 A 的同态 α 合起来的序偶称为一个 ***R*-代数**，简称 A 为 R- 代数。 A 的包含 $\alpha(R)$ 在内的子环称为 A 的**子代数**。设 $(A,\alpha),(B,\beta)$ 是两个 R-代数，若 $\phi : A \to B$ 是满足 $\phi \circ \alpha = \beta$ 的环同态，则称 ϕ 是 ***R*-代数之间的同态**。

Definition 2.2. 有限生成：设 S 是 A 的有限子集，将 A 的包含 S 的最小子代数称为 ***S* 生成的子代数**，记为 $R[S]$。若 S 是有限集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则称 $A = R[S]$ 是**有限生成**的。

Definition 2.3. 仿射代数：设 K 为域，若 (A,α) 是域 K 上的代数，那么 α 是单射， A 可以看成是 K 的扩环，这时 K- 代数之间的同态就是固定 K 的环同态。若 A 是有限生成的 K-代数，则称之为**仿射（*K*-）代数**；若 A 还是整环，则称之为**仿射（*K*-）整环**。

本文若未特殊说明，将一直假定 K 是域。 K 上的 n 维仿射空间记为 K^n，并将 K 上的 n 元多项式环 $K[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 记为 F。$K^n = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) : \zeta_i \in K, (1 \le i \le n)\}$，$K^n$ 中的元称为点。若 $P = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in K^n, f \in F$，则 $f(P)$ 表示 $f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$。

Definition 2.4. 代数相关：设 A 是域 K 上的代数， $\{a\}, \{a_1, \cdots, a_n\} \subset A$。若对于任意的非零多项式 $f \in K[x_1, \cdots, x_n]$ 有 $f(a_1, \cdots, a_n) \ne 0$ 成立，则称 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 为 ***K*-代数无关（代数独立）**的，否则称之为 ***K*-代数相关**的。若存在非零多项式 $g \in K[x]$ 满足 $g(a) = 0$，则称 a 在 K 上是**代数的**。若 A 中任一元在 K 上代数，则称 A 在 K 上是**代数的**。

3 代数集和消失理想

Definition 3.1. 代数集：设 $S \subset F = K[x_1, \cdots, x_n]$，令 $\mathcal{V}(S) = \{P \in K^n : f(P) = 0, \forall f \in S\}$，即 S 中所有多项式的公共零点。称 $\mathcal{V}(S)$ 为由 S 给出的**代数集（algebraic set）**。

容易证明，任意两个代数集的并是代数集，任意多个代数集的交是代数集，$\emptyset$ 和 K^n 也是代数集。所以可以在 K^n 上定义拓扑，其中的闭集是代数集。这样定义的拓扑称为 K^n 上的 **Zariski 拓扑**。

Definition 3.2. 消失理想：设 $Y \subset K^n$，令 $\mathcal{I}(Y) = \{f \in F : f(P) = 0, \forall P \in Y\}$。容易证明，$\mathcal{I}(Y)$ 在加法下封闭，且 $\mathcal{I}(Y)F \subset \mathcal{I}(Y)$，所以 $\mathcal{I}(Y)$ 为 F 的理想。称之为 Y（对应）的**消失理想（vanishing ideal）**。

Proposition 3.1. 关于代数集和消失理想，有以下命题成立：
(1). 若 $S \subset T \subset F$，则 $\mathcal{V}(T) \subset \mathcal{V}(S)$；
(2). 若 $S \subset F$，则 $S \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(S))$；
(3). 若 $X \subset Y \subset K^n$，则 $\mathcal{I}(Y) \subset \mathcal{I}(X)$；
(4). 若 $X \subset K^n$，则 $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$；
(5). 若 $T \subset F$，则 $\mathcal{V}(T) = \mathcal{V}((T)) = \mathcal{V}(\sqrt{(T)})$，其中 (T) 表示 T 生成的理想，$\sqrt{(T)}$ 表示理想 (T) 的根；
(6). 对于任意 $X \subset K^n$，有 $\mathcal{V}\mathcal{I}(X) = \overline{X}$（其中 $\overline{X}$ 表示 X 的闭包，即包含 X 的最小的代数集）；特别地，若 X 为代数集，则 $X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$；
(7). 若 I 是 $X \subset K^n$ 的消失理想，则 $I = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$；(8). 若 X 是 I 对应的代数集，则 $X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$。

Proof. (1).(2).(3).(4). 显然.
(5). 显然有 $\mathcal{V}(T) \supset \mathcal{V}((T)) \supset \mathcal{V}(\sqrt{(T)})$。当 $P \in \mathcal{V}(T)$，则对于任意 $f \in T$，有 $f(P) = 0$。(T) 是 T 生成的理想，则 (T) 中任意元素 g 都是 T 中元素的线性组合（组合系数为 F 中元素），所以 $g(P) = 0$。对于任意 $h \in \sqrt{(T)}$，存在 k，使得 $h^k(P) = g(P) = 0$，$h(P) = 0$。所以 $\mathcal{V}(T) \subset \mathcal{V}(\sqrt{(T)})$，故 $\mathcal{V}(T) = \mathcal{V}((T)) = \mathcal{V}(\sqrt{(T)})$。
(6). $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$，且 $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ 是闭集，所以 $\overline{X} \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$。另一方面，任给闭集 $\mathcal{V}(T) \supset X$，有 $T \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(T)) \subset \mathcal{I}(X)$，于是 $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \subset \mathcal{V}(T)$。因此 $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$ 是包含 X 的最小闭集，即 $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}$。
(7). $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \supset X$，所以 $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) \subset \mathcal{I}(X) = I$。又因为 $I \subset \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$，所以 $I = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$。
(8). $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) \supset I$，所以 $\mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) \subset \mathcal{V}(I) = X$。又因为 $X \subset \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$，所以 $X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X))$。 □

Remark. 代数集与消失理想的定义将多项式组的公共零点集与多项式环的理想联系了起来，揭示了零点集的拓扑结构。由上述性质可以猜测，在一定条件下，代数集对应的消失理想很可能是根理想。

Definition 3.3. 仿射簇：若拓扑空间的非空子集 Y 能表示成 $Y = Y_1 \cup Y_2$，且 Y_1, Y_2 均为 Y 的真子集且在 Y 中闭，则称 Y 为**不可约的**。在 Zariski 拓扑下，K^n 中的不可约闭集叫做**仿射代数簇（affine algebraic variety）**，简称**仿射簇（affine variety）**。

Remark. 考察仿射簇“不可约”的性质反映到其消失理想的情况，可以猜测，在一定条件下，一个仿射簇与多项式环的素理想一一对应。

4 多项式环的极大理想

Lemma 4.1. 设 A 为域 K 上的代数，那么有：
(1). 如果 A 是整环，且在 K 上是代数的，那么 A 是一个域。

(2). 如果 A 是一个域，且包含于一个仿射 K-整环，那么 A 在 K 上是代数的。

Remark. 在证明该引理前，有必要去考察，当忽略一些条件时将出现什么反例。
令 $A=K[x]/(x^2)$。 A 是代数的，但不是域。
令 $A=K[x]$（x 是未定元）。 A 是主理想整环，但不是域。
令 A 为有理函数域 $K(x)$， A 不是代数的。

Proof. (1). 对 A 中任意元素 a，写出它的系数在 K 内的最小多项式，由 A 是整环知常数项不为零，则移项后易得 a 的逆元。A 中任意元素可逆，所以是域。
(2). 假定 A 中有超越元 a_1，设 A 被包含在仿射 K-整环 B 中，设 $B=K[a_1,\cdots,a_n]$（不妨将 a_1 作为一个生成元）。可以对 $a_2,\cdots,a_n$ 进行重排序，使得 $\{a_1,\cdots,a_r\}$ 形成一个极大的 $K-$代数无关组，那么 $a_{r+1},\cdots,a_n$ 在 $K[a_1,\cdots,a_r]$ 上都是代数的。所以 B 的分式域 $\mathrm{Quot}(B)$ 是域 $L:=K(a_1,\cdots,a_r)=\mathrm{Quot}(K[a_1,\cdots,a_r])$ 的有限扩张，设扩张次数为 $[\mathrm{Quot}(B):L]=m$。 $\mathrm{Quot}(B)$ 可以看作是 L 上的 m 维线性空间，选取一组基底，则对于 $b\in\mathrm{Quot}(B)$，乘 b 给出了一个 $\mathrm{Quot}(B)$ 的 L-线性自同态。由此可以得到一个映射 $\phi:\mathrm{Quot}(B)\to L^{m\times m}$，它将 b 映射到乘 b 对应的线性变换矩阵。
令 $g\in K[a_1,\cdots,a_r]\backslash\{0\}$ 为一切 $\phi(a_i)(i=1,\cdots,n)$ 的矩阵元素的公分母，那么 $\phi(a_i)\in K[a_1,\cdots,a_r,g^{-1}]^{m\times m}$ 对任意的 i 成立。而 $B=K[a_1,\cdots,a_n]$，所以

$$\phi(B)\in K[a_1,\cdots,a_r,g^{-1}]^{m\times m}$$

由于 $K[a_1,\cdots,a_r]$ 同构于多元多项式环，所以是唯一分解整环，令 $p_1,\cdots,p_k$ 是 g 的所有落在 $K[a_1]$ 中的不可约因子。取 p 为 $K[a_1]$ 中任一不可约元素，因为 A 是域且 $K[a_1]\subset A$，所以有 $p^{-1}\in A\subset B$。考察矩阵 $\phi(p^{-1})=diag(p^{-1},\cdots,p^{-1})$，可知 $p^{-1}\in K[a_1,\cdots,a_r,g^{-1}]$，所以存在 $f\in K[a_1,\cdots,a_r]$ 和非负整数 s，满足 $p^{-1}=g^{-s}\cdot f$，即 $g^s=p\cdot f$，所以由 p 的不可约性， p 与$\{p_1,\cdots,p_k\}$ 中某一元素相伴（只差一个 $k\in K$ 的倍数）。然而 $K[a_1]$ 中互不相伴的不可约元有无限多个（考虑反证法，假设只有有限多个互不相伴的不可约元，则它们的乘积加 1 不被任意一个不可约元整除，导致矛盾），这与“任一 p 都与 $\{p_1,\cdots,p_k\}$ 中某一元素相伴”矛盾。所以 A 中无超越元， A 在 K 上是代数的。 □

Remark. Lemma 4.1 (2) 的证明技巧性较高。在 [2] 中提到了另一种证明，利用**诺特正规化引理（Noether Normalization）**，存在 $c_1,\cdots,c_m\in B$，它们在 K 上代数无关，且 B 在 $K[c_1,\cdots,c_m]$ 上是整的（对任意 $b\in B$，存在首一多项式 f 使得 $f(b)=0$）。再利用引理：若 S 是 R 的整扩环，那么 R 是域当且仅当 S 是域。所以有 $K[c_1,\cdots,c_m]$ 是域。然而多项式环不可能是，所以 $m=0$， B 在 K 上是代数的， $A\subset B$ 在 K 上也是代数的。这样的证明则自然很多。

Proposition 4.1. $\phi:A\to B$ 是 K-代数间的同态，令 $m\subset B$ 是 B 的极大理想，若 B 是有限生成的 K-代数，那么 $\phi^{-1}(m)$ 是 A 的极大理想。

Proof. 考虑同态 $A\to B/m$, $a\mapsto\phi(a)+m$，那么有 $\mathrm{Ker}=\phi^{-1}(m):=n$。所以 A/n 同构于 B/m 的一个子代数。 B/m 是域（m 是极大理想），所以 A/n 为整环。又因为 B/m 是 K-代数，且包含于仿射 K-代数 B 中，所以由 Lemma 4.1 (2) 可得 B/m 在 K 上是代数的。从而 A/n 在 K 上也是代数的。由 Lemma 4.1 (1) 可知 A/n 是域。因此 n 是 A 的极大理想。 □

Remark. 对于一个环 R，将它一个极大理想限制在一个子环 A 上，不一定是那个子环的极大理想。一个简单的例子是 R 为有理函数域 $K(x)$， $A = K[x]$， $m := 0$ 是 R 的极大理想，但 $m \cap A$ 不是 A 的极大理想。但这个命题告诉我们，若 A, R 都是 K-代数，且 R 是有限生成的 K-代数，那么 R 的极大理想 m 限制到子环 A 上仍是极大理想，即 $m \cap A$ 是 A 的极大理想。

Proposition 4.2. 设 K 是域，设 $P = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in K^n$，则 $m_P := (x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \cdots, x_n - \xi_n)$ 是 F 的极大理想；反过来，若 K 是**代数闭域**，则 $F = K[x_1, \cdots, x_n]$ 的每个极大理想都具有这种形式。

Proof. 令 $\psi : F \to K$, $f \mapsto f(\xi_1, \cdots, \xi_n)$，则 ψ 是满同态，又 $\operatorname{Ker}\psi = m_P$。所以 $F/m_P \cong K$ 为域。所以 m_P 为域。
反过来，设 K 为代数闭域， m 是 F 的一个极大理想，那么由 Proposition 4.1 可知，对任意 $i = 1, \cdots, n$， $m \cap K[x_i]$ 是 $K[x_i]$ 的极大理想。注意到 $K[x_i]$ 是主理想整环，所以 $m \cap K[x_i]$ 可以写成 $(p_i)_{K[x_i]}$ 的形式，其中 p_i 为不可约多项式。由于 K 为代数闭域，可以得到 $(p_i)_{K[x_i]} = (x_i - \xi_i)_{K[x_i]}$，其中 $xi_i \in K$。所以 $(x_1 - \xi_1, \cdots, x_n - \xi_n) = m_P \subset m$。因为 m_P 为极大理想，所以 $m = m_P$。 □

Remark. 对于命题“ F 的每个极大理想 m 都有 m_P 的形式”，另一种更直接的证明是，考察域 F/m，显然 F/m 是 K-代数，可以看成是 K 的扩域 K'，且是有限生成的，其生成元是 $\overline{x_i}, (i = 1, \cdots, n)$。所以由 Lemma 4.1 (2) 直接得到 K' 在 K 上是代数的。又因为 K 是代数闭域，所以 $K' = K$， $\overline{x_i} = \xi_i \in K$，所以 $x_i - \xi_i \in m$， $m_P \subset m$。又因为 m_P 为极大理想，所以 $m = m_P$。
由 Proposition 4.2，可以得出结论：若 K 是代数闭域，那么 K^n 中的点 P 和 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 中的极大理想 I 有一一对应的关系。 P 是 I 的公共零点集（代数集）， I 是 P 的消失理想。这个关系是仿射簇与理想的对应关系建立的基础。

Theorem 4.1. 弱形式的希尔伯特零点定理（Hilbert's Nullstellensatz, first version）: 设 K 为**代数闭域**，设 $I \subsetneq F = K[x_1, \cdots, x_n]$ 是多项式环的一个真理想。那么 $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset$。

Proof. 取一包含 I 的极大理想 m（可以用 Zorn 原理证明存在性），再由 Proposition 4.2 可得， m 具有形式 $m_P = (x_1 - \xi_1, \cdots, x_n - \xi_n), \xi_i \in K (i = 1, \cdots, n)$。所以 $\mathcal{V}(I) \supset \mathcal{V}(m) = \{P = (\xi_1, \cdots, \xi_n)\}$。 □

5 极大谱、素谱、Rabinowitsch谱

Definition 5.1. 极大谱：设 R 是环，称 $\operatorname{Spec}_{max}(R) = \{P \subset R : P \text{ 是 } R \text{ 的极大理想}\}$ 为 R 的**极大谱（maximal spectrum）**。

Definition 5.2. 素谱：设 R 是环，称 $\operatorname{Spec}(R) = \{P \subset R : P \text{ 是 } R \text{ 的素理想}\}$ 为 R 的**素谱（spectrum）**。

Definition 5.3. Rabinowitsch 谱：设 R 是环，称 $\operatorname{Spec}_{rab}(R) = \{R \cap m : m \text{ 是 } R[x] \text{ 的极大理想}\}$ 为 R 的 **Rabinowitsch 谱（Rabinovich spectrum）**。

Lemma 5.1. (1). 设 R 是环，那么有 $\operatorname{Spec}_{max}(R) \subset \operatorname{Spec}_{rab}(R) \subset \operatorname{Spec}(R)$。
(2). 设 R 是仿射 K-代数，那么有 $\operatorname{Spec}_{max} R = \operatorname{Spec}_{rab}(R) \subset \operatorname{Spec}(R)$。

Proof. (1). 对任意 $m \in \mathrm{Spec}_{max}(R)$，令 $\phi : R[x] \to R/m$, $f \mapsto f(0) + m$， ϕ 是满同态。令 $n = \mathrm{Ker}\,\phi$，那么 $R[x]/n \cong R/m$， n 为 $R[x]$ 的极大理想。又因为 $n \cap R = m$，故 $m \in \mathrm{Spec}_{rab}(R)$。即得 $\mathrm{Spec}_{max}(R) \subset \mathrm{Spec}_{rab}(R)$。
对任意 $P = m \cap R \in \mathrm{Spec}_{rab}(R)$， $m \subset \mathrm{Spec}_{max}(R[x]) \subset \mathrm{Spec}(R[x])$。因为 m 是 $R[x]$ 的素理想，所以 $P = m \cap R$ 是 R 的素理想，所以 $P \in \mathrm{Spec}(R)$。即得 $\mathrm{Spec}_{rab}(R) \subset \mathrm{Spec}(R)$。
(2). 对任意 $P = m \cap R \in \mathrm{Spec}_{rab}(R)$， $m \subset \mathrm{Spec}_{max}(R[x])$，由于 R 是有限生成的 K-代数，根据 Proposition 4.1 ， P 是 R 的理想。所以 $\mathrm{Spec}_{rab}(R) \in \mathrm{Spec}_{max}(R)$。再由 (1) 的结论即得 $\mathrm{Spec}_{max} R = \mathrm{Spec}_{rab}(R) \subset \mathrm{Spec}(R)$。 □

Lemma 5.2. 设 R 是环， $I \subset R$ 是 R 的理想，那么

$$\sqrt{I} \subset \bigcap_{I \subset P, P \in \mathrm{Spec}(P)} P$$

若没有满足条件的 P，则上式的交集解释为 R （下同）。

Proof. 对任意 $a \in \sqrt{I}$，存在正整数 k 满足 $a^k \in I$。对任意包含 I 的素理想 P，有 $a^k \in I \subset P$，所以 $a \in P$。 □

Remark. 实际上，该引理中 $\sqrt{I}$ 和 $\bigcap_{I \subset P, P \in \mathrm{Spec}(P)} P$ 是相等的，可以利用下面的 Proposition 5.1 ，利用 Rabinowitsch 谱的性质完成证明。

Proposition 5.1. 设 R 是环， $I \subset R$ 是 R 的理想。那么

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset P, P \in \mathrm{Spec}_{rab}(R)} P$$

Proof. 由 Lemma 5.1 和 Lemma 5.2 可得，$\sqrt{I} \subset \bigcap_{I \subset P, P \in \mathrm{Spec}_{rab}(R)} P$，只需再证明反向的包含关系。任取 $a \in \bigcap_{I \subset P, P \in \mathrm{Spec}_{rab}(R)} P$，令 $J = (I \cup \{ax - 1\})_{R[x]} \subset R[x]$。先证明 $J = R[x]$。假设 $J \subsetneq R[x]$，取包含 J 的一个极大理想 m，那么有 $I \subset R \cap J \subset R \cap m \in \mathrm{Spec}_{rab}(R)$，从而 $a \in m$。又因为 $ax - 1 \in m$，所以 $1 \in m$，矛盾。所以 $J = R[x]$。于是存在 $b_1, \cdots, b_n \in I, g, g_1, \cdots, g_n \in R[x]$，满足

$$1 = g(ax - 1) + \sum_{i=1}^{n} g_i b_i$$

将 x 替换成 x^{-1}，在等式两边同时乘上 x^k（选取合适的 k），可以得到

$$x^k = h(a - x) + \sum_{i=1}^{n} h_i b_i$$

其中 $h, h_1, \cdots, h_n \in R[x]$。将 x 用 a 代入，即可得到 $a^k \in I$，反向包含关系也成立。 □

Remark. 为了证明 a 在 $\sqrt{I}$ 中，证明过程中将 I 增加一个维度放在 $R[x]$ 中考虑，与 $ax - 1$ 生成整个环……最后将 x 用 $1/a$ 代入。这种技巧来自 Rabinowitsch 对希尔伯特零点定理（Theorem 5.1）的证明，因而被称为 Rabinowitsch's trick。

Proposition 5.2. 设 R 是环， $I \subset R$ 是 R 的理想。那么

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset P, P \in \mathrm{Spec}(R)} P$$

Proof. 由 Lemma 5.2 和 Proposition 5.1 可以推得。 □

Remark. 另一种证明方法详见 [3] 1.3 定理4 (2)：只需结合 Lemma 5.2，再证明当 $f \notin \sqrt{I}, f \notin \bigcap_{I \subset P, P \in \mathrm{Spec}(R)} P$ 即可，考虑集合 $\Sigma = \{c$ 是 R 的理想 $: c \supset I, f \notin \sqrt{c}\}$，$\Sigma$ 非空，由 Zorn 引理可得 Σ 存在极大元 p。对于 $x, y \notin p$， $xR + p, yR + p$ 都是严格包含 p 的理想，但不属于 Σ，所以 $f \in \sqrt{xR + p}, f \in \sqrt{yR + p}$，存在 n, m，使得 $f^n \in xR + p, f^m \in yR + p$，那么 $f^{nm} \in (xR + p)(yR + p) \subset (xyR + p)$，因此 $xy \notin p$。所以 p 是素理想，$f \notin \bigcap_{I \subset P, P \in \mathrm{Spec}(R)} P$ 成立。

Definition 5.4. 雅各布森环：设 R 是环，若对于 R 的任意真理想 $I \subsetneq R$ 都有

$$\sqrt{I} = \bigcap_{I \subset P, P \in \mathrm{Spec}_{max}(R)} P$$

那么称 R 是一个**雅各布森环（Jacobson Ring）**。

Lemma 5.3. 任何仿射 K-代数都是雅各布森环。

Proof. 由 Lemma 5.1 (2) 和 Proposition 1 直接推得。 □

Remark. 一个直接推论是：任何多项式环 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 都是雅各布森环。
一个有趣的事实是形式幂级数环 $K[[x]]$ 不是雅各布森环。 $K[[x]]$ 只有一个极大理想 $J = \{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots : a_1, a_2, \cdots \in K\}$，令 $I = \{0\}$，那么显然 $\sqrt{I}$ 不是极大理想的交。根据 Lemma 5.3 可知 $K[[x]]$ 不是有限生成的 K-代数，也可以用 [1] 1.2 (f) 的方法证明。

Theorem 5.1. 希尔伯特零点定理（Hilbert's Nullstellensatz, second version）：设 K 为**代数闭域**，设$I \subset F = K[x_1, \cdots, x_n]$ 是 F 的理想，则

$$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$$

Proof. 根据 Proposition 3.1 (5)，显然有 $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) \supset \sqrt{I}$（当域 K 不代数闭时也成立）。只需证明反向的包含关系。任取 $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$，对于任意 m 满足 $I \subset m \in \mathrm{Spec}_{max}(F)$，都有 $m = (x_1 - \xi_1, \cdots, x_n - \xi_n)$（根据 Proposition 4.2），又有 $P = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathcal{V}(m) \subset \mathcal{V}(I)$，因此 $f(P) = 0$，$f \in m$。所以 $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) \subset \bigcap_{I \subset m, m \in \mathrm{Spec}_{max}(R)} m = \sqrt{I}$。综上，$\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$。 □

***Proof.* 另一种证明（Rabinowitsch's trick）**：引入未定元 Y，考虑 $n+1$ 元多项式环 $B = K[x_1, \cdots, x_n, Y]$。任取 $f \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$，令 J 为 I 以及 $(1 - fY)$ 在 B 中生成的理想，因为 $\mathcal{V}(I) \subset \mathcal{V}(\{f\})$， I 中多项式全为 0 时，$1 - fY$ 一定不为 0，所以 $\mathcal{V}(J) = \emptyset$。由 Theorem 4.1 可得，$J = B$。所以存在 $b_1, \cdots, b_m \in I, g, g_1, \cdots, g_m \in B$，满足

$$1 = g(1 - fY) + \sum_{i=1}^{m} g_i b_i$$

将 Y 替换成 Y^{-1}，在等式两边乘上适当的 x^k，再将 x 用 f 代入，即可得到 $f^k \in I$。所以 $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) \subset \sqrt{I}$。 □

Remark. 相比前一种证明，Rabinowitsch 的技巧，没有利用极大谱、素谱、极大谱就进行了证明，显得更为巧妙。

6 Reference

[1]. GTM256, A Course in Commutative Algebra, Kemper, Gregor, (2010, ISBN 978-3-642-03544-9)
[2]. 交换代数基础(冯克勤)
[3]. 西安交通大学交换代数讨论班, www.bilibili.com/video/BV1Li4y187uN, P2