约当分解计算器

方尤乐

（北京大学 地球与空间科学学院, 北京　100871）

1　题目描述

在线性代数中一个很重要的定理是 **Jordan 标准型定理**:

设 $\boldsymbol{T}$ 为线性空间 $\mathbb{F}^n$ 上的线性变换（$\mathbb{F}$ 为任意域），设 $\boldsymbol{T}$ 在标准正交基下的矩阵为 A. 如果 A 的特征多项式在 $\mathbb{F}[x]$ 中可以分解为一次因式的乘积，那么 A 总是可以通过相似变换变成由 Jordan 块组成的分块对角矩阵（也称 Jordan 矩阵），其中 r 级的 Jordan 块形如

$$J_r(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

例如:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = SJS^{-1} = S\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}S^{-1}, \text{其中 } S = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Jordan 标准型在改变 Jordan 块次序的意义下唯一，但它本身并不唯一. 我们将 Jordan 矩阵的对角元提出来成为一个对角矩阵 D_1，令 $J = D_1 + D_2$，那么有

$$A = SJS^{-1} = SD_1S^{-1} + SD_2S^{-1} = A_1 + A_2 \tag{3}$$

我们称它为 **Jordan 分解式**. 可以证明这样的分解是唯一的：$A_1 = SD_1S^{-1}$ 表示的线性变换作用在A 的每个广义特征子空间上都是纯量乘法.

现在我们在模 p 剩余类域（p 为质数）上考虑这个问题。给定矩阵 A，请你计算它的 Jordan 分解式中的 A_1. **数据保证 A 的特征多项式在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中可以分解为一次因式的乘积.**

2　输入输出格式

输入:

第一行 n, p，代表矩阵大小以及素数 p.

之后共 n 行，每行 n 个数. 第 i 行第 j 个数表示 $A_{i,j}$.

3 样例数据

输入：

```
4 23
3 19 0 2
4 18 21 4
0 0 3 21
0 0 2 22
```

输出：

```
22 0 2 0
0 22 0 2
0 0 1 0
0 0 0 1
```

4 数据范围

20%：$n \le 20, p \le 1000$

50%：$n \le 50, p \le 10^6$

100%：$n \le 50, p \le 10^9$

数据保证 A 的特征多项式在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中可以分解为一次因式的乘积.