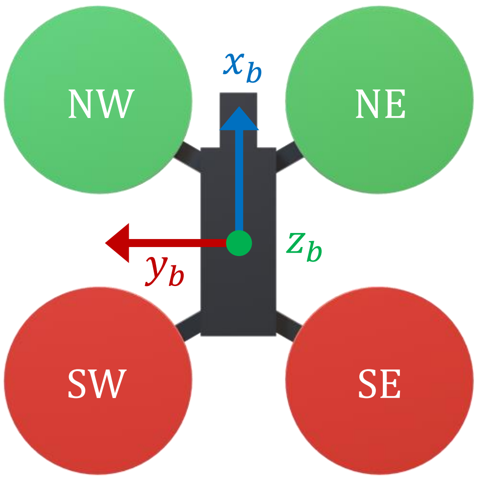
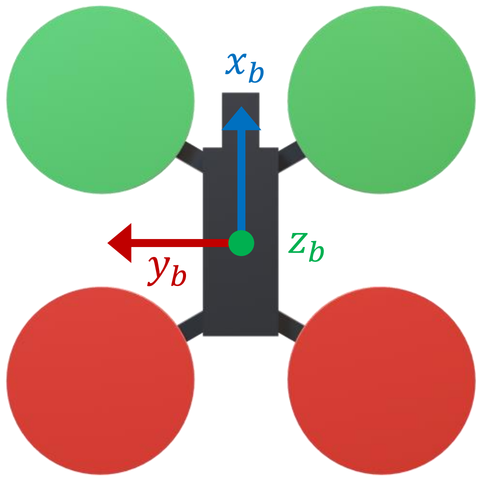
Cuadricóptero



- Cuatro rotores
  - Enumerados como $\{\mathrm{NE}, \mathrm{NW}, \mathrm{SE}, \mathrm{SW}\}$
  - Situados a una distancia l del CG
  - Sobre los ejes x_b e y_b
  - Velocidad angular del rotor i se define como Ω_i

Cuadricóptero

- Eje de coordenadas de tierra ($Earth$)
  - $E = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{bmatrix}$
- Eje de coordenadas de cuerpo ($body$)
  - $b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$



Cuadricóptero

- Cambio de base
  - $^{b}\vec{F} = D\ ^{E}\vec{F}$
    - $D = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{bmatrix}$
  - $^{E}\vec{F} = D^{-1}\ ^{b}\vec{F}$
    - $D^{-1} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi \\ c\theta s\phi & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & s\psi s\theta c\phi - c\psi c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta s\phi \end{bmatrix}$

Cuadricóptero

- Posición
  - con respecto al suelo
  - $$ {}^{E}\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} $$

Cuadricóptero

- Velocidad angular
  - con respecto a si mismo
  - $${}^{b}\boldsymbol{\omega} = {}^{b}\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Cuadricóptero

- Fuerza de gravedad
  - $${}^{E}\mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$
  - $${}^{b}\mathbf{F}_g = \mathbf{D}\,{}^{E}\mathbf{F}_g = \mathbf{D}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix}$$

Cuadricóptero

- Fuerza de empuje aerodinámico (thrust)
  - Fuerza ascendente provocada por el aíre empujado hacia abajo por las hélices

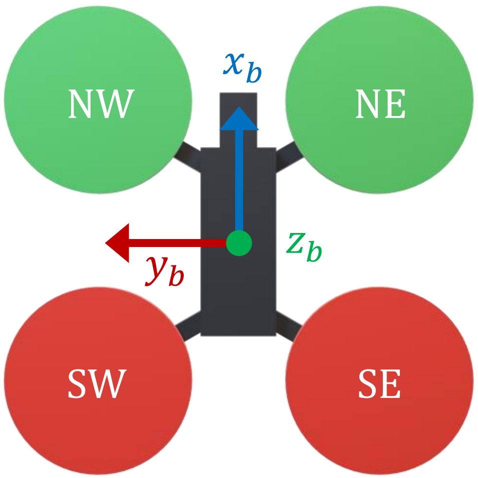
- ${}^{b}T_i = k_{FT}\Omega_i^2,\ \ i \in \{\mathrm{NE}, \mathrm{NW}, \mathrm{SE}, \mathrm{SW}\}$

- ${}^{b}\vec{\mathbf{F}}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_i^{\{\mathrm{NE},\mathrm{NW},\mathrm{SE},\mathrm{SW}\}} {}^{b}T_i \end{bmatrix} = k_{FT} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{NE}^2 + \Omega_{NW}^2 + \Omega_{SE}^2 + \Omega_{SW}^2 \end{bmatrix}$

Cuadricóptero

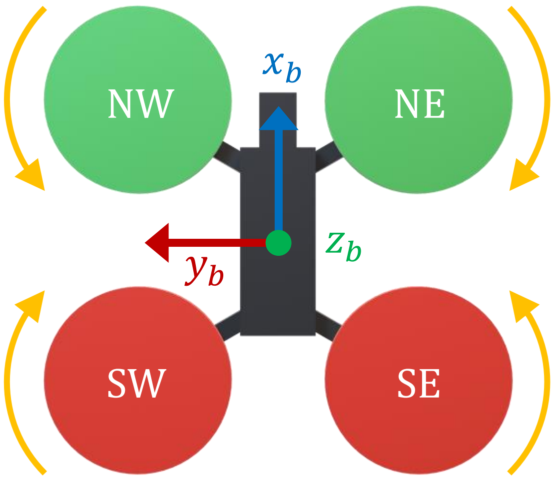
- Fuerza de arrastre aerodinámico (drag)
  - Rozamiento con el aíre sufrido al avanzar el drone
  - $${}^{b}\vec{\mathbf{F}}_{D} = -\mathbf{K}_{FD}\ {}^{b}\begin{bmatrix} \dot{x}|\dot{x}| \\ \dot{y}|\dot{y}| \\ \dot{z}|\dot{z}| \end{bmatrix} \approx -\mathbf{K}_{FD} \begin{bmatrix} {}^{b}\dot{x} \\ {}^{b}\dot{y} \\ {}^{b}\dot{z} \end{bmatrix}$$
    - $$\mathbf{K}_{FD} = \begin{bmatrix} k_{FD}^{x} & 0 & 0 \\ 0 & k_{FD}^{y} & 0 \\ 0 & 0 & k_{FD}^{z} \end{bmatrix}$$

Cuadricóptero



- Momento de empuje aerodinámico
  - Rotación experimentada cuando las cuatro hélices no generan el mismo empuje
  - $$^{b}\overrightarrow{\mathbf{M}}_T = \begin{bmatrix} l\cos(45) & 0 & 0 \\ 0 & l\sin(45) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{NW} + T_{SW} - T_{NE} - T_{SE} \\ T_{SW} + T_{SE} - T_{NW} - T_{NE} \\ 0 \end{bmatrix}$$

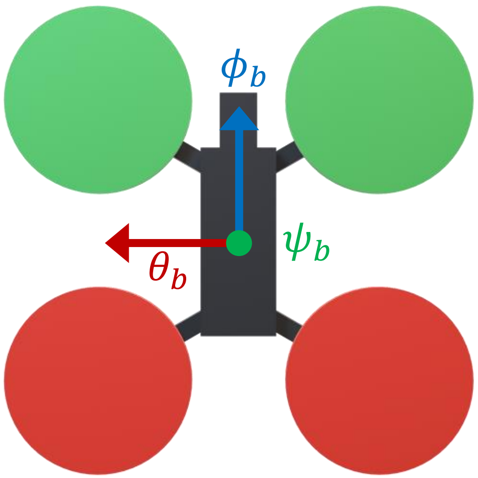
Cuadricóptero



- Momento de arrastre aerodinámico de los rotores
  - Rotación experimentada debido a la diferencia de velocidad angular de las hélices

  - $${}^{b}\overrightarrow{\mathbf{M}}_{DR} = k_{MDR}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{NE}^2 - \Omega_{NW}^2 - \Omega_{SE}^2 + \Omega_{SW}^2 \end{bmatrix}$$

Cuadricóptero



- Momento de arrastre aerodinámico
  - Rozamiento con el aire sufrido al girar el drone sobre sí mismo
  - $${}^{b}\overrightarrow{\mathbf{M}}_D = -\mathbf{K}_{MD} \; {}^{b}\begin{bmatrix} \dot{\phi}|\dot{\phi}| \\ \dot{\theta}|\dot{\theta}| \\ \dot{\psi}|\dot{\psi}| \end{bmatrix} \approx -\mathbf{K}_{MD} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$
    - $$\mathbf{K}_{MD} = \begin{bmatrix} k_{MD}^{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & k_{MD}^{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & k_{MD}^{\psi} \end{bmatrix}$$

Cuadricóptero

- Ecuación de movimiento en traslación
  - $m\,{}^{b}\ddot{\mathbf{r}} = \sum \mathbf{F} = {}^{E}\vec{\mathbf{F}}_g + {}^{E}\vec{\mathbf{F}}_T + {}^{E}\vec{\mathbf{F}}_D$
    - $m\,{}^{b}\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{D}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{bmatrix} + k_T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega_{NE}^2 + \Omega_{NW}^2 + \Omega_{SE}^2 + \Omega_{SW}^2 \end{bmatrix} - \mathbf{K}_{FD}\ {}^{b}\begin{bmatrix} \dot{x}|\dot{x}| \\ \dot{y}|\dot{y}| \\ \dot{z}|\dot{z}| \end{bmatrix}$

Cuadricóptero

- Ecuación de movimiento en rotación
  - $\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_r \Omega_r = \sum \mathbf{M}$
  - $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{I}^{-1} \sum \mathbf{M} - \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) + \mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_r \Omega_r)$

Cuadricóptero

- Ecuación de movimiento en rotación
  - Resolución por partes
  - $$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})=\mathbf{I}^{-1}\left(\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}I_{xx}&0&0\\0&I_{yy}&0\\0&0&I_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}\right)=\mathbf{I}^{-1}\left(\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}I_{xx}\omega_x\\I_{yy}\omega_y\\I_{zz}\omega_z\end{bmatrix}\right)$$
  - $$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})=\mathbf{I}^{-1}\begin{bmatrix}\omega_y I_{zz}\omega_z-\omega_z I_{yy}\omega_y\\\omega_z I_{xx}\omega_x-\omega_x I_{zz}\omega_z\\\omega_x I_{yy}\omega_y-\omega_y I_{xx}\omega_x\end{bmatrix}=\mathbf{I}^{-1}\begin{bmatrix}(I_{zz}-I_{yy})\omega_y\omega_z\\(I_{xx}-I_{zz})\omega_z\omega_x\\(I_{yy}-I_{xx})\omega_x\omega_y\end{bmatrix}$$
  - $$\mathbf{I}^{-1}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})=\begin{bmatrix}I_{xx}^{-1}&0&0\\0&I_{yy}^{-1}&0\\0&0&I_{zz}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(I_{zz}-I_{yy})\omega_y\omega_z\\(I_{xx}-I_{zz})\omega_z\omega_x\\(I_{yy}-I_{xx})\omega_x\omega_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{I_{zz}-I_{yy}}{I_{xx}}\omega_y\omega_z\\\frac{I_{xx}-I_{zz}}{I_{yy}}\omega_z\omega_x\\\frac{I_{yy}-I_{xx}}{I_{zz}}\omega_x\omega_y\end{bmatrix}$$

Cuadricóptero

- Ecuación de movimiento en rotación
  - Resolución por partes
  - $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_r \Omega_r$
    - $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \mathbf{I}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_r \end{bmatrix}$
    - $\Omega_r = (\Omega_{NE} - \Omega_{NW} + \Omega_{SE} - \Omega_{SW})$

Cuadricóptero

- Ecuación de movimiento en rotación
- Eje x
  - $\ddot{z} = -g + \frac{c\theta s\phi}{m} u_1 - \frac{k_D}{m} \dot{z}$
    - $u_1 = k_T(\Omega_{NE}^2 + \Omega_{NW}^2 + \Omega_{SE}^2 + \Omega_{SW}^2)$
  - $I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega) + \omega \times (I_r \Omega_r) = \sum M$

Cuadricóptero

- $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$
- $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$
- $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ x_7\ x_8\ x_9\ x_{10}\ x_{11}\ x_{12}]^T = [x\ y\ z\ \dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}\ \phi\ \theta\ \psi\ \dot{\phi}\ \dot{\theta}\ \dot{\psi}]^T$
- $\mathbf{u} = [u_1\ u_2\ u_3\ u_4]^T = [\ ]^T$

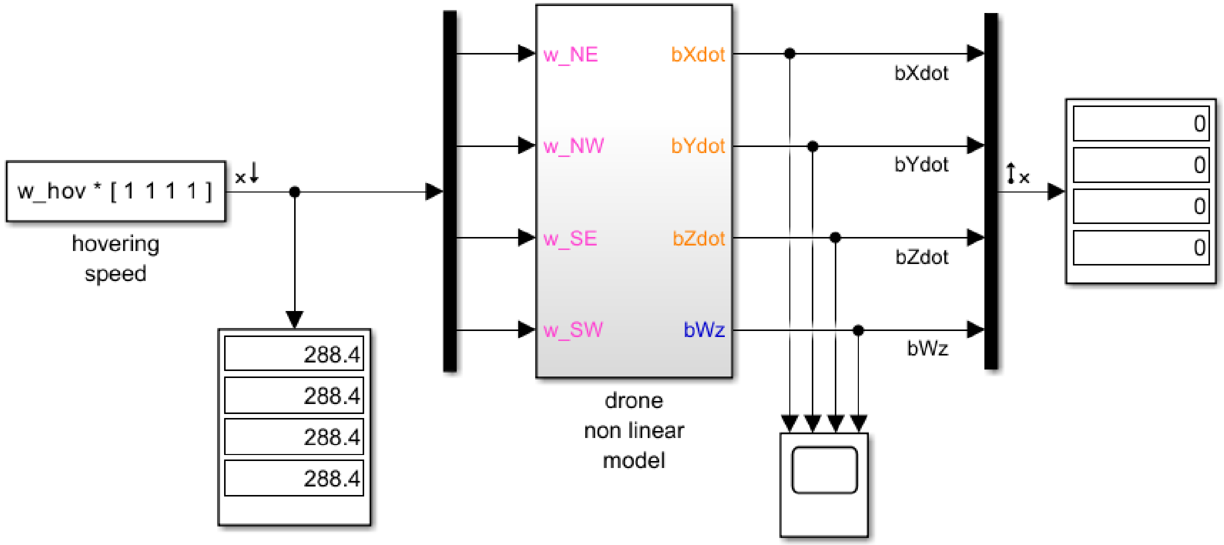
Cuadricóptero

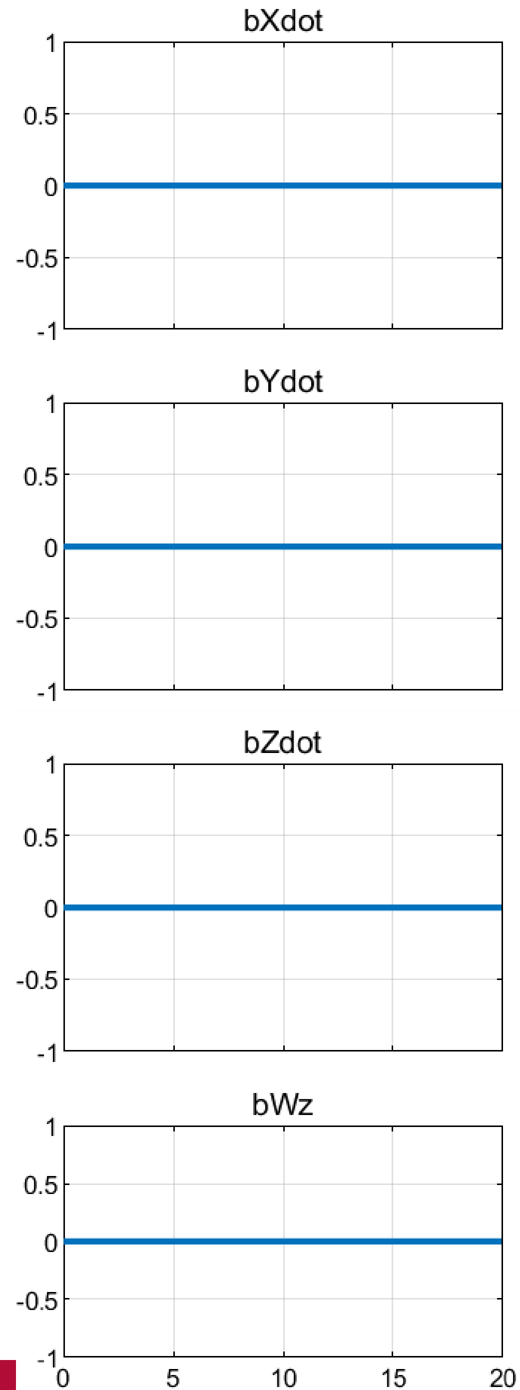
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} \omega_{NE}^2 \\ \omega_{NW}^2 \\ \omega_{SE}^2 \\ \omega_{SW}^2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{}{m} & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \omega_{NE}^2 \\ \omega_{NW}^2 \\ \omega_{SE}^2 \\ \omega_{SW}^2 \end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ mg \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Definición

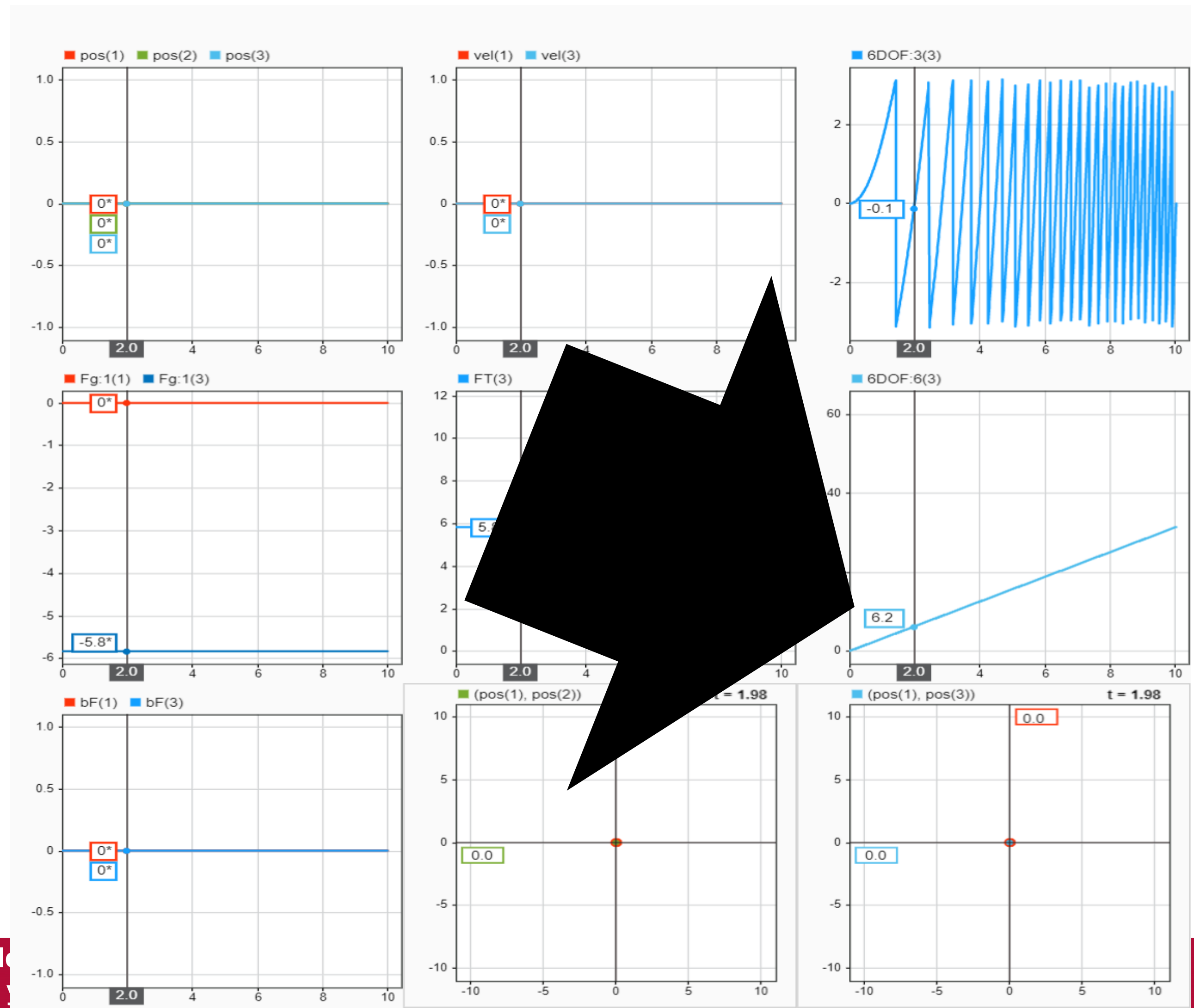
- Fuerza de sustentación





Definición

- Fuerza de arrastre aerodinámico
  - Eje horizontal



Definición

Momento de arrastre aerodinámico

- Eje vertical