

→ Les TP peuvent s'effectuer sous Matlab, Scilab, Octave ou R.

→ L'exercice 1 est une introduction aux outils de simulations et de calculs numériques, il n'est pas noté.

→ Un compte-rendu personnel des exercices 2, 3, 4 (partie 1) et 5 (partie 1) est à fournir avant le 10 mai 2024.

→ Les points de bonus attribués aux exercices facultatifs sont : +2 points (exercice 4, partie 2), +2 points (exercice 4, partie 2), +2 points (exercice 6) . Exercices relativement chronophages et à la limite du programme, à ne traiter que si le reste du sujet est traité et si vous avez du temps.

→ Le compte-rendu est à soumettre sur Moodle sous la forme d'un fichier pdf unique comportant les résultats, analyses, graphiques et codes (pas les simulations brutes). Editeur de texte de votre choix (Word, LaTeX, ...). Rapport manuscrit autorisé à condition que 1) scan pdf très soigné 2) codes/courbes intégrés au corps du texte (pas en annexe).

Exercice 1 On souhaite étudier les lois suivantes :

—Loi Exponentielle($\lambda = 0.01$)

—Loi Normale($\mu = 100, \sigma = 10$)

—Loi Uniforme ($a = 50, b = 150$)

—Loi de Weibull ($\theta = 112, \beta = 3$)

•Représenter sur un même graphique la fiabilité de chaque loi sur l'intervalle $[75, 125]$.

•Pour chacune de ces lois, effectuer les travaux suivants :

—Simuler un échantillon de la loi de taille $p = 100$.

—Estimer les grandeurs de la loi : moyenne, variance, médiane.

—Vérifier la cohérence des résultats avec les valeurs théoriques de l'espérance, variance, ...

—Représenter sur un même graphique les fonctions de répartition empirique et théorique.

•Pour la loi exponentielle, on s'intéresse à la qualité des estimateurs les plus usuels des paramètres.

—Pour des échantillons de différentes taille ($10 \leq p \leq 1000$), déterminer un estimateur du paramètre du modèle à partir de 500 répliques.

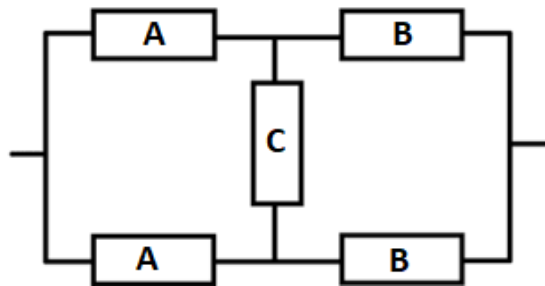
—Vérifier si le biais des estimateurs des estimateurs diminuent avec p .

Exercice 2 On s'intéresse à un système S composé de n composants indépendants de loi exponentielle (on prendra $\lambda = 0.1(\text{jour}^{-1})$) en configuration parallèle.

- Pour n fixé, proposer une méthode pour simuler l'instant de panne de S .
- Pour plusieurs valeurs de n entre 10 et 5000, déterminer la MTTF du système à partir de 1000 répliques. Tracer la courbe de l'évolution de la MTTF en fonction de n à partir des résultats de simulations. Comparer les résultats aux valeurs théoriques.
- Graphiquement puis à partir des résultats obtenus en TD, déterminer combien de composants sont nécessaires pour obtenir une MTTF égale à 80 jours.

Exercice 3 On considère un système S composé de deux composants A et B mis en série. Les lois de durée de vie sont exponentielles respectivement de paramètres $\lambda_A = 1(\text{an}^{-1})$ et $\lambda_B = 5(\text{an}^{-1})$.

- A partir de 1000 répliques de défaillances pour un tel système, Estimer la MTTF. Comparer avec le résultat théorique.
- Effectuer la même démarche pour les configurations suivantes :
 - B en redondance uniquement,
 - redondance haut-niveau,
 - redondance bas-niveau.
 - redondance passive haut-niveau (système de secours identique).

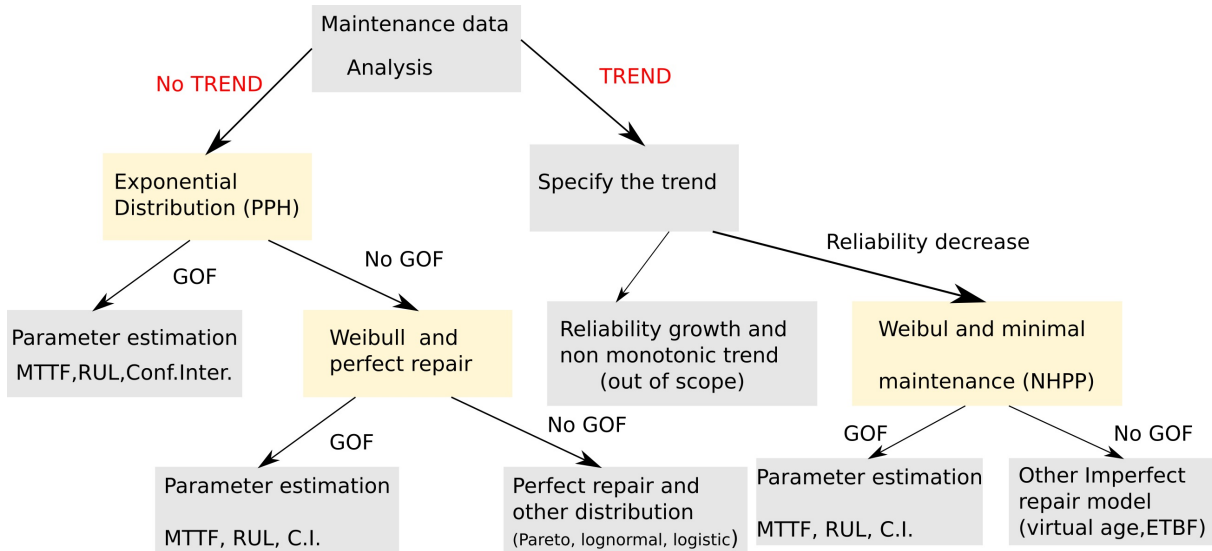


- Simuler un système en pont (figure) où C a une loi de durée de vie identique à celle de B . Estimer la MTTF à partir de 1000 répliques.
- On considère le système S en redondance bas-niveau. En revanche, chaque composant de type A suit une loi de Weibull de paramètres (échelle, forme) $(\theta = 100, \beta = 1.5)$ et chaque composant de type B suit une loi normale de paramètres (moyenne, écart-type) $(\mu = 250, \sigma = 20)$. Est-il envisageable d'obtenir une MTTF théorique explicite? Déterminer une estimation de la MTTF par simulations.

Exercice 4 On souhaite quantifier conjointement le vieillissement et l'efficacité des réparations à partir de données de retour d'expérience.

Première partie/Données simulées On étudie 3 jeux de données de 200 défaillances : les variables *donnees1*, *donnees2* et *donnees3* représentent les instants des défaillances (T_i).

On souhaite connaître le modèle le plus adapté pour représenter chaque jeu de données. Les hypothèses que l'on retient pour les processus sont : Loi Exponentielle (PPH), Loi de Weibull et maintenance parfaite, Loi de Weibull et maintenance minimale (NHPP).



Une démarche possible est la suivante (figure) :

- Vérifier si le jeu de données présente une tendance (test de Spearman, test de Laplace)
- Si il n'y a pas de tendance, tester l'adéquation à la loi exponentielle (test de Bartlett, adéquation graphique).
- Si la loi exponentielle ne convient pas, tester l'adéquation à la loi de Weibull et maintenance parfaite (adéquation graphique)
- Si on observe une tendance, on peut s'intéresser à tester l'adéquation à la loi de Weibull et maintenance minimale (adéquation graphique)

Deuxième partie/Données réelles : on étudie un jeu de données issu de l'industrie. On appliquera une démarche identique à la précédente.

Exercice 5 On s'intéresse à l'optimisation de la politique de maintenance de divers matériels suivant des critères de minimisation des coûts. Tous les résultats peuvent être obtenus à l'aide de simulation de Monte Carlo (pas de calcul théorique nécessaire).

—**Première partie/Un composant** : On s'intéresse à un système monocomposant dont la loi de durée de vie suit une loi de Weibull de paramètre $\eta = 3\alpha n$ et $\beta = 2.5$. Toute maintenance remet à neuf le système.

On suppose qu'une maintenance préventive est planifiée de manière périodique (tous les multiples de x jours après la mise en route). Le coût d'une maintenance corrective est de 1000 euros, le coût d'une maintenance préventive est de 200 euros. Tracer la courbe du coût moyen asymptotique par unité de temps en fonction de la périodicité x . Déterminer la périodicité optimale x^* .

—**Seconde partie/Système série 4 composants** On s'intéresse maintenant à un système de signalisation ferroviaire (voir figure). Il s'agit d'un système **en série** à quatre feux. Une panne a lieu dès qu'une ampoule est en panne et la maintenance (corrective) a lieu au plus vite (réparation immédiate et de durée négligeable). On fait l'hypothèse que chaque ampoule a une loi de durée de vie qui suit une loi de Weibull de paramètre $\eta = 3\alpha n$ et $\beta = 2.5$.



—La stratégie de maintenance consiste à effectuer une maintenance préventive basée sur l'âge du système : quand le système n'est pas maintenu pendant une durée x , on effectue une maintenance préventive (coût total 1500 euros) en remplaçant à neuf toutes les ampoules. Après une panne, une maintenance corrective (coût 10000 euros) consiste à remplacer à neuf les quatre ampoules. Déterminer l'âge optimal x^* et le coût moyen asymptotique par unité de temps.

—La stratégie de maintenance consiste à effectuer une maintenance préventive basée sur l'âge du système : quand le système n'est pas maintenu pendant une durée x , on effectue une maintenance préventive (coût total 1500 euros) en remplaçant à neuf toutes les ampoules. Après une panne, une maintenance corrective (coût 10000 euros) consiste à remplacer à neuf les quatre ampoules. Déterminer l'âge optimal x^* et le coût moyen asymptotique par unité de temps.

—Lorsqu'un composant est réparé à neuf, le nouvel instant de panne est simulé de manière iid par rapport aux précédentes simulations. Ce n'est pas le cas si la maintenance est minimale. On considère un composant tombant en panne à un "âge" s et réparé minimalement. Après sa remise en service, il se comporte toujours comme un système ayant vécu une durée s sans maintenance. Proposer (théoriquement) une méthode de simulation pour la prochaine durée de fonctionnement (pour la loi de Weibull).

—On considère la même politique de maintenance basée sur l'âge à la différence que la maintenance corrective ne remplace que l'ampoule défectueuse (les autres ampoules ne sont pas maintenues/remplacées). Déterminer l'âge optimal x^* et le coût moyen asymptotique par unité de temps.

Exercice 6. On souhaite étudier un jeu de données présentant les instants de maintenance (T_i) et les types de maintenance associé ($U_i = 0$ si on effectue une MC, $U_i = 1$ si on effectue une MP). La variable *donneesEX5* contient dans la première ligne les instants de maintenance et dans la seconde les types de maintenance.

- On suppose que les maintenances sont toutes parfaites et que la durée entre deux maintenances est de loi exponentielle. Vérifier que l'hypothèse sur la loi exponentielle est réaliste. Vérifier que la proportion de MP reste stable.
- Après une maintenance, on suppose que la durée jusqu'à une MP est Y et la durée jusqu'à une MC est Z avec Y et Z indépendants. Quelle est la durée de vie W jusqu'à l'observation effective d'une maintenance ?
- On suppose que Y est de loi exponentielle de paramètre μ et Z est de loi exponentielle de paramètre λ . Montrer que W est de loi exponentielle et calculer son espérance. Déterminer la probabilité π d'observer une MP en fonction des paramètres.
- Déterminer la durée moyenne entre les observations pour le jeu de données. Calculer la proportion de MP pour le jeu de données. En déduire une estimation de λ et μ .
- Montrer que dans cette configuration (Y et Z indépendants et de loi exponentielle), le type d'observation U est indépendant de la durée entre deux observations W . [*écrire par exemple $P(W > w|U = 1)$ et conditionner selon Z*]
- On souhaite à l'avenir obtenir une proportion de MP supérieure à 90%. Pour cela, on rajoute au processus des MP basés sur l'âge. Après une durée T , le système est automatiquement maintenu préventivement. Si la maintenance a lieu avant T , une MP a lieu avec probabilité π déterminée plus haut. En supposant que les paramètres du modèle sont ceux obtenus par estimation, calculer la valeur de T permettant d'atteindre le seuil de 90% de MP. Quelles sont les limites d'une telle politique de maintenance préventive ?