Regresión Linear Múltiple

Nicolás Jadán

La regresión lineal múltiple es una generalización de la regresión lineal simple, en el sentido de que este enfoque permite evaluar las relaciones lineales entre una variable de respuesta (cuantitativa) y varias variables explicativas (cuantitativas o cualitativas).

- Cargamos todas las librerías que vamos a utilizar.

```
library(ggplot2)
library(forcats)
library(performance)
library(visreg)
library(ggstatsplot)
```

```
You can cite this package as:
     Patil, I. (2021). Visualizations with statistical details: The 'ggstatsplot' approach.
     Journal of Open Source Software, 6(61), 3167, doi:10.21105/joss.03167
```

```
#library(equatiomatic)
library(car)
```

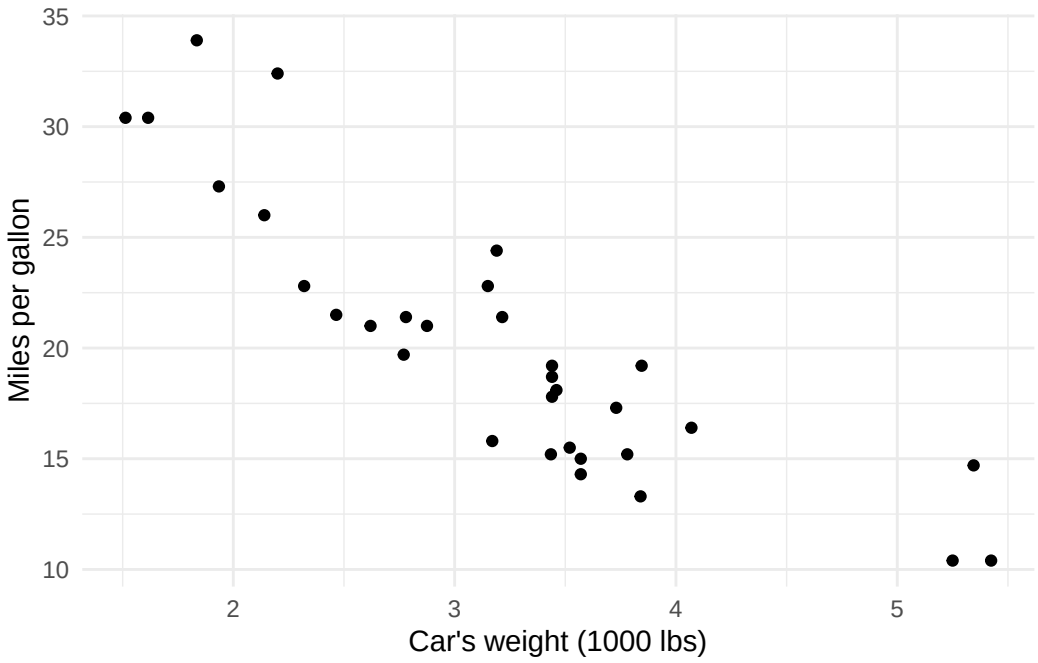
```
Loading required package: carData
```

```
library(carData)
```

Se realiza la evaluación de si existe una relación lineal entre la distancia recorrida con un galón de combustible y el peso de los automóviles. Utilizando el conjunto de datos `mtcars`.

```
# Cargamos el conjunto de datos
data <- mtcars
```

```r
ggplot(data, aes(x = wt, y = mpg)) +
  geom_point() +
  labs(
    y = "Miles per gallon",
    x = "Car's weight (1000 lbs)"
  ) +
  theme_minimal()
```



El diagrama de dispersión muestra una relación negativa entra la distacnia recorrida de un galón de combustible y el peso de un auto.

- Para realizar una regresión lineal en R, usamos la función `lm ()` (que significa modelo lineal).

```r
model <- lm(mpg ~ wt, data = data)
summary(model)
```

```
Call:
lm(formula = mpg ~ wt, data = data)
```

```
Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-4.5432 -2.3647 -0.1252  1.4096  6.8727

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  37.2851     1.8776  19.858  < 2e-16 ***
wt           -5.3445     0.5591  -9.559 1.29e-10 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.046 on 30 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7528,    Adjusted R-squared:  0.7446
F-statistic: 91.38 on 1 and 30 DF,  p-value: 1.294e-10
```

El valor $p = 1{,}29\text{e-}10 < 0{,}05$, por lo que rechazamos la hipótesis nula en el nivel de significancia $=5\%$. Por lo tanto, concluimos que existe una **relación significativa entre el peso de un automóvil y su consumo de combustible**.

Condiciones de Aplicación

Independencia: Las observaciones deben ser independientes. Es el plan de muestreo y el diseño experimental los que suelen proporcionar información sobre esta condición. Si los datos provienen de diferentes individuos o unidades experimentales, por lo general son independientes. Por otro lado, si se miden los mismos individuos en diferentes períodos, los datos probablemente no sean independientes.

Normalidad de los residuos: Para tamaños de muestra grandes, los intervalos de confianza y las pruebas de los coeficientes son (aproximadamente) válidos ya sea que el error siga una distribución normal o no (una consecuencia del teorema del límite central). Para tamaños de muestra pequeños, los residuos deben seguir una distribución normal. Esta condición se puede probar visualmente (a través de un gráfico QQ y/o un histograma), o más formalmente (a través de la prueba de Shapiro Wilk).

Homocedasticidad de los residuales: La varianza de los errores debe ser constante. Hay una falta de homocedasticidad cuando la dispersión de los residuos aumenta con los valores predichos (valores ajustados). Esta condición se puede probar visualmente (trazando los residuos estandarizados frente a los valores ajustados) o más formalmente (a través de la prueba de Breusch-Pagan).

Regresión Linear Múltiple

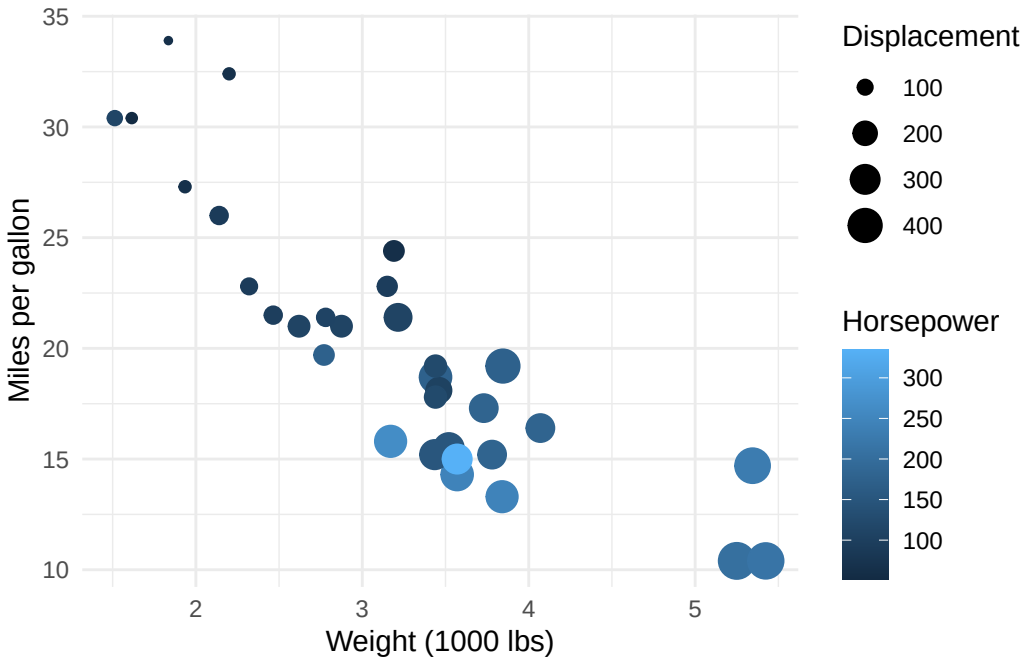
- El comando `head()` muestra por defecto las primeras 6 filas del conjunto de datos especificado.

```
head(data)
```

```
                   mpg cyl disp  hp drat    wt  qsec vs am gear carb
Mazda RX4         21.0   6  160 110 3.90 2.620 16.46  0  1    4    4
Mazda RX4 Wag     21.0   6  160 110 3.90 2.875 17.02  0  1    4    4
Datsun 710        22.8   4  108  93 3.85 2.320 18.61  1  1    4    1
Hornet 4 Drive    21.4   6  258 110 3.08 3.215 19.44  1  0    3    1
Hornet Sportabout 18.7   8  360 175 3.15 3.440 17.02  0  0    3    2
Valiant           18.1   6  225 105 2.76 3.460 20.22  1  0    3    1
```

Se puede visualizar la relación entre el consumo de combustible de un automóvil (mpg) junto con su peso (wt), caballos de fuerza (hp) y desplazamiento (disp) (la cilindrada del motor es el volumen combinado de aire barrido (o desplazado) resultante del movimiento hacia arriba y hacia abajo de los pistones en los cilindros, generalmente cuanto más alto, más potente es el automóvil):

```
ggplot(data) +
  aes(x = wt, y = mpg, colour = hp, size = disp) +
  geom_point() +
  scale_color_gradient() +
  labs(
    y = "Miles per gallon",
    x = "Weight (1000 lbs)",
    color = "Horsepower",
    size = "Displacement"
  ) +
  theme_minimal()
```



Existe:

- una relación negativa entre millas/galón y caballos de fuerza (los puntos más claros, que indican más caballos de fuerza, tienden a estar más presentes en niveles bajos de millas por galón)
- una relación negativa entre millas/galón y desplazamiento (los puntos más grandes, que indican valores más grandes de desplazamiento, tienden a estar más presentes en niveles bajos de millas por galón).

Por lo tanto, nos gustaría evaluar la relación entre el consumo de combustible y el peso, pero esta vez agregando información sobre la potencia y el desplazamiento. Al agregar esta información adicional, podemos **capturar solo la relación directa entre millas/galón y peso** (se cancela el efecto indirecto debido a la potencia y el desplazamiento).

- Se realizan ajustes

```
model2 <- lm(mpg ~ wt + hp + disp, data = data)
summary(model2)
```

```
Call:
lm(formula = mpg ~ wt + hp + disp, data = data)
```

```
Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-3.891 -1.640 -0.172  1.061  5.861

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 37.105505   2.110815  17.579  < 2e-16 ***
wt          -3.800891   1.066191  -3.565  0.00133 **
hp          -0.031157   0.011436  -2.724  0.01097 *
disp        -0.000937   0.010350  -0.091  0.92851
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.639 on 28 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8268,    Adjusted R-squared:  0.8083
F-statistic: 44.57 on 3 and 28 DF,  p-value: 8.65e-11
```

Concluimos:

- Existe una relación significativa y negativa entre millas/galón y peso, **siendo todo lo demás igual** . Entonces, para un aumento de una unidad en el peso (es decir, un aumento de 1000 libras), el número de millas/galón disminuye, en promedio, en 3,8, para un nivel constante de potencia y desplazamiento (pagpag-valor = 0,001).
- Existe una relación significativa y negativa entre millas/galón y caballos de fuerza, siendo todo lo demás igual. Entonces, para un aumento de una unidad de caballo de fuerza, la distancia recorrida con un galón disminuye, en promedio, en 0,03 millas, para un nivel constante de peso y desplazamiento (pagpag-valor = 0,011).
- No rechazamos la hipótesis de que no hay relación entre millas/galón y el desplazamiento cuando el peso y la potencia permanecen constantes (porquepagpag-valor = 0,929 > 0,05).
- (Para completar, pero debe interpretarse solo cuando tiene sentido: para un peso, potencia y desplazamiento = 0, podemos esperar que un automóvil tenga, en promedio, un consumo de combustible de 37.11 millas/galón (pagpag-valor < 0.001).)

Para la ilustración, modelamos el consumo de combustible (mpg) sobre el peso (wt) y la forma del motor (vs). La variable (vs) tiene dos niveles:

```r
# Grabando dat$vs
data$vs <- as.character(data$vs)
data$vs <- fct_recode(data$vs,
```

```
  "V-shaped" = "0",
  "Straight" = "1"
)

model3 <- lm(mpg ~ wt + vs, data = data)
summary(model3)
```

```
Call:
lm(formula = mpg ~ wt + vs, data = data)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.7071 -2.4415 -0.3129  1.4319  6.0156

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  33.0042     2.3554  14.012 1.92e-14 ***
wt           -4.4428     0.6134  -7.243 5.63e-08 ***
vsStraight    3.1544     1.1907   2.649   0.0129 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.78 on 29 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.801, Adjusted R-squared:  0.7873
F-statistic: 58.36 on 2 and 29 DF,  p-value: 6.818e-11
```

```
#check_model(model2)
```

Para la ilustración, comenzamos con un modelo con todas las variables en el conjunto de datos como variables independientes:

```
## vs has already been transformed into factor
## so only am is transformed here

## Recoding dat$vs
data$am <- as.character(data$am)
data$am <- fct_recode(data$am,
  "Automatic" = "0",
  "Manual" = "1"
```

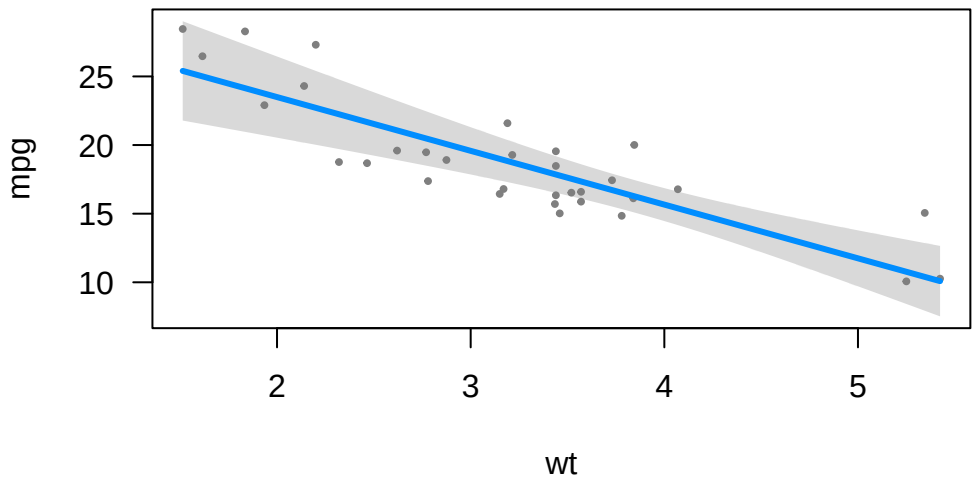
```
)

model4 <- lm(mpg ~ ., data = data)
model4 <- step(model4, trace = FALSE)
summary(model4)
```

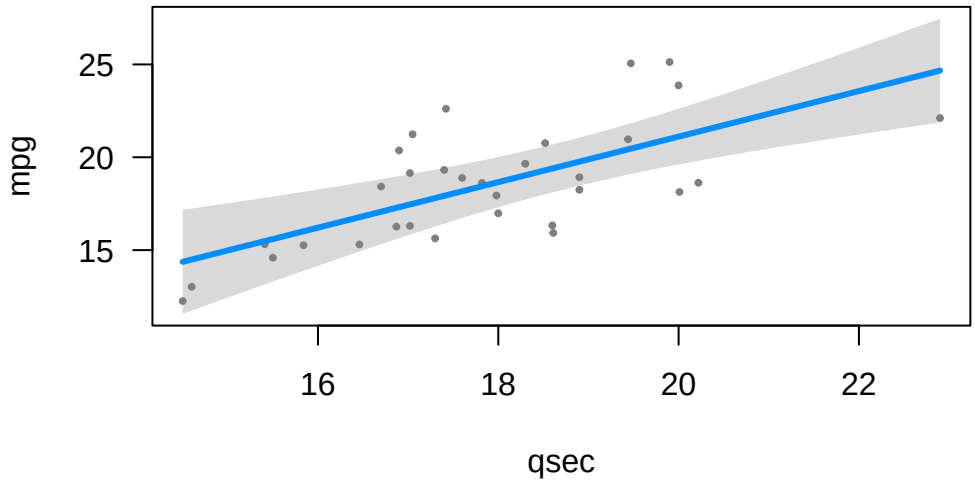
```
Call:
lm(formula = mpg ~ wt + qsec + am, data = data)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.4811 -1.5555 -0.7257  1.4110  4.6610

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   9.6178     6.9596   1.382 0.177915
wt           -3.9165     0.7112  -5.507 6.95e-06 ***
qsec          1.2259     0.2887   4.247 0.000216 ***
amManual      2.9358     1.4109   2.081 0.046716 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.459 on 28 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8497,    Adjusted R-squared:  0.8336
F-statistic: 52.75 on 3 and 28 DF,  p-value: 1.21e-11
```

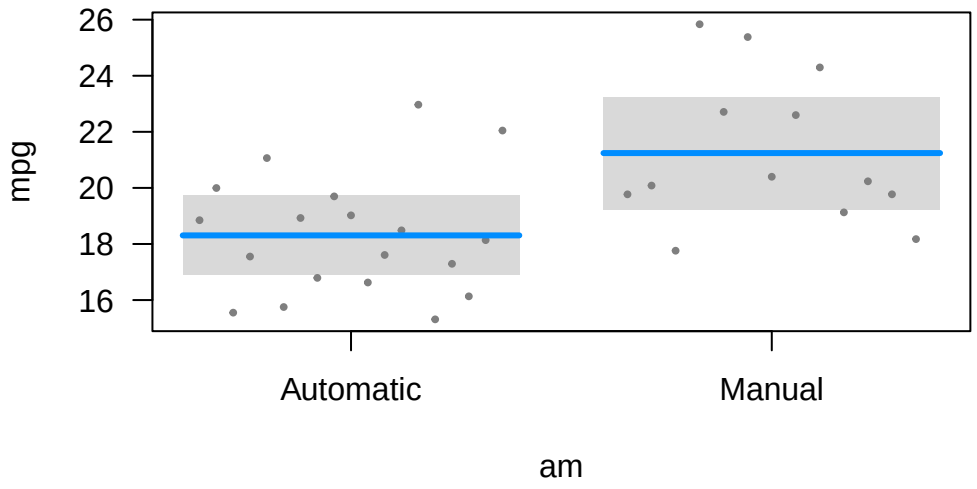
Hay muchas formas de visualizar los resultados de una regresión lineal. Los 2 más fáciles son:

1. Visreg () que ilustra las relaciones entre las variables dependientes e independientes en diferentes gráficos (uno para cada variable independiente a menos que especifique qué relación desea ilustrar):

```
visreg(model4)
```

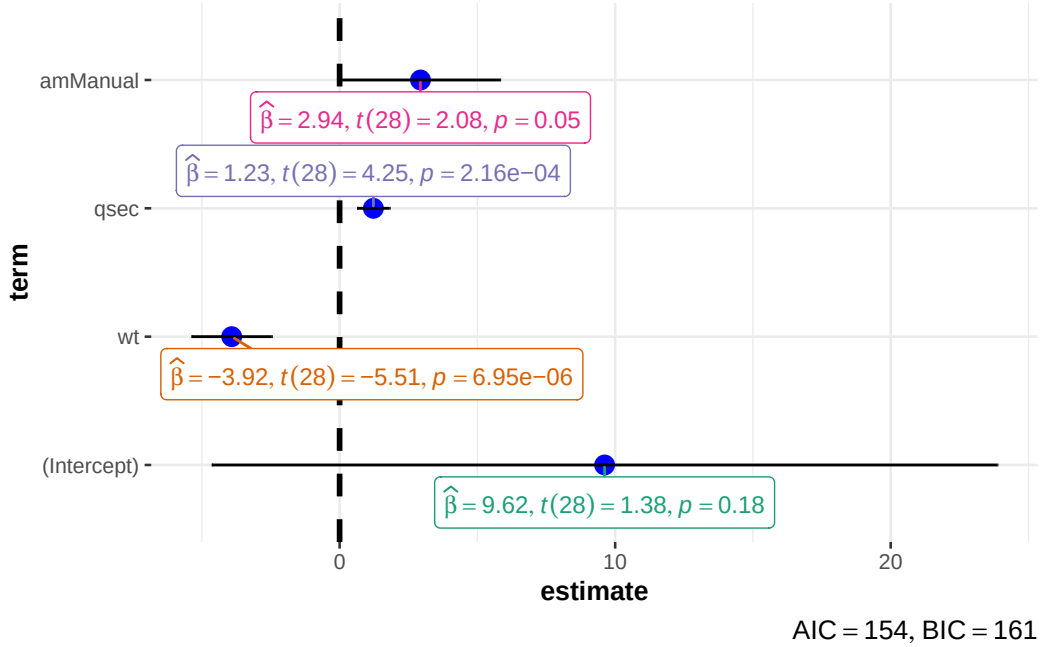

mpg
25
20
15
10
2
3
4
5
wt


mpg
25
20
15
16
18
20
22
qsec



2. ggcoefstats () que ilustra los resultados en una sola parcela:

```
ggcoefstats(model4)
```



```
#extract_eq(model4,
 # use_coefs = TRUE, # display coefficients
  #wrap = TRUE, # multiple lines
  #terms_per_line = 2
#)
```

Predicciones

La regresión lineal también se usa muy a menudo con **fines predictivos** . Los intervalos de confianza y predicción para **nuevos datos** se pueden calcular con predict ().

```
# confidence interval for new data
predict(model4,
  new = data.frame(wt = 3, qsec = 18, am = "Manual"),
  interval = "confidence",
  level = .95
)
```

```
       fit      lwr    upr
1 22.87005 21.09811 24.642
```

```
# prediction interval for new data
predict(model4,
  new = data.frame(wt = 3, qsec = 18, am = "Manual"),
  interval = "prediction",
  level = .95
)
```

```
       fit      lwr      upr
1 22.87005 17.53074 28.20937
```

La diferencia entre el intervalo de confianza y el de predicción es que:

- un intervalo **de confianza** da el valor predicho para la **media** deY para una nueva observación, mientras que
- un intervalo **de predicción** da el valor predicho para un **individuo** Y para una nueva observación.

Pruebas de Hipótesis LIneales

```
linearHypothesis(model4, c("wt = 0", "qsec = 0"))
```

```
Linear hypothesis test

Hypothesis:
wt = 0
qsec = 0

Model 1: restricted model
Model 2: mpg ~ wt + qsec + am

  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F   Pr(>F)
1     30 720.90
2     28 169.29  2    551.61 45.618 1.55e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Rechazamos la hipótesis nula y concluimos que al menos uno de 1 y 2 es diferente de 0 (pag-valor = 1.55e-09).

Efecto general de las variables categóricas

Cuando las variables independientes son categóricas con k categorías, la tabla de regresión proporciona k valores:

```
model5 <- lm(mpg ~ vs + am + as.factor(cyl), data = data)
summary(model5)
```

```
Call:
lm(formula = mpg ~ vs + am + as.factor(cyl), data = data)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-6.2821 -1.4402  0.0391  1.8845  6.2179

Coefficients:
```

```
                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)       22.809      2.928   7.789 2.24e-08 ***
vsStraight         1.708      2.235   0.764  0.45135
amManual           3.165      1.528   2.071  0.04805 *
as.factor(cyl)6   -5.399      1.837  -2.938  0.00668 **
as.factor(cyl)8   -8.161      2.892  -2.822  0.00884 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.097 on 27 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7701,    Adjusted R-squared:  0.736
F-statistic: 22.61 on 4 and 27 DF,  p-value: 2.741e-08
```

```r
Anova(model5)
```

```
Anova Table (Type II tests)

Response: mpg
                Sum Sq Df F value  Pr(>F)
vs               5.601  1  0.5841 0.45135
am              41.122  1  4.2886 0.04805 *
as.factor(cyl)  94.591  2  4.9324 0.01493 *
Residuals      258.895 27
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Interacción

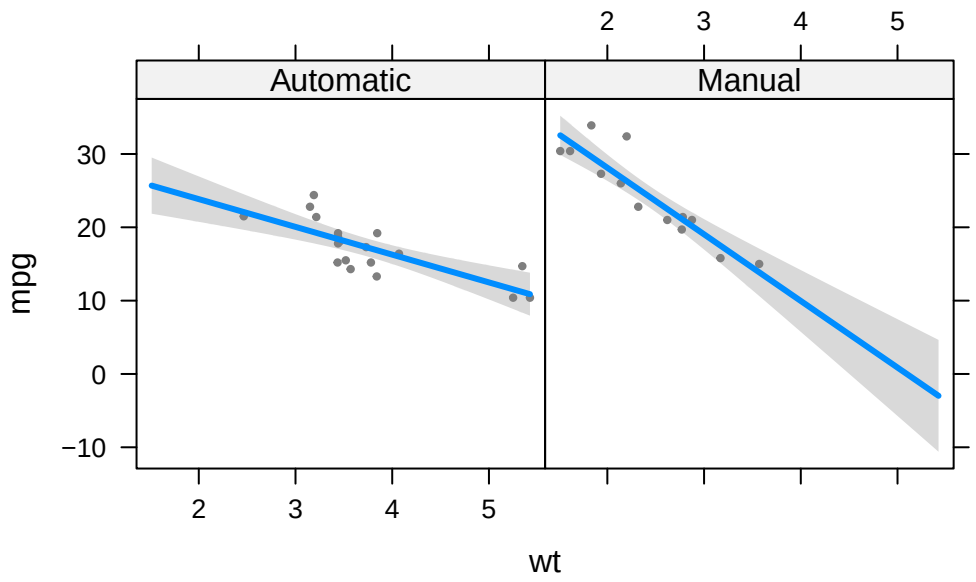
Existe un efecto **de interacción** entre los factores A y B **si el efecto del factor A sobre la respuesta depende del nivel que tome el factor** B.

```r
model6 <- lm(mpg ~ wt + am + wt:am, data = data)

# Or in a shorter way:
model6 <- lm(mpg ~ wt * am, data = data)

summary(model6)
```

```
Call:
lm(formula = mpg ~ wt * am, data = data)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.6004 -1.5446 -0.5325  0.9012  6.0909

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  31.4161     3.0201  10.402 4.00e-11 ***
wt           -3.7859     0.7856  -4.819 4.55e-05 ***
amManual     14.8784     4.2640   3.489  0.00162 **
wt:amManual  -5.2984     1.4447  -3.667  0.00102 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.591 on 28 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.833, Adjusted R-squared:  0.8151
F-statistic: 46.57 on 3 and 28 DF,  p-value: 5.209e-11
```

La forma más fácil de manejar la interacción es visualizar la relación para cada nivel de la variable categórica:

```r
visreg(model6, "wt", by = "am")
```



La relación entre el peso y las millas/galón es más fuerte (la pendiente es más pronunciada) para los automóviles con transmisión manual en comparación con los automóviles con transmisión automática.