

可转债定价模型理论概述

2017年9月20日

投资要点

- ❖ 完善的可转债定价模型，能够为投资者的投资行为提供有力的参考，同时为可转债的上市价格提供有价值的论证。因此我们将在基础研究系列中专门开辟一个子系列探讨理论定价的来龙去脉，本专题将首先聚焦于定价模型的理论基础。
- ❖ **可转债定价的发展历史。**按定价思路划分，可转债定价可以分为整体定价法与成分定价法。按定价技术划分，可以分为解析解法、有限差分法、二叉树法、蒙特卡罗法。按风险因子划分，可以分为基于公司价值的定价、基于股票价格的定价。
- ❖ **定价思路。成分定价法：**思想是将可转债价值拆解为债底价值与期权价值。**整体定价法：**思想是直接以可转债整体作为定价对象。**成分定价法适合为可分离转债定价，整体定价法适合为不可分离的普通转债定价。**
- ❖ **定价技术——关系比较。**非数值算法包括解析解法，数值算法包括有限差分法、二叉树法、蒙特卡罗法。**数值算法的关系：**二叉树法与有限差分法在概念上非常类似，有限差分法可以看作是二叉树法的推广和一般化，两者均是从后向前的定价思路。蒙特卡罗法不同于二叉树法与有限差分法，采用的是从前向后的定价思路。
- ❖ **定价技术—优缺点比较。****解析解法：**优点是（1）非数值算法，操作简单。（2）运算效率最高。**缺点是**计算精度最差，具体原因是（1）解析解能够考虑的因素有限，对每部分期权定价不精确。（2）忽略了期权之间的联系。**有限差分法：**优点是（1）能够解决提前执行问题。（2）在数值算法里运算效率和运算精度最高。**缺点是**（1）不适合解决路径依赖问题。（2）涉及较多矩阵运算，不直观，在实务中应用较少。**二叉树法：**优点是（1）能够解决提前执行问题。（2）相对有限差分法更直观，在实务中应用更广泛。**缺点是**（1）不适合解决路径依赖问题。（2）算法优化空间有限，效率和精度低于有限差分法。**蒙特卡罗法：**优点是能够解决复杂的路径依赖问题，灵活性在所有数值算法里最高。**缺点是**（1）运算效率在所有数值算法里最差。（2）较难解决提前执行问题。
- ❖ **风险因子。基于公司价值的定价：**优点是能够将违约考虑进定价模型的边界条件，从而更精确的刻画可转债的信用风险。**缺点是**公司价值难以获得，相应的也难以获得公司价值的波动率。**基于股票价格的定价：**优点是股票价格、股票波动率更容易获得，实用性更强。**缺点是**无法将违约考虑进定价模型的边界条件，只能简单通过信用利差衡量信用风险。
- ❖ **可转债具体定价方法介绍。**二叉树法方面，我们详细介绍了不包含信用风险的二叉树模型和考虑信用风险的 Tsiveriotis 和 Fernandes (1998) 模型。其中，后者将可转债分为债权部分和股权部分，债权部分用包含信用风险的利率贴现，股权部分用无风险利率贴现。通过区别对待，模型较好的解决了简单使用放大的无风险利率作为贴现率衡量信用风险的不一致性。**蒙特卡罗法方面，**我们详细介绍了将可转债期权视为欧式期权的郑振龙、林海 (2004) 模型和将可转债期权视为美式期权的 LSM 模型。计算思路是先将触发下修条款路径的转股价下修，再分别计算赎回路径和非赎回路径上的转债价值，最后将所有路径的结果取平均。LSM 模型则在非赎回路径上引入了 Longstaff 和 Schwartz (2001) 方法以解决提前执行问题。



中信证券研究部

联系人：明明

电话：010-60837202

邮件：mingming@citics.com

余经纬

电话：010-60836514

邮件：yujingwei@citics.com

执业证书编号：S1010517070005

相关研究

1. 可转债基础研究系列之十：股性估值的表与里……2017-08-25
2. 转债基础研究系列之九：关于转债负溢价套利的一切……2017-08-01
3. 转债基础研究系列之八：基于资产轮动的视角……2017-07-19
4. 转债基础研究系列之七：变与不变——转债发行新机制初探……2017-06-14
5. 转债基础研究系列之六：知往鉴今：什么是转债债性估值与底部……2017-05-23
6. 转债基础研究系列之五：什么是抢权？我们需要怎样的抢权……2017-04-25
7. 转债基础研究系列之四：转股价下修与提前赎回条款对转债价格的冲击路径解析……2017-04-05
8. 转债基础研究系列之三：转债生命路径与转股价条款全解……2017-03-20
9. 可转债专题：转债基础研究系列——转债监管变革的三生三世……2017-02-27
10. 可转债专题：转债基础研究系列——供给冲击的前世今生全解……2017-02-15

目录

可转债定价发展史	1
成分定价与整体定价两类思路	1
多种定价技术实用性有别	2
定价依赖于风险因子的运动	4
可转债定价方法详解	5
符号说明	5
二叉树法	6
蒙特卡洛法	8
参考文献	12

插图目录

图 1: 不包含信用风险的二叉树模型实现步骤	6
图 2: TF98 模型实现步骤	7
图 3: ZL 模型实现步骤	9
图 4: LSM 模型实现步骤	11

表格目录

表 1: 定价思路的优缺点比较	1
表 2: 定价技术的优缺点比较	4
表 3: 风险因子的优缺点比较	5
表 4: 符号说明	5

由于可转债条款的复杂性，能否为可转债实现理论上的精确定价成为市场长期以来关注的焦点问题。完善的可转债定价模型，能够为投资者的投资行为提供有力的参考，同时为可转债的上市价格提供有价值的论证。因此我们将在基础研究系列中专门开辟一个子系列探讨理论定价的来龙去脉，本专题将首先聚焦于定价模型的理论基础。

可转债定价发展史

可转债可以看作债券与期权的组合，由于期权定价在可转债定价中显得尤为重要，故可转债定价理论在 1973 年经典期权定价理论问世后慢慢发展起来，Ingersoll（1977）在这方面做出了开创性的研究。具体来看，按定价思路划分，可转债定价可以分为整体定价法与成分定价法。按定价技术划分，可以分为解析解法、有限差分法、二叉树法、蒙特卡罗法。按风险因子划分，可以分为基于公司价值的定价、基于股票价格的定价。

成分定价与整体定价两类思路

在研究可转债定价问题时，我们需要首先明确是对可转债整体进行定价，还是将可转债分解为债底和期权两个部分分别进行定价。就理论而言前者称为整体定价法，后者称为成分定价法。

成分定价法将可转债价值拆解为债底价值与期权价值之和。债底计算不存在难度，期权价值直接借助已有的期权定价理论计算，主要包括 Black-Scholes 公式、二叉树法、有限差分法、蒙特卡罗法等。**整体定价法的思想则是直接以可转债整体作为定价对象。**定价依然依托期权定价理论，但不对债底部分和期权部分进行区分，且需要进一步考虑债券的信用风险、利率条款等各方面影响因素。

成分定价法与整体定价法的连接点是 Ingersoll（1977）的研究。Ingersoll 采用的是整体定价法，但在特定假设下，得出了整体定价法与成分定价法结果相等的结论。具体来看，Ingersoll 结合 Black-Scholes 模型构造可转债价格的偏微分方程，并利用无套利原理得到偏微分方程的边界条件。模型假设为可转债不支付现金股利、转债利息部分是贴现支付的，因此得到偏微分方程的解析解，并据此证明在这种假设下可转债价格可以被分解为普通贴现债券价格与认股权证价格之和减去赎回期权价格。

但上述假设忽略了期权的美式特征，在现实中很难成立。成分定价法把转股期权、赎回期权、回售期权看作是相互独立的，忽略了它们之间的相互作用。Ho 和 Pfeffer（1996）的研究表明，这种忽略容易造成较大的定价偏差。

基于上述原因，在转债定价的发展历史中，绝大部分研究采用的是整体定价法，成分定价法仅能视作一种粗略的简化。在使用整体定价法时，由于很难得到解析解，故通常需要借助二叉树法、有限差分法、蒙特卡罗法等数值解法。**以下我们对二叉树法、有限差分法、蒙特卡罗法的介绍均是基于可转债整体的定价方法，而不是只针对期权部分进行定价。**

综合上述分析，我们将两种定价思路的优缺点进行比较，具体如表 1 所示：

表 1：定价思路的优缺点比较

定价方法	优点	缺点
整体定价法	将可转债价值视为一个整体，符合普通转债不可分离的特征	通常没有解析解，计算相对复杂
成分定价法	1、适合为可分离转债定价 2、可以利用解析解粗略的表达每一部分期权的价值，操作简单	忽略了内嵌期权的相互作用，不适合为不可分离的普通转债定价

资料来源：中信证券研究部

多种定价技术实用性有别

在讨论可转债定价技术之前，我们需要先对期权定价的历史进行回归。期权定价的方法主要包括 Black-Scholes 公式、二叉树法、有限差分法、蒙特卡洛法。其中 Black-Scholes 公式属于解析方法，由 Black 和 Scholes 在 1973 年提出。二叉树法、有限差分法、蒙特卡洛法属于数值解法，其中二叉树法由 Cox、Ross、Rubinstein 在 1979 年提出，有限差分法由 Brennan 和 Schwartz 在 1977 年引入期权定价，蒙特卡洛法由 Boyle 在 1977 年引入期权定价。

可转债定价技术是在期权定价技术的基础上发展起来的。Ingersoll（1977）由于模型假设的缘故得到了可转债的解析解，Brennan 和 Schwartz 同年将有限差分法应用到可转债定价中，二叉树法的出现进一步扩充了可转债的定价技术。蒙特卡洛法则是在 Longstaff 和 Schwartz（2001）较好的解决美式期权定价问题后才较为普遍的应用到可转债定价中。

解析解法

解析解法指通过解析表达式对可转债进行定价的方法。如果不考虑赎回期权、回售期权，解析解法的公式通常为：

$$\text{可转债价值} = \text{转股期权部分价值} + \text{债权部分价值}$$

$$\text{转股期权部分价值} = C \cdot \frac{100}{X}, \text{ 债权部分价值} = \sum \frac{\text{coupon}_i}{(1+r)^{t_i}}$$

$$C = S \cdot N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{[\ln(S/X) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T]}{\sigma\sqrt{T}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

其中 X 表示转股价，S 表示正股价，σ 表示正股年化波动率，r 表示年化无风险利率。采用同样的方式，可以用 Black-Scholes 公式为赎回期权、回售期权定价。综合考虑赎回期权、回售期权后的解析解公式为：可转债价值=普通债券价值+转股期权价值(看涨期权)-发行人赎回期权价值(看涨期权)+投资者回售期权价值(看跌期权)。

上述方法的优点是操作简单、运行效率极快，但同样存在较明显的缺陷。一是属于成分定价的思路，忽略了期权之间的联系。二是解析解很难包含股利发放、提前执行、路径依赖等特征，使每项期权的估计不够精确。

为了规避上述缺点，另有学者从其他角度拆借可转债期权得到解析解。比如，周其源、吴冲锋、刘海龙（2009）不再用普通期权，而是用奇异期权对可转债价值进行拆借。具体的，可转债被分解为一种与之对应的普通贴现债券，两种立即支付型规则美式二值买权、一种规则上敲出买权和一种延迟支付型规则美式二值买权，并得到上述 4 种奇异期权的解析表达式。通过与蒙特卡罗法的结论对比，证实该方法有较高的定价效率。但该方法没有考虑回售条款，且难以考虑债息、锁定期、信用风险等情况。

有限差分法

在 Ingersoll（1977）的研究中，由于模型假设过于简化，得到了偏微分方程的解析解。在之后的研究中，由于进一步考虑了定期付息、股票分红、回售等情形，导致偏微分方程不再有解析解，需要借助于数值解。故求解此类模型通常借助于有限差分法或二叉树法，而有限差分法在学术论文中则有更普遍的应用。

具体来看，假设股票价格服从如下的几何布朗运动：

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dz_t$$

其中 dz_t 为 Gauss-Wiener 过程，则根据 Black-Scholes 偏微分方程，可转债价值 P 满足如下的偏微分方程：

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} = rP$$

在此基础上，进一步给出可转债价值 P 需要满足的边界条件。基于偏微分方程和边界条件即可利用有限差分法求解可转债价值。具体而言，有限差分法的核心思想是对导数进行离散化，把上述偏微分方程转化为差分方程，然后通过迭代法进行求解。根据对导数差分方式的不同，又分为显示差分法和隐式差分法。显示差分法工作量小，易于应用，但稳定性较差，可能不会收敛于偏微分方程的理论解；隐式差分法的收敛稳定性则更好。

由于可转债的偏微分方程与 Black-Scholes 偏微分方程相同，故在实际应用中区别主要在于对边界条件的处理。由于在数学和数值分析文献中有很多帮助改进有限差分法的算法，使其相对二叉树法运算速度能够更加迅速，运算结果更加精确。二叉树法的灵活性则差于有限差分法，因此在学术论文中有限差分法得到了更广泛的应用。

二叉树法

二叉树法也是求解偏微分方程的一种数值算法。该方法只需要利用边界条件，不需要使用偏微分方程，但可以证明当二叉树步数足够多时（一般为大于 200 步），二叉树模型的解会收敛于 Black-Scholes 偏微分方程的解。从某种意义上看，有限差分法可以看作是二叉树法的推广和一般化，两者均是从后向前的定价思路，从而能更好的解决提前执行的美式期权问题，但相应的难以解决路径依赖期权的问题。

与有限差分法相比，二叉树法的优点在于更简单直观、容易实现，因此在金融实务中得到了更广泛的应用。在后文中，我们将对基于二叉树的可转债定价方法进行详细的介绍。

基于蒙特卡洛法的定价

蒙特卡洛法是期权定价的一种重要方法。虽然蒙特卡洛法可以很好的解决路径依赖的问题，但采用的是从前向后推进的方式，与美式衍生品从后向前推进的最优执行策略相矛盾，故在相当常一段时间内认为只适合解决类欧式期权的定价问题。而可转债的内嵌期权通常被认为是美式的，故早期应用蒙特卡洛方法进行可转债定价的研究较少。

Longstaff 和 Schwartz（2001）发明的 LSM 模型很好的解决了美式期权的蒙特卡洛定价问题，该方法易于实施，得到了广泛推广。之后 LSM 模型也引入了可转债定价的研究中，代表性的研究有 C Wide 和 A Kind（2005）等。但解决美式期权问题后，蒙特卡洛法依然存在运算速度较慢的问题，其效率与二叉树法和有限差分法存在较大差距。在后文中，我们将对基于蒙特卡洛法的可转债定价方法进行详细介绍。

下修条款的处理技术

上述定价技术均是基于国外的研究。相对于国外，国内可转债的一个重要不同是下修条款的重要性不可忽视。在这方面具有代表性的研究是郑振龙、林海（2004）（以下简称 ZL 模型）。我们在《转债基础研究系列之四：转股价下修与提前赎回条款对转债价格的冲击路径解析》中已经论证转发行公司只有在面临回售压力时才会调低转股价。假设下修后的转股价为 X_t' ，应满足：

$$P = [S_t N(d_1) - X'_t e^{-r(T-t)} N(d_2)] \cdot \frac{100}{X'_t} + (100 + I) e^{-r(T-t)}$$

$$d_1 = \frac{[\ln(S_t/X'_t) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)]}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

其中 t 为当前触发回售条款的时刻， T 为到期时刻； I 为从 t 到 T 时刻尚未支付的利息。

综合上述分析，我们将定价技术的优缺点进行比较，具体如表 2 所示：

表 2：定价技术的优缺点比较

定价方法	优点	缺点
解析解法	1、非数值算法，操作简单 2、运算效率最高	1、解析解能够考虑的因素有限，对每部分期权定价不精确 2、忽略了期权之间的联系，进一步带来误差
有限差分法	1、能够解决提前执行问题 2、在数值算法里运算效率和运算精度最高	1、不适合解决路径依赖问题 2、涉及较多矩阵运算，不直观，在实务中应用较少
二叉树法	1、能够解决提前执行问题 2、相对有限差分法更直观，在实务中应用更广泛	1、不适合解决路径依赖问题 2、算法优化空间有限，效率和精度低于有限差分法
蒙特卡洛法	能够解决复杂的路径依赖问题，灵活性在所有数值算法里最高	1、运算效率在所有数值算法里最差 2、较难解决提前执行问题，LSM 方法相对复杂

资料来源：中信证券研究部

定价依赖于风险因子的运动

在为可转债定价时，我们需要刻画可转债价格的运动，价格的运动依赖于基础风险因子的运动。可转债定价常用的风险因子包括两大类：公司价值和股票价格。

基于公司价值的定价

早期可转债定价的风险因子多为公司价值。采用公司价值而不是股价描述可转债，**主要是因为理论上用公司价值可以更合理的刻画可转债的边界条件**。由于可以包含进公司破产等情形，从而更容易描述可转债的信用风险。但由于公司价值难以直接衡量，故该方法实用性较差，不是可转债定价的主流。

在基于公司价值的定价方法基础上，如果将利率作为一个风险因素而不是常数，就衍生出了基于公司价值的**双因素定价方法**。对利率的建模方式通常有 Ho-Lee 模型、CIR 模型等。

基于股票价格的定价

McConnell 与 Schwartz（1986）首先将股票作为风险因子衡量可转债的价值，**之后基于股票价格的定价取代基于公司价值的定价成为可转债定价的主流**。与基于公司价值的定价方法相比，由于股价可以直接观测，故其实用性大大增强。

而与基于公司价值的定价方法相比，**基于股票价格的定价方法最大的问题是难以将信用风险考虑进可转债定价的边界条件**。根据 Kang 和 Lee（1996）、Hamilton（2001）的研究，在进行可转债定价时，信用风险是不可忽略的。但因为股票价格不能为负，这就排除了未到期破产和到期违约的可能性。故在实际中为了考虑信用风险，通常做法是在无风险利率上加入信用利差作为贴现率。

为了消除简单使用放大的无风险利率作为贴现率衡量信用风险的不一致性，出现了很多相关的研究。**代表性的是 Goldman Sachs（1994）**。Goldman 采用二叉树对可转债进行定价。这一方法假设当下一个节点的股价远远高于转换价格的时候，期权处于深度实值状态，使用无风险利率进行贴现；当下一个节点的股价远远低于转换价格的时候，期权处于深度虚

值状态，投资者相当于持有具有风险性的公司普通债券，所以贴现率要加入信用风险利差。但该方法有一个参数是股票借出利率，在我国尚不普及，故模型使用存在一定的局限性。

另一个代表性的研究则是 Tsiveriotis 和 Fernandes（1998）（以下简称 TF98 模型）。该方法将可转债分为债权部分和股权部分，债权部分会遭遇违约风险；股权部分则由于发行者能一直发行或交易自己的股票，违约风险是 0。通过区别对待，模型也部分解决了信用利差的内在不一致问题。TF98 模型最初采用有限差分法求解，Hull（2000）则利用二叉树方法描述了 TF98 模型。

与基于公司价值的定价方法类似，基于股票价格的定价方法也通过将利率作为风险因素衍生出了双因素模型。进一步，由于基于股票价格的定价方法还使用了信用利差这一参数，如果假设这一参数不为常数，就衍生出了三因素模型，代表性的研究是 Davis 和 Lischka（2002）。

综合上述分析，我们将不同风险因子的优缺点进行比较，具体如表 3 所示：

表 3：风险因子的优缺点比较

风险因子	优点	缺点
公司价值	能够将违约考虑进定价模型的边界条件，从而更精确的刻画可转债的信用风险	公司价值难以获得，相应的也难以获得公司价值的波动率
股票价格	股票价格、股票波动率更容易获得，实用性更强	无法将违约考虑进定价模型的边界条件，只能简单通过信用利差衡量信用风险

资料来源：中信证券研究部

可转债定价方法详解

综合考虑可转债的定价方法。在定价思路上我们建议使用整体定价法，不使用成分定价法的原因是其不适合为不可分离转债定价。在定价方法上我们建议使用二叉树方法及蒙特卡洛法。不使用解析解法的原因是定价误差较大。不使用有限差分法的原因是该方法没有二叉树法直观，且其与二叉树法能解决的是同一类问题，优势主要在于速度更快、精度更高。但在实务中，我们通过实践发现二叉树法已经拥有了较高的运行速度和精度，故无需使用有限差分法即可实现合理定价。在风险因子的选择上，我们建议使用基于股票价格的定价，因为股票价格更容易获得，且该方法是目前的主流。

另一方面，在蒙特卡洛法中我们建议采用郑振龙、林海（2004）的思想进行转股价下修。由于转股价下修带有路径依赖特性，不适合二叉树法从后向前的定价方式，故在二叉树法中只考虑回售条款而不考虑下修条款。

下面，我们将对二叉树法和蒙特卡洛法进行具体的介绍。在二叉树法中，我们将介绍不包含信用风险的二叉树模型、考虑信用风险的 TF98 模型；在蒙特卡洛法中，我们将介绍 ZL 模型、LSM 模型。

符号说明

表 4：符号说明

符号名称	符号解释	符号名称	符号解释
T	可转债剩余到期时间	B_c	到期赎回价（不包含最后一期利息）
dt	$dt = \frac{T}{2nn}$ ，表示单位时间间隔	r	无风险利率
σ	股票年化波动率	C	条件赎回价格
X	可转债执行价	P	条件回售价格
n	$n = \frac{100}{x}$ ，表示可转债转换比例		

资料来源：中信证券研究部

二叉树法

不包含信用风险的二叉树模型

图 1：不包含信用风险的二叉树模型实现步骤

01 模拟二叉树股价路径

在 dt 的时间内，假设股价只能运动到两个价格： $S \times u$ ， $S \times d$ 。如果股价服从几何布朗运动、 $u \times d = 1$ ，则可以推导出 $u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$ ， $d = 1/u$ ，其中 σ 为股票年化波动率。据此可以得到二叉树每个节点的股票价格，可以以下列表格表示：

S	Su	Su^2	Su^3	
	Sd	Sud	Sud^2
		Sd^2	Sd^3	

将表格的行数表示为 i ，列数表示为 j ，即可定位每个节点的位置。比如当 $i=2$ ， $j=3$ 时节点对应的股票价格为 $S(2, 3)=Sud$ 。

02 计算二叉树末端可转债的价值

二叉树末端价值的公式为： $V(S, T) = \max(nS, B_c)$

解释：如果到期日可转债转换价值大于到期赎回价，则可转债价值等于转换价值，否则等于到期赎回价值。

03 推算之前节点的价值

在已知第 $j+1$ 列的可转债价值后，第 j 列第 i 行的可转债的价值可以由下式计算：

$$V(i, j) = \exp(-r \cdot dt) [p \cdot V(i, j+1) + (1-p) \cdot V(i+1, j+1) + \text{Interest}]$$

其中 p 为风险中性概率， $p = \frac{e^{r \cdot dt} - d}{u - d}$ ；Interest表示在第 j 期至第 $j+1$ 期获得的利息。

04 判断节点的边界条件

美式期权调整

在转股期内，如果 $V(i, j) < nS$ ，则 $V(i, j) = nS$ 。

解释：如果在某个节点算出的可转债价值低于转换价值，则投资者会提前转股，此时可转债的价值就是转换价值。

赎回权调整

在赎回期内，如果在某个节点股价满足赎回条件， $V(i, j) > C$ ，则有 $V(i, j) = nS$ 。

解释：如果赎回条件被触发且可转债价值大于赎回价值，在赎回威胁下投资者将提前转股，此时可转债价值即为转换价值。

回售权调整

在回售期内，如果在某个节点股价满足回售条件， $V(i, j) < P$ ，则有 $V(i, j) = P$ 。

解释：如果回售条件被触发且可转债价值低于回售价值，投资者会选择回售，此时可转债价值等于回售价值。

05 重复上述步骤，推算到 $V(1,1)$ 节点

已知第 $j+1$ 列的可转债价值，经过第4步调整的第 j 列可转债价值才是真正的可转债价值。据此可以继续推算第 $j-1$ 列各行可转债的价值，依次类推。最后得到的 $V(1, 1)$ 节点的价值即为当前可转债的价值。

资料来源：Wind，中信证券研究部

考虑信用风险的 TF98 模型

图 2：TF98 模型实现步骤

01 模拟二叉树股价路径

与普通二叉树方法相同。

02 计算二叉树末端可转债的价值

假设 $V(S, T) = B(S, T) + U(S, T)$ 。其中 $B(S, T)$ 表示可转债债权部分价值， $U(S, T)$ 表示可转债股权部分价值。

在二叉树末端，如果 $nS > B_c$ ，则 $U(S, T) = nS$ ， $B(S, T) = 0$ ；如果 $nS < B_c$ ，则 $U(S, T) = 0$ ， $B(S, T) = B_c$ 。

解释：如果转换价值大于到期赎回价格，可转债将行权，此时股权部分价值等于转换价值，债权部分价值等于 0；如果转换价值小于到期赎回价格，可转债将放弃行权，此时股权部分价值等于 0，债权部分价值等于到期赎回价格。

03 推算之前节点的价值

在转股期内

$$B(i, j) = \exp[-(r + rc) \cdot dt] [p \cdot B(i, j + 1) + (1 - p) \cdot B(i + 1, j + 1) + \text{Interest}]$$

$$U(i, j) = \exp(-r \cdot dt) [p \cdot U(i, j + 1) + (1 - p) \cdot U(i + 1, j + 1)]$$

$$V(i, j) = B(i, j) + U(i, j)$$

解释：

债权部分的价值等于下一期的风险中性期望加利息再进行贴现，贴现率考虑信用风险，信用利差为 rc 。

股权部分的价值等于下一期风险中性期望的贴现，没有信用风险，直接用无风险利率贴现。

通过对股权部分及债权部分区别对待，消除了简单使用信用利差放大贴现率带来的不一致性。

在非转股期内

$$U(i, j) = 0$$

$$V(i, j) = \exp[-(r + rc) \cdot dt] [p \cdot V(i, j + 1) + (1 - p) \cdot V(i + 1, j + 1) + \text{Interest}]$$

$$B(i, j) = V(i, j)$$

解释：由于在非转股期内可转债不能转股，故股权部分价值为 0，此时转债价值与债权部分价值相等，统一使用带信用利差的风险利率贴现。

04 判断节点的边界条件

美式期权调整

在转股期内，如果 $V(i, j) < nS$ ，则 $U(i, j) = nS$ ， $B(i, j) = 0$ ， $V(i, j) = U(i, j) + B(i, j)$ 。

赎回权调整

在赎回期内，如果在某个节点股价满足赎回条件且 $V(i, j) > C$ ，则 $U(i, j) = nS$ ， $B(i, j) = 0$ ， $V(i, j) = U(i, j) + B(i, j)$ 。

回售权调整

在回收期内，如果在某个节点股价满足回售条件且 $V(i, j) < P$ ，则 $U(i, j) = 0$ ， $B(i, j) = P$ ， $V(i, j) = U(i, j) + B(i, j)$ 。

05 重复上述步骤，推算到 $V(1, 1)$ 节点

按上述步骤推算得到的 $V(1, 1)$ 节点价值即为转债的当前价值。

资料来源：Wind，中信证券研究部

蒙特卡洛法

ZL 模型

ZL 模型思想

ZL 模型由郑振龙、林海（2004）提出。模型提出了关于中国可转债市场的几条推论：

推论 1：中国可转债发行公司的最优决策是尽可能早地、以尽可能高的转股价格促使投资者将可转债转成公司股票。

推论 2：在中国特殊的制度背景下，可转债中股性占了绝大部分，而且中国的信用风险溢价不高，因此将可转债的股性和债性统一起来，全部使用无风险利率进行贴现，并不会对可转债的价值造成很大的影响。

推论 3：因为中国可转债发行条款均规定转股价将根据公司股票的股利政策进行相应的调整，可转债中的转股权不会被提前执行，它实际上是一个欧式看涨期权。

推论 4：公司会选择尽可能短的赎回期。

推论 5：可转债发行公司只有在面临回售压力时才会调低转股价，调低幅度也仅以使得可转债价值稍微超过回售价格为限。

根据推论 1-5，在可转债的生命周期内，**如果满足回售条件，发行人将修正转股价，使投资者不会回售；除了满足赎回条件使投资者提前转股以外，可转债将被持有至到期，可转债中的转股权被视为欧式期权。**故下修的转股价 X_t^L 就是使得 t 时刻回售价值等于继续持有转债价值的转股价，而 t 时刻继续持有转债的价值就是用 B-S 公式算出的欧式期权价值乘以转换比例，再加上纯债部分的价值。

ZL 模型实现步骤

图 3：ZL 模型实现步骤

01 模拟股价路径

假设总共模拟10000条股价路径，每条股价路径有 $N=200$ 个时间点， $dt = \frac{T}{200}$ 。假定股价服从几何布朗运动，每条路径上股价的运动轨迹为：

$$S_{N+1} = S_N \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma \sqrt{dt} \cdot randn \right)$$

其中 $randn$ 为服从标准正态分布的随机数。模拟后的路径可以表示成下表：

路径	N=1	N=2	...	N=200
1	$S_{1,1}$	$S_{1,2}$...	$S_{1,200}$
2	$S_{2,1}$	$S_{2,2}$...	$S_{2,200}$
⋮			⋮	
10000	$S_{10000,1}$	$S_{10000,2}$...	$S_{10000,200}$

02 在每条路径上寻找触发下修条款的时间点

首先，寻找在回售期内触发回售条件（比如 $S_t < 0.7X$ ）的时间节点，进而计算继续持有可转债的价值 V_t ：

$$V_t = [S_t N(d_1) - X_t e^{-r(T-t)} N(d_2)] \cdot \frac{100}{X_t} + (100 + I) e^{-r(T-t)}$$

如果 $V_t < P$ ，则按第一部分介绍的方法计算下修后的转股价 X'_t ，进而用 X'_t 覆盖该时间节点及以后的原转股价。

03 计算赎回路径上的转债价值

简化处理说明

（1）满足赎回条件后投资者一定会选择转股。

解释：由于赎回条款是促转股的手段，故在满足赎回条件时，发行人的赎回价通常低于转换价值，投资者不会选择赎回，而会选择转股。

（2）满足赎回条件时发行人一定会行使赎回权。

解释：根据ZL模型，如果赎回条件在T时刻触发，发行人在T+M时刻才能实施赎回决策，故发行人要在中间这段时间对股价做出预期，如果预测T+M时刻的转换价值大于赎回价格才会行权。但结合国内现状，满足赎回条件时发行人基本都会行权，故我们进行简化处理。

计算方法

在满足赎回条件的路径上，可转债的价值可以表示为：

$$V = \exp(-rt_c) (nS_{t_c} + Interest)$$

其中 t_c 表示满足赎回条件的第一个时间节点， $Interest$ 表示截止到 t_c 时刻获得的利息。

解释：在赎回触发的路径上，可转债的价值等于赎回时刻的转换价值加已获利息，再贴现到0时刻。

04 计算非赎回路径上的转债价值

在非赎回路径上投资者会将转债持有至到期，故可转债的价值可以表示为：

$$V = \exp(-rT) [\max(B_c, nS_T) + Interest]$$

其中 $Interest$ 表示持有至到期获得的利息。

解释：在非赎回路径上，可转债价值等于到期赎回价与转换价值的较大者加已获利息，再贴现到0时刻。

05 计算可转债当前的理论价值

在第四步后，已经可以得到所有路径上可转债在0时刻的价值。将1万条路径0时刻的价值取平均值，即为可转债当前的理论价值。

资料来源：Wind，中信证券研究部

LSM 模型

LSM 模型思想

根据 Z-L 模型的假设，由于可转债转股价会根据股利政策进行修正，在非赎回路径上可转债不会提前行权，期权可以作为欧式期权看待。但在现实中可转债会提前行权，应当被看作美式期权，故上述假设与实际有所不符。基于此，我们使用前文介绍的 LSM 模型对 ZL 模型进行修正。在思想上，LSM 模型假设非赎回路径上的可转债可以在转换期内随时行权，其他处理方法与 ZL 模型相同。

具体来看，在蒙特卡洛每个时间节点上，投资者知道瞬间行权的价值，却不知道继续持有转债的价值。LSM 方法的思想在于将期权的持有价值 F_t 看作当前状态变量 S_t 的线性组合：

$$F_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L_i(S_t)$$

其中常见的线性组合形式是 $F_t = a_0 + a_1 S_t + a_2 S_t^2$ 。具体到可转债，在 t 时刻瞬时履约价值大于 0 的样本中，以 $t+1$ 时刻贴现的现金流作为因变量，以 t 时刻的转换价值作为自变量，进行最小二乘回归得到参数估计，代入 t 时刻的转换价值即可得到 t 时刻持有价值值的最佳线性估计。

在得到持有价值后，通过比较持有价值与转换价值，即可得到投资者在每个时间点上的决策。基于此，即可得到转债的当前理论价值。

LSM 模型实现步骤

图 4：LSM 模型实现步骤

01 模拟股价路径

与ZL模型相同。

02 在每条路径上寻找触发下修条款的时间点

与ZL模型相同。

03 计算赎回路径上的转债价值

与ZL模型相同。

04 计算非赎回路径上的转债价值——LSM方法

第一步

在最后一期 $N=200$ ，构造现金流向量Cashflow及日期向量Time：

$$\text{Cashflow}(i) = \max\left\{\frac{100}{X_N} \cdot S_N(i), B_c\right\}$$

$$\text{Time}(i) = N$$

其中 i 表示第 i 条非赎回路径。

第二步

在 $N-1$ 期，找到股价 S_{N-1} 大于转股价 X_{N-1} 的路径，定义这些路径的集合为 F 。据此构造向量 Z ：

$$Z(j) = \frac{100}{X_{N-1}} \cdot S_{N-1}(j)$$

同时利用Cashflow向量构造向量 Y ：

$$Y(j) = \exp(-rdt) [\text{Cashflow}(j) + \text{Interest}]$$

其中 $j \in F$ ， dt 表示第 $N-1$ 期与第 N 期的时间间隔。

第三步

进行如下最小二乘回归：

$$Y = a + bZ + cZ^2$$

据此得到最小二乘估计量 $E(Y|Z)$ ，作为 $N-1$ 时期可转债的持有价值。

第四步

对任意 $j \in F$ ，比较转换价值 $Z(j)$ 与持有价值 $E(Y|Z)(j)$ 的大小：

1、如果 $Z(j) > E(Y|Z)(j)$ ，则 $\text{Cashflow}(j) = Z(j)$ ， $\text{Time}(j) = N - 1$ 。

解释：在该条件下，投资者会选择在第 $N-1$ 期行权并得到现金流，而不会等到第 N 期再行权，故覆盖Cashflow及Time原有取值。

2、如果 $Z(j) \leq E(Y|Z)(j)$ ，则不对Cashflow向量及Time向量进行覆盖。

解释：在该条件下，第 $N-1$ 时期投资者不会行权，依然在第 N 期才得到现金流。

第五步

重复步骤(2)~(4)，不断向前更新Cashflow向量及Time向量，直到到达转股起始点 N_s 。此时Time向量就记录了每条路径上可转债的行权时间点，Cashflow向量则记录了每条路径上行权时的现金流。

第六步

利用Time向量对Cashflow向量进行贴现，并考虑可转债利息部分的价值，最后得到的任意非赎回路径 i 上的可转债价值为：

$$V(i) = \exp[-rdt \cdot \text{Time}(i)] [\text{Cashflow}(i) + \text{Interest}(i)]$$

其中Interest(i)表示投资者将可转债持有到Time(i)期总共获得的利息。

05 计算可转债当前的理论价值

由于已经获得可转债在每条赎回路径和非赎回路径上的价值，取平均即为可转债当前的理论价值。

资料来源：Wind，中信证券研究部

参考文献

- Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of political economy, 1973, 81(3): 637-654.
- Boyle P P. Options: A montecarlo approach[J]. Journal of financial economics, 1977, 4(3): 323-338.
- Brennan M J, Schwartz E S. Convertible bonds: Valuation and optimal strategies for call and conversion[J]. The Journal of Finance, 1977, 32(5): 1699-1715.
- Cox J C, Ross S A, Rubinstein M. Option pricing: A simplified approach[J]. Journal of financial Economics, 1979, 7(3): 229-263.
- Davis M, Lischka F R. Convertible bonds with market risk and credit risk[J]. Amslp Studies In Advanced Mathematics, 2002, 26: 45-58.
- Hamilton D T, Stumpp P M, Cantor R. Default and recovery rates of convertible bond issuers: 1970-2000[J]. Moody's Special Comment, 2001.
- Ho T S Y, Pfeffer D M. Convertible bonds: model, value attribution, and analytics[J]. Financial Analysts Journal, 1996, 52(5): 35-44.
- Hull J C. Options, futures, and other derivatives[M]. 4th edition, 2000.
- Ingersoll J E. A contingent-claims valuation of convertible securities[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 4(3): 289-321.
- Kang J K, Lee Y W. The pricing of convertible debt offerings[J]. Journal of Financial Economics, 1996, 41(2): 231-248.
- Longstaff F A, Schwartz E S. Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach[J]. The review of financial studies, 2001, 14(1): 113-147.
- McConnell J, Schwartz E S. LYON taming[J]. The Journal of Finance, 1986, 41(3): 561-576.
- Merton R C, Brennan M J, Schwartz E S. The valuation of American put options[J]. The Journal of Finance, 1977, 32(2): 449-462.
- Sachs G. Valuing convertible bonds as derivatives[J]. Quantitative strategies research notes, 1994, 11(1): 30.
<http://www.emanuelderman.com/writing/entry/valuing-convertible-bonds-as-derivatives>
- Tsiveriotis K, Fernandes C. Valuing convertible bonds with credit risk[J]. The Journal of Fixed Income, 1998, 8(2): 95-102.
- Wilde C, Kind A H. Pricing convertible bonds with Monte Carlo simulation[J]. Available at SSRN 676507, 2005.
- 郑振龙, 林海. 中国可转换债券定价研究[J]. 厦门大学学报(哲学社会科学版), 2004(2):93-99.
- 周其源, 吴冲锋, 刘海龙. 可赎回可转换贴现债券完全拆解定价法[J]. 管理科学学报, 2009, 12(4):135-144.

分析师声明

主要负责撰写本研究报告全部或部分内容的分析师在此声明：(i) 本研究报告所表述的任何观点均精准地反映了上述每位分析师个人对标的证券和发行人的看法；(ii) 该分析师所得报酬的任何组成部分无论是在过去、现在及将来均不会直接或间接地与研究报告所表述的具体建议或观点相联系。

评级说明

投资建议的评级标准	评级	说明
报告中投资建议所涉及的评级分为股票评级和行业评级（另有说明的除外）。评级标准为报告发布日后 6 到 12 个月内的相对市场表现，也即：以报告发布日后的 6 到 12 个月内的公司股价（或行业指数）相对同期相关证券市场代表性指数的涨跌幅作为基准。其中：A 股市场以沪深 300 指数为基准，新三板市场以三板成指（针对协议转让标的）或三板做市指数（针对做市转让标的）为基准；香港市场以摩根士丹利中国指数为基准；美国市场以纳斯达克综合指数或标普 500 指数为基准。	买入	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅 20%以上；
	增持	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅介于 5%~20%之间
	持有	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅介于-10%~5%之间
	卖出	相对同期相关证券市场代表性指数跌幅 10%以上；
	强于大市	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅 10%以上；
	中性	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅介于-10%~10%之间；
	弱于大市	相对同期相关证券市场代表性指数跌幅 10%以上

其他声明

本研究报告由中信证券股份有限公司或其附属机构制作。中信证券股份有限公司及其全球的附属机构、分支机构及联营机构（仅就本研究报告免责条款而言，不含 CLSA group of companies），统称为“中信证券”。

法律主体声明

中国：本研究报告在中华人民共和国（香港、澳门、台湾除外）由中信证券股份有限公司（受中国证券监督管理委员会监管，经营证券业务许可证编号：Z20374000）分发。

新加坡：本研究报告在新加坡由 CLSASingaporePteLtd（公司注册编号：198703750W）分发。作为资本市场经营许可持有人及受豁免的财务顾问，CLSA Singapore Pte Ltd 仅向新加坡《证券及期货法》s.4A（1）定义下的“机构投资者、认可投资者及专业投资者”提供证券服务。根据新加坡《财务顾问法》下《财务顾问（修正）规例（2005）》中关于机构投资者、认可投资者、专业投资者及海外投资者的第 33、34、35 及 36 条的规定，《财务顾问法》第 25、27 及 36 条不适用于 CLSA Singapore Pte Ltd。如对本报告存有疑问，还请联系 CLSA Singapore Pte Ltd（电话：+65 6416 7888）。MCI (P) 033 11 2016。

针对不同司法管辖区的声明

中国：根据中国证券监督管理委员会核发的经营证券业务许可，中信证券股份有限公司的经营经营范围包括证券投资咨询业务。

新加坡：监管法规或交易规则要求对研究报告涉及的实际、潜在或预期的利益冲突进行必要的披露。须予披露的利益冲突可依照相关法律法规要求在特定报告中获得，详细内容请查看 <https://www.clsa.com/disclosures.html>。该等披露内容仅涵盖 CLSA group, CLSA Americas 及 CL Securities Taiwan Co., Ltd 的情况，不涉及中信证券及/或其附属机构的情况。如投资者浏览上述网址时遇到任何困难或需要过往日期的披露信息，请联系 compliance_hk@clsa.com。

美国：本研究报告由中信证券编制。本研究报告在美国由中信证券（CITIC Securities International USA, LLC（下称“CSI-USA”）除外）和 CLSA group of companies（CLSA Americas, LLC（下称“CLSA Americas”）除外）仅向符合美国《1934 年证券交易法》下 15a-6 规则定义且分别与 CSI-USA 和 CLSA Americas 进行交易的主要美国机构投资者“分发”。对身在美国的任何人士发送本研究报告将不被视为对本报告中所评论的证券进行交易的建议或对本报告中所载任何观点的背书。任何从中信证券与 CLSA group of companies 获得本研究报告的接收者如果希望在美国交易本报告中提及的任何证券应当分别联系 CSI-USA 和 CLSA Americas。

英国：本段“英国”声明受英国法律监管并依据英国法律解释。本研究报告在英国须被归为营销文件，它不按《英国金融行为管理手册》所界定、旨在提升投资研究报告独立性的法律要件而撰写，亦不受任何禁止在投资研究报告发布前进行交易的限制。本研究报告在欧盟由 CLSA（UK）发布，该公司由金融行为管理局授权并接受其管理。本研究报告针对《2000 年金融服务和市场法 2005 年（金融推介）令》第 19 条所界定的在投资方面具有专业经验的人士，且涉及到的任何投资活动仅针对此类人士。若您不具备投资的专业经验，请勿依赖本研究报告的内容。

一般性声明

本研究报告对于收件人而言属高度机密，只有收件人才能使用。本研究报告并非意图发送、发布给在当地法律或监管规则下不允许该研究报告发送、发布的人员。本研究报告仅为参考之用，在任何地区均不应被视为出售任何证券或金融工具的要约，或者证券或金融工具交易的要约邀请。中信证券并不因收件人收到本报告而视其为中信证券的客户。本报告所包含的观点及建议并未考虑个别客户的特殊状况、目标或需要，不应被视为对特定客户关于特定证券或金融工具的建议或策略。对于本报告中提及的任何证券或金融工具的分析，本报告的收件人须保持自身的独立判断。

本报告所载资料的来源被认为是可靠的，但中信证券不保证其准确性或完整性。中信证券并不对使用本报告所包含的材料产生的任何直接或间接损失或与此有关的其他损失承担任何责任。本报告提及的任何证券均可能含有重大的风险，可能不易变卖以及不适用所有投资者。本报告所提及的证券或金融工具的价格、价值及收益可能会受汇率影响而波动。过往的业绩并不能代表未来的表现。

本报告所载的资料、观点及预测均反映了中信证券在最初发布该报告日期当日分析师的判断，可以在不发出通知的情况下做出更改，亦可因使用不同假设和标准、采用不同观点和分析方法而与中信证券其它业务部门、单位或附属机构在制作类似的其他材料时所给出的意见不同或者相反。中信证券并不承担提示本报告的收件人注意该等材料的责任。中信证券通过信息隔离墙控制中信证券内部一个或多个领域的信息向中信证券其他领域、单位、集团及其他附属机构的流动。负责撰写本报告的分析师的薪酬由研究部门管理层和中信证券高级管理层全权决定。分析师的薪酬不是基于中信证券投资银行收入而定，但是，分析师的薪酬可能与投行整体收入有关，其中包括投资银行、销售与交易业务。

若中信证券以外的金融机构发送本报告，则由该金融机构为此发送行为承担全部责任。该机构的客户应联系该机构以交易本报告中提及的证券或要求获悉更详细信息。本报告不构成中信证券向发送本报告金融机构之客户提供的投资建议，中信证券以及中信证券的各个高级职员、董事和员工亦不为（前述金融机构之客户）因使用本报告或报告载明的内容产生的直接或间接损失承担任何责任。

未经中信证券事先书面授权，任何人不得以任何目的复制、发送或销售本报告。

中信证券 2017 版权所有。保留一切权利。