channels

Signal EEG : $x_t \in \mathbb{R}^n$

temps

spatial covariance matrix : $\Sigma = E\left(\left(x_t - E(x_t)\right)\left(x_t - E(x_t)\right)^T\right)$

$$X_i = \left[x_{t+T_i}, \dots, x_{t+T_i+T_s-1}\right] \in \mathbb{R}^{n \times T_s}$$

trial

T_s = # sampled time points for the trial

SCM : $P_i = \dfrac{1}{T_s - 1} X_i X_i^T$

(1)

1. Si V est un espace vectoriel de dim finie alors V est une variété riem., d'espace tangent $T_xV \simeq V$ ($\forall x \in V$)

dém : Soit $d = \dim V < +\infty$. Soit $\Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^d$ isomorphisme canonique. Par définition, Φ est un difféo $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $x \in V$. $\forall U_x$ voisinage de x, $\Phi_{|U_x}$ est un difféo de U_x dans $\mathbb{R}^d$ d'image ouverte (puisque $\Phi_{|U_x}$ est surjective) donc V est une variété.

Soit (U_x, φ_x) une carte locale en $x \in V$.

Alors $d\varphi_x : T_xV \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une application linéaire.

donc T_xV est un ev.

Montrons que $d\varphi_x$ est une bijection.

□ Soit $y \in \mathbb{R}^d$ et $\gamma : t \in [0,1] \longmapsto \varphi_x^{-1}(ty)$

(on suppose sans perte de généralité que $\varphi_x(x) = 0$)

on a alors $\gamma(0) = x$ et $d\varphi_x(\dot\gamma(0)) = (\varphi_x \circ \gamma)'(0) = y$

donc $d\varphi_x$ est surjective

□ Soit $u, v \in T_xV$ tq $d\varphi_x(u) = d\varphi_x(v)$

$\exists \gamma, \tilde\gamma : [0,1] \longrightarrow V$ différentiables tq $\gamma(0) = \tilde\gamma(0) = x$ et $u = \dot\gamma(0)$, $v = \dot{\tilde\gamma}(0)$.

$d\varphi_x(u) = (\varphi_x \circ \gamma)'(0)$; $d\varphi_x(v) = (\varphi_x \circ \tilde\gamma)'(0)$

On a $\varphi_x[\gamma(h)] - \varphi_x[\tilde\gamma(h)]$

$= \left[(\varphi_x\circ\gamma)(0) + (\varphi_x\circ\gamma)'(0)[h] + o(\|h\|)\right] - \left[(\varphi_x\circ\tilde\gamma)(0) + (\varphi_x\circ\tilde\gamma)'(0)[h] + o(\|h\|)\right]$

$= o(\|h\|)$

ie $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall 0 \leq h \leq \eta$, $\|\varphi_x(\gamma(h)) - \varphi_x(\tilde\gamma(h))\| \leq \varepsilon \|h\|$

donc $\gamma(h) - \tilde{\gamma}(h) = \varphi_x^{-1}(\varphi_x(\gamma(h))) - \varphi_x^{-1}(\varphi_x(\tilde{\gamma}(h))) = o(\|h\|)$
donc $\dot{\gamma}(0) = \dot{\tilde{\gamma}}(0)$ ie $u = v$ donc $d\varphi_x$ est injective
donc $T_x V$ isomorphe à $\mathbb{R}^d \simeq V$. □

Si U est un ouvert de V et V variété riem alors U est une variété

dém: soit $x \in U$ et O_x voisinage de x dans U.
U est ouvert dans V donc O_x est un voisinage de x dans V. Or V est une variété donc $\exists\, \varphi_x : O_x \to \mathbb{R}^d$ difféo tq $\varphi_x(O_x)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^d$
Ainsi U est une variété.

⊛ $S_n^{++} = \{\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \Sigma = \Sigma^T$ et $x^T \Sigma x > 0 \ \forall x \neq 0\}$
S_n^{++} est un ouvert de S_n : en effet $\varphi : \Sigma \in S_n \mapsto x^T \Sigma x$ est continue et $S_n^{++} = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$.
S_n est un ev donc c'est une variété
donc $\boxed{S_n^{++} \text{ est une variété}}$ avec $T_\Sigma S_n^{++} \simeq T_\Sigma S_n \simeq S_n$.

$$\boxed{T_\Sigma S_n^{++} \simeq S_n}$$

⊛ $\forall \Sigma \in S_n^{++}$, $\exists\, U$ orthogonale et D diagonale tq
$\Sigma = U^T D U$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
$0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$

$\exp(\Sigma) = U^T e^D U$ avec $e^D = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \_\_, e^{\lambda_n})$

$\log(\Sigma) = U^T \log(D) U$ avec $\log(D) = \mathrm{diag}(\log(\lambda_1), -, \log(\lambda_n))$

$\exp(\Sigma) \in S_n^{++}$; $\log(\Sigma) \in S_n$

* Decomposition de Cholesky : $\forall \Sigma \in S_n^{++}$, $\exists L$ triangulaire inférieure tq $\Sigma = L L^T$

* $A, B \in S_n^{++}$:

$$\langle A, B \rangle_\Sigma = tr(A \Sigma^{-1} B \Sigma^{-1})$$

$$\| A \|_\Sigma^2 = tr\left((A\Sigma^{-1})^2\right)$$

Rq : $\langle \ , \ \rangle_{I_n} = \langle \ , \ \rangle_{frob}$

* $\gamma : [0,1] \longrightarrow S_n^{++}$ differentiable tq $\gamma(0) = A$, $\gamma(1) = B$

longueur du chemin est :

$$L(\gamma) = \int_0^1 \| \dot{\gamma}(t) \|_{\gamma(t)} \, dt$$

Geodesique : γ tq $\begin{cases} L(\gamma) \text{ minimale} \\ \gamma(0) = X \\ \gamma(1) = Y \end{cases}$

$\Downarrow$

$\boxed{\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \dot{\gamma}(t) = 0}$

$$\nabla : T_xM \times T_xM \longrightarrow T_xM$$

• Koszul :

$$2g_x(\nabla_\xi \eta, \nu) - 2g_x(D\eta[\xi], \nu) =$$
$$Dg_x[\xi](\eta,\nu) + Dg_x[\eta](\xi,\nu) - Dg_x[\nu](\xi,\eta)$$

$$g_\Sigma(A,B) = tr(A\Sigma^{-1}B\Sigma^{-1})$$

$f : \Sigma \mapsto tr(A\Sigma B\Sigma) \quad \to Df(\Sigma)[H] = tr(AHB\Sigma) + tr(A\Sigma BH)$

$h : \Sigma \mapsto \Sigma^{-1} \quad \to Dh(\Sigma)[H] = -\Sigma^{-1}H\Sigma^{-1}$

$$D(f\circ h)(\Sigma)[H] = Df(\Sigma^{-1})[Dh(\Sigma)[H]]$$
$$= Df(\Sigma^{-1})(-\Sigma^{-1}H\Sigma^{-1})$$
$$= tr(-A\Sigma^{-1}H\Sigma^{-1}B\Sigma^{-1})$$
$$+ tr(-A\Sigma^{-1}B\Sigma^{-1}H\Sigma^{-1})$$

$$= -tr(A\Sigma^{-1}[H\Sigma^{-1}B + B\Sigma^{-1}H]\Sigma^{-1})$$

$$= -2\,tr(\Sigma^{-1}A\Sigma^{-1}\,sym(H\Sigma^{-1}B))$$
$$= -2\,g_\Sigma(A, sym(H\Sigma^{-1}B))$$

Avec Koszul :

$$2g_\Sigma(\nabla_\xi \eta, \nu) - 2g_\Sigma(D\eta[\xi], \nu) = \quad = g_\Sigma(\nu, sym(\eta\Sigma$$
$$= \cancel{-2g_\Sigma(\eta, sym(\xi\Sigma^{-1}\nu))} - 2g_\Sigma(\xi, sym(\eta\Sigma^{-1}\nu))$$
$$+ 2g_\Sigma(\eta, sym\cancel{(\nu\Sigma^{-1}\xi}))$$

$\Rightarrow 2g_\Sigma(\nabla_\xi \eta, \nu) - 2g_\Sigma(D\eta[\xi], \nu) = -2g_\Sigma(\mathrm{sym}(\eta\Sigma^{-1}\xi), \nu) = 0$

$\forall \nu$ $\Rightarrow \nabla_\xi \eta = D\eta[\xi] - \mathrm{sym}(\eta \Sigma^{-1} \xi)$

Pour $\xi = \eta = \dot\gamma(t)$ et $\Sigma = \gamma(t)$:

$$0 = \nabla_{\dot\gamma(t)} \dot\gamma(t) = \underbrace{D\dot\gamma(t)[\dot\gamma(t)]}_{\ddot\gamma(t)} - \underbrace{\mathrm{sym}(\dot\gamma(t)\gamma(t)^{-1}\dot\gamma(t))}_{=\dot\gamma(t)\gamma(t)^{-1}\dot\gamma(t)}$$

$$\Rightarrow \ddot\gamma(t) = \dot\gamma(t)\gamma(t)^{-1}\dot\gamma(t)$$

avec $\gamma(0) = X$ et $\dot\gamma(0) = \xi$

$\dot\gamma(t)^{-1}\ddot\gamma(t) = \gamma(t)^{-1}\dot\gamma(t)$ // $\ddot\gamma(t)\dot\gamma(t)^{-1} = \dot\gamma(t)\gamma(t)^{-1}$

$0 = \frac{d}{dt}(\dot\gamma(t)^{-1}\ddot\gamma(t)) = \frac{d}{dt}(\dot\gamma(t)^{-1})\ddot\gamma(t) + \dot\gamma(t)^{-1}\dddot\gamma(t)$

$\cancel{\Rightarrow -\frac{d}{dt}(\dot\gamma(t)^{-2})\dot\gamma(t) = \gamma(t)^{-2}\dot\gamma(t)}$

$\cancel{\Rightarrow -\frac{d}{dt}(\dot\gamma(t)^{-2}) = \gamma(t)^{-1}}$

$\cancel{\Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot\gamma(t)^{-1}) = -\gamma(t)^{-2}}$

(6)

Soit $\Gamma(t) = X \exp(t X^{-1} \xi)$

$\dot{\Gamma}(t) = \xi X^{-1} \Gamma(t)$; $\ddot{\Gamma}(t) = \xi X^{-1} \xi X^{-1} \Gamma(t)$

On a $\begin{cases} \ddot{\Gamma}(t) = \dot{\Gamma}(t) \Gamma(t)^{-1} \dot{\Gamma}(t) \\ \Gamma(0) = X, \quad \dot{\Gamma}(0) = \xi \end{cases}$

$$\boxed{\gamma(t) = X \exp(t X^{-1} \xi)}$$

(Unicité de la solution : Cauchy-Lipschitz)

Pour $\gamma(0) = X$, $\gamma(1) = Y$

$Y = \gamma(1) = X \exp(X^{-1} \xi) = X^{\frac{1}{2}} \exp(X^{-\frac{1}{2}} \xi X^{-\frac{1}{2}}) X^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{\exp_X^{S_n^{++}}(\xi) = X^{\frac{1}{2}} \exp(X^{-\frac{1}{2}} \xi X^{-\frac{1}{2}}) X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{\log_X^{S_n^{++}}(Y) = X^{\frac{1}{2}} \log(X^{-\frac{1}{2}} Y X^{-\frac{1}{2}}) X^{\frac{1}{2}}}$$

$$\delta(X,Y) = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle_{\gamma(t)}}\, dt$$

avec $\gamma(t) = X \exp(t X^{-1} \xi)$

$\gamma(1) = Y \Rightarrow X \log(X^{-1} Y) = \xi$

$$\dot\gamma(t) = \xi \exp(t X^{-1} \xi) = \xi X^{-1} \gamma(t)$$

$$\langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle_{\gamma(t)} = tr\left(\dot\gamma(t)\, \gamma(t)^{-1}\, \dot\gamma(t)\, \gamma(t)^{-1} \right)$$

$$= tr\left(\xi X^{-1} \xi X^{-1} \right) \Rightarrow \text{indépendant de } t$$

$$= tr\left(X \log(X^{-1} Y)\, \cancel{X^{-1} X} \log(X^{-1} Y)\, \cancel{X^{-1}} \right)$$

$$= tr\left(\log(X^{-1} Y)^2 \right)$$

$$\delta(X,Y)^2 = tr\left(\log(X^{-1} Y)^2 \right)$$

$$= \| \log(X^{-1} Y) \|^2_{Frob}$$

Prop : ⊛ $\delta(X^{-1}, Y^{-1}) = \delta(X,Y)$

⊛ $\delta(U^T X U, U^T Y U) = \delta(X,Y) \quad \forall U \in GL(\mathbb{R}^n)$

↳ invariant par projection