Práctica Variable Aleatoria unidimensional

Emilio López Cano

19 de enero de 2017

Descuentos

Una empresa de servicios de Internet quiere hacer una campaña para aplicar entre un 5% y un 25% de descuento a sus clientes de forma aleatoria y lineal, y entonces la probabilidad de que un cliente reciba un determinado descuento se puede modelizar mediante la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} k(25-x) & \text{si } 5 \leq x \leq 25 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Responde a las siguientes cuestiones:

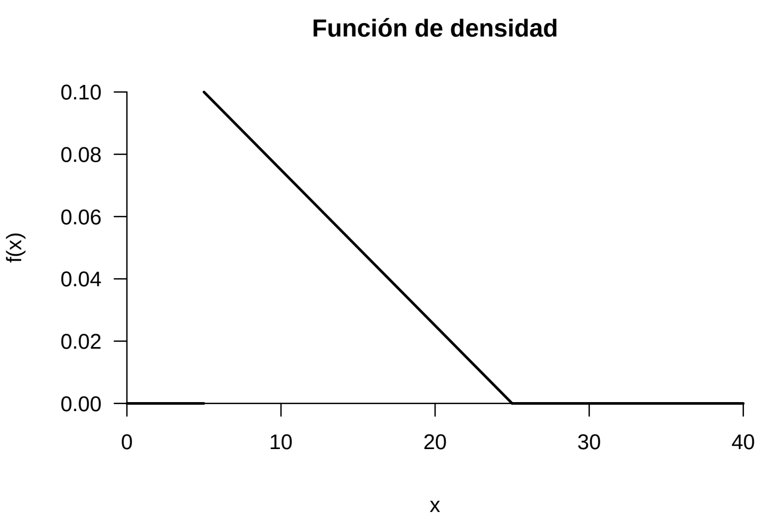
1. Calcula k para que $f(x)$ sea realmente una funcion de densidad

Solución con R:

```
k <- 1/integrate(function(x) 25-x, 5, 25)$value
k
```

```
## [1] 0.005
```

```
densidad <- function(x) {k*(25 - x)}
x <- seq(5,25)
y <- densidad(x)
plot(x, y, type="l",
     axes = FALSE,
     lwd=2, ylab="f(x)",
     main ="Función de densidad", xlim=c(0,40))
axis(1, pos = 0)
axis(2, pos= 0 , las = 1)
segments(0, 0, 5.0, lwd = 2)
segments(25, 0 , 40, lwd = 2)
```



Explicación:
Para que una función sea función de densidad se tienen que cumplir dos condiciones: 1) Que sea mayor o igual que cero en todo $\mathbb{R}$; 2) Que la integral en todo $\mathbb{R}$ sea igual a 1. La primera condición se cumple para todo k positivo. Para la segunda, como k es una constante, la sacamos de la integral y despejamos, de forma que:

$$k = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}$$

El valor obtenido es mayor de cero, por tanto cumple también la primera condición. Una vez calculado k, creamos una función con la función de densidad final (con k=0.005), que usaremos para representar la función (ver arriba) y para resolver los siguientes ejercicios.

2. Calcula la probabilidad de que un cliente obtenga mas de un 20% de descuento

Solución con R:

```
probabilidad <- integrate(function(x) densidad(x), 20, 25)
probabilidad
```

```
## 0.0625 with absolute error < 6.9e-16
```

Explicación:
Nos piden $P(X > 20)$. Como tenemos la función de densidad, esta probabilidad se calcula como el área bajo la curva de la función de densidad para los valores que queremos buscar la probabilidad, en nuestro caso:

$$\int\limits_{20}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{20}^{25} 0.005(25 - x)dx.$$

3. ¿Cuál es el descuento medio que se espera aplicar?

Solución con R:

```
esperanza <- integrate(function(x) x*densidad(x), 5, 25)
esperanza
```

```
## 11.66667 with absolute error < 1.3e-13
```

Explicación:
El descuento medio equivale a calcular la esperanza matemática de la variable aleatoria, es decir:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

por tanto el descuento medio aplicado es del 11.67%

4. Calcula la varianza de la variable aleatoria

Solución con R:

```
esperanzax2 <- integrate(function(x) x^2*densidad(x), 5, 25)
esperanzax2
```

```
## 158.3333 with absolute error < 1.8e-12
```

```
varianza <- esperanzax2$value - esperanza$value^2
varianza
```

```
## [1] 22.22222
```

Explicación:
La mejor forma es usar la fórmula abreviada $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$. Como ya tenemos $E[X]$, calculamos $E[X^2]$ y restamos.

5. ¿Entre qué valores estarán probablemente la mitad de los descuentos realizados (en la zona central de la distribución)?

Solución con R:

```
## Función de distribución
distribucion <- function(q) integrate(function(x) densidad(x), 5, q)[[1]]
## Inversa
cuantil <- function(p) uniroot(function(x) distribucion(x) - p, c(5, 25))[[1]]
cuantil(0.75)
```

```
## [1] 15
```

```
cuantil(0.25)
```

```
## [1] 7.679501
```

Explicación:
La mitad de las observaciones estarán entre cualesquiera dos cuantiles que dejen fuera la otra mitad. Si buscamos la mitad de las observaciones centrales, lo más apropiado es buscar un valor inferior que deje por debajo el 25%, y un valor superior que deje por encima otro 25%. Estos valores se corresponden con el primer y tercer cuantil. Para poder calcularlos podemos seguir varias estrategias. Por ejemplo, si tenemos la función de distribución, como hemos hecho aquí, el primer cuantil será:

$$x \text{ tal que: } F(x) = 0.25,$$

lo que equivale a encontrar el cero de la función F(x) - 0.25, que es como está resuelto aquí.

6. ¿Cuál es la moda de la variable aleatoria?

Solución con R:

```
cat("Moda = 5\n")
```

```
## Moda = 5
```

Explicación:
La moda de una distribución es el valor donde la función de densidad alcanza el máximo. En este caso, la función es una recta con pendiente negativa, decreciente, y por tanto el máximo lo toma en el valor más pequeño de su dominio, en este caso el 5.

7. Calcula la mediana de la variable aleatoria

Solución con R:

```
cuantil(0.5)
```

```
## [1] 10.85787
```

Explicación:
Como ya teníamos la función de distribución, este apartado se ha resuelto encontrando el cuantil 0.5.

Entrega del trabajo

Sube un fichero .Rmd al aula virtual con tu resolución, incluyendo fragmentos de código, así como el texto y gráficos que consideres conveniente.

Evaluación

El trabajo se valorará de 0 a 10 puntos, de modo que cada cuestión vale un punto y la presentación, explicaciones, y gráficos adicionales, 3 puntos.