

---

# 확률과 통계 과제

---

# 1.1

## 순열

확인문제 1

1부터 30까지의 자연수를 5로 나눌 때, 나머지가 홀수인 자연수의 개수를 구하시오.

확인문제 2

1부터 999까지의 자연수 중에서 5를 하나만 포함한 자연수의 개수를  $a$ , 5를 적어도 하나 포함한 자연수의 개수를  $b$ 라 할 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오.

확인문제 3

주사위를 세 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리에 써서 세 자리의 자연수를 만든다. 개수를 구하시오. 각 자리의 숫자가 모두 다른 경우의 수를  $a$ , 각 자리의 숫자 중 같은 숫자가 2개인 경우의 수는  $b$ 라 할 때,  $a+b$ 의 값을 구하시오.

확인문제 4

360의 양의 약수의 개수와 양의 약수의 총합을 구하시오.

확인문제 5

$1 < r \leq n$ 일 때, 등식  ${}_nP_r = n \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$ 이 성립함을 증명하시오.

확인문제 6

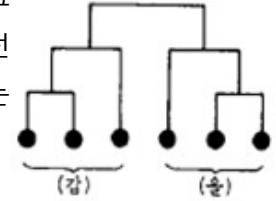
$1 \leq r < n$ 일 때, 등식  ${}_nP_r = {}_{n-1}P_r + r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$ 이 성립함을 증명하시오.

확인문제 7

PERMUTATION의 11자에서 5자를 뽑아 일렬로 나열할 때, 모음과 자음이 교대로 나열되도록 하는 방법의 수를 구하시오. (예를 들어 MATON, ENIPA 등)

- 1  $a, a, b, b, c, c$  의 6개의 문자를 같은 문자끼리는 이웃하지 않고 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오.

- 2 A, B, C 세 학교에서 각각 2명씩 양궁 선수를 출전시켜 오른쪽 그림과 같이 토너먼트로 경기를 한다. 같은 학교 선수끼리는 결승전 외에는 서로 시합하지 않기로 할 때, 몇 가지의 대진표가 생기겠는가? (단, 갑, 을 조는 구별하지 않는다.)



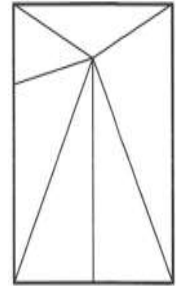
- 3 한 구면 위에서 서로 다른 4개의 대 원에 의하여 분할 된 구면의 조각의 개수를 다음 각 경우에 대하여 구하시오.

- (1) 네 개의 대원이 한 지름을 공유할 때
- (2) 세 개의 대원이 한 지름을 공유할 때
- (3) 어느 세 개의 대원도 한 지름을 공유하지 않을 때

- 4 자연수  $n, k$  에 대하여  $n > k$  라고 할 때,  $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k \leq n$  인  $k$ 개의

자연수  $a_1, a_2, \dots, a_k$ 에 대하여  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$ 로 나타나는  $S_k$ 의 개수를 구하시오.

5 오른쪽 그림과 같이 직사각형을 6개의 삼각형으로 나눈 다음 빨강, 파랑, 노랑의 세 가지 색을 사용하여 다음 세 조건을 모두 만족하도록 칠하려고 한다. 그 방법은 몇 가지인가?



- (i) 각각의 삼각형을 빨강, 파랑, 노랑 중 한 가지 색만으로 빈틈없이 칠한다.
- (ii) 한 변을 공유하는 두 삼각형을 서로 다른 색으로 칠한다.
- (iii) 빨강, 파랑, 노랑 중에서 사용하지 않는 색은 없다.

6 다음 물음에 답하시오.

- (1) 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 세 자리의 정수를 만들 때, 이들의 총 합은 얼마인가?
- (2) 숫자 1, 2, 3, 4를 나열하여 네 자리의 정수를 만들 때, 이들의 총 합은 얼마인가?  
(같은 숫자를 반복 사용해도 된다.)

7 7개의 문자 A, B, C, D, E, F, G를 일렬로 배열하는 순열에 대하여 다음을 구하시오.

- (1) 모든 순열을 사전의 알파벳 순으로 배열할 때, 1234번째에 있는 순열
- (2) A와 C 어느 것도 양 끝에 있지 않으면서 G와 이웃하는 순열의 수

**8** 100원, 50원, 10원 짜리의 동전이 각각 2개, 3개, 3개가 있다. 다음을 구하시오.

(1) 이 동전들의 일부 또는 전부를 써서 지불할 수 있는 방법의 수  
(단, 적어도 하나 이상의 동전을 사용한다.)

(2) 이 동전들의 일부 또는 전부를 써서 지불할 수 있는 금액의 수  
(단, 적어도 하나 이상의 동전을 사용한다.)

**9** 10원, 50원, 100원 짜리의 동전들이 각각 넉넉하게 있다. 다음을 구하시오.

(1) 이 동전들을 사용하여 240원을 지불하는 방법의 수

(2) 이 동전들을 각각 적어도 한 개 사용하여 240원을 지불하는 방법의 수

**10** 다음 등식이 성립함을 증명하시오.

$$(1) {}_nP_r = (n-r+1) \times {}_nP_{r-1}$$

$$(2) n(n!) = (n+1)! - n!$$

$$(3) \frac{n^2}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}$$

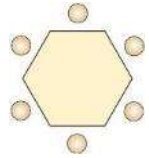
# 1.2 여러 가지 순열

확인문제 1

남학생 4명과 여학생 2명이 원형의 탁자에 둘러앉을 때, 여학생끼리 이웃하여 앉는 방법의 수를 구하시오.

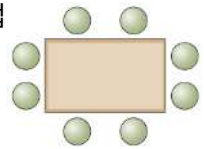
확인문제 2

오른쪽 그림과 같이 정육각형 모양의 탁자에 놓인 6개의 의자에 4명의 학생이 앉는 방법의 수를 구하시오.



확인문제 3

오른쪽 그림과 같은 직사각형 모양의 탁자에 8명이 둘러앉는 방법의 수를 구하시오.



확인문제 4

두 집합  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여  $X$ 를 정의역,  $Y$ 를 공역으로 하는 함수의 개수를 구하시오.

확인문제 5

다섯 개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 4개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 네 자리 자연수 중에서 홀수의 개수를 구하시오. (단, 각 자리의 숫자는 서로 같아도 된다.)

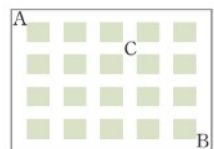
확인문제 6

success에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열할 때, 다음을 구하시오.  
 (1) 맨 앞에 알파벳 s가 오도록 나열하는 방법의 수  
 (2) 양 끝에 모음이 오도록 나열하는 방법의 수

확인문제 7

오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. 다음을 구하시오.

- (1) A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수
- (2) A 지점에서 출발하여 C 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수



확인문제 8

ice cream에 있는 8개의 문자를 일렬로 나열할 때, a가 i의 왼쪽에 오도록 나열하는 방법의 수를 구하시오.

1 남학생 4명, 여학생 3명을 일렬로 세울 때, 다음 경우의 수를 구하시오.

- (1) 여학생 3명이 이웃하는 경우
- (2) 여학생끼리는 어떤 두 명도 이웃하지 않는 경우
- (3) 남학생, 여학생이 교대로 서는 경우

2 두 집합  $X = \{1, 2, 3, \dots, r\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 에 대하여 다음을 구하시오.

- (1)  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수의 개수
- (2)  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f$  중 일대일 함수의 개수 (단,  $r \leq n$ )
- (3)  $X$ 에서  $Y$ 로의 함수  $f$  중  $X$ 의 모든 원소  $x$ 에 대하여  $f(x) \geq x$ 인 함수의 개수  
(단,  $r \leq n$ )

3 사이렌 울림을 조합하여 15초짜리 신호를 만들려고 한다. 1초짜리 사이렌과 2초짜리 사이렌이 있고 사이렌 사이의 쉬는 시간은 1초씩으로 한다. 몇 가지 신호를 만들 수 있는지 구하시오. (단, 쉬는 시간은 두 사이렌의 사이에 있어야 한다.)

4 할머니 한 분과 부모, 아이들이 다섯인 가족이 있다. 이 가족이 원탁에 둘러앉을 때, 다음을 구하시오.

- (1) 부모가 이웃하여 앉는 경우의 수
- (2) 부모 사이에 아이가 한 명 앉는 경우의 수
- (3) 어른들 사이에는 항상 적어도 한 명의 아이가 앉는 경우의 수

5 검은 공 6개, 흰 공 2개, 빨간 공 1개가 있다. 다음을 구하시오. (단, 같은 색의 공은 구별되지 않는다.)

(1) 9개의 공을 일렬로 배열하는 경우의 수

(2) 9개의 공 모두를 원형으로 배열하는 경우의 수

(3) 9개의 공으로 만든 염주순열의 수

6 흰 구슬 5개와 빨간 구슬 4개가 있다. 이 구슬로 만든 원순열의 수와 염주순열의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 구슬은 구별되지 않는다.)

7 오른쪽 그림과 같이  $n \times 2$ 꼴의 표에  $\bigcirc$ ,  $\times$  표시를 하되 인접한 곳에는  $\times$  를 이어 표시할 수 없다.  $n$ 행까지 표시할 수 있는 방법의 수를  $f(n)$ 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오. (단, 사각형의 변을 공유할 때 인접한다고 하자.)

	1열	2열
1행		
2행		
$\vdots$	$\vdots$	
$(n-1)$ 행		
$n$ 행		

(1)  $f(1)$ ,  $f(2)$ 를 구하시오.

(2)  $f(n)$ 을  $f(n-1)$ ,  $f(n-2)$ 로 나타내시오. (단,  $n \geq 3$ )



8 덕수는 한 걸음에 한 칸 또는 두 칸을 오를 수 있다고 한다.  $n$ 칸의 계단을 오를 때, 계단을 오르는 방법의 수를  $f(n)$ 이라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1)  $f(n)$ 을  $f(n-1)$ ,  $f(n-2)$ 로 나타내시오. (단,  $n \geq 3$ )

(2)  $f(8)$ 을 구하시오.

9 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5를 일렬로 배열할 때  $i$ 번째 숫자를  $a_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ )라 할 때,

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3)(a_4 - 4)(a_5 - 5) \neq 0$$

인 경우의 수를 구하시오.

10  $A$ ,  $B$ ,  $C$ 의 세 나라 사람들이 각각 2명씩 있다. 이들 6명을 같은 나라의 사람끼리는 이  
웃하지 않도록 일렬로 세우는 방법의 수를 구하시오.

# 1.3 조합

## 확인문제 1

다음 등식을 만족시키는  $n$ 의 값을 구하시오.

(1)  ${}_nC_2 = 45$

(2)  ${}_8C_3 \times n! = {}_8P_5$

## 확인문제 2

다음 등식이 성립함을 증명하여라. <sup>37)</sup>

(1)  ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$  (단,  $0 \leq r \leq n$ )

(2)  $r \cdot {}_nC_r = n \cdot {}_{n-1}C_{r-1}$  (단,  $1 \leq r \leq n$ )

(3)  ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$  (단,  $1 \leq r \leq n-1$ )

(4)  ${}_nC_r \times {}_rC_m = {}_nC_m \times {}_{n-m}C_{r-m}$  (단,  $m \leq r \leq n$ )

## 확인문제 3

남학생 5명, 여학생 4명으로 구성된 댄스 동아리 회원 중에서 댄스 대회에 출전할 4명의 학생을 뽑을 때, 다음을 구하시오.

(1) 남녀 구분 없이 4명을 뽑는 방법의 수

(2) 남학생 2명, 여학생 2명을 뽑는 방법의 수

## 확인문제 4

다음 값을 구하시오.

(1)  ${}_4H_0$

(2)  ${}_2H_4$

(3)  ${}_5H_5$

(4)  ${}_5H_3$

(5)  ${}_2H_5$

## 확인문제 5

다항식  $(a+b+c)^4$ 의 전개식에서 항의 개수를 구하시오.

## 확인문제 6

방정식  $x+y+z=8$ 에 대하여 다음을 구하시오.

(1)  $x, y, z$ 가 모두 음이 아닌 정수인 해의 개수

(2)  $x, y, z$ 가 모두 양의 정수인 해의 개수

## 확인문제 7

집합  $X = \{1, 2\}$ 에서 집합  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 으로의 함수  $f$ 에 대하여  $f(1) \leq f(2)$ 를 만족시키는 함수  $f$ 의 개수를 구하시오.

**1** 7명의 남자와 5명의 여자 중에서 4명의 대표를 뽑으려고 한다. 다음을 구하시오.

- (1) 남자 2명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수
- (2) 특정한 남녀 2명이 모두 뽑히는 경우의 수
- (3) 남녀가 적어도 1명씩 뽑히는 경우의 수

**2**  $x$ ,  $y$ ,  $z$ 의 세 문자를 사용하여 계수가 1인 10차의 단항식을 만들려고 한다. 다음을 구하시오.

- (1) 만들어진 단항식의 개수
- (2) 두 문자로 만들어진 10차의 단항식의 개수
- (3) 이 모든 단항식의 곱을  $P = x^a y^b z^c$ 이라고 할 때,  $a + b + c$ 의 값

**3** 다음을 구하시오.

- (1)  $x + y + z = 8$ 인 음이 아닌 정수해  $(x, y, z)$ 의 개수
- (2) 똑같은 연필 8개를 3명에게 나누어 주는 방법의 수  
(단, 1개도 받지 않은 사람이 있어도 좋다.)
- (3)  $(a + b + c)^8$ 의 전개식에서 나타나는 서로 다른 항의 개수

4  $a, a, a, b, c, d$ 의 6개의 문자가 있다. 다음을 구하시오.

(1) 3개를 택하여 만든 조합의 수

(2) 3개를 택하여 만든 순열의 수

(3) 3개를 택하여 단어를 만들어 사전식으로 나열할 때, 24번째 단어

5 원에 내접하는 정  $n$ 각형이 있다. 이  $n$ 개의 꼭짓점과 원의 중심과의  $(n+1)$ 개의 점 중에서 3개를 택하여 삼각형을 그릴 때 다음 물음에 답하시오.

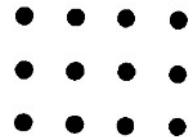
(1) 삼각형은 모두 몇 개 그릴 수 있는가?

(2) 이 중에서 정삼각형은 몇 개 있는가?

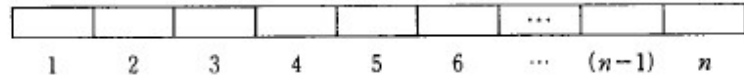
6 오른쪽 그림과 같이 같은 간격으로 12개의 점이 있다. 다음을 구하시오.

(1) 어느 두 점을 연결하여 그린 직선의 개수

(2) 어느 세 점을 연결하여 만든 삼각형의 개수



- 7 다음 그림과 같이  $n$ 개의 칸이 있다. 여기에 검은 바둑돌 3개와 흰 바둑돌  $(n-3)$ 개를 1개씩 놓는데, 검은 돌이 이웃하지 않도록 놓는 방법의 수를 구하시오.



- 8 다음을 구하시오.

- (1)  $x+y+z^2=15$ 를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수
- (2)  $x+y+z^2 \leq 15$ 를 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수

- 9 정구각형의 세 꼭짓점을 묶어서 만들어지는 삼각형에 대하여 다음을 구하시오.

- (1) 삼각형의 총 개수
- (2) 정구각형과 한 변만 공유하는 삼각형의 개수
- (3) 정구각형과 한 변도 공유하지 않은 삼각형의 개수
- (4) 정삼각형의 개수

- 10 한 개의 주사위를 다섯 번 던져서  $k$ 번째 나온 눈을  $a_k$  ( $k=1, 2, 3, 4, 5$ )라고 한다. 다음을 구하시오.

- (1)  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 인 경우의 수
- (2)  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ 인 경우의 수
- (3)  $a_1 \leq a_2 < a_3 \leq a_4 < a_5$ 인 경우의 수

# 1.4 분할

## 확인문제 1

7의 분할의 수를 구하시오.

## 확인문제 2

서로 같은 구슬 7개를 서로 같은 상자 3개에 나누어 담으려고 한다. 다음을 구하시오.

- (1) 빈 상자가 없도록 나누어 넣는 방법의 수
- (2) 빈 상자가 1개 이하가 되도록 나누어 넣는 방법의 수

## 확인문제 3

$P(n, k) = P(n-1, k-1) + P(n-k, k)$  가 성립함을 증명하시오.

(Hint  $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 에서  $n_k = 1$ 인 경우와  $n_k \geq 2$ 인 경우로 나누자.)

## 확인문제 4

다음은 똑같은 공 10개를 똑같은 주머니 5개에, 빈 주머니가 없이 담는 방법을 나타낸 것이다.

- (i) 똑같은 공 10개와 똑같은 주머니 5개를 준비한다.
- (ii) 5개의 주머니에 모두 공을 한 개씩 넣는다.
- (iii) 남은 5개의 공을 주머니에 나누어 담는다.

위의 과정에서  $P(10, 5) = \sum_{k=1}^5 P(5, k)$ 임을 알 수 있다. 같은 방법으로  $P(12, 4)$ 를

$$P(12, 4) = \sum_{k=1}^m P(n, k)$$

로 나타낼 수 있을 때, 자연수  $n, m$ 의 값을 구하시오.

## 확인문제 5

다음을 구하시오.

- (1)  $S(5, 3)$                       (2)  $S(4, 2)$                       (3)  $S(6, 3)$

## 확인문제 6

$S(n, k) = kS(n-1, k) + S(n-1, k-1)$  가 성립함을 증명하시오. <sup>58)</sup>

(Hint 집합  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 에서 집합  $X - \{n\}$ 을 이용해보자.)

**1** 같은 품질의 굴 8개를 똑같은 세 개의 접시에 담는 방법은 몇 가지인가?(단, 어느 접시에도 적어도 1개는 담기로 한다.)

**2** 9명의 가족이 3대의 택시에 나누어 탈 때, 다음을 구하시오. (단, 택시 1대의 정원은 4명이다.)

(1) 택시 3대를 구별하지 않는 경우의 수

(2) 택시 3대를 구별하되 좌석은 구별하지 않는 경우의 수

(1) 택시 3대를 구별하고 좌석도 구별하는 경우의 수

**3** 3인승 보트가 2척 있다. 4명이 2척의 보트에 나누어 타려고 할 때, 다음 경우의 수를 구하시오.

(1) 사람도 보트도 구별하지 않을 때

(2) 사람, 보트는 구별하고 좌석을 구별하지 않을 때

(3) 사람, 보트, 좌석을 모두 구별할 때

**4** 두 집합  $X = \{1, 2, 3, \dots, r\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 에 대하여 함수  $f : X \rightarrow Y$ ,  $y = f(x)$ 를 정의한다. 다음을 구하시오.

(1)  $n = r$ 일 때, 일대일 대응인  $f$ 의 개수

(2)  $n \leq r$ 일 때,  $f(X) = Y$ 인  $f$ 의 개수

(3)  $i, j \in X$ 일 때  $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$ 인  $f$ 의 개수 (단,  $n \geq r$ )

(4)  $i, j \in X$ 일 때  $i < j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$ 인  $f$ 의 개수

(5)  $i, j \in X$ 일 때  $i < j \Rightarrow f(i) \leq f(j)$ 이고  $f(X) = Y$ 인  $f$ 의 개수 (단,  $n \leq r$ )

**5** 감 3개와 사과 7개가 있다. 이것을 한 사람에게 1개씩 줄 때 다섯 사람에게 줄 수 있는 방법은 몇 가지인가?