<확률과 통계 과제 3월 4주>

1.5.2 파스칼의 삼각형

파스칼의 공식

$1 \le r \le n-1$인 모든 자연수에 대하여

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_{r} = {}_{n}\mathrm{C}_{r}$$

확인문제 3 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음을 만족시키는 n과 r의 값을 각각 구하시오.

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{r} + {}_{n}\mathrm{C}_{r+1} = 5$

(2) ${}_{n}\mathrm{C}_{r} + {}_{n}\mathrm{C}_{r+1} = {}_{10}\mathrm{C}_{4}$ (단, $n<10$, $r \le 4$)

확인문제 4 파스칼의 삼각형을 이용하여 다음 값을 구하시오.

$${}_{4}\mathrm{C}_{0} + {}_{5}\mathrm{C}_{1} + {}_{6}\mathrm{C}_{2} + {}_{7}\mathrm{C}_{3} + {}_{8}\mathrm{C}_{4}$$

확인문제 5 $0 \le m \le n$일 때, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} {}_{n}\mathrm{C}_{k} \cdot {}_{m}\mathrm{C}_{k}$을 간단히 하시오.

확인문제 6 $0 \le m \le n$일 때, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}$을 간단히 하시오.

중단원 연습문제

1 다음 등식을 증명하시오.

(1) ${}_{n}\mathrm{C}_{1}+2{}_{n}\mathrm{C}_{2}+3{}_{n}\mathrm{C}_{3}+\cdots+n{}_{n}\mathrm{C}_{n}=n\cdot 2^{n-1}$

(2) ${}_{n}\mathrm{C}_{0}+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{1}}{2}+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{2}}{3}+\cdots+\dfrac{{}_{n}\mathrm{C}_{n}}{n+1}=\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

2 다음 등식을 증명하시오.

(1) ${}_{n+2}\mathrm{C}_{r+1}={}_{n}\mathrm{C}_{r-1}+2{}_{n}\mathrm{C}_{r}+{}_{n}\mathrm{C}_{r+1}$ (단, $r+1\leq n$)

(2) ${}_{n}\mathrm{C}_{0}{}^{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{1}{}^{2}+{}_{n}\mathrm{C}_{2}{}^{2}+\cdots+{}_{n}\mathrm{C}_{n}{}^{2}={}_{2n}\mathrm{C}_{n}$

3 다음을 구하시오.

(1) $\left(1-\dfrac{1}{2}x^{2}\right)^{12}$을 x의 오름차순으로 전개할 때, 중앙의 항

(2) $\left(x^{2}-\dfrac{1}{x}\right)^{11}$을 x의 내림차순으로 전개할 때, 처음으로 분모에 x가 나타나는 항

4 다음을 구하시오.

(1) $(x+2y-3z)^8$의 전개식에서 $x^3y^2z^3$의 계수

(2) $(1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{20}$의 전개식에서 x^6의 계수

5 $\{a+(b+c)^2\}^8$을 a, b, c에 대한 다항식으로 전개할 때, 다음을 구하시오.

(1) $a^3b^6c^4$의 계수

(2) 서로 다른 항의 개수

(3) 모든 항의 계수의 총합

6 $x>0$일 때, $(1+x)^n$의 전개식에서 $(r+1)$번째 항을 ${}_n\mathrm{C}_r\,x^r$이라고 한다.

(1) ${}_n\mathrm{C}_{r-1}\,x^{r-1} \le {}_n\mathrm{C}_r\,x^r$, ${}_n\mathrm{C}_{r+1}\,x^{r+1} \le {}_n\mathrm{C}_r\,x^r$을 만족하는 r의 범위를 n과 x로 나타내어라.

(2) 이 결과를 이용하여 $\left(1+\dfrac{3}{4}y\right)^{10}$의 전개식에서 계수가 최대인 항을 구하시오.

7 $f(k)={}_{2n}\mathrm{C}_k$일 때, 다음을 자연수 n으로 나타내시오.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(2k-1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k f(2k)$

8

단, n은 $0 \le n \le 9$인 정수이다.)

9 $f(x)$를 주어진 함수라 할 때, n차의 다항식 $f_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$$

(1) $f(x)=1$일 때, $f_n(x)$를 구하시오.

(2) $f(x)=x$일 때, $f_n(x)=x$임을 보이시오.

10 (1) x, y는 실수, n은 자연수일 때, 다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$\sum_{k=1}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{k}\, k\, x^{k}\, y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}$$

(2) 다음 극한값을 구하시오. (a는 실수, n은 자연수)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_{k}\, k\, e^{\frac{k}{n}}\, a^{k}\, (1-a)^{n-k}$$