2.1 확률의 뜻과 활용

2.1.1 수학적 확률

주사위나 동전을 던지는 경우와 같이 같은 조건에서 몇 번이고 반복할 수 있으며, 그 결과가 우연에 의해서 정해지는 실험이나 관찰을 **시행**이라고 한다.

표본공간(Sample space)은 보통 S로 나타낸다.

표본공간은 공집합이 아닌 경우만 생각한다.

또, 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과의 집합을 **표본공간**이라 하고, 표본공간의 부분집합을 **사건**이라고 한다. 이때 표본공간의 부분집합 중에서 한 개의 원소로 이루어진 집합을 **근원사건**이라고 한다.

일반적으로 사건과 그 사건을 나타내는 집합은 구별하지 않고 모두 사건이라고 한다.

예를 들어 한 개의 주사위를 던지는 시행에서

❶ 표본 공간 S는

$$S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

❷ 짝수의 눈이 나오는 사건을 A라고 하면

$$A = \{2,\ 4,\ 6\}$$

사건 $A \cup B$를 A와 B의 합사건이라고 하며,

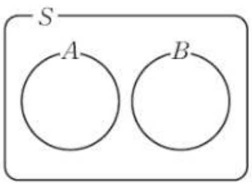
사건 $A \cap B$를 A와 B의 곱사건이라고 한다.

표본공간 S의 두 사건 A와 B에 대하여 A 또는 B가 일어나는 사건을 $A \cup B$와 같이 나타내고, A와 B가 동시에 일어나는 사건을 $A \cap B$와 같이 나타낸다.

한편 사건 A와 사건 B가 동시에 일어나지 않을 때, 즉

$$A \cap B = \varnothing$$

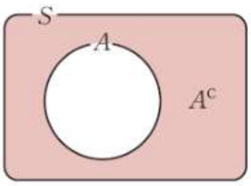
일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 **배반사건**이라고 한다.



또 사건 A에 대하여 A가 일어나지 않는 사건을 A의 **여사건**이라고 하며, 이것을 기호로

$$A^C$$

와 같이 나타낸다.



이때 $A \cap A^C = \varnothing$이므로 A와 그 여사건 A^C는 서로 배반사건이다.

$\mathrm{P}(A)$의 P는 확률을 뜻하는 probability의 첫 글자이다.

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 가능성을 수로 나타낸 것을 사건 A의 **확률**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\mathrm{P}(A)$$

와 같이 나타낸다.

여기에서 다루는 확률의 정의는 Laplace(1749-1827)의 고전적 확률의 정의이며 불완전한 정의이며 차후 이를 보완하여 Kolmogorov(1903-1987)에 의해 공리적 확률이 도입된다.

수학적 확률은 표본공간이 유한집합인 경우에서만 생각한다.

표본공간이 S인 어떤 시행에서 <u>각 결과가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때,</u> 사건 A가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A)$를

$$\mathrm{P}(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

로 정의하고, 이것을 표본공간 S에서 사건 A가 일어날 **수학적 확률**이라고 한다.

수학적 확률

표본공간이 S인 어떤 시행에서 각 결과가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

확인문제 1 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나온 눈의 수를 각각 a, b라 하자. $\left[\frac{b}{a}\right]=\frac{b}{a}$가 성립할 확률을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수이다.)

확인문제 2 1부터 9까지의 자연수가 하나씩 적혀있는 9개의 공이 주머니에 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수 중에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 7이상이고 9이하일 확률을 구하시오.

2.1.2 통계적 확률과 기하학적 확률

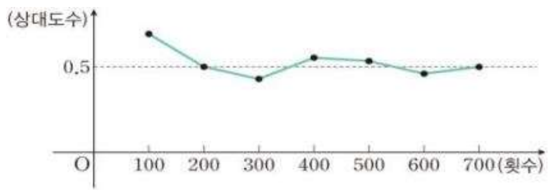
수학적 확률은 어떤 시행에서 각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대된다는 가정 하에 정의하였다. 그러나 자연 현상이나 사회 현상 중에는 각 근원사건이 일어날 가능성이 서로 같은 정도로 기대되지 않는 경우가 흔히 있다.

예를 들어, 하나의 윷짝을 던지는 시행에서 윷짝은 대칭적인 모양이 아니므로 평평한 면이 나오는 사건이 일어날 가능성과 둥근 면이 나오는 사건이 일어날 가능성은 같다고 볼 수 없다.

이와 같은 경우에는 같은 시행을 여러 번 반복하여 얻은 자료를 토대로 어떤 사건이 일어나는 전체적인 경향을 예측할 수밖에 없다.

동전 한 개를 던질 때 앞면이 나오는 상대도수의 그래프가 다음과 같다고 하자. 여기서, 시행 횟수를 충분히 크게 하면 상대도수는 일정한 값 0.5에 가까워짐을 짐작할 수 있다.

베르누이
(Bernoulli, J. ; 1654~1705)
스위스의 수학자로, 수학적 확률론을 초기에 연구한 수학자 중 한 사람이다.



일반적으로 어떤 시행을 n번 반복할 때, 사건 A가 r_n번 일어난다고 하자. 이때 n을 한없이 크게 함에 따라 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 일정한 값 p에 가까워지면 이 p를 사건 A의 통계적 확률이라고 한다.

뷔퐁(Comte de Buffon, G. L. L.; 1707 ~ 1788)
프랑스의 수학자로 통계적 확률을 이용하여 π의 값을 구하였다.

그러나 실제로는 시행 횟수 n을 한없이 크게 할 수 없으므로 시행 횟수 n이 충분히 클 때의 상대도수 $\frac{r_n}{n}$을 보통 그 사건의 통계적 확률로 본다.

한편, 어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수 $\frac{r_n}{n}$은 수학적 확률 p에 가까워진다는 것이 알려져 있다.

확인문제 3

오른쪽은 2013년 1월에 인천 공항을 통하여 우리나라에 입국한 외래객의 국적을 조사하여 나타낸 표의 일부이다. 이 외래객 중에서 임의로 한 명을 택할 때, 국적이 중국일 확률을 구하시오. (단, 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림한다.)

[2013년 1월 외래객]

(단위: 명)

중국	116262
일본	111697
미국	43423
영국	8245
러시아	7547
⋮	⋮
합계	500549

(출처: 한국관광공사 www.visitkorea.or.kr)

확률에는 역설(paradox)이 많다. 확률 개념을 수학적으로 정립하기 어렵기 때문이다.

연속적인 변량 a, b를 크기로 갖는 영역 S와 그 부분집합 A가 있어 영역 S내에서 임의의 한 점을 택할 때, 그 점이 A에 포함될 확률은

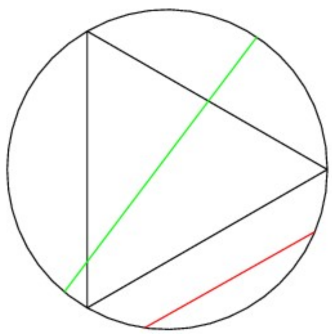
$$\mathrm{P}(A) = \frac{(\text{영역 } A\text{의크기})}{(\text{영역 } S\text{의크기})}$$

이렇게 정의한 확률을 기하학적 확률이라 한다. 기하학적 확률에서 선분의 길이, 영역, 각의 비 등으로 계산하는 것은 나타날 결과가 균등분포(uniform distribution)하고 있을 것으로 가정하고 정의한 것이다. 이는 수학적 확률에서 '각 결과가 일어날 가능성이 같은 정도로 기대될 때'라는 가정과 일맥상통하다.

확률의 정의에 대해 고민하게 해주는 아래 문제에 대해 고민해보자.

베르트랑의 역설 (Bertrand's Paradox)

원에 내접하는 정삼각형을 그리고 원에서 임의의 현을 선택할 때, 현의 길이가 정삼각형의 한 변의 길이보다 클 확률은?

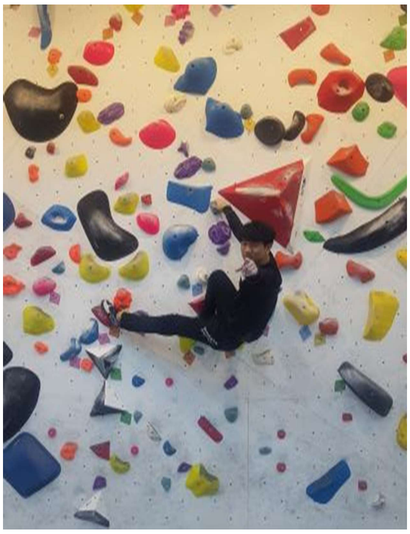


확인문제 4 다음 물음에 답하시오.

(1) 합이 8인 두 양수의 a, b의 곱이 15보다 클 확률을 구하시오.

(2) 합이 8이하인 두 양수의 a, b의 곱이 15보다 클 확률을 구하시오.

확인문제 5 동훈이와 다현이는 오후 8시부터 8시 30분 사이에 클라이밍 센터에서 만나기로 약속을 했다. 누가 먼저 도착하더라도 10분 이상은 기다리지 않기로 할 때, 두 사람이 만나게 될 확률을 구하시오.



2.1.3 확률의 성질

어떤 시행에서 각 결과가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때 성립하는 확률의 성질에 대하여 알아보자.

표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여 $\varnothing \subset A \subset S$이므로 다음이 성립한다.

$$0 \le n(A) \le n(S)$$

이 부등식의 각 변을 $n(S)$로 나누면

$\mathrm{P}(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

$$0 \le \frac{n(A)}{n(S)} \le 1, \quad 즉 \ 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$$

이다.

특히 $A = S$이면

$$\mathrm{P}(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

이고, $A = \varnothing$이면

$$\mathrm{P}(\varnothing) = \frac{n(\varnothing)}{n(S)} = 0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같은 확률의 기본 성질을 얻는다.

확률의 성질

표본공간 S의 임의의 사건 A에 대하여

① $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$ ② $\mathrm{P}(S)=1$, $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

각 근원사건이 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대되는 표본공간 S의 임의의 두 사건 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

가 성립하므로 사건 A 또는 B가 일어날 확률은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}\\&=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\\&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\end{aligned}$$

특히, 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

가 성립한다.

확률의 덧셈법칙

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

특히 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$

확인문제 6 한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 두 눈의 수의 합이 9이거나 차가 3일 확률을 구하시오.

확인문제 7 두 사건 A와 B는 서로 배반사건이고,

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B),\quad \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값을 구하시오.

확인문제 7 한 개의 주사위를 3번 던져서 나온 눈의 수를 순서대로 a_1, a_2, a_3이라 하고, 순서쌍 (a_1, a_2, a_3)을 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a_1+a_2, a_2a_3)$에 대응시킨다. 점 P가 포물선 $y^2=4x$ 위의 점일 확률을 구하시오.

$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

표본공간 S의 사건 A에 대하여 여사건 A^C의 확률을 구하는 방법을 알아보자.

사건 A와 그 여사건 A^C는 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

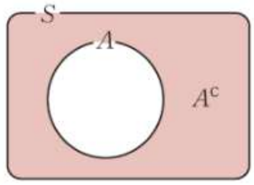
$$\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)$$

이다. 이때 $\mathrm{P}(A\cup A^C)=\mathrm{P}(S)=1$이므로

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C)=1,$$

즉 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

가 성립한다.



여사건의 확률

사건 A의 여사건 A^C에 대하여

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$$

확인문제 8 5개의 당첨 제비가 포함된 20개의 제비 중에서 임의로 두 개의 제비를 뽑을 때, 적어도 한 개가 당첨 제비일 확률을 구하시오.

확인문제 9 한 개의 주사위를 다섯 번 던져서 나온 눈의 수를 차례대로 x, y, z, u, v라 하자. 이 때

$$(x-y)(y-z)(z-u)(u-v)=0$$

일 확률을 구하시오.

확인문제 10 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 $f(1)=2,\ f(4)=3,\ \sum_{k=1}^{6} f(k)=15$인 함수 $f: X\to X$ 중에서 임의로 한 함수를 택할 때, 치역의 원소의 개수가 3이상일 확률을 구하시오.

중단원 연습문제

1 다음을 구하시오.

(1) 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나타나는 눈의 차가 3 이상이 될 확률

(2) 주머니 속에 흰 공 3개, 검은 공 5개가 들어 있다. 이 중에서 4개의 공을 꺼낼 때, 흰 공이 1개가 포함될 확률

2 수산 시험장에서 어떤 물고기의 알을 인공 부화하고 있는데 알 10000개에 대하여 8513개가 부화된다고 한다.

(1) 이 물고기 알의 부화의 확률을 구하시오.

(2) 알 3000개로는 몇 개나 부화된다고 생각할 수 있는가?

(3) 5000개가 부화 되려면 알이 몇 개나 필요하겠는가?

3 모든 실수 x에 대하여 $x^2+2ax-b^2+1 \geq 0$이 성립하도록 실수 a, b를 택할 때, x의 방정식 $x^2-2ax+3b^2=0$이 실근을 가질 확률을 구하시오.

중단원 연습문제

4 다음을 구하시오.

(1) 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 A로의 일대일 함수 f 중에서 모든 A의 원소 x에 대하여 $f(x)\neq x$인 함수 f의 개수

(2) 1에서 9까지 번호가 붙은 공 9개와 상자 9개가 있다. 이 공을 상자에 1개씩 무심히 넣을 때, 공의 번호와 상자의 번호가 일치하는 것이 꼭 4개일 확률

5 다음을 구하시오.

(1) A, B, C의 3명이 가위바위보를 한 번 할 때

① 승부가 나지 않을 확률　　② A가 이길 확률

(2) A, B, C, D의 4명이 가위바위보를 한 번 할 때

① 승부가 나지 않을 확률　　② A가 이길 확률

6 주머니 속에 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 적힌 카드가 각각 2장씩 있다. 이 주머니 속에서 임의로 2장의 카드를 꺼낼 때, 다음을 구하시오.

(1) 나타나는 모든 경우의 수

(2) 두 장 모두 1이 나올 확률 P_1과 1, 4가 적힌 카드가 나올 확률 P_2

중단원 연습문제

7 두 자리의 양의 정수의 집합에서 임의로 택한 양의 정수를 M이라고 할 때, $\log_2 M$이 정수가 될 확률을 구하시오.

8 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n$의 숫자를 하나씩 적은 같은 크기의 카드 $2n$장이 섞여 있다. 이 중에서 두 장을 꺼내어 적힌 숫자의 차가 n 이상이 될 확률을 P_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{P}_n$의 값을 구하시오.

9 주머니 속에 흰 공과 검은 공을 합쳐 10개가 들어 있다. 이 중에서 두 개를 꺼내어 보고 다시 넣는 일을 되풀이 하여 보니 3회에 1회 꼴로 두 개 모두 흰 공이었다고 할 때, 흰 공이 몇 개 있다고 추측할 수 있는가?

10 $a \geq 2$인 실수 a에 대하여 두 실수 $p,\ q$를

$$0 \leq p \leq a^2, \qquad 0 \leq q \leq a^2$$

이 되도록 뽑을 때, x에 관한 이차방정식 $x^2-px+q=0$이 실근을 가질 확률 $p(a)$를 구하고, $\lim_{a\to\infty}p(a)$의 값을 구하시오.