UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS ESPE - SEDE LATANCUNGA
CARRERA DE INGENIERÍA DE SOFTWARE
MÉTODOS NUMÉRICOS 8231

NOMBRE: ISMAEL SIMBAÑA **DOCENTE:** MSC. WILSON TRAVEZ
FECHA: 13/12/2021 **TEMA:** METODO DE CHOLESKI

Marco Teórico

Para aplicar del método de *Cholesky*, se necesita recordar cuales son las matrices simétricas, dado que estas son utilizadas, su uso tiene como ventaja computacional, requerir menos tiempo y menor espacio de almacenamiento en la mayoría de los casos.

- **Matriz Simétrica**

La matriz (cuadrada) A de n x n se denomina simétrica si A^t = A. Es decir, las columnas de A son también los renglones de A (Grossman, 2008).

Las siguientes matrices son simétricas:

$$I \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad C=\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

(Grossman, 2008)

Teoría

Uno de los métodos más populares usa la descomposición de Cholesky. Este algoritmo se basa en el hecho de que una matriz simétrica se descompone así:

$$[A] = [L][L]^T \quad (1)$$

Es decir, los factores triangulares resultantes son la transpuesta uno de otro.

Los términos de la ecuación (1) se desarrollan al multiplicar e igualar entre sí ambos lados. El resultado se expresa en forma simple mediante relaciones de recurrencia. Para el renglón k-ésimo (Chapra & Canale, Descomposición de Cholesky, 2017).

Demostración

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k-1$$

(2)

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

(3)

Ejemplo

Aplique la descomposición de Cholesky a la matriz simétrica:

$$[A] = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

Aplicar la ecuación 3 para el primer renglón (k = 1)

Para el segundo renglón (k = 2), con la ecuación 2 se obtiene:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

Y con la ecuación 3:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{55 - (6.1237)^2} = 4.1833$$

Para el renglón (k=3), la ecuación 2 con i = 1, da como resultado

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{55}{2.4495} = 22.454$$

Y con (i=2)

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{21} l_{31}}{l_{22}} = \frac{225 - 6.1237(22.454)}{4.1833} = 20.916$$

Y la ecuación 3 obtiene:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{979 - (22.454)^2 - (20.916)^2} = 6.1106$$

Con los valores obtenidos, la descomposición de Cholesky queda como:

$$[L] = \begin{bmatrix} 2.4495 & & \\ 6.1237 & 4.1833 & \\ 22.454 & 20.916 & 6.1106 \end{bmatrix}$$

Para verificar la descomposición obtenida, al sustituir junto con su traspuesta y realizar el producto, la matriz resultante en la ecuación (1), debe ser la matriz original [A].

[A]= [L][L]^t (Chapra & Canale, Descomposición de Cholesky, 2017).

$$A= \begin{pmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.1237 & 4.1833 & 0 \\ 22.454 & 20.916 & 6.1106 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.4495 & 6.1237 & 22.454 \\ 0 & 4.1833 & 20.916 \\ 0 & 0 & 6.1106 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2.4495 \cdot 2.4495 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 2.4495 \cdot 6.1237 + 0 \cdot 4.1833 + 0 \cdot 0 & 2.4495 \cdot 22.454 + 0 \cdot 20.916 + 0 \cdot 6.1106 \\ 6.1237 \cdot 2.4495 + 4.1833 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 6.1237 \cdot 6.1237 + 4.1833 \cdot 4.1833 + 0 \cdot 0 & 6.1237 \cdot 22.454 + 4.1833 \cdot 20.916 + 0 \cdot 6.1106 \\ 22.454 \cdot 2.4495 + 20.916 \cdot 0 + 6.1106 \cdot 0 & 22.454 \cdot 6.1237 + 20.916 \cdot 4.1833 + 6.1106 \cdot 0 & 22.454 \cdot 22.454 + 20.916 \cdot 20.916 + 6.1106 \cdot 6.1106 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6.00005025 & 15.00000315 & 55.001073 \\ 15.00000315 & 54.99970058 & 224.9994626 \\ 55.001073 & 224.9994626 & 979.00060\ldots \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

Ejercicios 11.5 y 11.6 propuestos del libro de Métodos Numéricos Para Ingenieros Quinta Edición de Steven C. Chapra

11.5. Ejecute a mano la descomposición de Cholesky del sistema simétrico siguiente:

$$\begin{bmatrix} 8 & 20 & 15 \\ 20 & 80 & 50 \\ 15 & 50 & 60 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 250 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

$k = 1$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{8} = 2,828427$$

$k = 2$

$$l_{2,1} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{20}{2,828427} = 7.071068$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{2,1}^2} = \sqrt{80 - (7,071068)^2} = 5,477225$$

$k = 3$

$$l_{3,1} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{15}{2,828427} = 5.303301$$

$$l_{3,2} = \frac{a_{3,2} - (l_{2,1} \cdot l_{31})}{l_{2,2}} = \frac{50 - (7,071068 \cdot 5,303301)}{5,477225} = 2.282177$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{3,3} - (l_{3,1}^2 + l_{3,2}^2)} = \sqrt{60 - (5.303301^2 + 2.282177^2)} = 5.163478$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 2,828427 & 0 & 0 \\ 7,071068 & 5,477225 & 0 \\ 5,303301 & 2,282177 & 5,163478 \end{bmatrix}$$

Solución de arriba hacia abajo $[L] \cdot [D] = [B]$

$$\begin{bmatrix} 2,828427 & 0 & 0 \\ 7,071068 & 5,477225 & 0 \\ 5,303301 & 2,282177 & 5,163478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 250 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$2,828427\, d_1 = 50 \qquad d_1 = 50 / 2,828427 = 17,677670$

$7.071068\, d_1 + 5.477225\, d_2 = 250$

$5.303301\, d_1 + 2,282177\, d_2 + 5.163478\, d_3 =$

$d_1 = 50 / 2,828424 \qquad d_2 = \frac{-2.0083118 2}{2.26.24142} \qquad d_3 = \frac{353,5521}{15.49190}$

$d_1 = 17.67760 \qquad d_2 = -8.876460 \qquad d_3 = 22.823065$

Solución de abajo hacia arriba

$[U] \cdot [X] = [D]$

$$\begin{bmatrix} 2,828427 & 7,071068 & 5,303301 \\ 0 & 5,477225 & 2,282177 \\ 0 & 0 & 5,163478 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,67760 \\ -8,876460 \\ 22,823065 \end{bmatrix}$$

$2,828427\, x_1 + 7,071068\, x_2 + 5,303301\, x_3 = 17,67760$

$5,477225\, x_2 + 2,282177\, x_3 = -8,876460$

$+ 5,163478\, x_3 = 22.823068$

$x_1 = 6,61802$

$x_2 = -3,46235$

$x_3 = 4,9206017$ //

11.6. Haga los mismos cálculos que el ejemplo 11.2, pero para el sistema simétrico que sigue.

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 152.6 \\ 585.6 \\ 2488.8 \end{Bmatrix}.$$

Emplee para solucionar los valores de a.

$k = 1$

$l_{11} = \sqrt{6} = 2.4495$

$k=2$

$$L_{21} = \frac{15}{2.4495} = 6.123724$$

$$l_{22} = \sqrt{55 - (6.7371)^2} = 4.183301$$

$k=3$

$$L_{31} = \frac{55}{2.4495} = 22.453656$$

$$L_{32} = \frac{a_{32} - (L_{21} \cdot L_{31})}{l_{22}} = \frac{225 - (6.123724 \cdot 22.453656)}{4.183301} = 20.916498$$

$$L_{33} = \sqrt{979 - (22.45366^2 + 20.916498^2)} = 6.110109$$

$$L = \begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 6.123724 & 4.18301 & 0 \\ 22.453656 & 20.916492 & 6.110109 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152.6 \\ 585.6 \\ 2488.8 \end{bmatrix}$$

$$2.449844\, d_1 = 152.6$$
$$6.1237243\, d_1 + 4.18933\, d_2 = 585.6$$
$$22.45365\, d_1 + 20.91649\, d_2 + 6.110109\, d_3 = 2488.8$$

$d_1 = 62.298690$
$d_2 = 48.789232$
$d_3 = 11.369255$

$[U]$

$$\begin{bmatrix} 2.4494847 & 6.1237243 & 22.45365 \\ 0 & 4.1863 & 20.91049 \\ 0 & 0 & 6.110109 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62.298690 \\ 48.789232 \\ 11.369255 \end{bmatrix}$$

$$2.449897 x_1 + 6.1237243 x_2 + 22.45365 x_3 = 62.298690$$
$$4.1863 x_2 + 20.91049 x_3 = 48.781232$$
$$6.110109 x_3 = 11.869255$$

$X_1 = 2.47904$
$X_2 = 2.35923$
$X_3 = 1.860702$

Ejercicio 11.7 propuesto del libro de Métodos Numéricos Para Ingenieros Quinta Edición de Steven C. Chapra (Chapra & Canale, Descomposicion de Cholesky, 2011)

"Tú debes ser el cambio que deseas ver en el mundo". Mahatma Gandhi

11.7. Calcular la descomposición de cholesky de

$$|A| = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

k=1

$$l_{11} = \sqrt{9} = 3$$

k=2

$$l_{21} = \frac{0}{3} = 0$$

$$L_{22} = \sqrt{25 - 0^2} = \sqrt{25-0} = \sqrt{25} = 5$$

k=3

$$L_{31} = \frac{0}{3} = 0$$

$$L_{32} = \frac{0 - (0 \cdot 0)}{5} = 0$$

$$L_{33} = \sqrt{4 - (0^2 + 0^2)} = \sqrt{4} = 2$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

¿Su resultado tiene sentido en términos de las ecuaciones (11.3) y (11.4)?

Solo tiene sentido para la 11.3 dado que es una matriz diagonal, por tanto el calculo con la ecuación (11,4) es innecesario por que siempre dará cero.

Bibliografía

- Chapra, S., & Canale, R. (2011). Descomposicion de Cholesky. En *Métodos numéricos para ingenieros* (pág. 250). Mexico: McGRAW-HILL.
- Chapra, S., & Canale, R. (2017). Descomposición de Cholesky. En *Métodos numéricos para ingenieros* (págs. 308 - 309). México D.F,: McGraw Hill.
- Grossman, S. (2008). Transpuesta de una Matriz. En *Algebra Lineal* (pág. 119). Mexico: McGRAW-HILL.