Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE-L

Nombre: Ismael Simbaña
NRC: 8231
Fecha: 03-01-2022

Tarea 5 U2

18.3 Ajuste un polinomio de interpolación de Newton de tercer orden para estimar log 10 con los datos del problema 18.1

$\log 8 = 0,9030900 \rightarrow \log 12 = 1,0791812$

$\log 9 = 0,9542425 \rightarrow \log 11 = 1,0413927$

$\therefore \; y = \log x$

	x	y
x_0	8	0,9030900
x_1	9	0,9542425
x_2	10	1,0791812
x_3	11	1,0413927

$b_0 = f(x_0) = f(8) = 0,9030900$

$$b_1 = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[9] - f[8]}{9-8} = \frac{0,9542425 - 0,9030900}{1} = 0,0511525$$

$$b_2 = \frac{\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} - \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{1,0791812 - 0,9542425}{11-9} - \frac{0,9542425 - 0,9030900}{9-8}}{11-8}$$

$= -0,0025258$

$$b_3 = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{-0,0014289 + 0,0025239}{12-8} = 0,0001442$$

$y = 0,9030900 + 0,0511525(x-8) - 0,0025258(x-8)(x-9) + (0,0001442)(x-8)(x-9)(x-11)$

$y = 0,0001442x^3 - 0,0067043x^2 + 0,1327425x + 0,143846$

$f(10) = 0,0001442(10)^3 - 0,0067043(10)^2 + 0,1327225(10) + 0,1438146 = 1,000045$

18.4 Dados los datos

1

x	1,6	2	2,5	3,2	4	4,5
$f(x)$	2	8	14	15	8	2

a) Calcule $f(2,8)$ con el uso de polinomios de interpolación de Newton de orden 1 a 3. Elija la secuencia de puntos más apropiada para alcanzar la máxima exactitud posible para sus estimaciones. b) Utilice la ecuación 18.18 para estimar el error de cada predicción.

Polinomio de Grado 1

x	y	$f(x_1, x_i)$
1,6	2	-
4,5	2	0

$$f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1, x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{2-2}{4,5-1,6} = 0$$

$y = b_0 + b_1(x - x_0)$

$y = 2 + 0(x - 1,6)$

$f(x) = 2$

$f(2,8) = 2$

Polinomio de Grado 2

x	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
1,6	2	-	-
3,2	15	8,125	-
4,5	2	-10	-6,25

$$f[x_1, x_0] = \frac{15-2}{3,2-1,6} = 8,125$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{2-15}{4,5-3,2} = -10$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{-10 - 8,125}{4,5 - 1,6} = -6,25$$

$y = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

$y = 2 + 8,125(x - 1,6) + (-6,25(x - 1,6)(x - 3,2)$

$y = 2 + 8,125(x) - 13 - 6,25x^2 - 3,2x - 1,6x + 5,12$

$y = -43 + 38,125x - 6,25x^2$

$f(2,8) = -43 + 38,125(2,8) - 6,25(2,8)^2 = 14,45$

Polinomio de grado 3

x	f[x]	f[x_i, x_j]	f[x_i, x_j, x_k]	f[x_i, x_j, x_k, x_l]
1,6	2	–	–	–
2	8	15	–	–
3,2	15	5,8333	-5,729167	–
4,5	2	-10	-6,333332	-0,208329

$$f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{8-2}{2-1,6} = 15$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{15-8}{3,2-2} = 5,83333$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{2-15}{4,5-3,2} = -10$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{5,83333 - 15}{3,2-1,6} = -5,729167$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1} = \frac{-10 - 5,83333}{4,5-2} = -6,333332$$

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0} = \frac{-6,333332 + 5,729167}{4,5-1,6} = -0,208329$$

$f(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = 2 + 15(x - 1,6) - 5,729167(x - 1,6)(x - 2) - 0,208329(x - 1,6)(x - 2)(x - 3,2)$

$f(x) = 2 + 15x - 24 - 5,729167x^2 + 20,6250012x - 18,333344 - 0,208329x^3 + 1,4166372x^2$

$-3,066003x + 2,133289$

$f(x) = -0,208329x^3 - 4,31253x^2 + 32,558397x - 38,2005$

$f(2,8) = -0,208329(2,8)^3 - 4,31253(2,8)^2 + 32,558397(2,8) - 38,20004) = 14,651298$

b. Calculo de errores

1. $R_n \quad f[x_1, x_0](x - x_0)$

   $R_{2,8} = 0, (x - 1,6) = 0$

2. $R_n = f[x_2, x_1, x_0](x, x_0)(x, x_1)$

   $R_{2,8} = -6,25(2,8 - 1,6)(2,8 - 2) = -6$

3. $R_n = f(x_3, x_2, x_1, x_0)[x, x_0][x - x_1][x, x_2]$

   $R_{2,8} = -0,208329(2,8 - 1,6)(2,8 - 2)(2,8 - 3,2) = 0,08$

18.5. Dados los datos

x	1	2	3	5	7	8
y	3	6	19	99	291	444

Calcule f(4) con el uso de polinomios de interpolación de Newton de orden 1 a 4. Elija los puntos base para obtener una buena exactitud

¿Qué indican los resultados en relación con el orden del polinomio que se emplea para generar los datos de la tabla?

x	$f[x_i]$	$f[x_i,x_j]$	$f[x_i,x_j,x_k]$	$f[x_i,x_j,x_k,x_l]$	$f[x_i,x_j,x_k,x_l,x_m]$	$f[x_i,x_j,x_k,x_l,x_m,x_n]$
1	3	-	-	-	-	-
2	6	3	-	-	-	-
3	19	13	5	-	-	-
5	99	40	9	1	-	-
7	291	96	14	1	0	-
8	444	153	19	1	0	0

$$f[x_1,x_0] = \frac{f[x_1,x_0]}{x_1,x_0} = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} = \frac{6-3}{2-1} = 3 \qquad f[x_2,x_1] = \frac{19-6}{3-2} = 13$$

$$f[x_3,x_2] = \frac{99-19}{5-3} = 40 \qquad f[x_4,x_3] = \frac{291-99}{7-5} = 96$$

$$f[x_5,x_4] = \frac{444-29}{8-7} = 153$$

$$f[x_2,x_1,x_0] = \frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0} = \frac{13-3}{3-1} = 5$$

$$f[x_3,x_2,x_1] = \frac{40-13}{5-2} = 9$$

$$f[x_4,x_3,x_2] = \frac{96-40}{7-3} = 14$$

$$f[x_5,x_4,x_3] = \frac{444-291}{8-5} = 19$$

$$f[x_3,x_2,x_1,x_0] = \frac{f[x_3,x_2,x_1]-f[x_2,x_1,x_0]}{x_3-x_0} = \frac{9-5}{5-1} = 1$$

$$f[x_4,x_3,x_2,x_1] = \frac{f[x_4,x_3,x_2]-f[x_3,x_2,x_1]}{x_4-x_1} = \frac{14-9}{7-2} = 1$$

$$f(x_5, x_4, x_3, x_2) = \frac{f[x_5, x_4, x_3] - f[x_4, x_3, x_2]}{x_5 - x_2} = \frac{19-14}{8-3} = 1$$

$$f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_4, x_3, x_2, x_1] - f[x_3, x_2, x_1, x_0]}{x_4 - x_0} = \frac{1-1}{7-1} = 0$$

$$f[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1] = \frac{f[x_5, x_4, x_3, x_2] - f[x_4, x_3, x_2, x_1]}{x_5 - x_4} = \frac{1-1}{8-2} = 0$$

$$f[x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{0-0}{8-1} = 0$$

Polinomio grado 1

$P(x) = 3 + 63(x-1) = 3 + 63x - 63$
$P(x) = 63x - 60$
$P(4) = 63(4) - 60 = 192$

Polinomio grado 2

$P_2(x) = P_1(x) + 5(x_1)(x-2) = 3x + 5(x^2 - 3x + 2)$
$P_2(x) = 5x^2 - 12x + 10 \qquad f(4) = 5(4)^2 - 12(4) + 10 = 42$

Polinomio grado 3

$P_3(x) = P_2(x) + 1(x-1)(x-2)(x-3) = 5x^2 - 12x + 10 + x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
$P_3(x) = x^3 - x^2 - x + 4 \rightarrow P(4) = 4^3 - 4^2 - 4 + 4 = 48$

Polinomio grado 4

$P_4(x) = P_3(x) + 0(x-1)(x-2)(x-3)(x-5) = x^3 (x^2) (-x) + 4 + 0$
$P_4(x) = x^3 - x^2 - x + 4 \qquad P(4) = 48$

A partir del polinomio 4 todos serán iguales al grado 3.