UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE
EXTENSIÓN LATACUNGA

DEPARTAMENTO: ENERGIA Y MECANICA

CARRERA: INGENIERÍA SOFTWARE

METODOS NUMERICOS

"PROYECTO CORRESPONDIENTE AL TERCER PARCIAL"

NOMBRES

- Acebo Travez Ricardo Javier
- Barahona Cumba Juan Carlos
- Inte Santafe Italo David
- Simbaña Pilataxi Ismael Alexander

FECHA DE ENTREGA

15/02/2022

OCTUBRE 2021– MARZO 2022

1. Tema: Desarrollo analítico y numérico del plano inclinado

2. Objetivos

2.1 General

- Desarrollar mediante cálculos numéricos y analíticos las fórmulas que rigen el fenómeno físico de un cuerpo sobre plano inclinado

2.2 Específicos

- Corroborar los diferentes cálculos numéricos del fenómeno físico mediante el empleo del del software de programación phyton
- Encontrar los principios y leyes físicas que describan el fenómeno del plano inclinado

3. Marco teórico

Plano inclinado

Las resbaladillas de los parques, los caminos empinados y las rampas de los camiones de carga son todos ejemplos de planos inclinados. Las pendientes o los planos inclinados son superficies diagonales sobre las cuales los objetos pueden estar en reposo, deslizarse o rodar hacia arriba o hacia abajo (Khan academy, 2019).

Ilustración 1 Plano inclinado

Fuente (Khan academy, 2019).

Los planos inclinados son útiles ya que pueden reducir la cantidad de fuerza requerida para mover un objeto verticalmente. Son considerados una de las seis máquinas clásicas simples.

Segunda ley de newton en planos inclinados

En la mayoría de los casos, resolvemos problemas que involucran fuerzas al usar la segunda ley de Newton para las direcciones vertical y horizontal. Pero para los planos inclinados, típicamente estamos preocupados con el movimiento paralelo a la superficie del plano inclinado, así que a menudo es más útil resolver la segunda ley de Newton para las direcciones paralela y perpendicular a la superficie inclinada (Khan academy, 2019).

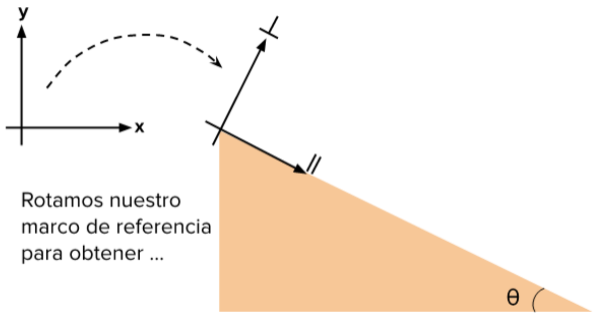


Ilustración 2 rotación de eje de referencia

Fuente (Khan academy, 2019).

Esto significa que típicamente estaremos usando la segunda ley de Newton para las direcciones perpendicular ⊥ y paralela ∥ a la superficie del plano inclinado.

$$a_{\perp} = \frac{\sum F_{\perp}}{m} \quad a_{\mathrm{II}} = \frac{\sum F_{\mathrm{II}}}{m}$$

Ya que la masa a menudo se desliza paralelamente a la superficie del plano inclinado y no se mueve perpendicularmente a esta, podemos casi siempre suponer que $a_{\perp} = 0$

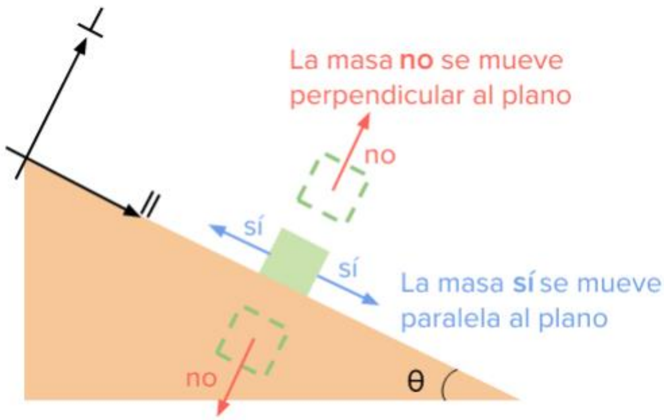


Ilustración 3 movimiento de la masa en el plano inclinado

Fuente (Khan academy, 2019).

Fricción

La fricción, fuerza de roce o fuerza de rozamiento es una fuerza existente entre dos superficies que se encuentren en contacto, y que se opone al movimiento, o sea, tiene dirección contraria al movimiento. Esta fuerza puede ser de dos tipos: estática (cuando se opone al inicio de un deslizamiento) o dinámica (cuando se opone al movimiento re La fricción, además, tiene un efecto en las superficies en contacto. A menudo es imperceptible, sin embargo, la energía cinética que se pierde por el rozamiento se transforma en calor, es decir las superficies se calientan por el roce. Incluso ambas pueden sufrir un desgaste (Concepto, 2020).

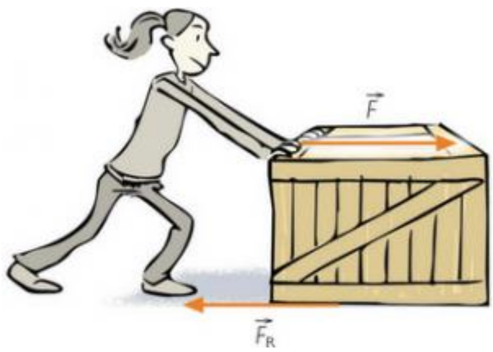


Ilustración 4 efecto de la fricción

Fuente (Concepto, 2020)

4. Desarrollo

4.1 Analítico

Para el desarrollo analítico del problema físico planteado se procede a trazar el diagrama de cuerpo libre en donde se toma en cuenta todas las fuerzas que interactúan en el auto de m sobre un plano inclinado

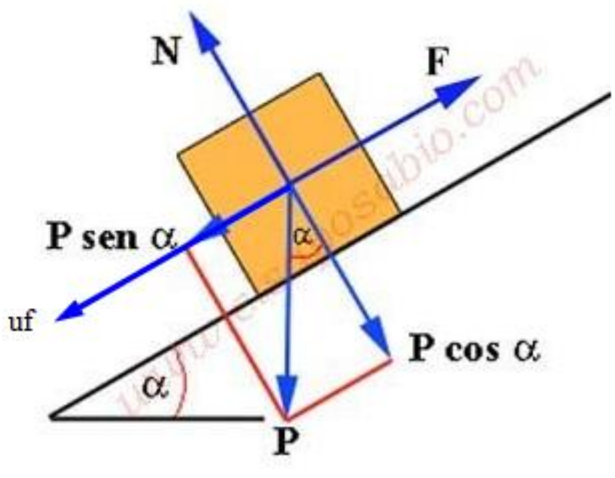


Ilustración 5 Diagrama de cuerpo libre

Fuente (Foro de fisica, 2018)

$$\sum F_y = 0$$

$$N - P_y = 0$$

$$N - (P * cos\alpha) = 0$$

$$\boldsymbol{N = (P * cos\alpha)}$$ ***Ecuación 1***

$$\sum F_x = ma$$

$$F - W_x - F_r = ma$$

$$F - (P * sen\alpha) - F_r = ma$$

$$F - (P * sen\alpha) - (\mu * N) = ma$$

$$F - (P * sen\alpha) - (\mu * (P * cos\alpha)) = ma$$

$$\boldsymbol{F - P(\mu * cos\alpha + sen\alpha) = ma}$$ ***Ecuación 2***

con las ecuaciones ya obtenidas se realiza el despeje de la aceleración, es importante recalcar que la aceleración será igual a la segunda derivada de la posición con respecto al tiempo quedando planteada así nuestra ecuación diferencial.

$$\boldsymbol{a} = \frac{F - P(\mu * cos\alpha + sen\alpha)}{m}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{F - P(\mu * cos\alpha + sen\alpha)}{m} = K$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = K$$

$$\int \frac{d^2x}{dt^2} = \int K\, dt$$

$$\frac{dx}{dt} = Kt + C_1$$

$$\int \frac{dx}{dt} = \int (Kt + C_1 t)\, dt$$

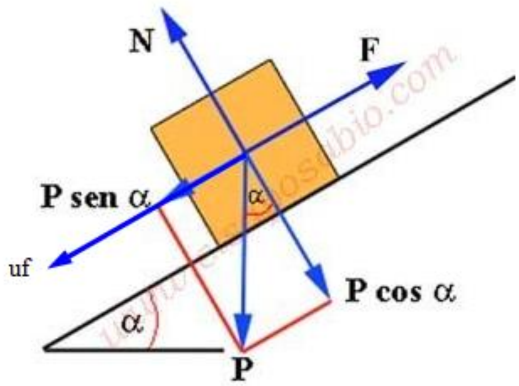
$$\boldsymbol{x = \frac{Kt^2}{2} + C_1 t + C_2}$$ **Ecuación de la posición**

$$\boldsymbol{v = Kt + C_1}$$ **Ecuación de la velocidad**

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{K} \qquad\qquad \textbf{Ecuación de la aceleración}$$

Resolución ejercicio planteado en el proyecto

Un cuerpo con una masa igual a 1kg se encuentra sobre un plano inclinado, como se muestra en la siguiente figura hallar su velocidad, desplazamiento y aceleración de acuerdo con las condiciones iniciales establecidas, nota el coeficiente de fricción establecida es igual a 0.8 (asfalto).



$\alpha = 45º$	$x(0) = 0$	$x(5) = ?$
$F = 10\ N$	$v(10) = 0.25\ m/s$	$v(8) = ?$
$m = 1\ kg$		

Determinación de la aceleración quien tendrá un valor constante

$$\boldsymbol{a} = \frac{F - P(\mu * cos\alpha + sen\alpha)}{m}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{F - P(\mu * cos\alpha + sen\alpha)}{m} = K$$

$$\frac{10\ N - (9.81\ N)(0.8 * cos(45) + sen(45))}{1} = K$$

$$\boldsymbol{-2.470091\ m/s^2 = K}$$

Aplicación de EDO

$$\frac{d^2x}{dt^2} = K$$

$$\int \frac{d^2x}{dt^2} = \int K\ dt$$

$$\frac{dx}{dt} = Kt + C_1$$

Aplicación de condiciones iniciales de velocidad y determinación de la ecuación de la velocidad en cualquier instante del tiempo

$$v(10) = 0.25\ m/s$$

$$0.25 = -2.470091(10) + C_1$$

$$C_1 = 24.950910$$

$$\boldsymbol{v = -2.470091t + 24.950910}$$

Aplicación de condiciones iniciales de posición y determinación de la ecuación de la posición en cualquier instante del tiempo

$$\int \frac{dx}{dt} = \int (-2.470091t + 24.950910)\ dt$$

$$x = \frac{-2.470091\ t^2}{2} + 24.950910t + C_2$$

$$x(0) = 0$$

$$0 = \frac{-2.470091\ (0)}{2} + 24.950910(0) + C_2$$

$$C_2 = 0$$

$$\boldsymbol{x = \frac{-2.470091\ t^2}{2} + 24.950910t}$$

Obtención de velocidad en tiempo igual a 8 segundos

$$v(8) = ?$$

$$v = -2.470091t + 24.950910$$

$$v = -2.470091(8) + 24.950910$$

$$\boldsymbol{v = 5.190182\, m/s}$$

Obtención de posición en tiempo igual a 5 segundos

$$x = \frac{-2.470091\ t^2}{2} + 24.950910t$$

$$x = \frac{-2.470091 * (5)^2}{2} + 24.950910(5)$$

$$\boldsymbol{x = 93.878413\ m}$$

4.2 Numérico

Método de Euler

Posición

Se realizará 15 iteraciones en el caso de la posición, con sus valores iniciales x(0) = 0 y se calculara para cuando x(15)= ?

$$i = 0$$

$$y = 0.0 + 0.3333333333333333 * 0.0 = 0.0$$

$$i = 1$$

$$y = 0.0 + 0.3333333333333333 * 8.179742722222223 = 0.0$$

$$i = 2$$

$$y = 2.726580907407407 + 0.3333333333333333 * 16.085030888888888 = 2.726580907407407$$

$$i = 3$$

$$y = 8.08825787037037 + 0.3333333333333333 * 23.715864500000002 = 8.08825787037037$$

$$i = 4$$

$$y = 15.993546037037037 + 0.3333333333333333 * 31.072243555555552 = 15.993546037037037$$

$$i = 5$$

$$y = 26.350960555555552 + 0.3333333333333333 * 38.15416805555555 = 26.350960555555552$$

$$i = 6$$

$$y = 39.06901657407407 + 0.3333333333333333 * 44.961637999999994 = 39.06901657407407$$

$$i = 7$$

$$y = 54.056229240740734 + 0.3333333333333333 * 51.49465338888888$$
$$= 54.056229240740734$$

$$i = 8$$

$$y = 71.2211137037037 + 0.3333333333333333 * 57.75321422222222$$
$$= 71.2211137037037$$

$$i = 9$$

$$y = 90.4721851111111 + 0.3333333333333333 * 63.73732050000001$$
$$= 90.4721851111111$$

$$i = 10$$

$$y = 111.7179586111111 + 0.3333333333333333 * 69.44697222222223$$
$$= 111.7179586111111$$

$$i = 11$$

$$y = 134.86694935185184 + 0.3333333333333333 * 74.88216938888888$$
$$= 134.86694935185184$$

$$i = 12$$

$$y = 159.82767248148147 + 0.3333333333333333 * 80.042912$$
$$= 159.82767248148147$$

$$i = 13$$

$$y = 186.50864314814814 + 0.3333333333333333 * 84.92920005555555$$
$$= 186.50864314814814$$

$$i = 14$$

$$y = 214.8183765 + 0.3333333333333333 * 89.54103355555554$$
$$= 214.8183765$$

Velocidad

Para la velocidad se realizarán 15 iteraciones, sus valores iniciales v(0)= 0 y se calculara para v(8)=?

$$i = 0$$

$$y = 0.0 + 0.5333333333333333 * 24.95091 = 0.0$$

$$i = 1$$

$$y = 13.307152 + 0.5333333333333333 * 23.633528133333336 = 13.307152$$

$$i = 2$$

$$y = 25.91170033777778 + 0.5333333333333333 * 22.316146266666667 = 25.91170033777778$$

$$i = 3$$

$$y = 37.813645013333335 + 0.5333333333333333 * 20.9987644 = 37.813645013333335$$

$$i = 4$$

$$y = 49.01298602666667 + 0.5333333333333333 * 19.681382533333334 = 49.01298602666667$$

$$i = 5$$

$$y = 59.509723377777775 + 0.5333333333333333 * 18.36400066666667 = 59.509723377777775$$

$$i = 6$$

$$y = 69.30385706666667 + 0.5333333333333333 * 17.0466188 = 69.30385706666667$$

$$i = 7$$

$$y = 78.39538709333334 + 0.5333333333333333 * 15.729236933333334 = 78.39538709333334$$

$$i = 8$$

$$y = 86.78431345777778 + 0.5333333333333333 * 14.411855066666668 = 86.78431345777778$$

$$i = 9$$

$$y = 94.47063616000001 + 0.5333333333333333 * 13.094473200000001 = 94.47063616000001$$

$$i = 10$$

$$y = 101.45435520000001 + 0.5333333333333333 * 11.777091333333335 = 101.45435520000001$$

$$i = 11$$

$$y = 107.73547057777779 + 0.5333333333333333 * 10.459709466666668 = 107.73547057777779$$

$$i = 12$$

$$y = 113.31398229333334 + 0.5333333333333333 * 9.142327600000002 = 113.31398229333334$$

$$i = 13$$

$$y = 118.18989034666667 + 0.5333333333333333 * 7.824945733333337 = 118.18989034666667$$

$$i = 14$$

$$y = 122.36319473777779 + 0.5333333333333333 * 6.507563866666668 = 122.36319473777779$$

Aceleración

Para la aceleración se realizarán 15 iteraciones, sus valores iniciales a(0)= 0 y se calculara para a(10)=?

$$i = 0$$

$$y = 0.0 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = 0.0$$

$$i = 1$$

$$y = -1.6467273333333332 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -1.6467273333333332$$

$$i = 2$$

$$y = -3.2934546666666664 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -3.2934546666666664$$

$$i = 3$$

$$y = -4.940182 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -4.940182$$

$$i = 4$$

$$y = -6.586909333333333 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -6.586909333333333$$

$$i = 5$$

$$y = -8.233636666666666 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -8.233636666666666$$

$$i = 6$$

$$y = -9.880363999999998 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -9.880363999999998$$

$$i = 7$$

$$y = -11.527091333333331 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -11.527091333333331$$

$$i = 8$$

$$y = -13.173818666666664 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -13.173818666666664$$

$$i = 9$$

$$y = -14.820545999999997 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -14.820545999999997$$

$$i = 10$$

$$y = -16.46727333333333 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -16.46727333333333$$

$$i = 11$$

$$y = -18.114000666666666 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -18.114000666666666$$

$$i = 12$$

$$y = -19.760728 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -19.760728$$

$$i = 13$$

$$y = -21.407455333333335 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -21.407455333333335$$

$$i = 14$$

$$y = -23.05418266666667 + 0.6666666666666666 * -2.470091 = -23.05418266666667$$

Método de Heun

Posición

Se realizará 15 iteraciones en el caso de la posición, con sus valores iniciales x(0) = 0 y se calculara para cuando x(15)= ?

$$i = 0$$

$$y *= 0.0 + 0.3333333333333333 * 0.0$$

$$y = 0.0 + (0.3333333333333333 * 0.0 + 8.179742722222223 / 2) = 1.3632904537037036$$

$$i = 1$$

$$y *= 1.3632904537037036 + 0.3333333333333333 * 8.179742722222223$$

$$y = 1.3632904537037036 + (0.3333333333333333 * 8.179742722222223 + 16.085030888888888 / 2) = 5.407419388888888$$

$$i = 2$$

$$y *= 5.407419388888888 + 0.3333333333333333 * 16.085030888888888$$

$$y = 5.407419388888888 + (0.3333333333333333 * 16.085030888888888 + 23.715864500000002 / 2) = 12.040901953703703$$

$$i = 3$$

$$y *= 12.040901953703703 + 0.3333333333333333 * 23.715864500000002$$

$$y = 12.040901953703703 + (0.3333333333333333 * 23.715864500000002 + 31.072243555555552 / 2) = 21.172253296296294$$

$$i = 4$$

$$y *= 21.172253296296294 + 0.3333333333333333 * 31.072243555555552$$

$$y = 21.172253296296294 + (0.3333333333333333 * 31.072243555555552 + 38.15416805555555 / 2) = 32.70998856481481$$

$$i = 5$$

$$y *= 32.70998856481481 + 0.3333333333333333 * 38.15416805555555$$

$$y = 32.70998856481481 + (0.3333333333333333 * 38.15416805555555 + 44.961637999999994 / 2) = 46.562622907407395$$

$$i = 6$$

$$y *= 46.562622907407395 + 0.3333333333333333 * 44.961637999999994$$

$$y = 46.562622907407395 + (0.3333333333333333 * 44.961637999999994 + 51.49465338888888 / 2) = 62.63867147222221$$

$$i = 7$$

$$y *= 62.63867147222221 + 0.3333333333333333 * 51.49465338888888$$

$$y = 62.63867147222221 + (0.3333333333333333 * 51.49465338888888 + 57.75321422222222 / 2) = 80.8466494074074$$

$$i = 8$$

$$y *= 80.8466494074074 + 0.3333333333333333 * 57.75321422222222$$

$$y = 80.8466494074074 + (0.3333333333333333 * 57.75321422222222 + 63.73732050000001 / 2) = 101.09507186111111$$

$$i = 9$$

$$y *= 101.09507186111111 + 0.3333333333333333 * 63.73732050000001$$

$$y = 101.09507186111111 + (0.3333333333333333 * 63.73732050000001 + 69.44697222222223 / 2) = 123.29245398148149$$

$$i = 10$$

$$y *= 123.29245398148149 + 0.3333333333333333 * 69.44697222222223$$

$$y = 123.29245398148149 + (0.3333333333333333 * 69.44697222222223 + 74.88216938888888 / 2) = 147.3473109166667$$

$$i = 11$$

$$y *= 147.3473109166667 + 0.3333333333333333 * 74.88216938888888$$

$$y = 147.3473109166667 + (0.3333333333333333 * 74.88216938888888 + 80.042912 / 2) = 173.16815781481483$$

$$i = 12$$

$$y *= 173.16815781481483 + 0.3333333333333333 * 80.042912$$

$$y = 173.16815781481483 + (0.3333333333333333 * 80.042912 + 84.92920005555555 / 2) = 200.66350982407408$$

$$i = 13$$

$$y *= 200.66350982407408 + 0.3333333333333333 * 84.92920005555555$$

$$y = 200.66350982407408 + (0.3333333333333333 * 84.92920005555555 + 89.54103355555554 / 2) = 229.7418820925926$$

$$i = 14$$

$$y *= 229.7418820925926 + 0.3333333333333333 * 89.54103355555554$$

$$y = 229.7418820925926 + (0.3333333333333333 * 89.54103355555554 + 93.8784125 / 2) = 260.3117897685185$$

Velocidad

Para la velocidad se realizarán 15 iteraciones, sus valores iniciales v(0)= 0 y se calculara para v(8)=?

$$y *= 0.0 + 0.5333333333333333 * 24.95091$$

$$y = 0.0 + (0.5333333333333333 * 24.95091 + 23.633528133333336 / 2) = 12.955850168888889$$

$$i = 1$$

$$y *= 12.955850168888889 + 0.5333333333333333 * 23.633528133333336$$

$$y = 12.955850168888889 + (0.5333333333333333 * 23.633528133333336 + 22.316146266666667 / 2) = 25.209096675555557$$

$$i = 2$$

$$y *= 25.209096675555557 + 0.5333333333333333 * 22.316146266666667$$

$$y = 25.209096675555557 + (0.5333333333333333 * 22.316146266666667 + 20.9987644 / 2) = 36.75973952$$

$$i = 3$$

$$y *= 36.75973952 + 0.5333333333333333 * 20.9987644$$

$$y = 36.75973952 + (0.5333333333333333 * 20.9987644 + 19.681382533333334 / 2) = 47.60777870222222$$

$$i = 4$$

$$y *= 47.60777870222222 + 0.5333333333333333 * 19.681382533333334$$

$$y = 47.60777870222222 + (0.5333333333333333 * 19.681382533333334 + 18.36400066666667 / 2) = 57.75321422222222$$

$$i = 5$$

$$y *= 57.75321422222222 + 0.5333333333333333 * 18.36400066666667$$

$$y = 57.75321422222222 + (0.5333333333333333 * 18.36400066666667 + 17.0466188 / 2) = 67.19604608$$

$$i = 6$$

$$y *= 67.19604608 + 0.5333333333333333 * 17.0466188$$

$$y = 67.19604608 + (0.5333333333333333 * 17.0466188 + 15.729236933333334 / 2) = 75.93627427555556$$

$$i = 7$$

$$y *= 75.93627427555556 + 0.5333333333333333 * 15.729236933333334$$

$$y = 75.93627427555556 + (0.5333333333333333 * 15.729236933333334 + 14.411855066666668 / 2) = 83.97389880888889$$

$$i = 8$$

$$y *= 83.97389880888889 + 0.5333333333333333 * 14.411855066666668$$

$$y = 83.97389880888889 + (0.5333333333333333 * 14.411855066666668 + 13.094473200000001 / 2) = 91.30891968$$

$$i = 9$$

$$y *= 91.30891968 + 0.5333333333333333 * 13.094473200000001$$

$$y = 91.30891968 + (0.5333333333333333 * 13.094473200000001 + 11.777091333333335 / 2) = 97.94133688888888$$

$$i = 10$$

$$y*= 97.94133688888888 + 0.5333333333333333 * 11.777091333333335$$

$$y = 97.94133688888888 + (0.5333333333333333 * 11.777091333333335 + 10.459709466666668 / 2) = 103.87115043555555$$

$$i = 11$$

$$y*= 103.87115043555555 + 0.5333333333333333 * 10.459709466666668$$

$$y = 103.87115043555555 + (0.5333333333333333 * 10.459709466666668 + 9.142327600000002 / 2) = 109.09836032$$

$$i = 12$$

$$y*= 109.09836032 + 0.5333333333333333 * 9.142327600000002$$

$$y = 109.09836032 + (0.5333333333333333 * 9.142327600000002 + 7.824945733333337 / 2) = 113.62296654222222$$

$$i = 13$$

$$y*= 113.62296654222222 + 0.5333333333333333 * 7.824945733333337$$

$$y = 113.62296654222222 + (0.5333333333333333 * 7.824945733333337 + 6.507563866666668 / 2) = 117.44496910222222$$

$$i = 14$$

$$y*= 117.44496910222222 + 0.5333333333333333 * 6.507563866666668$$

$$y = 117.44496910222222 + (0.5333333333333333 * 6.507563866666668 + 5.190182000000004 / 2) = 120.564368$$

Aceleración

Para la aceleración se realizarán 15 iteraciones, sus valores iniciales a(0)= 0 y se calculara para a(10)=?

$$i = 0$$

$$y*= 0.0 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = 0.0 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -1.6467273333333332$$

$$i = 1$$

$$y*= -1.6467273333333332 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -1.6467273333333332 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -3.2934546666666664$$

$$i = 2$$

$$y*= -3.2934546666666664 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -3.2934546666666664 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -4.940182$$

$$i = 3$$

$$y *= -4.940182 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -4.940182 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -6.586909333333333$$

$$i = 4$$

$$y *= -6.586909333333333 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -6.586909333333333 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -8.233636666666666$$

$$i = 5$$

$$y *= -8.233636666666666 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -8.233636666666666 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -9.880363999999998$$

$$i = 6$$

$$y *= -9.880363999999998 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -9.880363999999998 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -11.527091333333331$$

$$i = 7$$

$$y *= -11.527091333333331 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -11.527091333333331 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -13.173818666666664$$

$$i = 8$$

$$y *= -13.173818666666664 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -13.173818666666664 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -14.820545999999997$$

$$i = 9$$

$$y *= -14.820545999999997 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -14.820545999999997 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -16.46727333333333$$

$$i = 10$$

$$y *= -16.46727333333333 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -16.46727333333333 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -18.114000666666666$$

$$i = 11$$

$$y *= -18.114000666666666 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -18.114000666666666 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -19.760728$$

$$i = 12$$

$$y *= -19.760728 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -19.760728 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -21.407455333333335$$

$$i = 13$$

$$y *= -21.407455333333335 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -21.407455333333335 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -23.05418266666667$$

$$i = 14$$

$$y *= -23.05418266666667 + 0.6666666666666666 * -2.470091$$

$$y = -23.05418266666667 + (0.6666666666666666 * -2.470091 + -2.470091 / 2) = -24.700910000000004$$

Conclusiones

- Se a calculado los valores para cada factor con respecto al tiempo, en el caso de la posición con el método de Euler y Heun en su quinceava iteración no fue el mismo que la solución analítica, sin embargo, entre ambos su diferencia es algo considerable que se debería tomar en cuenta.
- En el calculo de la velocidad entre Euler y Heun fue muy similar, los valores de su última iteración no tenían una gran diferencia, aunque con la solución analítica sí.
- En la aceleración surge sus resultados en la iteración final con poca diferencia entre Euler y Heun. Cabe recalcar que K es una constante, pero derivamos con respecto al Tiempo así que podemos trabajar sin ningún problema

Método de Taylor 3^{er} orden

$$\left\{\begin{matrix} x = \dfrac{kt^2}{2} + C_1 + C_2 \\ v = kt + C_1 \\ a = k \end{matrix}\right\}$$

$$t = [0,10] segundos$$

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{h^2}{2} y_i'' + \frac{h^3}{6} y'''$$

- $x = \frac{kt}{2} + C_1 + C_2$

  $x' = kt \ , \quad x'' = k, \quad x'^3 = 1$

- $v = kt + C_1$

  $v' = k, \ v'' = 1, \ v'^3 = 0$

- $a = k$

$a' = 1, \ a'' = 0, \ a'^3 = 0$

$$y_{i+1} = \begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \\ a_0 \end{bmatrix} * h \begin{bmatrix} x' \\ v' \\ a' \end{bmatrix} + \frac{h^2}{2} * \begin{bmatrix} x'' \\ v'' \\ a'' \end{bmatrix} + \frac{h^3}{6} * \begin{bmatrix} x'^3 \\ v'^3 \\ a'^3 \end{bmatrix}$$

i = 0

$$y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -2{,}470091 * 0 \\ -2{,}470091 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1^2}{2} * \begin{bmatrix} -2{,}470091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1^3}{6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}068379 \\ -1{,}970091 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i = 1

$$y_2 = \begin{bmatrix} -1{,}068379 \\ -1{,}970091 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -2{,}470091 * 1 \\ -2{,}470091 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1^2}{2} * \begin{bmatrix} -2{,}470091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1^3}{6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -4{,}606849 \\ -3{,}940182 \\ 2 \end{bmatrix}$$

i = 2

$$y_3 = \begin{bmatrix} -4{,}606849 \\ -3{,}940182 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -2{,}470091 * 2 \\ -2{,}470091 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1^2}{2} * \begin{bmatrix} -2{,}470091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1^3}{6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -10{,}61541 \\ -5{,}910273 \\ 3 \end{bmatrix}$$

i = 3

$$y_4 = \begin{bmatrix} -10,61541 \\ -5,910273 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -2,470091 * 3 \\ -2,470091 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1^2}{2} * \begin{bmatrix} -2,470091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1^3}{6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19,09406 \\ -7,880364 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i = 4

$$y_5 = \begin{bmatrix} -19,09406 \\ -7,880364 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -2,470091 * 4 \\ -2,470091 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1^2}{2} * \begin{bmatrix} -2,470091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1^3}{6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30,04280 \\ -9,850455 \\ 5 \end{bmatrix}$$

i = 5

$$y_6 = \begin{bmatrix} -30,04280 \\ -9,850455 \\ 5 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -2,470091 * 5 \\ -2,470091 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1^2}{2} * \begin{bmatrix} -2,470091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1^3}{6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -43,461638 \\ -11,820546 \\ 6 \end{bmatrix}$$

i = 6

$$y_7 = \begin{bmatrix} -43,461638 \\ -11,820546 \\ 6 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -2,470091 * 6 \\ -2,470091 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1^2}{2} * \begin{bmatrix} -2,470091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1^3}{6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -59,350563 \\ -13,790637 \\ 7 \end{bmatrix}$$

i = 7

$$y_9 = \begin{bmatrix} -59,350563 \\ -13,790637 \\ 7 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -2,470091 * 7 \\ -2,470091 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1^2}{2} * \begin{bmatrix} -2,470091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1^3}{6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -77,709579 \\ -15,760728 \\ 8 \end{bmatrix}$$

i = 8

$$y_{10} = \begin{bmatrix} -77{,}709579 \\ -15{,}760728 \\ 8 \end{bmatrix} 1 * \begin{bmatrix} -2{,}470091 * 8 \\ -2{,}470091 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1^2}{2} * \begin{bmatrix} -2{,}470091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1^3}{6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -98{,}538686 \\ -17{,}730819 \\ 9 \end{bmatrix}$$

i = 9

$$y_{11} = \begin{bmatrix} -98{,}538686 \\ -17{,}730819 \\ 9 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} -2{,}470091 * 9 \\ -2{,}470091 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1^2}{2} * \begin{bmatrix} -2{,}470091 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1^3}{6} * \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -121{,}837883 \\ -19{,}70091 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- **Método de Runge Kutta 4to Orden**

Ecuación de la posición

Se toman los siguientes datos para la resolución del sistema

$y(0) = 0$; $h = 0.07$; $y(10)$; $\alpha = 45°$

i=0

$$k_1 = 0.07 * f(0{,}0) = -0.649507$$
$$k_2 = 0.07 * f(0.035, -0.32475) = -0.62547$$
$$k_3 = 0.07 * f(0.035, -0.62547) = -0.62547$$
$$k_4 = 0.07 * (0.07, -0.62547) = -0.60143$$
$$y = \frac{0 - 0.649507 - 1.25094 - 1.25094 - 0.60143}{6} = -0.62547$$

i=1

$$k_1 = 0.07 * f(0.07, -0.62547) = -0.60143$$
$$k_2 = 0.07 * f(0{,}105, -0.92619) = -0.577404$$
$$k_3 = 0.07 * f(0.105, -0.91417) = -0.577404$$
$$k_4 = 0.07 * (0.14, -1.20287) = -0.55336$$
$$y = \frac{-0.62547 - 0.60143 - 1.154808 - 1.154808 - 0.53}{6} = -1.20287$$

i=2

$$k_1 = 0.07 * f(0.14, -1.20287) = -0.55336$$
$$k_2 = 0.07 * f(0.175, -1.47956) = -0.52933$$
$$k_3 = 0.07 * f(0.175, -1.46754) = -0.52933$$
$$k_4 = 0.07 * (0.21, -1.73221) = -0.5053007$$
$$y = \frac{-1.20287 - 0.55336 - 1.05867 - 1.05867 - 0.5053007}{6} = -1.73221$$

i=3

$$k_1 = 0.07 * f(0.21, -1.73221) = -0.5053007$$
$$k_2 = 0.07 * f(0.245, -1.98486) = -0.48126$$
$$k_3 = 0.07 * f(0.245, -1.97284) = -0.48126$$
$$k_4 = 0.07 * (0.28, -2.21347) = -0.45723$$
$$y = \frac{-1.73221 - 0.5053007 - 0.96253 - 0.96253 - 0.45723}{6} = -2.21347$$

i=4

$$k_1 = 0.07 * f(0.28, -2.21347) = -0.45723$$
$$k_2 = 0.07 * f(0.315, -2.44209) = -0.43319$$
$$k_3 = 0.07 * f(0.315, -2.43007) = -0.43319$$
$$k_4 = 0.07 * f(0.35, -2.64667) = -0.40916$$
$$y = \frac{(-2.21347 + -0.45723 + -0.86639 + -0.86639 + -0.40916)}{6} = -2.64667$$

i=5

$$k_1 = 0.07 * f(0.35, -2.64667) = -0.40916$$
$$k_2 = 0.07 * f(0.385, -2.85125) = -0.38512$$
$$k_3 = 0.07 * f(0.385, -2.83924) = -0.38512$$
$$k_4 = 0.07 * f(0.42, -3.03180) = -0.36109$$
$$y = \frac{(-2.64667 + -0.40916 + -0.77025 + -0.77025 + -0.36109)}{6} = -3.03180$$

Ecuación de la velocidad

Se toman los siguientes datos para la resolución del sistema

$v = -g * u * sen(\alpha) - g * \cos(\alpha) + g$; $y(0) = 0$; $h = 0.07$; $y(10)$; $\alpha = 45°$

i=0

$$k_1 = 0.07 * f(0.0, 0.0) = 0.20909$$
$$k_2 = 0.07 * f(0.035, 0.10454) = 0.20909$$
$$k_3 = 0.07 * f(0.035, 0.10454) = 0.20909$$
$$k_4 = 0.07 * f(0.07, 0.20909) = 0.20909$$
$$y = \frac{(0.0 + 0.20909 + 0.41819 + 0.41819 + 0.20909)}{6} = 0.20909$$

i=1

$$k_1 = 0.07 * f(0.07, 0.20909) = 0.20909$$
$$k_2 = 0.07 * f(0.105, 0.31364) = 0.20909$$
$$k_3 = 0.07 * f(0.105, 0.31364) = 0.20909$$
$$k_4 = 0.07 * f(0.14, 0.41819) = 0.20909$$
$$y = \frac{(0.20909 + 0.20909 + 0.41819 + 0.41819 + 0.20909)}{6} = 0.41819$$

i=2

$$k_1 = 0.07 * f(0.14, 0.41819) = 0.20909$$
$$k_2 = 0.07 * f(0.175, 0.52274) = 0.20909$$
$$k_3 = 0.07 * f(0.175, 0.52274) = 0.20909$$
$$k_4 = 0.07 * f(0.21, 0.62729) = 0.20909$$
$$y = (0.41819 + 0.20909 + 0.41819 + 0.41819 + 0.20909)/6 = 0.62729$$

i=3

$$k_1 = 0.07 * f(0.21, 0.62729) = 0.20909$$
$$k_2 = 0.07 * f(0.245, 0.73184) = 0.20909$$
$$k_3 = 0.07 * f(0.245, 0.73184) = 0.20909$$
$$k_4 = 0.07 * f(0.28, 0.83639) = 0.20909$$
$$y = (0.62729 + 0.20909 + 0.41819 + 0.41819 + 0.20909)/6 = 0.83639$$

i=4

$$k_1 = \ f(\,0.28\,,0.83639\,) = \ 0.20909$$
$$k_2 = 0.07\ *\ f(\,0.315\,,0.94094\,)\ = \ 0.20909$$
$$k_3 = \ 0.07\ *\ f(\,0.315\,,0.94094\,)\ = \ 0.20909$$
$$k_4 = 0.07\ *\ f(\,0.35\,,1.04549)\ = \ 0.20909$$
$$y = \frac{(0.83639 + \ 0.20909\ +\ 0.41819\ +\ 0.41819\ +\ 0.20909)}{6} = \ 1.04549$$

i=5

$$k_1 = \ \ 0.07\ *\ f(\,0.35\,,1.04549)\ = \ 0.20909$$
$$k_2 = 0.07\ *\ f(\,0.385\,,1.15004\,)\ = \ 0.20909$$
$$k_3 = \ 0.07\ *\ f(\,0.385\,,1.15004\,)\ = \ 0.20909$$
$$k_4 = 0.07\ *\ f(\,0.42\,,1.25458)\ = \ 0.20909$$
$$y = \frac{1.04549 + \ 0.20909\ +\ 0.41819 + \ 0.41819\ +\ 0.20909}{6} = \ 1.12458$$

Ecuación de la aceleración

Se reduce el orden de la EDO

A partir de la reducción de orden se emplea el siguiente sistema

$$a = g(sen(\alpha) - u * \cos(\alpha))\ \ ; \qquad y(0) = 0\ \ ;\ \ h = 0.07\ \ ;\ \ y(15)\,;\ \alpha = 45°$$

i=0

$$k_1 = 0.07\ *\ f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_2 = \ 0.07\ *\ f\left(\begin{bmatrix} 0.035 \\ 0{,}035 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25608 \end{bmatrix}\right) = \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_3 = 0.07\ * f\left(\begin{bmatrix} 0.035 \\ 0.035 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0.25608 \end{bmatrix}\right) = \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_4 = 0.07\ *\ f\left(\begin{bmatrix} 0.07 \\ 0.07 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}\right)\ = \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{0\ +\ 0.51216\ +\ 1.02433\ +\ 1.02433\ +\ 0.51216}{6} \end{bmatrix} = \ \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$

i=1

$$k_1 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.07 & 0 \\ 0.07 , & 0.51216 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_2 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.105 & 0 \\ 0,105 , & 0.76825 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_3 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.105 & 0 \\ 0.105 , & 0.76825 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_4 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.14 & 0 \\ 0.14 , & 1.02433 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{(0.51216 + 0.51216 + 1.02433 + 1.02433 + 0.51216)}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.02433 \end{bmatrix}$$

i=2

$$k_1 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.14 & 0 \\ 0.14 , & 1.02433 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_2 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.175 & 0 \\ 0,175 , & 1.28041 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_3 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.175 & 0 \\ 0.175 , & 1.28041 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_4 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.21 & 0 \\ 0.21 , & 1.536503 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{(1.02433 + 0.51216 + 1.02433 + 1.02433 + 0.51216)}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.536503 \end{bmatrix}$$

i=3

$$k_1 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.21 & 0 \\ 0.21 , & 1.536503 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_2 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.245 & 0 \\ 0,245 , & 1.79258 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_3 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.245 & 0 \\ 0.245 , & 1.79258 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_4 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.28 & 0 \\ 0.28 , & 2.04867 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{(1.536503 + 0.51216 + 1.02433 + 1.02433 + 0.512167)}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.04867 \end{bmatrix}$$

i=4

$$k_1 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.28 \\ 0.28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2.04867 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_2 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.245 \\ 0,245 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2.30475 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_3 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.245 \\ 0.245 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2.30475 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_4 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.28 \\ 0.28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2.56083 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{(2.04867 + 0.51216 + 1.02433 + 1.02433 + 0.51216)}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.56083 \end{bmatrix}$$

i=5

$$k_1 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.35 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2.56083 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_2 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.385 \\ 0,385 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2.81692 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_3 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.385 \\ 0.385 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2.81692 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$k_4 = 0.07 * f\left(\begin{bmatrix} 0.385 \\ 0.42 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3.073006 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.51216 \end{bmatrix}$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{(2.56083 + 0.51216 + 1.02433 + 1.02433 + 0.51216)}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3.073006 \end{bmatrix}$$

Conclusiones

Después de haberse realizado el método de nuestro aumento (h), aunque al comparar el método con la solución de la ecuación sin necesidad del método, podemos darnos cuenta que la exactitud del método depende del tamaño del incremento (h) ósea que a mayor sea el valor del incremento menor será la exactitud del método y a menor sea el valor mayor exactitud tendrá el método. Para comprobar esto se anexa la ecuación diferencial resuelta y sus valores para los intervalos con incremento.

5. Conclusiones

- A lo largo del desarrollo numérico y analítico del fenómeno físico en el cual interactúa el plano inclinado y una masa m se logro determinar las formulas que rigen este fenómeno no obstante es necesario recalcar que el método numérico para la obtención de estas presenta un error significativo el cual se trato de menorar de valor con el uso de las diferentes formas de resolución de EDOS vistas en el transcurso del segundo parcial de métodos numéricos

- Mediante el uso de softwares matemáticos se logró corroborar los diferentes resultados obtenidos en el transcurso del proyecto

7. Bibliografía

Concepto. (25 de Febrero de 2020). Obtenido de https://concepto.de/friccion/

Foro de fisica. (14 de Febrero de 2018). Obtenido de https://forum.lawebdefisica.com/forum/el-aula/mec%C3%A1nica-newtoniana/8099-sobre-planos-inclinados

Khan academy. (21 de Febrero de 2019). Obtenido de https://es.khanacademy.org/science/physics/forces-newtons-laws/inclined-planes-friction/a/what-are-inclines#:~:text=Las%20pendientes%20o%20los%20planos,para%20mover%20un%20objeto%20verticalmente.

8. Anexos

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Feb 10 10:47:54 2022

@author: Juan
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
#from math import *
from tabulate import tabulate

#metodo de Runge - Kutta de primer orden

def RK1(xi, yi, xf, h):
  n = (xf - xi)/h                                      #cantidad de
intervalos
  x = np.linspace(xi, xf, int(n+1))                    #valores de x
  yf=[]                                                #aproximacion de la
integral de f'x
  fi = []                                              #derivada f'x
  k1v = []                                             #vector de k1
  yf.append(yi)
  er = []
  er.append("--")
```

```
  k1v.append("--")

  for i in range (int(n)):
    k1 = f1(x[i], yf[i])
    yf.append(yf[i] + (k1)*h)
    er.append(abs((yf[i+1] - yf[i])*100/yf[i]))
    k1v.append(k1)

  return (x, yf, k1v, er)

#-----------------------------------------------------------------------
-------
#metodo de Runge - Kutta de segundo orden

def RK2(xi, yi, xf, h):
  n = (xf - xi)/h                                      #cantidad de
intervalos
  x = np.linspace(xi, xf, int(n+1))                    #valores de x
  yf=[]                                                #aproximacion de la
integral de f'x
  fi = []                                              #derivada f'x
  k1v = []                                             #vector de k1
  k2v = []                                             #vector de k2
  yf.append(yi)
  er = []
  er.append("--")
  k1v.append("--")
  k2v.append("--")
  #a2 = 1/2                                             #Valor a2
equivalente al Metodo Heun
  #a2 = 1                                               #Valor a2
equivalente al Metodo del punto medio
  a2 = 2/3                                            #Valor a2
equivalente al Metodo de Ralston
  a1 = 1 - a2
  p1 = 1/(2*a2)
  q11 = 1/(2*a2)

  for i in range (int(n)):
    k1 = f1(x[i], yf[i])
    k2 = f1(x[i] + p1*h, yf[i] + q11*k1*h)
    yf.append(yf[i] + (a1*k1 + a2*k2)*h)
    er.append(abs((yf[i+1] - yf[i])*100/yf[i]))
    k1v.append(k1)
    k2v.append(k2)

  return (x, yf, k1v, k2v, er)
```

```
#-----------------------------------------------------------------------
-------
#metodo de Runge - Kutta de cuarto orden

def RK4(xi, yi, xf, h):
  n = (xf - xi)/h                                    #cantidad de
intervalos
  x = np.linspace(xi, xf, int(n+1))                  #valores de x
  yf=[]                                              #aproximacion de la
integral de f'x
  fi = []                                            #derivada f'x
  k1v = []                                           #vector de k1
  k2v = []                                           #vector de k2
  k3v = []                                           #vector de k3
  k4v = []                                           #vector de k4
  yf.append(yi)
  er = []
  er.append("--")
  k1v.append("--")
  k2v.append("--")
  k3v.append("--")
  k4v.append("--")

  for i in range (int(n)):
    k1 = f1(x[i], yf[i])
    k2 = f1(x[i] + (1/2)*h, yf[i] + (1/2)*k1*h)
    k3 = f1(x[i] + (1/2)*h, yf[i] + (1/2)*k2*h)
    k4 = f1(x[i] + h, yf[i] + k3*h)
    yf.append(yf[i] + (1/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*h)
    er.append(abs((yf[i+1] - yf[i])*100/yf[i]))
    k1v.append(k1)
    k2v.append(k2)
    k3v.append(k3)
    k4v.append(k4)

  return (x, yf, k1v, k2v, k3v, k4v, er)
#Funcion ecuacion diferencial de primer orden f(x,y)
def f1(x, y):
  dvy1 = -2*x + y*x
  return (dvy1)

def f11(x, y):
  dvy1 = -2 + (-2*x + y*x)*x + y   #no importa
  return (dvy1)

def f12(x, y):
  dvy1 = -2 + (-2*x + y*x)*x + y     #No importa
  return (dvy1)
```

```python
#Solucion analitica
def y(x):
  fx = np.exp((2/3)*x**3 + 0.9996)
  return (fx)

#Valores iniciales
xi = 1                                      #Valor inicial de 'x'
yi = -3                                     #Valor inicial de 'y'

#Limite superior de integracion
xf = 2                                      #Valor final de 'x'

#Tamaño de Paso o incremento
h1 = 0.1                                    #Tamaño de paso 1


#Runge - Kutta de 1er orden
x1_RK1, yf1_RK1, k11_RK1, e1_RK1 = RK1(xi, yi, xf, h1)

#Runge - Kutta de 2do orden
x1_RK2, yf1_RK2, k11_RK2, k12_RK2, e1_RK2 = RK2(xi, yi, xf, h1)

#Runge - Kutta de 4to orden
x1, yf1, k11, k12, k13, k14, e1 = RK4(xi, yi, xf, h1)


#Runge-Kutta de 1er orden

print("RUNGE - KUTTA 1er orden")
print(" ")

#Tabla 1
n1 = len(x1)
tabla1 = []                               #tabla de datos
#Llenar la tabla de datos
for i in range(n1):
  tabla1.append([x1_RK1[i], yf1_RK1[i], k11_RK1[i], e1_RK1[i]])

print("tabla de datos 1")
print(" ")
print(tabulate(tabla1, headers=['x', 'y', 'k1', 'er(%)']))
print(" ")
print(" ")

#-----------------------------------------------------------------------
------
#Runge-Kutta de 2do orden
print(" ")
print(" ")
```

```
print("RUNGE - KUTTA 2do orden")
print(" ")

#Tabla 1
n1 = len(x1)
tabla1 = []                          #tabla de datos
#Llenar la tabla de datos
for i in range(n1):
  tabla1.append([x1_RK2[i], yf1_RK2[i], k11_RK2[i], k12_RK2[i], 
e1_RK2[i]])

print("tabla de datos 1")
print(" ")
print(tabulate(tabla1, headers=['x', 'y', 'k1', 'k2', 'er(%)']))
print(" ")
print(" ")

#-------------------------------------------------------------------------
------
#Runge-Kutta de 4to orden
print(" ")
print(" ")
print("RUNGE - KUTTA 4to orden")
print(" ")

#Tabla 1
n1 = len(x1)
tabla1 = []                          #tabla de datos
#Llenar la tabla de datos
for i in range(n1):
  tabla1.append([x1[i], yf1[i], k11[i], k12[i], k13[i], k14[i], e1[i]])

print("tabla de datos 1")
print(" ")
print(tabulate(tabla1, headers=['x', 'y', 'k1', 'k2', 'k3', 'k4', 
'er(%)']))
print(" ")
print(" ")

import sympy
from sympy import *

#usamos el procedimiento de:
#https://relopezbriega.github.io/blog/2016/01/10/ecuaciones-
diferenciales-con-python/

# Resolviendo ecuación diferencial
# defino las incognitas
xs = sympy.Symbol('x')
```

```
ys = sympy.Function('y')
e = sympy.Symbol('e')

# expreso la ecuacion
fs = -2*xs + ys(xs)*xs
sympy.Eq(ys(xs).diff(xs), fs)
# Condición inicial
ics = {ys(xi): yi}

# Resolviendo la ecuación
edo_sol = sympy.dsolve(ys(xs).diff(xs) - fs)
edo_sol

#imprimimos la solucion, para copiar la expresion y usarla mas adelante
print(edo_sol)

#Reemplazamos los valores de la condición inicial en nuestra ecuación.

C_eq = sympy.Eq(edo_sol.lhs.subs(xs, xi).subs(ics), edo_sol.rhs.subs(xs,
xi))
C_eq

sympy.solve(C_eq)


#Definimos la funcion con la solución analitica
def yanalitic(x, C1):
  ysolv=C1*exp(x**2/2) + 2
  return (ysolv)

#intervalo de evaluacion de la solución analitica
h4 = h1
n4 = (xf - xi)/h4                                         #cantidad de
intervalos
x4 = np.linspace(xi, xf, int(n4+1))                       #valores de x
#yf4 = yanalitic(x4, 2)
#x4 = np.array([1, 2])
yf4 = []
for i in range(len(x4)):
  yf4.append(yanalitic(x4[i], -5*np.exp(-1/2)))



#Calculo del error de la aproximacion

yf4abs = yf4[len(yf4) - 1]

er11 = abs((yf1_RK1[len(yf1_RK1) - 1] - yf4abs)/yf4abs)*100
er21 = abs((yf1_RK2[len(yf1_RK2) - 1] - yf4abs)/yf4abs)*100
```

```python
er31 = abs((yf1[len(yf1) - 1] - yf4abs)/yf4abs)*100

print(er11, er21, er31)


#-----------------------------------------------------------------------
------
#Runge-Kutta de 2do, 3er y 4to orden
plt.figure(figsize=(15, 12))
plt.plot(x1_RK1, yf1_RK1, '-r', label = "RK 1er orden h = " + str(h1))
plt.plot(x1_RK2, yf1_RK2, '-g', label = "RK 2do orden h = " + str(h1))
plt.plot(x1, yf1, '-b', label = "RK 4to orden h = " + str(h1))
plt.plot(x4, yf4, 'y', label = "solucion analitica = " + str(h4))
#plt.axis([0, 6, 0, 20])
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.title("Grafica de la funcion y = f(x)")
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```