Universidad de la Fuerzas Armadas ESPE - L

Nombre: Ismael Simbaña
Fecha: 20/01/2022

Métodos de integración

1. Teoría, demostración de las expresiones numéricas

Regla del Trapecio

La regla del trapecio es la primera de las fórmulas cerradas de integración de Newton-Cotes. Corresponde al caso donde el polinomio de primer grado:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_1(x)\,dx$$

Una línea recta se puede representar como:

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

E integrado se obtiene

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Demostración

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_a^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^{x_1} P_1(x)dx + \int_a^{x_2} P_2(x)dx + \cdots + \int_a^b P_n(x)dx$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{i+1}(x)dx = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(h)$$

$$\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(h) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(h) + \cdots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}(h)$$

$$\frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a + 2h) + \cdots + f(b)]$$

Regla de Boole

Si tienes una función f(x) y quieres aproximar:

La regla de Boole consiste en aproximar la función mediante un polinomio de grado cuatro, considerando cinco valores de la misma distancia en [a, b].

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

Demostración

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_4(x)dx$$

$$I = (b-a)\frac{7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)}{90}$$

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$$

Gauss Legendre

Se escogen los “mejores” x0, x1...xn ∈ [a, b], de tal manera que la aproximación sea exacta al menos, para polinomios de grado menor o igual a 2n + 1 y su fórmula de cuadratura esta referente a los nodos y los presos que hay que usar estos están tabulados y pueden conseguirse fácilmente en manual de fórmulas y tablas donde se puede hablar de la integración numérica y las tablas de matemáticas estos se relacionan los valores correspondientes a las aproximaciones

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)dx$$

Demostración:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

$$I = \frac{b-a}{2}z + \frac{a+b}{2}, \quad dx = \frac{b-a}{2}dz$$

$$I = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} F\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{a+b}{2}\right)dz = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(z)dz$$

$$f(z) \coloneqq F(\frac{b-a}{2}z + \frac{a+b}{2})$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)dx$$

$$I = \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} F\left(\left(\frac{b-a}{2}z + \frac{a+b}{2}\right)\right) + E_n$$

2. Ejercicios

Regla del Trapecio

1) Aproximar la siguiente integral con 6 subintervalos, realizar mediante el método del trapecio

$$\int_{0=a}^{\pi=b} \operatorname{sen}(x)\,dx$$

n	x	y=f(x)
0	0	0
1	$\pi/6$	$1/2$
2	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$
3	$\pi/2$	1
4	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$
5	$5\pi/6$	$1/2$
6	π	0

$N=6$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi-0}{6}=\pi/6$$

$$I=\frac{h}{2}\left[y_0+2\sum R+y_n\right]$$

$$I=\frac{\pi/6}{2}\cdot\left[0+2\left(1/2+\sqrt{3}/2+1+\sqrt{3}/2+1/2\right)+0\right.$$

$$I=1.9541\ u^2$$

2) Use la regla del Trapecio con dos segmentos para estimar la integral de $f(x)=0,2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$ desde $a=0$ hasta $b=0,8$.

$$\int_0^{0,8} 0,2+25x-200x^2+675x^3-900x^4+400x^5$$

$f(0)=0,2$ $\quad$ $f(0,4)=2,456$ $\quad$ $f=(0,8)=1,0688$

$$Error=1.640333-1,0688=0,57173$$

$$Er=\left|\frac{1,64533-1,068}{1,64533}\right|\cdot100\%=34,85\%$$

Regla de Boole

Calcule el valor de los segmentos de la siguiente integral aplicando la regla de Boole con 5 puntos

$$\int_1^2 x^2 e^{-x^2} dx \qquad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$x_0 = 1$ $\quad f(x_0) = 0,367879$

$x_1 = 5/4$ $\quad f(x_1) = 0,327517$

$x_2 = 3/2$ $\quad f(x_2) = 0,237148$

$x_3 = 7/4$ $\quad f(x_3) = 0,143235$

$x_4 = 2$ $\quad f(x_4) = 0,073266$

Reemplazo

$$\int_1^2 x^2 e^{-x^2} dx = \frac{2(1/4)}{45}\left(7(0,367879) + 32(0,327517) + 12(0,237148) + \ldots\right.$$

$$\ldots \left. 32(0,143235) + 7(0,073266)\right)$$

$$= \frac{0,5}{4,5}(20,997856)$$

$$= 0,233309$$

$$\text{Error} = \left| \frac{0,233253 - 0,233309}{0,233253} \right| \cdot 100 = 0,02\%$$

- Regla de Gauss Legendre 3 puntos

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = G3f = \frac{1}{9}\left(5 f\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right) + 8 f(0) + 5f\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)\right)$$

- Usamos la cuadratura G3 para aproximar $\ln 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x}$ sabiendo

$$\ln 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{2du}{2u+3}$$

$$\ln 5 = \frac{1}{9}\left[5\left(\frac{2}{2\sqrt{-\frac{3}{5}}+3}\right) + 5\left(\frac{2}{2\sqrt{\frac{3}{5}}+3}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left(3{,}446359 + 2{,}666667 + 1{,}099006\right)$$

$$= 1{,}602694 \,//$$

$$\text{Error} = \left|\frac{1{,}602694 - 1{,}602694}{1{,}609438}\right| \cdot 100 = 0{,}41\%$$

2) Calcule numericamente la integral utilizando Gauss-Legendre con 2 puntos

$$\int_1^2 \frac{(2x^2+1)e^{-x^2}}{x^2}\,dx$$

$$I = \frac{2-1}{2}\left[\lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left[1 \cdot f\left(\frac{b-a}{2} \cdot t_1 + \frac{a+b}{2}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{b-a}{2} \cdot t_2 + \frac{a+b}{2}\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left[1 \cdot f\left(\frac{2-1}{2} \cdot -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1+2}{2}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{2-1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1+2}{2}\right)\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left[1 \cdot f(1{,}211325) + 1 \cdot f(1{,}788675)\right]$$

$$I = \frac{1}{2}\left[1 \cdot 0{,}618212 + 0{,}0943256\right]$$

$$I = 0.3562688\ u^2 \,//$$

3. Programa en Python

Regla del trapecio

```python
# Integración: Regla de los trapecios
from email.policy import default
from matplotlib import transforms
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from sympy import *
from dill.source import getsource

# INGRESO
fx = lambda x: np.sqrt(x)*np.sin(x)

# intervalo de integración
a = 1
b = 3
tramos = 4

print ('\tUniversidad de las Fuerzas Armadas ESPE-L\n')
print ('Metodos de integracion numerica')
print ('Metodo del trapecio')
# PROCEDIMIENTO
# Puntos de muestra
def reglaTrapecio (a, b , tramos):
    muestras = tramos + 1
    xi = np.linspace(a,b,muestras)
    fi = fx(xi)

    # Regla del Trapecio
    # Usando puntos muestreados
    # incluso arbitrariamente espaciados
    suma = 0
    for i in range(0,tramos,1):
        dx = xi[i+1]-xi[i]
        Atrapecio = dx*(fi[i]+fi[i+1])/2
        suma = suma + Atrapecio
    integral = suma

    # SALIDA
    print (dx)
    print('tramos: ', tramos)
    print('integral: ', integral)
    # GRAFICA
```

```
    # Puntos de muestra
    muestras = tramos + 1
    xi = np.linspace(a,b,muestras)
    fi = fx(xi)
    # Linea suave
    muestraslinea = tramos*10 + 1
    xk = np.linspace(a,b,muestraslinea)
    fk = fx(xk)

    # Graficando
    plt.plot(xk,fk, label ='f(x)')
    plt.plot(xi,fi, marker='o',
            color='orange', label ='muestras')

    plt.xlabel('x')
    plt.ylabel('f(x)')
    plt.title('Integral: Regla de Trapecios')
    plt.legend()

    # Trapecios
    plt.fill_between(xi,0,fi, color='g')
    for i in range(0,muestras,1):
        plt.axvline(xi[i], color='w')

    plt.show()

print (reglaTrapecio (a, b , tramos))
```

Regla de Boole

```
import numpy as np


print ('\tUniversidad de las Fuerzas Armadas ESPE-L\n')
print ('Metodos de integracion numerica')
print ('Metodo del Boole')

def funcion(x): #aquí va la funcion a evaluar

    res =  (x**2)*np.e**(-x**2)
    return res

# aqui se deben ingresar los valores de la integral
limite_inferior=1 #b
limite_superior=2#a
```

```python
n=5 #tomamos el valor de n como 3 para este metodo

# se calcula h para la formula
h= (limite_superior-limite_inferior)/n  # (a-b) /n  recordando que n=3
# se calculan x0,x1,x2,x3..

x0= limite_inferior #x0=b
x1=x0+h #b+h
x2=x1+h
x3=x2+h
x4=x3+h
# calculamos las fx usando la funcion
fx0= funcion(x0)
fx1=funcion(x1)
fx2=funcion(x2)
fx3=funcion(x3)
fx4=funcion(x4)

resultado= (2/45)*(h)*(7*(fx0)+32*(fx1)+12*(fx2)+32*(fx3)+7*(fx4))
print ('Resultado', resultado)
print ('h',h)
```

Regla de Gauss Legendre

```python
import numpy as np
puntos = 2


print ('\tUniversidad de las Fuerzas Armadas ESPE-L\n')
print ('Metodos de integracion numerica')
print ('Metodo de Gauss Legendre')

def funcion(x): #aquí va la funcion a evaluar
    res =  ((2*x**2+1)*np.e**(-x**2))/x**2
    return res

b = 2
a = 1

if (puntos == 2):
    t1 = - 1/np.sqrt(3)
    t2 = 1/np.sqrt(3)
    lam = 1
```

```python
    x1 = (b-a)/2*t1+(a+b)/2
    x2 = (b-a)/2*t2+(a+b)/2
    fx1 = funcion(x1)
    fx2 = funcion(x2)
    print (fx1)
    print (fx2)

    integral = ((b-a)/2)*(lam*fx1+lam*fx2)
    print ('Resulta por el metodo de Gauss Legendre',integral)
elif (puntos == 3):
    t1 = -np.sqrt(6)
    t2 = 0
    t3 = np.sqrt(6)
    lam = 5/9

    x1 = (b-a)/2*t1+(a+b)/2
    x2 = (b-a)/2*t2+(a+b)/2
    x3 = (b-a)/2*t3+(a+b)/2

    fx1 = funcion(x1)
    fx2 = funcion(x2)
    fx3 = funcion(x3)

    integral = ((b-a)/2)*(lam*fx1+lam*fx2+lam*fx3)
    print ('Resulta por el metodo de Gauss Legendre',integral)
```

4. Conclusiones:

- En el calculo de la regla del trapecio viene a realizarse creando ecuaciones de primer grado, en las cuales se unen entre ellas, aunque el calculo tiene un menor error, es más demoroso.
- En la regla de Boole tiene una limitación, y es que solo se puede usar cuando deseemos calcular en un intervalo de [a, b] con respecto a 5 puntos, aparte que estos deben tener la misma x distancia. Es decir, para cuando la integral pida un calculo con menos puntos este método es imposible de realizarse, y se tendrá que tomar otro método, como el de trapecios.
- La desventaja de la regla de Gauss Legendre es que tiene los parámetros ya establecidos para utilizarlos, y no es que se pueda calcular tan fácilmente, por ende, es más complejo y aun así, el área que nos da la integral no es exacta del todo, y su grado de error es mayor a las otras dos.

5. Bibliografía

Bibliografía

Chapra, S., & Canale, R. (2017). Regla del Trapecio. En *Métodos numéricos para ingenieros* (págs. 621-625). México D.F,: McGraw Hill.

Fuentes, L. (10 de Marzo de 2014). *rinconmatematico*. Obtenido de https://foro.rinconmatematico.com/index.php?topic=73290.0

Rosario, E. d. (5 de Enero de 2018). *Metodos Numericos*. Obtenido de http://blog.espol.edu.ec/analisisnumerico/regla-del-trapecio/

Rosario, E. d. (12 de Julio de 2018). *Metodos Numericos*. Obtenido de http://blog.espol.edu.ec/analisisnumerico/cuadratura-de-gauss/