### Universidad de la Fuerzas Armadas ESPE - L

Nombre: Ismael Simbaña

Fecha: 20/01/2022



### Derivada Numérica Orden Superior

#### Marco teórico

La derivación numérica es una técnica de análisis numérico para calcular una aproximación a la derivada de una función en un punto dado, utilizando los valores y propiedades de esta.

v(t) se puede expandir en una serie de Taylor del siguiente modo:

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + \frac{v''(t_i)}{2!}(t_{i+1} - t_i)^2 + \dots + R_n$$

Se trunca la serie después del término de la primera derivada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + v'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + R_1$$

$$v'(t_i) = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - \frac{R_1}{t_{i+1} - t_1}$$
Approximación de primer orden 
$$\frac{t_{i+1} - t_1}{t_{i+1} - t_1}$$
Error de truncamiento

Con el método de la serie de Taylor se ha obtenido una estimación del error de truncamiento asociado con esta aproximación de la derivada.

• Demostración de las fórmulas o expresiones

Diferencia Hacia adelante y h el tamaño del incremento

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

Aproximación a la primera derivada con diferencia hacia atrás.

La serie de Taylor se expande hacia atrás para calcular un valor anterior sobre la base del valor actual

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \cdots$$

Truncando la ecuación después de la primera derivada y reordenando los términos se obtiene

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{\nabla f_1}{h}$$

Aproximación a la primera derivada con diferencias centradas.

Se resta de la serie de Taylor

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \cdots$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots$$

para obtener

$$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + \frac{2f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots$$

de donde se despeja

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)}{6}h^2 - \cdots$$

0

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2)$$

### **Ejemplos**

Estimar la primera derivada en x = 0.5 con h = 0.5

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25$$

$$h = 0.5$$

$$x_{i-1} = 0$$
  $f(x_{i-1}) = 1.2$   
 $x_i = 0.5$   $f(x_i) = 0.925$   
 $x_{i+1} = 1.0$   $f(x_{i+1}) = 0.2$ 

Calculan las diferencias dividas

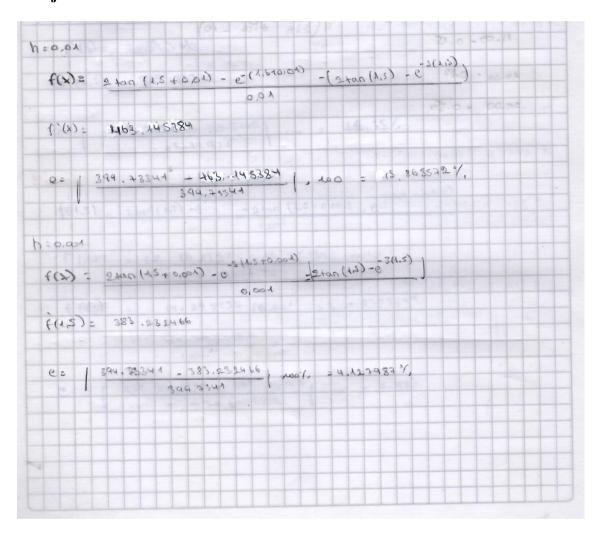
$$f'(0.5) \cong \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45$$
  $|\varepsilon_t| = 58.9\%$ 

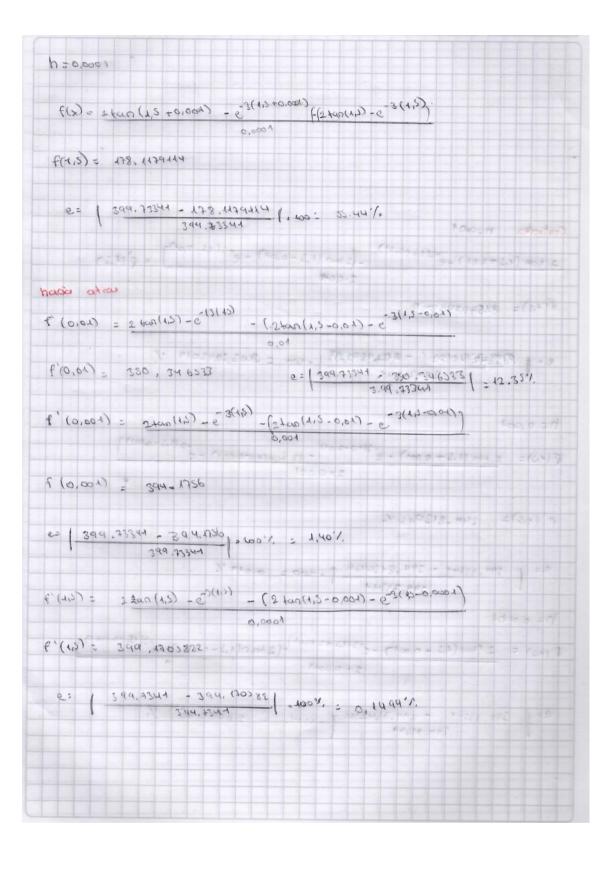
$$f'(0.5) \cong \frac{0.925 - 1.2}{0.5} = -0.55$$
  $|\varepsilon_t| = 39.7\%$ 

$$f'(0.5) \cong \frac{0.2 - 1.2}{1.0} = -1.0$$
  $|\varepsilon_t| = 9.6\%$ 

# 5 ejercicios (desarrollados manualmente y en python)

## • Ejercicio 1

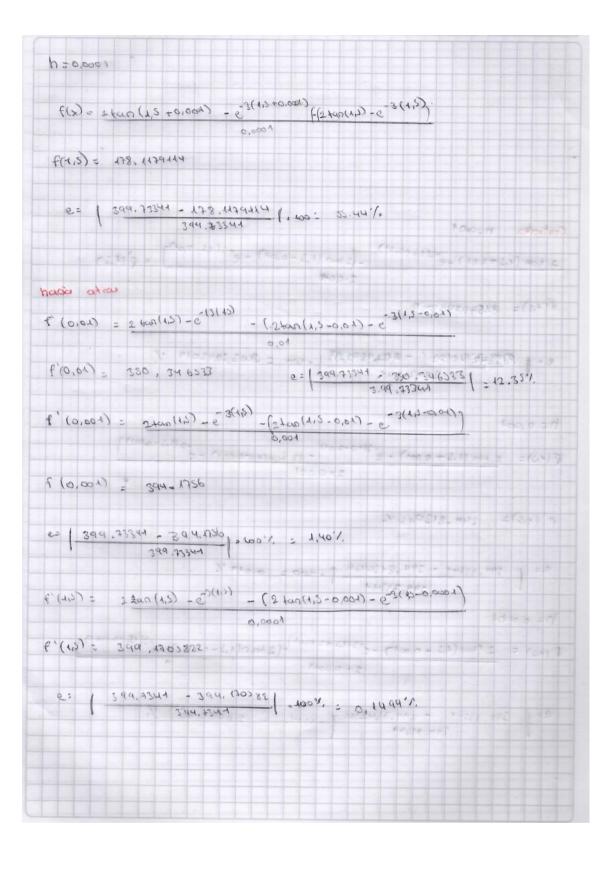




```
Centrales n=0001
2 600 (1,5 +0,017 - 25(+3+0,04)
828 928. FOLL = (25) }
e= 1,394.75841 -402.856828 1.00 = 2052249019 1/,
      3 वव राष्ट्र ३ पन
has, 0 = 1
                                               13 (1.5-0,001)
$ (AU) = 2 tan (AS+0.001) - = (2 too(AS-0.001) - =
€ (112)= 300 -813048 V.
 e= 1 394.73341 - 394.8130456 1.400 = 0.019 11.
        399,75341
1000,00 = N
5'(115) = 2 (400 (15 +0,001) - (-3(15+0,0001)) -(2+0,0(1,5-0,0001)) - (3(15-0,0001))
                   2 + 0,0004
 8= | 394, 7544 - 394, 7542121 | . 1001. - 2,006 : 154 %,
```

## • Ejercicio 2

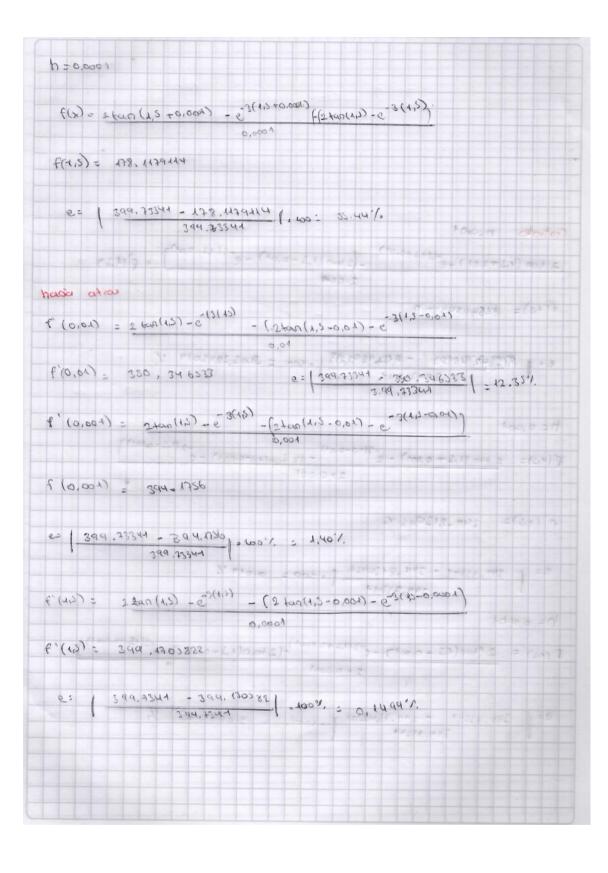
10.01	
(0)=	2 tag (1.5 +002) - E(1.510,00) - (2 tag (1.5) - 2(1.15))
T(X)~	a faq (1.5 + 0.0)
(x)=	1163.145389
Q=	399. 73347 - 463, 148384 1, 200 = 15, 8635727.
	7 7.7.7
1411.3	
h=0,001	
	2400 (45+0,002) - e (4.5+0.002) = 3(4.5) - e 3(4.5)
t(x) =	2400 (45+0,001) - e = +2+00 (42) -0
	0,001
(205)	323.232466
Lich	
e= 1	394. 25344 - 383. 252466 , 2007, =4,127987 1,
	399 3547
4	



```
Centrales n=0001
2 600 (1,5 +0,017 - 25(15 10,04)
828 928. tor = (21) }
e= 1,394.75941 -402.856828 1.00 = 2.052949.019 1/,
      30973344
hao,0=1
                                              13 (1.5-0,001)
$ (AU) = 2 tan (15+0,001) - = (2 +00/15-0,001) - e
€ (112)= 300 -813048 V.
 e= 1 394.73341 - 394.8130456 1.400 = 0.019 15
        399,75341
1000,00 = N
5'(115) = 2 (400 (15 +0,001) - (-3(15+0,0001)) -(2+0,0(1,5-0,0001)) - (3(15-0,0001))
                   2 + 0,0004
 8= 1 399, 75541 - 399, 7542421 1. 1001. - 2.006 . 154
```

Ejercicio 3

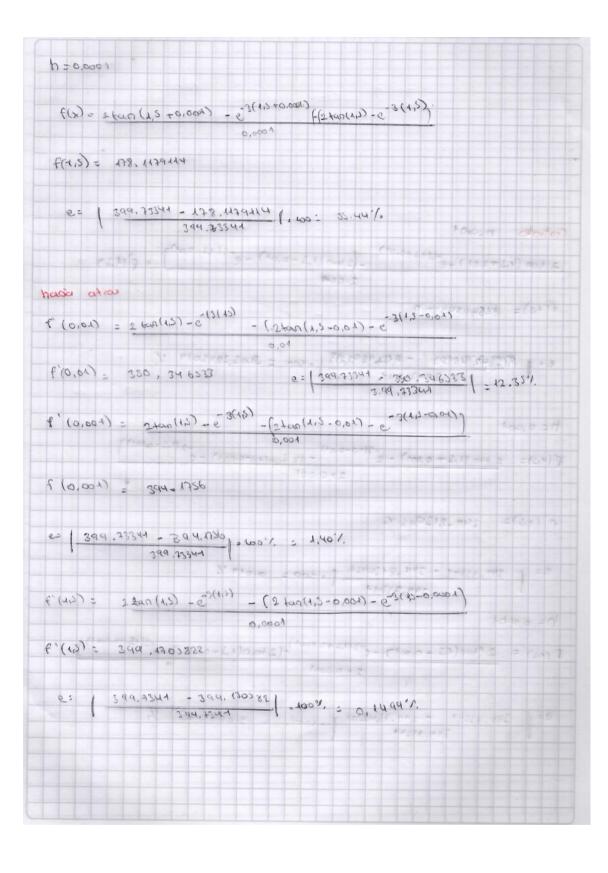
10,01	25	7	0-0-1
		1008	
for and the	5 +00D - e (1,50000)	-(2+an (1,5) - e -2(1,5)	00 00
2 400 (11	60,04		
			5 4 50 00
1'(x) = 1468 14	5384	16.156	
	SAISTA VI		
Q= 1 399 . +334	399.29597	, 200 = 15,8635792	7.
	399.25547		
性(3) 2001	3)-1 -2-09	5-des . d.	
10,001			
F 13 49 4 4 2	(400,001)	Istan (12) -0 3(1.5)	
f(x) = 2400 (45	+0,001) -0	12tan (12)	
	0,001		
, 1	4 4 4 4 4 4 4 4 4		
f(1,5) = 383.23	2466		
n 1 200 08 1 1 4	- 383.282466 , noor		
	300 3341	, = 4.127987 7,	
	304.434		



```
2 600 (15 +0,017 - 2(15 +0,01)
828 328. 404 = (25) }
6= 1.384.31811 - 10282/828 1.100 = 5.027845010 1/
h00,0=1
$ (AU) = 2 tan (AS+0.001) - = (2 too(AS-0.001) - =
F (1,5)= 349.813045 1.
 e= 1 394,73741 - 394,8130456 1,400 = 0,019 15
1000,0 = N
5'(415) = 2 (400 (415 +0,004) - =3(15+0,0001) -(2+0,0(1)-0,0001) -= 3(15-0,0001)
                   2 + 0,0001
 8= | 399, +5544 - 399, 7542421 | . LOGI. - 2.006 . Lo
```

Ejercicio 4

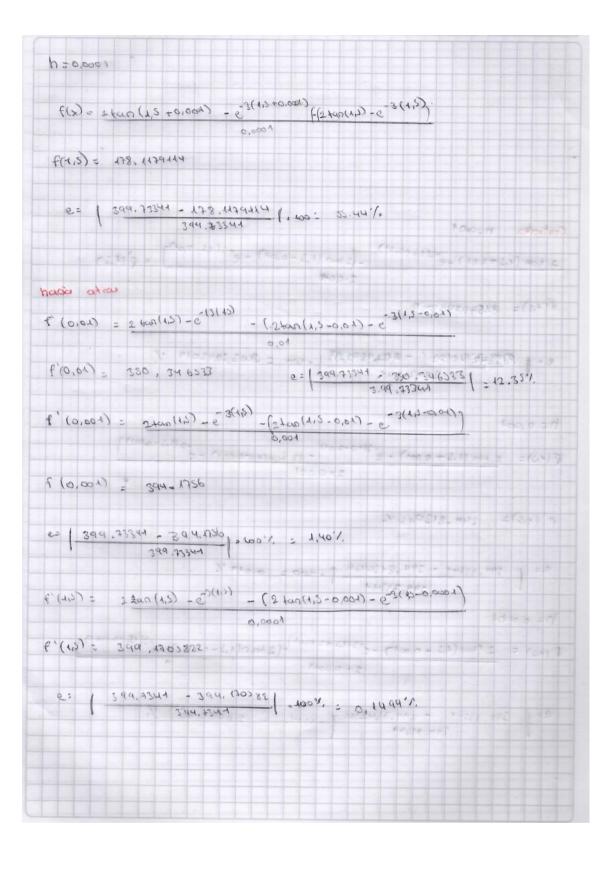
10,01	25	7	0-0-1
		1008	
for and the	5 +00D - e (1,50000)	-(2+an (1,5) - e -2(1,5)	00 00
2 400 (11	60,04		
			5 4 50 00
1'(x) = 1468 14	5384	16.156	
	SAISTA V.		
Q= 1 399 . +334	399.29597	, 200 = 15,8635792	7.
	399.25547		
性(3) 2001	3)-1 -2-09	5-des . d.	
10,001			
F 13 49 4 4 2	(400,001)	Istan (12) -0 3(1.5)	
f(x) = 2400 (45	+0,001) -0	12tan (12)	
	0,001		
, 1	4 4 4 4 4 4 4 4 4		
f(1,5) = 383.23	2466		
n 1 200 08 1 1 4	- 383.282466 , noor		
	300 3341	, = 4.127987 7,	
	304.434		



```
2 600 (1,5 +0,017 - 25(15 10,01)
828 328. 404 = (25) }
6= 1.384.31811 - 10282/828 1.100 = 5.02 5848010 1/
h00,0=1
$ (10) = 2 tan (15+0.001) - (200-0.00) - (2 too(15-0.001) - e
i (12)= 300 -813042 1.
 e= 1 394.73741 - 394.8130456 1.400 = 0.019 11
1000,00 = N
5'(415) = 2 (400 (415 +0,004) - (3(15+0,0001)) -(2+0,0(1)-0,0001) -0 3(15-0,0001))
                   2 + 0,0001
 e= | 399, +5544 - 399, 7542421 | . 1001. - 2.006 . 15
```

## • Ejercicio 5

10.01	
(0)=	2 tag (1.5 +002) - E(1.510,00) - (2 tag (1.5) - 2(1.15))
T(X)~	a faq (1.5 + 0.0)
(x)=	1163.145389
Q=	399. 73347 - 463, 148384 1, 200 = 15, 8635727.
	7 7.7.7
1411.3	
h=0,001	
	2400 (45+0,002) - e (4.5+0.002) = 3(4.5) - e 3(4.5)
t(x) =	2400 (45+0,001) - e = +2+00 (42) -0
	0,001
(205)	323.232466
Lich	
e= 1	394. 25344 - 383. 252466 , 2007, =4,127987 1,
	399 3547
4	



```
n=0001
Centrales
 2 600 (1,5 +0,01) - = 3(+5,00,01)
                                   1.0,0 M
 =(25)}
          407.856 258
                         - 402,856858
 has, 0 = 1
                                                               3 (1.5 - 0.001)
          00,0-21/5 - (100,0+2,4) not 2
                                     2.0,001
              3046.813046 1
 f (1,5)=
                                                 0,019 11.
                                        , wo :
 h= 0,006+
           2 (too (13 +0,001) - = 3(15+0,0001) - (2 tan(1,3-0,0001) - = 3(15-
                                  2 , 0,0001
                                                     2.000 000
                      - 394.734212h
         394, 73344
                   399. 73344
```

### **Conclusiones**

- Se calcula una aproximación a la derivada de una función gracias al punto y los valores de esta función.
- El error según cada método va disminuyendo, el más exacto o mejor descrito el que contiene mejor precisión de error es el método central.
- La aproximación de la derivada entrega resultados aceptables con un determinado error, además con el tamaño mientras mas cercano a cero sea, el error seria sumamente pequeño.

## Bibliografía

- Volkov, E.A.: Métodos Numéricos. URSS, Moscú, 1990
- Chapra, S. C. & Canale R. P. (1998). Numerical methods for engineers (2da. ed.). New York: McGraw-Hill