طراحی الگوریتم ها

بحث نمادهای مجانبی

استاد درس: مهدی جبل عاملی

تابع پیچیدگی یا تابع زمان اجرا :

تابعی که در زمان اجرای یک الگوریتم بدست می آید را تابع پیچیدگی یا تابع زمان اجرا می گویند

$\frac{n(n-1)}{2}$ $\quad$ n^3 $\quad$ n^2

تابع پیچیدگی یا تابع زمان اجرا :

تابعی که در زمان اجرای یک الگوریتم بدست می آید را تابع پیچیدگی یا تابع زمان اجرا می نویسند

$$n^2 \qquad n^3 \qquad \frac{n(n-1)}{2}$$

توابع فوق نمونه ای از توابع ریاضی هستند ولی آیا هر تابع ریاضی الزاماً یک تابع پیچیدگی هست؟

1) $5n^2 - 100n$ 2) $3n + 7$ 3) $30 - n^3$

تابع پیچیدگی یا تابع زمان اجرا :

تابعی که در زمان اجرای یک الگوریتم بدست می آید را تابع پیچیدگی یا تابع زمان اجرا می گویند

$$n^2 \qquad\qquad n^3 \qquad\qquad \frac{n(n-1)}{2}$$

توابع فوق به سادگی توابع ریاضی هستند ولی آیا هر تابع ریاضی الزاماً یک تابع پیچیدگی هست؟

1) $5n^2 - 100n$ 2) $3n + 7$ 3) $30 - n^3$

تابع پیچیدگی همواره مثبت و غیر نزولی است پس خواهیم داشت

1) به ازای $n > 20$ تابع پیچیدگی است زیرا کمتر از آن تابع منفی خواهد شد

2) هست

3) چون تابع نزولی است پس تابع پیچیدگی نیست

در تابع نزولی هر چه مقدار بیشتر بدهیم زمان اجرا کمتر خواهد شد *

دسته‌بندی توابع پیچیدگی و نمادگذاری آنها

نماد θ بزرگ

n	$3n+7$	$2n-9$	$\longrightarrow$	$\theta(n)$
n^2	$3n^2-11n$	$13n^2+7$	$\longrightarrow$	$\theta(n^2)$

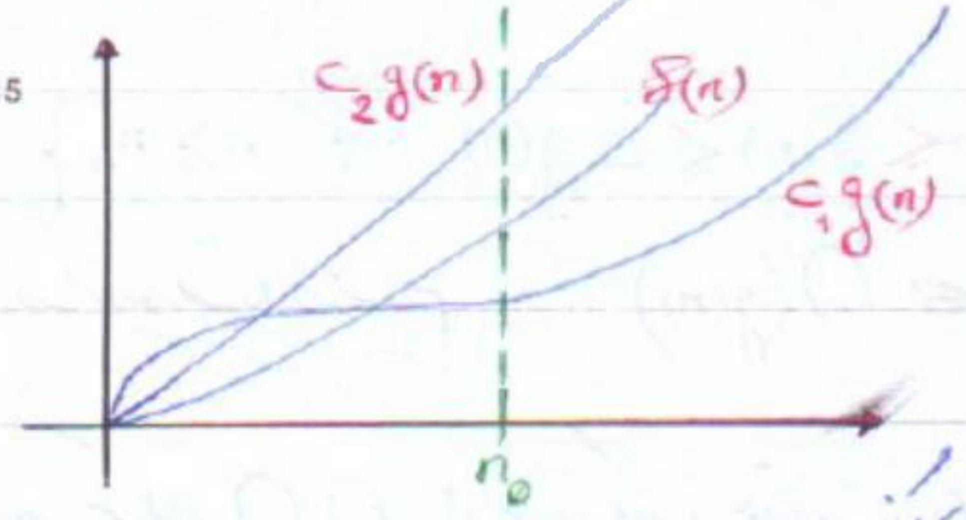
$n \log n \quad \epsilon \quad ?$

نماد Θ بزرگ

تعریف) فرض کنید f(n) و g(n) توابع پیچیدگی باشند. در این صورت $\Theta(g(n))$ مجموعه‌ای
از توابع پیچیدگی مثل f(n) است که بطوریکه

ثابت

$$\Theta(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists\, c_1, c_2, n_0 > 0 \text{ و } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \quad \forall n \geq n_0 \}$$



در این صورت داریم $f(n) \in \Theta(g(n))$

مفهوم ظاهری Θ این است که این توابع در محدوده هم باشند
در حقیقت n انحصاری نیست و هر شخصی ممکن است یک عدد
انتخاب کند ولی از آن به بعد باید در شرایط فوق صدق کند

مثال) $3n+7 \overset{?}{\in} \Theta(n)$ $\quad \underbrace{c_1 n \leq 3n+7}_{(1)} \leq c_2 n$ $\quad (3n+7 \leq c_2 n : (2))$

25 $1 \Rightarrow c_1 \leq 3 + \frac{7}{n} \quad n \uparrow \quad \frac{7}{n} \downarrow \quad \Rightarrow n \to \infty \to \frac{7}{n} \to 0 \Rightarrow c_1 \leq 3$

$2 \Rightarrow 3 + \frac{7}{n} \leq c_2 \Rightarrow$ وابسته n_0 به c_2 $\Rightarrow$ if $\quad n_0 = 1 \quad c_2 \geq 10$

$n_0 = 7 \quad c_2 \geq 4$

مثال) $3n^2 - 11n \in \theta(n^2)$

$$\underbrace{c_1 n^2 \leq 3n^2 - 11n}_{1} \leq c_2 n^2$$

$1 \Rightarrow c_1 \leq 3 - \frac{11}{n}$ — c_1 به n_0 وابسته است $\Rightarrow$ if $n_0 = 1$ $c_1 \leq -8$ ✗ ; $n_0 \geq 4$ $n_0 = 4$ $c_1 \leq \frac{1}{4}$ ✓

$2 \Rightarrow 3 - \frac{11}{n} \leq c_2$ — $n \to \infty \Rightarrow \frac{11}{n} = 0 \Rightarrow c_2 \geq 3$

الف) $3n^2 - 11n \overset{?}{\in} \Theta(n)$ XX $\underbrace{c_1 n \leq \overbrace{3n^2 - 11n}_{}}_{1} \overbrace{\leq c_2 n}^{2}$

$1 \Rightarrow c_1 \leq 3n - 11$ ✗ c_1 بسته به n_0 $\Rightarrow$ if $n_0 \geq 4$ if $n_0 = 4 \Rightarrow c_1 \leq 1$

$2 \Rightarrow 3n - 11 \leq c_2$ ✗ نمی‌توان c_2 را بدست آورد

مفهوم عملی Θ این است که توابع با ضرایب مختلف در محدوده اطراف یکدیگرند. برای مثال n^2 و $3n^2$ و $13n^2$ در محدوده یکدیگرند

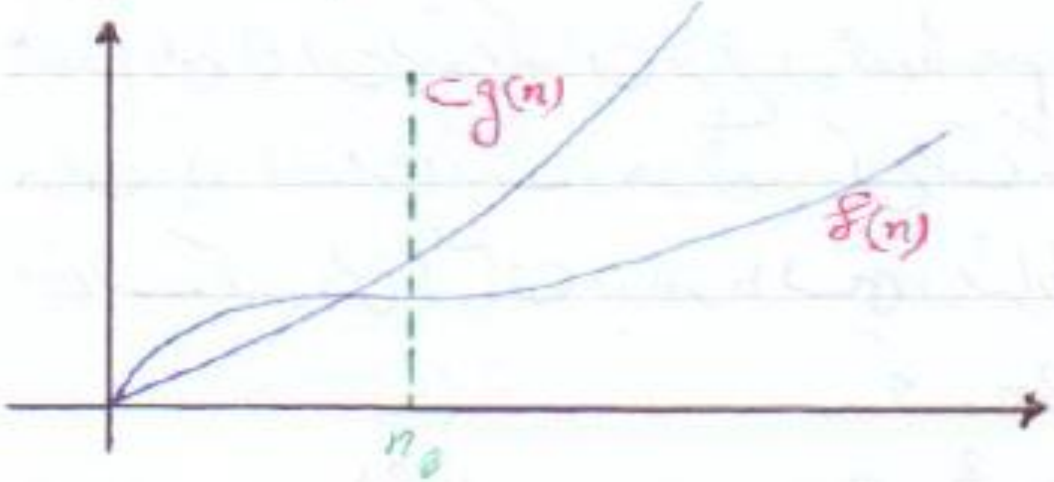
نماد O بزرگ

تعریف: فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ توابع پیچیدگی باشند در اینصورت

مثبت

$$O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists\ c , n_0 > 0 ,\ 0 \le f(n) \le c\,g(n) \quad \forall\, n \ge n_0 \}$$

در اینصورت داریم $f(n) \in O(g(n))$



مفهوم عملی O بزرگ این است که در حقیقت برای $f(n)$ یک سقف تعیین می‌کند

مثال) $2n-9 \in O(n^2)$ ✓✓ $\qquad 2n-9 \le cn^2$

$$\frac{2}{n} - \frac{9}{n^2} \le c \quad , \; c \ge 0 \rightarrow \frac{2n-9}{n^2} \le c$$

if $n_0 \ge 5 \qquad n_0 = 5 \Rightarrow c \ge \frac{1}{25}$

که از ابتدا هم مشخص بود برای همواره $2n-9$ بایستی مثبت باشد

مثال) $13n^2 + 7n \overset{?}{\in} O(n^2)$ $\qquad 13n^2 + 7n \leqslant Cn^2 \Rightarrow 13 + \frac{7}{n} \leqslant C$

ثابت n_0 و $C \Rightarrow$ if $n_0 = 1 \Rightarrow C \geqslant 20$

یعنی $\Rightarrow 13n^2 + 7n \leqslant 20n^2$

$$3n^3 + 7n^2 \overset{?}{\in} O(n^2)$$

$$3n^3 + 7n^2 \le cn^2$$

$$3n + 7 \le c$$

$n \to +\infty$ $\quad c \ge \infty$ $\quad$ امکان پذیر نیست

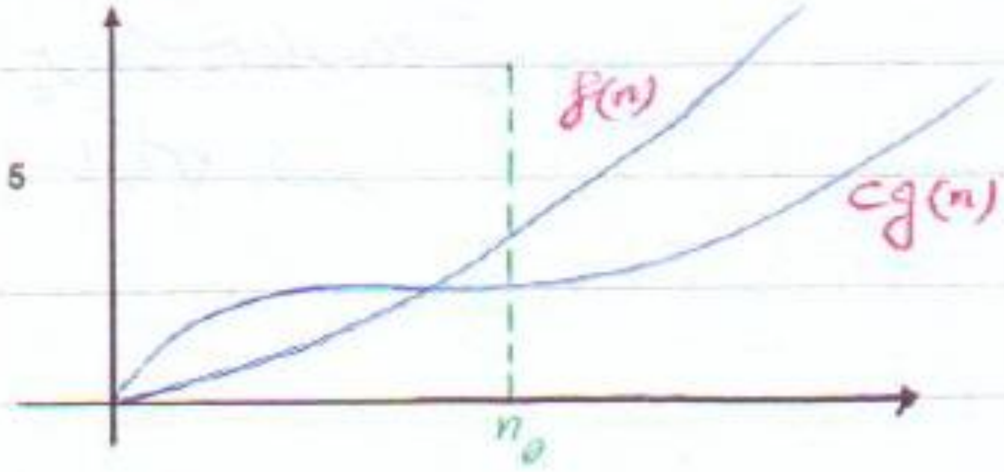
پس $\quad 3n^3 + 7n^2 \notin O(n^2)$

نماد Ω بزرگ

تعریف: فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ توابع پیچیدگی باشند در اینصورت

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists\, c, n_0 > 0 ,\ 0 \leq c\,g(n) \leq f(n) \quad \forall n \geq n_0 \}$$

در اینصورت داریم $f(n) \in \Omega(g(n))$



مفهوم کلی Ω بزرگ این است که در حقیقت برای $f(n)$ یک کف تعیین می‌کند

$5n^2 - 11n \in \Omega(n)$

$cn \leq 5n^2 - 11n$

$c \leq 5n - 11$

$n_0 = 1 \quad c \leq -6 \quad X$

$n_0 = 3 \quad c \leq 4 \quad \checkmark$

$c \leq$

$$5n^2 - 11n \in \Omega(n^2)$$

$$cn^2 \leq 5n^2 - 11n$$

$$c \leq 5 - {}^{11}/_{n}$$

$$n_0 = 3 \qquad c \leq 5 - \frac{11}{3}$$

$$c \leq \frac{4}{3} \quad ✓$$

$$* \; c \leq$$

$$5n^2 - 11n \overset{?}{\in} \Omega(n^3)$$

$$cn^3 \leq 5n^2 - 11n$$

$$c \leq \frac{5}{n} - \frac{11}{n^2}$$

$$n \to +\infty \qquad c \leq 0 \quad \times$$

امکان پذیر نیست

پس $5n^2 - 11n \notin \Omega(n^3)$

نکته) $\log_a n \stackrel{?}{\in} \Theta(\log_b n)$ $\qquad c_1 \log_b n \le \log_a n \le c_2 \log_b n$

$$\Rightarrow c_1 \le \frac{\log_a n}{\log_b n} \le c_2 \quad \Leftarrow \quad c_1 \le \log_a b \le c_2$$

پس زمانیکه ما پایه لگاریتم را نمی‌نویسیم ، معنی و مفهوم آن این نیست که لگاریتم در پایه دو است بلکه معنی و مفهوم آن این است که پایه چندان اهمیتی برای ما ندارد

یعنی تابع یک عدد ثابت باشد $\delta(n) = k$ اگر

یعنی تابع یک عدد ثابت باشد $f(n) = k$ اگر

$$f(n) \in \theta(n^0) \Rightarrow f(n) \in \theta(1)$$

بررسی خواص هم‌ارزی برای نمادهای مذکور

خاصیت بازتابی)

الف) $f(n) \in \Theta(f(n))$

خاصیت بازتابی:

الف) $f(n) \in \Theta(f(n))$

$c_1 f(n) \leq f(n) \leq c_2 f(n) \Rightarrow c_1 \leq 1 \leq c_2$ ✓✓

خاصیت بازتابی:

الف) $f(n) \in \Theta(f(n))$

$c_1 f(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 f(n) \Rightarrow c_1 \leqslant 1 \leqslant c_2$ ✓✓

ب) $f(n) \in O(f(n))$

$f(n) \leqslant c f(n) \Rightarrow 1 \leqslant c$ ✓✓

ج) $f(n) \in \Omega(f(n))$

$c f(n) \leqslant f(n) \Rightarrow c \leqslant 1$ ✓✓

پس هر سه نماد خاصیت
بازتابی را دارند

خاصیت تقارن:

$$f(n) \in \theta(g(n)) \iff g(n) \in \theta(f(n))$$

خاصیت تقارن:

$$f(n) \in \theta(g(n)) \Longleftrightarrow g(n) \in \theta(f(n))$$

برای اثبات یک طرف را فرض و طرف دیگر را حکم در نظر می گیریم و از فرض به حکم می رسیم

پس فرض می کنیم طرف اول برقرار است پس c_1 ، c_2 و n_0 وجود دارد به ازای $n \geq n_0$

فرض $\Rightarrow c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

حال بایستی ثابت کنیم به ازای $n \geq n'_0$ ، c'_1 ، c'_2 و n'_0 وجود خواهد داشت

حکم $\Rightarrow c'_1 f(n) \leq g(n) \leq c'_2 f(n)$

خاصیت تقارن :

$$f(n) \in \theta(g(n)) \iff g(n) \in \theta(f(n))$$

برای اثبات یک طرف را فرض و طرف دیگر را حکم در نظر می‌گیریم و از فرض به حکم می‌رسیم

پس فرض می‌کنیم طرف اول برقرار است پس c_1 ، c_2 و n_0 وجود دارد به ازای $n \geq n_0$

فرض $\Rightarrow c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

حال باید ثابت کنیم به ازای $n \geq n'_0$ ، c'_1 ، c'_2 و n'_0 وجود خواهد داشت

حکم $\Rightarrow c'_1 f(n) \leq g(n) \leq c'_2 f(n)$

$1 \Rightarrow g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n) \Rightarrow 1/c_1 = c'_2$

خاصیت تقارن:

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff g(n) \in \Theta(f(n))$$

برای اثبات یک طرف را فرض و طرف دیگر را حکم در نظر می گیریم و از فرض به حکم می رسیم

پس فرض می کنیم طرف اول برقرار است پس c_1 ، c_2 و n_0 وجود دارد به ازای $n \geq n_0$

فرض $\Rightarrow c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

حال بایستی ثابت کنیم به ازای $n \geq n_0'$ ، c_1' ، c_2' و n_0' وجود خواهد داشت

حکم $\Rightarrow c_1' f(n) \leq g(n) \leq c_2' f(n)$

$1 \Rightarrow g(n) \leq \frac{1}{c_1} f(n) \Rightarrow 1/c_1 = c_2'$

$2 \Rightarrow \frac{1}{c_2} f(n) \leq g(n) \Rightarrow 1/c_2 = c_1'$

O و Ω چطور؟

O و Ω چطور؟

$n \in O(n^2)$ ولی $n^2 \notin O(n)$

$n^2 \in \Omega(n)$ ولی $n \notin \Omega(n^2)$

پس می‌توانستیم برای رد کردن آن مثال نقض بیاوریم

پس Θ خاصیت تقارن را دارد ولی O و Ω نیز خاصیت تقارن را ندارند

$f(n) \in \theta(g(n))$, $g(n) \in \theta(h(n)) \Longrightarrow f(n) \in \theta(h(n))$ (خاصیت تعدی)

خاصیت تعدی

$f(n)\in\theta(g(n))\ ,\ g(n)\in\theta(h(n)) \Longrightarrow f(n)\in\theta(h(n))$

فرض

$\forall\, n\geq n_0 \ : c_1\, g(n)\leq f(n)\leq c_2\, g(n)$

$\forall\, n\geq n_0' \ : c_1' h(n)\leq g(n)\leq c_2' h(n)$

حکم $\forall\, n\geq n_0'' \quad c_1'' h(n)\leq f(n)\leq c_2'' h(n)$

$$f(n)\in\theta(g(n)),\ g(n)\in\theta(h(n)) \Longrightarrow f(n)\in\theta(h(n))$$ خاصیت تعدی

فرض:

$\forall\ n \geq n_0 : c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$

$\forall\ n \geq n_0' : \underbrace{c_1' h(n) \leq g(n)}_{1} \underbrace{\leq c_2' h(n)}_{2}$

حکم $\forall\ n \geq n_0'' \quad c_1'' h(n) \leq f(n) \leq c_2'' h(n)$

$1 \Rightarrow \times c_1 \Rightarrow c_1 c_1' h(n) \leq c_1\, g(n)\ ,\ c_1\, g(n) \leq f(n) \quad \Rightarrow c_1 c_1' = c_1''$

خاصیت تعدی

$$f(n) \in \theta(g(n)) \,,\, g(n) \in \theta(h(n)) \Longrightarrow f(n) \in \theta(h(n))$$

فرض

$\forall\, n \geq n_0 : c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

$\forall\, n \geq n_0' : \underbrace{c_1' h(n) \leq g(n)}_{1} \leq \underbrace{ \leq c_2' h(n)}_{2}$

حکم $\forall\, n \geq n_0'' \quad c_1'' h(n) \leq f(n) \leq c_2'' h(n)$

$1 \Rightarrow \times c_1 \Rightarrow c_1 c_1' h(n) \leq c_1 g(n) \,,\, c_1 g(n) \leq f(n) \Rightarrow c_1 c_1' = c_1''$

$2 \Rightarrow \times c_2 \Rightarrow c_2 g(n) \leq c_2 c_2' h(n) \,,\, f(n) \leq c_2 g(n) \Rightarrow c_2 c_2' = c_2''$

خاصیت تعدی

$$f(n)\in\theta(g(n))\ ,\ g(n)\in\theta(h(n)) \Longrightarrow f(n)\in\theta(h(n))$$

فرض:
$\forall\ n\geq n_0 : c_1\, g(n) \leq f(n) \leq c_2\, g(n)$

$\forall\ n\geq n_0' : c_1' h(n) \leq g(n) \leq c_2' h(n)$

حکم: $\forall\ n\geq n_0'' \quad c_1'' h(n) \leq f(n) \leq c_2'' h(n)$

$1 \Rightarrow \times c_1 \Rightarrow c_1 c_1' h(n) \leq c_1\, g(n) \ ,\ c_1\, g(n) \leq f(n) \quad \Rightarrow c_1 c_1' = c_1''$

$2 \Rightarrow \times c_2 \Rightarrow c_2\, g(n) \leq c_2 c_2' h(n) \ ,\ f(n) \leq c_2\, g(n) \quad \Rightarrow c_2 c_2' = c_2''$

فرض

$\Longrightarrow n_0'' = \mathrm{Max}\{n_0, n_0'\}$ یا چون باید از n_0 , n_0' بزرگتر باشد

اثبات خاصیت فوق برای O و Ω بزرگ شبیه برهان احکام نیز برقرار است. این روابط از لحاظ شهودی شبیه برهان قابل تعمیم است

نکته $\Rightarrow$ if $f(n) \in O(g(n)) \Longleftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

که برعکس قابل اثبات است.

if $f(n) \in O(g(n))$ **and** $f(n) \in \Omega(g(n)) \implies$

نکته $\Rightarrow$ if $f(n) \in O(g(n))$ **and** $f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$

این رابطه نیز براحتی قابل اثبات است که در مثال های قبلی نیز بطور شهودی به آن رسیده بودیم

معنی علامت‌ها با استفاده از حد:

$$c_1\, g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2\, g(n)$$

مقایسه تابع‌ها با استفاده از حد:

$$c_1\, g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2\, g(n)$$

$$c_1 \leqslant \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant c_2$$

مقایسه تابع‌ها با استفاده از حد :

$$c_1 \, g(n) \leqslant f(n) \leqslant c_2 \, g(n)$$

$$c_1 \leqslant \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant c_2$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

در این صورت امکان دارد مقادیر مختلفی بدست آید

الف) if $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

$$f(n) \notin \Theta(g(n))$$

$$g(n) \notin \Theta(f(n))$$

$$c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$$

الف) if $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

$f(n) \notin \Theta(g(n))$ $\quad$ $f(n) \notin O(g(n))$

$g(n) \notin \Theta(f(n))$ $\quad$ $g(n) \notin \Omega(f(n))$

$$c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$$

الف) if $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

$f(n) \notin \Theta(g(n))$ $\quad$ $f(n) \notin O(g(n))$ $\quad$ $f(n) \in \Omega(g(n))$

$g(n) \notin \Theta(f(n))$ $\quad$ $g(n) \in O(f(n))$ $\quad$ $g(n) \notin \Omega(f(n))$

$$c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$$

ب) if $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$

$$f(n) \notin \Theta(g(n))$$

$$g(n) \notin \Theta(f(n))$$

$$c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$$

ب) if $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$f(n) \notin \Theta(g(n))$

$f(n) \notin \Omega(g(n))$

$g(n) \notin \Theta(f(n))$

$g(n) \notin O(f(n))$

$c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$

ب) if $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

$f(n) \notin \Theta(g(n))$ $\quad$ $f(n) \in O(g(n))$ $\quad$ $f(n) \notin \Omega(g(n))$

$g(n) \notin \Theta(f(n))$ $\quad$ $g(n) \notin O(f(n))$ $\quad$ $g(n) \in \Omega(f(n))$

$c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$

2) if $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = r > 0$

$f(n) \in \theta(g(n)) \quad f(n) \in O(g(n)) \quad f(n) \in \Omega(g(n))$

$g(n) \in \theta(f(n)) \quad g(n) \in O(f(n)) \quad g(n) \in \Omega(f(n))$

$c_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq c_2$

مثال) رابطه $\sqrt{n}$ و $\log n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{\log n}$$

مثال) رابطه $\sqrt{n}$ و $\log n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{\log n} \overset{\text{قاعده}}{\underset{\text{هوپیتال}}{=}} \lim_{n \to \infty} \frac{1/2\sqrt{n}}{1/n}$$

مثال ۱) رابطه $\sqrt{n}$ و $\log n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\log n} \xrightarrow[\text{هوپیتال}]{\text{قاعده}} \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2} = \infty$$

مثال: رابطه $\sqrt{n}$ و $\log n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\log n}\ \xrightarrow[\text{هوپیتال}]{\text{قاعده}}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{2}=\infty$$

$$\Longrightarrow \log n \in O(\sqrt{n})$$

$$\sqrt{n} \in \Omega(\log n)$$

نماد o کوچک

تعریف) فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ توابع پیچیدگی باشند در اینصورت

$$o_{\text{کوچک}}(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall\, c>0 \ \exists\, n_0>0 ,\ 0 \le f(n) < c\, g(n) \quad \forall n \ge n_0 \}$$

مثال) $\frac{n^2}{5} \overset{?}{\in}$ [illegible] / $o(n^2)$

مثال) $\frac{n^2}{5} \overset{?}{\in}$ بزرگ $O(n^2)$

$$n^2/5 \leq cn^2 \Rightarrow c \geq 1/5$$

مثال) $\frac{n^2}{5} \overset{?}{\in}$ کوچک $o(n^2)$

$n^2/5 < cn^2 \Rightarrow c \geq 1/5$ با تعریف o کوچک تناقض است

مثال) $\frac{n^2}{5} \overset{?}{\in} O(n^2)$ کوچک

$n^2/5 < cn^2 \Rightarrow c > 1/5$ با تعریف o کوچک تناقض است

$\Rightarrow n^2/5 \notin o(n^2)$

مثال) $\frac{n^2}{5} \overset{?}{\in}$ کوچک $o(n^2)$

$n^2/5 \leq cn^2 \Rightarrow c \geq 1/5$ با تعریف o کوچک تناقض است

$\Rightarrow n^2/5 \notin o(n^2)$

ولی $n^2/5 \in O(n^2)$.

d(i) $\frac{n^2}{5} \overset{?}{\in} o(n^3)$

d(i) $\frac{n^2}{5} \overset{?}{\in} O(n^3)$

$$n^2/5 \leqslant cn^3$$

$\div cn^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{5c} \leqslant n$

الف) $\frac{n^2}{5} \overset{?}{\in} o(n^3)$

$$n^2/5 \leqslant cn^3$$

$$\div cn^2 \qquad \Leftrightarrow \frac{1}{5c} \leqslant n$$

با هر c می‌توان یک n_0 پیدا کرد که این رابطه برقرار باشد پس $n^2/5 \in o(n^3)$

و همچنین $n^2/5 \in O(n^3)$.

نماد ω کوچک

تعریف) فرض کنید $f(n)$ و $g(n)$ توابع پیچیدگی باشند در اینصورت

$$\omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall c>0 \ \exists n_0>0 \ , \ 0 \le c\,g(n) < f(n) \quad \forall n \ge n_0 \}$$

تل) $f(n) \in o(g(n)) \Longleftrightarrow g(n) \in \omega(f(n))$

الف) if $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ $\qquad g(n) \in o(f(n))$

ب) if $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ $\qquad f(n) \in o(g(n))$

ج) if $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = r > 0$ $\qquad g(n) \notin o(f(n))$

$f(n) \notin o(g(n))$

الف) if $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = \infty$

$g(n) \in o(f(n))$

$f(n) \notin o(g(n))$

ب) if $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$

$f(n) \in o(g(n))$

$g(n) \notin o(f(n))$

ج) if $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = r > 0$

$g(n) \notin o(f(n))$

$f(n) \notin o(g(n))$

با استفاده از رابطه حدی که گفته شد توابع زیر را مرتب کنید. (به ترتیب مرتبه اجرا)

n $\quad n^2$ $\quad \sqrt{n}$ $\quad n \times log\ n$ $\quad (\log n)^{2}$ $\quad \log\log n$ $\quad n^{0.1}$ $\quad n^2 \times log\ n$ $\quad n \times (\log n)^{2}$