

طراحی الگوریتم ها

روش برنامه ریزی پویا (ادامه)

استاد درس: مهدی جبل عاملی

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

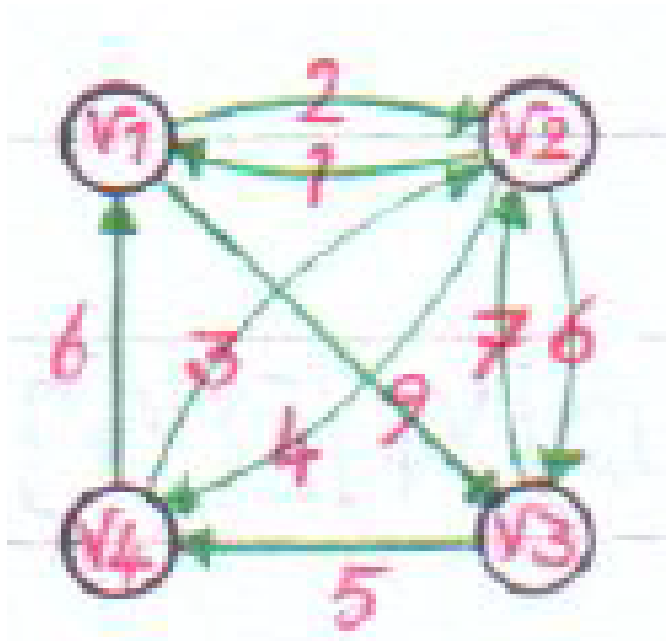
- ورودی ها: یک گراف جهت دار وزن دار

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

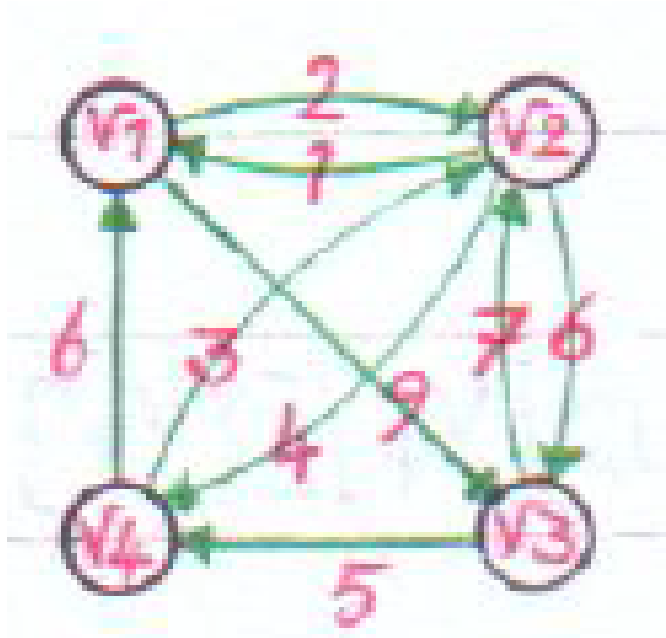
- ورودی ها: یک گراف جهت دار وزن دار

- خروجی: دور همیلتونی بهینه (دوری که از همه رئوس بدون تکرار عبور کند و کمترین وزن را داشته باشد)

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)



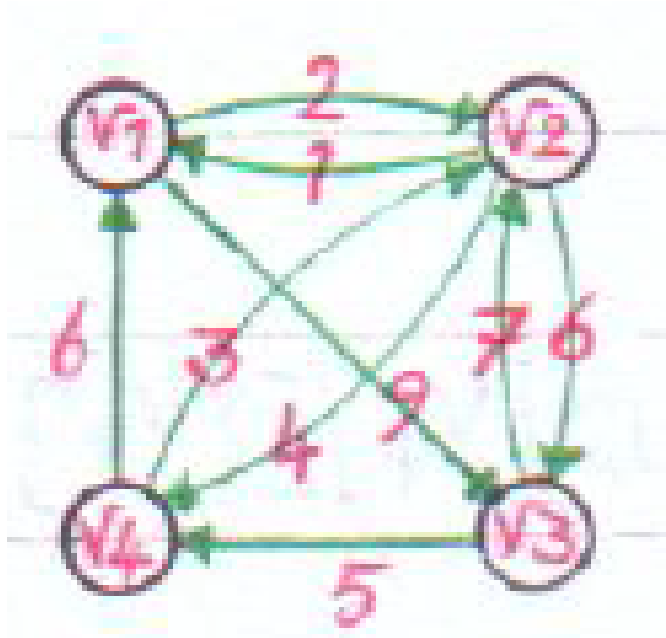
فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)



• تعداد کل دورهای همیلتونی در یک گراف با n راس $(n-1)!$ =

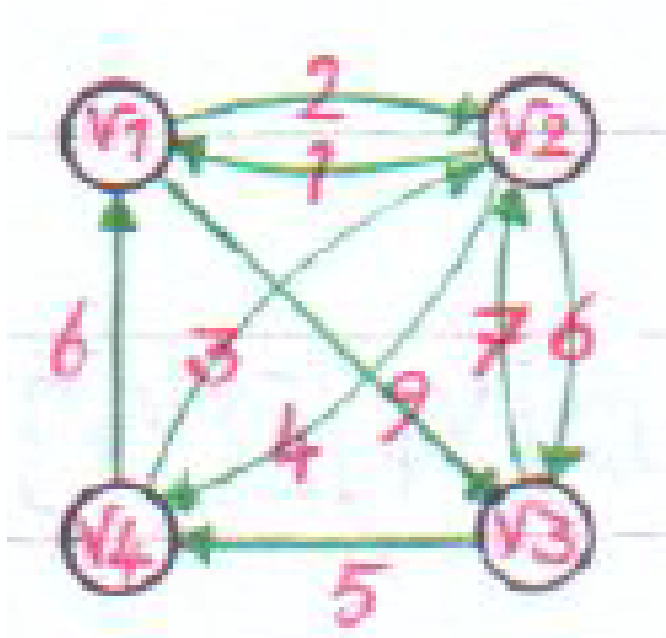
فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

ایده حل:



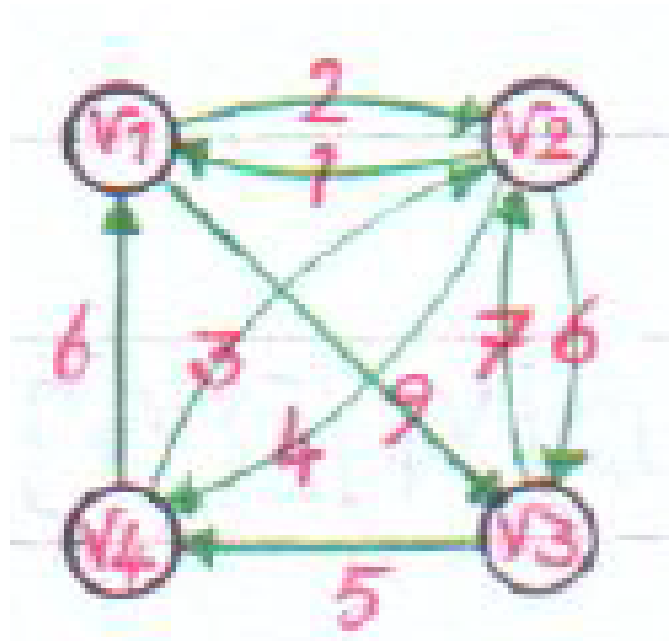
فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

ایده حل:



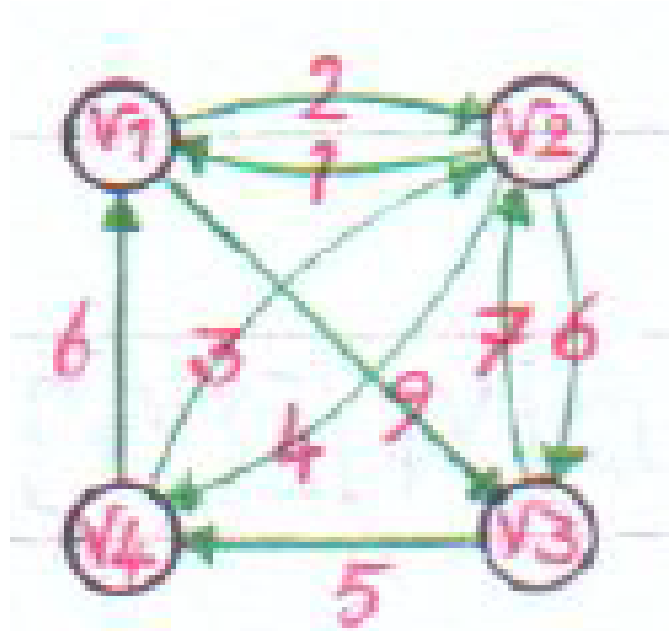
فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

ایده حل:



فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

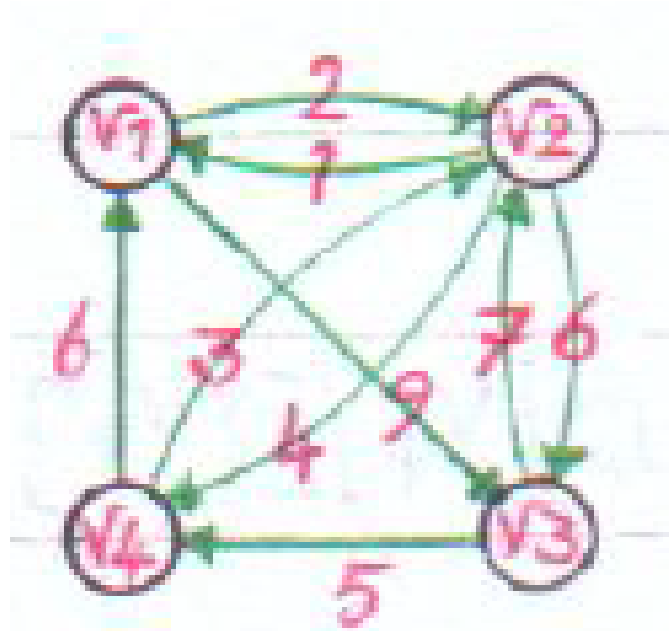
ایده حل:



مجموعه قبیله روستا
 $A \rightarrow$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

ایده حل:

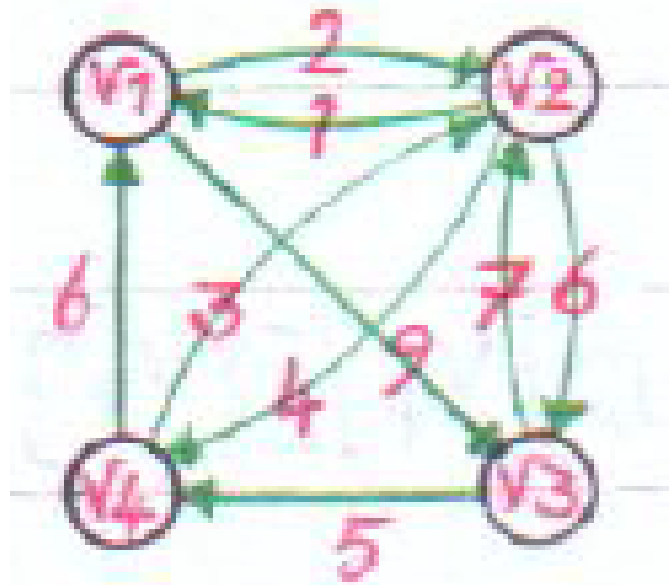


مجموعه قبیله رُوس $A \rightarrow$

$$0 \leq |A| \leq n-2$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

ایده حل:



مجموعه قبیله رتوب $A \rightarrow$

جدول کمترین مسیری از v_i تا v_j با یک رتوب مجزود A $D[v_i][v_j][A]$

$$|A| \leq n-2$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix} \quad A = \{ \}$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \{\}$$

$$D[v_2][\{\}] = 1$$

$$D[v_3][\{\}] = \infty$$

$$D[v_4][\{\}] = 6$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix} \quad A = \{\}$$

$$D[v_2][\{\}] = 1$$

$$D[v_3][\{\}] = \infty$$

$$D[v_4][\{\}] = 6$$

$$A = \{v_2\} \Rightarrow \begin{array}{l} D[v_3][A] \\ D[v_4][A] \end{array}$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \{\}$$

$$D[v_2][\{\}] = 1$$

$$D[v_3][\{\}] = \infty$$

$$D[v_4][\{\}] = 6$$

$$A = \{v_2\} \Rightarrow D[v_3][A] = L[3][2] + D[v_2][\{\}] = 7 + 1 = 8$$

$$D[v_4][A] = L[4][2] + D[v_2][\{\}] = 3 + 1 = 4$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \{v_3\} \Rightarrow$$

$$D[v_2][A] = L[2][3] + D[v_3][\{\}] = 6 + \infty = \infty$$

$$D[v_4][A] = L[4][3] + D[v_3][\{\}] = 0 + \infty = \infty$$

$$A = \{v_4\} \Rightarrow$$

$$D[v_2][A] = L[2][4] + D[v_4][\{\}] = 4 + 6 = 10$$

$$D[v_3][A] = L[3][4] + D[v_4][\{\}] = 5 + 6 = 11$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \{v_2, v_3\}$$

$$D[v_4][A] =$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \{v_2, v_3\}$$

$$D[v_4][A] = \text{Min} \{ L[4][2] + D[v_2][\{v_3\}], L[4][3] + D[v_3][\{v_2\}] \}$$
$$= \text{Min} \{ 3 + \infty, \infty + 8 \} = \infty$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \{v_2, v_4\}$$

$$\begin{aligned} D[v_3][A] &= \text{Min} \{ L[3][2] + D[v_2][\{v_4\}], L[3][4] + D[v_4][\{v_2\}] \} \\ &= \text{Min} \{ 7 + 10, 5 + 4 \} = 9 \end{aligned}$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \{v_3, v_4\}$$

$$\begin{aligned} D[v_2][A] &= \text{Min} \{ L[2][3] + D[v_3][\{v_4\}], L[2][4] + D[v_4][\{v_3\}] \} \\ &= \text{Min} \{ 6 + 11, 4 + \infty \} = 17 \end{aligned}$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \{v_2, v_3, v_4\}$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \{v_2, v_3, v_4\}$$

$$D[v_i][A]$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix} \quad A = \{v_2, v_3, v_4\}$$

$$D[v_1][A] = \text{Min} \{ L[1][2] + D[v_2][\{v_3, v_4\}] , L[1][3] + D[v_3][\{v_2, v_4\}] ,$$

$$L[1][4] + D[v_4][\{v_2, v_3\}] \} = \text{Min} \{ 2 + 17, 9 + 9, \infty + \infty \} = 18$$

فروشنده دوره گرد (Traveling Salesman Problem)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 9 & \infty \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ \infty & 7 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \{v_2, v_4\}$$

$$\begin{aligned} D[v_3][A] &= \min \{ L[3][2] + D[v_2][\{v_4\}], L[3][4] + D[v_4][\{v_2\}] \} \\ &= \min \{ 7 + 10, 5 + 4 \} = 9 \end{aligned}$$

$$D[v_i][A] = \min \{ L[i][j] + D[v_j][A - \{v_j\}] \}$$

$$\forall v_j \in A$$

TSP ($n, L[1..n][1..n]$) {

for $i=2$ to n do

$D[v_i][\{\}] = L[i][1];$

for $k=1$ to $n-2$ do

for ($\forall A \subseteq V - \{v_1\}, |A|=k$)

for ($\forall v_i \in V - A, i \neq 1$)

{

$D[v_i][A] = \min \{ L[i][j] + D[v_j][A - \{v_j\}] \}$

}

$\forall v_j \in A$

$A = V - \{v_1\}$

$D[v_1][A] = \min \{ L[1][j] + D[v_j][A - \{v_j\}] \}$

$\forall v_j \in A$

return $D[v_1][A]$ }

TSP ($n, L[1..n][1..n]$) {

for $i=2$ to n do

$D[v_i][\{\}] = L[i][1];$

for $k=1$ to $n-2$ do

for ($\forall A \subseteq V - \{v_1\}, |A|=k$)

for ($\forall v_i \in V - A, i \neq 1$)

{

$D[v_i][A] = \min \{ L[i][j] + D[v_j][A - \{v_j\}] \}$

}

$\forall v_j \in A$

$A = V - \{v_1\}$

$D[v_1][A] = \min \{ L[1][j] + D[v_j][A - \{v_j\}] \}$

$\forall v_j \in A$

return $D[v_1][A]$ }

زمان اجرا:

TSP ($n, L[1..n][1..n]$) {

for $i=2$ to n do

$D[v_i][\{\}] = L[i][1]$;

$\in O(n^2 2^n)$

زمان اجرا:

for $k=1$ to $n-2$ do

for ($\forall A \subseteq V - \{v_1\}, |A|=k$)

for ($\forall v_i \in V - A, i \neq 1$)

{

$D[v_i][A] = \min \{ L[i][j] + D[v_j][A - \{v_j\}] \}$

}

$\forall v_j \in A$

$A = V - \{v_1\}$

$D[v_1][A] = \min \{ L[1][j] + D[v_j][A - \{v_j\}] \}$

$\forall v_j \in A$

return $D[v_1][A]$ }

TSP($n, L[1..n][1..n]$) {

for $i=2$ to n do

{ $D[v_i][\{\}] = L[i][1];$

$Bestj[v_i][\{\}] = v_1; \}$

for $k=1$ to $n-2$ do

for ($\forall A \subseteq V - \{v_1\}, |A|=k$)

for ($\forall v_i \in V - A, i \neq 1$)

{ $D[v_i][A] = \min_{\forall v_j \in A} \{L[i][j] + D[v_i][A - \{v_j\}]\}$

$Bestj[v_i][A] = \text{بهترین گزینه}$ }

$A = V - \{v_1\}$

$D[v_1][A] = \min_{\forall v_j \in A} \{L[1][j] + D[v_j][A - \{v_j\}]\}$

$Bestj[v_1][A] = \text{بهترین گزینه}$;

return $D[v_1][A], Bestj$ }

• مصرف حافظه: $\Theta(n \cdot 2^n)$

تمرین:

- الگوریتم فروشنده دوره گرد را روی یک گراف با ۵ راس اجرا نمایید و در نهایت، با توجه به ماتریس **Bestj**، دور همیلتونی بهینه را مشخص نمایید.