طراحی الگوریتم ها

روش برنامه ریزی پویا(ادامه)

استاد درس: مهدی جبل عاملی

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها :

$A_{n\times m}$

$B_{m\times p}$

nmp

ضرب زنجیره‌ای ماتریس ها :

$$A_1 \times \cdots\cdots \times A_n$$

$A_{n \times m}$

$B_{m \times p}$

nmp

ضرب زنجیره‌ای ماتریس ها :

$A_{n \times m}$

$B_{m \times p}$

nmp

$A_1\ {}_{13 \times 5}$ $A_2\ {}_{5 \times 89}$ $A_3\ {}_{89 \times 3}$ $A_4\ {}_{3 \times 34}$

ضرب زنجیره‌ای ماتریس ها :

$A_{n\times m}$

$B_{m\times p}$ $\qquad nmp$

$A_{1\,13\times5} \qquad A_{2\,5\times89} \qquad A_{3\,89\times3} \qquad A_{4\,3\times34}$

$A_1 \times A_2 \longrightarrow 13\times89$ تشکیل یک ماتریس $\longrightarrow$ زمان لازم $= 13\times5\times89$

ضرب زنجیره‌ای ماتریس ها :

$A_{n \times m}$

$B_{m \times p}$

nmp

$A_{1\,13 \times 5}$ $A_{2\,5 \times 89}$ $A_{3\,89 \times 3}$ $A_{4\,3 \times 34}$

$A_1 \times A_2 \rightarrow 13 \times 89$ نتیجه یک ماتریس $\rightarrow$ زمان لازم $= 13 \times 5 \times 89$

$(A_1 \times A_2) \times A_3 \rightarrow 13 \times 3$ نتیجه یک ماتریس $\rightarrow$ زمان لازم $= 13 \times 89 \times 3$

ضرب زنجیره‌ای ماتریس‌ها :

$A_{n \times m}$

$B_{m \times p}$

nmp

$A_1 \; 13 \times 5 \qquad A_2 \; 5 \times 89 \qquad A_3 \; 89 \times 3 \qquad A_4 \; 3 \times 34$

$A_1 \times A_2 \rightarrow 13 \times 89$ تشکیل یک ماتریس $\rightarrow$ زمان اجرا $= 13 \times 5 \times 89$

$(A_1 \times A_2) \times A_3 \rightarrow 13 \times 3$ تشکیل یک ماتریس $\rightarrow$ زمان اجرا $= 13 \times 89 \times 3$

$((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4 \rightarrow 13 \times 34$ تشکیل یک ماتریس $\rightarrow$ زمان اجرا $= 13 \times 3 \times 34$

ضرب زنجیره‌ای ماتریس ها :

$A_{n \times m}$

$B_{m \times p}$

nmp

$A_1\ _{13 \times 5}$ $A_2\ _{5 \times 89}$ $A_3\ _{89 \times 3}$ $A_4\ _{3 \times 34}$

$A_1 \times A_2 \rightarrow 13 \times 89$ نتیجه یک ماتریس $\rightarrow$ زمان اجرا $= 13 \times 5 \times 89$

$(A_1 \times A_2) \times A_3 \rightarrow 13 \times 3$ نتیجه یک ماتریس $\rightarrow$ زمان اجرا $= 13 \times 89 \times 3$

$((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4 \rightarrow 13 \times 34$ نتیجه یک ماتریس $\rightarrow$ زمان اجرا $= 13 \times 3 \times 34$

جمع کل زمان اجرا $= 10582$

A_1 13×5 $\quad A_2$ 5×89 $\quad A_3$ 89×3 $\quad A_4$ 3×34

$((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4$ $\quad$ 10582

$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4)$ $\quad$ 54201

$A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4))$ $\quad$ 26418

$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times A_4$ $\quad$ 2856

$A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4)$ $\quad$ 4055

$A_{1\ 13\times5}$ $A_{2\ 5\times89}$ $A_{3\ 89\times3}$ $A_{4\ 3\times34}$

$((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4$ 10582

t_n حالت ضرب

$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4)$ 54201

$A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4))$ 26418

$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times A_4$ 2856

$A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4)$ 4055

$A_{1\;13\times5}$ $A_{2\;5\times89}$ $A_{3\;89\times3}$ $A_{4\;3\times34}$

$((A_1\times A_2)\times A_3)\times A_4$	10582
$(A_1\times A_2)\times(A_3\times A_4)$	54201
$A_1\times(A_2\times(A_3\times A_4))$	26418
$(A_1\times(A_2\times A_3))\times A_4$	2856
$A_1\times((A_2\times A_3)\times A_4)$	4055

t_n حالت ضرب

$A_1\times(A_2\cdots\cdots A_n) \rightarrow t_{n-1}$

$A_{1\ 13\times5}$ $\quad A_{2\ 5\times89}$ $\quad A_{3\ 89\times3}$ $\quad A_{4\ 3\times34}$

$((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4$	10582
$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4)$	54201
$A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4))$	26418
$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times A_4$	2856
$A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4)$	4055

حالت ضرب t_n

$A_1 \times (A_2 \cdots\cdots A_n) \rightarrow t_{n-1}$

$(A_1 \cdots\cdots A_{n-1}) \times A_n \rightarrow t_{n-1}$

$A_{1\ 13\times5}$ $A_{2\ 5\times89}$ $A_{3\ 89\times3}$ $A_{4\ 3\times34}$

$((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4$	10582
$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4)$	54201
$A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4))$	26418
$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times A_4$	2856
$A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4)$	4055

حالت ضرب t_n

$A_1 \times (A_2 \cdots\cdots A_n) \rightarrow t_{n-1}$

$(A_1 \cdots\cdots A_{n-1}) \times A_n \rightarrow t_{n-1}$

$\vdots$ ← و حالت های دیگر هم وجود دارد

$A_{1\ 13\times5}$ $\quad A_{2\ 5\times89}$ $\quad A_{3\ 89\times3}$ $\quad A_{4\ 3\times34}$

$((A_1 \times A_2) \times A_3) \times A_4$	10582
$(A_1 \times A_2) \times (A_3 \times A_4)$	54201
$A_1 \times (A_2 \times (A_3 \times A_4))$	26418
$(A_1 \times (A_2 \times A_3)) \times A_4$	2856
$A_1 \times ((A_2 \times A_3) \times A_4)$	4055

t_n حالت ضرب

$A_1 \times (A_2 \cdots\cdots A_n) \rightarrow t_{n-1}$

$(A_1 \cdots\cdots A_{n-1}) \times A_n \rightarrow t_{n-1}$

$\vdots$ ← و حالت های بیشتری هم وجود دارد

$$\begin{cases} t_n \geqslant t_{n-1} + t_{n-1} \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

ایده برنامه نویسی پویا

$$A_1 \times \cdots\cdots \times A_n$$

ایده برنامه نویسی پویا

$$A_1 \times \cdots\cdots \times A_n \Rightarrow (A_1 \times \cdots \times A_k)(A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$$

ایده برنامه نویسی پویا

$$A_1 \times \cdots \times A_n \Rightarrow (A_1 \times \cdots \times A_k)(A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$$

$$(A_i \times \cdots \times A_j)$$

$$A_1 \times \cdots \times A_n \Rightarrow (A_1 \times \cdots \times A_k)(A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$$

$$(A_i \times \cdots \times A_j)$$

[illegible] $s = j - i$

$$A_1 \times \cdots \times A_n \Rightarrow (A_1 \times \cdots \times A_k)(A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$$

$$(A_i \times \cdots \times A_j)$$

[illegible] $S = j - i$

$0 \leq S \leq n-1$

$$A_1 \times \cdots \times A_n \Rightarrow (A_1 \times \cdots \times A_k)(A_{k+1} \times \cdots \times A_n)$$

$$(A_i \times \cdots \times A_j)$$

[illegible] $S = j - i$

$0 \leq S \leq n-1$

M_{ij} تعداد ضرب های موردنیاز برای ضرب کمینه ماتریس های A_i تا A_j

A_1 13×5 A_2 5×89 A_3 89×3 A_4 3×34

d

0	1	2	3	4
13	5	89	3	34

$A_1 \; 13 \times 5$ $\quad A_2 \; 5 \times 89$ $\quad A_3 \; 89 \times 3$ $\quad A_4 \; 3 \times 34$

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$A_i \quad d_{i-1} \times d_i$

A_1 13×5 A_2 5×89 A_3 89×3 A_4 3×34

d

0	1	2	3	4
13	5	89	3	34

A_i $d_{i-1} \times d_i$

if $s = 0 \Rightarrow M_{ii}$

$A_1 \; 13 \times 5$ $\quad A_2 \; 5 \times 89$ $\quad A_3 \; 89 \times 3$ $\quad A_4 \; 3 \times 34$

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$A_i \quad d_{i-1} \times d_i$

if $s = 0 \Rightarrow M_{ii} = 0$

A_1 13×5 A_2 5×89 A_3 89×3 A_4 3×34

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

A_i $d_{i-1} \times d_i$

if $s = 0$ $\Rightarrow$ $M_{ii} = 0$

if $s = 1$ $\Rightarrow$ $M_{i\,i+1}$

$A_1 \; 13 \times 5 \qquad A_2 \; 5 \times 89 \qquad A_3 \; 89 \times 3 \qquad A_4 \; 3 \times 34$

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$A_i \qquad d_{i-1} \times d_i$

if $s = 0 \Rightarrow M_{ii} = 0$

if $s = 1 \Rightarrow M_{i\,i+1}$

تعداد ضرب $A_i \times A_{i+1}$

اندازه

$d_{i-1} \times d_i \qquad d_i \times d_{i+1}$

A_1 13×5 A_2 5×89 A_3 89×3 A_4 3×34

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$A_i \quad d_{i-1} \times d_i$

if $s = 0 \Rightarrow M_{ii} = 0$

if $s = 1 \Rightarrow M_{i\,i+1} = d_{i-1} \times d_i \times d_{i+1}$

تعداد ضرب $A_i \times A_{i+1}$

اندازه

$d_{i-1} \times d_i \qquad d_i \times d_{i+1}$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline d & 13 & 5 & 89 & 3 & 34 \end{array}$$

$A_i \qquad d_{i-1} \times d_i$

if $s \geq 2 \Rightarrow M_{ij}$

$A_i \cdots\overset{i}{\cdots} A_j$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\cline{2-6}
d & 13 & 5 & 89 & 3 & 34 \\
\cline{2-6}
\end{array}
$$

$A_i \quad d_{i-1} \times d_i$

if $s \geq 2 \Rightarrow M_{ij}$

$$(A_i \cdots A_k)(A_{k+1} \cdots A_j)$$

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$A_i \qquad d_{i-1} \times d_i$

if $s \geq 2 \Rightarrow M_{ij} \qquad M_{ik}$

$$(A_i \cdots A_k)(A_{k+1} \cdots A_j)$$

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$A_i \quad d_{i-1} \times d_i$

if $s \geq 2 \Rightarrow M_{ij} \qquad M_{ik} + M_{k+1\,j} +$

$$(A_i \cdots A_k)(A_{k+1} \cdots A_j)$$

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$A_i \qquad d_{i-1} \times d_i$

if $s \geq 2 \Rightarrow M_{ij}$ $\qquad M_{ik} + M_{k+1\,j} + d_{i-1} \times d_k \times d_j$

$$(A_i \cdots A_k)(A_{k+1} \cdots A_j)$$

$$\underbrace{d_{i-1} \times d_i \qquad d_{k-1} \times d_k}_{d_{i-1} \times d_k \,=\, \text{ابعاد}} \qquad \underbrace{d_k \times d_{k+1} \qquad d_{j-1} \times d_j}_{\text{ابعاد} \,=\, d_k \times d_j}$$

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$A_i \qquad d_{i-1} \times d_i$

if $s \geq 2 \Rightarrow M_{ij} = \underset{i \leq k \leq j-1}{\mathrm{Min}} \{ M_{ik} + M_{k+1\,j} + d_{i-1} \times d_k \times d_j \}$

$$(A_i \cdots A_k)(A_{k+1} \cdots A_j)$$

$$\underbrace{d_{i-1} \times d_i \qquad d_{k-1} \times d_k}_{d_{i-1} \times d_k} \qquad \underbrace{d_k \times d_{k+1} \qquad d_{j-1} \times d_j}_{d_k \times d_j}$$

$d_{i-1} \times d_k$ = [illegible]

[illegible] = $d_k \times d_j$

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$s = 0 \Rightarrow M_{11} = M_{22} = M_{33} = M_{44} = 0$

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$s=0 \Rightarrow M_{11}=M_{22}=M_{33}=M_{44}=0$

$s=1 \quad M_{12}=13\times5\times89=5785 \quad M_{23}=5\times89\times3=1335 \quad M_{34}=89\times3\times34=9078$

$$d \quad \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \boxed{13} & \boxed{5} & \boxed{89} & \boxed{3} & \boxed{34} \end{array}$$

$s=0 \Rightarrow M_{11}=M_{22}=M_{33}=M_{44}=0$

$s=1 \quad M_{12}=13\times5\times89=5785 \qquad M_{23}=5\times89\times3=1335 \qquad M_{34}=89\times3\times34=9078$

$$M_{ij}=\min_{i\leq k\leq j-1}\{M_{ik}+M_{k+1\,j}+d_{i-1}\times d_k\times d_j\}$$

$s=2 \quad M_{13}=\min\{\underbrace{M_{11}+M_{23}+d_0\times d_1\times d_3}_{k=1},\ \underbrace{M_{12}+M_{33}+d_0\times d_2\times d_3}_{k=2}\}=\min\{\underline{1530},9256\}=1530$

$M_{24}=\min\{\underbrace{M_{22}+M_{34}+d_1\times d_2\times d_4}_{k=2},\ \underbrace{M_{23}+M_{44}+d_1\times d_3\times d_4}_{k=3}\}=\min\{24208,\underline{1845}\}=1845$

	0	1	2	3	4
d	13	5	89	3	34

$$M_{ij} = \underset{i \leq k \leq j-1}{Min} \{ M_{ik} + M_{k+1\,j} + d_{i-1} \times d_k \times d_j \}$$

$S = 3$ $$M_{14} = Min \{ \underbrace{M_{11} + M_{24} + d_0 \times d_1 \times d_4}_{k=1} , \underbrace{M_{12} + M_{34} + d_0 \times d_2 \times d_4}_{k=2} , \underbrace{M_{13} + M_{44} + d_0 \times d_3 \times d_4}_{k=3} \} = Min \{ 4055 , 54201 , 2856 \} = \underline{2856}$$

```
Matrix MinMult(n, d[0..n]) {
    for i=1 to n do
        M_ii = 0
    for s=1 to n-1 do
        for i=1 to n-s do
        {   j = i+s
            M_ij = Min { M_ik + M_k+1,j + d_i-1 x d_k x d_j }
                 i<=k<=j-1
        }
  return M_1n }
```

$$M_{ij} = \min_{i \le k \le j-1} \{ M_{ik} + M_{k+1\,j} + d_{i-1} \times d_k \times d_j \}$$

$$T(n) = n + \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)(s)$$

$$\in \theta(n^3)$$

$$T(n) = n + \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)(s)$$

$$\in \theta(n^3)$$

- نحوه ضرب؟؟؟؟

MinMult $(n, d[0..n])$ {

  for $i = 1$ to n do

  { $M_{ii} = 0$;

    Bestk$[i,i] = i$ }

  for $s = 1$ to $n-1$ do

    for $i = 1$ to $n-s$ do

    { $j = i + s$;

      $M_{ij} = \min\limits_{i \le k \le j-1} \{ M_{ik} + M_{k+1\,j} + d_{i-1} \times d_k \times d_j \}$

      Bestk$[i,j] = k$ }   // kای که به ازای آن مقدار min شده است یعنی بهترین k بدست آمده

  return M_{1n}, Bestk; }

Best k

1	1	1	3
	2	2	3
		3	3
			4

$S=2$

$$M_{13} = \min\{\underbrace{M_{11}+M_{23}+d_0\times d_1\times d_3}_{k=1},\ \underbrace{M_{12}+M_{33}+d_0\times d_2\times d_3}_{k=2}\} = \min\{\underline{1530}, 9256\} = 1530$$

$$M_{24} = \min\{\underbrace{M_{22}+M_{34}+d_1\times d_2\times d_4}_{k=2},\ \underbrace{M_{23}+M_{44}+d_1\times d_3\times d_4}_{k=3}\} = \min\{24208, \underline{1845}\} = 1845$$

Bestk

1	1	1	3
	2	2	3
		3	3
			4

$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4$

Bestk

1	1	1	3
	2	2	3
		3	3
			4

$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4$

Bestk[1][4]= 3

$\Rightarrow (A_1 \times A_2 \times A_3)(A_4)$

Bestk

1	1	1	3
	2	2	3
		3	3
			4

$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4$

Bestk[1][4]= 3 $\Rightarrow (A_1 \times A_2 \times A_3)(A_4)$

Bestk[1][3]= 1 $\Rightarrow ((A_1) \times (A_2 \times A_3)) \times (A_4)$

Bestk

1	1	1	3
	2	2	3
		3	3
			4

$A_1 \; A_2 \; A_3 \; A_4$

Bestk[1][4]= 3 $\Rightarrow (A_1 \times A_2 \times A_3)(A_4)$

Bestk[1][3]= 1 $\Rightarrow ((A_1) \times (A_2 \times A_3)) \times (A_4)$

نکته) M و Bestk ، دو ماتریس $n \times n$ بالا مثلثی خواهند بود و از نصفی مصرف حافظه $2n^2$ است. برای
صرفه جویی می توان یک ماتریس را ۱۸۰ درجه چرخاند و در زیر دیگری نوشت. در اینصورت مصرف حافظه n^2 خواهد شد

تمرین:

- الگوریتم ضرب زنجیری ماتریس ها را روی اندازه پنج ماتریس دلخواه اجرا کنید و از روی ماتریس Bestk نحوه ضرب آنها را بدست آورید. (در انتهای کار، M و Bestk را به صورت ماتریس نمایش دهید)

درخت جستجوی دودویی بهینه یا Optimal Binary Search Tree (OBST)

در این درخت، به ازای هر کلید، همواره عناصر کوچکتر در سمت چپ و عناصر بزرگتر در سمت راست قرار دارند

درخت جستجوی دودویی بهینه یا Optimal Binary Search Tree (OBST)

در این درخت، به ازای هر کلید، همواره عناصر کوچکتر در سمت چپ و عناصر بزرگتر در سمت راست قرار دارند

$(key_1 \quad key_2 \text{ - - - - - - } key_n)$

درخت جستجوی دودویی بهینه یا Optimal Binary Search Tree (OBST)

در این درخت، به ازای هر کلید، همواره عناصر کوچکتر در سمت چپ و عناصر بزرگتر در سمت راست قرار دارند

$(key_1 \quad key_2 \text{ - - - - - - - } key_n)$

- درخت بهینه: درختی است که میانگین جستجوی کلید در آن، حداقل باشد.

درخت جستجوی دودویی بهینه یا Optimal Binary Search Tree (OBST)

در این درخت، به ازای هر کلید، همواره عناصر کوچکتر در سمت چپ و عناصر بزرگتر در سمت راست قرار دارند

- در ادامه، فرض می کنیم کلیدها به صورت صعودی مرتب شده اند.

$(key_1 \leq key_2 \leq \dots \leq key_n)$

درخت جستجوی دودویی بهینه یا Optimal Binary Search Tree (OBST)

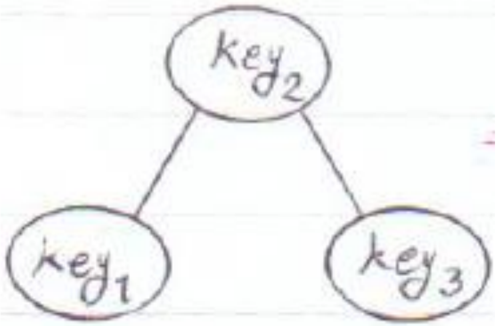
در این درخت، به ازای هر کلید، همواره عناصر کوچکتر در سمت چپ و عناصر بزرگتر در سمت راست قرار دارند

$$(key_1 \leq key_2 \leq \dots \leq key_n)$$

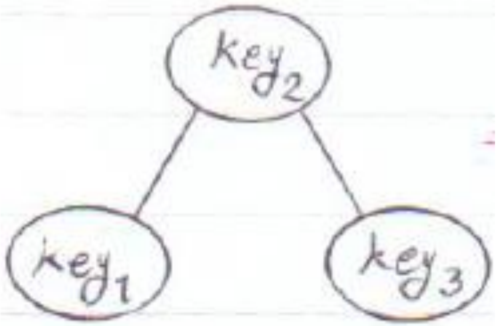
p_i احتمال جستجوی کلید i

a(i) $P_1 = 0.7$ $P_2 = 0.2$ $P_3 = 0.1$

ai) $p_1 = 0.7$ $p_2 = 0.2$ $p_3 = 0.1$



الف) $P_1 = 0.7$ $\quad P_2 = 0.2$ $\quad P_3 = 0.1$



$\Rightarrow$

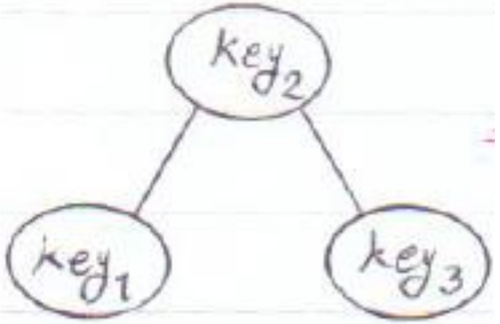
$key_1 \rightarrow$ با دوبار مقایسه $\Rightarrow 2 \times 0.7 = 1.4$

$key_2 \rightarrow$ با یکبار $\Rightarrow 1 \times 0.2 = 0.2$

$key_3 \rightarrow$ با دوبار $\Rightarrow 2 \times 0.1 = 0.1$

$\Rightarrow$ مجموع $= 1.8$

الف) $P_1 = 0.7$ $P_2 = 0.2$ $P_3 = 0.1$

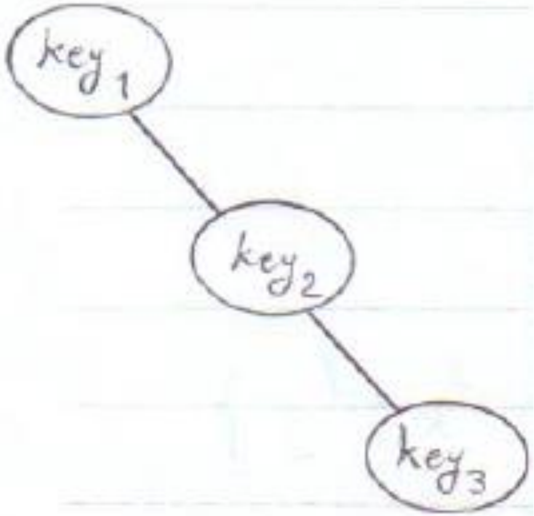


$key_1 \rightarrow$ با دوبار مقایسه $\Rightarrow 2 \times 0.7 = 1.4$

$key_2 \rightarrow$ با یکبار $\Rightarrow 1 \times 0.2 = 0.2$

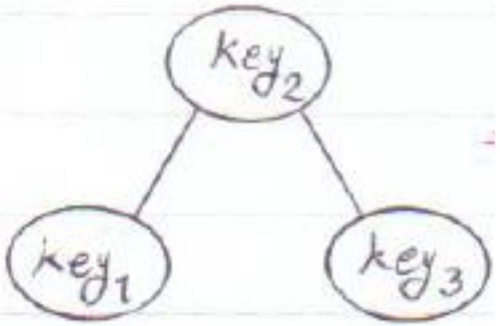
$key_3 \rightarrow$ با دوبار $\Rightarrow 2 \times 0.1 = 0.2$

$\Rightarrow$ مجموع $= 1.8$



$1\times 0.7 + 2\times 0.2 + 3\times 0.1 = \boxed{1.4}$ ✓

الف) $P_1 = 0.7$ $\quad P_2 = 0.2$ $\quad P_3 = 0.1$



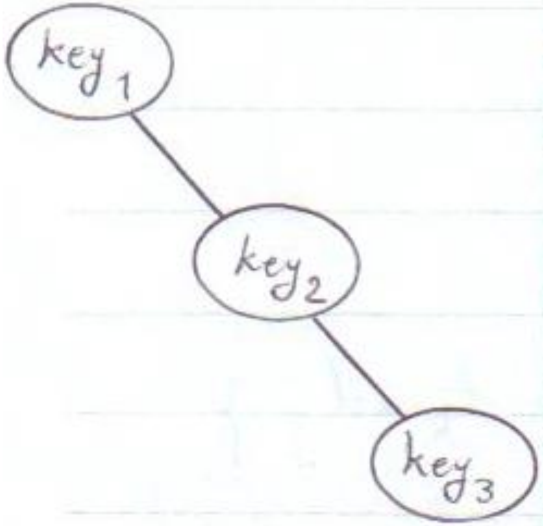
$\Rightarrow$

$key_1 \rightarrow$ با دو بار مقایسه $\Rightarrow 2 \times 0.7 = 1.4$

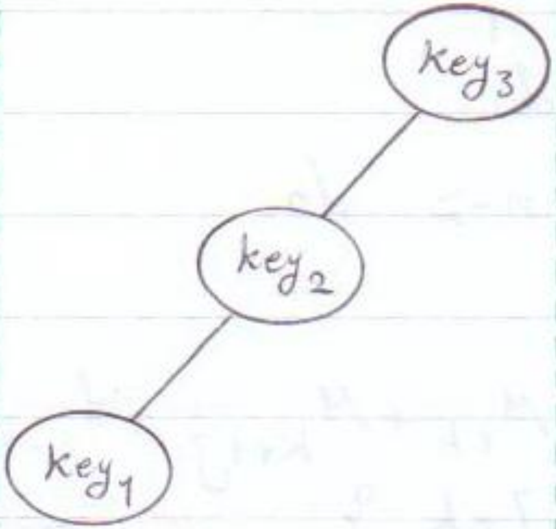
$key_2 \rightarrow$ با یکبار $\Rightarrow 1 \times 0.2 = 0.2$

$key_3 \rightarrow$ با دو بار $\Rightarrow 2 \times 0.1 = 0.2$

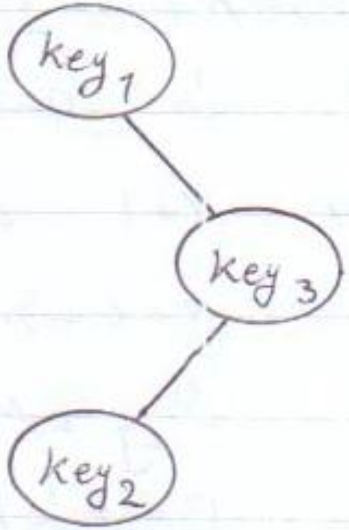
$\Rightarrow$ مجموع $= 1.8$



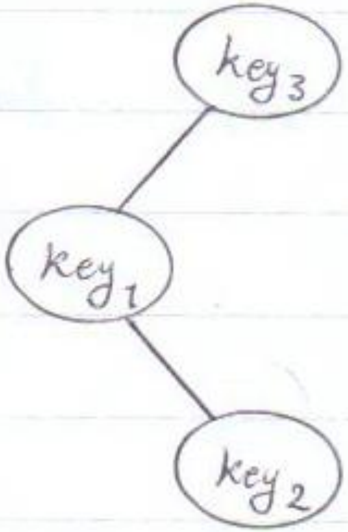
$1\times0.7+2\times0.2+3\times0.1 = \boxed{1.4}$ ✓



$3\times0.7+2\times0.2+1\times0.1 = 2.6$



$1\times0.7+3\times0.2+2\times0.1 = 1.5$



20

$2\times0.7+3\times0.2+1\times0.1 = 2.1$

تعارض‌ها tn

t_n تعداد ضرب‌ها

$$t_n \geq t_{n-1} + t_{n-1}$$

تعداد درخت‌ها t_n

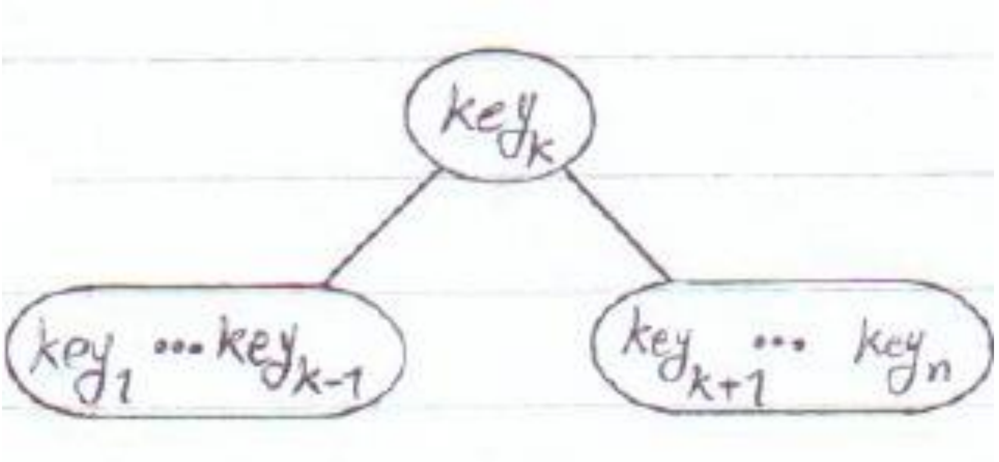
$$t_n \geq t_{n-1} + t_{n-1}$$

تعداد حالاتی که
کلید ۱ ریشه است

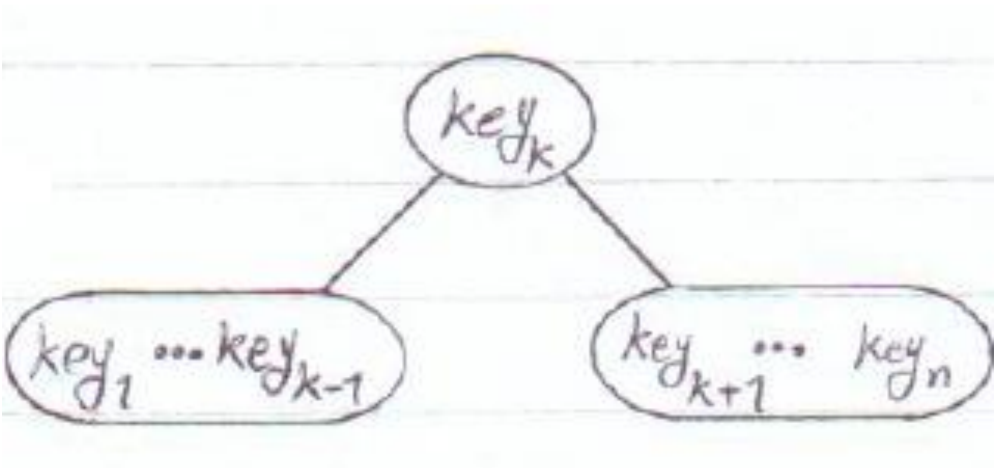
تعداد حالاتی که
کلید n ریشه است

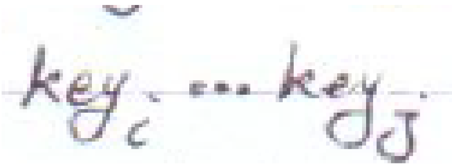
$$t_1 = 1$$

ایده برنامه نویسی پویا

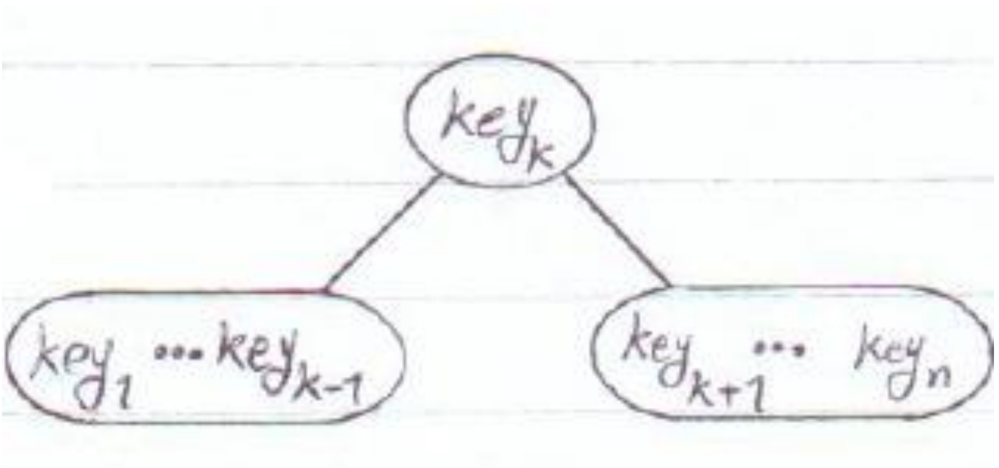


ایده برنامه نویسی پویا



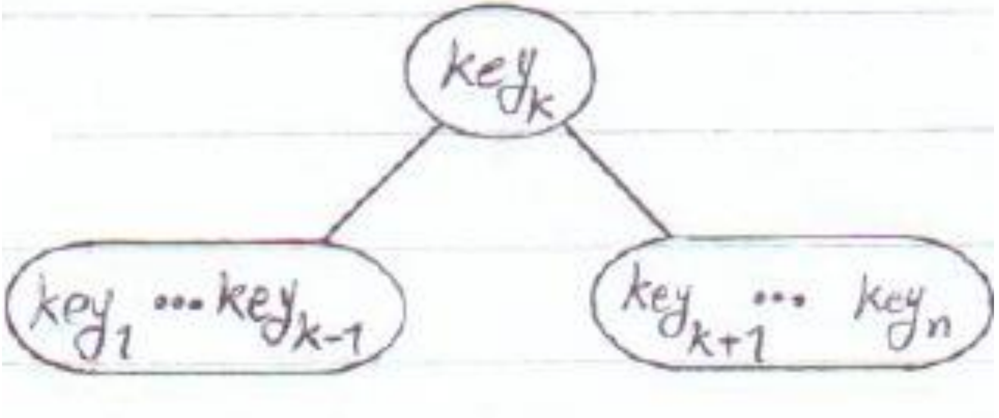


ایده برنامه نویسی پویا



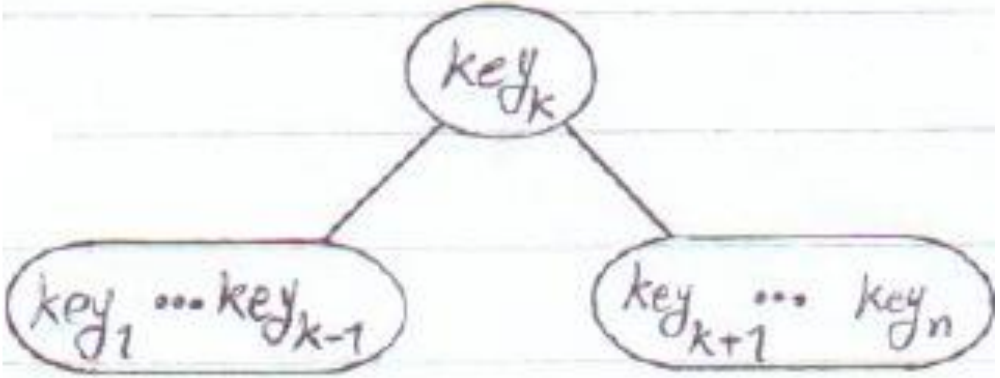
$key_i \dots key_j$ $\qquad$ $S = j - i$

ایده برنامه نویسی پویا



$key_i \ldots key_j$ $\quad s = j - i \quad 0 \le s \le n-1$

ایده برنامه نویسی پویا



$key_i \ldots key_j \qquad s = j - i \qquad 0 \leq s \leq n-1$

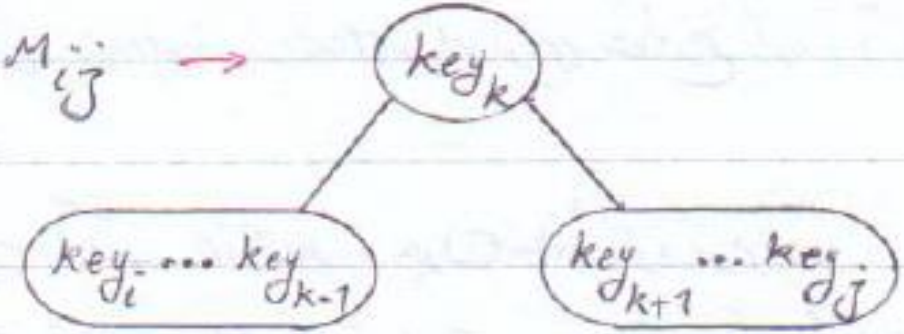
M_{ij} میانگین زمان جستجوی درخت OBST که با کلیدهای i تا j ساخته می‌شود

if $\delta = 0 \Rightarrow M_{ii} \longrightarrow key_i$

if $\delta = 0 \Rightarrow M_{ii} \longrightarrow key_i \Rightarrow M_{ii} = 1 \times f_i$

if $s = 0 \Rightarrow M_{ii} \rightarrow key_i \Rightarrow M_{ii} = 1 \times f_i$

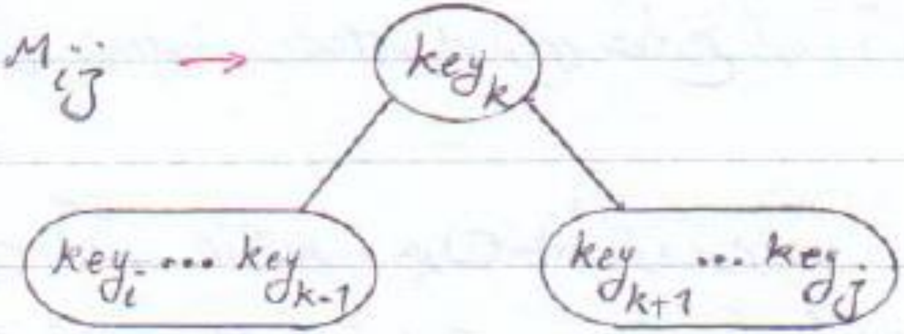
if $s \geq 1 \Rightarrow M_{ij} \rightarrow$



$M_{ij} =$

if $s = 0 \Rightarrow M_{ii} \rightarrow key_i \Rightarrow M_{ii} = 1 \times f_i$

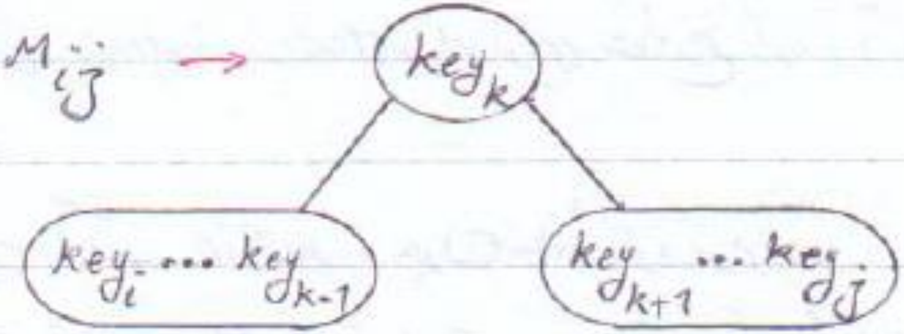
if $s \geq 1 \Rightarrow M_{ij} \rightarrow$



$$M_{ij} = M_{i\,k-1} +$$

if $s = 0 \Rightarrow M_{ii} \rightarrow key_i \Rightarrow M_{ii} = 1 \times p_i$

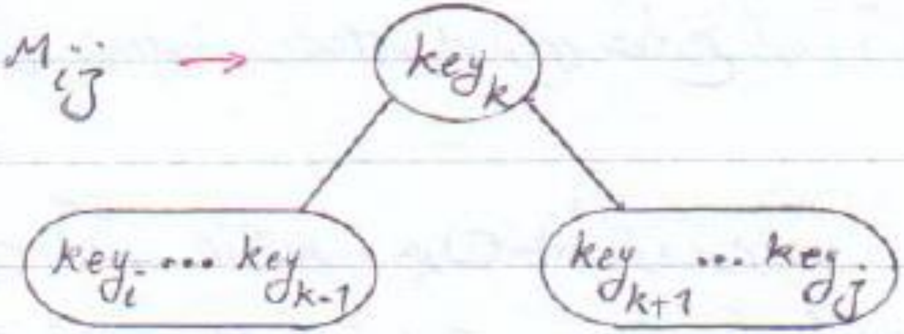
if $s \geq 1 \Rightarrow M_{ij} \rightarrow$



$$M_{ij} = M_{i\,k-1} + 1 \times p_i + 1 \times p_{i+1} + \cdots + 1 \times p_{k-1}$$

if $s = 0 \Rightarrow M_{ii} \rightarrow key_i \qquad \Rightarrow M_{ii} = 1 \times p_i$

if $s \geq 1 \Rightarrow M_{ij} \rightarrow$

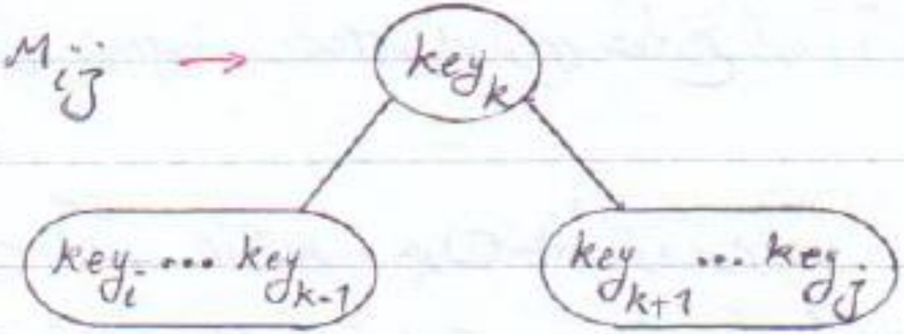


$$M_{ij} = M_{i\,k-1} + 1 \times p_i + 1 \times p_{i+1} + \cdots + 1 \times p_{k-1}$$

$$+ 1 \times p_k +$$

if $s = 0 \Rightarrow M_{ii} \longrightarrow key_i \Rightarrow M_{ii} = 1 \times p_i$

if $s \geq 1 \Rightarrow M_{ij} \longrightarrow$



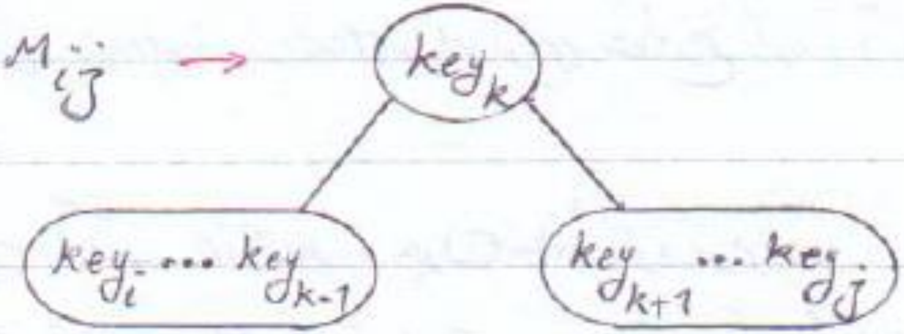
$$M_{ij} = M_{i\,k-1} + 1 \times p_i + 1 \times p_{i+1} + \dots + 1 \times p_{k-1}$$

$$+ 1 \times p_k +$$

$$M_{k+1\,j} + 1 \times p_{k+1} + 1 \times p_{k+2} + \dots + 1 \times p_j$$

if $s = 0 \Rightarrow M_{ii} \rightarrow key_i \Rightarrow M_{ii} = 1 \times p_i$

if $s \geq 1 \Rightarrow M_{ij} \rightarrow$



$$M_{ij} = \min_{i \leq k \leq j} \left\{ \begin{array}{l} M_{i\,k-1} + 1 \times p_i + 1 \times p_{i+1} + \cdots + 1 \times p_{k-1} + \\ 1 \times p_k + \\ M_{k+1\,j} + 1 \times p_{k+1} + 1 \times p_{k+2} + \cdots + 1 \times p_j \end{array} \right\}$$

```
OBST (n, p[1..n]) {
    for   i=1   TO   n   do
            M_ii = p_i ;

    for   s=1   TO   n-1   do
          for   i=1   TO   n-s   do
          {     j = i+s ;
                M_ij = Min { M_i k-1 + M_k+1 j } + Σ_{l=i}^{j} p_l ;
                      i≤k≤j
          }
return M_1n
  }
```

$$M_{ij} = \min_{i \le k \le j} \{ M_{i\,k-1} + M_{k+1\,j} \} + \sum_{l=i}^{j} p_l$$

```
OBST (n, p[1..n]) {
    for i=1 To n do
    {     M_ii = p_i ;
          M_i,i-1 = 0 ;
    }
    M_n+1,n = 0 ;
    for s=1 To n-1 do
        for i=1 To n-s do
        {     j = i+s ;
```
$$M_{ij} = \min_{i \le k \le j} \{ M_{i\,k-1} + M_{k+1\,j} \} + \sum_{l=i}^{j} p_l \;;$$
```
        }
    return M_1n
}
```

- زمان اجرا:

Σ , Min حلقه $= j-i+1 = s+1$

- زمان اجرا:

$$\sum \,,\ Min \quad \text{حلقه} = j - i + 1 = s + 1$$

$$T(n) = n + \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)\left[(s+1)+(s+1)\right]$$

- زمان اجرا:

$\sum$, Min حلقه $= j - i + 1 = s + 1$

$$T(n) = n + \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)\left[(s+1)+(s+1)\right]$$

$$\in \theta(n^3)$$

- زمان اجرا:

Σ , Min حلقه $= j - i + 1 = s + 1$

$$T(n) = n + \sum_{s=1}^{n-1} (n-s)\left[(s+1)+(s+1)\right]$$

$$\in \theta(n^3)$$

- درخت بهینه؟؟؟؟

OBST $(n, p[1..n])$ {

for $i = 1$ To n do

{ $M_{ii} = P_i$;

$M_{i\,i-1} = 0$;

Bestk$[i,i] = i$; }

$M_{n+1\,n} = 0$;

for $S = 1$ To $n-1$ do

for $i = 1$ To $n-S$ do

{ $j = i + S$;

$$M_{ij} = \min_{i \le k \le j} \{ M_{i\,k-1} + M_{k+1\,j} \} + \sum_{l=i}^{j} P_l \;;$$

Bestk$[i,j]$ = بهترین k بدست آمده ;

}

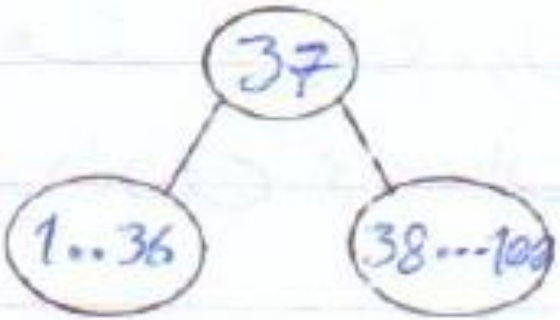
return M_{1n} , Best k ; }

طریقه استفاده
از k و
Bestk

$\Rightarrow$ if Bestk[1,100] = 37

طریقه استفاده
از k و
Bestk

$\Rightarrow$ if $Bestk[1,100]=37$ $\Rightarrow$



تمرین:

- الگوریتم درخت جستجوی دودوی بهینه را برای چهار کلید اجرا کنید و از روی ماتریس Bestk درخت بهینه را بدست آورید.
  - (احتمالات را به دلخواه انتخاب کنید توجه کنید که مجموع احتمالات برابر ۱ باشد)
  - (در انتهای کار، M و Bestk را به صورت ماتریس نمایش دهید)