МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. Шухова»
(БГТУ им. В. Г. Шухова)

Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №3.2

по дисциплине: «Дискретная математика»

по теме: **Транзитивное замыкание отношения**

Выполнил/а: ст. группы ПВ-231

Чупахина София Александровна

Проверил: Рязанов Юрий Дмитриевич

Белгород, 2024

Содержание

Используемые библиотеки

Перед выполнением лабораторной работы прикрепим к ней текст функций для работы с отношениями. Мы задали отношения как структуру и написали ряд функций, повторяющих объявленные над ними операции, для работы с ними в рамках лабораторной работы 3.1.

```c
#include <stdio.h>
#include <stdbool.h>
#include <malloc.h>
#include <assert.h>

#ifndef BIN_REL_DEF_IO
#define BIN_REL_DEF_IO

int max2 (int x, int y) {
    return (x > y) ? x : y;
}

//Структура, отображающая отношение на множестве {1, ..., max_value};
//Какие упорядоченные пары присутствуют в этом отношении, показывает массив целых чисел values; целые числа в двоичной записи представляют собой строки матрицы, отображающей отношение
typedef struct {
    int max_value;
    int *values;
} bin_relation;

//Возвращает пустое отношение на множестве {1, ..., max_value}, проверяя при этом, что max_value не превышает 32 количество(двоичных разрядов в типе int)
bin_relation bin_relation_createEmpty(int max_value) {
    if (max_value > 32) {
        fprintf(stderr, "Too large power of set");
        exit(1);
    }
    int *values = (int*) malloc (max_value * sizeof(int));
    for (int i = 0; i < max_value; i++) {
        values[i] = 0;
    }
    return (bin_relation) {max_value, values};
}

//возвращает 1, если упорядоченная пара (x, y) входит в множество a, и 0 в противном случае
bool bin_relation_getValue(bin_relation a, int x, int y) {
    return (a.values[x-1] >> (y-1)) & 1;
}
```

```c

//Меняет ячейку матрицы отношения a, соответствующую паре (x, y), на значение value
void bin_relation_changeValue(bin_relation *a, int x, int y, bool value) {
    if (value == 1) {
        a->values[x-1] |= 1 << (y-1);
    } else {
        a->values[x-1] &= ~(1 << (y-1));
    }
}

//Осуществляет ввод матрицы отношения по адресу a
void bin_relation_input(bin_relation *a) {
    for (int i = 1; i <= a->max_value; i++) {
        for (int j = 1; j <= a->max_value; j++) {
            int cur_value;
            scanf("%d", &cur_value);
            assert(cur_value == 1 || cur_value == 0);
            bin_relation_changeValue(a, i, j, cur_value);
        }
    }
}

//Осуществляет вывод матрицы отношения a
void bin_relation_matrixPrint(bin_relation a) {
    for (int i = 1; i <= a.max_value; i++) {
        for (int j = 1; j <= a.max_value; j++) {
            printf("%d ", bin_relation_getValue(a, i, j));
        }
        printf("\n");
    }
}

//Осуществляет вывод упорядоченных пар, входящих в отношение a
void bin_relation_pairPrint(bin_relation a) {
    for (int i = 1; i <= a.max_value; i++) {
        bool are_pairs_for_cur_i = false;
        for (int j = 1; j <= a.max_value; j++) {
            if (bin_relation_getValue(a, i, j)) {
                are_pairs_for_cur_i = true;
                printf("(%d, %d); ", i, j);
            }
        }
        if (are_pairs_for_cur_i) {
            printf("\n");
        }
```

```c
    }
}
#endif
```

../../ДИСКРЕТКА ЛАБА 3.1/bin_relations/bin_relation_definition_input_output.c

```c
#include <stdbool.h>
#include "bin_relation_definition_input_output.c"

#ifndef BIN_REL_OPERATIONS
#define BIN_REL_OPERATIONS

//Возвращает 1, если отношение a включено в отношение b, и 0 в противном случае
bool bin_relation_inclusion(bin_relation a, bin_relation b) {
    bool is_inclusion = true;
    for (int i = 0; i < max2(a.max_value, b.max_value) && is_inclusion; i++) {
        is_inclusion = (b.values[i] | a.values[i]) == b.values[i];
    }
    return is_inclusion;
}

//Возвращает 1, если отношения a и b равны, и 0 в противном случае
bool bin_relation_equality(bin_relation a, bin_relation b) {
    bool is_equality = true;
    for (int i = 0; i < max2(a.max_value, b.max_value) && is_equality; i++) {
        is_equality = b.values[i] == a.values[i];
    }
    return is_equality;
}

//Возвращает 1, если отношение a строго включено в отношение b, и 0 в противном случае
bool bin_relation_strictInclusion(bin_relation a, bin_relation b) {
    bool is_inclusion = true;
    bool is_equality = true;
    for (int i = 0; i < max2(a.max_value, b.max_value); i++) {
        is_inclusion &= (b.values[i] | a.values[i]) == b.values[i];
        is_equality &= b.values[i] == a.values[i];
    }
    return is_inclusion && !is_equality;
}

//Возвращает отношение — объединение отношений a и b
bin_relation bin_relation_union(bin_relation a, bin_relation b) {
    bin_relation c = bin_relation_createEmpty(max2(a.max_value,
```

```
b.max_value));
    for (int i = 0; i < c.max_value; i++) {
        c.values[i] = a.values[i] | b.values[i];
    }
    return c;
}

//Возвращает отношение – пересечение отношений a и b
bin_relation bin_relation_intersection(bin_relation a, bin_relation b) {
    bin_relation c = bin_relation_createEmpty(max2(a.max_value, b.max_value));
    for (int i = 0; i < c.max_value; i++) {
        c.values[i] = a.values[i] & b.values[i];
    }
    return c;
}

//Возвращает отношение – разность отношений a и b
bin_relation bin_relation_difference(bin_relation a, bin_relation b) {
    bin_relation c = bin_relation_createEmpty(max2(a.max_value, b.max_value));
    for (int i = 0; i < c.max_value; i++) {
        c.values[i] = a.values[i] & ~b.values[i];
    }
    return c;
}

//Возвращает отношение – симметрическую разность отношений a и b
bin_relation bin_relation_symmetricalDifference(bin_relation a, bin_relation b) {
    bin_relation c = bin_relation_createEmpty(max2(a.max_value, b.max_value));
    for (int i = 0; i < c.max_value; i++) {
        c.values[i] = a.values[i] ^ b.values[i];
    }
    return c;
}

//Возвращает отношение – дополнение до универсального отношения на множестве {1, ..., a.max_value} отношения a
bin_relation bin_relation_complement(bin_relation a) {
    bin_relation c = bin_relation_createEmpty(a.max_value);
    for (int i = 0; i < c.max_value; i++) {
        c.values[i] = ~a.values[i] & ((1<<a.max_value) - 1);
    }
    return c;
```

```
}

//Возвращает отношение — обращение отношения a
bin_relation bin_relation_conversion(bin_relation a) {
    bin_relation c = bin_relation_createEmpty(a.max_value);
    for (int i = 1; i <= c.max_value; i++) {
        for (int j = 1; j <= c.max_value; j++) {
            bin_relation_changeValue(&c, i, j, bin_relation_getValue(a, j, i));
        }
    }
    return c;
}

//Возвращает отношение — композицию отношений a и b
bin_relation bin_relation_composition(bin_relation a, bin_relation b) {
    bin_relation c = bin_relation_createEmpty(max2(a.max_value, b.max_value));
    for (int i = 1; i <= c.max_value; i++) {
        for (int j = 1; j <= c.max_value; j++) {
            if (bin_relation_getValue(a, i, j)) {
                c.values[i-1] |= b.values[j-1];
            }
        }
    }
    return c;
}

//Возвращает отношение — композицию отношений a и b
bin_relation bin_relation_composition2(bin_relation a, bin_relation b) {
    bin_relation c = bin_relation_createEmpty(max2(a.max_value, b.max_value));
    for (int i = 1; i <= c.max_value; i++) {
        for (int j = 1; j <= c.max_value; j++) {
            if (bin_relation_getValue(a, i, j)) {
                for (int k = 1; k <= c.max_value; k++) {
                    c.values[i-1] |= bin_relation_getValue(b, j, k) << (k-1);
                }
            }
        }
    }
    return c;
}

//Возвращает отношение — степень degree отношения a, то есть
```

```
   композицию отношения a с самим собой, выполненную degree-1 раз
bin_relation bin_relation_degree(bin_relation a, int degree) {
    bin_relation c = a;
    for (int i = 1; i < degree; i++) {
        c = bin_relation_composition(c, a);
    }
    return c;
}
#endif
```

../../ДИСКРЕТКА ЛАБА 3.1/bin_relations/bin_relations_operations.c

Задание 1

Текст задания: Написать программу для реализации следующего алгоритма вычисления транзитивного замыкания отношения A, построенного на множестве M:

Алгоритм 1.

Вход: A — отношение.

Выход: C — транзитивное замыкание отношения A.

1. $C := A$; $S := AoA$.
2. Пока $\overline{S \subseteq C}$ выполнять:

   $C := C \cup S$; $S := SoA$.
3. Конец алгоритма.

Поскольку в прошлой лабораторной работе мы написали библиотеку для выполнения основных операций над отношениями, в число которых входит проверка включения (то есть проверка, является ли одно отношение нестрогим подмножеством другого), объединение и композиция, для нас не составит труда реализовать этот алгоритм:

```
ДИСКРЕТКАЛАБАДИСКРЕТКАЛАБА
bin_relation transitive_closure_algorithm1(bin_relation A) {
    bin_relation C = A;
    bin_relation S = bin_relation_composition(A, A);
    while (!bin_relation_inclusion(S, C)) {
        C = bin_relation_union(C, S);
        S = bin_relation_composition(S, A);
    }
    return C;
}
```

../programs/closures_relations.c

Задание 2

Текст задания: Привести пример отношения A на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, при обработке которого алгоритмом 1 композиция выполнится не большее количество раз, чем при обработке любого другого отношения на множестве M.

Сколько раз выполнится композиция при обработке отношения A? Проверить экспериментально.

Определить, какое количество операций сравнения выполнится при обработке отношения A.

Если перед нами стоит задача найти такое отношение A, при обработке которого алгоритмом отношения 1 композиция выполнится **не большее** количество раз, чем при обработке любых других отношений, значит, количество выполненных композиций для обработки отношения A должно быть **наименьшим**. Логично предположить, что оно будет наименьшим, когда для отношения A не нужно искать транзитивное замыкание: отношение уже транзитивно, и алгоритм прекратит выполнение сразу же, как только сможет это распознать.

Сколько именно композиций потребуется выполнить для его обработки? Отношение транзитивно, если при вхождении в него пар вида (x, z) и (z, y) в него также будет входить пара вида (x, y). Значит, квадрат отношения A, содержащий в себе все такие «результирующие» пары, будет входить в исходное отношение. Для проверки данным алгоритмом факта транзитивности исходного отношения достаточно выполнить композицию **один раз**, чтобы получить его квадрат. Следом за этим шагом условие цикла возвращает ложь (вспомогательное отношение S является подмножеством отношения C, которое на данном шаге равно исходному), и функция возвращает отношение C, равное отношению A.

Как пример транзитивного отношения можем рассмотреть множество, образованное декартовым произведением непересекающихся подмножеств множества M. Если x-элементы всех пар берутся из некоторого множества X и y-элементы всех пар берутся из некоторого множества Y, и при этом $X \cap Y = \emptyset$, то не найдется двух пар вида (x, z) и (z, y), ведь это значило бы, что $z \in X$ и $z \in Y$. А когда такие пары отсутствуют, отношение можно считать транзитивным: условие $xRz \& zRy \to \overline{xRy}$ не будет нарушаться, ведь оно всегда истинно, если импликация следует из лжи.

Итак, зададим отношение A как $\{1, 2, 4, 5, 7\} \times \{3, 8, 10\}$. Перед тем, как начать с ним работать, создадим модифицированный вариант функции transitive_closure_algorithm1, который, помимо возвращения транзитивного замыкания отношения A, сохраняет по указанному адресу число — количество выполненных композиций (поскольку количество композиций требуется найти экспериментально). В теле main создадим отношение A, переменные для хранения количества выполненных сравнений и композиций, а затем вызовем модифицированную функцию для получения транзитивного замыкания отношения A. Результаты работы — матрицу транзитивного замыкания и количество композиций — выведем на экран.

```
ДИСКРЕТКАЛАБАДИСКРЕТКАЛАБА
bin_relation transitive_closure_algorithm1_experiment(bin_relation A, int *composition_amount) {
    bin_relation C = A;
    bin_relation S = bin_relation_composition(A, A);
    (*composition_amount) = 1;
    while (!bin_relation_inclusion(S, C)) {
        C = bin_relation_union(C, S);
        S = bin_relation_composition(S, A);
        (*composition_amount)++;
    }
    return C;
}
int main() {
    bin_relation min_of_compos = bin_relation_createEmpty(10);
    int x_values[5] = {1, 2, 4, 5, 7};
    int y_values[3] = {3, 8, 10};
    for (int ind_x = 0; ind_x < 5; ind_x ++) {
        for (int ind_y = 0; ind_y < 3; ind_y++) {
            bin_relation_changeValue(&min_of_compos, x_values[ind_x], y_values[ind_y], 1);
        }
    }
```

```c

    int compos_amount_for_min1 = 0;
    bin_relation min_of_compos_closure1 =
   transitive_closure_algorithm1_experiment(min_of_compos,
   &compos_amount_for_min1);
    bin_relation_matrixPrint(min_of_compos_closure1);
    printf("Compositions: %d\n\n", compos_amount_for_min1);
}
```

../programs/closures_relations.c

```
0 0 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Compositions: 1
```

Рис. 1: Вывод результата работы алгоритма 1 на отношении с минимально возможным количеством композиций

Как видим, была выполнена всего одна композиция.

Перейдем к вопросу вычисления количества сравнений (его не нужно подтверждать экспериментально). Для этого разберемся, какие вообще функции использует этот алгоритм и сколько сравнений содержит каждая из них.

Создание переменной-структуры и присвоение ей значения не требует сравнений.

Операция композиции (слегка измененная по сравнению с вариантом в лабораторной работе 3.1) содержит в себе два вложенных цикла, задающих элементы пары i и j в диапазоне от 1 до $|M|$; внутри располагается проверка на то, входит ли рассматриваемая пара в первое отношение (это как раз и есть операция сравнения), после чего i-тая строка результирующего отношения находится как побитовое «или» ее текущего значения с j-той строкой второго отношения. Побитовые операции, в свою очередь, производятся мгновенно (имеют нулевой порядок функции временной сложности) и не требуют операций сравнения. Однако следует помнить, что перебор значений переменной внешнего цикла приведет к выполнению $|M| + 1$ операций сравнения (M сравнений, проверяющих, не вышла ли переменная за рамки диапазона, в ходе которых условие продолжения цикла истинно, и 1 сравнение, когда оно оказывается ложным), а перебор значений внутреннего цикла — к выполнению $(|M| + 1) * |M|$ сравнений (по $|M| + 1$ сравнений при возрастании переменной внутреннего цикла, которое будет производиться $|M|$ раз). То есть композиция приводит к выполнению $|M|^2 + |M| + 1 + (|M| + 1) * |M| = |M|^2 + (|M| + 1) * (|M| + 1)$ $= |M|^2 + (|M| + 1)^2$ операций сравнения.

Операция проверки вхождения одного отношения в другое содержит в себе один цикл, перебирающий номера строк от 1 до $|M|$ (в нашем случае мощности множеств, на которых построены отношения, одинаковы), и анализирует, является ли одна строка вхождением в другую, с помощью побитовых операций и одной операции сравнения. То есть каждое применение операции сравнения приводит к выполнению $|M|$ операций сравнения непосредственно в ходе выполнения, плюс $|M| + 1$ операций выполняются в ходе перебора значений цикла.

Наконец, операция объединения также состоит из одного цикла, перебирающего номера строк от 1 до $|M|$, и строка результирующей матрицы с текущим номером находится как результат побитового «или» соответствующих строк матриц, над которыми проводится объединение. Это действие само по себе не содержит операций сравнения, но $|M| + 1$ операций сравнения выполняются при переборе значений цикла.

Заметим, что операции композиции, объединения и проверки на вхождение выполняются по одному разу на каждую итерацию цикла, однако помимо этого, композиция один раз выполняется до запуска цикла, а проверка на вхождение — и тогда, когда условие продолжения цикла обращается в ложь и следующая итерация не запускается. То есть всего композиций и проверок на вхождение происходит k+1, где k — количество итераций цикла, а количество операций сравнения за все время выполнения алгоритма будет равно $(|M|^2 + (|M| + 1)^2 + |M|$ $+ |M| + 1)$ * (k+1) + $(|M| + 1)$ * k.

В случае, когда отношение A транзитивно изначально, цикл не будет выполняться ни разу, и количество операций сравнения можно вычислить как $(|M|^2 + (|M| + 1)^2 + |M| + |M| + 1)$ * (0+1) + $(|M| + 1)$ * 0 = $(|M|^2 + (|M| + 1)^2 + |M| + |M| + 1)$ * 1 = $|M|^2 + (|M| + 1)^2 + |M| + |M| + 1 = 10^2 + (10 + 1)^2 + 10 + 10{+}1 = 100 + 121 + 10 + 11 = 242$.

Задание 3

Текст задания: Привести пример отношения A на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, при обработке которого алгоритмом 1 композиция выполнится не меньшее количество раз, чем при обработке любого другого отношения на множестве M.

Сколько раз выполнится композиция при обработке отношения A? Проверить экспериментально.

Определить, какое количество операций сравнения выполнится при обработке отношения A.

Если перед нами стоит задача найти такое отношение A, при обработке которого алгоритмом отношения 1 композиция выполнится **не меньшее** количество раз, чем при обработке любых других отношений, значит, количество выполненных композиций для обработки отношения A должно быть **наибольшим**. Что вообще нужно, чтобы построить транзитивное замыкание отношения? Задача сводится к тому, чтобы включить в исходное отношение все пары из элементов, которые в графе исходного отношения соединены цепочкой дуг любой длины, то есть принадлежат любому из отношений A^2, A^3, ..., $A^{|M|}$, где M — мощность множества, на котором построено отношение. Текущий алгоритм же, по сути, создает отношение C, которое изначально равно исходному A, и вспомогательное отношение S, которое изначально равно A^2. С каждой итерацией цикла отношение C объединяется с текущим отношением S, а потом выполняется композиция множества S с A, то есть S становится равно A^3, ..., $A^{|M|}$. Получается, алгоритм сводится к постепенному добавлению в результирующее отношение пар, входящих в степени исходного отношения по возрастанию, то есть пара из отношения A в максимальной степени будет добавлена последней, и до ее добавления алгоритм не завершится. Тогда и количество выполненных композиций будет наибольшим, когда в отношении A есть некая пара, элементы которой связаны цепочкой дуг длиной $|M|$. Эта пара будет принадлежать множеству $A^{|M|}$, в нашем случае A^{10}, и транзитивное замыкание будет завершенным только после ее добавления после **десяти** композиций.

Как пример отношения, содержащего такую пару, можем рассмотреть отношение, состоящее только из следующих пар: $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{4,5\}$, $\{5,6\}$, $\{6,7\}$, $\{7,8\}$, $\{8,9\}$, $\{9,10\}$, $\{10,1\}$. Пара $\{1,1\}$ в него не входит, и сам с собой элемент 1 соединен цепочкой из 10 дуг. Зададим такое множество в теле функции main и применим к нему экспериментальную версию алгоритма 1.

```
ДИСКРЕТКАЛАБАДИСКРЕТКАЛАБА
int main() {
    bin_relation max_of_compos = bin_relation_createEmpty(10);
    for (int i = 1; i <= 10; i++) {
        bin_relation_changeValue(&max_of_compos, i, (i%10)+1, 1);
    }

    int compos_amount_for_max1 = 0;
    bin_relation max_of_compos_closure1 =
   transitive_closure_algorithm1_experiment(max_of_compos,
   &compos_amount_for_max1);
    bin_relation_matrixPrint(max_of_compos_closure1);
    printf("Compositions: %d\n\n", compos_amount_for_max1);
}
```

../programs/closures_relations.c

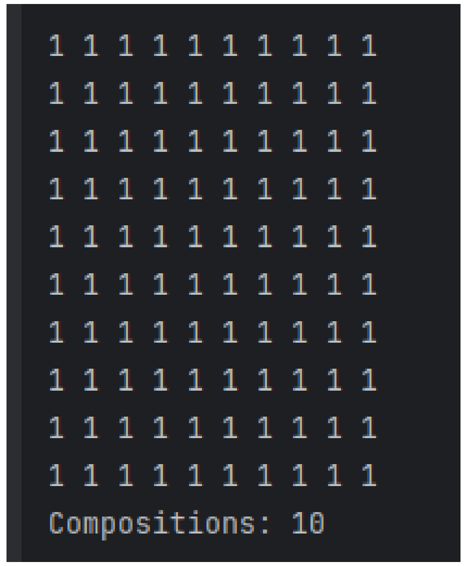


Рис. 2: Вывод результата работы алгоритма 1 на отношении с максимально возможным количеством композиций

Как видим, было выполнено ровно десять композиций.

Переходя к задаче подсчета количества сравнений, мы можем воспользоваться формулой, выведенной в задании 2: ($|M|^2$ + $(|M|+1)^2$ + $|M|$ + $|M|+1$) * (k+1) + ($|M|+1$) * k. Остается только найти K для этого случая. В начале выполнения алгоритма будущее транзитивное замыкание, если рассматривать его как объединение степеней отношения A, содержит в себе только первую степень, и с каждой итерацией цикла максимальная степень будет увеличиваться на 1. До 10 она дойдет за 9 итераций цикла, и количество сравнений будет равно ($|M|^2$ + $(|M|+1)^2$ + $|M|$ + $|M|+1$) * (9+1) + ($|M|+1$) * 9 = 10 * ($|M|^2$ + $(|M|+1)^2$ + $|M|$ + $|M|+1$) + 9 * ($|M|+1$) = 10 * (10^2 + $(10+1)^2$ + 10 + $10+1$) + 9 * ($10+1$) = 10 * (100 + 121 + 10 + 11) + 9 * 11 = 10 * 242 + 99 = 2420 + 99 = 2519.

Задание 4

Текст задания: Написать программу для реализации следующего алгоритма вычисления транзитивного замыкания отношения A, построенного на множестве M:

Алгоритм 2.

Вход: A — отношение.

Выход: C — транзитивное замыкание отношения A.

1. $C := A$; $C2 := CoC$.

2. Пока $\overline{C2 \subseteq C}$ выполнять: $C := C \cup C2$; $2 := CoC$.

3. Конец алгоритма.

Этот алгоритм структурно похож на алгоритм 1: все, что требуется, чтобы получить его из первого — замена нескольких переменных. Так что он так же легко поддается программной реализации:

```
ДИСКРЕТКАЛАБАДИСКРЕТКАЛАБА
bin_relation transitive_closure_algorithm2(bin_relation A) {
```

```
    bin_relation C = A;
    bin_relation C2 = bin_relation_composition(C, C);
    while (!bin_relation_inclusion(C2, C)) {
        C = bin_relation_union(C, C2);
        C2 = bin_relation_composition(C, C);
    }
    return C;
}
```

../programs/closures_relations.c

Задание 5

Текст задания: Привести пример отношения A на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, при обработке которого алгоритмом 2 композиция выполнится не большее количество раз, чем при обработке любого другого отношения на множестве M.

Сколько раз выполнится композиция при обработке отношения A? Проверить экспериментально.

Определить, какое количество операций сравнения выполнится при обработке отношения A.

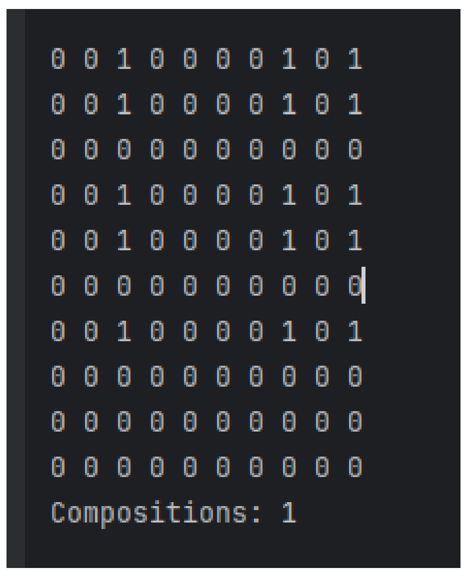
Первые шаги данного алгоритма очень похожи на первые шаги алгоритма 1. Создается отношение для записи будущего транзитивного замыкания, изначально равное исходному отношению A, и вспомогательное отношение, равное квадрату исходного отношения, A^2. Как мы выяснили в ходе выполнения задания 2, если квадрат исходного отношения входит в само отношение A, то A уже транзитивно, и достаточно выполнить **одну** композицию для получения квадрата отношения A и сравнения его с исходным отношением. Значит, как отношение, при обработке которого будет совершено наименьшее количество композиций, мы можем взять заведомо транзитивное отношение из задания 2.

Проверим это экспериментально. Внесем в функцию алгоритма 2 такие же изменения для отслеживания количества совершенных композиций и сохранения этого количества во внешнюю переменную. Затем для уже полученного в теле main транзитивного множества запустим этот алгоритм, выведя результат выполнения и количество композиций на экран.

```
ДИСКРЕТКАЛАБАДИСКРЕТКАЛАБА
bin_relation transitive_closure_algorithm2_experiment(bin_relation A,
   int *composition_amount) {
    bin_relation C = A;
    bin_relation C2 = bin_relation_composition(C, C);
    (*composition_amount) = 1;
    while (!bin_relation_inclusion(C2, C)) {
        C = bin_relation_union(C, C2);
        C2 = bin_relation_composition(C, C);
        (*composition_amount)++;
    }
    return C;
```

```c
}
int main() {
    bin_relation min_of_compos = bin_relation_createEmpty(10);
    int x_values[5] = {1, 2, 4, 5, 7};
    int y_values[3] = {3, 8, 10};
    for (int ind_x = 0; ind_x < 5; ind_x ++) {
        for (int ind_y = 0; ind_y < 3; ind_y++) {
            bin_relation_changeValue(&min_of_compos, x_values[ind_x], y_values[ind_y], 1);
        }
    }
    int compos_amount_for_min2 = 0;
    bin_relation min_of_compos_closure2 = transitive_closure_algorithm2_experiment(min_of_compos, &compos_amount_for_min2);
    bin_relation_matrixPrint(min_of_compos_closure2);
    printf("Compositions: %d\n\n", compos_amount_for_min2);
}
```

../programs/closures_relations.c



```
0 0 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 1 0 1
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Compositions: 1
```

Рис. 3: Вывод результата работы алгоритма 2 на отношении с минимально возможным количеством композиций

Как видим, была выполнена всего одна композиция, как и для похожего случая с применением алгоритма 1.

Перейдем к вычислению количества операций сравнения в ходе выполнения этого алгоритма. Для него, как и для алгоритма 1, справедливо, что для одной итерации цикла выполняется по одной операции композиции, объединения и проверки на вхождение; также верно, что одна операция композиции выполняется перед запуском цикла, а одна операция проверки на вхождение — в ходе проверки условия в момент выхода из цикла. Получим все ту же формулу для вычисления количества операций сравнения: $(|M|^2 + (|M|+1)^2 + |M| + |M|+1)$ * (k+1) +

$(|M| + 1)$ * k, где k — количество итераций цикла. В этом случае k = 0, и $(|M|^2 + (|M| + 1)^2 + |M| + |M| + 1)$ * (0+1) + $(|M| + 1)$ * 0 = $(|M|^2 + (|M| + 1)^2 + |M| + |M| + 1)$ * 1 = $|M|^2 + (|M| + 1)^2 + |M| + |M| + 1 = 10^2 + (10 + 1)^2 + 10 + 10 + 1. = 100 + 121 + 10 + 11 = 242$.

Задание 6

Текст задания: Привести пример отношения A на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, при обработке которого алгоритмом 2 композиция выполнится не меньшее количество раз, чем при обработке любого другого отношения на множестве M.

Сколько раз выполнится композиция при обработке отношения A? Проверить экспериментально.

Определить, какое количество операций сравнения выполнится при обработке отношения A.

По сути, этот алгоритм также представляет из себя постепенное повышение степени вспомогательного отношения $C2$ и его объединение с формируемым транзитивным замыканием C на каждой итерации цикла, однако более быстрое. Рассмотрим значения отношений $C2$ и C на первых нескольких итерациях, если условие продолжения цикла остается истинным:

0. $C = A$;
$C2 = CoC = AoA = A^2$;

1. $C = C \cup C2 = A \cup A^2$;
$C2 = CoC = (A \cup A^2)o(A \cup A^2) = A^2 \cup A^3 \cup A^3 \cup A^4 = A^2 \cup A^3 \cup A^4$;

2. $C = (C \cup C2) = (A \cup A^2) \cup (A^2 \cup A^3 \cup A^4) = A \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4$;
$C2 = CoC = (A \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4)o(A \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4) = ... = A^2 \cup A^3 \cup A^4 \cup A^5 \cup A^6 \cup A^7 \cup A^8$;

3. $C = (C \cup C2) = (A \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4) \cup (A^2 \cup A^3 \cup ... \cup A^8) = A \cup A^2 \cup ... \cup A^8$;
$C2 = CoC = (A \cup A^2 \cup ... \cup A^8)o(A \cup A^2 \cup ... \cup A^8) = ... = A^2 \cup A^3 \cup ... \cup A^{16}$;

То есть, хотя вспомогательное отношение $C2$ представляет собой уже не максимальную для текущей итерации степень отношения A, а объединение степеней вплоть до максимальной, а сама максимальная степень с каждой итерацией не возрастает на 1, а увеличивается в 2 раза, одно остается неизменным: максимальная степень отношения A включается в результирующее замыкание последней, в самом конце выполнения алгоритма. Значит, для наибольшего количества композиций в транзитивное замыкание должна входить пара, принадлежащая максимально возможной степени, $A^{|M|}$ (A^{10} в нашем случае). Для этого два элемента в графе исходного отношения должны быть связаны цепочкой из $|M|$, 10 узлов. В таком случае, поскольку максимальная степень как вспомогательного отношения $C2$, так и результирующего отношения C возрастает в 2 раза с каждой итерацией, мы сможем отследить, сколько потребуется композиций для включения в результирующее отношение степени A^{10}. Перед началом цикла, на «нулевой» итерации, максимальная степень результирующего отношения равна 1, и на этом шаге уже совершается композиция для задания стартового значения вспомогательного. На первой итерации максимальная степень результирующего равна 2, на второй — 4, на третьей — 8, и только на четвертой она достигнет 16 и перешагнет значение 10. Каждая итерация прибавит 1 к количеству совершенных композиций (за их счет меняется значение вспомогательного отношения), и всего их количество будет равно **пяти**.

Проверим это на практике, применив экспериментальную версию алгоритма 2 ко множеству из задания 3, в графе которого элемент 1 соединен с собой цепочкой из 10 дуг.

```c
ДИСКРЕТКАЛАБАДИСКРЕТКАЛАБА
int main() {
    bin_relation max_of_compos = bin_relation_createEmpty(10);
    for (int i = 1; i <= 10; i++) {
        bin_relation_changeValue(&max_of_compos, i, (i%10)+1, 1);
    }
    int compos_amount_for_max2 = 0;
    bin_relation max_of_compos_closure2 =
   transitive_closure_algorithm2_experiment(max_of_compos,
   &compos_amount_for_max2);
    bin_relation_matrixPrint(max_of_compos_closure2);
    printf("Compositions: %d\n\n", compos_amount_for_max2);
}
```

../programs/closures_relations.c

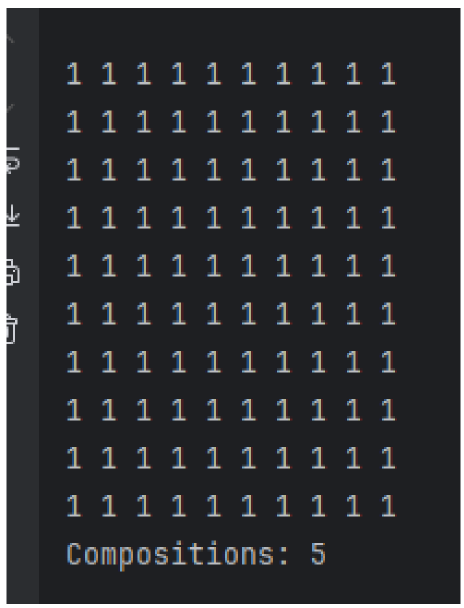


Рис. 4: Вывод результата работы алгоритма 2 на отношении с максимально возможным количеством композиций

Результаты эксперимента сошлись с теоретическими рассуждениями: было выполнено ровно 5 композиций.

Для вычисления количества сравнений воспользуемся уже знакомой формулой ($|M|^2 + (|M|+1)^2 + |M| + |M|+1$) * (k+1) + ($|M|+1$) * k. Осталось только вычислить k. Поскольку в этом алгоритме старшая степень в результирующем отношении увеличивается в 2 раза с каждой итерацией, количество итераций, которые понадобятся, чтобы достичь некоторой степени n, можно вычислить как $k = \lceil log_2 n \rceil$. В нашем случае $k = \lceil log_2 10 \rceil = \lceil 3.322 \rceil = 4$. Таким образом, количество операций сравнения в ходе выполнения этого алгоритма равно $(|M|^2 + (|M|+1)^2 + |M| + |M|+1) * (4+1) + (|M|+1) * 4 = 5 * (|M|^2 + (|M|+1)^2 + |M| + |M|+1) + 4 * (|M|+1)$

$= 5 * (10^2 + (10+1)^2 + 10 + 10+1) + 4 * (10+1) = 5 * (100 + 121 + 10 + 11) + 4 * 11 = 5 * 242 + 44 = 1210 + 44 = 1254.$

Задание 7

Текст задания: Написать программу для реализации следующего алгоритма вычисления транзитивного замыкания отношения A, построенного на множестве M:

Алгоритм 3.

Вход: A — отношение.

Выход: C — транзитивное замыкание отношения A.

1. $C := A$.
2. Для всех $z \in M$ выполнить:

    Для всех $x \in M$ выполнить:

        Если $(x, z) \in C$ то

            Для всех $y \in M$ выполнить:

                Если $(z, y) \in C$ то $C := C \cup \{(x, y)\}$.

3. Конец алгоритма.

Этот алгоритм также легко поддается программной реализации; в отличие от предыдущих, он не требует использования функций из «библиотеки» для работы над отношениями:

```
ДИСКРЕТКАЛАБАДИСКРЕТКАЛАБА
bin_relation transitive_closure_algorithm3(bin_relation A) {
    bin_relation C = A;
    for (int z = 1; z <= A.max_value; z++) {
        for (int x = 1; x <= A.max_value; x++) {
            if (bin_relation_getValue(C, x, z)) {
                for (int y = 1; y <= A.max_value; y++) {
                    if (bin_relation_getValue(C, z, y)) {
                        C.values[x-1] |=  1 << (y-1);
                    }
                }
            }
        }
    }
    return C;
}
```

../programs/closures_relations.c

Задание 8

Текст задания: Привести пример отношения A на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, при обработке которого алгоритмом 3 количество операций сравнения выполнится не большее количество раз, чем при обработке любого другого отношения на множестве M.

Определить, какое количество операций сравнения выполнится при обработке отношения A. Проверить экспериментально.

Алгоритм 3 построен следующим образом: внутри двух вложенных циклов, задающих элементы z и x текущей тройки в диапазоне от 1 до $|M|$, располагается условная конструкция, проверяющая, входит ли в формируемое транзитивное замыкание пара (x, z) (соответственно, она содержит в себе операцию сравнения). Если это так, то запускается еще один цикл, задающий элемент y тройки, и для каждого y в диапазоне от 1 до $|M|$ еще одна условная конструкция с операцией сравнения проверяет, входит ли в отношение пара (z, y). Если да, в него включается и пара (x, y). При этом не стоит забывать, что сравнение производится в ходе перебора значений z, x, y, в ходе проверки, удовлетворяют ли они до сих пор условиям и стоит ли продолжать перебор.

Первая условная конструкция, вложенная в два цикла, выполняется независимо от значения текущей пары элементов x и z. Конструкция, вложенная в цикл, перебирающий значения y, выполняется лишь тогда, когда $(x, z) \in C$. Значит, для того, чтобы количество операций сравнения было не большим, чем при обработке любого другого отношения на множестве M, для искомого значения количество операций сравнения должно быть **наименьшим**, а для этого нужно найти отношение, для которого условие $(x, z) \in C$ выполняется как можно меньшее количество раз. Таким отношением будет пустое отношение: если в A не входит ни одна пара, не найдется таких x и z, чтобы выполнялось $(x, z) \in C$. В таком случае будет выполнено только по одной операции сравнения на каждую пару x и z (количество таких пар равно $|M|^2 = 10^2 = 100$), плюс по 11 сравнений на каждое из значений z (10 раз, когда условие цикла возвращало истину и значения не выходят за рамки указанного диапазона, и 1 раз, когда условие цикла возвращало ложь и цикл прекращает выполнение) и 10*11 сравнений на каждое из значений x (пока x возрастает в рамках указанного диапазона, выполнится 11 сравнений, и так будет повторяться для 10 значений z). Итого будет выполнено $100+11+10*11 = 221$ сравнение.

Проверим это экспериментально, модифицируя алгоритм 3 добавлением в него счетчика сравнений (при каждом сравнении увеличивается на 1 переменная по адресу, переданному как аргумент) Необходимо учесть: 1) увеличение счетчика на 1 **перед** каждой из условных конструкций, 2) увеличение счетчика после каждой итерации цикла, вместе с увеличением переменной цикла, 3) однократное увеличение счетчика перед каждым циклом, чтобы нивелировать тот факт, что рано или поздно произойдет сравнение условия цикла, которое вернет ложь, и оно не будет учтено увеличением счетчика в пункте 2. Затем создадим в теле main пустое отношение и внешний счетчик сравнений и применив к ним модифицированный алгоритм 3.

```
ДИСКРЕТКАЛАБАДИСКРЕТКАЛАБА
bin_relation transitive_closure_algorithm3_experiment(bin_relation A,
   int *compares_amount) {
    bin_relation C = A;
    (*compares_amount) = 1;
    for (int z = 1; z <= A.max_value; z++, (*compares_amount)++) {
        (*compares_amount)++;
        for (int x = 1; x <= A.max_value; x++, (*compares_amount)++) {
            (*compares_amount)++;
            if (bin_relation_getValue(C, x, z)) {
                for (int y = 1; y <= A.max_value; y++,
   (*compares_amount)++) {
```

```c
                    (*compares_amount)++;
                    if (bin_relation_getValue(C, z, y)) {
                        C.values[x-1] |=  1 << (y-1);
                    }
                }
            }
        }
    }
    return C;
}

int main() {
    bin_relation min_of_compares = bin_relation_createEmpty(10);

    int compares_amount_for_min = 0;
    bin_relation min_of_compares_closure =
   transitive_closure_algorithm3_experiment(min_of_compares,
   &compares_amount_for_min);
    bin_relation_matrixPrint(min_of_compares_closure);
    printf("Compares: %d\n\n", compares_amount_for_min);
}
```

../programs/closures_relations.c

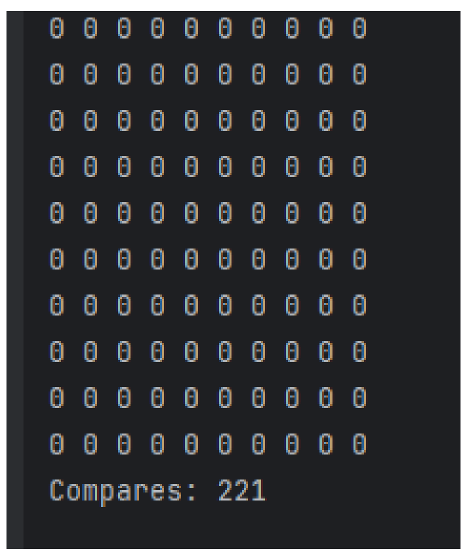


Рис. 5: Вывод результата работы алгоритма 3 на отношении с минимально возможным количеством сравнений

Эксперимент подтверждает, что количество сравнений при обработке этим алгоритмом пустого отношения равно 221.

Задание 9

Текст задания: Привести пример отношения A на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, при обработке которого алгоритмом 3 количество операций сравнения выполнится не меньшее количество раз, чем при обработке любого другого отношения на множестве M.

Определить, какое количество операций сравнения выполнится при обработке отношения A. Проверить экспериментально.

Умозаключения в задании 8 могут быть применимы и здесь с обратным выводом: для того, чтобы количество операций сравнения было не меньшим, чем при обработке любого другого отношения на множестве M, для искомого значения количество операций сравнения должно быть **наибольшим**, а для этого нужно найти отношение, для которого условие $(x, z) \in C$ выполняется как можно большее количество раз. Таким отношением будет универсальное отношение: если в A входят все возможные пары, для каждого x и z в диапазоне от 1 до $|M|$ будет выполняться условие $(x, z) \in C$. В таком случае, помимо того, что будет выполнено по одной операции сравнения на каждую пару x и z, будет выполнено по операции сравнения на каждую тройку x, z, y. Количество пар x и z равно $|M|^2 = 10^2 = 100$, а количество троек x, z, y равно $|M|^3 = 1000$. Не стоит забывать про 11 операций сравнения на перебор переменной z, 10*11 — на перебор переменной x, и 10*10*11 — на перебор переменной y. Всего операций сравнения будет выполнено $1000 + 100 + 11 + 10{*}11 + 10{*}10{*}11 = 1000 + 100 + 11 + 110 + 1100 = 2221$.

Проверим это экспериментально, создав в теле main универсальное отношение и внешний счетчик сравнений и применив к ним модифицированный алгоритм 3.

```
ДИСКРЕТКАЛАБАДИСКРЕТКАЛАБА
int main() {
    bin_relation max_of_compares = bin_relation_createEmpty(10);
    for (int i = 1; i <= 10; i++) {
        for (int j = 1; j <= 10; j++) {
            bin_relation_changeValue(&max_of_compares, i, j, 1);
        }
    }

    int compares_amount_for_max = 0;
    bin_relation max_of_compares_closure =
   transitive_closure_algorithm3_experiment(max_of_compares,
   &compares_amount_for_max);
    bin_relation_matrixPrint(max_of_compares_closure);
    printf("Compares: %d\n\n", compares_amount_for_max);
}
```

../programs/closures_relations.c

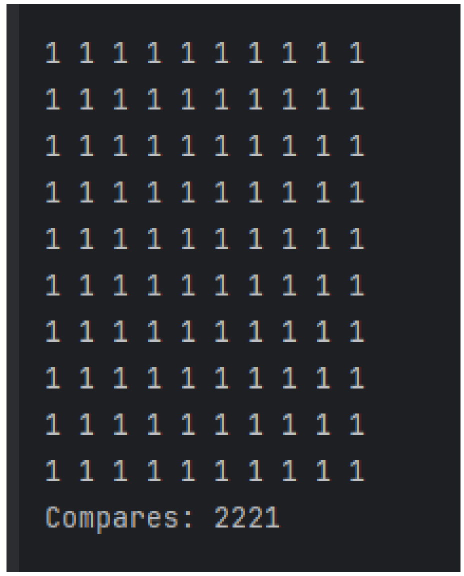


Рис. 6: Вывод результата работы алгоритма 3 на отношении с максимально возможным количеством сравнений

Эксперимент подтверждает, что количество сравнений при обработке этим алгоритмом универсального отношения равно 2221.

Задание 10

Текст задания: Определить порядок функции временной сложности алгоритмов вычисления транзитивного замыкания.

Мы уже рассматривали так или иначе операции, выполняемые в ходе работы всех трех алгоритмов. Для первого алгоритма это:

1. Композиция: два вложенных цикла с перебором значений переменных от 1 до $|M|$ и последующим изменением строк результирующей матрицы отношения с помощью побитовых операций: порядок функции временной сложности равен $O(n^2)$,
2. Проверка на включение одного отношения в другое: цикл с перебором значений переменной от 1 до $|M|$ и последующим сравнением строк двух матриц отношений с помощью побитовых операций: порядок функции временной сложности равен $O(n)$,
3. Объединение: цикл с перебором значений переменной от 1 до $|M|$ и последующим получением строки результирующей матрицы отношения с помощью побитовых операций: порядок функции временной сложности равен $O(n)$.

В лучшем случае, когда поданное на вход отношение A уже транзитивно, цикл не будет выполняться ни разу, и будут лишь единожды выполнены операции сравнения и композиции. Тогда порядок функции временной сложности алгоритма составит $O(n^2)$ (будет равен порядку функции временной сложности композиции, он является наибольшим среди ПФВС других операций). В худшем случае, когда в транзитивное замыкание необходимо включить пару, принадлежащую отношению $A^{|M|}$, будет выполнено максимальное число итераций цикла — $|M|$ раз. Порядок функции временной сложности всего алгоритма в таком случае будет равен $O(n^3)$.

Для второго алгоритма список операций будет в точности повторять первый:

1. Композиция: два вложенных цикла с перебором значений переменных от 1 до $|M|$ и последующим изменением строк результирующей матрицы отношения с помощью побитовых операций: порядок функции временной сложности равен $O(n^2)$,

2. Проверка на включение одного отношения в другое: цикл с перебором значений переменной от 1 до $|M|$ и последующим сравнением строк двух матриц отношений с помощью побитовых операций: порядок функции временной сложности равен $O(n)$,

3. Объединение: цикл с перебором значений переменной от 1 до $|M|$ и последующим получением строки результирующей матрицы отношения с помощью побитовых операций: порядок функции временной сложности равен $O(n)$.

В лучшем случае, когда поданное на вход отношение A уже транзитивно, цикл также не будет выполняться, и будут лишь единожды выполнены операции сравнения и композиции. Порядок функции временной сложности алгоритма для такого случая также составит $O(n^2)$. В худшем случае, когда в транзитивное замыкание необходимо включить пару, принадлежащую отношению $A^{|M|}$, будет выполнено максимальное число итераций цикла, равное $\lceil log_2 n \rceil$ раз. Порядок временной сложности всего алгоритма равен $O(n^2 log_2 n)$.

Для третьего алгоритма не используются никакие операции, порядок функции временной сложности которых требовалось бы анализировать отдельно. Алгоритм использует три вложенных цикла с перебором значений переменных от 1 до $|M|$, однако третий запускается только в случае, когда пара, состоящая из первых двух переменных, входит в отношение A. В лучшем случае, когда отношение A пустое и третий цикл не будет запущен ни разу, порядок функции временной сложности алгоритма будет равен $O(n^2)$. И наоборот, в худшем случае, когда отношение A универсально и каждая пара переменных двух первых циклов приводит к запуску третьего, порядок функции временной сложности алгоритма будет равен $O(n^3)$.

Вывод: Замыкание C_S бинарного отношения A по признаку S — отношение, которое обладает признаком S, содержит в себе отношение A и имеет при этом минимально возможную мощность. Для получения замыканий по некоторым свойствам, например, рефлексивности и симметричности, достаточно добавить быстро находимые недостающие элементы в исходное отношение. Для других свойств — антирефлексивности, к примеру — можно сразу сказать, что составить замыкание невозможно, если исходное отношение изначально не обладает этим свойством: ведь для этого придется убирать из него элементы, и тогда исходное отношение не будет входить в замыкание. Наиболее сложный случай — замыкание по свойству транзитивности. Нельзя в один этап найти и добавить недостающие элементы: при их добавлении образуются новые пары вида (x, z) и (z, y), которые также необходимо учесть и добавить. В ходе лабораторной работы рассмотрели три основных алгоритма для получения транзитивных замыканий, проанализировали количество операций в некоторых экстремальных случаях для каждого из них и определили их порядок функции временной сложности.