МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. Шухова» (БГТУ им. В. Г. Шухова)



Кафедра программного обеспечения вычислительной техники и автоматизированных систем

Лабораторная работа №1.4

по дисциплине: «Дискретная математика» по теме: «**Теоретико-множественные уравнения**»

Выполнил/а: ст. группы ПВ-231 Чупахина София Александровна Проверили: Островский Алексей Мичеславович Рязанов Юрий Дмитриевич

Цель работы:

Научиться решать теоретико-множественные уравнения с применением ЭВМ.

Вариант 9

Дано:

Исходное уравнение:

$$(A \Delta X) \cap (B \cup X) - C = \overline{A \cup X} \cup (C \Delta X)$$

 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
 $A = \{1, 3, 5, 6, 8\}$
 $B = \{2, 4, 6, 9\}$
 $C = \{2, 6, 7, 10\}$
 $X - P$

Задания:

- 1. Преобразовать исходное уравнение в уравнение с пустой правой частью.
- 2. Преобразовать левую часть уравнения к виду $\overline{X} \cap \phi^0 \cup X \cap \phi^U$ используя разложение Шеннона по неизвестному множеству X.
- 3. Написать программу, вычисляющую значения множеств ϕ^{\emptyset} и $\overline{\phi^{\mathbb{U}}}$ при заданных исходных множествах.
- 4. Вычислить значения множеств ϕ^{\emptyset} и $\overline{\phi^{U}}$, сделать вывод о существовании решения уравнения. Если решения уравнения не существует, то выполнить п.п. 1 —4 для следующего (предыдущего) варианта.
- 5. Определить мощность общего решения, найти некоторые (или все) частные решения, в том числе частные решения наименьшей и наибольшей мощности.
- 6. Написать программу для проверки найденных решений

Задание 1:

Если мы хотим преобразовать уравнение так, чтобы в правой части его было пустое множество, мы должны перенести выражение справа в левую часть уравнения, связав их такой операцией, которая бы возвращала пустое множество, когда операнды равны, и непустое множество — во всех остальных случаях. Какая это будет операция? Для наглядности вставим сюда таблицу, отображающую результаты выполнения базовых операций над множествами в разных взаимных расположениях.

	AUD +	$A \cap B$	A – B	B – A	ΑΔΒ
А и В равны	(A B)	A B	(A B)	(A B)	(A B)
А строго включено в В	B	B	B	B	BA
В строго включено в А	AB	AB	(A)	(A)	(A)
А и В не пересекаютс я	AB	A B	A B	AB	A B
А и В находятся в общем положении	(A)B	ABB	(A)B	AB	AB

Как видим, если множества равны, пустое множество будет возвращать операция разности (с любым порядком операндов) и симметрической разности. Однако операция разности будет возвращать пустое множество и в том случае, если множества не равны, но «уменьшаемое» множество является подмножеством «вычитаемого». А вот симметрическая разность, если множества не равны, возвращает непустое множество. Так что результат переноса правой части уравнения в левую будет следующим: $((A \Delta X) \cap (B \cup X) - C) \Delta (\overline{A \cup X} \cup (C \Delta X)) = \emptyset$.

Задание 2.

В общем виде разложение Шеннона производится следующим образом: если F(A1, A2, ..., An) — некоторое выражение, в котором используются первичные термы A1, A2, ..., An, то его можно преобразовать в вид $\overline{A1} \cap F(\emptyset, A2, ..., An) \cup A1 \cap F(U, A2, ..., An)$. Точно так же произвести разложение можно по любому множеству от A2 до An.

Мы же произведем разложение Шеннона над левой частью уравнения,

полученного в пункте 1, по множеству X. В первом пересечении дополнение множества X пересекается с исходным выражением, где вместо X подставлено пустое множество; во втором — само множество X пересекается с исходным выражением, где вместо X подставлен универсум. Получим:

$$\frac{\overline{X}}{\overline{U}} \cap ((A \Delta \emptyset) \cap (B \cup \emptyset) - C) \Delta (\overline{A \cup \emptyset} \cup (C \Delta \emptyset)) \cup X \cap ((A \Delta U) \cap (B \cup U) - C) \Delta (\overline{A \cup \emptyset} \cup (C \Delta U))$$

Выражение $((A \Delta \emptyset) \cap (B \cup \emptyset) - C) \Delta (\overline{A \cup \emptyset} \cup (C \Delta \emptyset))$ в дальнейшем и будет обозначаться как ϕ^{\emptyset} , а выражение $((A \Delta U) \cap (B \cup U) - C) \Delta (\overline{A \cup U} \cup (C \Delta U))$ — как ϕ^{U} . Так как значения множеств A, B, C известны, а X в этих выражениях не используется, их значения можно вычислить.

Задание 3.

Какие условия должны выполняться, чтобы выражение $\overline{X} \cap \phi^{\emptyset} \cup X \cap \phi^{U}$ было равно пустому множеству? Это выражение состоит из объединения двух частей, и чтобы это объединение было пустым множеством, каждая его часть должна быть пустым множеством.

Итак, когда пересечение $\overline{X} \cap \phi^{\emptyset}$ будет равно пустому множеству? Операцию разности, A-B можно переписать в виде $A \cap \overline{B}$, значит, и пересечение $\overline{X} \cap \phi^{\emptyset}$ можно переписать как $\phi^{\emptyset}-X$. А разность $\phi^{\emptyset}-X$ будет равна пустому множеству, если в множестве ϕ^{\emptyset} нет таких элементов, которые бы не входили в множество X, то есть ϕ^{\emptyset} нестрого включено в X. Это условие прослеживается и в таблице в пункте 1, если просмотреть колонку «A-B».

По этой же таблице, просмотрев колонку «А \cap В», мы можем увидеть, что результатом пересечения будет пустое множество только в том случае, если множества не пересекаются. Но если ни один элемент множества А не находится в множестве В, то значит, все его элементы находятся в множестве \overline{B} . Значит, можно говорить о том, что другое обязательное условие - множество X нестрого включено в множество $\overline{\phi^U}$. Таким образом, для нахождения всех возможных множеств X, являющихся корнями уравнения, необходимо найти множества ϕ^O и $\overline{\phi^U}$. Напишем для этого программу на основе библиотеки ordered_array_set, написанной в рамках курса ОП. Следующим образом будет выглядеть ее заголовочный файл, **ordered_array_set.h**:

```
#ifndef INC_ORDERED_ARRAY_SET_H
#define INC_ORDERED_ARRAY_SET_H

#include <stdint.h>
#include <assert.h>
#include <memory.h>
#include <malloc.h>
#include <stdio.h>
#include <stdio.h>
#include <stdbool.h>
```

```
typedef struct ordered_array_set {
    int *data; //элементы множества
    size_t size; //количество элементов в множестве
    size_t capacity; //максимальное количество элементов в множестве
} ordered_array_set;
//возвращает пустое множество, в которое можно вставить capacity
ordered_array_set ordered_array_set_create (size_t capacity);
//возвращает множество, состоящее из элементов массива а размера
ordered_array_set ordered_array_set_create_from_array (const int *a,
size_t size);
//Уменьшает емкость capacity множества по адресу а до его размера
size
//При этом перераспределяет память, отведенную под массив value,
чтобы он занимал минимальное ее количество
static void ordered_array_set_shrinkToFit (ordered_array_set *a);
//Увеличивает емкость capacity множества по адресу а на slots единиц
static void ordered_array_set_increaseCapacity (ordered_array_set
*a, size_t slots);
//возвращает значение позицию элемента в множестве,
//ecли значение value имеется в множестве set, иначе - n
size_t ordered_array_set_in (ordered_array_set *set, int value);
//возвращает значение 'истина', если элементы множеств set1 и set2
равны, иначе - 'ложь'
bool ordered_array_set_isEqual (ordered_array_set set1,
ordered_array_set set2);
//возвращает значение 'истина', если subset является подмножеством
set, иначе - 'ложь'
bool ordered_array_set_isSubset (ordered_array_set subset,
ordered_array_set set);
//возбуждает исключение, если в множество по адресу set нельзя
вставить элемент
void ordered_array_set_isAbleAppend (ordered_array_set *set);
//добавляет элемент value в множество set
void ordered_array_set_insert (ordered_array_set *set, int value);
```

```
//удаляет элемент value из множества set
void ordered_array_set_deleteElement (ordered_array_set *set, int
value);
//возвращает объединение множеств set1 и set2
ordered_array_set join (ordered_array_set set1, ordered_array_set
set2);
//возвращает пересечение множеств set1 и set2
ordered_array_set intersection (ordered_array_set set1,
ordered_array_set set2);
//возвращает разность множеств set1 и set2
ordered_array_set difference (ordered_array_set set1,
ordered_array_set set2);
//возвращает симметрическую разность множеств set1 и set2
ordered_array_set symmetricDifference (ordered_array_set set1,
ordered_array_set set2);
//возвращает дополнение до универсума universumSet множества set
ordered_array_set complement (ordered_array_set set,
ordered_array_set universumSet);
//вывод множества set
void ordered_array_set_print (ordered_array_set set);
//освобождает память, занимаемую множеством set
void ordered_array_set_delete (ordered_array_set *set);
#endif
```

А следующим образом будет выглядеть файл реализации, ordered array set.c:

```
#ifndef INC_ORDERED_ARRAY_SET_C
#define INC_ORDERED_ARRAY_SET_C
#include "ordered_array_set.h"
#include "C:\Users\sovac\Desktop\ON, преимущественно лабы\
second_semester\libs\algorithms\array\array.c"
#include "C:\Users\sovac\Desktop\ON, преимущественно лабы\
second_semester\libs\algorithms\math_basics\math_basics.c"

ordered_array_set ordered_array_set_create (size_t capacity) {
    return (ordered_array_set) {
        malloc(sizeof(int) * capacity),
        0,
```

```
capacity
   };
ordered_array_set ordered_array_set_create_from_array (const int *a,
size_t size) {
    ordered_array_set result = ordered_array_set_create(size);
    for (size_t i = 0; i < size; i++) {</pre>
         ordered_array_set_insert(&result, a[i]);
    qsort(result.data, size, sizeof(int), compare_ints);
    ordered_array_set_shrinkToFit(&result);
    return result;
static void ordered_array_set_shrinkToFit (ordered_array_set *a) {
    if (a \rightarrow size \neq a \rightarrow capacity) {
        a \rightarrow data = (int *) realloc(a \rightarrow data, sizeof(int) * a \rightarrow size);
        a \rightarrow capacity = a \rightarrow size;
    }
static void ordered_array_set_increaseCapacity (ordered_array_set
*a, size_t slots) {
    a \rightarrow data = (int *) realloc(a \rightarrow data, size of (int) * (a \rightarrow size + data)
slots));
    a→capacity += slots;
size_t ordered_array_set_in (ordered_array_set *set, int value) {
    size_t index = binarySearch_(set→data, set→size,value);
    return (index \neq SIZE_MAX) ? index : set\rightarrowsize;
bool ordered_array_set_isEqual (ordered_array_set set1,
ordered_array_set set2) {
    return memcmp(set1.data, set2.data, sizeof(int) * set1.size) =
0;
bool ordered_array_set_isSubset (ordered_array_set subset,
ordered_array_set set) {
    bool is_subset = 1;
    for (size_t i = 0; i < subset.size; i++) {</pre>
        if (ordered_array_set_in(&set, subset.data[i]) = set.size)
```

```
is_subset = 0;
            break;
        }
   return is_subset;
void ordered_array_set_isAbleAppend (ordered_array_set *set) {
    assert(set→size < set→capacity);</pre>
void ordered_array_set_insert (ordered_array_set *set, int value) {
    ordered_array_set_isAbleAppend(set);
   if (set\rightarrowsize = 0 || value > set\rightarrowdata[(set\rightarrowsize)-1]) {
        append_(set\rightarrowdata, &(set\rightarrowsize), value);
    } else if (ordered_array_set_in(set, value) = set→size) {
        size_t start_index = binarySearchMoreOrEqual_(set→data,
set→size, value);
        insert_(set\rightarrowdata, &(set\rightarrowsize), start_index, value);
    }
void ordered_array_set_deleteElement (ordered_array_set *set, int
value) {
   if (ordered_array_set_in(set, value) \neq set\rightarrow size) {
        deleteByPosSaveOrder_(set→data, &(set→size),
ordered_array_set_in(set, value));
set2) {
    ordered_array_set result =
ordered_array_set_create(set1.capacity + set2.capacity);
    size_t index1 = 0;
   size_t index2 = 0;
   while (index1 < set1.size && index2 < set2.size) {</pre>
        if (set1.data[index1] = set2.data[index2]) {
            ordered_array_set_insert(&result, set1.data[index1]);
            index1++;
            index2++;
        } else if (set1.data[index1] < set2.data[index2]) {</pre>
            ordered_array_set_insert(&result, set1.data[index1]);
            index1++;
```

```
} else {
            ordered_array_set_insert(&result, set2.data[index2]);
            index2++;
        }
    }
    while (index1 < set1.size) {</pre>
        ordered_array_set_insert(&result, set1.data[index1]);
        index1++;
    }
    while (index2 < set2.size) {</pre>
        ordered_array_set_insert(&result, set2.data[index2]);
        index2++;
    }
    ordered_array_set_shrinkToFit(&result);
    return result;
ordered_array_set intersection (ordered_array_set set1,
ordered_array_set set2) {
    ordered_array_set result =
ordered_array_set_create(set1.capacity);
    size_t index1 = 0;
    size_t index2 = 0;
    while (index1 < set1.size && index2 < set2.size) {</pre>
        if (set1.data[index1] = set2.data[index2]) {
            ordered_array_set_insert(&result, set1.data[index1]);
            index1++;
            index2++;
        } else if (set1.data[index1] < set2.data[index2]) {</pre>
        } else {
            index2++;
        }
    }
    ordered_array_set_shrinkToFit(&result);
    return result;
ordered_array_set difference (ordered_array_set set1,
ordered_array_set set2) {
    ordered_array_set result =
ordered_array_set_create(set1.capacity);
    size_t index1 = 0;
    size_t index2 = 0;
    while (index1 < set1.size && index2 < set2.size) {</pre>
```

```
if (set1.data[index1] = set2.data[index2]) {
           index1++;
           index2++;
       } else if (set1.data[index1] < set2.data[index2]) {</pre>
           ordered_array_set_insert(&result, set1.data[index1]);
           index1++;
       } else {
           index2++;
       }
   while (index1 < set1.size) {</pre>
       ordered_array_set_insert(&result, set1.data[index1]);
       index1++;
   }
   ordered_array_set_shrinkToFit(&result);
   return result;
ordered_array_set set2) {
    ordered_array_set result =
ordered_array_set_create(set1.capacity + set2.capacity);
   size_t index1 = 0;
   size_t index2 = 0;
   while (index1 < set1.size && index2 < set2.size) {</pre>
       if (set1.data[index1] = set2.data[index2]) {
           index1++;
           index2++;
       } else if (set1.data[index1] < set2.data[index2]) {</pre>
           ordered_array_set_insert(&result, set1.data[index1]);
           index1++;
       } else {
           ordered_array_set_insert(&result, set2.data[index2]);
           index2++;
       }
   while (index1 < set1.size) {</pre>
       ordered_array_set_insert(&result, set1.data[index1]);
       index1++;
   }
   while (index2 < set2.size) {</pre>
       ordered_array_set_insert(&result, set2.data[index2]);
       index2++;
   ordered_array_set_shrinkToFit(&result);
```

Далее вне функции main определим функции, высчитывающие значение выражения, полученного выше:

```
#include "ordered_array_set\ordered_array_set.c"
//Возвращает множество - левую часть данного в варианте 9 уравнения
при заданных множествах X, A, B, C и универсуме universum
ordered_array_set    left_part (ordered_array_set X, ordered_array_set
A, ordered_array_set B, ordered_array_set C, ordered_array_set
universum) {
    ordered_array_set exp1 = symmetricDifference(A, X);
   ordered_array_set exp2 = join(B, X);
    ordered_array_set exp3 = intersection(exp1, exp2);
    ordered_array_set result = difference(exp3, C);
   return result;
//Возвращает множество - правую часть данного в варианте 9 уравнения
при заданных множествах X, A, B, C и универсуме universum
ordered_array_set right_part (ordered_array_set X, ordered_array_set
A, ordered_array_set B, ordered_array_set C, ordered_array_set
universum) {
    ordered_array_set exp1 = join(A, X);
    ordered_array_set exp2 = complement(exp1, universum);
    ordered_array_set exp3 = symmetricDifference(C, X);
    ordered_array_set result = join(exp2, exp3);
   return result;
```

```
}
//Возвращает множество - уравнение варианта 9 с пустой правой частью при заданных множествах X, A, B, C и универсуме universum ordered_array_set equation (ordered_array_set X, ordered_array_set A, ordered_array_set B, ordered_array_set C, ordered_array_set universum) {
    return symmetricDifference(left_part(X, A, B, C, universum), right_part(X, A, B, C, universum));
}
```

И в теле функции main для вычисления значений множеств ϕ^{\emptyset} , ϕ^{U} и $\overline{\phi^{U}}$ напишем следующий код:

```
int main() {
    //Задаются массивы с элементами множеств А, В, С, а также
элементами универсума
    int array_a[5] = \{1, 3, 5, 6, 8\};
    int array_b[4] = {2, 4, 6, 9};
    int array_c[4] = \{2, 6, 7, 10\};
    int array_u[10] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\};
    //Из них создаются непосредственно множества
    ordered_array_set A =
ordered_array_set_create_from_array(array_a, 5);
    ordered_array_set B =
ordered_array_set_create_from_array(array_b, 4);
    ordered_array_set C =
ordered_array_set_create_from_array(array_c, 4);
    ordered_array_set universum =
ordered_array_set_create_from_array(array_u, 10);
    //Вычисляется значение множества \phi^{\circ}: на место X в функцию
equation подставляется пустое множество
     ordered_array_set phi_empty =
equation(ordered_array_set_create(1), A, B, C, universum);
     //Вычисляется значение множества \phi^{U}: на место X в функцию
equation подставляется универсум
     ordered_array_set phi_universum = equation(universum, A, B, C,
universum);
     //Вычисляется значение множества \overline{\phi}^{\overline{0}}: над множеством \phi^{\overline{0}}
производится операция дополнения до универсума
     ordered_array_set complement_phi_universum =
complement(phi_universum, universum);
    //Полученные множества выводятся на экран
```

```
ordered_array_set_print(phi_empty);
ordered_array_set_print(phi_universum);
ordered_array_set_print(complement_phi_universum);
return 0;
}
```

Задание 4.

Итак, программа написана, и запустив ее, мы можем вычислить значения искомых множеств. На вывод она подаст следующее:

```
"C:\Users\sovac\Desktop\дискретная математика\ДИСКРЕТКА ЛАБА 4\phi_count.exe"
2 4 6 7 9 10
1 3 5 8
2 4 6 7 9 10

Process finished with exit code 0
```

Таким образом, можем записать, что $\phi^{\emptyset} = \{2, 4, 6, 7, 9, 10\}$, $\phi^{U} = \{1, 3, 5, 8\}$ и $\overline{\phi^{U}} = \{2, 4, 6, 7, 9, 10\}$. Для того, чтобы решение уравнения существовало, необходимо, чтобы множество ϕ^{\emptyset} являлось подмножеством $\overline{\phi^{U}}$. Ведь если $\phi^{\emptyset} \subseteq X$ и $X \subseteq \overline{\phi^{U}}$, то из этого следует, что $\phi^{\emptyset} \subseteq \overline{\phi^{U}}$. Данное условие выполняется (множества равны, но вхождение ϕ^{\emptyset} в $\overline{\phi^{U}}$ и не должно быть строгим), значит, существует единственное решение.

Задание 5.

Итак, множеством решений уравнения будет множество таких множеств X, которые являются надмножествами ϕ^{\emptyset} и подмножествами $\overline{\phi^{\mathbb{U}}}$, причем в обоих случаях включение одного множества в другое нестрогое. Иначе говоря, множество решений уравнения можно выразить как множество объединений ϕ^{\emptyset} со всеми подмножествами разности $\overline{\phi^{\mathbb{U}}} - \phi^{\emptyset}$. Однако в нашем частном случае ϕ^{\emptyset} и $\overline{\phi^{\mathbb{U}}}$ равны, и их разность равна пустому множеству. Значит, его единственное подмножество — пустое множество. Результатом объединения пустого множества с ϕ^{\emptyset} будет то же самое множество $\phi^{\emptyset} = \{2, 4, 6, 7, 9, 10\}$.

Значит, множество решений будет записано как $\{\{2, 4, 6, 7, 9, 10\}\}$, и мощность общего решения будет равна 1 (поскольку решение лишь одно). Единственное частное решение, $\{2, 4, 6, 7, 9, 10\}$, является решением наименьшей и наибольшей мощности одновременно, и эта мощность равна 6 (во множестве X шесть элементов).

Задание 6.

Поскольку решение уравнения, данного в этом варианте, у нас лишь одно, мы можем задать его в программе с помощью литералов, оставив задачу генерации всех возможных подмножеств разности $\overline{\phi^U} - \phi^{\emptyset}$ на следующую лабораторную работу. Для проверки решения запустим следующий код (все так же использующий функции left part и right part):

```
int main() {
    //Задаются массивы с элементами множеств А, В, С, а также
элементами универсума
    int array_a[5] = \{1, 3, 5, 6, 8\};
    int array_b[4] = \{2, 4, 6, 9\};
    int array_c[4] = {2, 6, 7, 10};
    int array_u[10] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\};
    //Из них создаются непосредственно множества
    ordered_array_set A =
ordered_array_set_create_from_array(array_a, 5);
    ordered_array_set B =
ordered_array_set_create_from_array(array_b, 4);
    ordered_array_set C =
ordered_array_set_create_from_array(array_c, 4);
    ordered_array_set universum =
ordered_array_set_create_from_array(array_u, 10);
    //Задаем массив с множествами-решениями уравнения
    //Можно было бы создать отдельную переменную вместо массива, но
такое решение делает программу более универсальной
    //Позволяя вставлять в массив решений больше множеств при
надобности
    ordered_array_set solutions[1] = {
            ordered_array_set_create_from_array((int[6]) {2, 4, 6,
7, 9, 10}, 6)
   };
    int solutions_len = 1;
    //Создаем флаг, контролирующий, все ли решения являются
истинными
    bool are_all_solutions_correct = true;
    //перебираем все решения в массиве
    for (int i = 0; i < solutions_len; i++) {</pre>
        //высчитываем значения левой и правой части уравнения
        ordered_array_set left_part_calculated =
left_part(solutions[i], A, B, C, universum);
        ordered_array_set right_part_calculated =
right_part(solutions[i], A, B, C, universum);
        //если они не равны, выводим сообщение об ошибочном решении
на экран и устанавливаем в 0 флаг
        if (!ordered_array_set_isEqual(left_part_calculated,
right_part_calculated)) {
            printf("This set isn't a solution of the equation: ");
            ordered_array_set_print(solutions[i]);
```

```
are_all_solutions_correct = false;
}
}
//Если флаг все еще истинен, выводим на экран сообщение о том,
что все множества проверены и верны
if (are_all_solutions_correct) {
   printf("All solutions are checked and correct");
}

return 0;
}
```

Вывод на экран будет следующим:

```
"C:\Users\sovac\Desktop\дискретная математика\ДИСКРЕТКА ЛАБА 4\check_solutions.exe"
All solutions are checked and proven
Process finished with exit code 0
```

Что показывает, что наше единственное решение является верным.

Вывод:

В ходе лабораторной работы научились решать теоретико-множественные уравнения наиболее формализованным и универсальным способом — через разложение Шеннона, применив для этого написанный самостоятельно программный код.