

Фраунгоферова дифракция на отверстиях произвольной формы

Исмагилов Амир, Куцубин Савва, Мельников Михаил
Группа Б02-201

5 декабря 2022 г.

Аннотация

Целью нашего проекта является численный расчёт дифракции Фраунгофера на отверстиях произвольной формы. В предоставленном вашему вниманию тексте будут описаны используемые нами методы для вычисления интенсивности электромагнитного излучения в каждой точке рассматриваемой части экрана, где наблюдается дифракция, также будет показано, как осуществляется загрузка файла, содержащего необходимую информацию об отверстии, на котором наблюдается дифракция.

1 class Diffraction

1.1 Вводим параметры входной и выходной картинки, а так же необходимые физические параметры

```
# Размер исходной картинки в пикселях
self.h = h # Высота
self.w = w # Ширина
# Размер дифракционной картины в пикселях
self.color_grid_size = diff_grid_size
# Матрица точек отверстия исходная( картинка)
self.matrix = matrix
# Матрица дифракционной картины
self.color_matrix = np.zeros(
    (self.color_grid_size, self.color_grid_size))
# Расстояние от отверстия до экрана в( микрометрах)
self.L = dist
# Физическая длина одного пикселя исходной картинки в( микрометрах)
self.pixel_len = pixel_len
# Физическая длина одного пикселя дифракционной картинки в( микрометрах)
self.pixel_len_diff = pixel_len_diff
# Длина волны в микрометрах
self.Lambda = Lambda
```

1.2 center_of_mass

Сначала предлагается рассмотреть функцию `center_of_mass`, которая определяет геометрический центр отверстия, считающийся точкой с нулевой фазой. Фактически центр масс вычисля-

ется по формуле

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

если наделить каждый пиксель принадлежащий отверстию единичной массой. Ниже приведён текст соответствующей функции.

```
def center_of_mass(self):  
    '''  
    Находит расположение центра масс отверстия  
    Returns  
    -----  
    x_c : float  
        Абсцисса центра отверстия.  
    y_c : float  
        Ордината центра отверстия.  
    '''  
    x_c = 0  
    y_c = 0  
    num_of_cells = 0  
    for i in range(self.w):  
        for j in range(self.h):  
            if self.matrix[i][j] == 0:  
                x_c += i  
                y_c += j  
                num_of_cells += 1  
    x_c /= num_of_cells  
    y_c /= num_of_cells  
    return (x_c, y_c)
```

Прежде чем приступить к изложению сущности двух следующих функций следует отметить, что для расчета интенсивности удобно разбить отверстие на множество квадратов и считать создаваемую ими напряженность в некоторой точке, а уже потом, посредством суммирования, получить искомую напряженность в рассматриваемой точке экрана.

1.3 summing_tension

Рассмотрим прямоугольное отверстие длиной a и b и прямоугольную систему координат с началом в центре отверстия. При Фраунгоферовой дифракции на данном отверстии напряженность поля в направлении единичного вектора \vec{s} может быть вычислена по формуле:

$$E = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ik(s_x x + s_y y)} dx dy = ab \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta}, \quad \alpha = \frac{1}{2} k a s_x, \quad \beta = \frac{1}{2} k b s_y. \quad (1)$$

s_x - Проекция единичного вектора направления дифрагированного пучка на ось OX

s_y - Проекция единичного вектора направления дифрагированного пучка на ось OY

x - координата геометрического центра отверстия (определяется как точка с нулевой начальной фазой).

y - координата геометрического центра отверстия (определяется как точка с нулевой начальной фазой).

a, b - длины сторон прямоугольника

Теперь рассмотрим произвольное препятствие, аппроксимировав его квадратной сеткой. Зная напряженность поля, создаваемого каждым квадратом сетки в рассматриваемой точке,

найдем общую напряженность поля, просуммировав поля от каждого элемента. С учетом разности фаз, получаем выражение :

$$E = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{2\pi}{\lambda} E_{0ij} \cos(is_x + js_y) \quad (2)$$

где E_{0ij} — напряженность поля от произвольного элемента сетки

Вычислением E_{0ij} по формуле (1) занимается функция `calc_intensity()`, вычислениями по формуле (2) — `summing_tension()`.

```
def summing_tension(self, s_x, s_y, E_0, x_c, y_c):
    """
    Находит интенсивность поля в рассматриваемой точке
    Parameters
    -----
    s_x : float
        Проекция единичного вектора направления дифрагированного пучка
        на ось OX.
    s_y : float
        Проекция единичного вектора направления дифрагированного пучка
        на ось OY..
    E_0 : float
        Амплитуда напряженности поля
    x_c : float
        x - координата геометрического центра отверстия
        определяется( как точка с нулевой начальной фазой).
    y_c : float
        y - координата геометрического центра отверстия
        определяется( как точка с нулевой начальной фазой).
    Returns
    -----
    E : float
        Интенсивность в точке наблюдения P на( самом деле функция
        возвращает модуль напряженности поля в точке, но это не влияет на
        результат, а сделано в целях оптимизации и получения хорошей
        дифракционной картинки интенсивность( к краям при возведении в
        квадрат быстро убывает)).
    """
    E = 0
    for i in range(self.w):
        for j in range(self.h):
            if self.matrix[i][j] == 0:
                x = (i - x_c) * self.pixel_len
                y = (j - y_c) * self.pixel_len
                E += E_0 * \
                    np.cos((x * s_x + y * s_y)
                           * 2 * np.pi/self.Lambda)
    return abs(E)

def calc_intensity(self):
    """
    Подсчет интенсивности результирующего излучения в наблюдаемой точке.
    Заполняет матрицу color_matrix значениями, соответствующими
    значениям интенсивности в соответствующей точке экрана.
    Returns
    """
```

```

-----
None.
'''
# Подсчет положения центра масс отверстия
x_c, y_c = self.center_of_mass()
for i in tqdm(range(self.color_grid_size)):
    for j in range(self.color_grid_size):
        # Нахождение проекций вектора направления распространения
        # дифрагированного пучка
        s_x = (i - self.color_grid_size / 2) * \
            self.pixel_len_diff
        s_y = (j - self.color_grid_size / 2) * \
            self.pixel_len_diff

        # Модуль вектора направления распространения
        ro = np.sqrt(s_x**2 + s_y**2 + self.L**2)

        # Конечные значения проекций единичного вектора нормировка( вектора)
        s_x /= ro
        s_y /= ro

        # alpha и beta в формуле
        alpha = np.pi * self.pixel_len * s_x / self.Lambda
        beta = np.pi * self.pixel_len * s_y / self.Lambda

        if alpha == 0:
            a_s = 1
        else:
            a_s = np.sin(alpha) / alpha

        if beta == 0:
            b_s = 1
        else:
            b_s = np.sin(beta) / beta

        E_0 = a_s * b_s # Напряженность волны от пикселя поверхности

        # Суммарная интенсивность в каждой точке экрана
        self.color_matrix[i][j] = \
            self.summing_tension(s_x, s_y, E_0, x_c, y_c)

```

1.4 Получение выходной картинки

Применяем определённые ранее функции для конкретного отверстия, предварительно скачав bmp-файл с изображением отверстия. В matplotlib выводим дифракционную картину двумя способами.

```

# Обработка файла
h, w, points = LoadBMP('circlehole3.bmp')

# DiffractionPicture = Diffraction(points, h, w, 150, 60, 0.555, 2 * 10**6, 10)
DiffractionPicture = Diffraction(
    points, h, w, 50, 0.555, 2 * 10**6, 100, 100)

```

```

# Подсчет интенсивности
DiffractionPicture.calc_intensity()

# График matplotlib
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(35, 15), constrained_layout=True)
p1 = axs[0].imshow(DiffractionPicture.color_matrix,
                  cmap='hot')
fig.colorbar(p1, ax=axs[0])

p2 = axs[1].contourf(DiffractionPicture.color_matrix,
                  levels=500,
                  cmap='hot')
fig.colorbar(p2, ax=axs[1])

axs[0].set_xticks(np.linspace(0,
                             DiffractionPicture.color_grid_size, 11))
axs[0].set_xticklabels(np.linspace((-DiffractionPicture.color_grid_size/2) *
                                   DiffractionPicture.pixel_len_diff,
                                   DiffractionPicture.color_grid_size/2 *
                                   DiffractionPicture.pixel_len_diff,
                                   11), fontsize=15)

axs[0].set_yticks(np.linspace(0,
                             DiffractionPicture.color_grid_size,
                             11))

axs[0].set_yticklabels(np.linspace((-DiffractionPicture.color_grid_size/2) *
                                   DiffractionPicture.pixel_len_diff,
                                   DiffractionPicture.color_grid_size/2 *
                                   DiffractionPicture.pixel_len_diff,
                                   11), fontsize=15)

axs[1].set_xticks(np.linspace(0,
                             DiffractionPicture.color_grid_size, 11))
axs[1].set_xticklabels(np.linspace((-DiffractionPicture.color_grid_size/2) *
                                   DiffractionPicture.pixel_len_diff,
                                   DiffractionPicture.color_grid_size/2 *
                                   DiffractionPicture.pixel_len_diff,
                                   11), fontsize=15)

axs[1].set_yticks(np.linspace(0,
                             DiffractionPicture.color_grid_size,
                             11))

axs[1].set_yticklabels(np.linspace((-DiffractionPicture.color_grid_size/2) *
                                   DiffractionPicture.pixel_len_diff,
                                   DiffractionPicture.color_grid_size/2 *
                                   DiffractionPicture.pixel_len_diff,
                                   11), fontsize=15)

axs[0].set_title(
    'Дифракционная картинка, построенная с помощью функции imshow', fontsize=20)
axs[1].set_title(
    'Дифракционная картинка, построенная с помощью функции contourf', fontsize=20)

axs[0].set_xlabel('x, мкм', fontsize=17)
axs[0].set_ylabel('y, мкм', fontsize=17)
axs[1].set_xlabel('x, мкм', fontsize=17)
axs[1].set_ylabel('y, мкм', fontsize=17)

```

2 Часть программы отвечающая за загрузку файла

Импортируем библиотеки и проверяем файл на корректность.

```
import numpy as np

def error_incorrect_file():
    print('Файл BMP некорректный')
    return 0

def error_bigsized():
    print('Файл слишком большой')
    return 0
```

Функция осуществляющая загрузку файла:

```
def LoadBMP(filename):
    '''
    == ОПИСАНИЕ ФУНКЦИИ ==
    Функция получает имя файла формата BMP: filename.
    Возвращает (w, h, pixels), где w - ширина, h - высота массива,
    pixels - целочисленный массив numpy, содержащий только 0 или 1.
    Файл BMP должен быть несжатым.
    Каждый пиксель должен принимать значение (0, 0, 0) или (255, 255, 255).
    (0, 0, 0) переводится в 0 в массив numpy, (255, 255, 255) - в 1.
    В случае, если размеры файла превышают HMAX и WMAX, вызывается функция
    error_bigsized(). Если она возвращает 0, то LoadBMP() завершает работу и
    возвращает (0, 0, 0), в противном случае ничего не происходит.
    В случае, если файл не соответствует указанным выше требованиям
    или он повреждён, вызывается функция error_incorrect_file()
    и функция LoadBMP возвращает (0, 0, 0).
    '''

    HMAX = 1000
    WMAX = 1000

    header = np.zeros(27, 'int')

    file = open(filename, "rb")

    # Читаем заголовок файла из( полезной информации там w и h)
    for i in range(27):
        a = int.from_bytes(file.read(1), 'little')
        b = int.from_bytes(file.read(1), 'little')
        header[i] = b * 256 + a

    # Проверка корректности файла несжатый(, RGB, 8 бит на цвет и мб что-то ещё)
    if (header[0] != 19778
        or header[5] != 54
        or header[7] != 40
        or header[13] != 1
        or header[14] != 24):
        file.close()
        error_incorrect_file()
```

```

    return (0, 0, 0)

w = header[9] # ширина
h = header[11] # высота
d = w % 4 # количество пустых байт, дополняющих каждую строку в конце

# Проверка размера файла
if (w >= WMAX or h >= HMAX):
    if (error_bigsize() == 0):
        file.close()
        return (0, 0, 0)

# Массив, где будет храниться картинка
pixels = np.zeros((h, w), 'int')

# Массив под 3 байта R, G, B
pixel = [30] * 3

for i in range(h):
    for j in range(w):
        for c in range(3):
            # Считываем один пиксель
            pixel[c] = int.from_bytes(file.read(1), 'little')

# Записываем подходящее значение в файл, проверяя соответствие формату
if (pixel[0] == pixel[1] and pixel[1] == pixel[2]):
    if (pixel[0] == 0):
        pixels[h - i - 1][j] = 0
    elif (pixel[0] == 255):
        pixels[h - i - 1][j] = 1
    else:
        file.close()
        error_incorrect_file()
        return (0, 0, 0)
else:
    file.close()
    error_incorrect_file()
    return (0, 0, 0)

# Пропускаем пустые байты
if d != 0:
    for i in range(d):
        file.read(1)

file.close()
return(w, h, pixels)
# Конец функции LoadBMP()

```

3 Samples

Здесь приведены bmp-картинки переведённые в массив numpy с помощью функции LoadBMP(). Эти примеры понадобятся далее в качестве демонстрации работы программы. Ввиду немалого размера массивов приведем лишь одну из четырёх функций, содержащую информацию от

[illegible]

картинку или же рассмотреть дифракцию на отверстиях встроенных в программу (Примеры 1-4)

```
import tkinter as tk
from tkinter import filedialog
from tkinter import messagebox as mb
import tkinter.ttk as ttk

from matplotlib.figure import Figure
from matplotlib.backends.backend_tkagg import (FigureCanvasTkAgg,
                                                NavigationToolbar2Tk)

from BMP import *
from Diffraction import *
from Samples import *

def NewProject():
    AskSampleWindow = tk.Toplevel(window)
    AskSampleWindow.geometry('250x250')
    AskSampleWindow.title('Выберите пример')

    tk.Label(AskSampleWindow,
             text = 'Выберите пример для вычисления\п дифракционной картины').pack()

    var = tk.IntVar()
    var.set(0)
    ex1 = tk.Radiobutton(AskSampleWindow, text = "Круговое отверстие", variable = var,
                        value = 0)
    ex2 = tk.Radiobutton(AskSampleWindow, text = "Шестиугольное отверстие", variable =
                        var, value = 1)
    ex3 = tk.Radiobutton(AskSampleWindow, text = "Отверстие в виде звёздочки", variable =
                        var, value = 2)
    ex4 = tk.Radiobutton(AskSampleWindow, text = "Дифракционная решётка", variable = var,
                        value = 3)
    ex1.pack()
    ex2.pack()
    ex3.pack()
    ex4.pack()
    button = tk.Button(AskSampleWindow, text = "Открыть", command = lambda: Sample(var,
                        AskSampleWindow))
    button.pack()

    '''w, h, image = Example3()
    ObstacleLoaded(w, h, image, 555, 200, 2, 60)'''

def Sample( number, askwindow ):
    askwindow.destroy()
    if (number.get() == 0):
        w, h, image = Example1()
    elif (number.get() == 1):
        w, h, image = Example2()
    elif (number.get() == 2):
        w, h, image = Example3()
    else:
        w, h, image = Example4()
```

```

    ObstacleLoaded(w, h, image, 555, 200, 2, 60, 15)

def OpenProject():
    tk.messagebox.showinfo('Ой', 'А вот это я не сделал...')

def LoadBMPFile():
    # Запрос на открытие картинки
    filename = filedialog.askopenfilename()
    # Если юзер выбрал файл, то обрабатываем его
    if (filename != ''):
        w, h, image = LoadBMP(filename)

        if w > 0 and h > 0: # Файл открылся успешно
            ObstacleLoaded(w, h, image, 555, 200, 2, 60, 10)

def ObstacleLoaded(w, h, image, WV, Size, L, Scale, PixelL):
    РИСУЕМ#== ПРЕПЯТСТВИЕ==
    fig = Figure(figsize = (4, 3), dpi = 100)
    plot = fig.add_subplot(111)

    # Рисуем картинку
    plot.imshow(image, cmap = 'gray')
    plot.grid(False)
    plot.set_xticks([])
    plot.set_yticks([])
    fig.suptitle('Препятствие')

    # Это будет нарисовано в окне
    canvas = FigureCanvasTkAgg(fig, master = window)
    canvas.draw()

    # Рисуем
    canvas.get_tk_widget().grid(row = 0, column = 0, columnspan = 2)

    # Длина волны
    WV_enter = tk.Entry(width = 6)
    WV_enter.grid(row = 1, column = 1, sticky='W')
    WV_enter.insert(0, str(WV))

    WV_label = tk.Label(text = 'Длина волны, нм')
    WV_label.grid(row = 1, column = 0, sticky='W')

    # Разрешение диф картинки
    Size_enter = tk.Entry(width = 6)
    Size_enter.grid(row = 2, column = 1, sticky='W')
    Size_enter.insert(0, str(Size))

    Size_label = tk.Label(text = 'Разрешение дифракционной картинки, px')
    Size_label.grid(row = 2, column = 0, sticky='W')

    # Расстояние от препятствия до экрана
    L_enter = tk.Entry(width = 6)
    L_enter.grid(row = 3, column = 1, sticky='W')
    L_enter.insert(0, str(L))

```

```

L_label = tk.Label(text = 'Расстояние от препятствия до экрана, м')
L_label.grid(row = 3, column = 0, sticky='W')

# Масштаб диф картинки
Scale_enter = tk.Entry(width = 6)
Scale_enter.grid(row = 4, column = 1, sticky='W')
Scale_enter.insert(0, str(Scale))

Scale_label = tk.Label(text = 'Масштаб картинки')
Scale_label.grid(row = 4, column = 0, sticky='W')

# Размер пикселя
Pixell_enter = tk.Entry(width = 6)
Pixell_enter.grid(row = 5, column = 1, sticky='W')
Pixell_enter.insert(0, str(Pixell))

Pixell_label = tk.Label(text = 'Размер пикселя, мкм(?)')
Pixell_label.grid(row = 5, column = 0, sticky='W')

tk.Button(text = 'Вычислить дифракционную картину',
          command = lambda: ComputeDiffraction(image, h, w, WV_enter, Size_enter,
          L_enter, Scale_enter, Pixell_enter)).grid(row = 6, column = 0)

def ComputeDiffraction(points, h, w, WV_enter, Size_enter, L_enter, Scale_enter,
Pixell_enter):
    Wavelength = float(WV_enter.get()) / 1000 # Перевели в мкм
    Size = int(Size_enter.get())
    L = float(L_enter.get()) * 10**6 # Перевели в мкм
    Scale = int(Scale_enter.get())
    PixellLen = int(Pixell_enter.get())

    progress_label = tk.Label(text = 'Прогресс выполнения:')
    progress_label.grid(row = 1, column = 2)
    progress_bar = ttk.Progressbar(window, orient = "horizontal", mode = "determinate",
                                maximum = 100, value = 0, length = 200)
    progress_bar.grid(row = 2, column = 2)

    DiffractionPicture = Diffraction(points, h, w, Size, Scale, Wavelength, L, PixellLen,
    progress_bar, window)
    DiffractionPicture.calc_intensity()

    # Рисуем картинку
    fig = Figure(figsize = (4, 3), dpi = 100)
    plot = fig.add_subplot(111)

    plot.imshow(DiffractionPicture.color_matrix, cmap = 'hot')
    plot.grid(False)
    plot.set_xticks([])
    plot.set_yticks([])
    fig.suptitle('Дифракционная картина')

    # Это будет нарисовано в окне

```

```

canvas = FigureCanvasTkAgg(fig, master = window)
canvas.draw()

# Рисую
canvas.get_tk_widget().grid(row = 0, column = 2)

progress_bar.grid_forget()
tk.Label(text='Завершено').grid(row = 2, column = 2)Создаём

# окно
window = tk.Tk()
window.title("Моделирование дифракции v0.1")
window.geometry('800x600')

#== МЕНЮ ==
menu = tk.Menu(window)Файл

#
Menu_File = tk.Menu(menu, tearoff = 0)

Menu_File.add_command(label = 'Новый проект', command = NewProject)
Menu_File.add_command(label = 'Создать проект из файла BMP', command = LoadBMPFile)
Menu_File.add_separator()
Menu_File.add_command(label = 'Загрузить проект', command = OpenProject)

menu.add_cascade(label = 'Файл', menu = Menu_File)
window.config(menu = menu)

w, h, img = Example1()
ObstacleLoaded(w, h, img, 555, 200, 2, 60, 15)

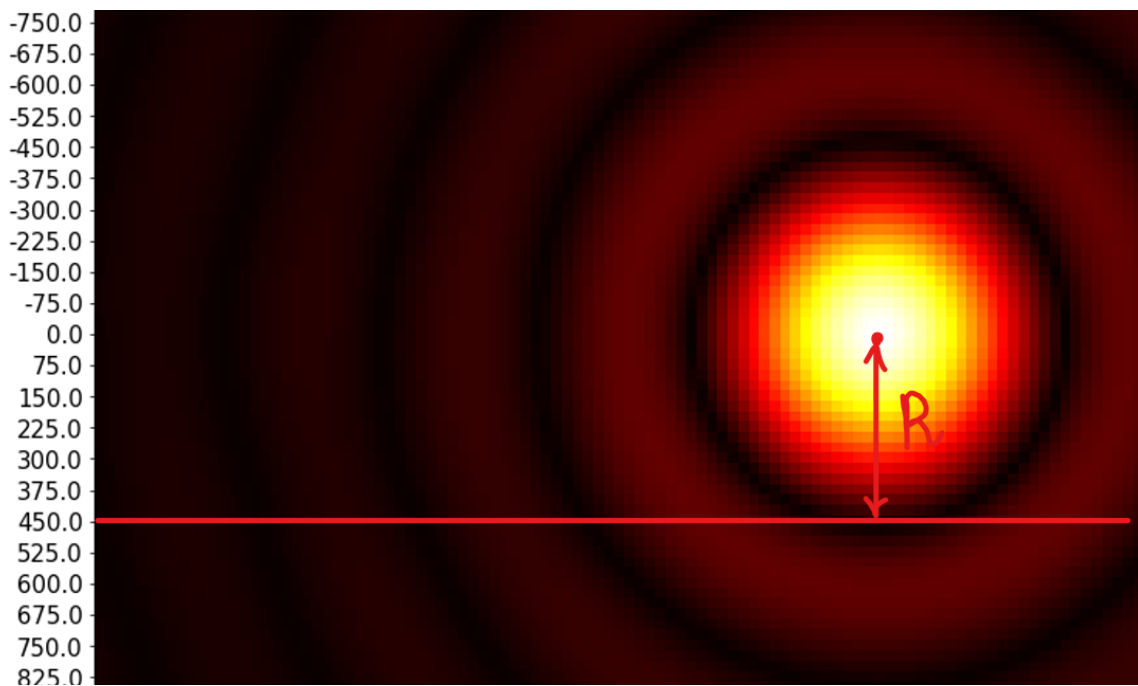
#== МЕНЮ закончилось ==

window.mainloop()

```

5 Сравнение параметров полученных дифракционных картин с теоретическими значениями

Рис. 1: Дифракционная картина полученная на круговом отверстии



Как можно видеть по Рис. 1 первый дифракционный минимум наблюдается на расстоянии 450 мкм от центра картины.

Приблизительно угловые радиусы тёмных колец могут быть вычислены по следующей формуле:

$$\vartheta_m = \left[0.61 + \frac{m-1}{2} \right] \frac{\lambda}{R}$$

- m - номер минимума
- $\lambda = 555$ нм - длина волны
- $R = 1500$ мкм - Радиус отверстия

Для вычисления теоретического значения радиуса темных колец ещё необходимо знать расстояние от отверстия до экрана, в нашем случае $L = 2$ м. Тогда радиус первого тёмного кольца равен 451.4 мкм, с учётом приближенности значения можно считать, что значения совпадают, и программу можно считать точной.

6 Примеры

6.1

