

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА»
(БГТУ им. В.Г. Шухова)



ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

Лабораторная работа №4

по дисциплине: Системное моделирование

тема: «Получение дифференциальных уравнений движения с помощью вариационных принципов. Уравнение Лагранжа второго рода»

Выполнил: ст. группы ПВ-223
Пахомов Владислав Андреевич

Проверил: Полунин Александр Иванович

Белгород 2024 г.

Лабораторная работа №4

Получение дифференциальных уравнений движения с помощью вариационных принципов. Уравнение Лагранжа второго рода
Вариант 10

Цель работы: научиться моделировать на примере моделирования поведения механической системы в статике.

1. Разработать математическую модель, описывающую поведение элементов механической системы в статике.

Handwritten mathematical derivations for a mechanical system using Lagrange's equations. The work is written on a grid-lined notebook page.

General Formulas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{d}} \right) - \frac{\partial T}{\partial d} = - \frac{\partial \Pi}{\partial d}$$

Energy Expressions:

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{m(\dot{y}')^2}{2}$$

$$T_2 = \frac{I(\dot{d}')^2}{2}$$

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

$$\Pi_1 = \frac{m(\dot{y}')^2}{2} + mgy$$

$$\Pi_2 = \frac{k_1 \left(\frac{d\pi R}{180} \right)^2}{2}$$

$$\Pi_3 = \frac{k_2 \left(y - \frac{d\pi R}{180} \right)^2}{2}$$

Total Energy and Potential:

$$T = \frac{m(\dot{y}')^2}{2} + \frac{I(\dot{d}')^2}{2}$$

$$\Pi = mgy + \frac{k_1 \left(\frac{d\pi R}{180} \right)^2}{2} + \frac{k_2 \left(y - \frac{d\pi R}{180} \right)^2}{2}$$

Lagrange Equations:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}'} = m\dot{y}', \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}'} \right) = m\ddot{y}', \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{d}'} = I\dot{d}', \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{d}'} \right) = I\ddot{d}', \quad \frac{\partial T}{\partial d} = 0$$

Partial Derivatives of Potential:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} = mg + k_2 \left(y - \frac{d\pi R}{180} \right)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial d} = \frac{\pi^2 k_1 R^2}{32400} d - \frac{\pi k_2 R}{180} \left(y - \frac{d\pi R}{180} \right)$$

$$\begin{cases} y'' = y + \frac{k_2 (y - \frac{L}{R} R)}{m} \\ \alpha'' = \frac{k_1 R \alpha}{32400} - \frac{k_2 R (y - \frac{\alpha \pi R}{180})}{180} \end{cases}$$

I

2. Разработать программу на основании математической модели и произвести расчёты.

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt

dt = ((20.0) / (30000.0))
PI = 3.141592654
g = 9.81
k1 = 5000.0
k2 = 7000.0
I = 5.0
R = 1.0
r = 0.2
m = 10

def degreeToRadians(angle):
    return angle * (PI / 180.0)

def getAngleAcc(angle, y):
    return ((PI * PI * k1 * r * r * angle) / 32400.0 - (PI * k2 * R * (y - (angle * PI * R) / 180.0)) / 180.0) /
    ↪ -I

def getAngleVel(w):
    return w

def getYAcc(y, angle):
    return g + (k2 * (y - angle * PI * R / 180)) / -m

def getY(v):
    return v

angle = 0
aV = 0.0

y = 0.0
yV = 0.0

x_plot = list()
y_plot = list()
angle_plot = list()

t = 0.0
```

```

while t < 100:
    aVk1 = getAngleAcc(angle, y)
    aVk2 = getAngleAcc(angle + (dt/2) * aVk1, y + dt/2)
    aVk3 = getAngleAcc(angle + (dt/2) * aVk2, y + dt/2)
    aVk4 = getAngleAcc(angle + dt * aVk3, y + dt)
    aV += (dt/6) * (aVk1 + 2 * aVk2 + 2 * aVk3 + aVk4)

    # Recalc angle
    ak1 = getAngleVel(aV)
    ak2 = getAngleVel(aV + (dt/2) * ak1)
    ak3 = getAngleVel(aV + (dt/2) * ak2)
    ak4 = getAngleVel(aV + dt * ak3)
    angle += (dt/6) * (ak1 + 2 * ak2 + 2 * ak3 + ak4)

    # Recalc yV
    yVk1 = getYAcc(y, angle)
    yVk2 = getYAcc(y + (dt/2) * yVk1, angle + dt/2)
    yVk3 = getYAcc(y + (dt/2) * yVk2, angle + dt/2)
    yVk4 = getYAcc(y + dt * yVk3, angle + dt)
    yV += (dt/6) * (yVk1 + 2 * yVk2 + 2 * yVk3 + yVk4)

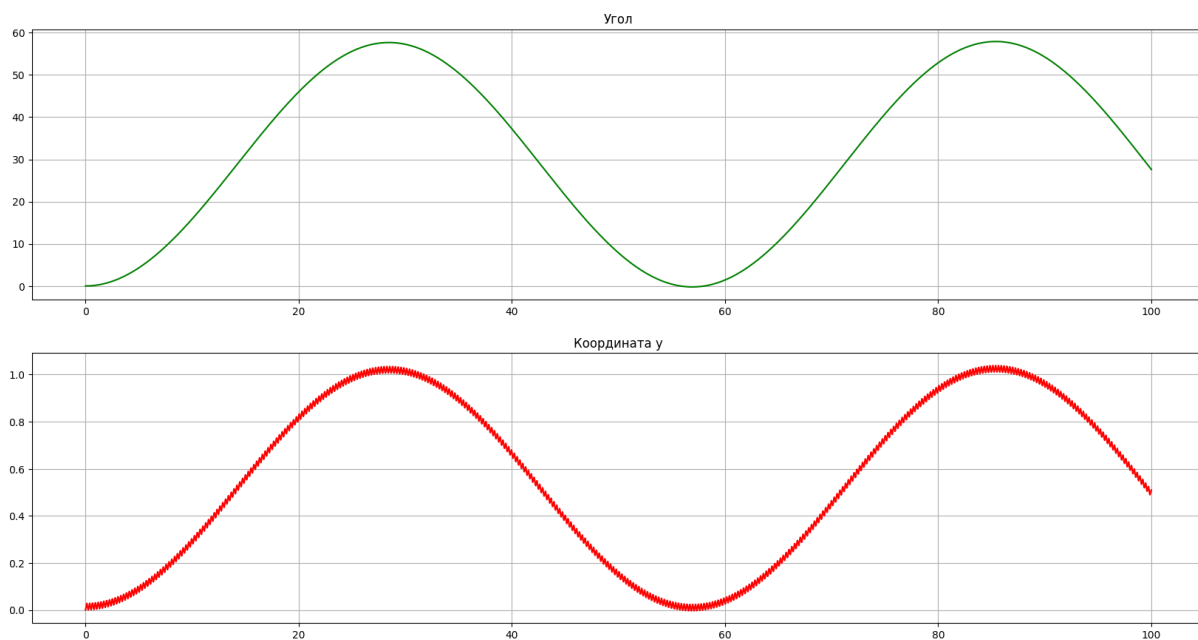
    # Recalc y
    yk1 = getY(yV)
    yk2 = getY(yV + (dt/2) * yk1)
    yk3 = getY(yV + (dt/2) * yk2)
    yk4 = getY(yV + dt * yk3)
    y += (dt/6) * (yk1 + 2 * yk2 + 2 * yk3 + yk4)

    x_plot.append(t)
    y_plot.append(y)
    angle_plot.append(angle)
    t += dt

# Визуализация
fig, (angle, y) = plt.subplots(2)
y.plot(x_plot, y_plot, 'r-', label='Отклонение')
angle.plot(x_plot, angle_plot, 'g-', label='Угол')
y.set_title('Координата y')
angle.set_title('Угол')
y.grid(True)
angle.grid(True)
plt.show()

```

Результаты выполнения программы:



Вывод: в ходе лабораторной работы изучили основные шаги моделирования, промоделировали поведение механической системы.