

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**  
**ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ**  
**УНИВЕРСИТЕТ им. В. Г. ШУХОВА»**  
**(БГТУ им. В.Г. Шухова)**



**ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ**

**Лабораторная работа №3**

по дисциплине: Исследование операций

тема: «Модификации симплекс метода. Методы искусственного базиса и больших штрафов»

Выполнил: ст. группы ПВ-223  
Пахомов Владислав Андреевич

Проверили:  
проф. Вирченко Юрий Петрович

Белгород 2024 г.

## Лабораторная работа №3

Модификации симплекс метода. Методы искусственного базиса и больших штрафов.

**Цель работы:** изучение методов искусственного базиса и больших штрафов решения задач ЛП в канонической форме, не подготовленных к работе симплекс-методом в чистом виде.

### Вариант 10

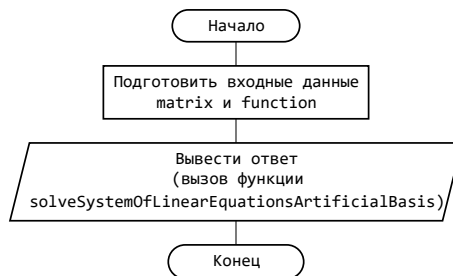
$$z = 10x_1 - 4x_2 + x_3 + 7x_4 - 5x_5 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 46, \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 8x_5 = 48, \\ x_i \geq 0 (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

#### Задание 1

Изучить метод и алгоритм искусственного базиса и составить программу решения задачи ЛП этим методом.

Блок-схемы:



solveSystemOfLinearEquationsArtificialBasis(matrix, function)

Получаем расширенную матрицу для  
решения вспомогательной задачи  
(вызов `getDataForAuxTask`)

Решаем полученную вспомогательную  
задачу симплекс методом  
(вызов `solveSimplexMethodMaxRaw`)

Ответ для  
вспомогательной функции = 0

Выбрасываем ошибку -  
решения нет

Копируем полученную матрицу  
в исходную, обрезая столбцы с  
искусственными коэффициентами

Определяем, какие переменные можно внести  
вместо искусственных переменных.  
Переменные в `filterIndices` могут их заменить,  
в `requiredIndices` - должны остаться в базисе.

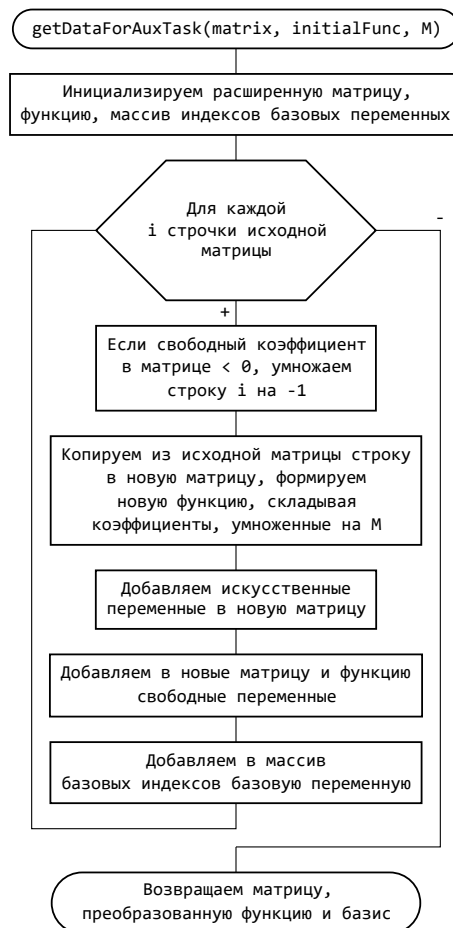
Приводим матрицу к новому базису,  
учитывая `filterIndices` и `requiredIndices`  
(вызов `getAllBasises`)

Возможно ли привести  
к такому базису?

Выбрасываем ошибку -  
решения нет

Вызываем симплекс метод на  
преобразованной матрице  
(вызов `solveSimplexMethodMaxRaw`)

Вернуть результат вызова симплекс метода



## Исходный код:

```

#pragma once

#include <vector>
#include <algorithm>
#include <tuple>

template <std::size_t T, std::size_t MatrixLines, std::size_t NewMatrixLength = T + MatrixLines>
std::tuple<std::vector<std::array<double, NewMatrixLength>>, std::array<double, NewMatrixLength>, std::vector<int>>>
getDataForAuxTask(std::vector<std::array<double, T>> matrix, std::array<double, T> initialFunc = {}, double M = 1) {
    // Инициализируем расширенную матрицу, функцию, массив индексов базовых переменных
    std::vector<std::array<double, NewMatrixLength>> newMatrix(MatrixLines);
    std::array<double, NewMatrixLength> newFunc = {};
    for (int i = 0; i < initialFunc.size() - 1; i++)
        newFunc[i] = initialFunc[i];

    newFunc[NewMatrixLength - 1] = initialFunc.back();

    std::vector<int> baseIndices;

    // Для каждой строки исходной матрицы
    for (int i = 0; i < matrix.size(); i++) {
        // Если свободный коэффициент в матрице < 0, умножаем строку i на -1
        if (matrix[i][T - 1] < 0)
            for (int j = 0; j < T; j++)
                matrix[i][j] *= -1;

        // Копируем из исходной матрицы строку
    }
}

```

```

    // в новую матрицу, формируем
    // новую функцию, складывая
    // коэффициенты, умноженные на M
    int j = 0;
    for (; j < matrix[0].size() - 1; j++) {
        newMatrix[i][j] = matrix[i][j];
        newFunc[j] += M * matrix[i][j];
    }

    // Добавляем искусственные переменные в новую матрицу
    for (int k = 0; k < matrix.size(); k++) {
        if (k == i) newMatrix[i][j + k] = 1.;
        else newMatrix[i][j + k] = 0;
    }

    // Добавляем в матрицу и функцию свободные переменные
    newMatrix[i][T + MatrixLines - 1] = matrix[i][T - 1];
    newFunc[T + MatrixLines - 1] += M * matrix[i][T - 1];

    // Добавляем в массив базовых индексов базовую переменную
    baseIndices.push_back(T + i - 1);
}

// Возвращаем матрицу, преобразованную функцию и базис
return {newMatrix, newFunc, baseIndices};
}

template <std::size_t T, std::size_t MatrixLines>
double solveSystemOfLinearEquationsArtificialBasis(std::vector<std::array<double, T>>& matrix, std::array<double, T>&
↳ function) {
    // Получаем расширенную матрицу для решения вспомогательной задачи
    auto expandedMatrix = getDataForAuxTask<T, MatrixLines>(matrix);
    auto newMatrix = std::get<0>(expandedMatrix);
    auto baseIndices = std::get<2>(expandedMatrix);
    // Решаем полученную вспомогательную задачу симплекс методом
    double ans = solveSimplexMethodMaxRow(newMatrix, std::get<1>(expandedMatrix), &baseIndices);

    // Если ответ для всп. функции не равен нулю - выбрасываем ошибку, матрицу привести к нужному виду
    // не получится
    if (std::abs(ans) > 0.00000001)
        throw std::invalid_argument("No basis found");

    // Копируем полученную матрицу в исходную, обрезаая столбцы с
    // искусственными коэффициентами
    for (int i = 0; i < matrix.size(); i++) {
        for (int j = 0; j < matrix[i].size() - 1; j++) {
            matrix[i][j] = newMatrix[i][j];
        }

        matrix[i][T - 1] = newMatrix[i].back();
    }

    // Определяем, какие переменные можно внести вместо искусственных переменных.
    // Переменные в filterIndices могут их заменить,

```

```

// 6 requiredIndices - должны остаться в базисе.
std::vector<int> filterIndices;
std::vector<int> requiredIndices;
int cIndex = 0;
std::sort(baseIndices.begin(), baseIndices.end());
for (int i = 0; i < T - 1 && cIndex < baseIndices.size(); i++) {
    if (baseIndices[cIndex] > i) {
        filterIndices.push_back(i);
    } else {
        requiredIndices.push_back(i);
        cIndex++;
    }
}

// Приводим матрицу к новому базису, учитывая filterIndices и requiredIndices
auto b = getAllBasises(matrix, &filterIndices, &requiredIndices);

// Если к такому привести невозможно, выбрасываем ошибку, матрицу привести к нужному виду
// не получится
if (b.empty())
    throw std::invalid_argument("No basis found");

// Вызовем симплекс метод на преобразованной матрице
return solveSimplexMethodMaxRaw(b[0].matrix, function);
}

```

Ссылка на репозиторий

```

#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <array>

#include "../libs/alg/alg.h"

int main() {
    // Подготовить входные данные
    std::vector<std::array<double, 6>> matrix = {
        {2, -1, 1, 3, 1, 15},
        {1, 4, 1, 1, -2, 46},
        {-1, 4, 6, 3, -8, 48}};
    std::array<double, 6> function{{10, -4, 1, 7, -5}};

    // Вывод ответа
    std::cout << solveSystemOfLinearEquationsArtificialBasis<6, 3>(matrix, function);
}

```

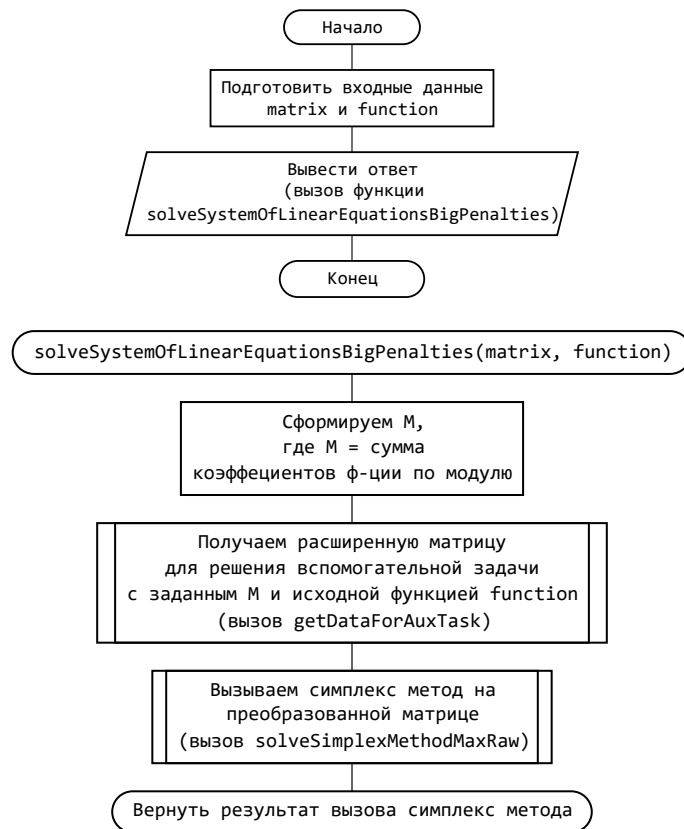
Ссылка на репозиторий

Результаты выполнения программы:

## Задание 2

Изучить метод и алгоритм больших штрафов и составить программу решения задачи ЛП этим методом.

Блок-схемы:



Исходный код:

```

#pragma once

#include <vector>
#include <tuple>

template <std::size_t T, std::size_t MatrixLines>
double solveSystemOfLinearEquationsBigPenalties(std::vector<std::array<double, T>>& matrix, std::array<double, T>&
↪ function) {
    // Сформируем M, где M = сумма коэффициентов ф-ции по модулю
    double M = 0;
    for (auto& v : function) {
        M += std::abs(v);
    }

    // Получаем расширенную матрицу для решения вспомогательной задачи с заданным M и исходной функцией function
    auto expandedMatrix = getDataForAuxTask<T, MatrixLines>(matrix, function, M);

    // Вызовем симплекс метод на преобразованной матрице
    return solveSimplexMethodMaxRow(std::get<0>(expandedMatrix), std::get<1>(expandedMatrix));
}
  
```

Ссылка на репозиторий

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <array>

#include "../libs/alg/alg.h"

int main() {
    // Подготовить входные данные
    std::vector<std::array<double, 6>> matrix = {
        {2, -1, 1, 3, 1, 15},
        {1, 4, 1, 1, -2, 46},
        {-1, 4, 6, 3, -8, 48}};
    std::array<double, 6> function{{10, -4, 1, 7, -5}};

    // Вывод ответа
    std::cout << solveSystemOfLinearEquationsBigPenalties<6, 3>(matrix, function);
}
```

Ссылка на репозиторий

Результаты выполнения программы:

66.3636

### Задание 3

Запрограммировать изученные алгоритмы и отладить соответствующие программы. В рамках подготовки тестовых данных решить вручную выбранную задачу.

#### Метод больших штрафов:

Введём дополнительную задачу

$$\begin{aligned} z' &= -y_1 - y_2 - y_3 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + y_1 = 15, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 + y_2 = 46, \\ -x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 8x_5 + y_3 = 48, \\ x_i \geq 0 (i = \overline{1, 5}), y_j \geq 0 (j = \overline{1, 3}). \end{cases} \end{aligned}$$

Составим симплекс таблицу:



Баз. пер.	Св. чл.	$x_1$	$x_2$	$x_3 \downarrow$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$y_1$	15	2	-1	1	3	1	1	0	0
$y_2$	46	1	4	1	1	-2	0	1	0
$\leftarrow y_3$	48	-1	4	6	3	-8	0	0	1
$z'$	-109	-2	-7	-8	-7	9	0	0	0

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1 \downarrow$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$\leftarrow y_1$	7	$2\frac{1}{6}$	$-1\frac{2}{3}$	0	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$
$y_2$	38	$1\frac{1}{6}$	$3\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{6}$
$x_3$	8	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$
$z'$	-45	$-3\frac{1}{3}$	$-1\frac{2}{3}$	0	-3	$-1\frac{2}{3}$	0	0	$1\frac{1}{3}$

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1$	$x_2 \downarrow$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	$3\frac{3}{13}$	1	$-\frac{10}{13}$	0	$1\frac{2}{13}$	$1\frac{1}{13}$	$\frac{6}{13}$	0	$-\frac{1}{13}$
$\leftarrow y_2$	$34\frac{3}{13}$	0	$4\frac{3}{13}$	0	$-\frac{11}{13}$	$-1\frac{12}{13}$	$-\frac{7}{13}$	1	$-\frac{1}{13}$
$x_3$	$8\frac{7}{13}$	0	$\frac{7}{13}$	1	$\frac{9}{13}$	$-1\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{2}{13}$
$z'$	$-34\frac{3}{13}$	0	$-4\frac{3}{13}$	0	$\frac{11}{13}$	$1\frac{12}{13}$	$1\frac{7}{13}$	0	$1\frac{1}{13}$

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	$9\frac{5}{11}$	1	0	0	1	$\frac{8}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{1}{11}$
$x_2$	$8\frac{1}{11}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{7}{55}$	$\frac{13}{55}$	$-\frac{1}{55}$
$x_3$	$4\frac{2}{11}$	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{10}{11}$	$\frac{8}{55}$	$-\frac{7}{55}$	$\frac{9}{55}$
$z'$	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Привели матрицу к необходимому виду, в базисе искусственных переменных не осталось, поэтому дополнительных преобразований не нужно. Получим решение задачи при помощи симплекс метода:

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4 \downarrow$	$x_5$
$x_1$	$9\frac{5}{11}$	1	0	0	1	$\frac{8}{11}$
$x_2$	$8\frac{1}{11}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{5}{11}$
$\leftarrow x_3$	$4\frac{2}{11}$	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{10}{11}$
$z$	0	-10	4	-1	-7	5

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5 \downarrow$
$\leftarrow x_1$	$4\frac{5}{22}$	1	0	$-1\frac{1}{4}$	0	$1\frac{19}{22}$
$x_2$	$9\frac{3}{22}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{15}{22}$
$x_4$	$5\frac{5}{22}$	0	0	$1\frac{1}{4}$	1	$-1\frac{3}{22}$
$z$	$36\frac{13}{22}$	-10	4	$7\frac{3}{4}$	0	$-2\frac{21}{22}$

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1 \downarrow$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$\leftarrow x_5$	$2\frac{11}{41}$	$\frac{22}{41}$	0	$-\frac{55}{82}$	0	1
$x_2$	$10\frac{28}{41}$	$\frac{15}{41}$	1	$-\frac{17}{82}$	0	0
$x_4$	$7\frac{33}{41}$	$\frac{25}{41}$	0	$\frac{20}{41}$	1	0
$z$	$43\frac{12}{41}$	$-8\frac{17}{41}$	4	$5\frac{63}{82}$	0	0

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1$	$x_2$	$x_3 \downarrow$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$4\frac{5}{22}$	1	0	$-1\frac{1}{4}$	0	$1\frac{19}{22}$
$x_2$	$9\frac{3}{22}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{15}{22}$
$\leftarrow x_4$	$5\frac{5}{22}$	0	0	$1\frac{1}{4}$	1	$-1\frac{3}{22}$
$z$	$78\frac{19}{22}$	0	4	$-4\frac{3}{4}$	0	$15\frac{15}{22}$

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$
$x_1$	$9\frac{5}{11}$	1	0	0	1	$\frac{8}{11}$
$x_2$	$8\frac{1}{11}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{5}{11}$
$x_3$	$4\frac{2}{11}$	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{10}{11}$
$z$	$98\frac{8}{11}$	0	4	0	$3\frac{4}{5}$	$11\frac{4}{11}$

Ответ:  $98\frac{8}{11}$

### Метод большого штрафа:

Аналогично прошлой задаче введём искусственные переменные. Для составления  $z_M$  положим, что  $M = 27$ . Составим симплекс таблицу:

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1$	$x_2$	$x_3 \downarrow$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$y_1$	15	2	-1	1	3	1	1	0	0
$y_2$	46	1	4	1	1	-2	0	1	0
$\leftarrow y_3$	48	-1	4	6	3	-8	0	0	1
$z_M$	-2943	-64	-185	-217	-196	248	0	0	0

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1 \downarrow$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$\leftarrow y_1$	7	$2\frac{1}{6}$	$-1\frac{2}{3}$	0	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{6}$
$y_2$	38	$1\frac{1}{6}$	$3\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{6}$
$x_3$	8	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{6}$
$z_M$	-1207	$-100\frac{1}{6}$	$-40\frac{1}{3}$	0	$-87\frac{1}{2}$	$-41\frac{1}{3}$	0	0	$36\frac{1}{6}$

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1$	$x_2 \downarrow$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	$3\frac{3}{13}$	1	$-\frac{10}{13}$	0	$1\frac{2}{13}$	$1\frac{1}{13}$	$\frac{6}{13}$	0	$-\frac{1}{13}$
$\leftarrow y_2$	$34\frac{3}{13}$	0	$4\frac{3}{13}$	0	$-\frac{11}{13}$	$-1\frac{12}{13}$	$-\frac{7}{13}$	1	$-\frac{1}{13}$
$x_3$	$8\frac{7}{13}$	0	$\frac{7}{13}$	1	$\frac{9}{13}$	$-1\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$	0	$\frac{2}{13}$
$z_M$	$-883\frac{5}{13}$	0	$-117\frac{5}{13}$	0	$28\frac{1}{13}$	$66\frac{7}{13}$	$46\frac{3}{13}$	0	$28\frac{6}{13}$

Баз. пер.	Св. чл.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	$9\frac{5}{11}$	1	0	0	1	$\frac{8}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{2}{11}$	$-\frac{1}{11}$
$x_2$	$8\frac{1}{11}$	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{7}{55}$	$\frac{13}{55}$	$-\frac{1}{55}$
$x_3$	$4\frac{2}{11}$	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{10}{11}$	$\frac{8}{55}$	$-\frac{7}{55}$	$\frac{9}{55}$
$z_M$	$66\frac{4}{11}$	0	0	0	$4\frac{3}{5}$	$13\frac{2}{11}$	$31\frac{16}{55}$	$27\frac{41}{55}$	$26\frac{18}{55}$

Ответ:  $66\frac{4}{11}$

**Вывод:** в ходе лабораторной работы разработали и отладили программу, находящую оптимальное решение в системе линейных уравнений для целевой функции, и использующей модификации симплекс метода: искусственный базис и большой штраф.