

Лабораторная работа 1-3(2): Маятник Максвелла.

Упражнение 1. Определение углового ускорения маятника и его дисперсии

1. Установили при помощи подвижного кронштейна высоту падения маятника h , заданную преподавателем. При помощи воротка с фиксатором 7 отрегулировали длину нитей маятника Максвелла. Отследили то, чтобы ось маятника была расположена горизонтально.
2. На диск маятника наложили стальное кольцо и запишите его массу m_k . Убедились, что край стального кольца находится примерно на 2 мм ниже оптической оси нижнего фотоэлектрического датчика. Замерили радиус оси маятника r .
3. Включили кнопку «СЕТЬ».
4. Нажали кнопку «СБРОС» чтобы убедиться, что на табло установились нули.
5. Аккуратно вращая диск маятника, намотали на его ось нить и зафиксировали его в верхнем положении при помощи электромагнитов. При этом проследили за тем, чтобы нити наматывались на ось виток к витку.
6. Нажали кнопку «ПУСК» на передней панели миллисекундомера, удерживая её в течение одной секунды. При этом маятник начал двигаться вниз, а таймер производить отсчет времени. В момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика отсчет времени прекратился.
7. Прочитали измеренное значение времени падения маятника и занесли его в таблицу 1.
8. Нажали кнопку «СБРОС» и привели маятник в исходное положение (т.е. зафиксировали его в верхнем положении при помощи электромагнита).
9. Аналогично провели ещё четыре замера времени падения маятника с заданной высоты. Результаты занесли в таблицу 1.

$h = 0,343$ м	$m_k = 0,204$ кг	$r = 0,0085$ м	Таблица 1			
№ опыта	1	2	3	4	5	Σ
t_i, c	0,861	0,874	0,867	0,859	0,872	
$\varepsilon_i, \frac{rad}{c^2}$	108,8677	105,6531	107,3661	109,3752	106,1383	537,4004
$(\varepsilon_i - \langle \varepsilon \rangle)^2, \left(\frac{rad}{c^2}\right)^2$	1,9254	3,3379	0,013	3,5914	1,8004	10,6681

10. Угловое ускорение маятника ε рассчитали по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{a_i}{r} = \frac{2h}{t_i^2 r}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,861 \text{ с})^2 \cdot 0,0085} = 108,8677 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,874 \text{ с})^2 \cdot 0,0085} = 105,6531 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,867 \text{ с})^2 \cdot 0,0085} = 107,3661 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,859 \text{ с})^2 \cdot 0,0085} = 109,3752 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

$$\varepsilon_5 = \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,872 \text{ с})^2 \cdot 0,0085} = 106,1383 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

11. Вычислите среднее значение углового ускорения, его дисперсию и среднеквадратичное отклонение по формулам:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}{n}; \quad S_{\varepsilon}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \langle \varepsilon \rangle)^2}{n-1}; \quad S_{\langle \varepsilon \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \langle \varepsilon \rangle)^2}{n(n-1)}}, \quad \text{где } n - \text{число опытов.}$$

$$n = 5$$

$$\sum_{i=1}^5 \varepsilon_i = 108,8677 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} + 105,6531 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} + 107,3661 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} + 109,3752 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} + 106,1383 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 537,4004 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon \rangle &= \frac{537,4004 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}}{5} = 107,4801 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \\
(\varepsilon_1 - \langle \varepsilon \rangle)^2 &= \left(108,8677 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - 107,4801 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 = 1,9254 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 \\
(\varepsilon_2 - \langle \varepsilon \rangle)^2 &= \left(105,6531 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - 107,4801 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 = 3,3379 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 \\
(\varepsilon_3 - \langle \varepsilon \rangle)^2 &= \left(107,3661 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - 107,4801 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 = 0,013 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 \\
(\varepsilon_4 - \langle \varepsilon \rangle)^2 &= \left(109,3752 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - 107,4801 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 = 3,5914 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 \\
(\varepsilon_5 - \langle \varepsilon \rangle)^2 &= \left(106,1383 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - 107,4801 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 = 1,8004 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 \\
\sum_{i=1}^5 (\varepsilon_i - \langle \varepsilon \rangle)^2 &= 1,9254 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 + 3,3379 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 + 0,013 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 + 3,5914 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 + 1,8004 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 \\
&= 10,6681 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 \\
S_{\varepsilon}^2 &= \frac{10,6681 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2}{4} = 2,6670 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 \\
S_{\langle \varepsilon \rangle} &= \sqrt{\frac{10,6681 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2}{5 \cdot (5 - 1)}} = 0,7303 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}
\end{aligned}$$

12. Окончательный ответ запишите в виде: $\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle \pm t_{pk} \cdot S_{\langle \varepsilon \rangle}$, где $t_{pk} = 2,8$ для $p = 0,95$ и $k = 4$.

$$\varepsilon = 107,4801 \pm 2,8 \cdot 0,7303 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 107,4801 \pm 2,0448 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

Упражнение 2. Проверка уравнения вращательного движения маятника и определение его момента Инерции

Момент инерции маятника определим методом совместных измерений.

Для этого уравнение вращательного движения маятника $M = I\varepsilon$ перепишем в виде: $\varepsilon = \frac{1}{I} M$.

Для дальнейших вычислений введём следующие обозначения:

$$y_i = \varepsilon_i = \frac{a_i}{r_i}; \quad x_i = M_i = m r_i (g - a_i); \quad A = \frac{1}{I},$$

где m – полная масса маятника и $a_i = \frac{2h}{t_i^2}$.

1. Надели на ось маятника подвижные втулки и, изменяя с помощью них радиус оси, провели 5 замеров времени падения маятника. Результаты занесли в таблицу 2.

Таблица 2

№	$r_i, м$	$t_i, с$	$h, м$	$a_i, \frac{м}{с^2}$	$x_i, Н \cdot м$	$y_i, \frac{рад}{с^2}$	$x_i y_i, \frac{Н \cdot м}{с^2}$	$x_i^2, (Н \cdot м)^2$	$(y_i - A x_i)^2, \left(\frac{рад}{с^2}\right)^2$
1	0,007	1,094	0,343	0,5732	0,0235	81,8826	1,9213	0,0006	2,4319
2	0,0085	0,883		0,8798	0,0275	103,5104	2,8513	0,0008	30,8223
3	0,0105	0,760		1,1877	0,0329	113,1117	3,7163	0,0011	13,8727
4	0,0125	0,651		1,6187	0,0372	129,4947	4,8117	0,0014	6,9870
5	0,0085	0,890		0,8661	0,0276	101,8885	2,8110	0,0008	14,2787
Σ					0,1486		16,1117	0,0045	68,3926

$m = m_k + m_m = 0,2040 \text{ кг} + 0,1589 \text{ кг} = 0,3629 \text{ кг}$ (так как без кольца во время опыта маятник отказывался опускаться и подниматься)

$$g = 9,81 \frac{м}{с^2}$$

$$a_1 = \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(1,094 \text{ с})^2} = 0,5732 \frac{м}{с^2}; y_1 = \frac{0,5732 \frac{м}{с^2}}{0,007 \text{ м}} = 81,8826 \frac{рад}{с^2}; x_1 = 0,3629 \text{ кг} \cdot 0,007 \text{ м} \cdot \left(9,81 \frac{м}{с^2} - 0,5732 \frac{м}{с^2}\right) = 0,0235 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,883 \text{ с})^2} = 0,8798 \frac{м}{с^2}; y_2 = \frac{0,8798 \frac{м}{с^2}}{0,0085 \text{ м}} = 103,5104 \frac{рад}{с^2}; x_2 = 0,3629 \text{ кг} \cdot 0,0085 \text{ м} \cdot \left(9,81 \frac{м}{с^2} - 0,8798 \frac{м}{с^2}\right) = 0,0275 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,760 \text{ с})^2} = 1,1877 \frac{м}{с^2}; y_3 = \frac{1,1877 \frac{м}{с^2}}{0,0105 \text{ м}} = 113,1117 \frac{рад}{с^2}; x_3 = 0,3629 \text{ кг} \cdot 0,0105 \text{ м} \cdot \left(9,81 \frac{м}{с^2} - 1,1877 \frac{м}{с^2}\right) = 0,0329 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$a_4 = \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,651 \text{ с})^2} = 1,6187 \frac{м}{с^2}; y_4 = \frac{1,6187 \frac{м}{с^2}}{0,0125 \text{ м}} = 129,4947 \frac{рад}{с^2}; x_4 = 0,3629 \text{ кг} \cdot 0,0125 \text{ м} \cdot \left(9,81 \frac{м}{с^2} - 1,6187 \frac{м}{с^2}\right) = 0,0372 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

$$a_5 = \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,890 \text{ с})^2} = 0,8661 \frac{м}{с^2}; y_5 = \frac{0,8661 \frac{м}{с^2}}{0,0085 \text{ м}} = 101,8885 \frac{рад}{с^2}; x_5 = 0,3629 \text{ кг} \cdot 0,0085 \text{ м} \cdot \left(9,81 \frac{м}{с^2} - 0,8661 \frac{м}{с^2}\right) = 0,0276 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

2. Для проверки линейной зависимости $y = Ax$ определите параметр A и дисперсию адекватности по формулам:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i}{\sum_{i=1}^5 x_i^2};$$

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (y_i - A x_i)^2}{n - 1},$$

где n – число измерений.

$$n = 5$$

$$x_1 y_1 = 0,0235 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 81,8826 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 1,9123 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$$

$$x_2 y_2 = 0,0275 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 103,5104 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 2,8513 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$$

$$x_3 y_3 = 0,0329 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 113,1117 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 3,7163 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$$

$$x_4 y_4 = 0,0372 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 129,4947 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 4,8117 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$$

$$x_5 y_5 = 0,0276 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot 101,8885 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = 2,8110 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1,9123 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} + 2,8513 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} + 3,7163 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} + 4,8117 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} + 2,8110 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} = 16,1117 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$$

$$x_1^2 = (0,0235 \text{ Н} \cdot \text{м})^2 = 0,0006 (\text{Н} \cdot \text{м})^2$$

$$x_2^2 = (0,0275 \text{ Н} \cdot \text{м})^2 = 0,0008 (\text{Н} \cdot \text{м})^2$$

$$x_3^2 = (0,0329 \text{ Н} \cdot \text{м})^2 = 0,0011 (\text{Н} \cdot \text{м})^2$$

$$x_4^2 = (0,0372 \text{ Н} \cdot \text{м})^2 = 0,0014 (\text{Н} \cdot \text{м})^2$$

$$x_5^2 = (0,0276 \text{ Н} \cdot \text{м})^2 = 0,0008 (\text{Н} \cdot \text{м})^2$$

$$\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 0,0006 (\text{Н} \cdot \text{м})^2 + 0,0008 (\text{Н} \cdot \text{м})^2 + 0,0011 (\text{Н} \cdot \text{м})^2 + 0,0014 (\text{Н} \cdot \text{м})^2 + 0,0008 (\text{Н} \cdot \text{м})^2 =$$

$$= 0,0045 (\text{Н} \cdot \text{м})^2$$

$$A = \frac{16,1117 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}}{0,0045 (\text{Н} \cdot \text{м})^2} = 3556,1264$$

$$(y_1 - Ax_1) = 81,8826 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - 3556,1264 \cdot 0,0235 \text{ Н} \cdot \text{м} = 2,4319 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2$$

$$(y_2 - Ax_2) = 103,5104 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - 3556,1264 \cdot 0,0275 \text{ Н} \cdot \text{м} = 30,823 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2$$

$$(y_3 - Ax_3) = 113,1117 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - 3556,1264 \cdot 0,0329 \text{ Н} \cdot \text{м} = 13,8727 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2$$

$$(y_4 - Ax_4) = 129,4947 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - 3556,1264 \cdot 0,0372 \text{ Н} \cdot \text{м} = 6,9870 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2$$

$$(y_5 - Ax_5) = 101,8885 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} - 3556,1264 \cdot 0,0276 \text{ Н} \cdot \text{м} = 14,2787 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2$$

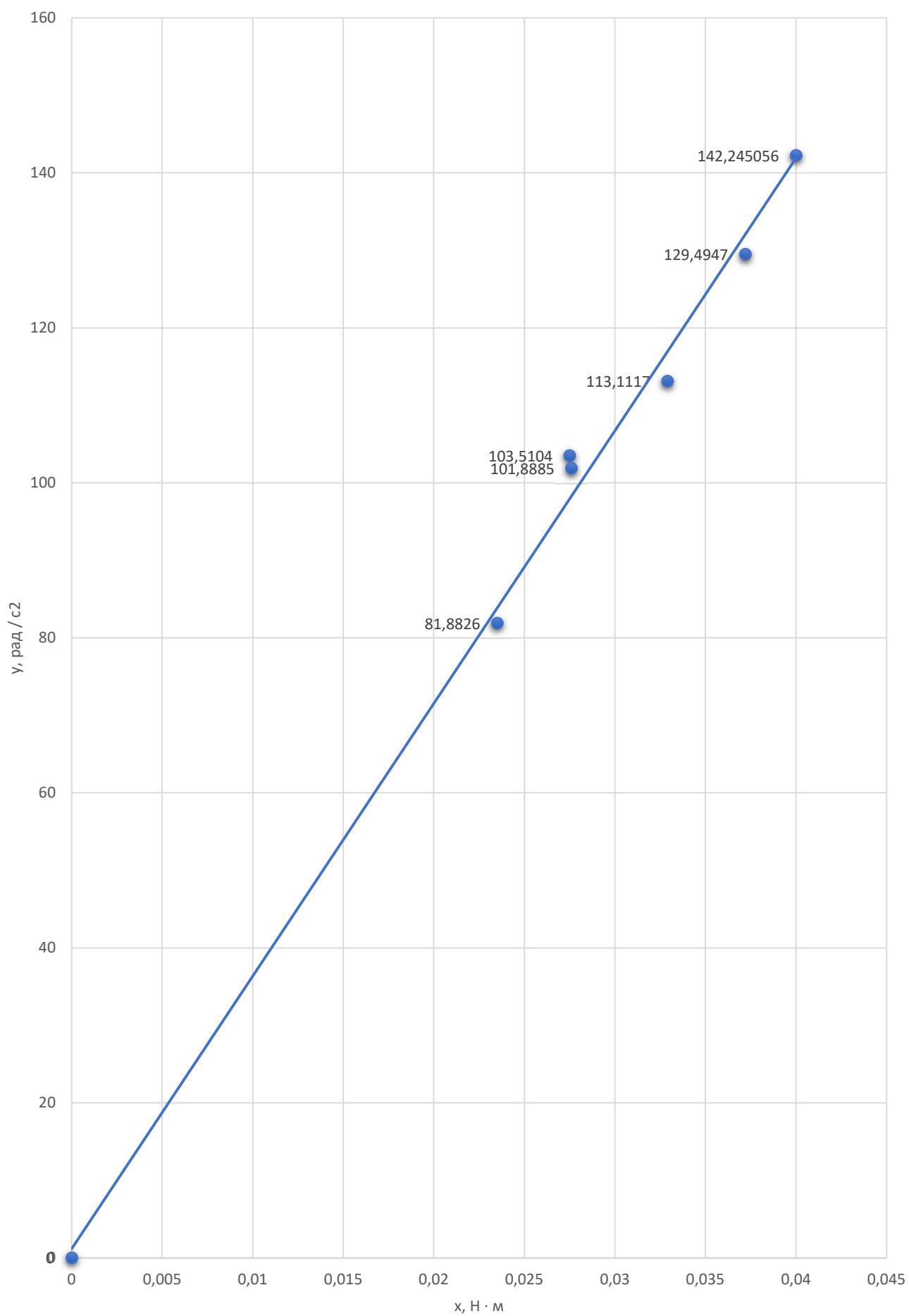
$$\sum_{i=1}^5 (y_i - Ax_i) = 2,4319 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 + 30,823 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 + 13,8727 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 + 6,9870 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 + 14,2787 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2 =$$

$$= 68,3926 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2$$

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{68,3926 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2}{4} = 17,0982 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \right)^2$$

3. Построили график зависимости $y = Ax$ в координатах $\varepsilon = AM$, и убедились, что экспериментальные точки лежат вблизи прямой.

Зависимость



$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_{on}^2}$$

4. Вычислили критерий Фишера по следующей формуле: $S_{on}^2 = S_{\varepsilon}^2$ взяли из упражнения 1.

$$F = \frac{17,0982 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)^2}{2,6670 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)^2} = 6,4110$$

5. Проверьте равенство $F \leq F_{табл} = 6,59$. Если это равенство выполняется, то с вероятностью 0,95 движение маятника можно считать равноускоренным.

6,4110 < 6,59. Движение – равноускоренное.

6. Сделайте вывод о равноускоренном движении маятника (см вывод в конце лаб. работы).

7. Вычислите момент инерции маятника и его дисперсию по формулам:

$$S_A^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - Ax_i)^2}{n-1}$$

$\langle I \rangle = \frac{1}{A}; \quad S_I^2 = \frac{1}{A^2} S_A^2$, где n – число измерений.

$$\langle I \rangle = \frac{1}{3556,1264} = 0,000281205 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad S_A^2 = \frac{1}{0,0045 (H \cdot \text{м})^2} \cdot \frac{68,3926 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)^2}{4} = 3773,8583 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)^2;$$

$$S_I^2 = \frac{1}{3556,1264^2} \cdot 3773,8583 \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)^2 = 1,1262 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$S_I = \sqrt{S_I^2} = \sqrt{1,1262} = 1,0612 \text{ кг}^{\frac{1}{2}} \cdot \text{м}$$

8. Окончательный ответ запишите в виде: $I = \langle I \rangle \pm S_I$

$$I = 3773,8583 \pm 1,061 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Упражнение 3. Изучение зависимости момента инерции маятника от массы и определение моментов инерции колец I_k и диска держателя I_d

Для определения искомых величин провели совместные измерения. Возможность определения моментов инерции колец I_k и диска держателя I_d основана на свойстве аддитивности момента инерции механической системы (т.е. момент инерции системы равен сумме моментов инерции его частей).

Для нашего случая можно записать: $I = I_k + I_d$,

или, введя обозначения $I_k = Am_i$ и $I_d = B$ получили: $I = Am_i + B$,

где m_i - это масса i -го кольца, а параметры A и B определяются, используя метод наименьших квадратов для линейной зависимости $y = Ax + B$ по формулам:

$$A = \frac{n \sum_{i=1}^n m_i I_i - \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n I_i}{n \sum_{i=1}^n m_i^2 - (\sum_{i=1}^n m_i)^2}; \quad B = \frac{\sum_{i=1}^n m_i^2 \sum_{i=1}^n I_i - \sum_{i=1}^n m_i \sum_{i=1}^n m_i I_i}{n \sum_{i=1}^n m_i^2 - (\sum_{i=1}^n m_i)^2}. \quad (4)$$

В этих формулах m_i - это масса i -го кольца, а I_i - это момент инерции всего маятника (т.е. кольца и диска держателя

$$I_i = \frac{M_i}{\varepsilon_i} = \frac{m r (g - a_i)}{\varepsilon_i} = \frac{m t_i^2 r^2}{2h} \left(g - \frac{2h}{t_i^2} \right), \quad (5)$$

с осью вместе), который вычисляется по формуле:

где m - полная масса маятника (диска держателя, оси маятника и i -го кольца).

1. Сняли с оси маятника подвижные втулки и, одевая на диск держатель кольца разной массы m_i , провели пять замеров времени падения маятника с одной и той же высоты h . Результаты занесли в таблицу 3.

$$h = 0,343$$

Таблица 3

№	$m_i, \text{кг}$	$t_i, \text{с}$	$I_i, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$m_i I_i, \text{кг}^2 \cdot \text{м}$	$m_i^2, \text{кг}^2$	$(I_i - Am_i - B), \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$(I_i - Am_i - B)^2, (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2$
1	0,204	1,69	0,00036147	$7,37411 \cdot 10^{-5}$	0,041616	$-2,42488 \cdot 10^{-6}$	$5,88005 \cdot 10^{-12}$
2	0,267	1,735	0,00044769	0,00011953	0,071289	$-9,75222 \cdot 10^{-6}$	$9,51057 \cdot 10^{-11}$
3	0,387	1,838	0,00064566	0,00024987	0,149769	$1,0027 \cdot 10^{-5}$	$1,0054 \cdot 10^{-10}$
4	0,159	1,625	0,00029216	$4,6454 \cdot 10^{-5}$	0,025281	$-4,91769 \cdot 10^{-6}$	$2,41837 \cdot 10^{-11}$
5	0	1,126	$6,80529 \cdot 10^{-5}$	0	0	$7,06784 \cdot 10^{-6}$	$4,99543 \cdot 10^{-11}$
Σ	1,017		0,001815051	0,000489601	0,287955		$2,75663 \cdot 10^{-10}$

2. По формулам (4) и (5) рассчитали I_i , а также параметры A и B , и до конца заполнили таблицу 3.

$$\sum_{i=1}^5 m_i = 0,204 \text{ кг} + 0,267 \text{ кг} + 0,387 \text{ кг} + 0,159 \text{ кг} + 0 \text{ кг} = 1,017 \text{ кг}$$

$$m_m = 0,1589 \text{ кг}$$

$$g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$I_1 = \frac{(0,204 \text{ кг} + 0,1589 \text{ кг}) \cdot (1,690 \text{ с})^2 \cdot (0,005 \text{ м})^2}{2 \cdot 0,343 \text{ м}} \cdot \left(9,81 - \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(1,690 \text{ с})^2} \right) = 0,00036147 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_2 = \frac{(0,267 \text{ кг} + 0,1589 \text{ кг}) \cdot (1,735 \text{ с})^2 \cdot (0,005 \text{ м})^2}{2 \cdot 0,343 \text{ м}} \cdot \left(9,81 - \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(1,735 \text{ с})^2} \right) = 0,00044769 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_3 = \frac{(0,387 \text{ кг} + 0,1589 \text{ кг}) \cdot (1,838 \text{ с})^2 \cdot (0,005 \text{ м})^2}{2 \cdot 0,343 \text{ м}} \cdot \left(9,81 - \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(1,838 \text{ с})^2} \right) = 0,00064566 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_4 = \frac{(0,159 \text{ кг} + 0,1589 \text{ кг}) \cdot (1,625 \text{ с})^2 \cdot (0,005 \text{ м})^2}{2 \cdot 0,343 \text{ м}} \cdot \left(9,81 - \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(1,625 \text{ с})^2} \right) = 0,00029216 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_5 = \frac{0,1589 \text{ кг} \cdot (1,126 \text{ с})^2 \cdot (0,005 \text{ м})^2}{2 \cdot 0,343 \text{ м}} \cdot \left(9,81 - \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(1,126 \text{ с})^2}\right) = 6,80529 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\sum_{i=1}^5 I_i = 0,00036147 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 0,00044769 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 0,00064566 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 0,00029216 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 6,80529 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$= 0,001815051 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$m_1 I_1 = 0,204 \text{ кг} \cdot 0,00036147 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 7,37411 \cdot 10^{-5} \text{ кг}^2 \cdot \text{м}$$

$$m_2 I_2 = 0,267 \text{ кг} \cdot 0,00044769 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 0,00011953 \text{ кг}^2 \cdot \text{м}$$

$$m_3 I_3 = 0,387 \text{ кг} \cdot 0,00064566 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 0,00024987 \text{ кг}^2 \cdot \text{м}$$

$$m_4 I_4 = 0,159 \text{ кг} \cdot 0,00029216 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 4,6454 \cdot 10^{-5} \text{ кг}^2 \cdot \text{м}$$

$$m_5 I_5 = 0 \text{ кг} \cdot 6,80529 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 0 \text{ кг}^2 \cdot \text{м}$$

$$\sum_{i=1}^5 m_i I_i = 7,37411 \cdot 10^{-5} \text{ кг}^2 \cdot \text{м} + 0,00011953 \text{ кг}^2 \cdot \text{м} + 0,00024987 \text{ кг}^2 \cdot \text{м} + 4,6454 \cdot 10^{-5} \text{ кг}^2 \cdot \text{м} + 0 \text{ кг}^2 \cdot \text{м}$$

$$= 0,000489601 \text{ кг}^2 \cdot \text{м}$$

$$m_1^2 = (0,204 \text{ кг})^2 = 0,0416 \text{ кг}^2$$

$$m_2^2 = (0,267 \text{ кг})^2 = 0,0713 \text{ кг}^2$$

$$m_3^2 = (0,387 \text{ кг})^2 = 0,1498 \text{ кг}^2$$

$$m_4^2 = (0,159 \text{ кг})^2 = 0,0253 \text{ кг}^2$$

$$m_5^2 = (0 \text{ кг})^2 = 0 \text{ кг}^2$$

$$\sum_{i=1}^5 m_i^2 = 0,0416 \text{ кг}^2 + 0,0713 \text{ кг}^2 + 0,1498 \text{ кг}^2 + 0,0253 \text{ кг}^2 + 0 \text{ кг}^2 = 0,2880 \text{ кг}^2$$

$$A = \frac{5 \cdot 0,0005 \text{ кг}^2 \cdot \text{м} - 1,017 \text{ кг} \cdot 0,0018 \text{ кг} \cdot \text{м}^2}{5 \cdot 0,2880 \text{ кг}^2 - (1,017 \text{ кг})^2} = 0,0015$$

$$B = \frac{5 \cdot 0,2880 \text{ кг}^2 \cdot 0,0018 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 1,017 \text{ кг} \cdot 0,0005 \text{ кг}^2 \cdot \text{м}}{5 \cdot 2,880 \text{ кг}^2 - (1,017 \text{ кг})^2} = 6,0985 \cdot 10^{-5}$$

3. рассчитайте дисперсию адекватности по формуле:

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (I_i - Am_i - B)^2}{n - 2}, \text{ где } n - \text{число опытов.}$$

$$(I_1 - Am_1 - B) = 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 0,0015 \cdot 0,204 \text{ кг} - 6,0985 \cdot 10^{-5} = -2,42488 \cdot 10^{-6}$$

$$(I_1 - Am_1 - B)^2 = (-2,42488 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 5,88005 \cdot 10^{-12} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(I_2 - Am_2 - B) = 0,0004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 0,0015 \cdot 0,267 \text{ кг} - 6,0985 \cdot 10^{-5} = -9,75222 \cdot 10^{-6}$$

$$(I_2 - Am_2 - B)^2 = (-9,75222 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 9,51057 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(I_3 - Am_3 - B) = 0,0006 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 0,0015 \cdot 0,387 \text{ кг} - 6,0985 \cdot 10^{-5} = 1,0027 \cdot 10^{-5}$$

$$(I_3 - Am_3 - B)^2 = (1,0027 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 1,0054 \cdot 10^{-10} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(I_4 - Am_4 - B) = 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 0,0015 \cdot 0,159 \text{ кг} - 6,0985 \cdot 10^{-5} = -4,91769 \cdot 10^{-6}$$

$$(I_4 - Am_4 - B)^2 = (-4,91769 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 2,41837 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(I_5 - Am_5 - B) = 6,80529 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 0,0015 \cdot 0 \text{ кг} - 6,0985 \cdot 10^{-5} = 7,06784 \cdot 10^{-6}$$

$$(I_5 - Am_5 - B)^2 = (7,06784 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 4,99543 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{i=1}^5 (I_i - Am_i - B)^2 =$$

$$= 5,88005 \cdot 10^{-12} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}} + 9,51057 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}} + 1,0054 \cdot 10^{-10} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}} + 2,41837$$

$$\cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}} + 4,99543 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}} = 2,75663 \cdot 10^{-10} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$S_{ad}^2 = \frac{2,75663 \cdot 10^{-10}}{3} = 9,18878 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^{\frac{1}{2}}$$

4. дисперсию опыта рассчитайте по результатам первого упражнения по формуле:

$$S_{on}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (I_i - \langle I \rangle)^2}{n-1},$$

$$I_i = \frac{M_i}{\varepsilon_i} = \frac{m r (g - a_i)}{\varepsilon_i} = \frac{m t_i^2 r^2}{2h} \left(g - \frac{2h}{t_i^2} \right) \quad \text{и} \quad \langle I \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n I_i}{n},$$

где n - число опытов.

m - масса маятника (кольца m_k , диска держателя и оси маятника) в упражнении 1.

$$I_1 = \frac{(0,204 \text{ кг} + 0,1589 \text{ кг}) \cdot (0,861 \text{ с})^2 \cdot (0,0085 \text{ м})^2}{2 \cdot 0,343 \text{ м}} \cdot \left(9,81 - \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,861 \text{ с})^2} \right) = 0,0002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_2 = \frac{(0,204 \text{ кг} + 0,1589 \text{ кг}) \cdot (0,874 \text{ с})^2 \cdot (0,0085 \text{ м})^2}{2 \cdot 0,343 \text{ м}} \cdot \left(9,81 - \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,874 \text{ с})^2} \right) = 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_3 = \frac{(0,204 \text{ кг} + 0,1589 \text{ кг}) \cdot (0,867 \text{ с})^2 \cdot (0,0085 \text{ м})^2}{2 \cdot 0,343 \text{ м}} \cdot \left(9,81 - \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,867 \text{ с})^2} \right) = 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_4 = \frac{(0,204 \text{ кг} + 0,1589 \text{ кг}) \cdot (0,859 \text{ с})^2 \cdot (0,0085 \text{ м})^2}{2 \cdot 0,343 \text{ м}} \cdot \left(9,81 - \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,859 \text{ с})^2} \right) = 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_5 = \frac{(0,204 \text{ кг} + 0,1589 \text{ кг}) \cdot (0,872 \text{ с})^2 \cdot (0,0085 \text{ м})^2}{2 \cdot 0,343 \text{ м}} \cdot \left(9,81 - \frac{2 \cdot 0,343 \text{ м}}{(0,872 \text{ с})^2} \right) = 0,0002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\sum_{i=1}^5 I_i = 0,0002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 0,0002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 0,0013 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\langle I \rangle = \frac{0,0013 \text{ кг} \cdot \text{м}^2}{5} = 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$(I_1 - \langle I \rangle) = 0,0002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = -3,64043 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$(I_1 - \langle I \rangle)^2 = (-3,64043 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 1,32528 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2$$

$$(I_2 - \langle I \rangle) = 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 4,81649 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$(I_2 - \langle I \rangle)^2 = (4,81649 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 2,31986 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2$$

$$(I_3 - \langle I \rangle) = 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 2,47015 \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$(I_3 - \langle I \rangle)^2 = (2,47015 \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 6,10164 \cdot 10^{-14} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2$$

$$(I_4 - \langle I \rangle) = 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = -4,93025 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$(I_4 - \langle I \rangle)^2 = (-4,93025 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 2,43074 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2$$

$$(I_5 - \langle I \rangle) = 0,0002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 - 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 = 3,50718 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$(I_5 - \langle I \rangle)^2 = (3,50718 \cdot 10^{-6} \text{ кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 1,23003 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2$$

$$\sum_{i=1}^5 (I_i - \langle I \rangle)^2 = 1,32528 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2 + 2,31986 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2 + 6,10164 \cdot 10^{-14} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2 + 2,43074 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2 + 1,23003 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2 = 7,312 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2$$

$$S_{on}^2 = \frac{7,312 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2}{4} = 1,828 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2$$

4. Проверили справедливость предположения о линейной модели нашей зависимости $I = Am_i + B$

$$F_{рас} = \frac{S_{a0}^2}{S_{on}^2}$$

по критерию Фишера:

$$F_{рас} \leq F_{таб} = 6.94$$

Если $F_{рас} \leq F_{таб}$, то гипотеза о справедливости предположения, что $I = Am_i + B$ с вероятностью 0,95 не отвергается.

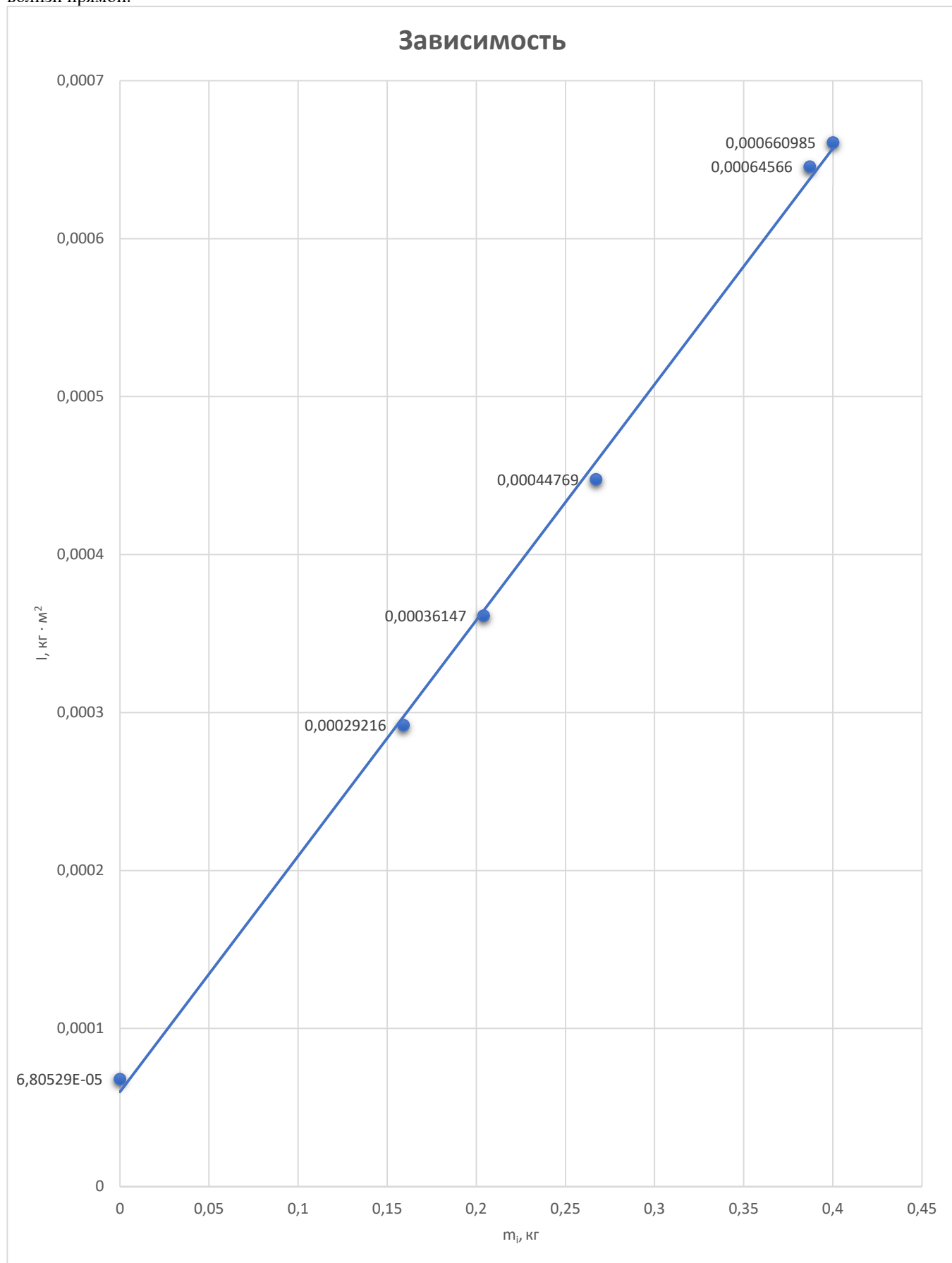
$$F_{рас} = \frac{9,18878 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2}{1,828 \cdot 10^{-11} (\text{кг} \cdot \text{м}^2)^2} = 5,0267$$

$$5,0267 < 6.94$$

$$F_{рас} < F_{таб}$$

Гипотеза о справедливости предположения, что $I = Am_i + B$ с вероятностью 0,95 верна.

5. Постройте график зависимости $I = Am + B$ и, отложив на нем экспериментальные точки, убедитесь, что они лежат вблизи прямой.



6. Запишите моменты инерции каждого кольца и диска держателя

$$I(0,204) = 0,0015 \cdot (0,204 \text{ кг}) + 0,00006 = 0,0004 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I(0,267) = 0,0015 \cdot (0,267 \text{ кг}) + 0,00006 = 0,0005 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I(0,387) = 0,0015 \cdot (0,387 \text{ кг}) + 0,00006 = 0,0006 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I(0,159) = 0,0015 \cdot (0,159 \text{ кг}) + 0,00006 = 0,0003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Вывод: в ходе лабораторной работы: 1) определили угловое ускорение маятника и его дисперсию ($\varepsilon = 107,4801 \pm 2,0448 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$)

2) Далее мы обрабатывали результаты косвенных измерений, определяя зависимость момента инерции маятника от массы и определение моментов инерции колец и диска держателя. Записали результат измерения

($I = 3773,8583 \pm 1,061 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$). Так как неравенство $F \leq F_{\text{табл}} = 6.59$ (критерий Фишера) выполняется ($6,4110 < 6,59$), то делаем заключение, что с вероятностью 0,95 движение маятника можно считать равноускоренным.

3) Затем мы обрабатывали результаты совместных измерений: вычислили методом наименьших квадратов коэффициент А, В для нахождения его дисперсии и для построения прямой $y = A \cdot x + B$, отражающей соответствие экспериментальным данным. Так как неравенство $F \leq F_{\text{табл}} = 6.59$ (критерий Фишера) выполняется ($5,0267 < 6.94$), то мы заключили, что зависимость $I = Am_i + B$ с вероятностью 0,95 верна.

Получили моменты инерции для различных колец и уравнение зависимости момента инерции от массы кольца

$$I(m_i) = 0,0015 \cdot m_i + 6,0985 \cdot 10^{-5}$$