DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI GRASSMAN

In queste pagine, si dimostrerà che:

- Dato uno spazio vettoriale V su un campo K
- Dati 2 sottospazi U e W di V

la dimensione dell'unione dei due sottospazi è data dalla somma della dimensioni dei due sottospazi meno la dimensione dell'intersezione dei due sottospazi.

$$\boxed{\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \quad \text{con } U \subset V \text{ e } W \subset V}$$

Per semplicità scriviamo le dimensioni in questo modo:

$r = \dim U$

$s = \dim W$

$t = \dim(U \cap W)$

Per primo caso, verifichiamo che $U \cap W$ appartiene a V.

Quindi prendiamo 2 vettori dell'intersezione e sommiamoli:

$v, v' \in U \cap W$

$v + v' \in U \cap W$ $\quad$ $U \cap W$ è chiuso rispetto alla somma.

Adesso moltiplichiamo un vettore per uno scalare:

$\alpha \in K$

$v \in U \cap W$

$\alpha v \in U \cap W$ $\quad$ $U \cap W$ è chiuso rispetto al prodotto.

Bene, essendo $U \cap W$ chiuso rispetto a somma e prodotto è verificato che si tratta di un sottospazio di V.

Verifichiamo pure che $U+W$ è un sottospazio di V.

$(u+w), (u'+w') \in U+W \qquad (u+w)+(u'+w') = (u+u')+(w+w') \in U+W$ $\quad$ Chiuso!

$\alpha \in K \quad (u+w) \in U+W \qquad \alpha(u+w) = \alpha u + \alpha w \in U+W$ $\quad$ Chiuso!

Anche $U+W$ è sottospazio di V.

Dopo questa serie di premesse, passiamo alla dimostrazione:
Prendiamo una base per l'intersezione $U \cap W$

$<\{v_1, v_2 \dots v_t\}>$ (Logicamente la dimensione è "t")

Poiché $U \cap W \in U$ e $U \cap W \in W$ possiamo trovarci le basi di U e W partendo dalla base di $U \cap W$. Ovviamente, non basteranno solo i vettori di $U \cap W$, dovremo aggiungere un certo numero di vettori ricordandoci del "Teorema del completamento a base".
Quindi:
Si può ottenere U aggiungendo $r-t$ vettori alla base di $U \cap W$.
Si può ottenere W aggiungendo $s-t$ vettori alla base di $U \cap W$.

$U = <\{v_1, v_2 \dots v_t, u_1, u_2 \dots u_{r-t}\}>$

$W = <\{v_1, v_2 \dots v_t, w_1, w_2 \dots w_{s-t}\}>$

Facendo le combinazioni lineari per degli scalari si ottiene:

$$U = \{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \dots \alpha_t v_t, \beta_1 u_1, \beta_2 u_2 \dots \beta_{r-t} u_{r-t}\} = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{r-t} \beta_j u_j$$

$$W = \{\bar{\alpha}_1 v_1, \bar{\alpha}_2 v_2, \dots \bar{\alpha}_t v_t, \gamma_1 w_1, \gamma_2 w_2 \dots \gamma_{s-t} w_{s-t}\} = \sum_{i=1}^{t} \bar{\alpha}_i v_i + \sum_{h=1}^{s-t} \gamma_h w_h$$

$$U + W = \sum_{i=1}^{t} (\alpha_i + \bar{\alpha}_i) v_i + \sum_{j=1}^{r-t} \beta_j u_j + \sum_{h=1}^{s-t} \gamma_h w_h$$

Queste 3 sommatorie formano vettori linearmente indipendenti?
Ovvero, $v + u + w = \bar{0}$?

$v + u = -w$ e siccome $(v+u) \in U \cap W$ allora anche $-w \in U \cap W$

Quindi:

$$-w = \sum_{i=1}^{t} \bar{\alpha}_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{t} \bar{\alpha}_i v_i + w = \bar{0}$$

Questo significa che sia w sia $v+u$ sono nulli. E quindi se $v+u$ è nullo anche v e u sono nulli. L'indipendenza lineare è verificata e così pure il Teorema di Grassman.

LS UNIPA 15/13/12 2012

→ PETRARCA RULEZ!