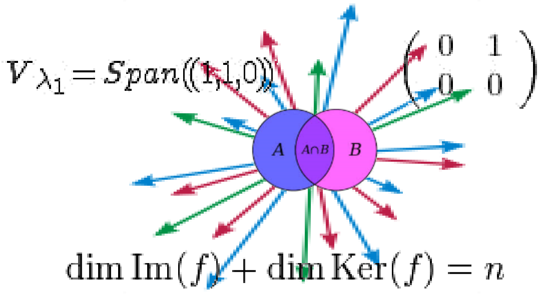
Teoremi di Algebra Lineare



Materia: Geometria – 6 CFU

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali – Corso di Laurea in Informatica

Anno Accademico 2013/2014 - Università degli Studi di Palermo

Realizzato dalle lezioni della Professoressa

Angela Speciale

Scritto dalla collaborazione dei colleghi

Valerio Bondì, Mariella Bonomo, Gregorio Candolo,

Roberta Fardella, Simone Ferraro,

Alessio Lombardo, Mariano Maiorana

Revisione dei contenuti a cura di

Alessio Lombardo

14 Febbraio 2014 – Revisione 5

Indice

Ogni teorema di questa raccolta include sia l'ipotesi sia la tesi. I teoremi che sono anche dimostrati sono segnalati con **[D]** mentre quelli che sono forniti di uno o più esempi sono segnalati con **[E]**.

Nota Bene: Questa raccolta di teoremi e argomenti di Geometria è totalmente artigianale e pertanto non si assicura che tutte le informazioni riportate siano corrette. Preghiamo il lettore di segnalare eventuali errori ed inesattezze all'indirizzo mail **alessiox.94@hotmail.it** . Grazie.

Alessio Lombardo

Teorema di Estrazione di una Base

Ipotesi:

- Sia dato uno spazio vettoriale V di dimensione “n” definito in un campo K.
- Sia dato un insieme di vettori G:{ $v_1,v_2,\dots,v_k$ } che sono generatori di V.

Tesi:

- Il numero di vettori generatori (ovvero “k”) è maggiore o uguale alla dimensione dello spazio vettoriale (ovvero n). Quindi:
  k≥n
- Esistono “n” vettori ($v_1,v_2,\dots,v_n$) che formano una base (chiamata B) di V. Ovvero, esiste un sottoinsieme di G che forma una base di V.
- Se k=n allora l’insieme G è già una base di V.

Dimostrazione:

Si dimostra il teorema mediante l’utilizzo dell’algoritmo di estrazione di una base.

Considerati:

- G:{ $v_1,v_2,\dots,v_r$ } l’insieme dei generatori di V.
- B:{ $w_1,w_2,\dots,w_i$ } la base di V che bisogna ricavare da G.

I passaggi da svolgere sono i seguenti:

- Considerare il primo vettore non nullo di G (chiamato v_h supponendo che i vettori $v_1,\dots,v_{h-1}$ siano nulli) e inserirlo come primo vettore di B (sarà questo il vettore w_1 della base).
- Considerare il secondo vettore non nullo di G (chiamato v_r supponendo che i vettori $v_{h+1},\dots,v_{r-1}$ siano nulli) e verificare se è linearmente indipendente dal primo vettore della base w_1. Se lo è (ovvero se non è proporzionale a w_1) allora andrà inserito nella base B come secondo vettore (cioè w_2), altrimenti (ovvero se è proporzionale a w_1) non farà parte della base (viene scartato).
- Procedere con gli altri vettori non nulli di G e inserirli nella base B solo se sono linearmente indipendenti rispetto alla combinazione lineare dei vettori già inseriti in B.

Sapendo che:

- Ogni vettore non nullo di V è combinazione lineare dei vettori di G (essendo G un insieme di generatori);
- Ogni vettore non nullo di G è combinazione lineare dei vettori di B;

Si può dire che ogni vettore non nullo di V è combinazione lineare dei vettori di B. Questo significa che una base di uno spazio vettoriale è a sua volta un insieme di generatori dello spazio stesso.

Esempio:

Considerato lo spazio vettoriale $V=R^3$, si estragga una base di V dal seguente insieme di generatori:

$G=\{v_1=(1,1,0), v_2=O, v_3=(0,1,-1), v_4=(1,2,-1), v_5=(0,1,2)\}$

Essendo dimV=3 allora la base B sarà composta da 3 vettori. $B=\{w_1,w_2,w_3\}$

Il primo vettore v1 non è nullo quindi si può subito ricavare il primo vettore della base.

$w_1=v_1=(1,1,0)$

Il secondo vettore v_2 è nullo e non va considerato.

Il terzo vettore v_3 è linearmente indipendente rispetto al vettore w_1. Infatti:

$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,-1)=\bar{o} \Rightarrow (\alpha,\alpha+\beta,-\beta)=\bar{o}$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ 0 = 0 \\ -\beta = 0 \end{cases}$$

Si ottengono scalari tutti nulli e quindi v_3 si deve scegliere come secondo vettore della base.

$w_2=v_3=(0,1,-1)$

Il quarto vettore v_4 è linearmente dipendente dalla combinazione lineare di w_1 e w_2 (da notare che la somma di questi due vettori è proprio v_4). Infatti:

$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,-1)+\gamma(1,2,-1)=\bar{o} \Rightarrow (\alpha+\gamma,\alpha+\beta+2\gamma,-\beta-\gamma)=\bar{o}$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta - 2\beta = 0 \\ \gamma = -\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \beta \\ \beta + \beta - 2\beta = 0 \\ \gamma = -\beta \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \beta \\ 0 = 0 \\ \gamma = -\beta \end{cases}$$

Essendo lo scalare β indipendente, ad esso è possibile fornire qualsiasi valore e non soltanto il valore 0. Questo dimostra la dipendenza lineare dei 3 vettori e quindi v_4 non va considerato.

Il quinto vettore v_5 è linearmente indipendente dalla combinazione lineare di w_1 e w_2. Infatti:

$\alpha(1,1,0)+\beta(0,1,-1)+\gamma(0,1,2)=\bar{o} \Rightarrow (\alpha,\alpha+\beta+\gamma,-\beta+2\gamma)=\bar{o}$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\gamma + \gamma = 0 \\ \beta = 2\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ 3\gamma = 0 \\ \beta = 2\gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Si ottengono scalari tutti nulli e quindi v_5 si deve considerare come terzo ed ultimo vettore della base.

$w_3=v_5=(0,1,2)$

Non esistono altri vettori nell'insieme G. Il processo di estrazione della base è concluso. Si può quindi constatare di avere ottenuto una base di V composta esattamente da 3 vettori linearmente indipendenti.

$B=\{w_1=(1,1,0), w_2=(0,1,-1), w_3=(0,1,2)\}$

Teorema dello Scambio o Lemma di Steinitz

Ipotesi:

- Sia dato uno spazio vettoriale V di dimensione “n” definito in un campo K che abbia come base i vettori $v_1,v_2,\ldots,v_n$
- Sia dato un insieme di “r” vettori linearmente indipendenti $w_1,w_2,\ldots,w_r$ appartenenti a V.

Tesi:

- Il numero di vettori indipendenti appartenenti a V (ovvero “r”) è minore o uguale al numero di vettori della base di V (cioè risulta minore o uguale alla dimensione di V). Quindi:
  $r \leq n$
- Questo implica che una base di uno spazio vettoriale V contiene il massimo numero di vettori indipendenti.

Dimostrazione:

Il teorema viene dimostrato per Assurdo. Si suppone che il numero di vettori indipendenti sia maggiore del numero di vettori che formano la base di V. Quindi: $r>n$.

Poiché $<v_1,v_2,\ldots,v_n>$ è una base di V, i vettori $w_1,w_2,\ldots,w_r$ si possono formare dalla combinazione lineare della base (con scalari non tutti nulli ovviamente). Quindi, iniziando dal primo vettore:

$w_1=\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \ldots + \alpha_nv_n$

Poiché w_1 non è nullo, allora almeno un elemento della base non è nullo. Supponendo non nullo il primo vettore della base, si può ricavare quest’ultimo dalla relazione precedente:

$\alpha_1v_1= w_1 - \alpha_2v_2 - \ldots - \alpha_nv_n \quad \Rightarrow \quad v_1= (1/\alpha_1)w_1 - (\alpha_2/\alpha_1)v_2 - \ldots - (\alpha_n/\alpha_1)v_n$

Quindi è stato rimosso il vettore v_1 dalla base e si è inserito il vettore w_1. Infatti adesso la base di V è:

$<w_1,v_2,\ldots,v_n>$ e ovviamente v_1 apparterrà a questa base.

Si procede nello stesso modo con gli altri vettori e si otterranno via via basi diverse:

$w_2=\beta_1w_1 + \beta_2v_2 + \ldots + \beta_nv_n$

$v_2= (1/\beta_2)w_2 - (\beta_1/\beta_2)w_2 + \ldots + (\beta_n/\beta_2)v_n$

Nuova base: $<w_1,w_2,v_3,\ldots,v_n>$ con v_2 appartenente a questa base. E così fino al vettore v_n.

Il passo successivo è il vettore w_r che succede al vettore v_n:

$w_r=\gamma_1w_1+ \gamma_2w_2+ \ldots + \gamma_{r-1}w_{r-1}$

Si nota che w_r dipende linearmente dai vettori $w_1,w_2,\ldots,w_{r-1}$. Questo è ASSURDO poiché era stato stabilito nell’ipotesi del teorema che tutti i vettori $w_1,w_2,\ldots,w_r$ dovevano essere linearmente indipendenti.

Il teorema è dunque verificato.

Teorema del Completamento a Base

Ipotesi:

- Sia dato uno spazio vettoriale V di dimensione “n” definito in un campo K che abbia come base i vettori $v_1,v_2,\dots,v_n$
- Sia dato un insieme di “r” vettori linearmente indipendenti $w_1,w_2,\dots,w_r$ appartenenti a V.

Tesi:

- Se **r=n** allora i vettori $w_1,w_2,\dots,w_r$ formano una base di V.
- Se **r<n** allora i vettori $w_1,w_2,\dots,w_r$ formano una base di un sottospazio di V. Allora esistono n-r vettori indipendenti (cioè $v_{r+1},v_{r+2},\dots,v_n$) che insieme ai vettori $w_1,w_2,\dots,w_r$ formano una base di V. Ovvero:
  $w_1,w_2,\dots,w_r,v_{r+1},v_{r+2},\dots,v_n$ generano V.
- I due sottospazi (cioè quello generato da $<w_1,w_2,\dots,w_r>$ e quello generato da $<v_{r+1},v_{r+2},\dots,v_n>$) sono supplementari poiché hanno in comune solamente il vettore nullo e la loro unione forma V.
- Per il **Teorema dello Scambio**, non si verifica che r>n.

Dimostrazione:

La dimostrazione di questo teorema è strettamente legata a quella del **Teorema dello Scambio** e a quella del **Teorema dell’Estrazione a Base**. Dimostrando il primo, si è già stabilito che una base di uno spazio vettoriale è il numero massimo di vettori indipendenti che si possono ottenere da un insieme di generatori di quello stesso spazio. In altre parole, il numero di vettori indipendenti $w_1,w_2,\dots,w_r$ è certamente minore o uguale al numero di vettori della base di V.

Per ipotesi, i vettori $w_1,w_2,\dots,w_r$ appartengono a V. Quindi i vettori $v_1,v_2,\dots,v_n$ (che sono base di V) e i vettori $w_1,w_2,\dots,w_r$ saranno un insieme di generatori dell’insieme V.

Ovvero, un qualsiasi vettore $v\in V$ si può ottenere dalla combinazione lineare di $v_1,v_2,\dots,v_n,w_1,w_2,\dots,w_r$.

Essendo i vettori $w_1,w_2,\dots,w_r$ appartenenti a V e indipendenti, allora ci saranno r vettori della base di V che si potranno esprimere come combinazione lineare dei vettori $w_1,w_2,\dots,w_r$. I rimanenti vettori, saranno di conseguenza n-r e si potranno estrarre utilizzando l’algoritmo del **Teorema dell’Estrazione a Base**. Supponendo di chiamare questi n-r vettori $u_1,u_2,\dots,u_{n-r}$, si otterrà che un qualsiasi v è generato dalla combinazione lineare di $w_1,w_2,\dots,w_r,u_1,u_2,\dots,u_{n-r}$.

Quindi, come volevasi dimostrare:

- Si avrà un sottospazio di V (chiamato W) di dimensione r che ha per base i vettori $w_1,w_2,\dots,w_r$.
- Si avrà un sottospazio di V (chiamato U) di dimensione n-r che ha per base i vettori $u_1,u_2,\dots,u_{n-r}$.

I vettori, essendo tutti indipendenti fra loro, non generano nessuna intersezione (ovvero, la loro combinazione lineare genera il vettore nullo solo a scalari tutti nulli). I due sottospazi W e U saranno dunque supplementari e l’unione delle loro basi sarà proprio una base di V.

Esempio:

Considerato in R^3 il sottospazio:

U = {(x,y,z)∈R^3 / x+y+z=0}

Si determini un sottospazio supplementare di U verificando il Teorema dello Scambio e il Teorema del Completamento a Base.

PASSO 1 – Si determina la base e la dimensione di U:

x+y+z=0 ⇒ z=-x-y

U = {(x,y,-x-y), x,y∈R}

U = <(1,0,-1),(0,1,-1)>   dim(U)=2

dim(U)<=dim(V) ⇒ 2<=3

Il Teorema dello Scambio è verificato.

PASSO 2 – Si ricava la base di V a partire dalla base di U.

Quindi si costruisce un insieme di generatori formato dalla base di U e dalla base canonica di V:

G: { (1,0,-1),(0,1,-1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) }

Si applica quindi l'algoritmo di Estrazione a Base, per trovare una base di V:

I primi due vettori sono sicuramente indipendenti perché sono già base di U. Si verifica che il terzo vettore sia indipendente dai primi due:

α(1,0,-1)+β(0,1,-1)+γ(1,0,0)=ō ⇒ (α+γ,β,-α-β)=ō

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

È possibile fermarsi qui poiché si è già trovata una base di V.

PASSO 3 – Si ricava la base di W, sottospazio supplementare di U:

La base di W sarà composta dai vettori della base di V che non sono già inclusi nella base di W. Quindi, nel caso in esame, solo il terzo vettore farà parte della base di W:

W = <(1,0,0)>   dim(W)=1

dim(W)<=dim(V) ⇒ 1<=3

Il Teorema dello Scambio è nuovamente verificato. Si verifica dunque il Teorema del Completamento a Base sapendo che dim(V)=n=3, dim(U)=r=2:

dim(W)=n-r=3-2=1. Il teorema è verificato.

Teorema di Grassmann

Ipotesi:

- Sia dato uno spazio vettoriale finito V definito in un campo K.
- Siano dati 2 sottospazi U e W di V.
- Sia definito il sottospazio “somma” fra U e W definito come segue:
  $U+W=\{u+w \,/\, u\in U,\ w\in W\}$
- Sia definito il sottospazio “intersezione” fra U e W definito come segue:
  $U\cap W=\{v\in U,\ v\in W\}$

Tesi:

- La dimensione del sottospazio somma è pari alla somma della dimensione dei sottospazi meno la dimensione del sottospazio intersezione. Cioè:
  $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$

Dimostrazione:

Siano definite le basi dei 2 sottospazi e dello spazio intersezione:

$U=\langle u_1,u_2,\dots,u_r\rangle$ quindi $r=\dim(U)$

$W=\langle w_1,w_2,\dots,w_s\rangle$ quindi $s=\dim(W)$

$U\cap W=\langle v_1,v_2,\dots,v_t\rangle$ quindi $t=\dim(U\cap W)$

Poiché $(U\cap W)\subset U$ e $(U\cap W)\subset W$ sarà possibile ricavare le basi di U e W a partire dalla base di $U\cap W$.

Applicando il **Teorema del Completamento a Base** si ricava che:

- Per ottenere una base di U sono necessari tutti i vettori della base di $U\cap W$ e ulteriori r-t vettori.
  Cioè: $B_U=\{v_1,v_2,\dots,v_t,u_1,u_2,\dots,u_{r-t}\}$
- Per ottenere una base di W sono necessari tutti i vettori della base di $U\cap W$ e ulteriori s-t vettori.
  Cioè: $B_W=\{v_1,v_2,\dots,v_t,w_1,w_2,\dots,w_{s-t}\}$

Combinando linearmente le basi con degli scalari non tutti nulli si ottiene che:

- Considerato un vettore $u\in U$:

$$u=\sum_{i=1}^{t}\alpha_i\, v_i+\sum_{j=1}^{r-t}\beta_j\, u_j$$

- Considerato un vettore $w\in W$:

$$w=\sum_{i=1}^{t}\alpha'_i\, v_i+\sum_{h=1}^{s-t}\gamma_h\, w_h$$

Quindi un qualsiasi vettore $x\in(U+W)$ sarà combinazione lineare dell’unione delle due basi B_U e B_W:

$$x = u + w = \sum_{i=1}^{t} (\alpha_i + \alpha'_i)\, v_i + \sum_{j=1}^{r-t} \beta_j\, u_j + \sum_{h=1}^{s-t} \gamma_h\, w_h$$

U+W = B_UUB_W = {v_1,v_2,…,v_t,u_1,u_2,…,u_{r-t},w_1,w_2,…,w_{s-t}}

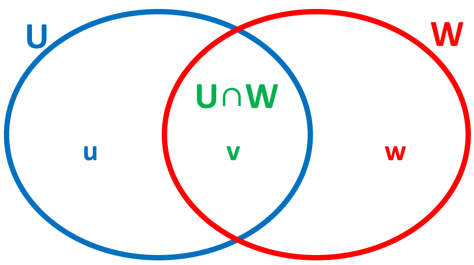
Ovvero, B_UUB_W è un insieme di generatori di U+W.

A questo punto, bisogna dimostrare che B_UUB_W è una base di U+W (e non solamente un insieme di generatori).

Ciò vuol dire che la combinazione lineare di 3 vettori u∈U, w∈W e v∈(U∩W) deve dare il vettore nullo solo per scalari tutti nulli.

Cioè, u+w+v=ō se e solo se u,w e v sono nulli.

Per chiarire i passaggi successivi, è utile disegnare il diagramma di Eulero-Venn degli spazi vettoriali che si stanno prendendo in considerazione:



u+w+v=ō ⇒ v+u=-w

v+u∈U e di conseguenza anche -w∈U. Ma a sua volta -w∈W e quindi -w∈(U∩W).

Questo significa che si può scrivere il vettore –w come combinazione lineare della base dell'intersezione:

$$-w = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i\, v_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{t} \alpha_i\, v_i + w = \bar{o}$$

Si potrà ottenere il vettore nullo solamente se tutti gli scalari α sono nulli e soprattutto se anche w è nullo.

Ma se w=ō, anche v+u=ō. Da questo si deduce che sia v sia u sono nulli.

In definitiva è stato stabilito che u=ō, w=ō e v=ō.

Quindi B_UUB_W è una base di U+W.

Focalizzando l'attenzione sul numero di vettori di B_UUB_W:

dim(U+W) = t+(r-t)+(s-t) = r+s-t = dim(U)+dim(W)-dim(U∩W)

Il teorema è dunque dimostrato.

Esempio:

Considerati in R^4 i sottospazi:

U = {(x,y,z,t)∈R^4 / x-2y+z=t, x-y-z=0}

W = {(x,y,z,t)∈R^4 / x=y}

Determinare la dimensione e una base di U, W, U∩W e U+W verificando il Teorema di Grassmann.

PASSO 1 - Si determina la base e la dimensione di U:

$$\begin{cases} x-2y+z=t \\ x-y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y+x-y=t \\ z=x-y \end{cases} \quad \begin{cases} t=2x-3y \\ z=x-y \end{cases}$$

U = {(x,y,x-y,2x-3y), x,y∈R}

U = <(1,0,1,2),(0,1,-1,-3)>   dim(U)=2

PASSO 2 - Si determina la base e la dimensione di W:

x=y

W = {(x,x,z,t), x,z,t∈R}

W = <(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)>   dim(W)=3

PASSO 3 - Si determina la base e la dimensione di U∩W mettendo in un unico sistema le equazioni dei due sottospazi:

$$\begin{cases} x-2y+z=t \\ x-y-z=0 \\ x=y \end{cases} \quad \begin{cases} x-2x+z=t \\ x-x-z=0 \\ y=x \end{cases} \quad \begin{cases} t=-x \\ z=0 \\ y=x \end{cases}$$

U∩W = {(x,x,0,-x), x∈R}

U∩W = <(1,1,0,-1)>   dim(U∩W)=1

PASSO 4 - Si determina la base e la dimensione di U+W verificando il Teorema di Grassmann.

dim(U+W) = dim(U)+dim(W)-dim(U∩W) = 2 + 3 – 1 = 4

Si può quindi considerare come base di U+V un qualunque insieme di 4 vettori poiché U+W=R^4. Per comodità è conveniente considerarsi la base canonica. Quindi:

U+W = <(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)>   dim(U+W)=4

Teorema di Esistenza ed Unicità delle Applicazioni Lineari

Ipotesi:

- Siano dati due spazi vettoriali V e W di dimensione n definiti nel campo K.
- Sia $<v_1,v_2,\dots,v_n>$ la base di V e $<w_1,w_2,\dots,w_n>$ la base di W.

Tesi:

- Esiste una ed una sola applicazione lineare T fra V e W tale che ogni vettore di V ha una corrispettiva immagine in W tramite la funzione T.
  $v_j \in V$, $w_j \in W$ $\exists! \, T:V \to W$ / $T(v_j)=w_j$ con $j=1,2,\dots n$

Dimostrazione:

Per dimostrare l'esistenza dell'applicazione lineare, si dimostra che l'applicazione è lineare, ovvero che risulta "chiusa" rispetto alle operazioni di somma fra vettori e prodotto fra uno scalare e un vettore.

Quindi, si considerino 2 vettori appartenenti a V e uno scalare λ del campo K:

$v,v' \in V$, $\lambda \in K$

Si esprimano i vettori come combinazione delle basi e si applichi l'applicazione lineare T:

$v=\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ $\qquad$ $T(v)=\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$

$v'=\alpha'_1 v_1 + \dots + \alpha'_n v_n$ $\qquad$ $T(v')=\alpha'_1 w_1 + \dots + \alpha'_n w_n$

Si procede adesso verificando che l'operazione somma è "chiusa" rispetto all'applicazione lineare:

$T(v+v')=(\alpha_1+ \alpha'_1)w1 + \dots + (\alpha_n+ \alpha'_n)w_n = T(v) + T(v')$

Si verifica che anche l'operazione prodotto sia chiusa rispetto a T:

$T(\lambda v)=(\lambda\alpha_1)w1 + \dots + (\lambda\alpha_n)w_n = \lambda T(v)$

L'esistenza dell'applicazione lineare è quindi verificata.

Per dimostrarne l'unicità, si consideri un'altra applicazione lineare T' fra V e W: $T':V \to W$

$T'(v)=T'(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)= \alpha_1 T'(v_1) + \dots \alpha_n T'(v_n) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$

Ma poiché: $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n = T(v)$ allora $T'(v)=T(v)$.

Quindi, se esistessero più applicazioni lineari che trasformano $v_1,v_2 ,\dots ,v_n$ in $w_1,w_2 ,\dots ,w_n$ esse sarebbero identiche. L'unicità dell'applicazione lineare è quindi verificata.

Teorema della Dimensione o del Rango

Ipotesi:

- Siano dati due spazi vettoriali V e W di dimensione finita definiti nel campo K.
- Sia definita un'applicazione lineare T fra V e W:
  $T: V \rightarrow W$
- Sia il Kernel di T quell'insieme di vettori di V che hanno immagine nulla in W:
  $Ker(T) = \{ v \in V \ / \ T(v)=\bar{o} \}$
- Sia l'Immagine di T quell'insieme di vettori di W che sono immagine dei vettori di V tramite T:
  $Im(T) = \{ w \in W \ / \ \exists v \in V \ T(v)=w \}$ oppure:
  $Im(T) = \{ w \in W \ / \ T(v)=w$ per qualche $v \in V \}$

Tesi:

- La dimensione dello spazio vettoriale V è pari alla somma della dimensione del Kernel con la dimensione dell'Immagine dell'applicazione lineare.
  dim(V)=dim(KerT)+dim(ImT)
- Se l'Immagine dell'applicazione lineare è il vettore nullo, allora significa che il Kernel corrisponde all'intero spazio V. Quindi:
  dim(ImT)=0 ⇒ dim(KerT)=dim(V)
- Se l'Immagine dell'applicazione lineare non è il vettore nullo, allora significa che il Kernel è un sottospazio di V. Quindi:
  dim(ImT)≠0 ⇒ dim(KerT)<dim(V)

Dimostrazione:

Si consideri il caso in cui dim(KerT)<dim(V).

Per comodità di dimostrazione si impone che: s=dim(KerT) e n=dim(V). L'obbiettivo della dimostrazione è quello di stabilire che n-s=dim(ImT).

Si prenda dunque una base che generi il Kernel dell'applicazione lineare T: $\langle u_1,u_2,\dots,u_s \rangle$

Adesso, si consideri il sottospazio supplementare del Kernel. Rispettando il **Teorema del Completamento a Base**, esso sarà generato da una base di n-s vettori: $\langle v_1,v_2,\dots,v_{n-s} \rangle$

Applicando la legge dell'applicazione lineare ad un vettore del dominio (ovvero V) si ottiene un vettore immagine che apparterrà a W. Quindi:

$T(v_1)=w_1,\ T(v_2)=w_2,\ \dots,\ T(v_{n-s})=w_{n-s}$

Combinando linearmente con degli scalari del campo K:

$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_{n-s} w_{n-s} = \bar{o}_v$

$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_{n-s} T(v_{n-s}) = T(\bar{o}_v)$

$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-s} v_{n-s}) = T(\bar{o}_v)$

Si può notare che $T(\bar{o}_v)$ ovvero $\bar{o}_w$ altro non è che l'immagine del Kernel (che per definizione è proprio il vettore nullo).

Quindi si può scrivere il secondo membro come combinazione lineare della base del kernel:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-s} v_{n-s} = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_s u_s$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{n-s} v_{n-s} - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2 - \dots - \beta_s u_s = \bar{o}_v$

La cui immagine sarà:

$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_{n-s} T(v_{n-s}) - \beta_1 T(u_1) - \beta_2 T(u_2) - \dots - \beta_s T(u_s) = T(\bar{o}_v)$

Ma poiché $\beta_1 T(u_1) - \beta_2 T(u_2) - \dots - \beta_s T(u_s)$ è il vettore nullo:

$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_{n-s} w_{n-s} = \bar{o}_w$

Essendo i vettori $w_1, w_2, \dots, w_{n-s}$ tutti indipendenti (poiché sono immagine di vettori indipendenti) si è trovata una base dell'Immagine dell'applicazione lineare. La dimensione della base trovata è proprio "n-s" e quindi il teorema è dimostrato.

Esempio:

Considerato l'Endomorfismo $L: R^3 \rightarrow R^3$ definito da

$L(x,y,z) = (x+2y+z, -x+2y+3z, -y-z)$

Determinare una base e la dimensione di KerL e ImL verificando il Teorema della Dimensione.

PASSO 1: Si determina la base e la dimensione del Kernel dell'Endomorfismo:

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x+2y+3z=0 \\ -y-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y-y=0 \\ -x+2y-3y=0 \\ z=-y \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=0 \\ -x-y=0 \\ z=-y \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x \\ z=x \end{cases}$$

KerL = {(x,-x,x), x∈R}

KerL = <(1,-1,1)>   dim(KerL)=1

PASSO 2: Si determina la base e la dimensione dell'Immagine dell'Endomorfismo:

Si trovano prima di tutto le immagini della base canonica del dominio (ovvero R^3):

L(1,0,0) = (1,-1,0)

L(0,1,0) = (2,2,-1)

L(0,0,1) = (1,3,-1)

Si può quindi mostrare la matrice che rappresenta l'endomorfismo:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si calcola il determinante per ricavare il Rango della matrice che corrisponde alla dimensione dell'Immagine. Si procederà applicando la **Regola di Sarrus**:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 3 + 2 = 0$$

Essendo il determinante pari a 0, la dimensione dell'Immagine deve essere minore di 3. Ovvero, i 3 vettori non sono una base dell'Immagine ma solamente un insieme di generatori. Sfruttando il **Teorema di Estrazione di una Base** si deve ricavare la base dell'Immagine che si sta cercando.

Il primo vettore (1,-1,0) essendo non nullo sarà, per definizione, il primo vettore della base.

Il secondo vettore (2,2,-1) è linearmente indipendente dal primo. Infatti, anche senza svolgere calcoli, si nota che non sono proporzionali. Questo vettore sarà quindi il secondo vettore della base.

Teoricamente è possibile fermarsi già qui. Il prossimo vettore è sicuramente dipendente dagli altri due, altrimenti si avrebbe una base di dimensione 3 e ciò è impossibile perché il determinante della matrice era nullo. Tuttavia, come esercizio di verifica, si procederà ugualmente:

Il terzo ed ultimo vettore (1,3,-1) è linearmente dipendente dai primi due vettori. Si nota infatti che sottraendo il primo vettore al secondo si ottiene proprio il terzo vettore. Questo vettore non sarà dunque considerato come elemento della base (come volevasi dimostrare, la supposizione fatta sopra era giusta).

In definitiva, la base dell'Immagine sarà:

ImL = <(1,-1,0),(2,2,-1)>   dim(ImL)=2

Si controlla adesso la veridicità del Teorema della Dimensione:

dim(V)=dim(KerT)+dim(ImT)= 1 + 2 = 3

La dimensione del Dominio dell'Endomorfismo era proprio 3. Il teorema è dunque verificato.

Teorema/Sviluppo di Laplace

Ipotesi:

- Sia data una matrice quadrata A di dimensione nxn.
- Siano a_{ij} gli elementi della matrice sulla riga j e sulla colonna k.
- Sia A_{ij} la sottomatrice di dimensione (n-1)x(n-1) che si ottiene eliminando dalla matrice A la riga i e la colonna j.
- Sia $(-1)^{i+j}$ *det(A_{ij}) il "complemento algebrico" dell'elemento a_{ij}.

Tesi:

- Il determinante della matrice A è dato dalla somma dei prodotti degli elementi di una riga/colonna con i rispettivi complementi algebrici. Ovvero:
  det(A)= a_{i1} * $(-1)^{i+1}$ *det(A_{i1}) + a_{i2} * $(-1)^{i+2}$ *det(A_{i2}) + … + a_{in} * $(-1)^{i+n}$ *det(A_{in})
  (considerando la riga i come riferimento)
  Oppure:
  det(A)= a_{1j} * $(-1)^{1+j}$ *det(A_{1j}) + a_{2j} * $(-1)^{2+j}$ *det(A_{2j}) + … + a_{nj} * $(-1)^{n+j}$ *det(A_{nj})
  (considerando la colonna j come riferimento)

Esempio:

Sia data la seguente matrice A e se ne calcoli il determinante utilizzando lo sviluppo di Laplace:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Per semplificare i calcoli, è utile considerare la riga o la colonna con il più alto numero di 0. Possibilmente, è conveniente "creare" un buon numero di 0 in una riga/colonna utilizzando il Metodo di Eliminazione di Gauss. In questo esempio, questi passaggi verranno saltati e si procederà direttamente allo Sviluppo di Laplace.

Si considera dunque la quarta riga e si procede elemento per elemento (per la risoluzione dei determinanti delle matrici 3x3 si utilizzerà la **Regola di Sarrus**):

Primo Elemento:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 * (-1)^{4+1} * \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -2(42 + 96 + 96 - 112 - 64 - 54) = -2 * 4 = -8$$

Secondo Elemento:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 * (-1)^{4+2} * \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3(21 + 80 + 144 - 168 - 32 - 45) = 3 * 0 = 0$$

Terzo Elemento:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Si può immediatamente stabilire che questa parte di sviluppo è 0 perché l'elemento a_{ij} è proprio 0. Questo dimostra quanto sia conveniente avere molti 0 in una riga/colonna.

Quarto Elemento:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 * (-1)^{4+4} * \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1(24 + 60 + 84 - 108 - 28 - 40) = -8$$

Sommando le quattro parti dello Sviluppo si ottiene il determinante della matrice.

det(A)=(-8)+0+0+(-8)=**-16**

Teorema/Metodo degli Orlati

Ipotesi:

- Sia data una matrice A di dimensione nxm.
- Sia considerata una qualsiasi sottomatrice quadrata di A di dimensione pxp che non abbia determinante nullo (indicata con B).
- Siano considerate le sottomatrici quadrate di A di dimensione (p+1)x(p+1) chiamate "matrici orlate" (indicate con $O_1, O_2, \ldots, O_k$) formate dalla matrice B e da una riga e una colonna della matrice A.

Tesi:

- Se tutte le matrici orlate formate dalla matrice B hanno determinante nullo, allora il rango della matrice A corrisponde al rango della matrice B. Quindi:
  $\det(O_1) = \det(O_2) = \ldots = \det(O_k) = 0 \Rightarrow Rg(A)=Rg(B)$
- Se almeno una delle matrici orlate formate dalla matrice B ha determinante non nullo, allora il rango della matrice A è sicuramente maggiore del rango della matrice B. Quindi, supponendo O_i una qualsiasi matrice orlata di B:
  $\det(O_i) \neq 0 \Rightarrow Rg(A)>Rg(B)$

Esempio 1:

Sia data la seguente matrice A. Si stabilisca il suo rango utilizzando il Metodo degli Orlati:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Si parte solitamente da una sottomatrice 2x2. Partire da una sottomatrice 1x1 (ovvero da un singolo elemento) è superfluo visto che si può subito vedere che ci sono elementi non nulli all'interno della matrice. Si può quindi dire che: Rg(A)>1

Si prenda dunque una sottomatrice 2x2 che abbia determinante non nullo. Per esempio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ 0 & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 24 = -20$$

Bisogna adesso considerare tutte le matrici orlate generate da questa sottomatrice.

Si considera quindi la matrice che comprende tutta la prima riga e parte della prima colonna e si calcola il suo determinante (verrà applicato la **Regola di Sarrus** poiché si tratta di una matrice 3x3):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 24 - 24 - 4 = 0$$

Si procede allo stesso modo con l'altra matrice orlata ovvero con la matrice che include tutta la prima riga e parte dalla quarta colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 72 + 20 - 120 - 16 = -44$$

Quest'ultima matrice orlata ha il determinante non nullo. Per questo è possibile determinare che il rango della matrice A è sicuramente maggiore di 2:

Rg(A)>2

Ma essendo una matrice 4x3 essa ammette al più rango 3 e quindi 2<Rg(A)≤3 cioè **Rg(A)=3**.

Esempio 2:

Altro esempio rapido:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 3 = 9$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 72 + 18 + 12 - 12 - 72 - 18 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 36 + 9 + 6 - 6 - 36 - 9 = 0$$

Il rango della matrice è 2 poiché tutte le matrici orlate hanno determinante pari a 0 e la sottomatrice di riferimento aveva dimensione 2x2. Quindi:

Rg(A)=2

Regola di Sarrus

Ipotesi:

- Sia data una matrice quadrata A di dimensione esclusivamente 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Tesi:

Il determinante della matrice è pari alla somma dei 3 prodotti degli elementi delle diagonali contigue principali meno la somma dei 3 prodotti degli elementi delle diagonali contigue secondarie.

Esistono 2 varianti del metodo che portano comunque alla stessa soluzione:

- Variante "ad incrocio": Si riscrivono accanto alla matrice le prime due colonne e si procede prima considerando le diagonali principali e poi quelle secondarie. Per comodità, si indicano i risultati parziali con P e Q:

DIAGONALI PRINCIPALI:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

P = aei+bfg+cdh

DIAGONALI SECONDARIE:

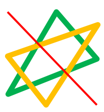
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

Q = ceg+afh+bdi

- Variante "a stella": Si immagina una stella a 6 punte che viene tagliata dalla diagonale principale. Quindi si moltiplicano gli elementi della diagonale principale, poi quelli delle prime 3 punte della stella e infine quelli delle ultime 3 punte della stella. Lo stesso considerando l'altra diagonale (ovviamente la stella sarà orientata diversamente):

STELLA PRINCIPALE:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$



P = aei+bfg+cdh

STELLA SECONDARIA:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Q = ceg+afh+bdi

Con entrambi i metodi, il determinante risultante sarà dato da questa formula:

det(A)=P-Q= aei+bfg+cdh-ceg-afh-bdi

Esempi:

Si calcoli il determinante delle seguenti matrici utilizzando la Regola di Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix} = (2*8*5)+(0*8*3)+(1*1*4)-[(3*8*4)+(1*0*5)+(2*1*8)]$$

$$= 80+0+4-(96+0+16) = 84-112 = \mathbf{-28}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 8 \end{vmatrix} = (3*1*8)+(1*5*1)+(5*2*6)-[(1*1*6)+(3*2*5)+(1*5*8)]$$

$$= 24+5+60-(6+30+40) = 89-76 = \mathbf{13}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (3*2*3)+(1*6*1)+(4*2*4)-[(1*2*4)+(4*1*3)+(3*2*6)] = 18+6+$$
$$32-(8+12+36) = 56-56 = \mathbf{0}$$

Teorema di Rouché-Capelli

Ipotesi:

- Sia dato un sistema di m equazioni lineari (di primo grado) in n incognite con coefficienti appartenenti ad un campo K:
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$
- Sia associata al sistema lineare una matrice $(A^1,A^2,\dots,A^n,B)$ detta "matrice completa" formata dai coefficienti ordinati e dal termine noto di ogni equazione:
$$(A^1, A^2, \dots A^n, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$
- Sia associata al sistema lineare una matrice $(A^1,A^2,\dots,A^n)$ detta "matrice incompleta" formata dai coefficienti ordinati di ogni equazione (senza termini noti):
$$(A^1, A^2, \dots A^n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Tesi:

- Il sistema ha soluzione (ovvero risulta "compatibile") se e solo se il rango della matrice completa $(A^1,A^2,\dots,A^n,B)$ è uguale al rango della matrice incompleta $(A^1,A^2,\dots,A^n)$.
$Rg(A^1,A^2,\dots,A^n,B)=Rg(A^1,A^2,\dots,A^n)$
- Se i ranghi delle matrici corrispondono al numero di incognite allora il sistema ammette un'unica soluzione e viene detto "determinato".
$Rg(A^1,A^2,\dots,A^n,B)=Rg(A^1,A^2,\dots,A^n)=n$ ∃ ! Soluzione
Questo significa che:
∃ ! Soluzione ⇔ $det(A^1,A^2,\dots,A^n)\neq 0$, $det(A^1,A^2,\dots,A^n,B)=0$
- Se i ranghi delle matrici sono pari a "r", con r<n, esisteranno infinite soluzioni, più precisamente: ∞^{n-r} soluzioni. Ovvero, lo spazio delle soluzioni è un sottospazio di K^n con dimensione n-r. Il sistema verrà detto "indeterminato".
$Rg(A^1,A^2,\dots,A^n,B)=Rg(A^1,A^2,\dots,A^n)=n$ $\exists\infty^{n-r}$ Soluzioni

Da queste condizioni si derivano queste altre, utili nel caso in cui si abbia un sistema lineare al variare di un parametro "k":

- Se il numero di equazioni è uguale al numero di incognite, il sistema ammette soluzione se e solo se si impone il determinante della matrice incompleta diverso da 0.
m=n ∃ ! Soluzione ⇔ $det(A^1,A^2,\dots,A^n)\neq 0$
- Se il numero di equazioni è maggiore del numero di incognite, il sistema ammette soluzione se e solo se si impone il determinante della matrice completa uguale a 0.
m>n ∃ ! Soluzione ⇔ $det(A^1,A^2,\dots,A^n,B)=0$

Dimostrazione (⇐):

Se $Rg(A^1,A^2,\dots,A^n,B)=Rg(A^1,A^2,\dots,A^n)$ allora esistono soluzioni?

Supponendo $Rg(A^1,A^2,\dots,A^n)=r$, allora esisteranno r vettori/colonne indipendenti nella matrice.

Si può dunque costruire una base di r vettori $\{A^{h1},A^{h2},\dots,A^{hr}\}$ che generano lo spazio vettoriale $\{A^1,A^2,\dots,A^n\}$:

$\{A^1,A^2,\dots,A^n\} = <A^{h1},A^{h2},\dots,A^{hr}>$

Poiché si è supposto che la matrice completa ha lo stesso rango della matrice incompleta, la matrice completa potrà essere generata dalla base della incompleta e dal vettore B:

$\{A^1,A^2,\dots,A^n,B\} = \{A^{h1},A^{h2},\dots,A^{hr},B\}$

Gli r+1 vettori dell'insieme di generatori $\{A^{h1},A^{h2},\dots,A^{hr},B\}$ saranno sicuramente dipendenti poiché il rango è r e non r+1.

Quindi, combinando linearmente con scalari non tutti nulli:

$\lambda_1A^{h1} + \lambda_2A^{h2} + \dots + \lambda_rA^{hr} + \lambda B=\bar{o}$

Ma poiché i vettori $A^{h1},A^{h2},\dots,A^{hr}$ sono per definizione indipendenti (poiché sono la base della matrice incompleta), allora il vettore B deve dipendere dagli altri. Ovvero, λ non deve essere nullo perché se lo fosse $A^{h1},A^{h2},\dots,A^{hr}$ sarebbero dipendenti (e questo, come appena spiegato, non è possibile). Quindi:

$B=<A^{h1},A^{h2},\dots,A^{hr}>=\{A^1,A^2,\dots,A^n\}$

Ovvero, la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne delle incognite. Il sistema ha quindi soluzioni.

Dimostrazione (⇒):

Se esistono soluzioni allora $Rg(A^1,A^2,\dots,A^n,B)=Rg(A^1,A^2,\dots,A^n)$?

Se esistono soluzioni, la colonna dei termini noti deve essere combinazione lineare delle colonne delle incognite. Ovvero:

$B=\{A^1,A^2,\dots,A^n\}$

Ma questo significa che il rango della matrice completa deve coincidere con il rango della matrice incompleta:

$Rg(A^1,A^2,\dots,A^n,B)=Rg(A^1,A^2,\dots,A^n)$

Essendo dimostrate entrambe le implicazioni, il teorema è dimostrato.

Esempio – Sistema di “n” equazioni in “n” incognite:

Si discuta il seguente sistema lineare al variare del parametro “h” verificando il Teorema di Rouché-Capelli:

$$\begin{cases} hx + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Si scrive la matrice incompleta e completa associate al sistema (indicate in forma “breve” con “A” e “A|b” rispettivamente):

$$A = \begin{pmatrix} h & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad A|b = \begin{pmatrix} h & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per verificare che esistono soluzioni, bisogna calcolare il rango delle due matrici.

Si inizia dal rango della matrice completa che verrà trovato utilizzando il **Metodo degli Orlati**. Si consideri comunque che il rango sarà al più 3 poiché la matrice ha dimensione 3x4.

Si considera una qualsiasi sottomatrice 2x2 con determinante non nullo (che non abbia comunque il parametro h al suo interno):

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Si orla dunque con una matrice 3x3 che contiene la matrice 2x2 considerata e che non contiene “h”. Quindi si calcola il determinante (sarà utilizzata la **Regola di Sarrus**):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 + 2 - 1 = 4$$

Dunque, per il Teorema degli Orlati, è inutile calcolarsi il determinante dell’altro orlato perché a questo punto è già noto che la matrice completa ha rango 3:

Rg(A|b)=3

Si procede adesso calcolando il rango della matrice incompleta. Essendo una matrice quadrata, se ne può direttamente calcolare il determinante (saranno utilizzate due Mosse di Gauss e lo **Sviluppo di Laplace**):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} h & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & 2 & 1 \\ 1-h & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-h & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - h + 3 = -h + 4$$

Ponendo –h+4=0:

h=4

Da ciò deriva che:

Se h=4, il determinante è nullo e quindi il rango della matrice incompleta è 2.

Per ogni valore di h diverso da 4, il determinante non è nullo e quindi il rango della matrice è 3.

h=4 Rg(A)=2

∀h∈R-{4} Rg(A)=3

Questo significa che Rg(A|b)=Rg(A) solo per valori di h diversi da 4. Quindi il sistema ha una ed una sola soluzione solo per h≠4.

h=4 Sistema impossibile

∀h∈R-{4} ∃! Soluzione

Avendo un sistema "Crameriano" per h≠4, si può applicare la Regola di Cramer per trovare la soluzione (la prosecuzione di questo esercizio si trova proprio a seguito del **Teorema di Cramer**).

Esempio – Sistema di "m" equazioni in "n" incognite:

Si discuta il seguente sistema lineare al variare del parametro "k" verificando il Teorema di Rouché-Capelli:

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+y-z=1 \\ 2x-y+z=k \\ x+2y+z=0 \end{cases}$$

Come nell'esempio precedente, si scrivano la matrice incompleta e completa associate al sistema:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A|b=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si procede dunque calcolando il determinante della matrice completa per sapere il suo rango (vengono omessi i calcoli):

$$\det(A|b)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\cdots=3(-k+5)$$

Imponendo 3(-k+5)=0:

k=5

Quindi:

Se k=5 allora il determinante è 0 e quindi il rango della matrice completa sarà 3,2 o 1. Escludendo che il rango sia 1 o 2 (essendosi prima assicurati che almeno una sottomatrice 2x2 e almeno una 3x3 non abbiano determinante nullo) si può affermare che il rango è 3.

Se k≠5 allora il determinante non è 0 e quindi il rango della matrice completa è 4. Riassumendo:

k=5 Rg(A|b)=3

∀k∈R-{5} Rg(A|b)=4

Si procede quindi a calcolare il rango della matrice incompleta.

Essendo una matrice rettangolare, si utilizza il **<u>Metodo degli Orlati</u>** (è già noto che il rango non potrà superare 3):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

Si orla dunque con una matrice 3x3 che contiene la matrice 2x2 considerata e si calcola il determinante (sarà utilizzata la **<u>Regola di Sarrus</u>**):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 - 4 - 1 - 1 = -9$$

Il rango della matrice incompleta è 3.

Quindi, per il teorema di Rouché-Capelli, si avrà una soluzione al sistema solo se Rg(A)=Rg(A|b)=3 quindi solo se k=5. Ovvero:

k=5 ∃! Soluzione

∀h∈R-{5} Sistema impossibile

A questo punto, si sostituisce al parametro k il valore che permette al sistema di essere risolto ovvero “5”:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Si noti che il sistema non è “Crameriano” perché non c’è l’uguaglianza fra numero di equazioni e numero di incognite. Si procede dunque con il classico metodo di risoluzione (per riduzione/sostituzione):

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \begin{cases} 3z = 0 \\ 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \begin{cases} z = 0 \\ y = 2x - 5 \\ x + 4x - 10 = 0 \end{cases} \begin{cases} z = 0 \\ y = 2x - 5 \\ 5x = 10 \end{cases} \begin{cases} z = 0 \\ y = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

La terna di valori che risolve il sistema è quindi: **(2,-1,0)**

Dal punto di vista geometrico, questa terna di valori rappresenta un punto nello spazio R^3.

Teorema/Regola di Cramer

Ipotesi:

- Sia dato un sistema lineare "Crameriano" ovvero di n equazioni in n incognite con coefficienti appartenenti ad un campo K e determinante della matrice incompleta diverso da 0:
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$
Espresso anche come segue:
$A^1x_1 + A^2x_2 + \ldots + A^nx_n = B$
Con:
$\det(A^1,A^2,\ldots,A^n)\neq 0$

Tesi:

- Esiste una sola n-upla $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ che soddisfa il sistema. Ovvero, esiste una e una sola soluzione.
- Ogni valore x_j della n-upla corrisponde al rapporto fra il determinante della matrice incompleta con la colonna j sostituita con i termini noti e il determinante della matrice incompleta.
$$\boldsymbol{x_j = \frac{det(A^1, \ldots, B, \ldots, A^n)}{det(A^1, \ldots, A^n)}}$$

Dimostrazione:

Avendo la matrice incompleta determinante diverso da 0, i vettori $A^1,A^2,\ldots,A^n$ sono tutti linearmente indipendenti e rappresentano una base dello spazio vettoriale K^n.

Di conseguenza, il vettore B può essere espresso in un solo modo come combinazione lineare dei vettori $A^1,A^2,\ldots,A^n$:

$B=\{A^1,A^2,\ldots,A^n\}$

Ovvero, questo dimostra che la soluzione del sistema è unica.

Sapendo che la soluzione sarà il vettore $(x_1, x_2, \ldots , x_n)$ e che il vettore B si può esprimere come sopra, si può calcolare il determinante della matrice $(A^1,\ldots,B,\ldots,A^n)$ (dove B si trova alla j-esima posizione) sostituendo al vettore B il vettore $A_1x_1,A_2x_2, \ldots ,A_nx_n$:

$\det(A^1 , \ldots , B , \ldots , A^n) = \det(A^1, \ldots , A^1x_1 , \ldots , A^nx_n , \ldots , A^n)$

Per opportune proprietà dei determinanti (qui omesse) si ottiene che:

$\det(A^1 , \ldots , B , \ldots , A^n) =$

$= x_1 * \det(A^1, \ldots , A^1 , \ldots , A^n) + \ldots + x_j * \det(A^1, \ldots , A^j , \ldots , A^n) + \ldots + x_n * \det(A^1, \ldots , A^n , \ldots , A^n)$

Si può notare che tutte le matrici tranne $(A^1, \ldots , A^j , \ldots , A^n)$ avranno due colonne identiche. Il loro determinante sarà quindi nullo. Da questo segue che:

$\det(A^1, \ldots, B, \ldots, A^n) = x_j * \det(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^n)$

Ma $(A^1, \ldots, A^j, \ldots, A^n)$ altro non è che la matrice incompleta ovvero $(A^1, \ldots, A^n)$. Quindi ricavando x_j:

$$x_j = \frac{det(A^1, \ldots, B, \ldots, A^n)}{det(A^1, \ldots, A^n)}$$

Come volevasi dimostrare, si è ottenuto x_j. Qualsiasi altro elemento della n-upla potrà essere ottenuto allo stesso modo, semplicemente "spostando" la colonna dei termini noti all'interno della matrice che si trova al numeratore.

Esempio:

Si risolva il seguente sistema lineare al variare del parametro "h" con la Regola di Cramer (si consideri questo esercizio come continuazione del primo esempio del **Teorema di Rouché-Capelli**):

$$\begin{cases} hx + 2y - z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Si risolva prima di tutto il determinante della matrice incompleta, che andrà considerato come denominatore per tutte le incognite nella formula di Cramer:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} h & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & 2 & 1 \\ 1-h & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-h & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - h + 3 = -h + 4$$

A questo punto, si possono direttamente ricavare le soluzioni delle tre incognite utilizzando la **Regola di Sarrus** nelle matrici al numeratore. In rosso è segnalata la colonna che via via viene sostituita con la colonna dei termini noti:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-h+4} = \frac{0 - 1 + 4 - 1 + 2}{-h+4} = \frac{4}{-h+4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} h & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-h+4} = \frac{-h - 1 + 1 - 2h}{-h+4} = \frac{-3h}{-h+4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} h & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-h+4} = \frac{-h + 2 - h - 2}{-h+4} = \frac{-2h}{-h+4}$$

La terna che soddisfa il sistema è quindi: $\left(\boldsymbol{\frac{4}{-h+4}, \frac{-3h}{-h+4}, \frac{-2h}{-h+4}}\right)$

Teorema di Jordan

Ipotesi:

- Sia data una matrice quadrata A di dimensione nxn definita nel campo K.
- Sia definito il polinomio caratteristico di A come risultato del determinante della matrice A meno la matrice identità I moltiplicata per il generico scalare λ (chiamato autovalore):
  $p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$
- Sia definita la "molteplicità algebrica" (m.a.) di λ come esponente del fattore del polinomio caratteristico:
  $(\lambda-a)^n$ a: radice n: molteplicità algebrica
- Sia definita la "molteplicità geometrica" (m.g.) di λ come dimensione dell'autospazio di λ ovvero come dimensione del kernel della matrice A meno la matrice identità moltiplicata per la radice dell'autovalore λ:
  $\dim(\mathrm{Ker}(A-aI))$: molteplicità geometrica a: radice dell'autovalore
- Sia definita la "forma canonica di Jordan" (o "Matrice di Jordan") J una matrice quadrata nxn quanto più simile possibile ad una matrice diagonale che rappresenti lo stesso endomorfismo che rappresenta A.

Tesi:

- La matrice A ammette "forma canonica di Jordan" se e solo se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è pari alla dimensione della matrice.
  $m.a.(\lambda_1) + m.a.(\lambda_2) + \ldots + m.a.(\lambda_k) = n$
- Questo equivale a dire che ogni radice del polinomio caratteristico deve appartenere al campo K di riferimento.
- Se la matrice A verifica il **Teorema della Diagonalizzazione** allora la matrice è diagonalizzabile (ovvero la Matrice di Jordan associata ad A sarà diagonale). Viceversa la matrice A è triangolabile (ovvero la Matrice di Jordan associata ad A sarà triangolare).
- Due Matrici quadrate rappresentano lo stesso endomorfismo (ovvero sono simili) se e solo se ammettono la stessa forma canonica di Jordan.
- La Matrice J sarà formata da un numero di "Blocchi" pari alla somma delle molteplicità geometriche di ogni autovalore:
  Numero Blocchi = $m.g.(\lambda_1) + m.g.(\lambda_2) + \ldots + m.g.(\lambda_k)$
- La somma delle grandezze dei Blocchi di J è pari ad n:
  Numero Blocchi X Grandezza Blocchi = n
- Ogni autovalore possiede un numero di Blocchi pari alla sua molteplicità geometrica:
  Numero Blocchi di λ_i = $m.g.(\lambda_i)$

(Alcuni Esempi di Triangolazione e Diagonalizzazione di Matrici sono riportati a seguito del **Teorema della Diagonalizzazione**)

Teorema della Diagonalizzazione

Ipotesi:

- Sia data una matrice quadrata A di dimensione nxn definita nel campo K.
- Sia definito il polinomio caratteristico di A come risultato del determinante della matrice A meno la matrice identità I moltiplicata per il generico scalare λ (chiamato autovalore):
  p(λ)=det(A-λI)
- Sia definita la "molteplicità algebrica" (m.a.) di λ come esponente del fattore del polinomio caratteristico:
  $(\lambda\text{-}a)^n$ a: radice n: molteplicità algebrica
- Sia definita la "molteplicità geometrica" (m.g.) di λ come dimensione dell'autospazio di λ ovvero come dimensione del kernel della matrice A meno la matrice identità moltiplicata per la radice dell'autovalore λ:
  dim(Ker(A-aI)): molteplicità geometrica a: radice dell'autovalore

Tesi:

La matrice A risulta "diagonalizzabile" se:

- Esiste una "forma canonica di Jordan" della matrice (ovvero se è verificato il **Teorema di Jordan**).
- La somma delle molteplicità geometriche di ogni autovalore è pari alla dimensione della matrice:
  $m.g.(\lambda_1) + m.g.(\lambda_2) + \ldots + m.g.(\lambda_k) = n$
- La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore coincidono:
  $\forall\lambda$ autovalore $m.a.(\lambda) = m.g.(\lambda)$
- La molteplicità algebrica di ogni autovalore non può superare la dimensione della matrice. Allo stesso modo, la molteplicità geometrica di ogni autovalore è sicuramente maggiore o uguale a 1 poiché non possono esistere autospazi nulli. Infine, la molteplicità geometrica non può superare la molteplicità algebrica (non si dimostra quest'ultima affermazione):
  $1 \leq m.g.(\lambda) \leq m.a.(\lambda) \leq n$

Se la matrice A non è diagonalizzabile ma ammette una "forma canonica di Jordan" allora la matrice è detta "triangolabile". Se neppure questa ipotesi è verificata allora la matrice non è né diagonalizzabile né triangolabile (questa eventualità si verifica solo se non si trovano tutti gli autovalori nel campo K considerato).

Esempio 1 – Matrice non triangolabile e non diagonalizzabile:

Si determini, se possibile, la matrice di Jordan della seguente matrice nel campo dei numeri reali (verificando i teoremi di Jordan e della Diagonalizzazione):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si procede subito calcolando il determinante di (A-λI) (si utilizza lo **Sviluppo di Laplace**):

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 1\\ -1 & 2-\lambda & 3\\ 0 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1-\lambda)[(2-\lambda)(-1-\lambda)+3]+(-2-2\lambda+1)=$$
$$=(1-\lambda)(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2+3)+(-1-\lambda)=(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1)-1-2\lambda=$$
$$=\lambda^2-\lambda+1-\lambda^3+\lambda^2-\lambda-1-2\lambda=-\lambda^3+2\lambda^2-4\lambda=-\lambda(\lambda^2-2\lambda+4)=0$$

$-\lambda=0$ ⇒ **λ=0 m.a.(0)=1**

$(\lambda^2-2\lambda+4)=0$

$\Delta=4-16<0$ ⇒ IMPOSSIBILE

Questa parte del polinomio non è scomponibile nel campo dei reali.

Pertanto, il Teorema di Jordan non è verificato poiché la somma di tutte le molteplicità algebriche (cioè 1) non è uguale alla dimensione della matrice (cioè 3).

Poiché non esiste nessuna Forma Canonica di Jordan per questa matrice, il Teorema della Diagonalizzazione non può essere verificato e quindi la matrice non è né diagonalizzabile né triangolabile.

Esempio 2 – Matrice diagonalizzabile:

Si determini, se possibile, la matrice di Jordan della seguente matrice nel campo dei numeri reali (verificando i teoremi di Jordan e della Diagonalizzazione):

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 4 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Come prima, si calcola il determinante di (A-λI) (si utilizza lo **Sviluppo di Laplace** con alcune Mosse di Gauss per la creazione degli 0, i passaggi successivi saranno omessi):

$$\det(A-\lambda I)\begin{vmatrix}-1-\lambda & -2 & 1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & 0 & 1\\ -2 & 4 & -1-\lambda & 1\\ 2 & 0 & -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -2 & 1 & -1-\lambda\\ -1 & 2-\lambda & 0 & 0\\ -2 & 4 & -1-\lambda & -1\\ 2 & 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 0 & -2\lambda\\ -1 & 2-\lambda & 0 & 0\\ -2 & 4 & -1-\lambda & -1\\ 2 & 0 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -2\lambda\\ -1 & 2-\lambda & 0\\ -2 & 4 & -1\end{vmatrix}+(-1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -2\lambda\\ -1 & 2-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\cdots=$$

$$=\lambda^4+\lambda^3-2\lambda^2-2=\lambda(\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2)=0$$

λ=0 m.a.(0)=1

Con Ruffini, si scompone ulteriormente $\lambda^3+\lambda^2-2\lambda-2$ in

$(\lambda+1)(\lambda^2-2)=0$

$\lambda+1=0$ ⇒ **λ=-1 m.a.(-1)=1**

$\lambda^2-2=(\lambda-2)(\lambda+2)=0$

λ-2=0 ⇒ **λ=2 m.a.(2)=1**

λ+2=0 ⇒ **λ=-2 m.a.(-2)=1**

Si verifica adesso il Teorema di Jordan:

m.a.(0) + m.a.(-1) + m.a.(2) + m.a.(-2) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4

Il Teorema di Jordan è verificato. La matrice ammette Forma Canonica di Jordan quindi è come minimo triangolabile.

Si passa adesso a verificare il Teorema della Diagonalizzazione:

Ricordando la relazione: “1 ≤ m.g.(λ) ≤ m.a.(λ) ≤ n” è facile rendersi conto che le molteplicità geometriche di tutti gli autovalori devono essere pari ad 1. Quindi:

m.g.(0) + m.g.(-1) + m.g.(2) + m.g.(-2) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4

Inoltre:

m.a.(0)=m.g.(0), m.a.(-1)=m.g.(-1), m.a.(2)=m.g.(2), m.a.(-2)=m.g.(-2)

Il Teorema della Diagonalizzazione è verificato. La matrice è Diagonalizzabile.

Essendo la matrice diagonalizzabile, la matrice di Jordan J associata alla matrice sarà una matrice diagonale. Nella diagonale di J saranno inseriti gli autovalori trovati, nell’ordine che più si preferisce:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Gli elementi colorati rappresentano i “Blocchi di Jordan” della matrice. In questo caso vi sono 4 blocchi perché la somma delle molteplicità geometriche dei 4 autovalori è proprio 4.

Esempio 3 – Matrice triangolabile con blocco 2x2:

Si determini, se possibile, la matrice di Jordan della seguente matrice nel campo dei numeri reali (verificando i teoremi di Jordan e della Diagonalizzazione):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come prima, si calcola il determinante omettendo alcuni passaggi intermedi:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 5 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots =$$
$$= (2-\lambda)^3(-1-\lambda) = 0$$

2-λ=0 ⇒ **λ=2 m.a.(2)=3**

-1-λ=0 $\Rightarrow$ **λ=-1 m.a.(-1)=1**

Si verifica adesso il Teorema di Jordan:

m.a.(2) + m.a.(-1) = 3 + 1 = 4

Il Teorema di Jordan è verificato. La matrice ammette Forma Canonica di Jordan quindi è come minimo triangolabile.

Il Teorema della Diagonalizzazione non può invece essere verificato al momento. È necessario conoscere la molteplicità geometrica degli autovalori.

Si inizi dunque ad analizzare la dimensione di tutti gli autospazi generati da ogni autovalore partendo possibilmente dall'autovalore con molteplicità algebrica più piccola:

Il primo autovalore, ovvero "λ=-1", ha molteplicità algebrica 1. Pertanto, secondo quanto illustrato nell'esempio precedente, la molteplicità geometrica dovrà sicuramente essere 1. Si verificherà comunque trovando la base canonica dell'autospazio e poi controllandone la sua dimensione:

$$V_{-1} = Ker(A+I) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \bar{o}$$

$$\begin{cases} 3x + y - t = 0 \\ 4y - t = 0 \\ 5y + t = 0 \\ y + 2t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y - t = 0 \\ 9y = 0 \\ y = 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Ker(A+I)={(0,0,z,0), z∈R}

Ker(A+I) = <(0,0,1,0)> dim(Ker(A+I)) = m.g.(-1) = 1

Il secondo autovalore, ovvero "λ=2", ha molteplicità algebrica 3. Si calcola l'autospazio relativo a questo autovalore:

$$V_2 = Ker(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \bar{o}$$

$$\begin{cases} y - t = 0 \\ y - t = 0 \\ 5y - 3z + t = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = t \\ 5y - 3z + y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t = y \\ 6y - 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t = y \\ z = 2y \end{cases}$$

Ker(A-2I)={(x,y,2y,y), x,y∈R}

Ker(A-2I) = <(1,0,0,0),(0,1,2,1)> dim(Ker(A-2I)) = m.g.(2) = 2

Si può procedere verificando il Teorema della Diagonalizzazione:

m.g.(-1) + m.g.(2) = 1 + 2 ≠ 4

m.a.(-1)=m.g.(-1), m.a.(2)≠m.g.(2)

Il Teorema della Diagonalizzazione non è verificato. La matrice non è diagonalizzabile. Per triangolarla, sarà necessario elevare al quadrato l'autospazio nel quale non coincidono le molteplicità ovvero l'autospazio dell'autovalore "λ=2". L'autospazio che si otterrà è definito "autospazio generalizzato" e gli autovettori della sua base sono chiamati "autovettori generalizzati".

$$V_2^2 = Ker(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \bar{o}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ -9y + 9z - 9t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \text{z=y+t}$$

$Ker(A-2I)^2=\{(x,y,y+t,t),\ x,y,t\in R\}$

$Ker(A-2I)^2$ = <(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1)> $dim(Ker(A-2I)^2)$ = 3

A questo punto si può notare che m.a.(2)=$dim(Ker(A-2I)^2)$. La matrice sarà dunque triangolabile attraverso l'autospazio generalizzato appena trovato.

Verrà adesso illustrato l'algoritmo per la creazione della matrice triangolare superiore di Jordan:

PASSO 1: Si sceglie uno qualsiasi dei vettori generalizzati dell'autospazio V_2^2 purché non sia proporzionale a nessun autovettore dell'autospazio V_2. Si associ ad esso il nome v_4:

v_4=(0,0,1,1)

PASSO 2: Si moltiplica la matrice (A-2I) con il vettore v_4. Il risultato verrà chiamato v_3:

$$(A-2I)v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

v_3=(-1,-1,-2,-1)

PASSO 3: Si moltiplica la matrice (A-2I) con il vettore v_3. Il risultato, se tutto è corretto, deve essere il vettore nullo. Se non fosse così, si otterrebbe un solo Blocco 3x3 per l'autovalore λ=2 e questo è impossibile per il Teorema di Jordan. Infatti, λ=2 ha molteplicità geometrica 2 e quindi deve avere necessariamente 2 Blocchi all'interno della matrice di Jordan.

$$(A-2I)v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il primo Blocco di λ=2 è stato dunque "completato" e, come era stato dimostrato, il risultato è proprio il vettore nullo.

PASSO 4: Si continua adesso con il secondo Blocco per λ=2. Questa volta, si sceglie uno qualsiasi dei vettori dell'autospazio V_3 e si indica con v_2:

v_2=(1,0,0,0)

PASSO 5: Si moltiplica (A-2I) con il vettore v_2. Il risultato sarà sicuramente nullo per la stessa congettura di sopra:

$$(A-2I)v_3=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 5 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Il secondo Blocco di Jordan per l'autovalore λ=2 è completo.

PASSO 6: Avendo concluso con l'autovalore λ=2, si passa all'autovalore λ=-1. Si considera quindi l'unico autovettore disponibile e lo si chiama v_1:

v_1=(0,0,1,0)

PASSO 7: Si moltiplica la matrice (A+I) con il vettore v_1. Anche in questo caso, il vettore risultante sarà nullo.

$$(A+I)v_1=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 4 & 0 & -1\\ 0 & 5 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

L'unico Blocco di Jordan per l'autovalore λ=-1 è completo.

PASSO 8: Si riscrivano adesso le operazioni effettuate considerando solamente i vettori utilizzati/creati:

$(A-2I)v_4 = v_3 \Rightarrow Av_4-2v_4 = v_3 \Rightarrow$ **$Av_4 = v_3+2v_4$ = (0,0,1,2)**

$(A-2I)v_3= \bar{o} \Rightarrow Av_3-2v_3 = \bar{o} \Rightarrow$ **$Av_3 = 2v_3$ = (0,0,2,0)**

$(A-2I)v_2= \bar{o} \Rightarrow Av_2-2v_2 = \bar{o} \Rightarrow$ **$Av_2 = 2v_2$ = (0,2,0,0)**

$(A+I)v_1= \bar{o} \Rightarrow Av_1+v_1 = \bar{o} \Rightarrow$ **$Av_1 = -v_1$ = (-1,0,0,0)**

Av_1, Av_2, Av_3, Av_4 rappresentano le 4 colonne della Matrice di Jordan. Quindi:

$$J=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Come era stato previsto, la Matrice di Jordan associata alla matrice A è una matrice triangolare superiore.

Il numero dei Blocchi ottenuti corrisponde alla somma delle molteplicità geometriche degli autovalori. Da notare che i Blocchi possono "permutare" (ovvero possono essere scambiati lungo la diagonale) senza tuttavia cambiare l'Endomorfismo rappresentato originariamente dalla matrice A.

Esempio 4 – Matrice triangolabile con blocco 3x3:

Si determini, se possibile, la matrice di Jordan della seguente matrice nel campo dei numeri reali (verificando i teoremi di Jordan e della Diagonalizzazione):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una matrice triangolare. Il determinante è pari al prodotto degli elementi della diagonale principale:

$$\det(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^3$$

4-λ=0 ⇒ **λ=4 m.a.(4)=3**

Il Teorema di Jordan è verificato. L'unico autovalore trovato ha molteplicità algebrica pari ad n. La matrice sarà almeno triangolabile.

Si procede ricavando l'autospazio dell'autovalore appena individuato:

$$V_4 = Ker(A-4I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{o}$$

$$\begin{cases} y+2z=0 \\ z=0 \\ 0=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Ker(A-4I)={(x,0,0), x∈R}

Ker(A-4I) = <(1,0,0)> dim(Ker(A-4I)) = m.g.(4) = 1

La matrice non è sicuramente diagonalizzabile, poiché m.a.(4) ≠ m.g.(4). Per triangolarla, si procede calcolando l'autospazio generalizzato:

$$V_4^2 = Ker(A-4I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{o}$$

$$\begin{cases} z=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Ker(A-4I)^2={(x,y,0), x,y ∈R}

Ker(A-4I)^2 = <(1,0,0),(0,1,0)> dim(Ker(A-4I)^2) = 2

Poiché m.a.(4) ≠dim(Ker(A-4I)^2) la matrice non è ancora triangolabile. È necessario un ulteriore autospazio generalizzato ricavato da quello precedente:

$$V_4^3 = Ker(A-4I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{o}$$

$Ker(A-4I)^3=\{(x,y,z),\ x,y,z \in R\}$

$Ker(A-4I)^3 = <(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)>$ dim($Ker(A-4I)^3$) = 3

Finalmente, m.a.(4) = dim($Ker(A-4I)^3$). La matrice potrà essere triangolata utilizzando questo autospazio.

Si sceglie dunque dall'autospazio generalizzato appena trovato un autovettore che non sia proporzionale né agli autovettori dell'autospazio originario (cioè solo (1,0,0)) né agli autovettori dell'autospazio generalizzato precedente (cioè (1,0,0) e (0,1,0)). Per esclusione, l'unico vettore rimasto è (0,0,1) e verrà denominato v_3.

Si moltiplica la matrice (A-4I) per il vettore v_3 e si denota il risultato con v_2:

$$(A-4I)v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2$$

(Si noti che essendo v_3 il terzo vettore della base canonica di R^3, il risultato del prodotto è di conseguenza la terza colonna della matrice).

Si procede quindi come sopra, il risultato sarà chiamato v_1:

$$(A-4I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1$$

Ancora una volta, si procede come sopra. Questa volta il risultato sarà il vettore nullo (altrimenti il Blocco supererebbe le dimensioni della matrice che deve contenerlo):

$$(A-4I)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avendo ottenuto come risultato il vettore nullo, si può dichiarare il Blocco "completo". Si procede quindi analizzando i risultati ottenuti e creando la Matrice di Jordan:

$(A-4I)v_3 = v_2 \Rightarrow Av_3-4v_3 = v_2 \Rightarrow$ **$Av_3 = v_2+4v_3 = (0,1,4)$**

$(A-4I)v_2 = v_1 \Rightarrow Av_2-4v_2 = v_1 \Rightarrow$ **$Av_2 = v_1+4v_2 = (1,4,0)$**

$(A-4I)v_1 = \bar{o} \Rightarrow Av_1-4v_1 = \bar{o} \Rightarrow$ **$Av_1 = 4v_1 = (4,0,0)$**

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La Matrice di Jordan ottenuta rispetta la sua forma tipica: si tratta di una matrice triangolare superiore.

Si nota la presenza di un solo Blocco all'interno di J. Infatti la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è proprio 1.

Appunti

Questo foglio è lasciato libero per l’inserimento degli appunti del lettore.