

1. Dimostrare, per induzione, che $2^n + 3^n \leq 5^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$.
2. Determinare, se esistono l'inf ed il sup dell'insieme

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}; n \in \mathbb{N} \right\},$$

specificando se si tratta, rispettivamente del min e del max di A .

3. Dimostrare che la funzione $f(x) = \log(1 + x^3)$ è iniettiva.
4. Calcolare $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\sin(\pi x)}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 7x + 2}{4x^3 - 6x^2 + 5}$
5. Determinare, se esiste, la funzione inversa della funzione $f(x) = x|x| + 3$.
6. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \arcsin(x^2 + 5)$.
7. Determinare l'immagine della funzione $f(x) = \frac{2x^2}{3x^2 + 1}$.

8. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3} \sin\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos 3\sqrt{x}}{\tan 2x}.$$

9. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x^2 + 1} \sin(5x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}.$$

10. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - \cos x}{3x + \sinh^2 x}.$$

11. Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{2^n}{4^n + 1}$.

12. Determinare l'ordine d'infinito, per $x \rightarrow +\infty$, della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x^2 + 1}$.

13. Dimostrare che

$$\log(x^2 + 2) - \log(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

14. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{\log(1 + 5x)}{3x}$$

e stabilire se è possibile estenderla per continuità in $x = 0$.

15. Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$. Dimostrare che esiste un punto $x_0 \in]a, b[$ tale che $f(x_0) = \frac{f(a) + f(b)}{2}$.