Insiemi

Un insieme è un'entità formata da più oggetti (detti elementi).
Il concetto di insieme è detto "primitivo"; ovvero è un ente che non viene definito usando altri enti.

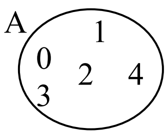
Esempi di insiemi:
l'insieme delle lettere dell'alfabeto maiuscole: A,B,X,…
l'insieme delle lettere dell'alfabeto minuscole: a,b,x…

Un insieme si definisce caratterizzandone il contenuto:
dato l'insieme A formato dai numeri 0,1,2,3,4 si ha:

maniera esplicita: descrizione dell'insieme mediante l'elencazione di tutti gli elementi
Es: $A = \{0,1,2,3,4\}$
maniera implicita: descrizione dell'insieme mediante una certa proprietà caratteristica
Es: $A = \{x \in N: x \leq 4\}$

Il simbolo $\in$ indica l'appartenenza: $3 \in A$
Il simbolo $\notin$ indica la non appartenenza: $5 \notin A$

diagramma di Eulero-Venn: metodo per la visualizzazione grafica:
Es:



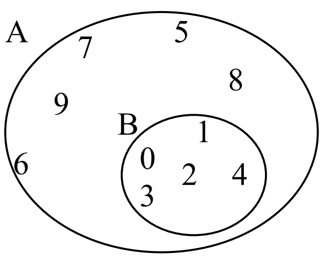
L'insieme vuoto $\emptyset$ è un insieme privo di elementi

Sottoinsiemi

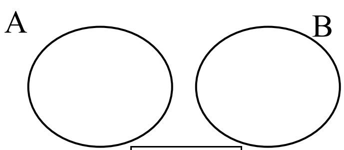
Un sottoinsieme B di A è un insieme che è contenuto nell'insieme A: $B \subset A$
Il simbolo $\subset$ indica che un insieme è contenuto in un altro insieme: $B \subset A$
Il simbolo $\not\subset$ che un insieme non è contenuto in un altro insieme: $C \not\subset A$

$B \subset A$ se ogni elemento di B fa parte di A

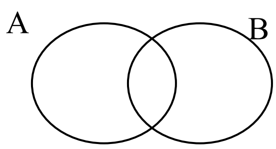
Es: $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$
$B = \{0,1,2,3,4\}$



$B \subset A$



$B \not\subset A$
$A \not\subset B$



$B \not\subset A$
$A \not\subset B$

Se $A \subset B$ e $B \subset A$ allora si può affermare che $A = B$
ma allo stesso mondo $A = B$ se $A \subset B$ e $B \subset A$.
Quindi due insiemi sono uguali se tutti i loro elementi sono uguali.

L'insieme vuoto è per definizione sottoinsieme di qualunque insieme: $\varnothing \subset A$
Sempre per definizione un insieme è sottoinsieme di se stesso $A \subset A$

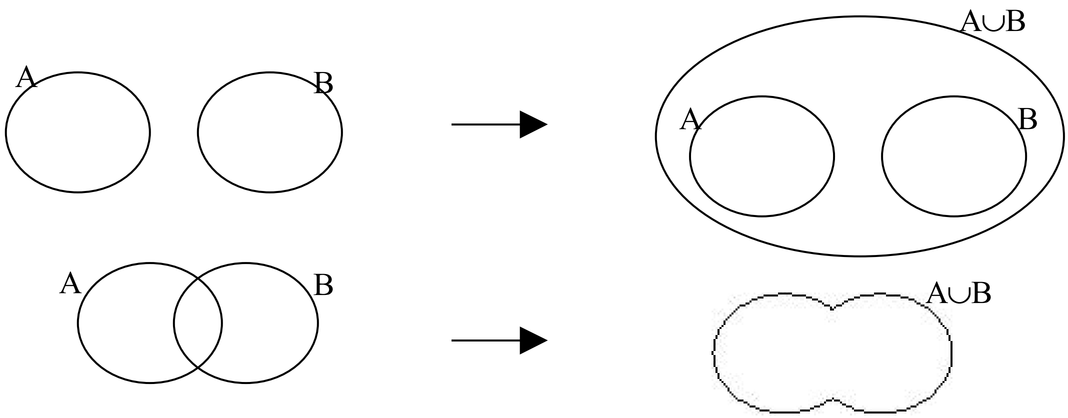
Un sottoinsieme B di A è detto sottoinsieme proprio di A, quando si esclude a priori che il sottoinsieme B possa essere uguale al insieme A (ovvero esiste almeno un elemento di A che $\notin B$)
[$B \subseteq A$ → Il sottoinsieme B è contenuto o "uguale" all' Insieme A
$B \subset A$ → Il sottoinsieme B è un insieme proprio di A]

Insieme delle parti di un insieme A

$P_{(A)}$ = è l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi del insieme A
$P_{(A)} = \{X: X \subseteq A\}$
Es: $A = \{a,b,c\}$; $P_{(A)} = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$

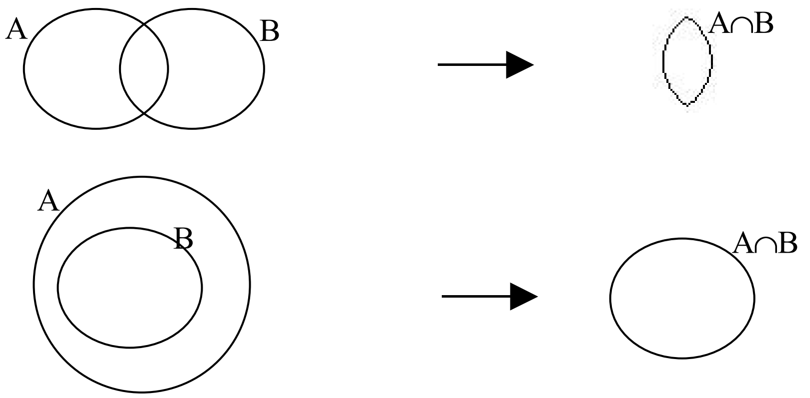
Unione

Dati due insiemi A,B si definisce unione ($A \cup B$) l'insieme che ha come elementi quelli che appartengono ad almeno uno dei due:
$A \cup B = \{x: x \in A \text{ o } x \in B\}$
$A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{2,4,6\}$ $A \cup B = \{1,2,3,,4,6\}$

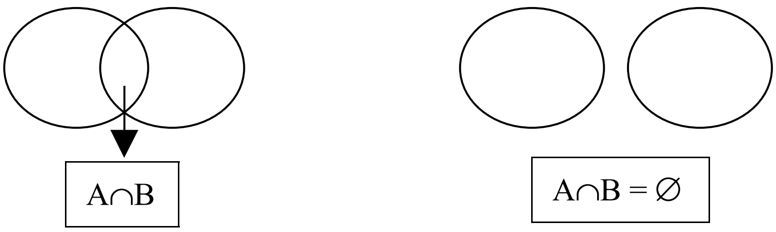


Intersezione

Dati due insiemi A,B si definisce intersezione ($A \cap B$) l'insieme che ha come elementi quelli che appartengono contemporaneamente ad entrambi:
$A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}$
$A = \{1,2,3,4\}$ $B = \{2,4,6\}$ $A \cup B = \{2,4\}$



Due insiemi A,B si dicono disgiunti quando la loro intersezione è uguale all'insieme vuoto $A\cap B=\emptyset$



Nota Bene:

1. $A\cup B = B\cup A$ → proprietà commutativa
2. $A\cup\emptyset = \emptyset\cup A = A$
3. $A\cup A = A$ → proprietà idem potenza
4. $A\cap B = B\cap A$ → proprietà commutativa
5. $A\cap\emptyset = \emptyset\cap A = \emptyset$
6. $A\cap A = A$ → proprietà idem potenza

Dati 3 insiemi A,B,C si ha che:

7. $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ → proprietà associativa
8. $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ → proprietà associativa
9. $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ → proprietà distributiva
10. $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ → proprietà distributiva

Proprietà associativa: $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$

1. $x\in A\cup(B\cup C) \Rightarrow x\in (A\cup B)\cup C$
2. $x\in (A\cup B)\cup C \Rightarrow x\in A\cup(B\cup C)$

La dimostrazione deriva direttamente dalla definizione di unione e appartenenza:
$x\in A\cup(B\cup C)$ significa che $x\in A$ oppure $x\in (B\cup C)$
ma ancora $x\in (B\cup C)$ significa che $x\in B$ oppure $x\in C$
quindi $x\in A$, o $x\in B$, o $x\in C$ → in qualsiasi modo si uniranno gli insiemi x si troverà sempre nella loro unione.

Proprietà associativa: $A\cap(B\cap C) = (A\cap B) \cap C$
[la dimostrazione è equivalente alla precedente]
Proprietà distributiva: $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

1. $A\cup(B\cap C) \Rightarrow (A\cup B)\cap(A\cup C)$
2. $(A\cup B)\cap(A\cup C) \Rightarrow A\cup(B\cap C)$

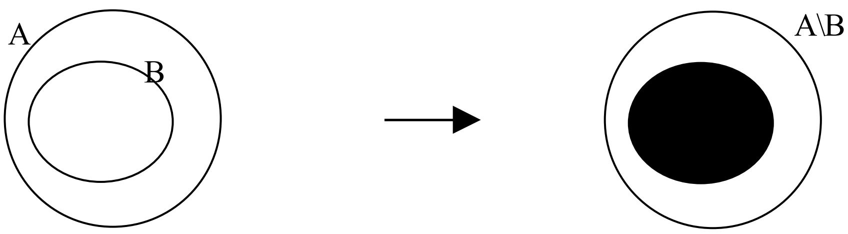
Dimostrazione:

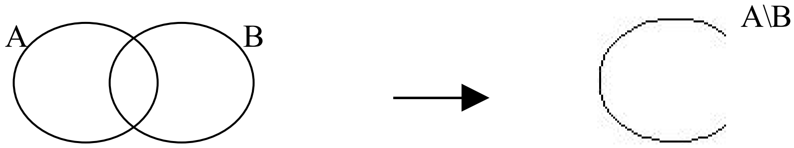
1. $A\cup(B\cap C) \Rightarrow x\in A$ oppure ($x\in B$ e $x\in C$)
   se $x\in A \Rightarrow x\in A\cup B$ quindi $x\in (A\cup B)\cap(A\cup C)$
   se $x\notin A \Rightarrow x\in B$ e $x\in C$ quindi $x\in (A\cup B)$ e $x\in (A\cup C)$
2. si dimostra in maniera uguale

Proprietà distributiva: $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$
[la dimostrazione è equivalente alla precedente]

Differenza

Dati due insiemi A e B si definisce differenza ($A\backslash B$ oppure $A-B$) l'insieme che ha come elementi quelli di A che non appartengono a B:
$A\backslash B = \{x: x\in A \text{ e } x\notin B\}$
$A = \{1,2,3\}$ $B = \{2,4,6\}$ $A\backslash B = \{1,3\}$ $B\backslash A = \{4,6\}$ Quindi $A\backslash B \neq B\backslash A$





Assegnazione di un insieme

Gli elementi di un insieme possono essere assegnati ad un insieme mediante

- Elencazione
- Proprietà

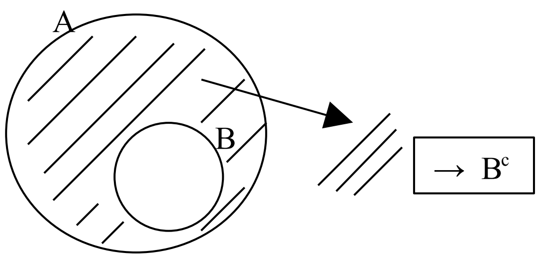
Per la Proprietà bisogna definire un insieme ambiento/universo. Tale insieme è quello da cui prendere gli elementi che verificano la proprietà.

U = universo; $P_{(x)}$ = proprietà
Allora l'insieme verrà scritto: $A = \{x \in U \,/\, P(x) \text{ è vera}\} = \{x : P(x)\}$

Modificando U e mantenendo la stessa proprietà l'insieme A che si individua può non essere lo stesso:
Es. U = alfabeto; $P(x)$ = x è una vocale
$A = \{x \in U \,/\, P(x) \text{ è vera}\} \Rightarrow A = \{a,e,i,o,u\}$
U = consolanti; $P(x)$ = x è una vocale
$A = \varnothing$

Complementare

Dati due insiemi A,B con $B \subset A$ allora l'insieme $A \backslash B$ si dice complementare di B rispetto A e si indica con:
B^c_A oppure B^c
Es: $A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,3\}$ $B^c = \{2\}$



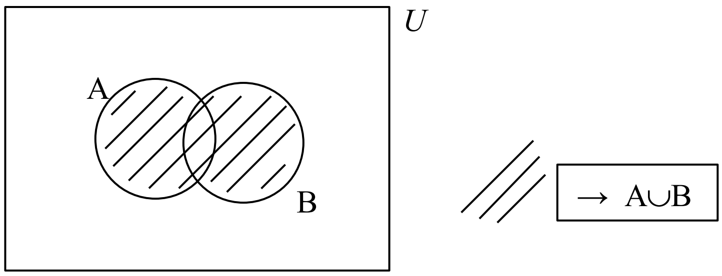
Proprietà:
$(B^c)^c = B$
$B \cup B^c = A$
$B \cap B^c = \varnothing$

Relazioni di De Morgan

Permettono di stabilire il legame tra intersezione, unione e complementare

1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

I complementari sono presi rispetto ad U



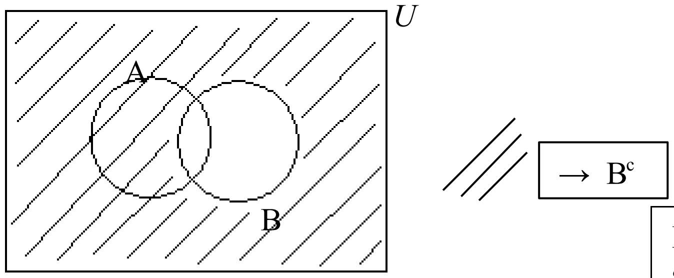
Dimostrazione 1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)^c \Rightarrow A^c \cap B^c$

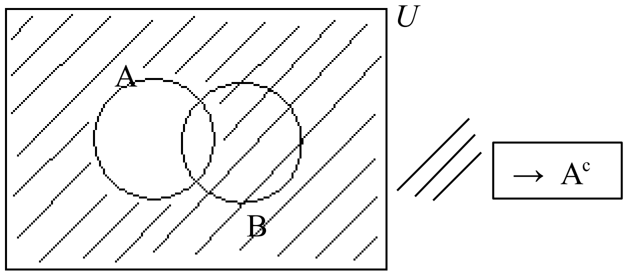
$x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \in U$ e $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ e $x \notin B \Rightarrow x \in A^c$ e $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$

$\Leftarrow x \in A^c \cap B^c \Rightarrow (A \cup B)^c$

$x \in A^c \cap B^c \Rightarrow x \in A^c$ e $x \in B^c \Rightarrow x \notin A$ e $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^c$



Il complementare si fa sempre rispetto ad *U*



Dimostrazione 2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Si può dimostrare usando ciò che dice la 1) che è sicuramente vera dal momento che è stata già dimostrata. In considerazione di ciò si può scrivere:

$(A^c \cup B^c)^c = (A^c)^c \cap (B^c)^c$ [$\rightarrow A \cap B$]

quindi: $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$

e si ricava che $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

Prodotto Cartesiano

L'elemento(a,b) si chiama coppia ordinata.
Date due coppie ordinate (a,b) e (c,d) esse sono uguali se e solo se a=c e b=d
$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$
Es: $(1,2) \neq (2,1)$
$(a,1) = (1,1) \Rightarrow a = 1$
Questa proprietà non vale per gli insiemi, infatti essi $\{2,3\} = \{3,2\}$

Il concetto di coppia ordinata permette di introdurre il concetto di prodotto cartesiano fra due insiemi
Dati A,B $\quad AxB = \{(a,b)/\ a\in A \text{ e } b\in B\}$
Il prodotto cartesiano AxB è l'insieme che ha per elementi le coppie ordinate tali che il primo elemento della coppia proviene dal primo insieme e il secondo elemento dal secondo insieme

Il prodotto cartesiano non è commutativa
$AxB \neq BxA \rightarrow$ Perché è importante l'ordine degli elementi della coppia che nei due casi è diversa.
Es:
$A = \{1,2\} \qquad B = \{3,4\}$
$AxB = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$
$BxA = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)\}$

Relazioni

una relazione di A in B è un qualunque sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB

$\Re$ = relazione di A in B $\rightarrow \Re\subset AxB$
Es:
$A = \{1,2\} \qquad B = \{3,4\} \qquad AxB = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$
$\Re = \{(1,4), (2,3)\}$
$\Re = \{(1,3)\}$
$\Re = AxB$
$\Re = \varnothing$

Data una relazione $\Re$ si definiscono Dominio e Codominio:

dom $\Re$: è l'insieme degli elementi di A che sono prima coordinata di almeno una coppia della relazione. $\Re = \{a\in A : (a,b)\in \Re$ per almeno un $b\in B\}$
Es: $\Re = \{(1,4), (2,3)\}$ dom$\Re$ $\{1,2\}$

Cod $\Re$: è l'insieme che ha come elementi gli elementi di B che sono seconda coordinata di almeno una coppia della relazione. $\Re = \{b\in B : (a,b)\in \Re$ per almeno una $a\in A\}$
Es: $\Re = \{(1,4), (2,3)\}$ cod$\Re$ $\{4,3\}$

Ad ogni relazione $\Re$ di A in B si associa una relazione di B in A che si chiama relazione inversa e si indica con $\Re^{-1}$ ($\Re^{-1}$ è sottoinsieme del prodotto cartesiano BxA)
$\Re^{-1} \subset BxA, \quad \Re^{-1}\ \{(b,a) : (a,b)\in \Re\}$

dominio e codominio di $\Re^{-1}$ sono quelli di $\Re$ invertiti:
$dom\Re^{-1} = cod\Re$ $\qquad$ $cod\Re^{-1} = dom\Re$

n.b.: l'inversa della relazione inversa è una relazione di partenza: $(\Re^{-1})^{-1} = \Re$

Relazioni di A in A (o anche semplicemente $\Re$ in A) sono sottoinsiemi del prodotto cartesiano AxA
$(a,b)\in \Re$ si scrive anche $a\Re b$

Una relazione può essere:

- riflessiva
- simmetrica
- antisimmetrica
- transitiva

Una $\Re$ in A è riflessiva quando $(a,a)\in \Re$, $\forall a\in A$
Una $\Re$ in A è simmetrica quando $(a,b)\in \Re \Rightarrow (b,a)\in \Re$, $\forall a,b\in A$
Una $\Re$ in A è antisimmetrica quando $(a,b)\in \Re$ e $(b,a)\in \Re \Rightarrow a=b$, $\forall a,b\in A$
Una $\Re$ in A è transitiva quando $(a,b)\in \Re$ e $(b,c)\in \Re \Rightarrow (a,c)\in \Re$, $\forall a,b\in A$

Una $\Re$ in A è una relazione di equivalenza se risulta contemporaneamente riflessiva, simmetrica e transitiva.

Una $\Re$ in A è una relazione d'ordine se risulta contemporaneamente riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Sia $A\neq\emptyset$. Nell' insieme delle parti $P_{(A)}$ introduciamo la seguente relazione
$(B,C)\in \Re$ se $B\subset C$ $\qquad$ $\Re = \{(B,C), B\subset C\}$
n.b. La relazione $\Re$ non è una relazione in A ma è una relazione in $P_{(A)}$, cioè è sottoinsieme di $P_{(A)}xP_{(A)}$ $(\Re\subset P_{(A)}xP_{(A)})$

Questa è una relazione d'ordine:
è riflessiva perché $(B,B)\in \Re$
è antisimmetrica perché $(B,C)\in \Re$ e $(C,B)\in \Re \Rightarrow B=C$ questo perché $B\subset C$ e $C\subset B$ quindi B e C coincidono
e transitiva perché $(B,C)\in \Re$ e $(C,D)\in \Re \Rightarrow (B,D)\in \Re$ questo male perché $B\subset C$, $C\subset D$ quindi $B\subset D$

Esercizio 1:

$A = \{1,2\}$
$\Re$ di A in A: $\Re = \{(1,1), (2,2)\}$

$\Re$ è un sottoinsieme di AxA?

$AxA = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$

Sì. $\Re$ è un sottoinsieme di AxA

Verifica quali delle proprietà valgono:

→ Riflessiva: $\forall a \in A \Rightarrow (a,a) \in \Re$
$1 \in A \Rightarrow (1,1) \in \Re$
$2 \in A \Rightarrow (2,2) \in \Re$
La Riflessiva vale

→ Simmetrica: $\forall (a,b) \in \Re \Rightarrow (b,a) \in \Re$
$(1,1) \in \Re \Rightarrow (1,1) \in \Re$
$(2,2) \in \Re \Rightarrow (2,2) \in \Re$
La Simmetrica vale

→ Antisimmetrica: $\forall (a,b) \in \Re$ e $(b,a) \in \Re \Rightarrow a=b$
$(1,1) \in \Re$ e $(1,1) \in \Re \Rightarrow 1=1$
$(2,2) \in \Re$ e $(2,2) \in \Re \Rightarrow 2=2$
La Antisimmetrica vale

→ Transitiva: $\forall$ $(a,b) \in \Re$ e $(b,c) \in \Re \Rightarrow (a,c) \in \Re$
$(1,1) \in \Re$ e $(1,1) \in \Re \Rightarrow (1,1) \in \Re$
[la coppia (1,1) si può paragonare solo a se stessa in quanto la prima coordinata della seconda coppia deve essere uguale alla seconda coordinata della prima coppia]
$(2,2) \in \Re$ e $(2,2) \in \Re \Rightarrow (2,2) \in \Re$
[stesso ragionamento, come sopra]
La Transitiva vale

Conclusione: questa relazione è sia d'ordine che di equivalenza

Esercizio 2:
$A = \{1,2\}$ $\Re = \{(1,1), (2,1), (2,2)\}$

→ Riflessiva: Sì
→ Simmetrica: No la coppia $(1,2) \notin R$
→ Antisimmetrica: Sì esiste la coppia (2,1) ma manca la coppia (1,2)
→ Transitiva: Sì la coppia (1,1) si confronta con se stessa
la coppia (2,1) si confronta con (1,1) e ne risulta (2,1) che $\in \Re$
la coppia (2,2) si confronta con se stessa e con la coppia (2,1); in entrambi i casi ciò che risulta è [(2,2) e (2,1)] che $\in \Re$

Esercizio 3:

$A = \{1,2\}$ $\Re = \{(1,2), (2,1), (2,2)\}$

→ Riflessiva: No manca la coppia (1,1)
→ Simmetrica: Sì
→ Antisimmetrica: No esistono le coppie (2,1) e (1,2) con a e b $\neq$
→ Transitiva: No $(1,2) \in \Re$, e $(2,1) \in \Re$ ma $(1,1) \notin \Re$

L'insieme dei numeri naturali N {1,2,3,4,…n}

Su questo insieme sono definite due operazioni: somma e prodotto.
$(a+b)+c = a+(b+c)\ \forall a,b,c\in N \rightarrow$ proprietà associativa
$a+b = b+a\ \forall a,b\in N \rightarrow$ proprietà commutativa
$a\cdot 1 = 1\cdot a = a\ \forall a\in N \rightarrow$ 1 è elemento neutro rispetto al prodotto
$a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c\ \forall a,b,c\in N \rightarrow$ proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

Una relazione d'ordine è totale quando vale la legge di tricotomia: ovvero presi a,b si ha che o $a>b$ o $a<b$ oppure $a=b\ \forall a,b\in N$

$a \le b \Rightarrow a+c \le b+c\ \forall a,b,c\in N$
$\qquad a\cdot c \le b\cdot c\ \forall a,b,c\in N$

Nell'insieme dei naturali N vale il principio di induzione:
Sia M un sottoinsieme di N ($M \subset N$), il principio di induzione afferma che
Ipotesi 1) se $1\in M$ e
Ipotesi 2) se $n+1 \in M$ non appena $n\in M$
Allora Tesi $M = N$
Il principio di induzione equivalete alla seguente affermazione: ogni sottoinsieme non vuoto A di N ha un elemento a che è minore di ogni altro suo elemento.

Esempio:
Si prova che la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$,
cioè vale la formula: $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
Si denota con M l'insieme dei numeri naturali per cui vale tale dimostrazione:
Si dimostra per 1:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Supposto vero per $n\in M$ lo si dimostra per $n+1\in M$

$$1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n^2+n}{2}+(n+1) = \frac{n^2+n+2(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2n+2}{2} =$$
$$\frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Per il principio d'induzione si ha che $M = N$, pertanto la formula data vale per ogni $n\in N$

L'insieme dei numeri interi relativi Z{…-3,-2,-1,0,1,2,3…}

Valgono le precedenti proprietà
con l'aggiunta: $a+0 = 0+a = a\ \forall a,\in Z \rightarrow 0$ è il neutro della somma
la legge di tricotomia subisce delle variazioni:

$a \le b \Rightarrow a+c \le b+c\ \forall a,b,c\in Z$
$\qquad a\cdot c \le b\cdot c\ \forall a,b,c\in Z$ con $c \ge 0$

L'insieme dei razionali Q $\{\frac{m}{n}$, con $m,n \in Z$, con $n \neq 0\}$

Valgono tutte le precedenti proprietà ma non è possibile estrarre la radice di ogni numero

$\frac{m}{n} = \sqrt{2} \rightarrow$ impossibile!!!

Operazione in un insieme

Con il simbolo * si indica una operazione generica in maniera astratta in un generico insieme A

Una operazione si dice associativa se vale:
$(a*b)*c = a*(b*c)\ \forall a,b,c \in A$

Una operazione si dice commutativa se vale:
$a*b = b*a\ \forall a,b \in A$

Una elemento $e \in A$ è detto elemento neutro se:
$a*e = e*a = a\ \forall a \in A$

L'elemento $a \in A$ si dice invertibile se $\exists\ a' \in A$ e che si verifica che:
$a*a' = a'*a = e$

Gruppo

Si prenda un insieme A nel quale è definita una operazione *
(A,*) sarà gruppo se: 1) vale l'associativa
2) ha elemento neutro $e \in A$
3) ogni elemento è invertibile.
Se l'operazione * è anche commutativa allora (A,*) sarà detto gruppo commutativa abeliano

Un insieme A sul quale si definiscono due operazioni $(A,+,\bullet)$ si dice corpo commutativo se
1. rispetto alla somma è gruppo abeliano
2. rispetto al prodotto, tranne lo zero, è gruppo abeliano
3. valgono le proprietà distributive del prodotto rispetto alla somma.

$(A,+) \rightarrow$ Gruppo abeliano rispetto alla somma
$(A-\{0\},\bullet) \rightarrow$ Gruppo abeliano rispetto al prodotto
$a\cdot(b+c) = a\cdot b+a\cdot c\ \forall a,b,c \in A \rightarrow$ proprietà distributive del prodotto rispetto alla somma

Un campo dove si definisce una relazione d'ordine totale e nel quale valga:
$a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$
$a \leq b \Rightarrow a\cdot c \leq b\cdot c$
$0 \leq a \Rightarrow 0 \leq a+b$
$0 \leq a \Rightarrow 0 \leq a\cdot b$
si dice Campo totalmente Ordinato $(A,+,\bullet,\leq)$

Insieme dei reali R

È un campo totalmente ordinato e completo

Totalmente ordinato significa che in esso sono definite le operazioni di somma e prodotto e una relazione d'ordine.
R rispetto alla somma è un gruppo abeliano e l'elemento neutro è lo 0
R-{0} rispetto al prodotto è un gruppo abeliano e l'elemento neutro è 1
vale inoltre la proprietà distributiva $a \cdot (b+c) = a \cdot c + a \cdot b \ \forall a,b,c \in R$
presi due qualunque elementi di R, essi sono paragonabili quindi $\exists$ una relazione d'ordine totale

Definizioni:

Maggiorante $\rightarrow \emptyset \neq A \subset R$, $x \in R$ è maggiorante per A se risulta che $a \leq x \ \forall a \in A$
Un sottoinsieme di R che è dotato di maggiorante si dice limitato superiormente
Minorante $\rightarrow \emptyset \neq A \subset R$, $x \in R$ è minorante per A se risulta che $x \leq a \ \forall a \in A$
Un sottoinsieme di R che è dotato di minorante si dice limitato inferiormente
n.b. Il maggiorante/minorante non appartiene necessariamente al sottoinsieme ma in generale a R
Un sottoinsieme non vuoto di R si dice limitato quando possiede sia maggiorante che minorante

Estremo Superiore (supA) $\rightarrow$ 1) È un maggiorante
2) È il più piccolo dei maggioranti: y = maggiorante $\forall y \in R \Rightarrow x \leq y$

Estremo Inferiore (infA) $\rightarrow$ 1) È un minorante
2) È il più grande dei minoranti: y = minoranti $\forall y \in R \Rightarrow y \leq x$
Un maggiorante che appartiene all'insieme si chiama Massimo (max)
Un minorante che appartiene all'insieme si chiama Minimo (min)

Esempio: $A = \{1, 2, \sqrt{3}, 7\}$ 7 è max
1 è min
8 è un maggiorante

Assioma relativo all'estremo superiore [inferiore]
Ogni sottoinsieme non vuoto di R limitato superiormente [inferiormente] è dotato di estremo superiore [inferiore]
Questo assioma attribuisce la completezza all'insieme dei numeri reali R.

Proprietà di R

1) $a \cdot 0 = 0 \rightarrow a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0 + a - a = a \cdot 0 + a \cdot 1 - a = (a \cdot 0 + a \cdot 1) - a = a \cdot (0+1) - a = a \cdot (1) - a = a - a = 0$
sommando uno 0 il risultato non cambia $\rightarrow a \cdot 0 + 0 = 0$
un elemento a sommata al suo opposto da 0: $a+(-a)=0$; sostituendo $\rightarrow a \cdot 0 + a - a = 0$
un elemento a moltiplicato per 1 da se stesso: $a \cdot 1 = a$; sostituendo $\rightarrow a \cdot 0 + a \cdot 1 - a = 0$
per la proprietà associativa si ha $\rightarrow (a \cdot 0 + a \cdot 1) - a = 0$
per la distributiva si ha $\rightarrow a \cdot (0+1) - a = 0$
sommando 0 a 1 si ottiene 1 $\rightarrow a \cdot (1) - a = 0$
un elemento a moltiplicato per 1 da se stesso: $a \cdot 1 = a$; sostituendo $\rightarrow a - a = 0$ [c.v.d]

2) **legge di annullamento del prodotto**
$\forall a,b \in R \qquad a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a=0$ oppure $b=0$
Bisogna dimostrare la doppia implicazione:

$\Leftarrow$ Ipotesi $a=0$ o $b=0$;
Tesi $\rightarrow a \cdot b=0$
deriva direttamente dalla prima proprietà [se $b=0$ per ipotesi si ha che $a \cdot 0=0$]

$\Rightarrow$ Ipotesi $\rightarrow a \cdot b = 0$;
Tesi $\rightarrow a=0$ o $b=0$
si procede supponendo $a \neq 0 \Rightarrow b=0$; $b = b \cdot 1 = b(a \cdot a^{-1}) = (b \cdot a) \cdot a^{-1} = (a \cdot b) \cdot a^{-1} = 0 \cdot a^{-1} = 0$
un elemento b moltiplicato per 1 da se stesso: $b \cdot 1=b \rightarrow b = b \cdot 1$
un elemento a moltiplicato per il suo inverso da 1: $a \cdot a^{-1}=1$; sostituendo $\rightarrow b = b \cdot (a \cdot a^{-1})$
per la proprietà associativa $\rightarrow b = (b \cdot a) \cdot a^{-1}$
per la proprietà commutativa $\rightarrow b = (a \cdot b) \cdot a^{-1}$
per ipotesi $a \cdot b=0 \rightarrow b = 0 \cdot a^{1}$
per la proprietà 1) dimostrata prima $\rightarrow b=0$
quindi $b=0$

3) $a \cdot x = b \Rightarrow a \neq 0$

Ipotesi$\rightarrow a \cdot x =b$;
Tesi $\rightarrow a \neq 0$ [equazione di primo grado]

ammette una sola soluzione data da $x = b \cdot a^{-1}$
[è soluzione significa che se si sostituisce il valore di x nel prodotto si ottiene un'identità]
sostituendo il valore di x $\rightarrow a \cdot b \cdot a^{-1} = b$
per la commutativa $\rightarrow b \cdot a \cdot a^{-1} = b$
per l'associativa $\rightarrow b \cdot (a \cdot a^{-1}) = b$
un elemento a moltiplicato per il suo inverso da 1: $a \cdot a^{-1}=1$; sostituendo $\rightarrow b \cdot (1) = b$
moltiplicando un elemento b per 1 il risultato sarà se stesso $\rightarrow b = b$

si dimostra che realmente $x = b \cdot a^{-1}$
moltiplicando x per 1 il risultato sarà se stesso $\rightarrow x \cdot 1 = b \cdot a^{-1}$
un elemento a moltiplicato per il suo inverso da 1: $a \cdot a^{-1}=1$; sostituendo $\rightarrow x \cdot (a \cdot a^{-1}) = b \cdot a^{-1}$
per l'associativa $\rightarrow (x \cdot a) \cdot a^{-1} = b \cdot a^{-1}$
per la commutativa $\rightarrow (a \cdot x) \cdot a^{-1} = b \cdot a^{-1}$
per ipotesi $a \cdot x = b \rightarrow b \cdot a^{-1} = b \cdot a^{-1}$

4) Valore Assoluto: è un numero non negativo (≥ 0) definito nel seguente modo:
$$x \in R \quad |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$
Il valore assoluto gode di alcune proprietà:
- $|x| = |-x|$ infatti:
  $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$
  $-x<0 \Rightarrow |-x| = -(-x) = x$

es: $-3<0$: $|-3| = ?\rightarrow$ essendo -3 minore di 0 il suo valore assoluto sarà il l'opposto di -3 che sarà uguale a $-(-3) = 3$

- $x \leq |x|$
  se $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$
  se $x<0$ $|x|$ essendo un numero non negativo $|x|$ sarà $> x$
  $-x \leq |x|$ segue dal fatto che $|x| = |-x|$

- $|x+y| \leq |x|+|y|$
  si sa che $x \leq |x|$ di conseguenza $y \leq |y|$
  e si sa anche che $-x \leq |-x|$ di conseguenza $-y \leq |-y|$
  Sommando membro a membro si ottiene:
  $x+y \leq |x|+|y|$ e anche $-(x+y) \leq |x|+|y|$
  seguendo le stesse regole si definisce $|x+y| = \begin{cases} (x+y) & se\ x+y \geq 0 \\ -(x+y) & se\ x+y < 0 \end{cases}$
  quindi $|x+y| \leq |x|+|y|$

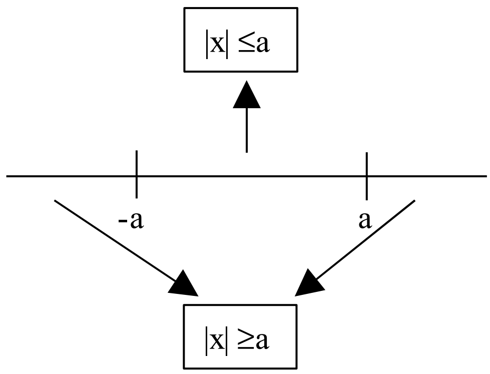
- $||x|-|y|| \leq |x-y|$
  $|x| = |(x-y)+y|$ dalla proprietà precedente segue che $|x| \leq |x-y|+|y| \Rightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$
  medesimo ragionamento si ha per $|y|$
  $|y| = |(y-x)+x|$ dalla proprietà precedente segue che $|y| \leq |y-x|+|x| \Rightarrow |y|-|x| \leq |y-x|$
  Dal momento che $|x| = |-x|$ si ha che $|x-y| = |-x+y|$
  $||x-y|| = \begin{cases} |x|-|y| & se\ |x|-|y| \geq 0 \\ |y|-|x| & se\ |x|-|y| < 0 \end{cases}$

- $|x\cdot y| = |x|\cdot|y|$
  se $x,y > 0 \rightarrow |x\cdot y| = x\cdot y = |x|\cdot|y|$
  se $x,y < 0 \rightarrow |x\cdot y| = (-x)\cdot(-y) = |x|\cdot|y|$
  se $x>0$ e $y<0 \rightarrow |x\cdot y| = (x)\cdot(-y) = |x|\cdot|y|$

  Se $x<0$ il suo opposto $-x>0$ di conseguenza $-x$ è un numero non negativo quindi $-x = |x|$

- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
  $\Rightarrow$ Ipotesi $|x|$
  Tesi $-a \leq x \leq a$
  se $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$ che per ipotesi è $\leq a \Rightarrow x \leq a$
  se $x < 0 \rightarrow |x| = -x$ che per ipotesi è $\leq a \Rightarrow -x \leq a \rightarrow$ moltiplicando per -1 si ha: $x \geq -a$
  quindi $x \geq -a$ e $x \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$
  $\Leftarrow$ Ipotesi $-a \leq x \leq a$
  Tesi $|x| \leq a$
  se $x \geq 0 \rightarrow |x| = x$ che per ipotesi è $\leq a \Rightarrow |x| \leq a$
  se $x < 0 \rightarrow |x| = -x$ che è $\leq a$ [poiché per ipotesi $x \geq -a$] $\Rightarrow |x| \leq a$

- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ o $x \geq a$
  dalla proprietà precedente segue che se $|x| \leq a$ allora $-a \leq x \leq a$ quindi x assumerà valori interni tra $-a$ e a
  quindi il momento che $|x| \geq a$ x assumerà valori esterni tra $-a$ e a



TEOREMA: N non è limitato superiormente → non ha MAGGIORANTE

Si supponga per assurda che esiste un supN = s. Deve allora valere la relazione $n \le s \ \forall n \in N$
Questa disuguaglianza deve essere vera per ogni n quindi anche per n+1
ma la disuguaglianza $n+1 \le s$ comporterebbe $n \le s-1 \ \forall n \in N$
si troverebbe così un maggiorante più piccolo di s che è impossibile per la definizione di sup
Quindi si cade nell'assurdo

Es:

Sia $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\}$

Al variare di n nei naturali si possono elencare gli elementi dell'insieme

$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \right\}$

Questo insieme ammette come maggiorante 1. Inoltre $1 \in A$ quindi è max ed estremo superiore
Tutti gli elementi sono >0; 0 è un minorante, non è min perché $\notin$ all'insieme A
È infA? È minorante, ma è il più grande dei minoranti
Sia s un minorante più grande s>0 allora:

$s \le \frac{1}{n} \ \forall n \in N$ che implicherebbe $n \le \frac{1}{s} \ \forall n \in N$ cadendo in contraddizione,
quindi $s \le 0$ e 0 è il più grande dei minoranti quindi è infA.

Principio di Archimede

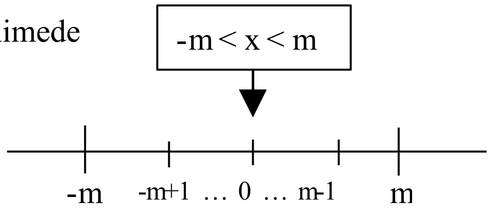
$\forall x \in R \ \exists n \in Z$ tale che $n > x$
Si procede per assurdo: in questo caso $\exists \bar{x}$ tale che $\forall n \in Z \Rightarrow n \le \bar{x}$
Ma se tale disuguaglianza fosse vera, Z risulterebbe limitato superiormente che non può essere vero

Dal principio di Archimede segue che:
$\forall x \in R \ \exists n \in Z$ tale che $n \le x < n+1$
tale intero n si indica con [x] e si chiama parte intera di x

es:
$x = 1{,}2 \rightarrow [x] = 1$
$x = -2{,}3 \rightarrow [x] = -3$

dimostrazione:
$\forall x \in R\ \exists n \in Z$ tale che $n \le x < n+1$

$|x| \in R$ esiste sicuramente un $m > |x|$ per il principio di Archimede
$|x|$ è un numero ≥ 0 quindi m è un naturale
Da $m > |x|$ segue che $-m < x < m$



x si può confrontare con ognuno degli elementi che stanno tra –m ed m. Nel confronto ad un certo punto si troverà un numero che sarà >x. Questo numero lo si chiamerà n+1 mentre il numero precedente lo si chiamerà n. La parte intera di x è n.

Insieme Denso

Sia $\varnothing = A \subset R$
Dire che A è denso in R significa che $\forall x,y \in R \rightarrow x<y\ \ \exists r \in Q$ con $x<r<y$ [r è un numero razionale]

Si dimostra che Q è denso in R.

Siano presi a,b con a<b.
Se $a<b \rightarrow b-a>0 \Rightarrow$ esiste l'inverso che è ancora >0
Quindi $(b-a)^{-1}>0$
Per il principio di Archimede $\exists m \in N$: $m>(b-a)^{-1}$
$m > (b-a)^{-1} = m > \dfrac{1}{b-a} \Rightarrow \dfrac{1}{m} < b-a$
Si considera il numero $m \cdot a \in R$ e di questo se ne considera la parte intera n per cui vale $n \le m \cdot a < n+1$
Dividendo tutta la disuguaglianza per m si ottiene: $\dfrac{n}{m} \le a < \dfrac{n+1}{m}$

Scomponendo $\dfrac{n+1}{m}$ si ha: $\dfrac{n+1}{m} = \dfrac{n}{m} + \dfrac{1}{m}$

Poiché $\dfrac{1}{m} < b-a$ si può creare la disequazione: $\dfrac{n}{m} + \dfrac{1}{m} < \dfrac{n}{m} + (b-a)$

Poiché $\dfrac{n}{m} \le a$, sommando a alla differenza (b-a) si otterrà

la disuaglianza: $\dfrac{n}{m} + \dfrac{1}{m} < \dfrac{n}{m} + (b-a) \le a+(b-a)$

Per le proprietà commutativa e associativa $a+(b-a) = (a-a)+b = b$

Ricapitolando: $\dfrac{n}{m} \le a < \dfrac{n+1}{m} < b$; $\dfrac{n+1}{m} \in Q$,

Quindi tra due numeri reali a,b esiste un numero razionale: $a \le \dfrac{n+1}{m} < b$

Potenze di base reale ed esponente naturale

$x\in R$, $n\in N$ $\quad x^n = \begin{cases} x & se\ n = 1 \\ x^{n-1}\cdot x & se\ n > 1 \end{cases}$ (definizione per ricorsione)

Proprietà:

$x^n\cdot y^n = (x\cdot y)^n \quad \forall x,y\in R,\ n\in N$

$x^n\cdot x^m = x^{n+m} \quad \forall x\in R,\ n,m\in N$

$(x^n)^m = x^{n\cdot m} \quad \forall x\in R,\ n,m\in N$

$0<x<y \Rightarrow x^n<y^n$

$0<x<1, n<m \quad \Rightarrow x^m<x^n$

$1<x, \quad n<m \quad \Rightarrow x^n<x^m$

se $x\neq 0$ ed n pari $\Rightarrow x^n > 0$

se $x\neq 0$ ed n dispari $\Rightarrow$ x e x^n hanno lo stesso segno

Dimostrazione:

$x^n\cdot y^n = (x\cdot y)^n$ dimostrazione per induzione

si verifica per n=1 : $x^1\cdot y^1 = (x\cdot y)^1$ è vera!

Si dimostra per n+1; supposta vera per l'eguaglianza di partenza [→ ipotesi induttiva]

$x^{n+1}\cdot y^{n+1} = (x\cdot y)^{n+1}$

$x^{n+1} = x^n\cdot x \qquad y^{n+1} = y^n\cdot y$

sostituendo: $x^{n+1}\cdot y^{n+1} = (x^n\cdot x)\cdot(y^n\cdot y)$

per la proprietà distributiva ed associativa: $x^{n+1}\cdot y^{n+1} = (x^n\cdot y^n)\cdot(x\cdot y)$

sapendo che $x^n\cdot y^n = (x\cdot y)^n$ si ha: $x^{n+1}\cdot y^{n+1} = (x\cdot y)^n\cdot(x\cdot y)$

svolgendo i calcoli: $x^{n+1}\cdot y^{n+1} = (x\cdot y)^{n+1}$

ricapitolando: $x^{n+1}\cdot y^{n+1} = (x^n\cdot x)\cdot(y^n\cdot y) = (x^n\cdot y^n)\cdot(x\cdot y) = (x\cdot y)^n\cdot(x\cdot y) = (x\cdot y)^{n+1}$

Dimostrazione :

$(x^n)^m = x^{n\cdot m}$ si fissa m e si dimostra per induzione su n

se n=1, $\quad (x^1)^m = x^{1\cdot m} = x^m$

si suppone vera l'uguaglianza si dimostra che $(x^{n+1})^m = x^{(n+1)\cdot m}$

dal momento che $x^{n+1} = x^n\cdot x$

sostituendo si ha: $(x^{n+1})^m = (x^n\cdot x)^m$

per la proprietà precedente si ha: $(x^{n+1})^m = (x^n\cdot x)^m \longrightarrow x^{n\cdot m}\cdot x^m$

operando con gli esponenti si ha: $(x^{n+1})^m = x^{n\cdot m+m}$

mettendo m in evidenza si ha: $(x^{n+1})^m = x^{(n+1)\cdot m}$

Dimostrazione:

$0<x<y \Rightarrow x^n<y^n$

se n=1 allora la disequazione è vera: $x<y$

si suppone vera per n e si verifica per n+1

$x^{n+1}<y^{n+1}$

$x^{n+1} = x^n\cdot x$

dal momento che $x^n < y^n$ è vera la disuguaglianza: $x^n \cdot x<y^n \cdot x$
poiché per ipotesi $x<y$ anche la disequazione $y^n \cdot x<y^n \cdot y$ è vera, e si avrà: $x^n \cdot x<y^n \cdot x<y^n \cdot y$
ma $y^n \cdot y$ è uguale a y^{n+1} quindi: $x^n \cdot x<y^n \cdot x<y^{n+1}$
utilizzando l'uguaglianza $x^{n+1} = x^n \cdot x$ si otterrà la tesi infatti $x^{n+1}<y^n \cdot x<y^{n+1}$
e in particolare $x^{n+1}<y^{n+1}$

Dimostrazione:
$0<x<1;\ n<m \Rightarrow x^m<x^n$
Se $n<m$ allora $m-n>0$ con $m-n\in N$
Elevando l'ipotesi per m-n si ha: $0^{m-n}<x^{m-n}<1^{m-n} = x^{m-n}<1$
Moltiplicando ambo i membri per x^n si ottiene: $x^{m-n} \cdot x^n < x^n$
Operando a primo membro si ottiene: $x^{m-n+n} < x^n$
Semplificando: $x^m < x^n$ c.v.d.

Dimostrazione:
$x\neq 0$, n = numero pari $\Rightarrow x^n >0$
n = numero pari, significa che è della forma $2 \cdot m$
$x^n = x^{2 \cdot m}$
per la terza proprietà si ha: $x^{2 \cdot m} = (x^m)^2$
quindi $x^n = x^{2 \cdot m} = (x^m)^2 >0$ poiché qualunque numero elevato al quadrato è positivo

Dimostrazione:
$x\neq 0$, n = numero dispari $\Rightarrow$ x e x^n hanno lo stesso segno cioè $x \cdot x^n >0$
$x \cdot x^n = x^{n+1}$ se n è dispari $\Rightarrow$ n+1 è pari

Potenze di base reale ed esponente intero relativo

$$x\in R,\ n\in Z \qquad x^n = \begin{cases} x^n & n\in N \\ 1 & n = 0 \\ (x^{-1})^{-n} & -n\in N \end{cases}$$

proprietà:
Sono le stesse che risultano valide per l'insieme N tranne la proprietà $0<x<y \Rightarrow x^n<y^n$ poiché se n=0 $x^0<y^0 = 1<1$ che è impossibile.

Alle precedenti proprietà ne vanno aggiunte altre due:
$x^n:y^n = (x:y)^n$
$x^n:x^m = x^{n-m}$

es: $x^{-2} = (x^{-1})^2$ $-2\in Z \Rightarrow -(-2) = 2\in N$

Radice n-sima di un numero reale

Ogni numero reale positivo ammette una radice n-sima reale positiva. Una conseguenza di ciò deriva dal fatto che $R-Q \neq 0 \rightarrow$ ovvero esistono dei reali che non sono razionali
Dati $x,y\in R$, $n\in N$ si dirà che x è radice n-sima di y se $x^n = y$

Teorema (solo enunciato)
Ogni numero reale positivo y ammette, per ogni n naturale, una e una sola radice n-sima positiva; in formula: $\forall y>0$ e $\forall n>0$ $\exists!\ x>0 : x^n = y$

La radice n-sima di y si denota con $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$ e prende il nome di radice n-sima aritmetica di y

Si noti che:

Se n è pari e y>0 allora y ha due radici n-sime date da $\pm\sqrt[n]{y}$
Se n è dispari e y>0 la radice è una sola ed è quella aritmetica
Se y =0 la radice è una sola ed è $\sqrt[n]{0} = 0$ $\forall n\in N$
Se y<0 ed n è pari non ci sono radici
Se y<0 ed n è dispari esiste una sola radice data da $x = -\sqrt[n]{y}$

Proprietà (senza dimostrazione)
$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$ se 0<x<y con $n\in N$
$\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x\cdot y}$ con $n\in N$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}$ con $n\in N$
$(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$ con $n\in N$ e con $m\in Z$

Esercizio:
$\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}, con\ n\in\ N\right\}$ termine generico dell'insieme
Razionalizzazione: si moltiplica e si divide il termine generale per $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ → nuovo termine generale dell'insieme (equivalente al primo)

$$\text{Insieme} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}+1}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}, \dots\right\}$$

$\frac{1}{\sqrt{n}+1} > \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ è vera $\forall n$ quindi:

$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ è maggiorante dell'insieme e poiché gli appartiene è il max ed è anche estremo superiore

0 è un minorante ma non appartiene all'insieme quindi non è min.
Per essere inf deve essere il più grande dei minoranti
Se s è un minorante deve essere s≤0
Si dimostra per assurdo quindi si suppone s>0

0<s $s \le \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow s < \frac{1}{\sqrt{n}}\ \forall n \Rightarrow n < \frac{1}{s^2}\ \forall n$ → ma questo porterebbe a dire che N è limitato inferiormente che è assurdo

Quindi 0 è inf dell'insieme

Esercizio 2

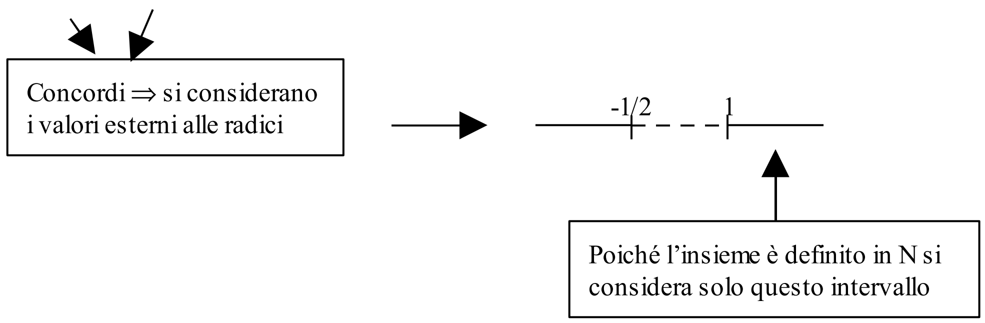
$$\left\{ \frac{n^2}{n+1}, con\ n \in N \right\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \ldots, \frac{n^2}{n+1}, \ldots \right\}$$

$\frac{1}{2} \leq \frac{n^2}{n+1}, \quad \forall\, n$ poiché $n+1 \leq 2n^2 \Rightarrow 2n^2-n-1 > 0$

si risolve l'equazione associata:

$2n^2-n-1=0 \qquad \Delta = 1+8 = 9 \qquad n = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2};\ 1$

$2n^2-n-1>0$



Quindi $\frac{1}{2}$ è minimo. L'insieme è limitato inferiormente

L'insieme non è limitato superiormente: si dimostra per assurdo

Si suppone l'esistenza di un s maggiorante.

s maggiorante vuol dire $\frac{n^2}{n+1} \leq s, \quad \forall\, n$

presi valori minori di $\frac{n^2}{n+1}$ si ha: $\quad \frac{n}{2} = \frac{n^2}{n+n} \leq \frac{n^2}{n+1} \rightarrow \frac{n}{2} \leq \frac{n^2}{n+1} \leq s$

ciò implica: $\frac{n}{2} \leq s, \quad \forall\, n$

cioè: $\quad n \leq 2s \ \ \forall n \rightarrow$ ma ciò è impossibile perché vorrebbe dire che N è limitato superiormente

Potenza di base reale ed esponente razionale

$x \in R$, $x>0$; $r \in Q$ $r = \dfrac{m}{n}$ con $n \in N$ $\rightarrow$ $x^r = \sqrt[n]{x^m}$

Le proprietà sono le stesse che valgono per la potenza di base reale ed esponente intero relativo

Potenza di base reale ed esponente reale

$a \in R$, $a>0$ e $x \in R$ $\rightarrow$ a^x è così definito:

se $a>1 \rightarrow a^x = \sup\{a^r : r \in Q,\ r<x\}$

la definizione è valida poiché Q è denso in R quindi presi due numeri reali ne esiste uno razionale compreso fra essi: $x-1<s<x$. L'elemento a^s appartiene all'insieme che di conseguenza è $\neq \varnothing$.

Invece per il principio di Archimede $\forall x \in R \Rightarrow n>x$ Vale allora $r<x<n \Rightarrow a^r<a^x$ quindi l'insieme è limitato superiormente perché a^x è un maggiorante perciò esiste il sup dell'insieme.

se $a=1 \rightarrow a^x = 1$

se $0<a<1 \rightarrow a^x = [(a^{-1})^x]^{-1}$.

Le proprietà sono le stesse che valgono per le altre potenze.

Logaritmo

$\forall\ y>0, \forall a>0,\ a\neq 1\ \exists!\ x:\ a^x = y$

$x = \log_a y$ [$\rightarrow$ a = base; y = argomento]

x è il logaritmo in base a di y

Il logaritmo è l'esponente che si deve dare alla base per ottenere il numero.

Proprietà: (senza dimostrazioni)

1) $x<y, 1<a \Rightarrow \log_a x < \log_a y$
2) $x<y, 0<a<1 \Rightarrow \log_a y < \log_a x$
3) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$
4) $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$
5) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ $\rightarrow$ regola per il cambiamento di base; dove $b>0$, $b\neq 1$

Infinito

$\pm\infty \rightarrow$ infinito [non sono due numeri ma due simboli]

l'infinito è così definito: $-\infty < x < +\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$+\infty \cdot a = +\infty$ se $a>0$

$+\infty \cdot a = -\infty$ se $a<0$

$\left.\begin{matrix} +\infty \cdot (-\infty) \\ +\infty \cdot 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ forme indeterminate

Insieme esteso dei numeri reali **(o retta ampliata)**

$\widetilde{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ [~ → tilde]

Intervalli **(è una particolare classe di sottoinsiemi di R)**

Intervalli imitati

$a,b \in R$, con $a<b$

$[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ → intervallo chiuso di estremi a,b → a,b sono minimo e massimo

$]a,b[= \{x \in R : a < x < b\}$ → intervallo aperto → sono inf e sup

$[a,b[= \{x \in R : a \leq x < b\}$ → intervallo chiuso a sx e aperto a dx → a è min, b è sup

$]a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$ → intervallo aperto a sx e chiuso a dx → a è inf e b è max

Intervalli non limitati (o illimitati)

$[a, +\infty[= \{x \in R : a \leq x\}$ → intervallo chiuso a sx, non limitato superiormente

$]a, +\infty[= \{x \in R : a < x\}$ → intervallo aperto a sx, non limitato superiormente

$]-\infty, a] = \{x \in R : x \leq a\}$ → intervallo chiuso a dx, non limitato inferiormente

$]-\infty, a[= \{x \in R : x < a\}$ → intervallo aperto a dx, non limitato inferiormente

Funzione

A,B $f: A \rightarrow B$

f è una funzione di A in B, cioè una legge che ad un elemento di A associa un ben determinato elemento di B

$x \rightarrow f_{(x)}$ $f_{(x)}$ = corrispondente o immagine di x tramite la f

A = dominio B = insieme di arrivo

Codominio di f = insieme dei valori che la funzione assume cioè: $\text{codf} = \{y \in B : \exists x \in A \text{ con } f_{(x)} = y\}$

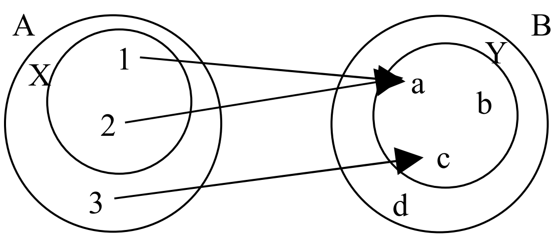
grafico della funzione → $gr(f) = \{(x, f_{(x)}): x \in A\}$. È un sottoinsieme del prodotto cartesiano AxB

se $A,B \subset R$ il grafico si individua con i punti di un piano cartesiano, le cui coordinate sono le coppie dell'insieme gr(f)

Data $f: A \rightarrow B$

$X \subset A$ $f_{(X)} = \{f_{(x)} \in B : x \in X\}$ → Immagine diretta di X tramite la f

$Y \subset B$ $f^{-1}_{(Y)} = \{x \in A : f_{(x)} \in Y\}$ → Immagine inversa



$X \subset A$ $f_{(X)} = \{a\}$

$Y \subset B$ $f^{-1}_{(Y)} = \{1,2,3\} = \{A\}$

Data f: $A \rightarrow B$
f è surgettiva quando codf = B
f è iniettiva quando ad elementi distinti di A corrispondono immagini diverse

$x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_{(x1)} \neq f_{(x2)}$.

f è biettiva quando è sia iniettiva che surgettiva

Se f: $A \rightarrow B$ è biettiva ad f si può associare f^{-1}: $B \rightarrow A$ detta funzione inversa. Questa funzione ad ogni $y \in B$ associa un solo $x \in A$ la cui immagine è y: $f^{-1}_{(y)} = x$

Esempio 1:
f: $Z \rightarrow Z$ $f_{(x)} = x+3$ → legge che definisce la funzione

→ È surgettiva?

Bisogna fare vedere che $\forall y \in Z \ \exists x \in Z : f_{(x)} = y$
$x+3 = y$;
$x = y-3$;
$y-3 \in Z$ quindi f è surgettiva (codf = Z)

→ È iniettiva?

Si deve fare vedere che se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f_{(x1)} \neq f_{(x2)}$
$f_{(x1)} = x_1+3$
$f_{(x2)} = x_2+3$
dal momento che $x_1 \neq x_2$ anche $x_1+3 \neq x_2+3$ quindi f è iniettiva

→ È biettiva?

Sì $\Rightarrow \exists f^{-1}$ data da $f^{-1}_{(y)} = y-3$

Esempio 2:
f: $N \rightarrow Z$ $f_{(x)} = x+3$

la f è ancora iniettiva
la f non è surgettiva $x+3 = y$ codf $\neq Z$
x+3 è sempre positiva. Se per esempio y = -3 non esiste il corrispondente in N
Se y = 3 viene x = 0, ma $o \notin N$

Esempio 3:
f: $Z \rightarrow Z$ $f_{(x)} = x^2$

f non è iniettiva perché a due elementi distinti di Z non corrispondono elementi distinti

$-3 \neq 3 \rightarrow 9 = 9$

f non è surgettiva:

$x^2 = y$ se per esempio y = 2, $x = \sqrt{2} \notin Z$

Segno del trinomio

$ax^2+bx+c=0 \quad a \neq 0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta > 0 \rightarrow \exists x_1, x_2 \in R$, con $x_1 \neq x_2$ dati dalla formula: $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = 0 \rightarrow \exists x_1, x_2 \in R$, con $x_1 = x_2$ dati dalla formula: $\dfrac{-b}{2a}$ [le due soluzioni coincidono]

$\Delta < 0 \rightarrow$ non esistono soluzioni

$ax^2+bx+c=0$

mettendo a in evidenza si ha: $a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = 0$

aggiungendo e sottraendo $\dfrac{b^2}{4a^2}$ il risultato rimane invariato: $a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} + \dfrac{b^2}{4a^2} - \dfrac{b^2}{4a^2}\right) = 0$

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2}$ si può ridurre al quadrato di binomio $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

mentre sommando $\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2}$ ottenendo: $-\dfrac{\Delta}{4a^2}$

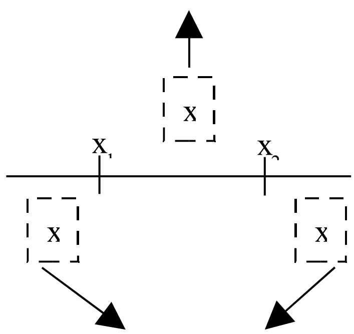
quindi: $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \rightarrow$ trinomio scomposto

$\Delta > 0 \rightarrow \quad a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$ si può scrivere come: $a\left(x + \underbrace{\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}}_{}\right)\left(x + \underbrace{\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}}_{}\right) = 0$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

sostituendo: $a(x-x_1)(x-x_2) \leftarrow$ nuova forma del trinomio.

se $x_1 < x < x_2$ il segno del trinomio è discorde $\rightarrow$ Infatti si ha $x-x_1>0$ e $x-x_2<0$; quindi il prodotto avrà segno opposto rispetto al



se $x<x_1$ e $x>x_2$ il segno del trinomio è concorde

$$\begin{cases} se\ x < x_1 \Rightarrow \quad x - x_1 < 0, \quad x - x_2 < 0 \\ se\ x > x_2 \Rightarrow \quad x - x_1 > 0, \quad x - x_2 > 0 \end{cases}$$

quindi il prodotto sarà >0 e avrà segno uguale rispetto al segno

$$\Delta = 0 \rightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0 \rightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

il trinomio ha sempre segno di a eccetto nel caso in cui $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ poiché si annullerebbe tutto

$$\Delta < 0 \rightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$$ si ha che $\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ è sempre e comunque una quantità >0 quindi il trinomio concorda col segno di a

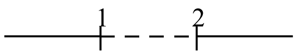
Esempio1
$x^2+x+1=0 \qquad \Delta = 1-4<0$
a è positivo quindi il trinomio è sempre >0

Esempio2
$x^2+x+1<0$ il trinomio non è mai verificato

Esempio3
$x^2-4x+4>0$ quadrato di binomio: $(x-2)^2>0$ valida sempre per $x \neq 2$

Esempio4
$x^2-3x+2>0$
si considera l'equazione associata $x^2-3x+2=0 \qquad \Delta = 9-8=1$

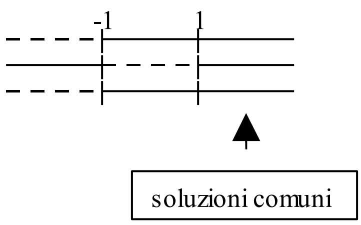
$$x=\frac{3\pm 1}{2}= \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$



$x<1 \quad x>2$

<u>*Disequazioni irrazionali*</u>

1) $\sqrt{x^2-1}<x+1$ 2) $\sqrt{x^2+7}>x+3$
sono due disequazioni irrazionali



1) $\sqrt{x^2-1}<x+1$
le soluzioni della disequazione irrazionale sono quelle di questo sistema:

$$\begin{cases} x^2-1\geq 0 & \rightarrow \text{Per la realtà della radice} \\ x+1>0 & \rightarrow \text{Perché non può esistere un numero negativo maggiore di un numero positivo} \\ x^2-1<(x+1)^2 & \rightarrow \text{Per la proprietà delle potenze} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 & x > -1 \\ x + 1 > 0 & x \leq -1 \quad x \geq +1 \\ x^2 - 1 < (x+1)^2 & x^2 - 1 < x^2 + 2 + 1 \Rightarrow \quad 2x > -2 \Rightarrow \quad x > -1 \end{cases} \qquad\qquad x \geq 1$$

2) $\sqrt{x^2 + 7} > x + 3$

$$\begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 + 7 \geq 0 \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 + 7 < 0 \end{cases}$$

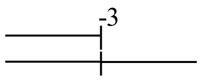
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

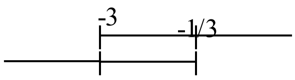
$$\begin{cases} x < -3 \\ x^2 \leq -7 \rightarrow \textit{sempre} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 7 > x^2 + 6x + 9 \Rightarrow \quad 6x < -2 \Rightarrow \quad x < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$x < -3 \qquad\qquad\qquad -3 \leq x \leq -\frac{1}{3}$$

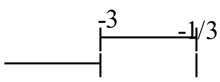
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$





$$\downarrow$$

dall’unione dei due sistemi: $\rightarrow$

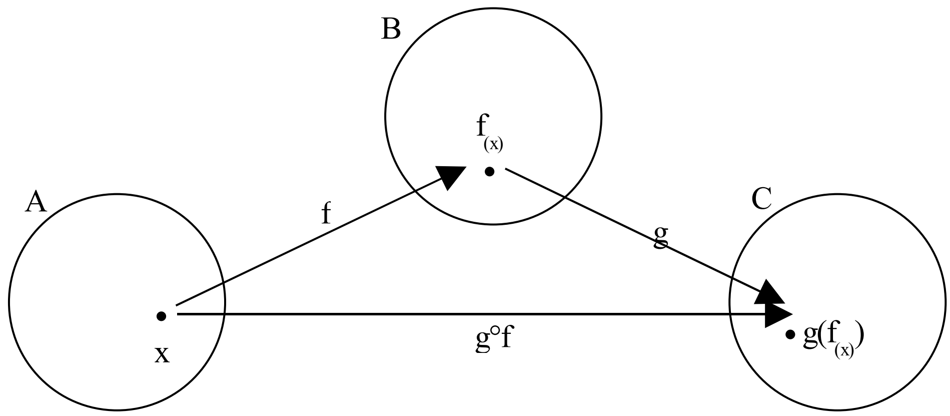


$\rightarrow \quad x \leq -\frac{1}{3}$

Funzione Composta

$f: A \to B \qquad g: B \to C$

$g°f$ = f composta con $g: A \to C$



$g°f : x \longrightarrow g(f_{(x)})$

Per poter parlare di funzione composta l'insieme di arrivo di una deve coincidere con il dominio dell'altra

In generale $g°f \neq f°g$

$\longrightarrow$ Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$

Date f,g surgettive $\Rightarrow$ $g°f$ surgettiva, cioè

$\forall z \in C \;\; \exists x \in A : (g°f)(x) = g(f_{(x)}) = z \longrightarrow$ il codominio

Si parte dall'ipotesi che g è surgettiva cioè

$\forall z \in C \;\; \exists y \in B : g(y) = z$

Sempre per ipotesi f è surgettiva ; quindi

$\forall y \in B \;\; \exists x \in A : f(x) = y$

$g(y) = z$ e $f(x) = y \longrightarrow$ sostituendo y si ha: $\Rightarrow g(f(x)) = z$

$\longrightarrow$ Siano $f: A \to B$ e $g: B \to C$

Date f,g iniettiva $\Rightarrow$ $g°f$ iniettiva, cioè

f iniettiva $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

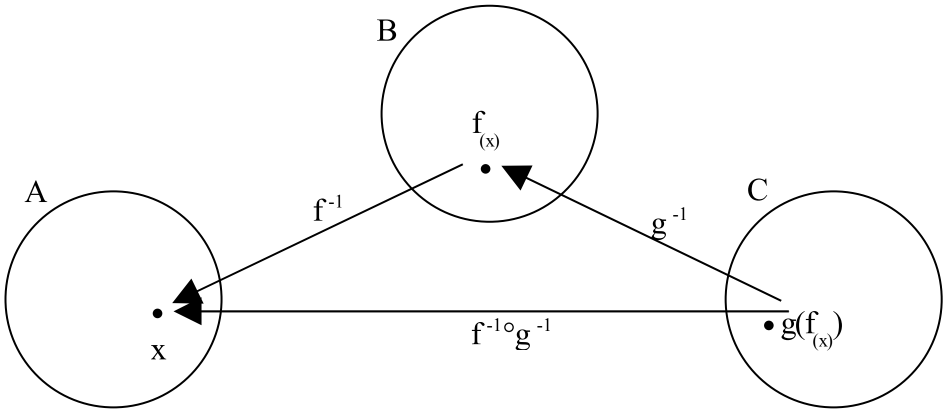
g iniettiva $\Rightarrow \forall f(x_1), f(x_2) \in B$ con $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$

ma $g(f(x_1)) = g°f(x_1)$

e $g(f(x_2)) = g°f(x_2)$

quindi $g°f(x_1) \neq g°f(x_2)$

$\longrightarrow$ Se $g°f$ è biettiva $\Rightarrow \exists$ l'inversa $(g°f)^{-1}$



definita come: $(g°f)^{-1} = f^{-1}°g^{-1}$

Esempio:
f: R→R g: R→R
$f(x) = x+1$ $g(x) = x^2$

Dominio e insieme d'arrivo coincidono quindi si possono considerare entrambe le funzioni composte g°f e f°g
$g°f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$
$f°g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1$ $g°f \neq f°g$

Funzione reale di una variabile reale è f: A→R con A⊂R

Esempio:
$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ determinare il campo di esistenza della funzione (l'insieme di definizione della funzione)

campo di esistenza → $x^2-1 \geq 0$
$x^2-1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow x \leq -1 \quad x \geq 1$ [campo di esistenza]

$f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$

per esistere il campo di esistenza il denominatore deve essere ≠0 quindi:
campo di esistenza: $x \neq 0$

$f(x) = \log(x^2-1)$

l'argomento del logaritmo deve essere sempre >0 quindi
campo di esistenza $x^2-1>0 \Rightarrow x>1, \quad x<-1$

<u>Funzione limitata superiormente</u>
Lo è quando il suo codominio è limitato superiormente
<u>Funzione limitata inferiormente</u>
Quando il codf è limitato inferiormente
<u>Funzione limitata</u>
Quando il codf è limitato sia superiormente che inferiormente

Se il codf è limitato superiormente l'estremo superiore si chiama estremo superiore della funzione supf

Se $\exists$ max del codf esso è il max della funzione maxf

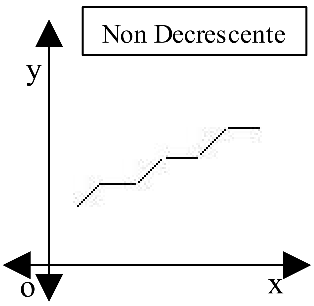
Stessa cosa dicasi per inf e min

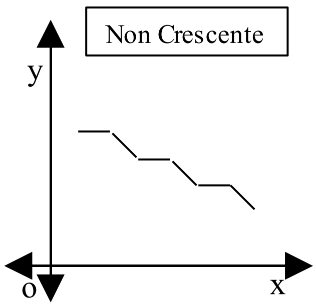
Il punto di max di una funzione è il punto in cui la funzione assume valore massimo
Il punto di min di una funzione è il punto in cui la funzione assume valore minimo

Funzioni Monotone

f: $A \to R$
f non decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
f non crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Una f che è non decrescente o non crescente si dice monotona



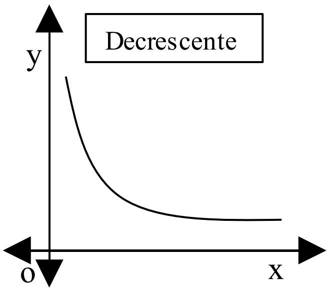


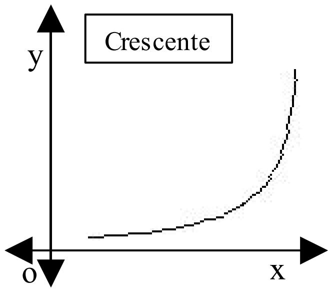
$f(x) = k \to$ funzione costante $\to$ il codominio ha un solo punto

Funzioni Strettamente Monotone

f: $A \to R$
f decrescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
f crescente se $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Una f crescente o decrescente è strettamente monotona
N.b. Vale che una funzione strettamente monotone è sicuramente monotona
[una funzione crescente è anche una funzione non decrescente]





Esempio:

f: $R_+ \rightarrow R$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$

Questa f è una funzione strettamente monotona, è decrescente; per cui deve valere che:

$\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{x_1},\ f(x_2) = \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Esempio:

f: $R \rightarrow R$ $\quad f(x) = x+3 \rightarrow$ È crescente, quindi $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow x_1+3 < x_2+3 \Rightarrow f(x_1) = x_1+3,\ f(x_2) = x_2+3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Successioni

Tra le funzioni quelle con domino N hanno un ruolo importante; esse sono infatti le successioni.

f: $N \rightarrow R$ = successioni

$f(n) = a_n$ $\quad$ la successione si indica con (a_n) oppure con $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$

Successioni monotone

(a_n) non decrescente se $\forall n \in N$ risulta che $a_n \leq a_{n+1}$

(a_n) non crescente se $\forall n \in N$ risulta che $a_n \geq a_{n+1}$

Esempio: $\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots\right)$ è non crescente

Esempio: $(1, 1, 2, 2, \ldots)$ è non decrescente

Successioni strettamente monotone

(a_n) decrescente se $\forall n \in N$ risulta che $a_n > a_{n+1}$

(a_n) crescente se $\forall n \in N$ risulta che $a_n < a_{n+1}$

Esempio: $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ è crescente vale a dire che: $\frac{n-1}{n} < \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ $\quad \forall n \in N$

$(n-1)(n+1) < n^2$ è crescente poiché svolgendo il prodotto si ha: $(n^2-1) < n^2$ $\forall n \in N$

Esempio: $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ è decrescente vale a dire che $\frac{n+1}{n} > \frac{n+1+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$ $\forall n \in N$

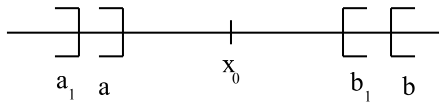
$(n+1)^2 > (n+2)n$ è decrescente poiché svolgendo i calcoli si ha: $n^2+2n+1 > n^2+2n$ $\forall n \in N$

Il codominio della funzione (a_n) è l'insieme $\{a_n\}$
Le successioni sono come tutte le altre funzioni; quindi la limitatezza è come per tutte le altre funzioni: dipende dal codominio

Intorno di un punto $x_0 \in I$

$I(x_0) =]a,b[$ con $a<x_0<b$ È un intervallo aperto

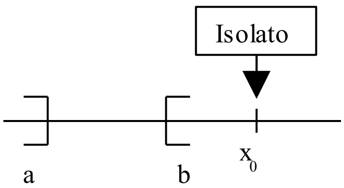
$]a_1,b_1[\cap]a,b[=]a,b_1[$

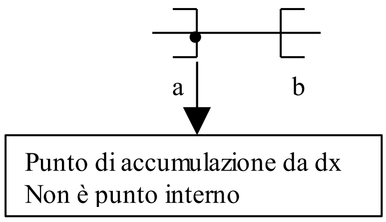


Se si considerano due intorni di x_0, la loro intersezione è ancora un intorno x_0
Intorno di centro x_0 è del tipo $]x_0-r,x_0+r[$ $r>0$
Intorno destro $I_+(x_0) = [x_0,b[$ $x_0 < b$
Intorno sinistro $I_-(x_0) =]a,x_0]$ $a<x_0$
Un intorno di x_0 si può considerare come l'unione di un intorno destro e uno sinistro
Intorno di $+\infty$ $I(+\infty) =]a,+\infty[$
Intorno di $-\infty$ $I(-\infty) =]-\infty,a[$

Se $\varnothing \notin A \subset R$, $x_0 \in R$ è punto di accumulazione per A se preso qualunque intorno di x_0 in esso cadono infiniti punti di A ovvero vi cade almeno un elemento di $A \neq x_0$
x_0 è di accumulazione da dx di A se preso un qualunque intorno dx di x_0 in esso cadono infiniti elementi di A o almeno un punto di $A \neq x_0$. (analogamente per da sx)

Un punto $x_0 \in A$ è isolato quando esiste un intorno $]a,b[$ di x_0 tale che $]a,b[\cap A = \{x_0\}$
Un punto $x_0 \in A$ è interno ad A se esiste un intorno $]a,b[$ di x_0 tale che $]a,b[\subset A$





Esempio: A={1,2,3} 1,2,3, sono punti isolati

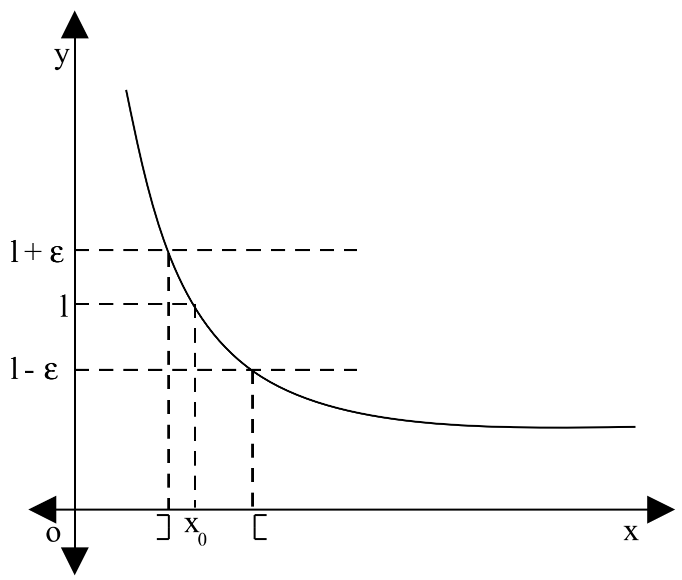
Limiti

Definizione:
Sia A un sottoinsieme di R, se il numero reale x_0 è di accumulazione per A, in ogni intorno di x_0 si trovano elementi di A distinti da x_0. Quindi ha senso chiedersi come variano i valori di una funzione definita in A quando x tende a x_0

Sia A un sottoinsieme di R, f: A→R; $x_0 \in R$ punto di accumulazione di A ed ε>0 numero arbitrario

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l \in R$ limite finito

Per definizione significa che: $\forall \varepsilon>0 \; \exists \; I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A-\{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \;\rightarrow\; l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

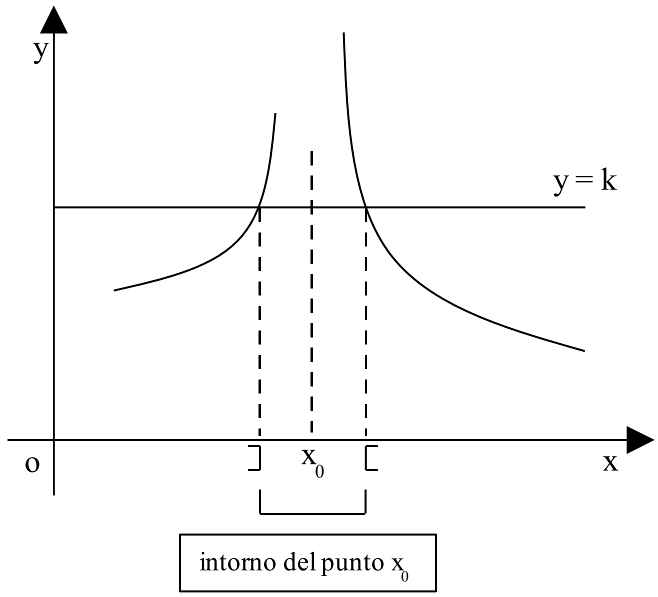


esempio: $\lim_{x \to 0} e^x = 1$ verificare il limite significa far vedere che:
$\forall \varepsilon>0 \; \exists \; I(0) : \forall x \in I(0) \cap A-\{0\} \Rightarrow |e^x - l| < \varepsilon \;\rightarrow\; l-\varepsilon < e^x < l+\varepsilon$
dal momento che ε è preso ad arbitrio lo si può supporre ε<1 così che l-ε > 0
per isolare la x si moltiplica tutto per il logaritmo:
$\log(l-\varepsilon) < x < \log(l+\varepsilon)$
gli x che soddisfano la disequazione sono compresi in un intorno dello 0

Siano A un sottoinsieme di R, $x_0 \in R$ un punto di accumulazione per A e f: A→R

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Per definizione significa che: $\forall k>0\ \exists\ I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A-\{x_0\} \Rightarrow f(x) > k$



$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ si deve verificare che:

$\forall k>0\ \exists\ I(0) : \forall x \in I(0) \cap A-\{0\} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > k \ \rightarrow \frac{1}{k} > x^2$

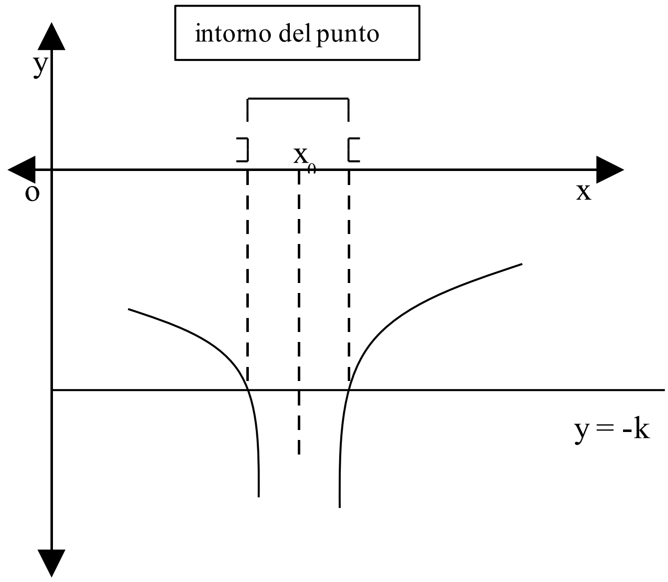
è verificata per valori interni: $-\frac{1}{\sqrt{k}} < x < \frac{1}{\sqrt{k}}$

$\left]-\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{1}{\sqrt{k}}\right[$ è un intervallo dello 0 quindi la definizione di limite è definita

Siano A un sottoinsieme di R, $x_0 \in R$ un punto di accumulazione per A e f: A→R

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

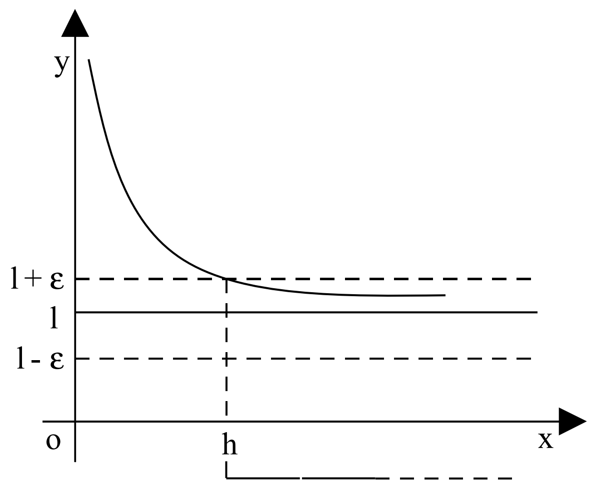
Per definizione significa che: $\forall k>0\ \exists\ I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A-\{x_0\} \Rightarrow f(x) < -k$



Sia A non limitato superiormente:
Siano A un sottoinsieme di R, $x_0 \in R$ un punto di accumulazione per A e f: A→R

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Per definizione significa che: $\forall \varepsilon>0\ \exists\ I(+\infty) : \forall x \in I(+\infty) \cap A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \rightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

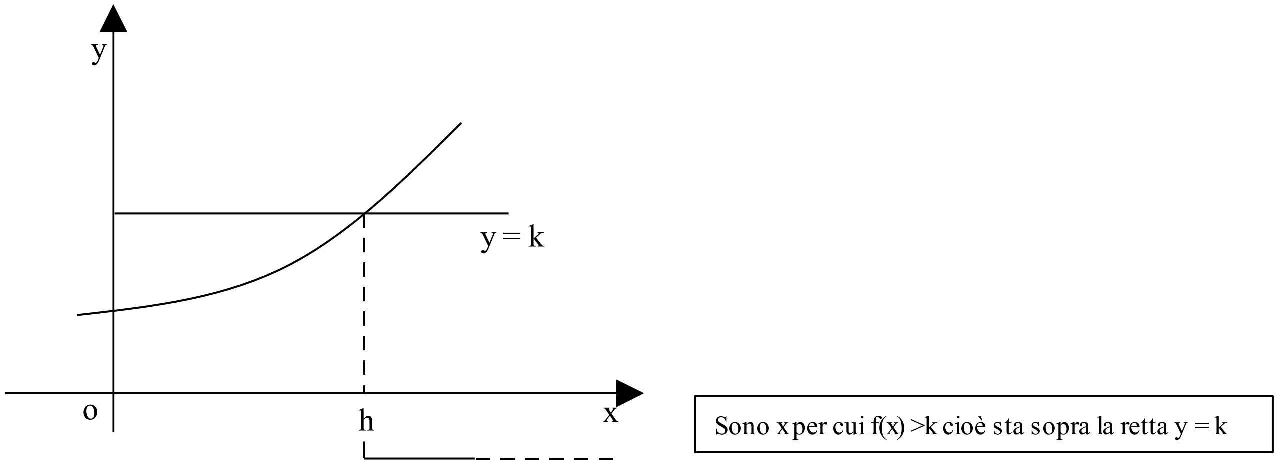


Tutti gli x>h costituiscono un intorno di +∞:
gli x sono tutti quelli per cui f(x) sta nell'intorno

Siano A un sottoinsieme di R, $x_0 \in$ R un punto di accumulazione per A e f: A→R

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

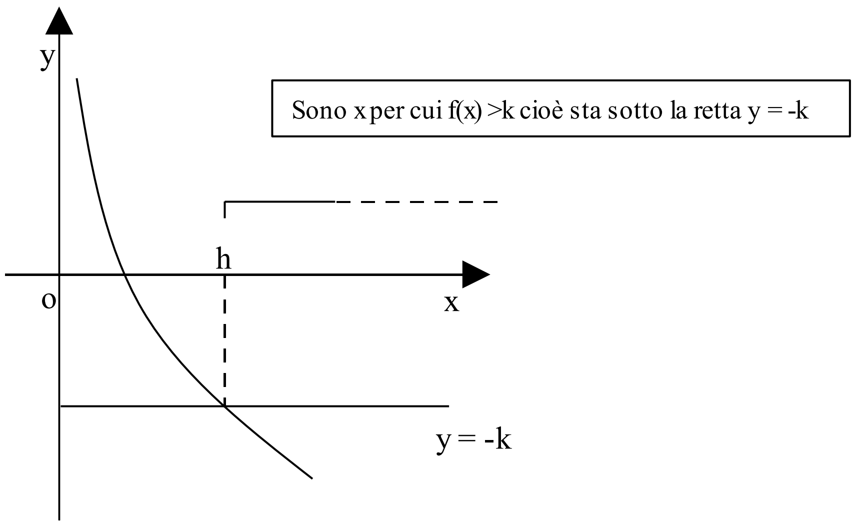
Per definizione significa che: $\forall k>0\ \exists\ I(+\infty) : \forall x \in I(+\infty) \cap A \Rightarrow f(x) > k$



Siano A un sottoinsieme di R, $x_0 \in$ R un punto di accumulazione per A e f: A→R

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Per definizione significa che: $\forall k>0\ \exists\ I(+\infty) : \forall x \in I(+\infty) \cap A \Rightarrow f(x) < -k$



Se A è non limitata inferiormente:
Siano A un sottoinsieme di R, $x_0 \in$ R un punto di accumulazione per A e f: A→R

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Per definizione significa che: ∀ε>0 ∃ I(-∞) : ∀x∈ I(-∞) ∩A ⇒ |f(x) –l| <ε → l-ε < f(x)< l+ε

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Per definizione significa che: ∀k>0 ∃ I(-∞) : ∀x∈ I(-∞) ∩A ⇒ f(x) >k

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Per definizione significa che: ∀k>0 ∃ I(-∞) : ∀x∈ I(-∞) ∩A ⇒ f(x) < -k

Esercizio:

Verificare che $\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{2}$

Dominio f: x ≠ 2 A = R-{2}

Si deve far vedere che: ∀ε>0 ∃ I(0) : ∀x∈ I(0) ∩A ⇒ $\left|\frac{x+1}{x+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{2x+2-x-2}{2x+4}\right| = \left|\frac{x}{2x+4}\right| < \varepsilon$ cioè: $-\varepsilon < \frac{x}{2x+4} < \varepsilon$

si suppone che x >-2 così che il denominatore sia positivo

$-\varepsilon < \frac{x}{2x+4}$
↓
–2εx –4ε < x
–4ε < (1+2ε)x
↓
$\frac{-4\varepsilon}{1+2\varepsilon} < x$

$\frac{x}{2x+4} < \varepsilon$
↓
x < 2εx + 4ε
(1-2ε)x < 4ε
↓
$x < \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}$ si considera $\varepsilon < \frac{1}{2}$ in modo che (1-2ε)>0

$-\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon} < x < \frac{4\varepsilon}{1-2\varepsilon}$ → è un intorno di 0

Esercizio

Verificare che $\lim_{x \to 1} \log(x-1)^2 = -\infty$

Campo di esistenza ≠ 1 perché (l'argomento deve essere ≠ 0)

∀k>0 ∃ I(1) : ∀x∈I(1) ∩A –{1} ⇒ $\log(x-1)^2 < -k$ → $e^{\log(x-1)^2} = (x-1)^2$

$(x-1)^2 < e^{-k}$ → $|x-1| < \sqrt{e^{-k}}$ → $1-\sqrt{e^{-k}} < x < 1+\sqrt{e^{-k}}$ → è un intorno di 1

Esercizio

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$\forall k>0\ \exists\ I(+\infty) : \forall x \in I(+\infty) \cap A \Rightarrow f(x) > k$ dominio R

$e^x>k$ quando $x>\log k$ è un intorno di $+\infty$

Esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \text{con } n \in N \qquad A=\text{dominio}$$

Applicano la definizione si ha: $\forall k>0\ \exists\ I(+\infty) : \forall x \in I(+\infty) \cap A \Rightarrow f(x)>k$

$x^n>k \ \rightarrow\ x>\sqrt[n]{k}$ $\qquad I(+\infty) =]h,+\infty[\ \rightarrow\ ]\sqrt[n]{k}\,, +\infty[$

è un intorno di $+\infty$ quindi è verificato

Limite destro

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

x_0 deve essere un punto di accumulazione da destra $\rightarrow [x_0, a[$; con $x_0<a$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ I_+(x_0) : \forall x \in I_+(x_0) \cap A-\{0\} \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

Limite sinistro

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$$

x_0 deve essere un punto di accumulazione da sinistra $\rightarrow]a, x_0]$; con $a<x_0$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ I_-(x_0) : \forall x \in I_-(x_0) \cap A-\{0\} \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

Data una funzione, se il limite destro e sinistro sono uguali allora la funzione ammette limite; se sono diversi la funzione non ammette limite

Esempio:

$$\lim_{x \to o^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$\forall k>0\ \exists\ I_+(0) : \forall x \in I_+(0) \cap A-\{0\} \Rightarrow f(x) > k$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x}>k \ \rightarrow\ x<\dfrac{1}{k}$ $\qquad$ x si avvicina a 0 assumendo valori positivi quindi la disuguaglianza non cambia segno. Si determina così un intorno destro dello 0: $\left[0, \dfrac{1}{k}\right[$

Esempio:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{Dominio} = R$$

$\forall \varepsilon>0\ \exists\ I(-\infty) : \forall x \in I(-\infty) \cap A \Rightarrow |f(x) - 0|<\varepsilon \rightarrow |e^x|<\varepsilon \rightarrow -\varepsilon < e^x < \varepsilon$

$-\varepsilon< e^x \rightarrow$ è sempre verificata: e^x è sempre positivo mentre $-\varepsilon$ è negativo (poiché $\varepsilon>0$) quindi e^x è sempre maggiore di $-\varepsilon$

$e^x < \varepsilon \rightarrow$ isolando la x si ottiene: $x < \log\varepsilon$ e questo costituisce un intorno di $-\infty$

Quindi la disuguaglianza è verificata

Esempio:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad A = R-\{0\}$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\ I(-\infty) : \forall x\in I(-\infty)\cap A \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$ che equivale a scrivere $\frac{1}{|x|}<\varepsilon$

Si può supporre x<0 (è lecito dal momento che $x\to-\infty$)

Dato che $x<0 \Rightarrow |x| = -x$ quindi:

$\frac{1}{|x|}<\varepsilon \ \rightarrow\ -\frac{1}{x}<\varepsilon \ \rightarrow\ x<-\frac{1}{\varepsilon}$

<u>Importante per il calcolo del limite</u>

$$\lim_{x\to x_0} (ax+b) = ax_0+b$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\ I(x_0) : \forall x\in I(x_0)\cap A-\{x_0\} \Rightarrow |ax+b-ax_0-b|<\varepsilon \ \rightarrow\ |ax-ax_0|<\varepsilon$

mettendo a in evidenza: $|ax-ax_0|<\varepsilon \ \rightarrow\ |a(x-x_0)|<\varepsilon$

Se a =0 la disuguaglianza è sempre verificata

Se $a\neq 0$ $|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} \ \rightarrow\ x_0-\frac{\varepsilon}{|a|}<x<x_0+\frac{\varepsilon}{|a|} \ \rightarrow$ si crea un intorno del punto x_0

Il limite è verificato

Esempio:

$$\lim_{x\to +\infty} \log x = +\infty \qquad A = R^+$$

$\forall k>0\ \exists\ I(+\infty) : \forall x\in I(+\infty)\cap A \Rightarrow \log x > k$

$e^{\log x} > e^k \ \rightarrow\ x>e^k \ \rightarrow$ Queste soluzioni costituiscono un intorno di $+\infty$

Esempio:

$$\lim_{x\to 1} \log x = 0$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\ I(1) : \forall x\in I(1)\cap A-\{1\} \Rightarrow |\log x|<\varepsilon$

$-\varepsilon < \log x < \varepsilon \ \rightarrow\ e^{-\varepsilon} < e^{\log x} < e^{\varepsilon} \ \rightarrow\ e^{-\varepsilon} < x < e^{\varepsilon}$

$e^{-\varepsilon} = \frac{1}{e^{\varepsilon}}$ che è sempre <1

e^{ε} è >1

$e^{-\varepsilon} < x < e^{\varepsilon} \ \rightarrow$ è un intorno di 1

Teorema

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se vale questo risultato è anche vero che $\lim_{x\to x_0} [f(x) - l] = 0$

→ ipotesi: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} [f(x) - l] = 0$

L'ipotesi significa che $\forall\varepsilon>0\ \exists\ I(x_0) : \forall x\in I(x_0)\cap A-\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$
La tesi significa che $\forall\varepsilon>0\ \exists\ I(x_0) : \forall x\in I(x_0)\cap A-\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$
Ipotesi e tesi coincidono, quindi la tesi è verificata

← ipotesi: $\lim_{x\to x_0} [f(x) - l] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$

In maniera del tutto analoga si verifica la tesi

Teorema dell'unicità del limite

Ipotesi: Se una funzione ammette limite,
Tesi: Questo è unico.

Si suppone per assurdo che esistano l_1 e $l_2 \in R$ con $l_1\neq l_2$ tali che si ha
$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ significa che: $\forall\varepsilon>0\ \exists\ I_1(x_0) : \forall x\in I_1(x_0)\cap A-\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-l_1|<\varepsilon$
allo stesso modo si ha che
$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$ e significa che $\forall\varepsilon>0\ \exists\ I_2(x_0) : \forall x\in I_2(x_0)\cap A-\{x_0\} \Rightarrow |f(x)-l_2|<\varepsilon$

Si considera la differenza $|l_1-l_2|$;
se a questa differenza si somma e si sottrae la stessa quantità f(x) si ha: $|l_1-l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2|$
per una proprietà del valore assoluto si ha: $|l_1-l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |f(x)-l_1| + |f(x) - l_2|$

$|f(x)-l_1|<\varepsilon\ \forall x\in I_1(x_0)$
$|f(x)-l_2|<\varepsilon\ \forall x\in I_2(x_0)$ queste due disuguaglianze valgono contemporaneamente

Se si considera l'intersezione dei due intervalli si ha: $I(x_0) = I_1(x_0)\cap I_2(x_0)$
Quindi nell'intervallo $I(x_0)$ segue che: $|l_1-l_2| \leq |f(x)-l_1| + |f(x) - l_2| < 2\varepsilon$
E in particolare $|l_1-l_2| < 2\varepsilon$
Per l'arbitrarietà di ε e per l'ipotesi che $l_1\neq l_2$ si può porre $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$

Sostituendo ε si ha che $|l_1-l_2| < 2\frac{|l_1 - l_2|}{2}$
Semplificando si ha che: $|l_1-l_2| < |l_1-l_2|$ → il che è un assurdo facendo cadere l'ipotesi quindi $l_1 = l_2$

Teorema del limite di una somma

Date due funzioni f, g: A→R con $x_0 \in R$ e punto di accumulazione per A

Se le due funzioni ammettono limite, la somma delle due funzioni ammette anch'essa limite e il limite è la somma dei limiti [il limite della somma è la somma dei limiti]

Ipotesi: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$

Tesi: $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$

Dimostrazione:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ vuol dire che $\forall \varepsilon>0\ \exists\ I_1(x_0) : \forall x \in I_1(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ vuol dire che $\forall \varepsilon>0\ \exists\ I_2(x_0) : \forall x \in I_2(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$

per l'arbitrarietà di ε si può porre $\frac{\varepsilon}{2}$ maggiore dei 2 valori assoluti

$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$ vuol dire anche che $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x) - l - m] = 0 \rightarrow |f(x)+g(x)-l-m| < \varepsilon$
per la commutativa e l'associativa si ha: $|[f(x)-l]+[g(x)-m]|$
per una proprietà dei valori assoluti si ha: $|[f(x)-l]+[g(x)-m]| \le |f(x)-l| + |g(x)-m|$
Se si considera l'intorno $I(x_0) = I_1(x_0) \cap I_2(x_0)$ segue che:

$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$ perciò dalla somma $|f(x)-l| + |g(x)-m|$ si ha: $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

quindi $|f(x)+g(x)-l-m| = |[f(x)-l]+[g(x)-m]| \le |f(x)-l| + |g(x)-m| < \varepsilon$
in particolar modo $|f(x)+g(x)-l-m| < \varepsilon \rightarrow$ ciò avviene $\forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\}$
che è la verifica del $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l + m$

Teorema della limitatezza locale

Data f: A→R con x_0 punto di accumulazione per A
Se la funzione ammette limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ con $l \in R$
si dimostra che $\exists\ I(x_0)$: f è limitata in $I(x_0) \cap A - \{x_0\}$
ma questo segue direttamente dal concetto di limite infatti, che una funzione ammette limite vuol dire che $\forall \varepsilon>0\ \exists\ I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \rightarrow l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$
quindi la funzione risulta limitata: $l-\varepsilon$ è un minorante mentre $l+\varepsilon$ è un maggiorante

Prodotto tra una funzione limitata per una funzione dotata di limite

Se f: A→R è una funzione limitata
e g: A→R è una funzione che ammette limite $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
allora il prodotto $f(x)\cdot g(x)$ ammette limite e questo limite sarà: $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$

Una funzione f è limitata se $\exists$ M>0 : $|f(x)| \leq M$ ovvero $-M \leq f(x) \leq M$

Una funzione g ammette limite se $\forall\varepsilon>0 \; \exists \; I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\} \rightarrow |g(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$

Per il valore arbitrario di ε e per comodità di dimostrazione si pone il valore assoluto $< \frac{\varepsilon}{M}$

Considerando il prodotto delle due funzioni in valore assoluto e applicando una proprietà del valore assoluto si ha: $|f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)|$.

Ma $|f(x)| \leq M$, e $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$ quindi il prodotto dei due valori sara: $|f(x)| \cdot |g(x)| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

Si verifica così che $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$ infatti $\forall\varepsilon>0 \; \exists \; I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon$

Teorema

Data una funzione f: $A \rightarrow R$ con x_0 punto di accumulazione per A

Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ vuol dire che $\forall\varepsilon>0 \; \exists \; I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

se si considera $||f(x)| - |l||$ per una proprietà del valore assoluto si ha che: $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$

ma per ipotesi $|f(x) - l| < \varepsilon$ quindi si ha che: $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l| < \varepsilon$

di conseguenza il $||f(x)| - |l|| < \varepsilon$

ma $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$ vuol dire che $\forall\varepsilon>0 \; \exists \; I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow ||f(x)| - |l|| < \varepsilon$ che risulta verificato

Ma se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$ non è detto che $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l| \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Infatti se si considera una funzione: $f(x) \begin{cases} 1 = x \geq 0 \\ -1 = x < 0 \end{cases} \Rightarrow |f(x)| = 1$

In valore assoluto la funzione è costante e il limite è la costante stessa:

$\lim_{x \to 0} |f(x)| = \lim_{x \to 0} 1 = 1$

Invece calcolando i limiti da destra e da sinistra della funzione si ha:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$ il limite tende a 0 assumendo valori maggiori di 0, dove f(x) = 1

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$ il limite tende a 0 assumendo valori minori di 0, dove f(x)= -1

Allora quand'è che si verifica l'implicazione inversa?

Ovvero quand'è che $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l| \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l$?

Ciò si verificata $\Leftrightarrow l = 0$

$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$ vuol dire che $\forall\varepsilon>0 \; \exists \; I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow ||f(x)| - 0| < \varepsilon = |f(x)| < \varepsilon$

ma dire che $\forall\varepsilon>0 \; \exists \; I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ significa dire $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

Prodotto di una funzione costante per una funzione che ammette limite

Se si hanno due funzioni una costante ed una funzione che ammette limite calcolando il limite del prodotto tra le due funzioni si dirà che il limite è uguale al prodotto tra la costante e il limite della funzione

f(x) = k

g: A→R $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$ $\qquad \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = k\cdot m$

Lo si può considerare come caso particolare di $\lim_{x\to x_0} ax + b = ax_0 + b$ dove b =0, a=3 che è una costante per una funzione x

Es: $\lim_{x\to x_0} 3x = 3x_0$

Teorema

Il prodotto dei limiti è uguale al limite dei prodotti:

Sia f,g A→R con x_0 punto di accumulazione per A

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ e se $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$

il prodotto f(x)·g(x) ammette limite ed è = $\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = l\cdot m$

$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = l\cdot m$ è uguale a: $\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x) - l\cdot m] = 0$

aggiungendo e sottraendo g(x)·l si ha: f(x)·g(x) – l·g(x) + l·g(x) – l·m

per l'associativa si ha: [f(x)·g(x) – l·g(x)] + [l·g(x) – l·m]

mettendo in evidenza prima g(x) e poi l si ha: g(x)·[f(x)-l] + l·[g(x)-m]

ma $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) - l = 0$

e $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) - m = 0$

considerando $\lim_{x\to x_0} \underline{g(x)}\cdot \underline{[f(x)-l]} + \underline{l}\cdot \underline{[g(x)-m]} = 0$

per il teorema di limitatezza locale in $I(x_0)\cap A-\{x_0\}$ g(x) risulta limitata

f(x)-l ammette come limite 0

l è una funzione costante

g(x)-m ammette come limite 0

sono due funzioni (una funzione limitata ed una funzione che ammette limite =0) il cui prodotto ammette come limite 0

Sono due funzioni (una funzione costante ed una funzione che ammette limite) il cui prodotto è uguale alla costante per il limite della funzione

Esempio:

$\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$

e^x lo si può scrivere come $e^{x_0}\cdot e^{x-x_0}$

e^{x_0} è una funzione costante e quindi il limite è la costante stessa $\lim\limits_{x\to x_0} e^{x_0} = e^{x_0}$

si utilizza un risultato noto: $\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$

al tendere di x a x_0 la differenza $x-x_0$ tende a 0

ponendo $x-x_0 = y$ il limite $\lim\limits_{x\to x_0} e^{x-x_0}$ lo si può considerare come $\lim\limits_{y\to 0} e^y = 1$

quindi il limite viene ad essere $\lim\limits_{x\to x_0} e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0}$

Teorema

Data f: A→R con x_0 punto di accumulazione per A

se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ se $f(x)$ e $l \neq 0$ si può avere che $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

Ipotesi:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

Tesi

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\ I(x_0) : \forall\in I(x_0)\cap A-\{x_0\}\Rightarrow |f(x) - l| <\varepsilon$

per un teorema precedente se $f(x)$ ammette come limite l, anche $|f(x)|$ ammette come limite $|l|$

se si pone $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$ si ha:

$\forall\ \frac{|l|}{2} >0\ \exists\ I(x_0) : \forall x\in I(x_0)\cap A-\{x_0\}\Rightarrow ||f(x)| - |l||<\frac{|l|}{2}$

$|l| - \frac{|l|}{2} < |f(x)| < |l|+\frac{|l|}{2}$

si fissa l'attenzione solo sulla prima disuguaglianza: $|l| - \frac{|l|}{2} < |f(x)|$

che sarà uguale a: $\frac{2|l| - |l|}{2} = \frac{|l|}{2} < |f(x)|$

dal momento che si deve trovare $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$ si può considerare $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right|$

riducendo allo stesso denominatore si ha: $\left|\frac{l - f(x)}{l\cdot f(x)}\right|$

al numeratore: in valore assoluto $|l - f(x)| = |f(x) - l|$ e per ipotesi $|f(x) - l| < \varepsilon$

il denominatore $|l\cdot f(x)|$ lo si può scrivere come $|l|\cdot|f(x)|$

poiché $|f(x)| > \frac{|l|}{2}$ il rapporto $|l| \cdot |f(x)| > |l| \cdot \frac{|l|}{2}$

che è uguale a $|l| \cdot |f(x)| > \frac{l^2}{2}$

quindi $|l - f(x)| < \varepsilon$ e $|l| \cdot |f(x)| > \frac{l^2}{2}$

tornando al rapporto $\left|\frac{l - f(x)}{l \cdot f(x)}\right|$ si potrà dire che: $\left|\frac{l - f(x)}{l \cdot f(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{\frac{l^2}{2}}$ che è uguale a $\left|\frac{l - f(x)}{l \cdot f(x)}\right| < \frac{2\varepsilon}{l^2}$

Per l'arbitrarietà di ε, parlare di ε o di $\frac{2\varepsilon}{l^2}$ è la stessa cosa

Quindi la differenza $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{l}\right|$ risulta $< \frac{2\varepsilon}{l^2}$ c.v.d.

Conseguenza:
Date f,g: A→R con x_0 punto di accumulazione per A
se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$ con *g(x)* e $m \neq 0$
si potrà avere che: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$ questo sarà possibile se si considera $\frac{f(x)}{g(x)}$ come $f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$

Teorema del permanenza del segno

Data f: A→R con A⊂R con x_0 punto di accumulazione per A

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ con $l \neq 0$ allora $\exists\, I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\}$
Allora *f(x)* ed *l* hanno lo stesso segno

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
se si pone $\varepsilon = |l|$
la disuguaglianza diventa: $l - |l| < f(x) < l + |l|$
se $l > 0$ $|l| = l$
quindi la disuguaglianza diventa: $l - |l| < f(x) < l + |l| \rightarrow l - l < f(x) < l + l \rightarrow 0 < f(x) < 2l$
in questo caso sia *f(x)* che *l* sono entrambi > 0
se $l < 0$ $|l| = -l$
quindi la disuguaglianza diventa: $l - |l| < f(x) < l + |l| \rightarrow -l - l < f(x) < 0 \rightarrow 2l < f(x) < 0$
in questo caso sia *f(x)* che *l* sono entrambi < 0

Teorema del confronto (caso finito)

Date f,g,h: $A \to R$ con $A \subset R$ con x_0 punto di accumulazione per A

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = l$ allora si dimostrerà che anche $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$
se le 3 funzioni sono $f(x) \le h(x) \le g(x)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ I_1(x_0) : \forall x \in I_1(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$
in relazione allo stesso ε, $\exists\ I_2(x_0) : \forall x \in I_2(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$
$l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$
Si considera l'intorno formato dall'intersezione dei due intorni si ha: $I(x_0) = I_1(x_0) \cap I_2(x_0)$
In relazione a questo intorno e in relazione al fatto che $f(x) \le g(x)$ le due disuguaglianze diventeranno: $l - \varepsilon < f(x) \le g(x) < l + \varepsilon$
Poiché $f(x) \le h(x) \le g(x)$ si avrà anche che $l - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < l + \varepsilon$
Da questa disuguaglianza si ha $l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon \ \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\}$ [occhio che $I(x_0) = I_1(x_0) \cap I_2(x_0)$]
Quindi anche $h(x)$ ammette limite $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

Teorema del confronto (caso infinito)

Date f,g,h: $A \to R$ con $A \subset R$ con x_0 punto di accumulazione per A

Con $f(x) \le g(x)$
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
Dal limite di $f(x)$ segue che $\forall k > 0 \ \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow f(x) > k$
Dalle ipotesi e dal concetto di limite segue che $k < f(x) \le g(x)$
Quindi $g(x) > k$ perciò in relazione allo stesso $I(x_0)$ si ha che $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$
Con $f(x) \le g(x)$
Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
Dal limite di $g(x)$ segue che $\forall k > 0 \ \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\} \Rightarrow g(x) < -k$
Dalle ipotesi e dal concetto di limite segue che $f(x) \le g(x) < -k$
Quindi $f(x) < -k$ perciò in relazione allo stesso $I(x_0)$ si ha che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Esercizio:

$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x}{x}$

il limite si può scindere in $\frac{1}{x} \cdot \cos x$

$\frac{1}{x}$ ha limite 0

$\cos x$ funzione limitata

$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \cos x = 0 \cdot \cos x = 0$

Limite di un polinomio

$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

$P(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ con $a_0 \neq 0$

Poiché il limite della somma è la somma dei limiti, per comodità si può scomporre il polinomio *P(x)* nei vari addendi e calcolarne i limiti:

$\lim_{x \to x_0} a_0x^n + \lim_{x \to x_0} a_1x^{n-1} + \ldots + \lim_{x \to x_0} a_{n-1}x + \lim_{x \to x_0} a_n$

$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$

$\lim_{x \to x_0} a_0x^n$ questo è il prodotto di una costante a_0 per una funzione x.

$\lim_{x \to x_0} x = x_0$ questo lo si può considerare come caso particolare $\lim_{x \to x_0} ax + b = \lim_{x \to x_0} x_0$ con a = 1 e b = 0

$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^{\ n}$ questo lo si considera come prodotto di funzioni: infatti $x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \to$ n volte

quindi $\lim_{x \to x_0} a_0x^n = a_0x_0^{\ n}$

analogamente per tutti gli altri addendi.

Perciò al limite *P(x)* diventa: $P(x_0) = a_0x_0^{\ n}+a_1x_0^{\ n-1}+\ldots+a_{n-1}x_0+a_n$

Se si hanno due polinomi e se ne vuole calcolare il rapporto al limite si ha:

$\lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ con $Q(x_0) \neq 0$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \frac{0}{0}$ (forma indeterminata) scomponendo $\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

semplificando (x-1): $\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$

a questo punto è possibile calcolare il limite: $\lim_{x \to 1} \frac{(x^2+x+1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{3}{4}$

$\lim_{x \to 2} 3x + x^2 = 10$

Se si hanno 2 polinomi $\frac{P(x)}{Q(x)}$

e si calcola $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$

$P(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ con $a_0 \neq 0$

$Q(x) = b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$ con $b_0 \neq 0$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

mettendo in evidenza x^n al numeratore e x^m al denominatore si ha:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right)}{x^m\left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}\right)}$$

si considerano 3 casi:

se n = m allora x^n e x^m sono la stessa cosa e si semplificano;

dentro parentesi le costanti a_0 e b_0 rimangono, mentre tutti gli altri addenti essendo della forma $\frac{1}{x}$ con x che tende ad ∞ tendono a 0; quindi il risultato è: $\frac{a_0}{b_0}$

se n > m allora $\frac{x^n}{x^m} = x^{x-m} \frac{\left(a_0 + \frac{a_1}{x^1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right)}{\left(b_0 + \frac{b_1}{x^1} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}\right)}$ dentro parentesi i calcoli rimangono invariati,

quindi si avrà il prodotto $x^{n-m} \frac{a_0}{b_0}$.

Se il limite tenderà a +∞ allora x^{n-m} tenderà +∞, che si moltiplicherà col segno di $\frac{a_0}{b_0}$: se $+\infty \cdot \left(+\frac{a_0}{b_0}\right) = +\infty$; se $+\infty \cdot \left(-\frac{a_0}{b_0}\right) = -\infty$

Se il limite tenderà a -∞ allora se n-m è pari x^{n-m} tenderà a +∞ che si moltiplicherà col segno di $\frac{a_0}{b_0}$: se $+\infty \cdot \left(+\frac{a_0}{b_0}\right) = +\infty$; se $+\infty \cdot \left(-\frac{a_0}{b_0}\right) = -\infty$

se n-m è dispari x^{n-m} tenderà a -∞ che si moltiplicherà col segno di $\frac{a_0}{b_0}$: se $-\infty \cdot \left(+\frac{a_0}{b_0}\right) = -\infty$; se $-\infty \cdot \left(-\frac{a_0}{b_0}\right) = +\infty$

se n < m allora $\frac{x^n}{x^m} = \frac{1}{x^{m-n}} \cdot \frac{\left(a_0 + \frac{a_1}{x^1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right)}{\left(b_0 + \frac{b_1}{x^1} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x^m}\right)}$ il prodotto si ridurrà a $\frac{1}{x^{m-n}} \cdot \frac{a_0}{b_0}$; ma $\frac{1}{x^{m-n}}$ tenderà a 0 quindi il limite varrà 0

Riepilogo

n = m → coefficienti di grado massimo

n > m → ∞ il segno lo si stabilisce di volta in volta

n < m → 0

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x+5} = \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)x}{\left(1+\frac{5}{x}\right)x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+3}{x^2+x+1} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+2x+4}{x+1} = \frac{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} e^x = e^{x_0}$$

Teorema

Si dimostra che $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

Si può scrivere come: $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} - \sqrt{x_0} = 0$ razionalizzando si ha $\frac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$

Passi della razionalizzazione: $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{1} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x_0} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$

Quindi calcolare $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} - \sqrt{x_0}$ è lo stesso di calcolare $\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$

Perciò se si dimostra che $\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}} = 0$ si dimostra anche che $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} - \sqrt{x_0} = 0$

Si considera $\left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}\right|$ per comodità di calcolo si assume $x > \frac{x_0}{2}$

Quindi risulta verificata la disuguaglianza $\left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}\right| < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{\frac{x_0}{2}} + \sqrt{x_0}}$

Ma essendo in valore assoluto si ha anche che: $0 \le \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}\right|$

Quindi $0 \le \left|\frac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}\right| < \frac{|x - x_0|}{\sqrt{\frac{x_0}{2}} + \sqrt{x_0}}$

Ma $\frac{|x - x_0|}{\sqrt{\frac{x_0}{2}} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0}{2}} + \sqrt{x_0}} \cdot (x - x_0) = 0$ poiché $x - x_0$ tende a 0

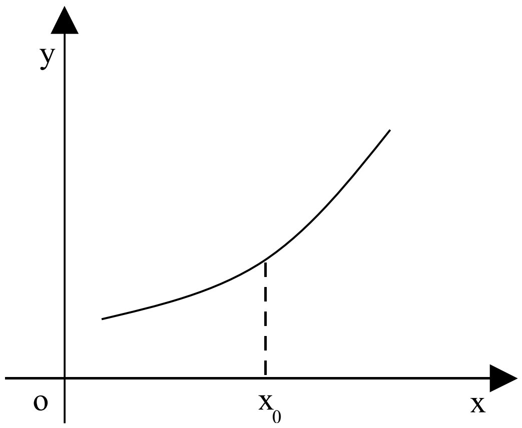
Perciò $0 \leq \left|\dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}\right| < 0$ e per il teorema del confronto $\left|\dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}\right| = 0$

Quindi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}} = 0$ perciò anche $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} - \sqrt{x_0} = 0$ e si conclude che $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

Comportamento delle funzioni monotone nel passaggio al limite

Data f: I→R   dove I = intervallo aperto di R

f monotona in I ⇒ f non decrescente   sia $x_0 \in R$



(dimostrazione solo grafica)

Se x_0 è interno dell'intervallo si può dire che:

Esiste il limite sinistro per x che tende a x_0 della funzione:

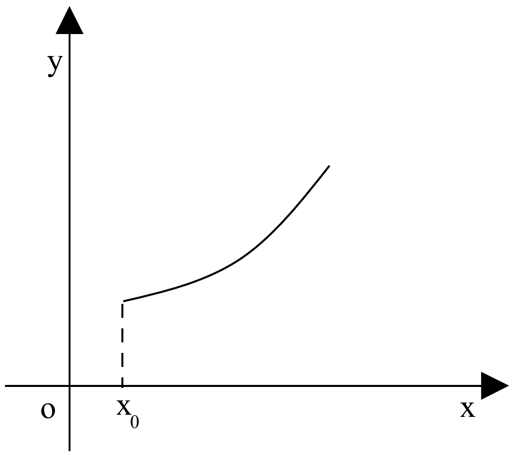
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) = \sup\{f(x) : x < x_0\} \leq f(x_0)$

Ma esiste anche il limite destro per x che tende a x_0 della funzione:

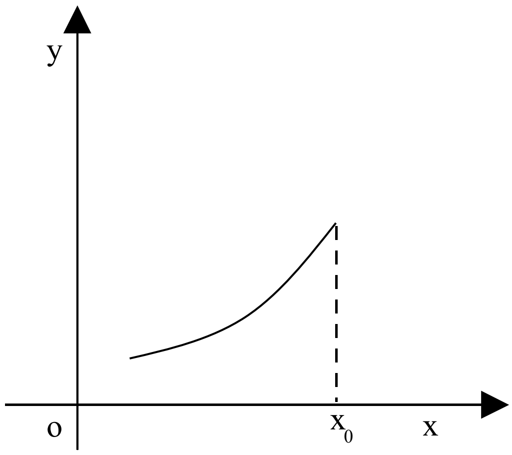
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) = \inf\{f(x) : x > x_0\} \geq f(x_0)$

In generale allora vuole dire che $f(x_0^-) \leq f(x) \leq f(x_0^+)$

Se x_0 è estremo dell'intervallo si può dire che:

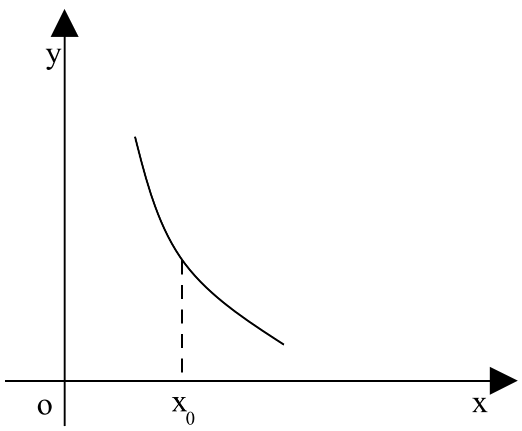


x_0 estremo sinistro: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x)\}$ x_0 in questo caso può anche essere $-\infty$



x_0 estremo destro: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x)\}$ x_0 in questo caso può anche essere $+\infty$

Se f è non crescente



Esiste il limite sinistro per x che tende a x_0 della funzione:

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) = \inf\{f(x) : x < x_0\} \geq f(x_0)$

Esiste anche il limite destro per x che tende a x_0 della funzione:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) = \sup\{f(x) : x > x_0\} \leq f(x_0)$

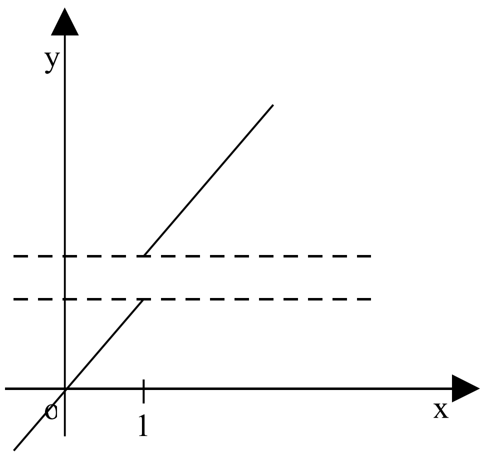
In generale allora vuole dire che $f(x_0^+) \leq f(x) \leq f(x_0^-)$

Se x_0 è estremo destro si ha che:
x_0 estremo sinistro: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \inf\{f(x)\}$ x_0 in questo caso può anche essere $-\infty$
Se x_0 è estremo sinistro si ha che:
x_0 estremo destro: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup\{f(x)\}$ x_0 in questo caso può anche essere $+\infty$

Esempio:

f: I→R $\quad f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$

f è monotona in questo caso $x_0 = 1$



f è monotona non decrescente

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x = 1$ (= sup]-∞, 1[ )

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x = 2$ (= inf]2, +∞[ )

Esempio:

$f(x) = e^x$ funzione monotona crescente

è definita su tutto R

$\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = \sup\{e^x : x \in R\} = +\infty$

$\sup\{e^x : x\in R\} \geq \sup\{e^n : n\in N\}$ poiché N è un sottoinsieme di R

Disuguaglianza di Bernulli

$(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$È sempre vera e si dimostra per induzione:

per ipotesi $\alpha > -1$

se $n = 1 \Rightarrow 1+\alpha = 1+\alpha$

Posta vera per n, si dimostra per n+1;

ovvero si dimostra che $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha$

Moltiplicando ambo i membri per $(1+\alpha)$ si ottiene: $(1+\alpha)^n\cdot(1+\alpha) \geq (1+n\alpha)(1+\alpha)$

Svolgendo i prodotti si ha: $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1 + n\alpha + \alpha + n\alpha^2 > 1+(n+1)\alpha$

Se dal secondo membro si esclude $n\alpha^2$ che è una quantità positiva, la disuguaglianza risulta rafforzata, quindi si ottiene che anche $(1+\alpha)^{n+1} \geq 1+(n+1)\alpha$ è vera.

Esempio: $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = \sup\{e^x : x \in R\} = +\infty$

all'eguaglianza e = e si aggiunge e si sottrae 1 a secondo membro: e = 1+(e–1)

elevando a n tutti e due i membri si ha: $e^n = [1+(e-1)]^n$

per la disuguaglianza di Bernulli risulta: $[1+(e-1)]^n \geq 1+n(e-1) > 1+n$

Dove risulta che $1+n(e-1) > 1+n$

Quindi si ottiene: $e > 1+n$

Si conveniamo che il sup di un insieme non limitato superiormente (N) è +∞

Altre regole per il calcolo dei limiti

$\lim\limits_{x \to x_0} sen\,x = sen\,x_0$

Per dimostrare che è vero si deve far vedere che: $\lim\limits_{x \to x_0} sen\,x - sen\,x_0 = 0$

Dalle formule di prostaferesi:

$$senx - senx_0 = 2 \cdot sen\frac{x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x + x_0}{2}$$

si ricorda che:

$$\left.\begin{aligned} sen(\alpha+\beta) &= sen\alpha \cdot \cos\beta + sen\beta \cdot \cos\alpha \\ sen(\alpha-\beta) &= sen\alpha \cdot \cos\beta - sen\beta \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\} \boxed{\text{formule di addizione}}$$

ponendo $\alpha+\beta = p$ e
$\alpha-\beta = q$

sommando membro a membro si ha: $2\alpha = p + q$ $\left(\alpha = \frac{p+q}{2}\right)$

sottraendo membro a membro si ha: $2\beta = p - q$ $\left(\beta = \frac{p-q}{2}\right)$

sottraendo membro a membro le due formule di addizione si ha:

$sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha-\beta) = 2\, sen\beta \cos\alpha \Rightarrow sen\,p - sen\,q = 2 \cdot sen\frac{p-q}{2} \cdot \cos\frac{p+q}{2}$

$$senx - senx_0 = 2 \cdot sen\frac{x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x + x_0}{2}$$

considerato in valore assoluto: $|senx - senx_0| = 2 \cdot \left|sen\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right|$

$\left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \to$ è una funzione limitata che è compresa fra -1 e 1; è sempre ≤ 1

quindi: $|senx - senx_0| \leq 2 \cdot \left|sen\frac{x - x_0}{2}\right|$

supponendo $|senx| \leq |x|$ si ha:

$|senx - senx_0| \leq 2 \cdot \left|sen\frac{x - x_0}{2}\right| \leq 2 \cdot \left|\frac{x - x_0}{2}\right|$

semplificando: $|senx - senx_0| \leq 2 \cdot \left|sen\frac{x - x_0}{2}\right| \leq |x - x_0|$

essendo il valore assoluto un numero non negativo si ha:

$0 \leq |senx - senx_0| \leq |x - x_0|$

per il teorema del confronto si ha che $senx - senx_0 = 0$

Esempio di limite che non esiste

$\lim_{x\to 1}(x+2) \neq 4$ si vuole provare che non è corretto:

Si suppone per assurdo quindi $\lim_{x\to 1}(x+2) = 4$

Quindi deve valere che $\forall\varepsilon>0\ \exists I(1) : \forall x\in I(1)\cap A-\{1\}\Rightarrow |f(x)-4| < \varepsilon$

$|x+2-4| < \varepsilon \Rightarrow 2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon$

se $2-\varepsilon>1$ cioè $\varepsilon<1$ le soluzioni trovate non costituiscono un intorno di 1 quindi il limite non è 4

Esempio

$\lim_{x\to 0} sen\,3x = sen\,0 = 0$

$\lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$ si dimostra come il precedente

Quindi si deve far vedere che il $\lim_{x\to x_0}\cos x - \cos x_0 = 0$

e lo si fa ricorrendo alle formule di prostaferesi del coseno che si ricavano sempre dalle formule di addizione e di sottrazione del seno e del coseno

$$\cos x - \cos x_0 = -2\cdot sen\frac{x-x_0}{2}\cdot sen\frac{x+x_0}{2}$$

Limiti notevoli

$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x} = 1}$:

si suppone che $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$tgx = \frac{sen\,x}{\cos x}$$

$$\frac{tg\,x}{sen\,x} = \frac{sen\,x}{\cos x}\cdot sen\,x = \frac{1}{\cos x}$$

Poiché vale la disuguaglianza $|senx| \le |x| \le |tgx|$

Dividendo tutto per $|senx|$ si ha:

$$1 \le \frac{|x|}{|sen\,x|} \le \frac{1}{|\cos x|}$$

si possono levare i valori assoluti perché nei due quadranti in cui si considerava la funzione $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ il coseno è sempre positivo e il seno e l'angolo hanno sempre lo stesso segno

quindi si ha: $1 \le \frac{x}{sen\,x} \le \frac{1}{\cos x}$

considerando gli inversi si ha: $\cos x \le \frac{sen\,x}{x} \le 1$

$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ e funzione costante è la costante stessa = 1 si ha:

$1 \le \frac{sen\,x}{x} \le 1$ per il teorema del confronto si ha che $\frac{sen\,x}{x} = 1$

$$\boldsymbol{\frac{tg\,x}{x} = 1}:$$

lo si può vedere come $\frac{tg\,x}{x} = \frac{sen\,x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$

passando al limite: $\lim_{x \to 0} \frac{tg\,x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen\,x}{x} (= 1) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} (= 1)$ quindi $\frac{tg\,x}{x} = 1$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}:$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

$sen^2x + cos^2x = 1 \rightarrow 1 - cos^2x = sen^2x$

si moltiplica numeratore e denominatore per 1+cosx:

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{sen^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{sen^2 x}{x^2}}_{\boxed{1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \cos x}}_{\boxed{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0}:$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\boxed{\frac{1}{2}}} \cdot \underbrace{x}_{\boxed{0}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Se f ammette come limite *l* con *f(x)* >0 e *l* >0 allora $\sqrt{f(x)}$ ammette come limite $\sqrt{l}$

Limiti Notevoli

$$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} \log x = \log x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} \log x - \log x_0 = 0$$

per una proprietà dei logaritmi si ha: $\log x - \log x_0 = \log \frac{x}{x_0}$

e quindi $\lim_{x\to x_0} \log x - \log x_0 = \lim_{x\to x_0} \log \frac{x}{x_0} = 0$

È verificata ricordando che $\lim_{x\to 1} \log x = 0$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} \frac{sen\,x - sen\,x_0}{x - x_0} = \cos x_0}$$

dalle formule di prostaferesi

senx – senx_0 = $2 \cdot sen\frac{x - x_0}{2} \cdot cos\frac{x + x_0}{2}$

sostituendo al numeratore e dividendo e moltiplicando il denominatore per 2 si ha:

$$\frac{2 \cdot sen\frac{x - x_0}{2}}{2 \cdot \frac{x - x_0}{2}} \cdot cos\frac{x + x_0}{2}$$ lasciando invariata la natura della funzione

il prodotto del limite è uguale al prodotto dei limiti

$$\lim_{x\to x_0} \frac{2 \cdot sen\frac{x - x_0}{2}}{2 \cdot \frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x\to x_0} cos\frac{x + x_0}{2} = 1 \cdot cos\,x_0 = cos\,x_0$$

Equivale a: $\lim_{x\to x_0} \frac{sen\,x}{x} = 1$
quando x→x_0 la differenza x–x_0→0 quindi l'argomento del seno tende a 0 rientrando nel caso del limite notevole

Vale cosx_0 perché quando x→x_0 si ha $cos\frac{x_0 + x_0}{2} = cos\frac{2x_0}{2}$

Si è detto che se *f(x)* ammette come limite *l* e se *f(x)*>0 e *l*>0 si ha che $\sqrt{f(x)}$ tende a $\sqrt{l}$

Analogamente vale che $\lim_{x\to x_0} \log f(x) = \log l$ con *f(x)*>0 e *l*>0

$\lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)}$ $\quad x_0 = \pm\infty$

se $a>1$ e $f(x)\to+\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = +\infty$

se $0 < a < 1$ e $f(x)\to+\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 0$

se $a>1$ e $f(x)\to-\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = 0$

se $0 < a < 1$ e $f(x)\to-\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)} = +\infty$

In generale se $f(x)\to l$ e se $g(x)\to m$ si ha che $[f(x)]^{g(x)}\to l^m$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

In generale $\lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$ se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

In generale $\lim\limits_{x\to x_0}\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)} = e$ se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

Es:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} = e$ poiché è del caso appena trattato

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = e \quad \to \lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = e \quad \to \lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$

$\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{\frac{1}{\cos x-1}}$ lo si può ricondurre ad un limite notevole: aggiungendo e sottraendo la stessa quantità la funzione rimane equilibrata;

aggiungendo e sottraendo 1 si ha: $\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}} = e$ è del tipo $\lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log a$ (forma indeterminata)

si pone $a^x-1 = t \to$ quando x tende a 0 a^x-1 tende a 0 quindi per poter avere questa uguaglianza anche $t = 0$

da cui si ricava $a^x \to a^x = 1 + t$

considerando l'uguaglianza con i logaritmi si ha: $\log a^x = \log(1+t)$

per una proprietà dei logaritmi si ha: $x\cdot\log a = \log(1+t)$

da cui si può ricavare la x: $x = \dfrac{\log(1+t)}{\log a}$

riconsiderando la funzione iniziale e attuando le opportune sostituzioni si ha: $\dfrac{a^x - 1}{x} = \dfrac{t}{\dfrac{\log(1+t)}{\log a}}$

portando loga a numeratore si ha: $\dfrac{a^x - 1}{x} = \dfrac{t \cdot \log a}{\log(1+t)}$

portando t a denominatore si ha: $\dfrac{a^x - 1}{x} = \dfrac{log\ a}{[log\,(1+t)] \cdot \dfrac{1}{t}}$

e per una proprietà dei logaritmi si ha: $\dfrac{a^x - 1}{x} = \dfrac{\log a}{[\log(1+t)]^{\frac{1}{t}}}$

calcolare $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$ equivale a calcolare $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\log a}{[\log(1+t)]^{\frac{1}{t}}}$

$\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\log a}{[\log(1+t)]^{\frac{1}{t}}}$

costante

Se $f(x) \to l$, $\log f(x) \to \log l$

$(1+t)^{\frac{1}{t}} \to e$ poiché è della forma $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$

quindi $\log(1+t)^{\frac{1}{t}} \to \log e = 1$

Quindi: $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\log a}{[\log(1+t)]^{\frac{1}{t}}} = \log a$

E di conseguenza anche $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log a$

Generalizzando: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \log a$ con $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Esercizio:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x}$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$ → x tende a zero assumendo valori positivi quindi si può portare tutto sotto il segno di radice: $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\dfrac{x^2+x^3}{x^2}}$,

mettendo x^2 in evidenza al numeratore si ha: $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{\dfrac{x^2(1+x)}{x^2}}$

dove semplificando per x^2 si ha: $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{(1+x)} = 1$

quindi il limite destro è = 1

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$ → x tende a zero assumendo valori negativi, quindi la funzione non si può portare sotto il segno di radice; ma il suo opposto si:

x = –(–x) se x<0 il suo opposto –x>0

quindi si ha: $\lim\limits_{x\to 0^+} -\sqrt{\dfrac{x^2+x^3}{(-x^2)}} = -1$

quindi il limite sinistro è = –1

Si deduce che il limite non esiste.

Esercizio:

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{1+x}-2}{x^2-9} = \dfrac{0}{0}$ razionalizzando:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{1+x}-2)(\sqrt{1+x}+2)}{(x^2-9)(\sqrt{1+x}+2)} = \frac{(1+x-4) = \cancel{x-3}}{(x+3)(\cancel{x-3})(\sqrt{1+x}+2)} = \frac{1}{\underbrace{(x+3)}_{3+3}\underbrace{(\sqrt{1+x}+2)}_{\substack{1+3\\ 4}}} = \frac{1}{24}$$

Esercizio:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{\log x}\right)^{\log x} = e$$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \left[1+(x-1)\right]^{\frac{1}{x-1}} = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} = \log 2$$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,3x}{sen\,2x}$ ricordando che:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen\,x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,x}{x} = 1$; e che $\dfrac{tg\,x}{x} = \dfrac{sen\,x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

e portando le giuste modifiche si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,3x}{sen\,2x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{2} \cdot \underbrace{\frac{tg\,3x}{3x}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{2x}{sen\,x}}_{\substack{\downarrow\\ 1}} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right)^x$$ si opera sull'esponente:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}\right]^{\frac{x+1}{x}}$$ equivale a $[f(x)]^{g(x)}$

$f(x) = \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ è un limite notevole: $f(x) \to e$

$g(x)$ = è una funzione fatta dal rapporto fra due polinomi dello stesso grado per cui si ha: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}\right]^{\frac{x+1}{x}} = e^1 = e$$

Limite notevole

$$\lim_{x \to x_0} \frac{[1+f(x)]^k - 1}{f(x)} = k$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

si pone $(1+x)^k-1= y$

$\rightarrow$ quando $x \rightarrow 0$ il primo membro dell'uguaglianza $(1+x)^k-1$ tende a 0, quindi perché l'uguaglianza sia ben posta anche $y \rightarrow 0$

$(1+x)^k = 1+y$

considerando i logaritmi: $\log(1+x)^k = \log(1+y)$

per una proprietà dei logaritmi: $k \cdot \log(1+x) = \log(1+y)$

$$k = \frac{\log(1+y)}{\log(1+x)}$$

sostituendo la funzione di partenza sarà $= \dfrac{y}{x}$

moltiplicando e sottraendo k si ha: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{k}{k}$

sostituendo solo il k a denominatore si ha: $\dfrac{y}{x} = k \cdot \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{1}{\dfrac{\log(1+y)}{\log(1+x)}} = k \cdot \dfrac{y}{x} \cdot \dfrac{\log(1+x)}{\log(1+y)}$

portando y dal numeratore al denominatore diventa $\dfrac{1}{y}$

quindi si avrebbe che: $= k \cdot \dfrac{\dfrac{1}{x} \cdot \log(1+x)}{\dfrac{1}{y} \cdot \log(1+y)}$

per una proprietà dei logaritmi si ha: $= \underbrace{k}_{\text{costante}} \cdot \dfrac{\log \overbrace{(1+x)^{\frac{1}{x}}}^{\boxed{e}}}{\log \underbrace{(1+y)^{\frac{1}{y}}}_{\boxed{e}}}$

$\boxed{\log e = 1}$

passando al limite: $\lim_{x \to 0} k \cdot \dfrac{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\log(1+y)^{\frac{1}{y}}}$

Quindi: $\lim\limits_{x \to 0} k \cdot \dfrac{\log(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\log(1+y)^{\frac{1}{y}}} = k$

Generalizzando: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{[1+f(x)]^k - 1}{f(x)} = k$ con $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Esercizio:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(1+\operatorname{sen} x)^3 - 1}{x} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{(1+\operatorname{sen} x)^3 - 1}{\operatorname{sen} x}}_{3} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1} = 3$$

Successioni:

sono funzioni del tipo f: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $f(x) = a(n)$

si indicano con $a(n)$ e gli elementi sono: $a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$

Sottosuccessione di una successione data:

Codominio = insieme che la funzione assume = $\{a_n\}$
(a_n) successione di partenza
Si considera (n_k) di numeri naturali crescenti
(a_{nk}) = successione i cui termini sono quelli di a_n i cui posti sono quelli di posto n_k: si chiama sottosuccessione.

<u>*Es:*</u> $a_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ $n_k = (k^2)$

$n_1 = 1,\ n_2 = 4,\ n_3 = 9,\ \ldots,\ n_k = k^2,\ \ldots, \to$ elementi di (n_k)

$a_{n1} = 1,\ a_{n2} = \dfrac{1}{4},$ $a_{n3} = \dfrac{1}{9}$ $a_{nk} = \dfrac{1}{k^2} \to$ elementi di (a_{nk})

Le successioni sono funzioni, quindi si può considerare il limite
Bisogna ricordare però che:
il dominio delle successioni è N; ed N è un insieme privo di punti di accumulazione e senza estremo superiore $\Rightarrow$ per questo si può considerare soltanto il limite per $x \to +\infty$

Si possono definire tre casi:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n = a$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n = +\infty$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n = -\infty$

1. Per definizione $\lim_{x \to +\infty} a_n = a$ significa che:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ cioè $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

Esercizi:

$\left(\frac{n+1}{n}\right)$ = successione di partenza

$\lim_{x \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ si verifica osservando che:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ cioè $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

riducendo allo stesso denominatore: $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right|$

semplificando si ha: $\frac{1}{n} < \varepsilon \ \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Allora n_ε lo si deve prendere in modo tale da essere: (ricordando che n_ε è un numero intero naturale): $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ perché così vale che $n \geq n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$

2. Per definizione $\lim_{x \to +\infty} a_n = +\infty$ significa che:

$\forall k > 0 \ \exists \ n_\varepsilon : \forall n \geq n_k \Rightarrow a_n > k$

Esempio:

$\sqrt{n}$ = successione di partenza

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ si verifica vedendo che:

$\forall k > 0 \ \exists \ n_\varepsilon : \forall n \geq n_k \Rightarrow \sqrt{n} > k$

ma $\sqrt{n} > k \Rightarrow n > k^2$

quindi si deve scegliere un $n_k > k^2$ in modo da avere $n \geq n_k > k^2$

3. Per definizione $\lim_{x \to +\infty} a_n = -\infty$ significa che:

$\forall k > 0 \ \exists \ n_\varepsilon : \forall n \geq n_k \Rightarrow a_n < -k$

Esempio:

$\left(\frac{1-n^2}{n}\right)$ = successione di partenza

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-n^2}{n} = -\infty$ si verifica vedendo che:

$\forall k>0\ \exists\, n_\varepsilon : \forall n \geq n_k \Rightarrow \dfrac{1-n^2}{n} < -k$

si osserva che si può scrivere $\dfrac{1-n^2}{n} = \dfrac{1}{n} - n \leq 1-n$ $\quad\longrightarrow 1-n < -k$

Se $1-n < -k$ anche $\dfrac{1-n^2}{n} < -k$ (perché è più piccolo di $1-n$)

$1-n < -k$ quando $n > 1+k$

Quindi si deve prendere $n_k > 1+k$ in modo da avere $n \geq n_k > 1+k$

Esempio:

$\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{n+1}{n} \neq 2$

se fosse = 2 dovrebbe valere che

$\forall \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left|\dfrac{n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon$

riducendo allo stesso denominatore: $\left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\dfrac{n+1-2n}{n}\right| = \left|\dfrac{n-1}{n}\right| = \dfrac{n-1}{n} < \varepsilon$

e quindi si ha: $1 - \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ se $\varepsilon < 1$ si ha che: $1-\varepsilon < \dfrac{1}{n} \Rightarrow n < \dfrac{1}{1-\varepsilon}$

Non è verificata, perché la disuguaglianza è verificata per tutti gli n più piccoli di un certo valore e non per tutti gli n più grandi (da un certo punto in poi) di un certo valore come richiede la definizione di limite.

Successione regolare

È una successione che ammette limite

- se $x = a$ si dice che converge ad a
- se $x = +\infty$ si dice che diverge positivamente
- se $x = -\infty$ si dice che diverge negativamente

Se una successione ammette limite ogni sua sottosuccessione è regolare e il limite coincide con quello della successione di partenza

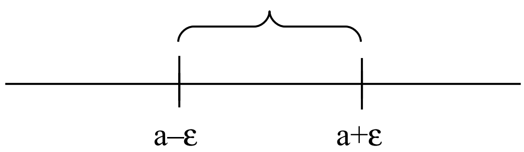
Se (a_n) è convergente ad a $\Rightarrow$ (a_n) è limitata [se una successione è convergente vuol dire che è limitata]

(a_n) converge ad a significa che $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} a_n = a$ quindi significa che:

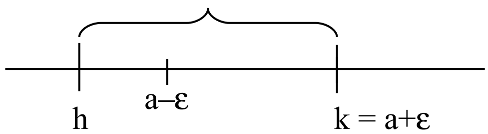
$\forall \varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ cioè $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$

(a_n) è limitata significa che il suo codominio è limitata cioè $\exists\, h,k : h \leq a_n \leq k$

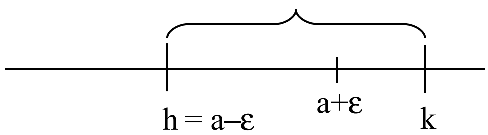
da un certo punto n_ε in poi i termini di a_n cadono in questo intervallo



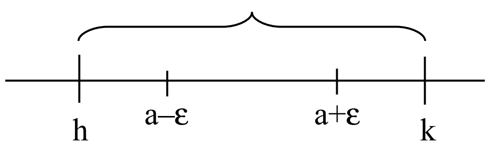
se, però, esistono altri termini che non ricadono nell'intervallo, ne stanno fuori quindi e
o cadono tutti prima di a–ε
o cadono tutti dopo a+ε
o cadono un po' prima di a–ε e un po' dopo a+ε



se i termini cadono prima di a–ε, si prendere h come il più piccolo di questi termini e k = a+ε



se i termini cadono tutti dopo a+ε, si prende h = a–ε e k come il più grande di questi termini



se i termini cadono agli esterni di a–ε un po' qua e un po' là si assume h come il più piccolo di quelli a sinistra di a–ε e k come il più grande di quelli che stanno a destra di a+ε

<u>Se si ha una successione limitata non è detto che sia convergente:</u>
Es: (a_n) = 1,0,1,0,1,0…..
Di questa successione ci sono due sottosuccessioni che ammettono limiti diversi

1,1,1…   e   0,0,0,…

Quindi cade il presupposto di base.

Tutto quello che vale per le funzioni (dalle successioni ai limiti notevoli) vale anche per le successioni.

Esempio:

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ poiché in generale accade che:

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ quando $\lim_{x\to+\infty} a_n = \pm\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+a_n\right)^{\frac{1}{a_n}} = e$ quando $\lim_{x\to+\infty} a_n = 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^2+n+5} = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+n}{n^3+5n+4} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{n^3+2n+3}{n^2+1} = +\infty$$

rapporti di polinomi in n valgono le stesse regole dei limiti di funzioni

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} a_n}{a_n} = 1$ se $\lim_{x\to+\infty} a_n = 0$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{a_n}-1}{a_n} = 1$ se $\lim_{x\to+\infty} a_n = 0$

$\lim_{x\to+\infty} n\cdot\sqrt[n]{3}-1 = +\infty\cdot 0 \rightarrow$ forma indeterminata

$$n\cdot\sqrt[n]{3}-1 = \frac{\sqrt[n]{3}-1}{\frac{1}{n}} = \frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \log 3$$

Esercizio

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{0}{0}$$

Dal momento che il limite è $x\rightarrow 1^+$ quindi x assume valori positivi, quindi x-1 >0 perciò si può portare tutto sottoradice:

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x+1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

Esercizio:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{sen\,x}=\frac{0}{0}$$

si moltiplica e divide per x: $\dfrac{(1+x)^2-1}{sen\,x}=\dfrac{(1+x)^2-1}{x}\cdot\dfrac{x}{sen\,x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}\cdot\frac{x}{sen\,x}=2\cdot 1=2$$

Esercizio

$$\lim_{x\to 1}\left[\frac{3^{x-1}-1}{x-1}-\frac{2^{x-1}-1}{1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{3^{x-1}-1}{x-1}-\lim_{x\to 0}\frac{2^{x-1}}{x-1}=\log 3-\log 2=\log\frac{3}{2}$$

Criterio di Stolz-Cesario

Date due successioni (a_n) e (b_n) con (b_n) strettamente monotona

se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ oppure $\lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$

e se $\left(\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\right)$ è regolare

allora anche $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ è regolare e $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\right)$

(è utile per la risoluzione di limiti di successioni che danno come risultato forme indeterminate del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$

Esempio:

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots}{\log(n+1)}$ si sa che la successione a denominatore tende a +∞ ed è monotona

per calcolarlo si ricorre al criterio e si considera la successione $\left(\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}\right)$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right)}{\log(n+1)-\log n}$$

al numeratore la differenza viene $\dfrac{1}{n}$

al denominatore la differenza viene $\log\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

quindi si ha: $\dfrac{\frac{1}{n}}{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \dfrac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

portando a denominatore $\dfrac{1}{n}$ si ha: $\dfrac{1}{n\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

per una proprietà dei logaritmi: $\dfrac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

passando al limite: $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

al limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

perciò al denominatore si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\log e} = \frac{1}{1} = 1$

quindi la successione di partenza ammette come limite 1

Conseguenze del teorema di Stolz-Cesaro

1° - Se (a_n) successione regolare, anche la successione $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n}{n}$ è regolare e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

La successione a denominatore è crescente e ammette come limite $+\infty$
Si verifica applicando il criterio

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n)-(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})}{n-(n-1)}$$

operando la differenza: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1} = \lim_{n\to+\infty} a_n$

2° - Se (a_n) è una successione regolare di numeri positivi (cioè $a_n>0$) anche la successione $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n}$ è regolare e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n$

Si considera la successione $\log\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n} = \log(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}$

Per le proprietà dei logaritmi si ha: $\frac{1}{n}\cdot\log a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n$

Portando $\frac{1}{n}$ a denominatore si ha: $\frac{\log a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n}{n}$

Per una proprietà dei logaritmi si ha: $\frac{\log a_1+\log a_2+\ldots+\log a_{n-1}+\log a_n}{n}$

Adesso si può applicare il criterio della prima conseguenza del criterio:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log a_1+\log a_2+\ldots+\log a_{n-1}+\log a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \log a_n$$

Se il logaritmo della successione di partenza ammette come limite il loga_n, la successione in se ammette come limite a_n (→ questa è una proprietà dei logaritmi)

3° - Se (a_n) è una successione di numeri positivi ($a_n>0$)

Se $\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$ è regolare anche $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ è regolare e $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}$ → semplificando numeratori con denominatori l'uguaglianza è verificata

Per il criterio precedente si ha: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

Esercizi:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$ → n è una successione regolare a valori positivi, quindi si può applicare l'ultimo criterio:

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = 1$ → due polinomi in n dello stesso grado

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{2}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \log 2$$

$\boxed{\text{Limite notevole}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{2}{n}}-e^{\frac{1}{n}}\right)$ → portando n a denominatore e mettendo $e^{\frac{1}{n}}$ in evidenza a numeratore si ha:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}$: → in $e^{\frac{1}{n}}$ per n→+∞ l'esponente tende a 0, quindi $e^{\frac{1}{n}}$ →1

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}$ → limite notevole = log$e$ = 1

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ → razionalizzando: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1+n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ → il denominatore tende a +∞: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{+\infty} = 0$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2-n}$ → per il criterio si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n}{(n-1)^2-(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n}{n^2-2n+1-n-1} =$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n}{n^2-3n+2} = 1$→ polinomio in n dello stesso grado

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$$ → per il criterio: $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}$$ → portando n a

denominatore: $$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}$$

razionalizzando: $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{n\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{n(n-n+1)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{n}=$$

separando la funzione: $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{\sqrt{n-1}}{n}$$ → portando i due addendi sotto i segni di radice:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n-1}{n^2}}$$ = semplificando: $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{n-1}{n^2}}$$ →

per n→+∞ le due funzioni tendono a 0: $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{n-1}{n^2}}=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^n$$ si ricorre al limite notevole $(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}$ quando $a_n\to 0$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}}_{\boxed{e}}\right]^{\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\boxed{1}}}\qquad \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{n-1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n-1}}\right]^{\frac{n-1}{n}}=e^1=e$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{tg\frac{1}{n}-sen\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}$$

$tg\frac{1}{n}=\dfrac{sen\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}}$ mettendo in evidenza $\text{tg}\frac{1}{n}$ a numeratore si ha: $\dfrac{sen\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}}\cdot\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ quindi:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{tg\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^3}}$$. Spezzando la funzione: $$\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{tg\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}}_{\boxed{1}}\cdot\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}}_{\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

Esercizio teorico per fare vedere che anche per le successioni valgono gli stessi teoremi

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$

sembrerebbe che il limite di questa somma faccia 0, ma invece non è così:
guardando gli elementi, essi sono in numero di n+1;
il primo rispetto al secondo è maggiore, il secondo rispetto al terzo pure e così via ⇒ si susseguono in ordine decrescente.

In un primo passaggio si prendono tutti uguali all'ultimo (che è il più piccolo)
$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}$ e si osserva che questa somma è $\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$
In un secondo passaggio si rendono tutti uguali al primo (che è il più grande)
$\frac{n+1}{\sqrt{n^2}}$ e si osserva che questa somma è $\frac{n+1}{\sqrt{n^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Quindi la successione di partenza è compresa fra due successioni perciò si può usare il teorema nel confronto:

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n+1}{\sqrt{n^2}}$$

ma: $\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}$ mettendo in evidenza n a numeratore e n^2 a denominatore si ha: $\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$

estraendo n^2 dal denominatore si ha: $\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$;semplificando per n: $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$

calcolando il limite: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}=1$

ma: $\frac{n+1}{\sqrt{n^2}}=\frac{n+1}{n}$ = calcolando il limite: $\lim_{x\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$

Quindi la successione di partenza è compresa fra due successioni che tendono ad 1 perciò anche essa tenderà ad 1

$$1=\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n+1}{\sqrt{n^2}}=1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$$

Funzioni Continue

Data f: A→R

Se $x_0 \in R$, x_0 è un punto isolato, f è continua in x_0 per definizione

Se $x_0 \in R$, x_0 è punto di accumulazione → f è continua in x_0 quando $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ovvero quando $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

[attenzione! Fin ora si erano considerati intorni bucati dove $\forall x \in I(x_0) \cap A - \{x_0\}$; nelle funzioni continue il buco non c'è]

f si dice continua in A quando è continua in ogni suo punto

$\lim_{x \to x_0} \log x = \log x_0$ → la funzione log$x$ è continua

$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ → $\sqrt{x}$ è continua

$\lim_{x \to x_0} sen\, x = sen\, x_0$ → sen$x$ è continua

$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$ → $P(x)$ è continua

Il prodotto fra funzioni continue è una funzione continua
La somma fra funzioni continue è una funzione continua
Il valore assoluto di una funzione continua è una funzione continua
Il rapporto (quando è definito) fra funzioni continue è una funzione continua

Per le funzioni continue valgono tutte le regole, le proprietà e i teoremi fin ora enunciati

Teorema della permanenza del segno

f continua in $x_0 \in A$, $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists\ I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A$ si ha $f(x) \cdot f(x_0) > 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

cioè $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

è lecito porre $\varepsilon = |f(x_0)|$ perciò: $f(x_0) - |f(x_0)| < f(x) < f(x_0) + |f(x_0)|$

Se $f(x_0) > 0$ $\Rightarrow f(x_0) - |f(x_0)| = f(x_0) - f(x_0) = 0$
$f(x_0) + |f(x_0)| = f(x_0) + f(x_0) = 2f(x_0)$

quindi $0 < f(x) < 2f(x_0)$

Se $f(x_0) < 0$ $\Rightarrow f(x_0) - |f(x_0)| = f(x_0) - [-f(x_0)] = 2f(x_0)$
$f(x_0) + |f(x_0)| = f(x_0) + [-f(x_0)] = 0$

quindi $2f(x_0) < f(x) < 0$

Teorema di Continuità delle Funzioni Composte

Date due funzioni f: A→B e g:B→C

Per ipotesi 1) f è continua in $x_0 \in A$
2) g è continua in $f(x_0) \in B$

Si dimostra che g°f: A→C è continua in x_0

2) significa che $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ I(f(x_0)) =]\ f(x_0) - \sigma;\ f(x_0) + \sigma\ [$ con $\sigma > 0 : \forall y \in I(f(x_0)) \cap B \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

1) significa che $\forall \sigma > 0\ \exists\ I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap A \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \sigma$ cioè $f(x_0) - \sigma < f(x) < f(x_0) + \sigma$

Ma questa disuguaglianza significa anche che $f(x) \in I(f(x_0))$
(nessuno impedisce che $y = f(x)$)
sostituendo $y = f(x_0)$ in $|g(y)-g(f(x_0))| < \varepsilon$ si ha $|g(f(x))-g(f(x_0))| < \varepsilon$
e questo per definizione significa che la composta è continua perché si ha che:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ I(f(x_0)) =: \forall y \in I(f(x_0)) \cap B \Rightarrow |g(f(x))-g(f(x_0))| < \varepsilon$ da cui deriva $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$

Funzioni Discontinue

Se una funzione non è continua in un punto allora si dice che è discontinua.

La discontinuità può essere di tre specie:
1. di prima specie
2. di seconda specie
3. di terza specie o eliminabile

Si ha la discontinuità di **prima specie** quando esistono i limiti destro e sinistro per $x \to x_0$ della funzione, tali limiti sono finiti ma sono diversi tra loro,
cioè quando esiste $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = b$ ma $a \neq b$

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

In $x_0 = 0$ si ha una discontinuità di prima specie

In $x \to 0^+$ x si avvicina a 0 assumendo valori positivi, allora si può portare tutta la funzione sotto il segno di radice:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

In $x \to 0^-$ x si avvicina a 0 assumendo valori negativi, quindi non si può portare tutta la funzione sotto il segno di radice, ma l'opposto $-x$ è positivo quindi si ha:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{-(-x)} = \lim_{x \to 0^-} -\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}$$

I due limiti esistono
e sono diversi

Si ha la discontinuità di **seconda specie** quando uno dei due limiti non esiste o non esiste finito
Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \end{cases}$$

In $x_0 = 0$ si ha una discontinuità di prima specie

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0\end{array}\right\}$$

> Il limite destro tende a + ∞
>
> Mentre il limite sinistro esiste finito e nel punto $x_0 = 0$ la funzione è continua perché il limite sinistro è uguale al valore che la funzione assume nel punto $x_0 = 0$

Si ha la discontinuità di **terza specie** quando esiste il limite della funzione ma questo limite è diverso dal valore che la funzione assume nel punto.

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{sen\,x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{sen\,x}{x} = 1$$

ma in x_0 la funzione vale 0. Questa discontinuità si può eliminare se si attribuisce il valore 1 a f(x) quando x = 0 cioè se la funzione si definisce:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sen\,x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio:

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{sen\,x}$ mettendo in evidenza e^{2x} e moltiplicando $\dfrac{x}{x}$ si ha: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}(e^x - 1)}{sen\,x} \cdot \frac{x}{x} =$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{e^{2x}}_{\boxed{1}} \cdot \underbrace{\frac{(e^x - 1)}{x}}_{\boxed{1}} \cdot \underbrace{\frac{x}{sen\,x}}_{\boxed{1}} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Esercizio:

$\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ aggiungendo e sottraendo 1 si ha: $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left[1 + (x-1)\right]^{\frac{1}{1-x}}$

per ricondurlo al limite notevole, ma non potendo snaturalizzare il segno della *x* si ha:

$$\lim_{x\to 1} \left\{\left[1 + (x-1)\right]^{\frac{1}{x-1}}\right\}^{-1} = e$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left[\left(1 + sen\tfrac{1}{x}\right)^3 - e^{\frac{1}{x}}\right] \to \lim_{x\to +\infty} \frac{\left[\left(1 + sen\tfrac{1}{x}\right)^3 - e^{\frac{1}{x}}\right]}{\dfrac{1}{x}}$$

aggiungendo e sottraendo 1 si ha: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\left(1+sen\frac{1}{x}\right)^3-1+1-e^{\frac{1}{x}}\right]}{\frac{1}{x}}$

spezzando la funzione si ha: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\left(1+sen\frac{1}{x}\right)^3-1\right]}{\frac{1}{x}}-\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

moltiplicando e dividendo per $sen\frac{1}{x}$ si ha: $\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\left[\left(1+sen\frac{1}{x}\right)^3-1\right]}{sen\frac{1}{x}}}_{\boxed{3}}\cdot\underbrace{\frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}_{\boxed{1}}-\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}}_{\boxed{1}}=3-1=2$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen\,x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$ poiché il seno a $\frac{\pi}{2}$ vale 1 si ha: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen\,x-sen\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$

utilizzando le formule di prostaferesi:

$\mathrm{sen}x-\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}=2\cdot sen\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}$ si ha: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot sen\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$

al numeratore si ha: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}$ poiché il limite tende a $\frac{\pi}{2}$ si ha: $cos\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{2}=cos\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} cos\frac{\pi}{2}=0$

mentre in $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot sen\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}$ si porta il 2 a denominatore ottenendo: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}$

si tratta di un limite notevole che fa $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sen\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}{\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}}=1$

Quindi tutto il limite è uguale a: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot sen\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}}{x-\frac{\pi}{2}}=1\cdot 0=0$

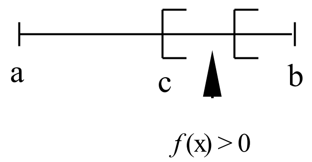
Teoremi di esistenza degli zeri

Data f: $[a,b] \to R$ con f continua in tutto l'intervallo $[a,b]$,
tale che agli estremi dell'intervallo assuma valori discordi ovvero $f(a) \cdot f(b) < 0$
Allora esiste un $c \in \,]a,b[\, : f(c) = 0$

Considerando che $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow$ o $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ oppure $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$
La dimostrazione si fa con $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$
ma in maniera del tutto analoga si dimostra con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

Supponendo che $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ si considera un insieme A
$A = \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$
$A \neq 0 \rightarrow$ contiene almeno un elemento che è a poiché per ipotesi $f(a) > 0$
A è limitato superiormente poiché gli elementi di questo insieme sono gli elementi di $[a,b]$ che è un intervallo limitato.
Per l'assioma sull'estremo superiore l'insieme A è dotato di estremo superiore che si chiamerà c:
$c = \sup A$
Si dimostra che esiste $c \in \,]a,b[\, : f(c) = 0$
L'estremo superiore è un elemento compreso fra $a \leq c \leq b$
Infatti essendo estremo superiore è un maggiorante e in quanto tale risulta maggiore di ogni elemento ed in particolare di a
essendo estremo superiore è il più piccolo di tutti i maggioranti quindi in particolare risulterà minore o uguale rispetto a b

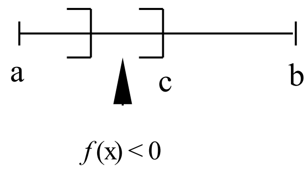
Si suppone per assurdo che $f(c) > 0$
Dall' eguaglianza $a \leq c \leq b$ si ricava che $c \leq b$, ma si può escludere l'uguaglianza perché $f(b) < 0$ mentre per ipotesi $f(c) > 0$; quindi $c < b$
per il teorema di permanenza del segno esiste un intorno destro del punto c tale che per ogni punto di questo intorno la funzione assume valori maggiori di zero;
ma questo è un assurdo, infatti i valori dell'intorno destro di c fanno



parte dell'insieme A e in questo modo c non si potrebbe più considerare un maggiorante e ciò va contro l'ipotesi.
Quindi $f(c)$ non può essere > 0

supponendo per assurdo $f(c) < 0$
Dall' eguaglianza $a \leq c \leq b$ si ricava che $a \leq c$, ma si può escludere l'uguaglianza perché $f(a) > 0$ mentre per ipotesi $f(c) < 0$, quindi $a < c$
per il teorema di permanenza del segno esiste un intorno sinistro del punto c tale che per ogni punto di questo intorno la funzione assume valori minori di zero;

ma questi elementi non fanno parte dell'insieme A poiché in A ci sono



solo i valori per cui la funzione risulta maggiore di zero.
E questo è nuovamente un assurdo perché c non potrebbe essere estremo superiore
Quindi f(c) non può essere <0

Teorema dei valori intermedi

Data $f: I \to R$ con f continua in tutto l'intervallo I , dove $\exists$ $a,b \in I$ con $a<b$: $f(a) = \alpha$; $f(b) = \beta$ e $\alpha<\beta$
Se la funzione assume 2 valori distinti [α e β con $\alpha < \beta$] $\Rightarrow$ la funzione assume tutti i valori fra essi compresi

Dimostrazione:

Si denota con γ un numero compreso fra α e β [$\alpha < \gamma < \beta$] e si deve dimostrare che γ è un valore assunto dalla funzione nell'intervallo

Si considera una seconda funzione $F: [a,b] \to R$ definita dalla legge $F(x) = f(x) - \gamma$
La F è una funzione continua poiché è somma di funzioni continue
Si applica la funzione F nel punto a ottenendo
$F(a) = f(a) - \gamma \to \alpha - \gamma < 0$
Si applica la F anche nel punto b ottenendo
$F(b) = f(b) - \gamma \to \beta - \gamma > 0$
Poiché in F(a) e in F(b) la funzione assume valori discordi, per il teorema di esistenza degli zeri esisterà $F(x) = 0$ e questo lo si otterrà calcolando la F in un punto c, infatti $F(c) = f(c) - \gamma = 0$
e quindi si ha che $f(c) = \gamma$; dove f(c) è compreso fra f(a) e f(b) [$f(a) < f(c) < f(b)$]
e c è compreso fra a e b [$a < c < b$]

Conseguenze

- ✓ Se si ha una funzione f continua il cui dominio è un intervallo, il suo codominio sarà anch'esso un intervallo
- ✓ Se il codominio di una funzione è un intervallo, non si può dire con certezza che la funzione sia continua
- ✓ Se il codominio di una funzione non è un intervallo, allora si può dire che la funzione non è continua

Teorema di Weierstrass

(senza dimostrazione)

Data $f: [a,b] \to R$ f continua in [a,b].
Esistono due valori $\alpha,\beta \in [a,b]$: $f(\alpha) = \min f$ e $f(\beta) = \operatorname{Max} f$.
Il codominio della funzione risulta un intervallo chiuso di estremi il minimo e il massimo ossia: codf [m,M]

Teorema di continuità delle funzioni monotone

(senza dimostrazione)

Data f: $I \rightarrow R$ I = intervallo della retta reale. f = funzione monotona
f è continua $\Leftrightarrow$ il suo codominio è un intervallo

Teorema per le funzioni strettamente monotone

Data f: $I \rightarrow R$ I = intervallo della retta reale. f = funzione strettamente monotona in I

Ipotesi	Tesi
Se la f è iniettiva e ammette inversa $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$	la funzione f^{-1} sarà strettamente monotona e sarà dello stesso tipo della f: se la f è crescente la f^{-1} sarà crescente, se la f è decrescete la f^{-1} sarà decrescente

<u>*Dimostrazione*</u>: (si ci mette nel caso in cui la f sia crescente)
Si dimostra che la f è iniettiva, ovvero dati $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Dal momento che la f è strettamente monotona si ha che o $x_1 < x_2$ oppure $x_1 > x_2$
Dal momento che la f si suppone crescente si ha che quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
e quando $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
Quindi f è iniettiva

<u>*Dimostrazione*</u> che l'inversa è anche crescente
Tesi $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ crescente
Ovvero si deve dimostrare che $y_1, y_2 \in f(I) \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ con $y_1 < y_2$
Si denota con $x_1, x_2 \in I : f(x_1) = y_1 ; f(x_2) = y_2$
dimostrando per assurdo si suppone che $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) \Rightarrow x_1 \geq x_2$
da qui segue che: $f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow y_1 \geq y_2$
ma si è giunti ad un assurdo poiché si era supposto che $y_1 < y_2$

Teorema di continuità della funzione inversa

Ipotesi: $f: I \rightarrow R$ f è strettamente monotona e continua
Tesi: $f^{-1}: f(I) \rightarrow I$ f^{-1} è strettamente monotona dello stesso tipo della f e continua

La dimostrazione è diretta conseguenza dei teoremi precedenti:
Infatti f(I) è un intervallo e I è pure un intervallo e per teorema di continuità delle funzioni monotone f^{-1} risulta continua; mentre per il teorema per le funzioni strettamente monotone la f^{-1} risulta strettamente monotona dello stesso tipo della f

Esempio:

sen$x$ la si considera nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1]$ funzione crescente

Dire che una funzione è crescente vuol dire che presi $x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow senx_1 < senx_2$

da cui segue che $senx_2 - senx_1 > 0$

dalle formule di prostaferesi si ha: $senx_2 - senx_1 = 2 \cdot sen\frac{x_2 - x_1}{2} \cdot cos\frac{x_2 + x_1}{2}$

Quindi bisogna dimostrare che $2 \cdot sen\frac{x_2 - x_1}{2} \cdot cos\frac{x_2 + x_1}{2}$ è positivo

per dedurre che anche $senx_2 - senx_1 > 0$

Dimostrazione:

2 è sempre >0

$sen\frac{x_2 - x_1}{2}$: Sulla natura di x_1, x_2 si può dire che : $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$

Quindi la differenza $x_2 - x_1$ risulta $0 \leq x_2 - x_1 \leq \pi$,

Dividendo la disuguaglianza per 2 si ha: $0 \leq \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2}$

Ma il seno di un numero compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ è sempre >0, quindi $sen\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$

$cos\frac{x_2 + x_1}{2}$: Ragionando ancora sulla natura di x_1, x_2 si può dire che:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < \frac{\pi}{2} \quad +$$

$$-\frac{\pi}{2} < x_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad =$$

sommando membro a membro si ha:

$$-\pi \leq x_1 + x_2 \leq \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

Ma il coseno di un numero compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ è sempre>0 quindi $cos\frac{x_2 + x_1}{2} > 0$

Dal momento che $2 \cdot sen\frac{x_2 - x_1}{2} \cdot cos\frac{x_2 + x_1}{2}$ risulta >0 anche $senx_2 - senx_1 > 0$

Quindi la funzione seno è una funzione crescente

La funzione inversa ossia la funzione arcsen è anch'essa crescente e continua in $[-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Esempio:

tg$x$ la si considera nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\rightarrow R$

si dimostra strettamente monotona e crescente:

Dire che una funzione è crescente vuol dire che

presi $x_1, x_2 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $x_1 < x_2 \Rightarrow tgx_1 < tgx_2$

quindi $tgx_2 - tgx_1 > 0$

Scomponendo la tg e calcolando il minimo comune multiplo

si ha: $\dfrac{sen\, x_2}{cos\, x_2} - \dfrac{sen\, x_1}{cos\, x_1} = \dfrac{sen\, x_2\, cos\, x_1 - sen\, x_1\, cos\, x_2}{(cos\, x_2)(cos\, x_1)}$

per le formule di sottrazione del seno il numeratore diventa: $\dfrac{sen(x_2 - x_1)}{(cos\, x_2)(cos\, x_1)}$

Il denominatore >0 poiché il coseno di un numero compreso fra $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$ è sempre>0

Ragionando sulla natura di x_1, x_2 si ha che $-\dfrac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$

Da cui segue che $x_1 - x_2$ è $0 < x_2 - x_1 < \pi$

Ma il seno di un numero compreso fra 0 e π è sempre >0, quindi il numeratore è >0

Quindi la funzione tangente è una funzione crescente

La funzione inversa ossia la funzione arctg è anch'essa crescente e continua in R→ $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Derivate

Data f: I→R $x_0 \in I$ I = Intervallo aperto della retta reale

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ = rapporto incrementale della funzione

$x - x_0 =$ incremento della variabile indipendente nel passaggio da x_0 a x

$f(x) - f(x_0)$ = incremento della funzione nel passaggio da x_0 a x

La derivata è il limite del rapporto incrementale della funzione, se esiste ed è finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$$ in simboli anche $(Df)(x_0)$ oppure $\left(\frac{df}{dx}\right)$

derivata destra: $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x)$

derivata sinistra: $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x)$

Se esistono deriva da destra e sinistra e sono finite e uguali, esiste la derivata e viceversa.

Considerando f: R→R : $f(x)=k$ (→costante)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{k - k}{x - x_0} = 0 \qquad \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

Esempio $f(x) = 4f'(x) = 0$

In generale: $f'(k) = 0$

Una funzione è derivabile in x_0 quando esiste la derivata. Se la funzione è dotata di derivata in ogni punto del suo dominio è una funzione derivabile.

Data f: I→R

La funzione che ad ogni $x \in I$ associa $f'(x)$ si chiama **derivata prima** ed è una funzione f': I→R

La *derivata in un punto* è diversa dalla *funzione derivata*

Limite del rapporto incrementale

Funzione che ad ogni punto della funzione derivabile associa la derivata in quel punto

Esempio:

f: R→R $f(x) = x$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \qquad \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

In generale: $f'(x) = 1$

Questo si estende a tutto il dominio perché facendo il limite per ogni punto del dominio si ottiene sempre la stessa cosa.

Teorema

Si dimostra che data f: I→R se questa funzione è derivabile in $x_0 \in I$ ⇒ la funzione è continua in $x_0 \in I$

Una funzione può essere continua ma non derivabile

Una funzione che non è continua non è derivabile

derivabilità: ⇒ continuità

continuità non ⇒ derivabilità → la continuità è una condizione necessaria ma non sufficiente perché la funzione sia derivabile

Ipotesi: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$

Tesi: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Dalla tesi segue che: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$

$f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$ passando al limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

poiché $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$ equivale a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ si ha che la funzione è continua

Esempio:

f(x) = |*x*| questa funzione non è derivabile nel punto $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad f'_+(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \qquad f'_-(x) = -1$$

La derivata destra e la derivata sinistra sono diverse.

Invece quando $x_0 \neq 0$ la funzione è derivabile:

quando se $x_0 > 0$ si ha: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

se $x_0 < 0$ si ha: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{-x + x_0}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} -\dfrac{(x - x_0)}{x - x_0} = -1$

Esempio:
f(x) = sen*x* *f'(x)* = cos*x*

$\underset{x\to x_0}{Lim}\frac{sen\,x - sen\,x_0}{x - x_0} = \cos x_0$ limite notevole calcolato con le formule di prostaferesi

f(x) = cos*x* *f'(x)* = –sen*x*

$\underset{x\to x_0}{Lim}\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -sen\,x_0$ limite notevole da calcolare con le formule di prostaferesi

Esempio:
f(x) = e^x *f'(x)* = e^x

$$\underset{x\to x_0}{Lim}\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \underset{x\to x_0}{Lim}\frac{e^{x_0}(e^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} = e^{x_0}$$

Esempio:
f(x) = $\sqrt{x}$ *f'(x)* = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\underset{x\to x_0}{Lim}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0}$$

il denominatore si può scrivere come scomposizione di binomio:

$$\underset{x\to x_0}{Lim}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \underset{x\to x_0}{Lim}\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \underset{x\to x_0}{Lim}\frac{1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Esempio:
f(x) = log*x* *f'(x)* = $\frac{1}{x}$

$$\underset{x\to x_0}{Lim}\frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \underset{x\to x_0}{Lim}\frac{\log\frac{x}{x_0}}{x - x_0}$$

si pone $\frac{x}{x_0} = 1 + t$ 1+*t*⟶1 quando *t*⟶0

$\frac{x}{x_0} = 1 + t$ ⟶ ricavando x si ha: $x = x_0 + x_0 t$

calcolare $\underset{x\to x_0}{Lim}$ equivale a calcolare $\underset{t\to 0}{Lim}$

sostituendo si ha:

$$\underset{t\to 0}{Lim}\frac{\log(1+t)}{x_0 - x_0 + x_0 t} =$$

semplificando: $\underset{t\to 0}{Lim}\frac{\log(1+t)}{x_0 t} =$

si scompone il denominatore e poiché $\frac{1}{x_0}$ è una costante al limite non varia: $\frac{1}{x_0} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} =$

portando $\frac{1}{t}$ a numeratore: $\frac{1}{x_0} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \log(1+t) =$

per una proprietà dei logaritmi: $\frac{1}{x_0} \cdot \lim_{t \to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} =$

calcolando il limite: $\frac{1}{x_0} \cdot \lim_{t \to 0} \log e = \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0}$

Teroma (derivata della funzione somme di funzioni)

Date due funzioni f,g: I→R $x_0 \in I$
f e g sono derivabili in $x_0 \in I$
la funzione $f(x)+g(x) = F(x)$ è derivabile in $x_0 \in I$ e la sua derivata $F'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$

Poiché $F(x)$ sia derivabile in x_0 deve esistere finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0}$$

per l'associativa si ha: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

spezzando la funzione si ha: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

poiché per ipotesi f e g sono derivabili in x_0 si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Esercizio:

$f(x) = 3+x \qquad f'(x) = 1$

$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \qquad f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$

$f(x) = \log x + \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = e^x + x \qquad f'(x) = e^x + 1$

Quindi la derivata di una somma è la somma delle derivate

Teorema (derivata di un prodotto di due funzioni)

Date due funzioni f,g: I→R $x_0 \in I$
f e g sono derivabili in $x_0 \in I$
la funzione $f(x) \cdot g(x) = F(x)$ è derivabile in $x_0 \in I$ e la sua derivata $F'(x_0) = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0}$$

addizionando e sottraendo $f(x_0) \cdot g(x)$ si ottiene:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{[f(x) \cdot g(x)] - [f(x_0) \cdot g(x)] + [f(x_0) \cdot g(x)] - [f(x_0) \cdot g(x_0)]}{x - x_0}$$

nella prima differenza si può mettere in evidenza $g(x)$ mentre nella seconda differenza $f(x_0)$ e si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)[f(x) - f(x_0)] + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0}$$

spezzando si ha: $\lim_{x \to x_0} g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) \cdot g'(x_0) + f'(x_0) \cdot g(x_0)$$

Esempio:

$f(x) = 2$; $g(x) = x$ $F(x) = 2x$ $F'(x) = 2$

La derivate di una costante per una funzione è uguale al prodotto fra la costante e la derivata della funzione

Esempio:

$f(x) = x^2 = x \cdot x$ $f'(x) = x \cdot 1 + 1 \cdot x = 2x$

calcolando $f(x) = x^2$ col rapporto incrementale $\lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} =$

$\lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$

$f(x) = x \cdot \mathrm{sen}x$ $f'(x) = 1 \cdot \mathrm{sen}x + x \cdot \cos x$

$f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot sen\, x$

Teorema (derivata del rapporto di due funzioni)

f,g: I→R, I intervallo aperto di R, $x_0 \in I$ con f,g derivabili in $x_0 \in I$

la funzione $\frac{f(x)}{g(x)} = F(x)$ è derivabile in $x_0 \in I$ e la sua derivata è

$$F'(x) = \frac{g(x_0)\cdot f'(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Dimostrazione:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}$$

riducendo allo stesso denominatore: $\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(x_0)}}{x-x_0} =$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} \cdot \frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x)}{x-x_0}$$

aggiungendo e sottraendo $f(x_0)\cdot g(x_0)$ si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} \cdot \frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x)}{x-x_0}$$

mettendo in evidenza nella prima differenza $g(x_0)$ e nella seconda $f(x_0)$ si ha:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0)\cdot [f(x) - f(x_0)] - f(x_0)\cdot [g(x) - \cdot g(x_0)]}{x-x_0}$$

Spezzando la funzione si ha: $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)\cdot g(x_0)} \cdot \left[g(x_0)\cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\cdot \frac{g(x) - \cdot g(x_0)}{x-x_0} \right]$

$$= \frac{g(x_0)\cdot f'(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Esempio:

$f(x) = \text{tg}x = \frac{sen\,x}{\cos x}$ $\quad f'(x) = \frac{\cos x\cdot \cos x + sen\,x\cdot sen\,x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f(x) = \text{cotg}x = \frac{\cos x}{sen\,x}$ $\quad f'(x) = -\frac{sen\,x\cdot sen\,x + \cos x\cdot \cos x}{sen^2 x} = -\frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{1}{sen^2 x}$

$f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$ $\quad f'(x) = \frac{(1+x^2)(-1) - 2x(1-x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-1-x^2-2x+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$

$f(x) = \frac{e^x - 1}{x+1}$ $\quad f'(x) = \frac{(x+1)e^x - e^x + 1}{(x+1)^2}$

$f(x) = \dfrac{2x+2e^x}{x^2+2} = \dfrac{2(x-e^x)}{x^2+2}$ $f'(x) = \dfrac{2(x^2+2)(1+e^x)-4x(x+e^x)}{(x^2+2)^2}$

Regole di derivazione:

$F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ $F'(x_0) = -\dfrac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $f'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f(x) = x^n$ $D\,x^2 = n\cdot x^{n-1}$

si usa il principio di indizione

per comodità di dimostrazione il caso base anziché per 1 lo si fa per 2

Dimostrazione:

n = 2

$f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$ ←già calcolato $D\,x^2 = 2x$

supposta vera per n la si dimostra vera per n+1

$D\,x^n = n\cdot x^{n-1}$

$D\,x^{n+1} = (n+1)x^n$

$D\,x^{n+1} = D\,(x^n\cdot x) = n\cdot x^{n-1}\cdot x + x^n = n\cdot x^n + x^n$

Mettendo x^n in evidenza si ha: $x^n(n+1)$ → la tesi risulta verificata

Esempio:

$f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$

$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$

$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $f'(x) = \dfrac{n}{x^{n+1}}$ → caso particolare di $F(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

$$f'(x) = -\frac{n\cdot x^{n-1}}{x^{2\cdot n}} = -\frac{n}{x^{2\cdot n-n+1}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5}$

Derivate ennesime

Data f: I→R

$f'(x)$ = derivata prima

$Df'(x) = f''(x)$ derivata della derivata prima = derivata seconda

$Df''(x) = f'''(x)$ derivata della derivata seconda = derivata terza

$Df'''(x) = f^{iv}(x)$ derivata della derivata terza = derivata quarto

$Df^{n-1}(x) = f^n(x)$ derivata della derivata n-1esima = derivata n-esima

Esempio:

$f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad f^{iv}(x) = -\frac{6}{x^4}$

$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\operatorname{sen} x \quad f'''(x) = -\cos x \qquad f^{iv}(x) = \operatorname{sen} x$

Funzione differenziale in un punto

Data f: I→R con $x_0 \in I$
f è differenziale in $x_0 \in I$
se esistono una costante A e una funzione ω: I→R con la condizione che $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$
tale che $f(x) - f(x_0) = [A+\omega(x)](x - x_0)$

Teorema:

Una funzione *f* è derivabile nel punto $x_0 \in I$ ⇔ la funzione *f* è differenziabile nel punto $x_0 \in I$

⇐
Ipotesi: *f* è differenziabile in un punto $x_0 \in I$
Tesi: *f* è derivabile in $x_0 \in I$

Dimostrazione

Dalla definizione di differenziale $f(x) - f(x_0) = [A+\omega(x)](x - x_0)$ si moltiplicano ambo i membri per $(x - x_0)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = [A + \omega(x)]$$

calcolando i limiti ad ambo i membri si ha: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} [A + \omega(x)]$

quindi $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ esiste finito ⇔ esiste finito $\lim_{x \to x_0} [A + \omega(x)]$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ è uguale alla derivata prima $f'(x)$

la funzione ω(x) al limite $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$; il limite di una costante è la costante stessa
quindi si avrà: $f'(x) = [A+0]$; cioè $f'(x) = A$
Da qui si può dire che il limite del rapporto incrementale esiste finito e da qui segue che la funzione è una funzione derivabile

⇒
Ipotesi: *f* è derivabile in $x_0 \in I$
Tesi: *f* è differenziabile in $x_0 \in I$

Dimostrazione

Si considera l’eguaglianza

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

mettendo una volta $(x - x_0)$ in evidenza si ha:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right](x - x_0)$$

se si considera una funzione ω così definita: $\omega = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$

tale che questa funzione ω al limite vale $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$

l’uguaglianza diventa: $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)$

mettendo nuovamente $(x - x_0)$ si ha: $f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \omega(x)](x - x_0)$

$f(x) - f(x_0) = A = f'(x_0)$

Teorema di derivazione delle funzioni composte

Ipotesi

Date due funzioni f,g

$f: I \to J$ $\quad$ $g: J \to R$ $\quad$ con I e J intervalli della retta reale

f derivabile in $x_0 \in I$ e g derivabile in $f(x_0) \in J$

Tesi

$F: I \to R$

$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ derivabile in $x_0 \in I$

$F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Dimostrazione

g è derivabile in $f(x_0)$ ⇔ g è differenziabile in $f(x_0)$

ovvero esistono una costante A [che per il teorema precedente è = a $g'(f(x_0))$] e una funzione

$\omega: J \to R$ con la condizione che $\lim_{y \to f(x_0)} \omega(y) = \omega(f(x_0)) = 0$

tale che $g(y) - g(f(x_0)) = [g'(f(x_0)) + \omega(y)](y - f(x_0))$

si può porre $y = f(x)$

sostituendo si ha: $g(f(x)) - g(f(x_0)) = [g'(f(x_0)) + \omega(f(x))](f(x) - f(x_0))$

dividendo entrambi i membri per $(x - x_0)$ si ha:

$$\underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}}_{\boxed{F'(x)}} = [g'(f(x_0)) + \underbrace{\omega(f(x))}_{\boxed{\to 0}}] \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\boxed{f'(x)}}$$

Perciò si ha: $F'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Teorema di passaggio

Data f: A→R A⊂R

Se x_0 è un punto di accumulazione per A si ha che:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\ (x_n) \subset A-\{x_0\}$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ risulta che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$

(x_n) = successione

n.b. x_0 ed l possono anche essere $\pm\infty$

Questo teorema si può usare per dimostrare che il limite di una funzione non esiste

Esempio:

$\lim_{x\to+\infty} sen\,x =$ non esiste

si considerano due successioni: $\begin{cases} x_n = 2n\pi \\ y_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

in questo caso $\lim_{n\to+\infty}$ di queste successione è $+\infty$ quindi rientrano nel caso di $x_0 = +\infty$

senx_n = sen(2nπ)

seny_n = sen(2nπ+$\dfrac{\pi}{2}$)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to+\infty} sen(2n\pi) = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} sen\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}\right\}$$

I due limiti sono diversi, quindi il limite della funzione di partenza (sen$x$) non esiste

Esercizio sul teorema della derivazione della funzione composta

F(x) = $e^{\frac{x-1}{x+}}$ funzione composta: F(x) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \\ g(x) = e^x \end{cases}$

$g(f(x)) = g\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = e^{\frac{x-1}{x+}}$ F'$(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

$F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{\frac{x-1}{x+}} \cdot \dfrac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = e^{\frac{x-1}{x+}} \cdot \dfrac{2}{(x+1)^2}$

F(x) = $\log\dfrac{x+1}{x}$ $F'(x) = D\log x \cdot Df(x) = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

$F'(x) = \dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{x-x-1}{x^2} = F'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)}$

$f(x)$ = log(1+x)

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot 1$

$f(x) = \log x^2$
$f'(x) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$

Derivata dell'esponente di una funzione

$F(x) = [f(x)]^{g(x)}$ con f e g derivabili

$F(x) = e^{\log[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x)\cdot\log[f(x)]}$

$F'(x) = e^{g(x)\cdot\log f(x)} \cdot [g(x)\cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) + g'(x)\cdot \log f(x)]$

$\boxed{[f(x)]^{g(x)}}$

$f(x) = x^x$ $e^{\log x^x} = e^{x\cdot\log x}$

$f'(x) = e^{x\cdot\log x} \cdot (x\cdot\frac{1}{x}\cdot 1 + 1\cdot\log x) = x^x \cdot (1 + \log x)$

$f(x) = x^\alpha$ $e^{\log x^\alpha} = e^{\alpha\cdot\log x}$

$f'(x) = e^{\alpha\cdot\log x} \cdot (\alpha\cdot\frac{1}{x} + 0\cdot\log x) = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$

$f(x) = \sqrt[n]{n} = x^{\frac{1}{n}}$ caso particolare in cui $\alpha = \frac{1}{n}$

$f'(x) = \frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\cdot x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\cdot x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

$f(x) = \sqrt[4]{x}$
$f'(x) = \frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}$

$f(x) = \sqrt[5]{x^3} = 3^{\frac{3}{5}}$
$f'(x) = \frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{x^{12}}}$
$f(x) = \sqrt[7]{x^2}$
$f'(x) = \frac{1}{7\cdot\sqrt[7]{x^{12}}}$

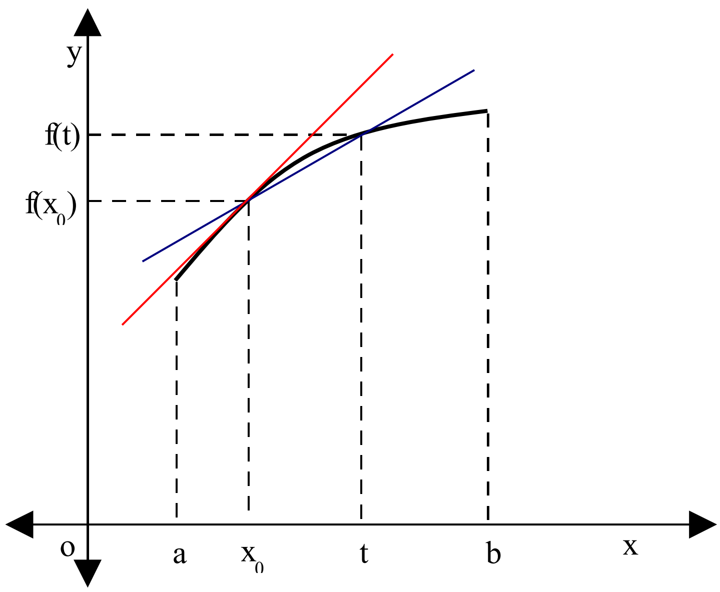
$f(x) = \text{sen}^2 x\ [\rightarrow (\text{sen}x)^2]$ $\neq$ $f(x) = \text{sen}x^2\ [\rightarrow \text{sen}(x)^2]$
$f'(x) = 2\cdot\text{sen}x\cdot\cos x$ $f'(x) = (\cos x^2)\cdot 2x$

Significato Geometrico della derivata

Sia I un intervallo aperto di R ed f una funzione di I in R. Fissati due punti t e x_0 di I con t $\neq$ x_0, la retta r individuata dai punti $(x_0,f(x_0))$ e $(t,f(t))$ ha equazione data: $y - f(x_0) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} \cdot (x - x_0)$

Tale equazione dipende dalla variabile t, dato che il suo coefficiente angolare $m(t) = \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$ è una funzione di t.

Se m(t) tende ad un valore limite m ($m(t) \to m$) quando $t \to x_0$, si dirà che la retta s di equazione $y - f(x_0) = m\cdot(x - x_0)$ è la tangente nel punto $(x_0,f(x_0))$



La f è dotata di tangente nel punto $(x_0,f(x_0))$ $\Leftrightarrow$ esiste $\lim\limits_{t \to x_0} \dfrac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0}$

Da ciò segue che la funzione f è derivabile in x_0, allora essa è dotata di tangente nel punto $(x_0,f(x_0))$ e tale tangente, che non è parallela all'asse delle y, ha il coefficiente angolare uguale a $f'(x_0)$

Teorema di derivazione delle funzioni inverse

f: I$\to$R I = intervallo aperto di R

Ipotesi

f è continua, strettamente monotona in I, derivabile in $x_0 \in I$ con $f'(x_0) \neq 0$

sotto queste ipotesi si dimostra che:

F: f(I)$\to$I definita da $F(y) = f^{-1}(y)$

è derivabile in $f(x_0)$ e la sua derivata nel punto $f(x_0)$ è $F'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Rapporto incrementale di F:

$\dfrac{F(y)-F(f(x_0))}{y-f(x_0)}$ y è un elemento di f(I) ed è immagine di un solo $x\in I$ (per l'iniettivatà della funzione) Quindi si può prendere y = f(x)

quindi si ha: y = f(x),

sostituendo: $\dfrac{F(f(x))-F(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = \dfrac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} = \dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \lim\limits_{f(x)\to f(x_0)} \dfrac{F(y)-F(f(x_0))}{y-f(x_0)}$ È uguale quando $x\to x_0$ anche $f(x)\to f(x_0)$ per la continuità della funzione, quindi $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Esempio:

arcsen$x$ = y

considerando il seno in ambo i membri si ha: sen(arcsen$x$) = sen$y$ → x = sen$y$

D(arcsen$x$) = $\dfrac{1}{D(sen\,y)} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-sen^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f(x) = arcsen$\sqrt{x}$

f'(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

f(x) = arcsen3x

f'(x) = $\dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3 = \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

arccos$x$ = y

considerando il coseno in ambo i membri si ha: cos(arccos$x$) = cos$y$ → x = cos$y$

D(arccos$x$) = $\dfrac{1}{D(\cos y)} = -\dfrac{1}{sen\,y} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

f(x) = arccoslog$x$

f'(x) = $-\dfrac{1}{\sqrt{1-\log^2 x}}\cdot\dfrac{1}{x}$

arctg$x$ = y

considerando la tangente in ambo i membri si ha: tg(arctg$x$) = tg$y$ → x = tg$y$

D(arctg$x$) $\dfrac{1}{D(tg\,y)} = \dfrac{1}{1+tg^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}$

arccotg$x$ = y

considerando la cotangente in ambo i membri si ha: cotg(arctg$x$) = cotg$y$ → x = cotg$y$

D(arccotg$x$) = $\dfrac{1}{D(cot\,g\,y)} = -\dfrac{1}{1+cot\,g^2 y} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$f(x) = \text{arctg}2x$

$f'(x) = \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2 = \frac{2}{1+4x^2}$

$f(x) = \text{arccotg}\sqrt{3x}$

$f'(x) = -\frac{1}{1+3x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x}} \cdot 3$

$f(x) = e^{\log x} = x \qquad f'(x) = 1$

$f(x) = \text{arctglog}(1+x)$

$f'(x) = -\frac{1}{1+\log^2(1+x)} \cdot \frac{1}{1+x} \cdot 1$

$f(x) = \log|x| \quad f'(x) = \frac{1}{x}$ poiché $\log|x| = \begin{cases} \log x & x > 0 \\ \log(-x) & x < 0 \end{cases}$

$f(x) = \log(-x) \quad f'(x) = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

$F(x) = \log|f(x)| \qquad F'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ poiché $\log|f(x)| = \begin{cases} \log f(x) & x > 0 \\ \log[-f(x)] & x < 0 \end{cases}$

Derivata n-esima

$f(x) = \text{sen}x \Rightarrow f^{n}(x) = \text{sen}(x+\frac{n}{2}\pi)$

si usa il principio di induzione:

$f'(x) = \text{sen}(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$

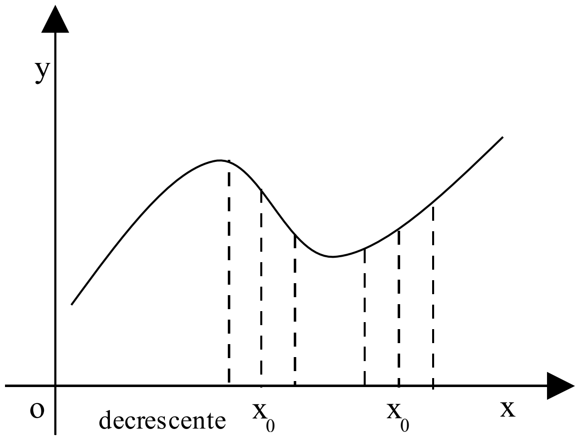
assunta per vero $f^{n}(x) = \text{sen}(x+\frac{n}{2}\pi)$ si dimostra per $f^{n+1}(x) = \text{sen}(x+\frac{n+1}{2}\pi)$

$f^{n+1}(x) = D(f^{n}(x)) = D\text{sen}(x+\frac{n}{2}\pi) = \cos(x+\frac{n}{2}\pi)$

poiché il seno rispetto al coseno è sfalsato di $\frac{\pi}{2}$ si ha: $\text{sen}(x+\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{2}) = \text{sen}(x+\frac{n+1}{2}\pi)$

Proprietà locali di una funzione

Data $f: I \to R \quad x_0 \in I$



<u>Funzione crescente in un punto</u>

f è crescente in x_0 se esiste $I(x_0) = I_-(x_0) \cup I_+(x_0) \subset I : \forall x \in I_-(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0), \forall x \in I_+(x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

<u>Funzione decrescente in un punto</u>

f è decrescente in x_0 se esiste $I(x_0) = I_-(x_0) \cup I_+(x_0) \subset I : \forall x \in I_-(x_0) \Rightarrow f(x) > f(x_0), \forall x \in I_+(x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

Teorema

f crescente in $x_0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ in un opportuno intorno di x_0

f decrescente in $x_0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ in un opportuno intorno di x_0

Dimostrazione

Caso di una funzione crescente in un punto:

$\Rightarrow$

Quando $x < x_0$ cioè $x \in I_-(x_0)$, $f(x) < f(x_0)$ quindi i due membri del rapporto incrementale sono entrambi negativi quindi il rapporto è positivo

Quando $x > x_0$ cioè $x \in I_+(x_0)$, $f(x) > f(x_0)$ quindi i due membri del rapporto incrementale sono entrambi positivi

$\Leftarrow$ se $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ in un opportuno intorno di x_0 si sa che numeratore e denominatore hanno segno concorde; se sono entrambi si ha che $x > x_0$ e $f(x) > f(x_0)$, se sono entrambi negativi si ha che $x < x_0$ e $f(x) < f(x_0)$: ma questo per definizione vuol dire che la f è crescente

Caso di una funzione decrescente in un punto:

segue ragionamento simile

Teorema

Se f è crescente in $x_0 \in I$ e derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$
Il rapporto incrementale è >0 perché f è crescente. Il suo limite è ≥0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

se il limite non fosse ≥0, cioè se il limite fosse <0 per il teorema di permanenza del segno dovrebbe esistere un opportuno intorno del punto in cui il rapporto incrementale è <0 e questo non è possibile perché la funzione è crescente

data $f: R \to R$ $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \geq 0$

Se f è decrescente in $x_0 \in I$ è derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$
Il ragionamento è simile

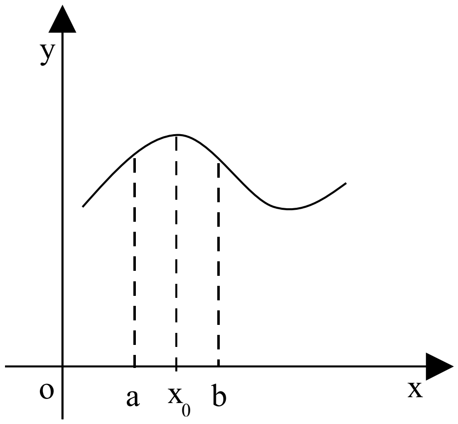
Viceversa

Se $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f crescente in $x_0 \in I$ [f: I→R, f descente in x_0]
Per ipotesi $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ per il teorema di permanenza del segno in un opportuno intorno del punto il rapporto è >0 Se il rapporto incrementale della f è >0 significa che la f è crescente

Se $f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f decrescente in $x_0 \in I$
Ragionamento simile

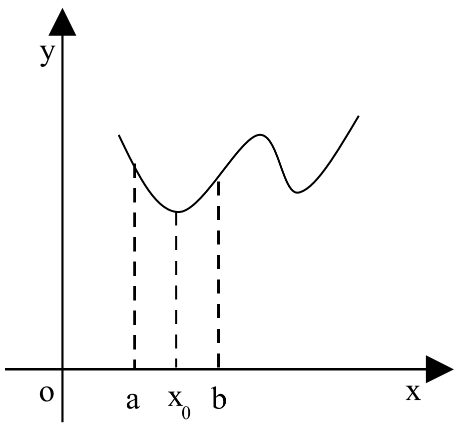
Massimo e Minimo

f: I→R $\qquad$ $x_0 \in R$



Un punto si dice di **massimo relativo** se:
$\exists\, I(x_0) : \forall x \in I(x_0)\ f(x) \leq f(x_0)$

se $f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$ allora si dice **massimo relativo forte**



Un punto si dice di **minimo relativo** se:
$\exists\, I(x_0) : \forall x \in I(x_0)\ f(x) \geq f(x_0)$

se $f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow x = x_0$ allora si dice **minimo relativo forte**

Teorema

Si dimostra che in un punto di massimo o di minimo relativo interno ad un intervallo, se la funzione è derivabile, la sua derivata è = 0

f: I→R $\qquad$ $x_0 \in I$ max relativo $\quad$ I = intervallo aperto della retta reale

si parte dal rapporto incrementale: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

dal momento che si tratta di un massimo f(x) sarà $\leq f(x_0)$ e quindi la differenza a numeratore $f(x) - f(x_0)$ sarà ≤ 0

se si considera l'intorno sinistro si avrà che x < x_0 quindi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

se si considera il limite $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ in questo intorno sinistro sarà anch'esso ≥ 0

ma questo limite risulta essere la derivata sinistra del punto x_0 [$f'_-(x_0) \geq 0$]

se invece si considera l'intorno destro si avrà che x > x_0 quindi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

se si considera il limite $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ in questo intorno destro anch'esso sarà ≤ 0

ma questo limite risulta essere la derivata destra del punto x_0 [$f'_+(x_0) \leq 0$]

Ma la derivata esiste ⇔ la derivata destra e la derivata sinistra sono uguali
in questo caso la derivata sinistra risulta essere ≥ 0, mentre la derivata destra è ≤ 0: quindi per forza di cose la derivata nel punto x_0 sarà = 0   f'(x) = 0

Teorema di Rolle

Sia [a,b] un intervallo chiuso e limitato
Data f: [a,b]→R   continua in [a,b] e derivabile in]a,b[
Se f(a) = f(b) allora esiste un punto α∈]a,b[tale che f'(α) =0

Dimostrazione:
Se la funzione f è costante, allora f'(x) =0 per ogni x∈]a,b[così il teorema è verificato essendo α un qualsiasi punto dell'intervallo]a,b[
Se la funzione f non è costante in [a,b], per il teorema di Weierstrass, esistono due punti α eβ di [a,b] tali che f(α) = minf e f(β) = maxf
Dato che f(α) ≠ f(β), l'ipotesi f(a) = f(b) assicura che almeno uno dei due punti α o β appartiene all'intervallo aperto]a,b[; si suppone che sia α.
Poiché la f è derivabile in α, che è punto di minimo, si ha che f'(α) =0, cioè la tesi

Teorema di Lagrange

Data f: [a,b]→R   continua in [a,b] e derivabile in]a,b[
Esiste punto α∈]a,b[tale $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\alpha)$

Dimostrazione:
Si considera una funzione F(x):[a,b]→R definita come F*(x)* = f(x) – f(a) – $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ·(x – a)
Si sa che F*(x)* è continua perché somma e prodotto di funzioni continue. Per lo stesso motivo F*(x)* è derivabile.
F:[a,b] è continua nell'intervallo chiuso ed è derivabile nei punti interni
Calcolando la F nel punto *a* si ottiene:
F(a) = f(a) – f(a) – $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ·(a – a) = 0

Calcolando la F nel punto *b* si ottiene:

$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = 0$

Quindi F(a) = F(b) = 0

Si può, dunque, applicare il teorema di Rolle alla funzione F che assicura che esisterà $F'(\alpha) = 0$.

Derivando F*(x)* si ottiene: $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. [$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$ derivata di una variabile per una costante]

Noto F'*(x)* allora $F'(\alpha) = f'(\alpha) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Conseguenze del teorema di Lagrange

Sia I un intervallo di R ed f:I→R una funzione continua e derivabile nei punti intermedi di I

Se f'(x) >0 in ogni punto di x interno ad I, allora la f è crescente in I
Se f'(x) <0 in ogni punto di x interno ad I, allora la f è decrescente in I
Se f'(x) =0 in ogni punto di x interno ad I, allora la f è costante in I

Dimostrazione

1) Se f'(x) >0 in ogni punto di x interno ad I, allora la f è crescente in I
   si prendono 2 punti: x_1 e $x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$;
   e si considera la $f(x):[x_1,x_2] \to R$ quindi la f è continua in $[x_1,x_2]$ e derivabile in $]x_1,x_2[$
   Si applica il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1,x_2]$
   per il teorema di Lagrange si ha che: $\exists\ \alpha \in]x_1,x_2[: \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\alpha)$
   ma per ipotesi si ha che $f'(\alpha) > 0$ quindi anche $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$
   Ma poiché risultava $x_1 < x_2$ si ha che $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ quindi si ottiene che la f è crescente nell'intervallo

2) Se f'(x) <0 in ogni punto di x interno ad I, allora la f è decrescente in I
   Si considera nuovamente l'intervallo $[x_1,x_2]$ con $x_1 < x_2$ dove la f è continua in $[x_1,x_2]$ e derivabile in $]x_1,x_2[$
   Si applica nuovamente il teorema di Lagrange quindi $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\alpha)$
   Ma ipotesi questa volta $f'(\alpha) < 0$ quindi anche $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$
   Ma poiché risulta $x_1 < x_2$ si ha che $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ quindi si ottiene che la f è decrescente nell'intervallo

3) Se f'(x) =0 in ogni punto di x interno ad I, allora la f è costante in I
   Sempre sotto le stesse ipotesi si applica il teorema di Lagrange
   ottenendo: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\alpha)$

Ma per ipotesi f'(α) = 0 quindi anche $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0$

Ma ciò implica che $f(x_2) - f(x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$ quindi si ottiene che la f è assume sempre un valore costante nell'intervallo

Corollario 2)

Siano f,g: I→R due funzioni continue in I e derivabili nei punti interni di I. se f'(x) = g'(x) per ogni x interno ad I, allora la funzione F: I→R definita da F(x) = f(x) – g(x) è costante.
Infatti la funzione continua F è dotata di derivata F'(x) = f'(x) – g'(x)
Ma essendo f'(x) = g'(x) $\forall x \in I$ la F'(x) si annulla in ogni punto di I

Esempio:
f:[-1,1] → R $f(x) = x^2+ax+b$
Tale funzione soddisfa il teorema di Rolle?
Rolle: si deve ottenere che f(-1) = f(1)
Calcolando f nel punto -1 si ottiene che f(-1) = 1-a+b
Calcolando f nel punto 1 si ottiene che f(1) = 1+a+b
Applicando l'uguaglianza: 1-a+b = 1+a+b ⇒ il teorema di Rolle è soddisfatto quando a = 0
Adesso bisogna trovare il punto α in cui f'(α) = 0
Derivando si ottiene f'(x) = 2x + a ma a = 0 quindi f'(x) = 2x
Calcolando la derivata nel punto α si ottiene f'(α) = 2α
Quindi f'(α) = 0 ⇒ 2α = 0 ⇒ α = 0
Poiché 0 ∈ [-1,1] il teorema di Rolle è verificato

Esempio:
$f = R^+ \rightarrow R$

$f(x) = \text{arctg}x + \text{arctg}\dfrac{1}{x}$ Si deve dimostrare che f è costante

Calcolando la derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

f'(x) = 0 è costante e per una delle conseguenze del teorema di Lagrange si ha che la f è una funzione costante

Ricerca di massimi e minimi mediante il segno della derivata prima

f: I→R   preso un $x_0 \in I$ e si considera un suo intorno $I(x_0)$
se $\forall x \in I_-(x_0)$ si ha che f'(x) > 0 e contemporaneamente $\forall x \in I_+(x_0)$ si ha che f'(x) < 0
allora nel punto x_0 la funzione ha un punto di massimo relativo

+ + + + + – – – – –
x_0

invece
se $\forall x \in I_-(x_0)$ si ha che f'(x) < 0 e contemporaneamente $\forall x \in I_+(x_0)$ si ha che f'(x) > 0
la funzione ha punto di minimo relativo in x_0

– – – – – + + + + +
x_0

Es

$f(x) = x - \log|x|$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \Rightarrow$ è = 0 quando x = 1

per stabilire i punti di massimo o di minimo di deve vedere quando $f'(x) > 0$ e quando $f'(x) < 0$

$f'(x) > 0 \qquad \frac{x-1}{x} > 0$ quando $x < 0$ e $x > 1$

$f'(x) < 0 \qquad \frac{x-1}{x} < 0$ quando $0 < x < 1$

\+ + + + + – – – – – + + + + +

0 1

$f = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$

$f'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow 0$ quando –3, 1

svolgendo l'equazione $x^2 + 2x - 3 = 0$ si ha: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$

si trova massimo e minimo utilizzando il segno della derivata prima

–3 massimo relativo 1 minimo relativo

\+ + + + + – – – – – + + + + +

–3 1

Teorema di Cauchy

Se f,g [a,b]→R sono due funzioni continue nell'intervallo chiuso e limitato [a,b] e derivabili in]a,b[, allora esiste almeno un punto $\alpha \in]a,b[$ tale che $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

Dimostrazione

Si considera la funzione F:[a,b]→R definita da: $F(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f(x) - [f(b) - f(a)] \cdot g(x)$

Tale funzione è continua in [a,b] e derivabile in]a,b[essendo tali la funzione f e la funzione g.

Inoltre:

$F(a) = [g(b) - g(a)] \cdot f(a) - [f(b) - f(a)] \cdot g(a) = g(b) \cdot f(a) - g(a) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(a)$

Semplificando si avrà: $g(b) \cdot f(a) - f(b) \cdot g(a)$

$F(b) = [g(b) - g(a)] \cdot f(b) - [f(b) - f(a)] \cdot g(b) = g(b) \cdot f(b) - g(a) \cdot f(b) - f(b) \cdot g(b) + f(a) \cdot g(b)$

Semplificando si avrà: $g(a) \cdot f(b) - f(a) \cdot g(b)$

Quindi $F(a) = F(b)$

Allora per il teorema di Rolle, esiste almeno un punto $\alpha \in]a,b[$ tale che $F'(\alpha) = 0$;

essendo $F'(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(x) - [f(b) - f(a)] \cdot g'(x)$

ed essendo $F'(\alpha) = 0$

risulta: $F'(\alpha) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(\alpha) - [f(b) - f(a)] \cdot g'(\alpha) = 0$

da cui segue: $[g(b) - g(a)] \cdot f'(\alpha) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(\alpha)$

supponendo $g'(\alpha) \neq 0$

dividendo per $[g(b) - g(a)]$ si avrà: $f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\alpha)$

dividendo per g'(α) si otterà: $\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ c.v.d.

l'aver supposto $g'(\alpha) \neq 0$ comunica anche che $g(b) \neq g(a)$ e quindi $g(b) - g(a) \neq 0$

Regola di de L'hopital

Il teorema che segue è utile per il calcolo dei limiti che danno luogo ad una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema:

Siano I un intervallo di R, $x_0 \in I$ e $f,g:[I-\{x_0\}] \rightarrow R$ due funzioni derivabili

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

Oppure $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ [x_0 può anche essere $\pm\infty$]

Se $g'(x), g(x) \neq 0$

Se esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ con $l \in R$ oppure $\pm\infty$

E allora esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Dimostrazione

Nel caso particolare in cui $x_0, l \in R$ con f e g definite nel punto x_0 tali che $f(x_0) = g(x_0)$

Quindi $f(x_0) = g(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

Applicando il teorema di Cauchy alle due funzioni nell'intervallo $[x_0,x]$ quindi si ha:

$\exists\ \alpha \in\ ]x_0,x[\ :\ \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

Per ipotesi si sa che: $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Applicando la definizione di limite: $\forall\varepsilon>0\ \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \cap I-\{x_0\} \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon$

Ma se $\alpha \in\ ]x_0,x[$, $\alpha \in$ anche $I(x_0)$ quindi la disuguaglianza ottenuta dalla definizione di limite diventa: $\left|\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} - l\right| < \varepsilon$

Poiché per ipotesi $f(x_0) = g(x_0) = 0$

L'uguaglianza ottenuta dal teorema di Cauchy diventa: $\frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

quindi $\left|\frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} - l\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon$ e quindi per definizione di limite si ha che $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

Esempi.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow$ forma indeterminata

si considerano la derivata di $\frac{\log x}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{1}$ e quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Data f: I→R con $x_0 \in I$
$f'(x_0)$

$$\underset{x_0}{\overset{f'(x)>0 \quad f'(x)<0}{\longrightarrow}} \text{ max rel} \qquad \underset{x_0}{\overset{f'(x)<0 \quad f'(x)>0}{\longrightarrow}} \text{ min rel}$$

Formula di Taylor con resto di Peano

(strumento utile per studiare le proprietà locali di una funzione)
f: I→R con $x_0 \in I$
f è dotata di derivate successive sino al grado n: (f^n)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^n(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \omega(x)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

ω: I→R : $\lim_{x\to x_0}\omega(x) = \omega(x_0) = 0$

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^n(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Polinomio di Taylor di ordine n e punto di inizio x_0

$f(x) - P(x) = \omega(x)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ **Resto di Peano**

Se **<u>n = 1</u>** $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \omega(x)\cdot(x-x_0) \Rightarrow$

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \omega(x)]\cdot(x-x_0)$$

La formula di Taylor generalizza il concetto di funzione differenziabile in un punto
f: I→R, $x_0 \in I$ si può scrivere la formula di Taylor

Supponiamo che nel punto x_0 $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0,\ \ldots, f^{n-1}(x_0) = 0$
Quindi $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0$
La prima derivata che non si annulla è quella di ordine n $\Rightarrow f^n(x_0) \neq 0$

$$f(x) = f(x_0) + f^n(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \omega(x)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!} \Rightarrow f(x) - f(x_0) = [f^n(x_0) + \omega(x)]\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

Se **<u>n è pari</u>**

se $f^n(x_0) > 0 \Rightarrow \frac{(x-x_0)^n}{n!} \geq 0$

La somma $f^n(x_0) + \omega(x)$ quando si passa al $\lim_{x\to x_0}$ fa $f^n(x_0)$ quindi la somma (per il teorema della permanenza del segno) è positivo
Il prodotto fra due numeri positivo è ancora positivo quindi:

$[f^n(x_0) + \omega(x)]\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!} \geq 0$ da cui segue che $f(x) - f(x_0) \geq 0$

Quindi x_0 è un punto di minimo relativo

se $f^n(x_0) < 0 \Rightarrow \frac{(x-x_0)^n}{n!} \geq 0$

e in questo caso x_0 è un punto di massimo relativo

Se **<u>n è dispari</u>**

si suppone $x \neq x_0$ e moltiplicando entrambi i membri dell'eguaglianza per $\dfrac{1}{x-x_0}$ si ha:

$$\frac{1}{x-x_0}\cdot f(x)-f(x_0)=[f^n(x_0)+\omega(x)]\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}\cdot\frac{1}{x-x_0}\Rightarrow$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=[f^n(x_0)+\omega(x)]\cdot\frac{(x-x_0)^{n-1}}{n!}$$

Se n è dispari, n-1 è pari quindi $\dfrac{(x-x_0)^{n-1}}{n!}>0$

se $f^n(x_0)>0$; il prodotto>0 e quindi $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$

quindi dato che il rapporto incrementale è >0 la funzione nell'intorno di x_0 è crescente

se $f^n(x_0)<0$; $[f^n(x_0)+\omega(x)]<0$ e quindi $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$

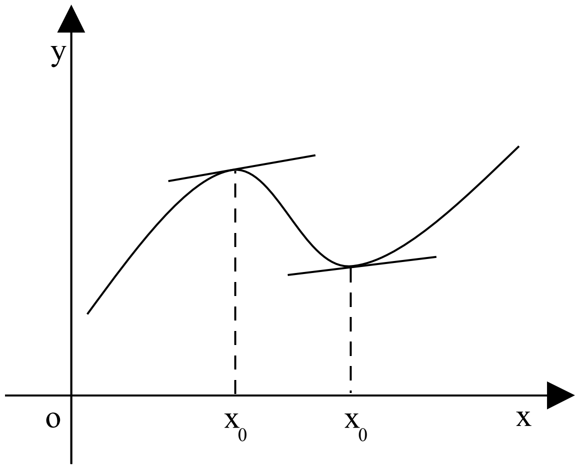
quindi la funzione è decrescente

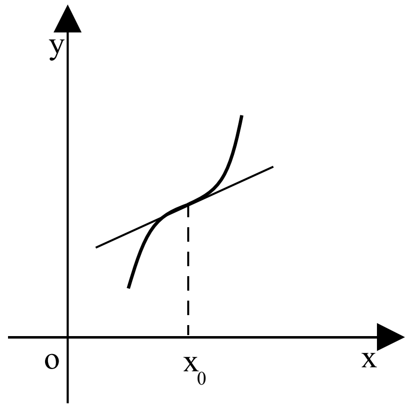
Tutto questo procedimento è la ricerca di massimi e minimi relativi mediante lo studio delle derivate successive

Funzione Concava, Convessa, e punti di Flesso

Sia I un intervallo aperto di R, $x_0 \in I$ e $f:I \rightarrow R$ con f derivabile in x_0
In tali ipotesi il grafico della funzione f ammette tangente nel punto $(x_0,f(x_0))$ e questa tangente ha equazione: $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
Si definiscono alcune priorità della f, connessa alla sua posizione rispetto alla retta tangente al suo grafico nel punto $(x_0,f(x_0))$
A tal fine si considera una $F:I \rightarrow R$ definita da $F(x) = f(x) - y(x) \Rightarrow F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

Una funzione si dice convessa nel punto x_0 se esiste $I(x_0)$ tale che $F > 0$
Una funzione si dice concava nel punto x_0 se esiste $I(x_0)$ tale che $F < 0$
Una funzione ha un punto di flesso nel punto x_0 se esiste $I(x_0)$ in cui F risulta < 0 prima di x_0 e > 0 dopo x_0





Quindi la funzione f è convessa nel punto x_0 se esiste $I(x_0)$ tale che la f stia al di sopra della retta tangente al suo grafico nel punto $(x_0,f(x_0))$
Invece la funzione f è concava nel punto x_0 se esiste $I(x_0)$ tale che la f stia al di sotto della retta tangente al suo grafico nel punto $(x_0,f(x_0))$
Mentre la funzione f ha un punto di flesso nel punto x_0 quando in un suo intorno dx (o sx) il grafico è al di sopra della tangente e in un suo intorno sx (o dx) il grafico è al di sotto della tangente
Inoltre la funzione f è convessa $x_0 \Leftrightarrow$ la funzione F ha un minimo relativo
la funzione f è concava $x_0 \Leftrightarrow$ la funzione F ha un massimo relativo
la funzione f ha un flesso in x_0 se la funzione F risulta crescente o decrescente

Calcolo della concavità, convessità e flesso tramite le derivate

Si considera la funzione $F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$
Si calcola la derivata prima: $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$
La si considera nel punto x_0: $F'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$
Si calcola la derivata seconda: $F''(x_0) = f''(x_0)$
Dalla derivata seconda in poi la F e la f avranno derivate uguali

Se $f''(x_0) >0 \Rightarrow F(x)$ ha un minimo relativo ed f(x) è convessa
Se $f''(x_0) <0 \Rightarrow F(x)$ ha un massimo relativo ed f(x) è concava
Se $f''(x_0) =0$ si calcola la derivata terza. La F sarà crescente o decrescente a seconda se f'''
sia >0 o <0. In x_0 la f(x) avrà un flesso

Asintoti Verticali

$f: I-\{x_0\} \to R \quad x_0 \in I$
la retta $x = x_0$ è asintoto verticale per f se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Possono essere uguali o diversi fra loro. Se sono diversi fra loro la retta è asintoto per mezza funzione. Se sono uguali la retta è asintoto per tutta la funzione.
Es: $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

Asintoti Orizzontali

f: I→R

Se I non è limitato superiormente

y = *l* è asintoto orizzontale per la funzione se

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l$

Se I non è limitato inferiormente

y = *l* è asintoto orizzontale per la funzione se

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l$

Asintoti Obliqui

f: I→R

è una retta di equazione y = m·x+n

Se I è non limitato superiormente la retta è asintoto obliquo se

$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - m\cdot x - n] = 0$

Inoltre $m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$n = \lim_{x\to +\infty} [f(x) - m\cdot x]$

Se I non è limitato inferiormente la retta è asintoto obliquo se

$\lim_{x\to -\infty} [f(x) - m\cdot x - n] = 0$

Studio di funzione

$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

- campo di esistenza: $\forall\ x \neq 0$
- segno della funzione: x^2 sempre >0, *f(x)* >0 quando x-1>0 ⇒ x>1
- intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x-1}{x^2} = y \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \quad x - 1 = 0 \quad x = 1$$

P(x,y) = (1,0) intersezione con l'asse delle x

- ricerca asintoti verticali

  $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$ quindi x = 0 è asintoto verticale

- ricerca asintoti orizzontali

  $\lim_{x\to \pm\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0$ quindi y = 0 è asintoto orizzontale

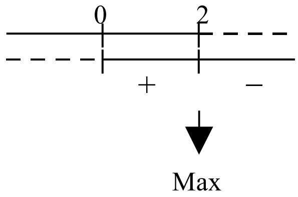
- ⇒ non esistono asintoti obliqui
- calcolo della derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x^2 - (x-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{(-x+2)x}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

- studio della derivata prima

$f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2-x}{x^3} = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

- segno della derivata prima



$2 - x > 0 \qquad x < 2$

$x^3 > 0 \qquad x > 0$

$f(2) = \dfrac{2-1}{2^2} = \dfrac{2-1}{4} = \dfrac{1}{4}$

quindi P(2, $\frac{1}{4}$) è un punto di massimo

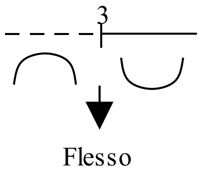
- calcolo della derivata seconda

$$f''(x) = \frac{-x^3 - (2-x)3x^2}{x^6} = \frac{-x^3 - 6x^2 + 3x^3}{x^6} = \frac{-6x^2 + 2x^3}{x^6} = \frac{x^2(-6+2x)}{x^6} = \frac{2x-6}{x^4}$$

- studio della derivata seconda

$f''(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{2x-6}{x^4} = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

- segno della derivata seconda:



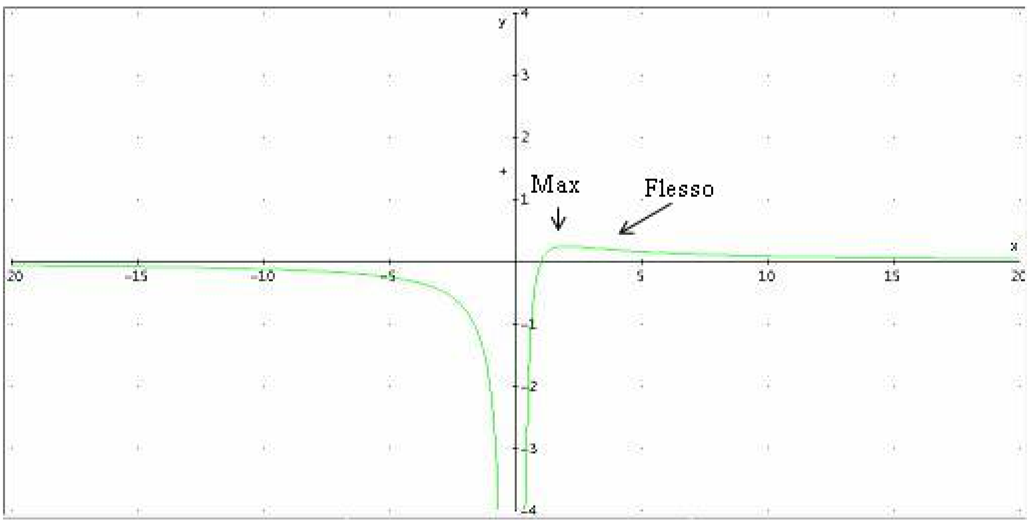
$2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$

$x^4 > 0 \qquad$ sempre

quindi P(3, $\frac{2}{9}$) è un punto di flesso

punto di flesso in x = 3

Funzione:



Concetto di primitiva di una funzione

Siano f,F $I \rightarrow R$
F derivabile in I
$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I \Rightarrow$ F primitiva di f

Es.
$f(x) = \cos x \qquad F(x) = \mathrm{sen}\, x$ è primitiva di f(x)

$f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad F(x) = \log|x|$ è primitiva di f(x)

Se F è primitiva di f e ad F si somma una costante, la somma F + c è ancora primitiva di f
[poiché la derivata di una costante è =0]
$\Rightarrow$ Quindi se una funzione ammette una primitiva, ne ammette infinite
Insieme delle primitive = $\{F(x)+c : c \in R\} = F(x)+c$
$D(F+c) = DF + Dc = f$

Data f: $I \rightarrow R$ e F,G sono primitive di f cioè:
$F'(x) = f(x), \; G'(x) = f(x)$
La differenza $F(x) - G(x) = c$ quindi le primitive differiscono per una costante
$D(F-G) = DF - DG = f-f = 0$ la differenza F – G ha derivata = 0 in ogni punto dell'intervallo allora F – G è costante (conseguenza del teorema di Lagrange)

Integrale Indefinito

Per definizione è uguale all'insieme di tutte le primitive della funzione

$\int f(x)dx = F(x)+c \qquad dx$ = variabile di integrazione
$\int f'(x)dx = f''(x)+c$
L'operazione di integrazione può sembrare una sorta di inversa della derivata, però:
la derivata è una funzione f: $I \rightarrow R$ che ad un x dell'intervallo I associa un $x \in R$
invece l'integrale indefinito ad una funzione associa un insieme di funzioni.
Perciò non si può considerare come una operazione inversa

Es:

$$\int \cos x\, dx = \mathrm{sen}\, x + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \text{tg}x + c$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \log|x+1| + c$$

$$\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx = \log(x^2+3) + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

Regole di integrazione indefinita

Sono dirette conseguenze delle regole di derivazione delle funzioni

Somma:

$$\int f(x)+g(x)\,dx = \underset{\boxed{F}}{\underset{\downarrow}{\int f(x)\,dx}} + \underset{\boxed{G}}{\underset{\downarrow}{\int g(x)\,dx}}$$

D(F+G) = DF + DG = f + g

Es:

$$\int (x^2 + sen\,x)\,dx = \int x^2\,dx + \int sen\,x\,dx = \frac{x^3}{3} - \cos x + c$$

$$\int \sqrt{x} - \frac{1}{sen^2 x}\,dx = \int \sqrt{x}\,dx + \int -\frac{dx}{sen^2 x} = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int -\frac{dx}{sen^2 x} = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \cot g\,x + c$$

prodotto di una costante per una funzione

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad \text{con } k \neq 0$$

D(k·F) = k·DF = k·f

Es:

$$\int 3\cdot \cos x\,dx = 3\cdot \text{sen}x + c$$

Regola di integrazione per parti

(conseguenza del prodotto costante per una funzione → per l'integrazione del prodotto di funzioni)

si considera F·G e si deriva
D(F·G) = (DF)·G + (DG)·F
G(DF) = D(F·G) – F·(DG) e si passa all'integrale

$\int G(DF) = \int D(F \cdot G) - \int F(DG)$ *dx* sottointeso

$\int G \cdot DF = F \cdot G - \int F \cdot DG$

Fattore differenziale (Fd)

Fattore finito (Ff)

Serve a calcolare l'integrale del prodotto fra due funzioni di cui una è la derivata di un'altra funzione (il fattore differenziale)

<u>Es:</u>

$\int x \cdot e^x \, dx$ in questo caso si può scegliere come Fd una delle due perché di entrambe si trova facilmente una primitiva: in questo caso x = Ff; e^x = Fd

$x \cdot e^x - \int e^x \cdot 1 dx = x \cdot e^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$

<u>Es:</u>

$\int \log x \, dx$ si può considerare come $\int 1 \cdot \log x \, dx$ 1 = Fd e log$x$ = Ff

$x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \log x - \int dx =$ x·log$x$ – x +c = x(log$x$ – 1) + c

Metodo di Integrazione per Sostituzione

Si considerano due integrali $\int f(x)\,dx, \quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Il secondo si ottiene dal primo mediante la seguente posizione:

$x = \varphi(t)$

$dx = \varphi'(t)dt$

Indicando con F(x) una primitiva di f(x) allora la funzione F(φ(t)) è una primitiva di f(φ(t))φ'(t)

$DF(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

$\downarrow$

$\boxed{\text{È la derivata di una funzione composta}}$

Esempio:

$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}dx$ si pone $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$

derivado entrambi i membri si ha: $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt$

sostituendo $\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt$ si ha: $\int \frac{2dt}{(1+x)}$

sostituendo la x $\int \frac{2dt}{(1+t^2)}$

2 è costante e può uscire fuori: $2\int \frac{dt}{(1+t^2)}$

calcolando l'integrale si ha: $2\int \frac{dt}{(1+t^2)} = 2\operatorname{arctg} t + c$

sostituendo nuovamente la t si ha: $2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + c$

Esempio:

$\int \frac{2x}{1+x^2}dx$ si pone $x^2 = t \Rightarrow$ differenziando si ha: $2xdx = dt$

sostituendo: $\int \frac{dt}{(1+t)}$

si risolve facilmente osservando che si tratta di integrale del tipo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{dt}{(1+t)} = \log(1+t) + c \Rightarrow \log(1+x^2) + c$$

Metodo della scomposizione del rapporto

Caso in cui il grado del polinomio a denominatore è maggiore di quello del numeratore

$$\int \frac{mx+n}{x^2+bx+c}dx$$

Si considera l'equazione associata al trinomio al denominatore:
$x^2+bx+c=0$ e se ne calcola il delta Δ:

Se $\Delta > 0$ $\exists$ due radici reali e distinte e la funzione si scompone in:

$$\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}=\frac{mx+n}{x^2+bx+c} \qquad \text{da cui si ricavano A e B}$$

Se $\Delta = 0$ $\exists$ due radici coincidenti e la funzione si scompone in:

$$\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{(x-x_1)^2}=\frac{mx+n}{x^2+bx+c} \qquad \text{da cui si ricavano A e B}$$

Se $\Delta < 0$ Il rapporto si scompone in una somma del tipo:

$\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{C}{f(x)}$ ottenendo così un integrale di tipo logaritmo ed un integrale di tipo arctg

Esempio 1)

$$\int \frac{x-1}{x^2-5x+6}dx \qquad x^2-5x+6=0;$$

$\Delta > 0$ ($\Delta = 25 - 24 = 1$)

$x=\frac{5\pm 1}{2}$ $\qquad x_1 = 3;\ x_2 = 2$

Caso in cui $\Delta > 0$, sostituendo si ha:

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{x-1}{x^2-5x+6};$$

riducendo allo stesso denominatore:

$$\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}=\frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

I denominatori sono uguali, quindi perché l'uguaglianza sia rispettata anche i numeratori devono essere uguali, quindi:

$A(x-2) + B(x-3) = x-1$

Svolgendo i prodotti:

$Ax - 2A + Bx - 3B = x-1$

Mettendo in evidenza gli elementi con le x si ha:

$(A + B)x - 2A - 3B = x-1$

Da cui si ottengono se seguenti eguaglianze:

$$\begin{matrix}(A+B)x = x \\ -2A-3B=-1\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -2A-3B=-1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema:

Isolando la A nella prima uguaglianza si ha: $\begin{cases} A = -B+1 \\ -2A-3B = -1 \end{cases}$

Sostituendo la A nella seconda uguaglianza: $\begin{cases} A = -B+1 \\ -2(-B+1)-3B = -1 \end{cases}$

Svolgendo il prodotto: $\begin{cases} A = -B+1 \\ 2B-2-3B = -1 \end{cases}$

Svolgendo semplici calcoli si ricava la B: $\begin{cases} A = -B+1 \\ 2B-3B = 2-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -B+1 \\ -B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -B+1 \\ B = -1 \end{cases}$

Sostituendo la B nella prima uguaglianza si ricava la A: $\begin{cases} A = -(-1)+1 \\ B = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -1 \end{cases}$

Quindi A = 2; B = –1

L'integrale di partenza diventa:

$$\int \frac{x-1}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{2}{(x-3)}dx - \int \frac{1}{(x-2)}dx$$

essendo 2 una costante può essere portata fuori dall'integrale:

$$2\int \frac{dx}{(x-3)} - \int \frac{dx}{(x-2)} = 2 \log|x-3| - \log|x-2| + c$$

Esempio 2)

$$\int \frac{x-2}{x^2-2x+1}dx \qquad \Delta = 0, \text{ quindi } x_1 = x_2 = 1$$

Caso in cui $\Delta = 0$, sostituendo si ha:

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{x^2-2x+1}$$

riducendo allo stesso denominatore:

$$\frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{x-2}{x^2-2x+1}$$

I denominatori sono uguali, quindi perché l'uguaglianza sia rispettata anche i numeratori devono essere uguali, quindi:

$A(x-1) + B = x-2$

Svolgendo i prodotti:

$Ax - A + B = x-2$

Da cui si ottengono se seguenti eguaglianze:

$$\begin{matrix} Ax = x \\ -A + B = -2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -A+B = -2 \end{cases}$$

Sostituendo la A nella seconda uguaglianza si ricava la B: $\begin{cases} A = 1 \\ -1+B = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$

Quindi A = 2; B = –1

L'integrale di partenza diventa:
$$\int \frac{x-2}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{dx}{(x-1)} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \log|x-1| + \frac{1}{x-1} + c$$

Esempio 3)
$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx \qquad\qquad \Delta < 0$$

Caso in cui $\Delta < 0$
Al numeratore ci deve essere la derivata del denominatore: D: $x^2+2x+2 = 2x+2$
Per ottenerlo si può dividere e moltiplicare per 2
$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x+2)}{x^2+2x+2}dx$$
$\frac{1}{2}$ essendo una costante la si può portare fuori dall'integrale; si svolge il prodotto al numeratore, ma siccome 4 lo si può scrivere come 2 + 2 si ottiene: $\int \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x+2)}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)+2}{x^2+2x+2}dx$
spezzando l'integrale si ha: $\int \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x+2)}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+2}dx$
$$\frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2} \cdot \log|x^2+2x+2| + c$$
$\frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+2x+2}dx =$ poiché 2 è una costante la si può portare fuori dall'integrale ottenendo:
$$\frac{2}{2}\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \text{arctg}(x+1) + c$$
$$\int \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x+2)}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2} \cdot \log|x^2+2x+2| + \text{arctg}(x+1) + c$$

Caso in cui il grado del polinomio a numeratore è maggiore di quello denominatore

$$\int \frac{x^3-4x^2+2x+5}{x^2-5x+6}dx$$

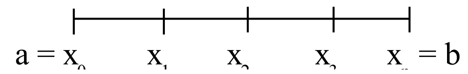
dividendo i due polinomi si ha:
$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2+2x+5 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2} x^3-5x^2+6x & x+1 \\ \hline x^2-4x+5 & \\ x^2-5x+6 & \\ \hline x-1 & \end{array}$$

$\frac{x^3-4x^2+2x+5}{x^2-5x+6} = x+1+\frac{x-1}{x^2-5x+6}$ Essendo uguali anche gli integrali saranno uguali:
$$\int x\,dx + \int dx + \int \frac{x-1}{x^2-5x+6}dx = \frac{x^2}{2} + x + 2log|x-3| - log|x-2| + c$$

Integrale di Riemann

Si ha per funzioni limitate in un intervallo chiuso della retta reale a valori positivi.

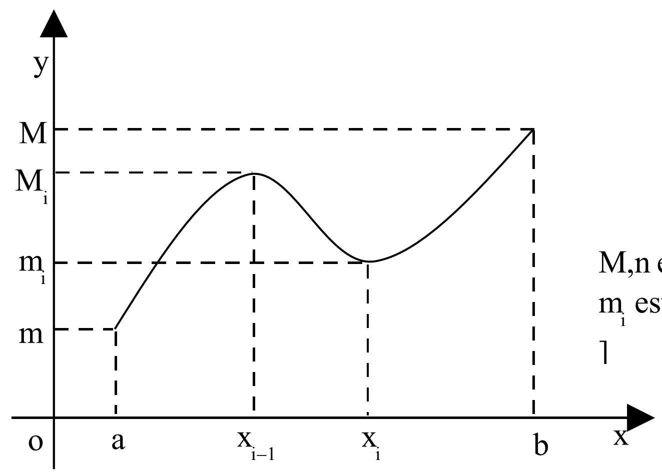
Partizione in [a,b] è un insieme del tipo P = $\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

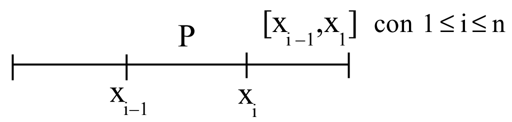


[a,b] è così diviso in 4 intervalli tali che la somma delle ampiezze di ognuno danno tutto [a,b]

Per ogni intervallo si possono avere infinite partizioni. L'insieme di tutte le partizioni si indica con: **P**([a,b])

f:[a,b]→R   si indica con $[x_{i-1},x_i]$ un intervallo generico P con 1<i<n





M,n estremi della funzione
m_i estremo inferiore relativamente all'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$

Si ottiene la seguente disuguaglianza: $m \le mi \le Mi \le M$

Alla *f* relativamente alla partizione P si associano due numeri:

i(P,f) = somma inferiore della f relativamente alla P
s(P,f) = somma superiore della f relativamente alla P

Questi due numeri sono così definiti:

$$i(P,f) = \sum_{i=1}^{n} mi(x_i - x_{i-1}) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

$$s(P,f) = \sum_{i=1}^{n} Mi(x_i - x_{i-1}) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

Si moltiplica la catena di disequazioni per l'ampiezza dell'intervallo $[x_{i-1},x_i]$
$m(x_i – x_{i-1}) \leq mi(x_i – x_{i-1}) \leq Mi(x_i – x_{i-1}) \leq M(x_i – x_{i-1})$

considerando singolarmente la $\sum_{i=1}^{n}$ nei membri della disuguaglianza si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} mi(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} Mi(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1})$$

poiché m e M sono due costanti si possono portare fuori dalla sommatoria, ottenendo:

$$m\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} mi(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} Mi(x_i - x_{i-1}) \leq M\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \rightarrow$ la sommatoria di tutti gli intervalli generici da l'ampiezza dell'intero intervallo

$[a,b] \rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = (b – a)$; sostituendo:

$m(b – a) \leq i(P,f) \leq s(P,f) \leq M(b – a)$

al variare di P nella famiglia delle partizioni si possono considerare due insiemi:

1. $\{i(P,f) : P \in \mathbf{P}([a,b])\}$ (insieme delle aree inf. rispetto a tutte le possibili partizioni)
2. $\{s(P,f) : P \in \mathbf{P}([a,b])\}$ (insieme delle aree sup. rispetto a tutte le possibili partizioni)

   questi due insiemi sono limitati in quanto sia i(P,f) che s(P,f), fissata la partizione P, sono compresi fra m(b – a) e M(b – a), quindi m(b – a) e M(b – a) svolgono il ruolo di minorante e di maggiorante, quindi considerando i due insiemi, anch'essi risultano limitati [inferiormente da m(b – a) e superiormente da M(b – a)]

Si considera il sup1) e si definisce come

Sup1) = $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ integrale inferiore secondo Riemann della funzione estesa ad [a,b]

Si considera l'inf2) e si definisce come

Inf2) = $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ integrale superiore secondo Riemann della funzione estesa ad [a,b]

Una funzione si dice integrabile secondo Riemann nell'intervallo [a,b] quando

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

e il valore comune di questi integrali si denota con

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

prendo il nome di integrale di Riemann della funzione esteso dell'intervallo [a,b]
mentre la funzione f in questione limitata definita in $[a,b] \rightarrow R$ si dice integrabile secondo Riemann

Definizione: Una funzione limitata definita in un intervallo chiuso della retta reale si dice integrabile secondo Riemann quando l'integrale inferiore e l'integrale superiore sono uguali

Si dimostra (senza dimostrazione) che

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Da ciò segue direttamente che:

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

quindi se la funzione è integrabile secondo Riemann vale anche:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Esempio 1) *Funzione integrabile secondo Riemann*

f: [a,b] $\rightarrow$ R   f(x) = c (funzione costante)

è integrabile secondo Riemann e l'integrale è dato da:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c\,(b-a)$$

perché se la funzione è costante m e M sono uguali e sono tutti e due uguali a c, e quindi si trova:

$$c\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq c\,(b-a) \Rightarrow \text{valgono le disuguaglianze}$$

quindi l'integrale inferiore e l'integrale superiore sono compresi fra c(b – a) e per di più vale proprio l'uguaglianza

Esempio 2) *Funzione non integrabile secondo Riemann*

$$f(x)\begin{cases} 1 & x \in [a,b] \cap Q \\ 0 & x \in [a,b] - Q \end{cases}$$

Si prende l'intervallo [a,b].
Questo intervallo viene partizionato in intervalli parziali e si prende il generico degli intervalli in cui la partizione divide l'intervallo
In questo intervallo generico cadono sia numeri razionali che numeri irrazionali, quindi in questo intervallo generico ci saranno punti in cui la funzione assume valore uguale a 1 e punti in cui la funzione valore uguale a 0.
Ma così si ottiene che 0 è l'estremo inferiore e 1 è l'estremo superiore.

calcolando $\sum_{i=1}^{n} mi(x_i - x_{i-1}) = 0$ mentre $\sum_{i=1}^{n} Mi(x_i - x_{i-1}) = (b - a)$

Si ottengono 2 insieme, dove l'estremo superiore di uno è 0,
l'estremo inferiore dell'altro invece è (b - a)
quindi l'integrale inferiore è 0 e integrale superiore è (b - a) quindi non coincidono ergo la funzione non è integrabile secondo Riemann

Somma di funzione integrabili secondo Riemann

Date due funzioni: f,g [a,b]$\rightarrow$R integrabili secondo Riemann

$$f(x) + g(x) \Rightarrow \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

anche la somma è integrabile secondo Riemann

Prodotto di una costante per una funzione integrabili secondo Riemann

Date una funzione: f [a,b]→R integrabili secondo Riemann ed una costante

c · f(x) ⇒ $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

anche questo prodotto è integrabile secondo Riemann
Data f(x) ≥ 0 (a valori non negativi) integrabile secondo Riemann

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ perché m(b – a) ≤ $\int_a^b f(x)\,dx$ ≤ M(b – a)

dal momento che la funzione è a valori non negativi m [ovvero l'inf] sarà sicuramente ≥ 0 quindi il prodotto m(b – a) è ≥ 0 [perché anche (b – a) è > 0].

Di conseguenza $\int_a^b f(x)\,dx$ essendo ≥ del prodotto m(b – a) risulterà anch'esso ≥0

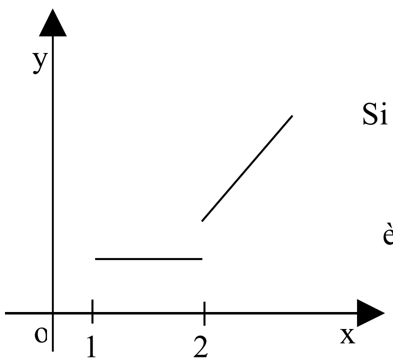
Due funzioni f,g integrabili secondo Riemann: f(x) ≤ g(x) segue che:

$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

perché f(x) ≤ g(x) ⇒ g(x) – f(x) ≥ 0 ⇒ $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

ma questo segue direttamente la disuguaglianza di partenza

Le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann
Le funzioni continue monotone sono integrabili secondo Riemann
Anche alcune funzioni discontinue lo sono:



Si tratta di una funzione monotona
non decrescente
⇓
è integrabile secondo Riemann

Date due funzioni f,g
f: [a,b] → [m,M] integrabile secondo Riemann
g: [n,M] → R continua in [m,M]
la funzione g°f : [a,b] → R è integrabile secondo Riemann in [a,b]

Esempio:
f:[a,b]→R f(x) è integrabile secondo Riemann, se si calcola il valore assoluto, si ottiene una funzione composta, formata da f(x) [→ funzione integrabile] e |x| [→ funzione continua].
La funzione |f(x)| è una funzione integrabile secondo Riemann

Inoltre segue che: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

ricordando una regola del valore assoluto anche |x| ≤ a ⇔ –a ≤ x ≤ a

segue che $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ → –|f(x)| ≤ f(x) ≤ |f(x)|

e poiché f(x) ≤ g(x) ⇒ $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ si può integrare ogni membro ottenendo:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Esercizio

f(x) = $x \cdot e^{-x^2}$

C.E. ∀x∈R
Intersezione con gli assi: O(0,0)
Non esistono asintoti verticali
Asintoti Orizzontali:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x^2}}$ forma indeterminata

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x \cdot e^{x^2}} = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot e^{-x^2} = 0$ Quindi l'asse delle y è asintoto orizzontale

Non esistono asintoti obliqui
Derivata prima:

f '(x) = $x \cdot (-2xe^{-x^2}) + e^{-x^2} = -2x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} = e^{-x^2}(1-2x^2)$

studio della derivata prima

f '(x) = 0 $e^{-x^2}(1-2x^2) = 0$

$1-2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

segno della derivata prima

f '(x) > 0 $1-2x^2 > 0 \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Min Max

– – – – – + + + + + – – – – –

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$ P$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)$ è un punto di minimo

$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}$ P$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)$ è un punto di massimo

derivata seconda f ''(x) = $-2xe^{-x^2}(1-2x^2) - 4x^{-x^2} = -2xe^{-x^2}(3-2x^2)$

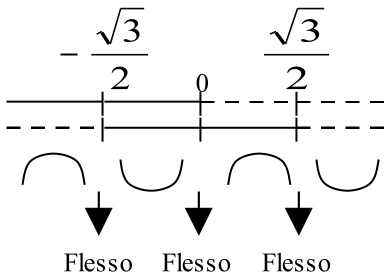
studio della derivata seconda:

f ''(x) = 0 $\qquad -2xe^{-x^2}(3-2x^2)=0$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$(3 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

segno della derivata seconda:



f ''(x) > 0 $\qquad -2x > 0 \Rightarrow x < 0$

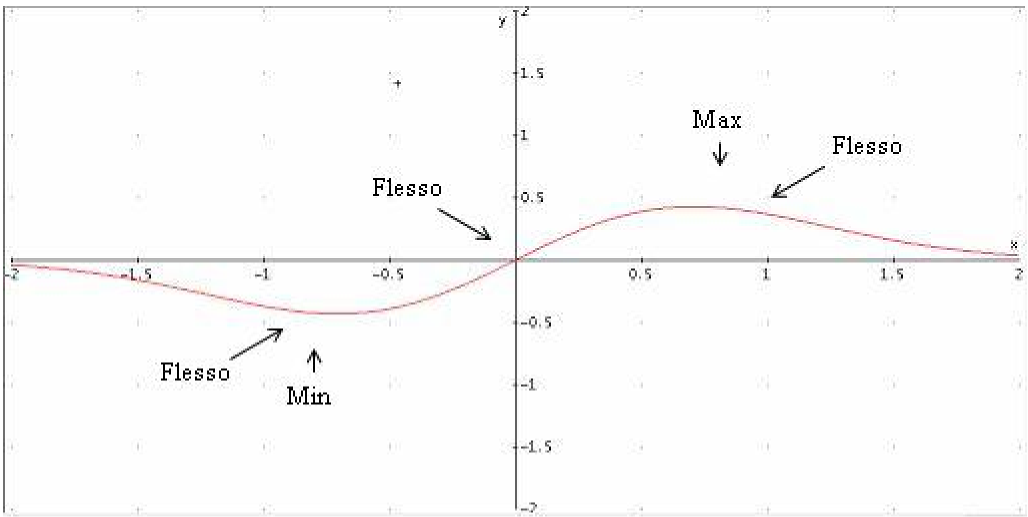
$(3 - 2x^2) > 0 \Rightarrow -\dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

f(0) = 0 $\qquad$ P(0,0)

$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{e^3}} \qquad P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{e^3}}\right)$

$f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{e^3}} \qquad P\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{e^3}}\right)$ sono punti di flesso

Grafico:



$$\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{2}{5}\cdot x^{\frac{2}{5}} + c$$

$\int x \cdot e^{-x}\,dx$ metodo per parti $\qquad x$ = f.f. e^{-x} = f.d.

$$-x\cdot e^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + c$$

$$\int x\cos x\,dx = x sen\, x - \int sen\, x\,dx = x sen\, x + \cos x + c$$

f(x) = x – log|x|

C.E. $x \neq 0$

Asintoti verticali: $\lim\limits_{x\to 0} x - \log|x| = +\infty$ 0 è asintoto verticale

Asintoti Orizzontali: $\lim_{x\to +\infty} x - \log|x| = \lim_{x\to +\infty} x\left(1 - \frac{\log|x|}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{x\to -\infty} x - \log|x| = -\infty$

non esistono asintoti orizzontali

asintoti obliqui

$m = \lim_{x\to \infty} \frac{x - \log|x|}{x} = \lim_{x\to \infty} 1 - \frac{\log|x|}{x} = 1 \quad m = 1$

$n = \lim_{x\to \infty} (x - \log|x|) - x = -\infty$

non esistono asintoti obliqui perché $n \notin R$

Derivata prima

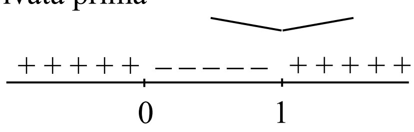
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

zeri della derivata prima

$\frac{x-1}{x} = 0$ quando $x = 1$

segno della derivata prima

$\frac{x-1}{x} > 0$ $x > 1$ e $x < 0$

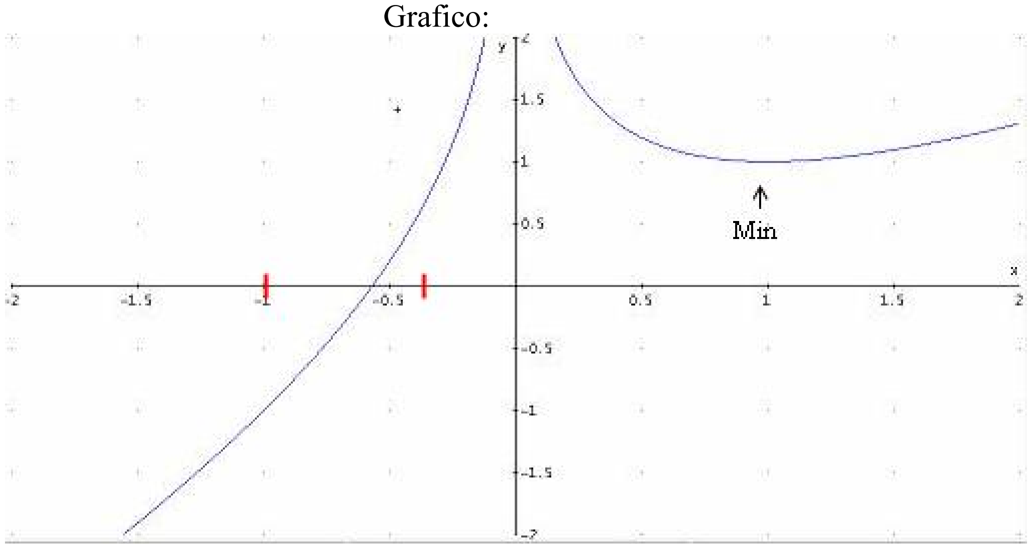


$f(1) = 1$ è un punto di minimo

per l'intersezioni con l'asse delle x si usa il criterio di esistenza degli zeri

Si considera intervallo $-1, -\frac{1}{e}$ e in questo intervallo $f(-1)\cdot f(-\frac{1}{e}) < 0$

Grafico:



Integrale di Riemann

$\int_a^b f(x)\,dx$ f(x): [a,b]→R con a < b Integrale di Riemann

L'integrale di Riemann lo si può applicare in un intervallo chiuso della retta reale [a,b] dove *a* funge da estremo di integrazione inferiore e *b* da estremo di integrazione superiore, con $a < b$
Ma che succede quando $a = b$, oppure $a > b$?

Per definizione se i due estremi di integrazione *a* e *b* sono uguali si ha che: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

Nel caso in cui l'estremo inferiore *a* è maggiore dell'estremo superiore *b* si ha che: $\int_a^b f(x)\,dx =$

$- \int_b^a f(x)\,dx$ [si invertono gli estremi di integrazione]

Ricapitolando:

caso a < b → $\int_a^b f(x)\,dx$ Integrale di Riemann

caso a = b → $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

caso a > b → $\int_a^b f(x)\,dx = - \int_b^a f(x)\,dx$ l'integrale coincide con l'opposto dell'integrale di Riemann

Proprietà che riguarda gli integrali di Riemann

Sia data una funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo [a,b]

∀c∈]a,b[l'integrale di Riemann risulta $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Funzione integrale

Utile per dare regole di calcolo

Si considera la f(t): [a,b]→R con f(t) integrabile secondo Riemann

Si considera una funzione F: [a,b] → R definita dalla legge: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

La funzione F si dice funzione integrale
La funzione integrale è una funzione che gode di due proprietà fondamentali:

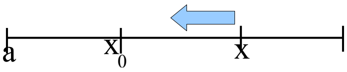
1. F è una funzione continua
2. F è derivabile nei punti in cui la funzione integranda [cioè la *f*] risulta continua e la derivata di F nel punto x_0 coincide con *f*: $F'(x_0) = f(x_0)$

Dimostrazione 1): F è una funzione continua

Dire che la F è una funzione continua vuol dire che $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [F(x) - F(x_0)] = 0$

Per dimostrare che la F è continua, si deve dimostra che F è continua sia da destra sia da sinistra
Quindi si deve dimostrare che $\lim_{x\to x_0^+} [F(x) - F(x_0)] = 0$ e anche che $\lim_{x\to x_0^-} [F(x) - F(x_0)] = 0$

Continua da destra



Sia [a,b] l'intervallo e $x_0 \in [a,b]$

Calcolando $\lim_{x\to x_0^+} [F(x) - F(x_0)] = 0$, in questo caso x si avvicina ad x_0 assumendo valori che sono maggiori di x_0: quindi x si trova alla destra di x_0.

Scrivendo la differenza $F(x) - F(x_0)$, sostituendo si osserva che: $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$

Per la proprietà dell'integrale di Riemann nel caso in cui $x_0 < x$ si ha:

$F(x) - F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$

Semplificando: $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

Considerando i valori assoluti nei due membri si ottiene: $|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right|$

Mentre per una proprietà dell'integrale di Riemann si ha che: $\left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt$

Per ipotesi la funzione integrabile f(t) è una funzione limitata $\Rightarrow |f(t)| \le M$ [M è una costante]

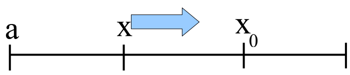
Di conseguenza la catena di disequazioni diventerà: $|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \le \int_{x_0}^{x} M\,dt$

Come già visto l'integrale secondo Riemann di una funzione costante è $= \int_{x_0}^{x} M\,dt = M(x - x_0)$

Quindi si avrà: $|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \le \int_{x_0}^{x} M\,dt = M(x - x_0)$

Calcolando si ha: $\lim_{x\to x_0} M(x - x_0) = 0$

$|F(x) - F(x_0)|$ poiché in valore assoluto risulta ≥ 0
Quindi si ottiene: $0 \le |F(x) - F(x_0)| \le 0$
Per il teorema del confronto risulta $|F(x) - F(x_0)| = 0$
Perciò si ottiene che: $\lim_{x\to x_0^+} [F(x) - F(x_0)] = 0$
Quindi la funzione è continua da destra



Continua da sinistra

Si calcola $\lim_{x\to x_0^-} [F(x) - F(x_0)] = 0$, questa vola x si avvicina ad x_0 assumendo valori che sono minori di x_0; quindi x si troverà a sinistra di x_0

Considerando nuovamente la differenza $F(x) - F(x_0)$, si avrà che: $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$

Per la proprietà dell'integrale di Riemann nel caso in cui $x < x_0$ si ha:

$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^{x_0} f(t)\,dt$

Semplificando: $F(x) - F(x_0) = -\int_x^{x_0} f(t)\,dt$

Per una proprietà dei valori assoluti si ha che: $-\int_x^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$

E il ragionamento segue passo passo quello precedente
quindi la funzione integrale è continua da sinistra
Più in generale la funzione integrale F risulta continua

Dimostrazione 2): F è derivabile dove f è continua e risulta $F'(x_0) = f(x_0)$
Si dimostrerà che $F'_+(x_0) = f(x_0)$ e che anche $F'_-(x_0) = f(x_0)$

$F'_+(x_0) = f(x_0)$

Si utilizza il rapporto incrementale di F: $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$

E in definitiva bisogna dimostra che: $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

Si considera la differenza $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) =$

Poiché si calcola il limite da destra, x assumerà valori maggiori di x_0 quindi $x_0 < x$

Poiché $F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$, si ha : $= \dfrac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} - f(x_0) =$

Per la proprietà dell'integrale di Riemann nel caso in cui $x_0 < x$ si ha:

$F(x) - F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt$, quindi :

$$= \frac{\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} - f(x_0) =$$

Riducendo allo stesso denominatore: $= \dfrac{\int_a^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} =$

Semplificando: $= \dfrac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt - f(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} =$

Poiché $f(x_0)$ è una costante si ha che $f(x_0)(x - x_0) = \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt$

Sostituendo: $= \dfrac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt}{x - x_0} =$

Sommando i due integrali si ottiene: $= \dfrac{\int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]\,dt}{x - x_0} =$

Dire che f è una funzione continua significa che $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ I_+(x_0) : \forall t \in I_+(x_0) \cap [a,b] \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$

Quindi, ricapitolando l'uguaglianza: $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \dfrac{\int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]\,dt}{x - x_0}$

Ma per la proprietà dei valori assoluti $\dfrac{\int_{x_0}^{x} f(t) - f(x_0)\,dt}{x - x_0} \leq \dfrac{\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,dt}{x - x_0}$

Dalla disuguaglianza $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ segue: $\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,dt < \int_{x_0}^{x} \varepsilon$

Poiché ε è una costante si ha: $\int_{x_0}^{x} \varepsilon = \varepsilon(x - x_0)$

Quindi $\dfrac{\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,dt}{x - x_0} < \dfrac{\varepsilon(x - x_0)}{x - x_0}$

Ricapitolando: $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \dfrac{\int_{x_0}^{x} [f(t) - f(x_0)]\,dt}{x - x_0} \leq \dfrac{\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,dt}{x - x_0} < \dfrac{\varepsilon(x - x_0)}{x - x_0}$

quindi: $\left| \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$ che equivale a dire $\lim_{x \to x_0^+} \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

Perciò risulta $F'_+(x_0) = f(x_0)$

In maniera del tutto analoga [ma facendo attenzione alla variazione degli estremi di integrazione] si dimostra anche $F'_-(x_0) = f(x_0)$

Quindi $F'(x_0) = f(x_0)$ e si perviene alla tesi

Quindi F è una primitiva di f. Le funzioni continue ammettono primitive. La funzione integrale è una primitiva di f

Definizione:
f integrabile secondo Riemann in [a,b]
$[f(x)]^n$ → [potenza ennesima] è integrabile secondo Riemann

Definizione:
f,g : [a,b] → R integrabili secondo Riemann
il loro prodotto è integrabile secondo Riemann in [a,b]
la somma è integrabile secondo Riemann quindi f+g è integrabile secondo Riemann
la potenza è integrabile secondo Riemann quindi $(f+g)^2$ è integrabile secondo Riemann
quindi: $(f+g)^2 - (f-g)^2$ è integrabile secondo Riemann

svolgendo i quadrati: $(f+g)^2 - (f-g)^2 = f^2 + g^2 + 2fg - g^2 + 2fg - f^2$
semplificando si ottiene: $(f+g)^2 - (f-g)^2 = 4fg$
moltiplicando per $\frac{1}{4}$ si ottiene: $f \cdot g = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$

Teorema di Torricelli Barrow – Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

$f:[a,b] \rightarrow R$
se f continua in [a,b] e se H primitiva della f
allora si dimostra che $\int_a^b f(x)\,dx = H(b) - H(a)$

Dimostrazione:

f è una funzione continua, quindi ammette come primitiva la funzione integrale
Se alla funzione integrale si aggiunge una costante si otterrà ancora un'altra primitiva della f, quindi: $H(x) = F(x) + c$

per definizione $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

sostituendo si ottiene: $H(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$

calcolando H(x) nel secondo estremo di integrazione b si ottiene: $H(b) = \int_a^b f(t)\,dt + c$

calcolando H(x) nel primo estremo di integrazione a si ottiene: $H(a) = \int_a^a f(t)\,dt + c$

sottraendo membro a membro si ottiene: $H(b) - H(a) = \int_a^b f(t)\,dt + c - \int_a^a f(t)\,dt - c$

poiché per definizione $\int_a^a f(t)\,dt = 0$ e semplificando si perviene alla tesi

infatti $H(b) - H(a) = \int_a^b f(t)\,dt - 0 \Rightarrow$ tesi

Regola di calcolo

Dal teorema precedente si ottiene la regola di calcolo:
per calcolare l'integrale definito, per prima cosa si trova una primitiva della funzione integrando, successivamente si calcola la primitiva nel primo estremo di integrazione e dopo nel secondo estremo di integrazione e per finire si sottraggono i due risultati:
Esempio:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = [sen\,x]_0^{\frac{\pi}{2}} = sen\tfrac{\pi}{2} - sen0 = 1$$

Teorema della media integrale

Data $f:[a,b] \rightarrow R$ f continua in [a,b] allora $\exists\, c \in\,]a,b[\, : \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

[Ovvero: si moltiplica l'ampiezza dell'intervallo per il valore che la funzione assume in c]

f è continua in [a,b], quindi per il teorema di Weierstrass ∃ m,M estremi inferiori e superiori ma essendo f continua in [a,b] significa anche che è integrabile secondo Riemann
Essendo integrabile secondo Riemann sussiste una disuguaglianza fondamentale

ovvero: $m(b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b - a)$

dividendo i membri per (b – a) si ottiene: $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \le M$

Ma m e M sono due valori che la funzione assume, e per il teorema dei valori intermedi [che afferma che se una funzione assume due valori, allora la funzione assume tutti i valori fra essi compresi] si ha che $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$ è un valore che la funzione assume perché compreso fra m e M

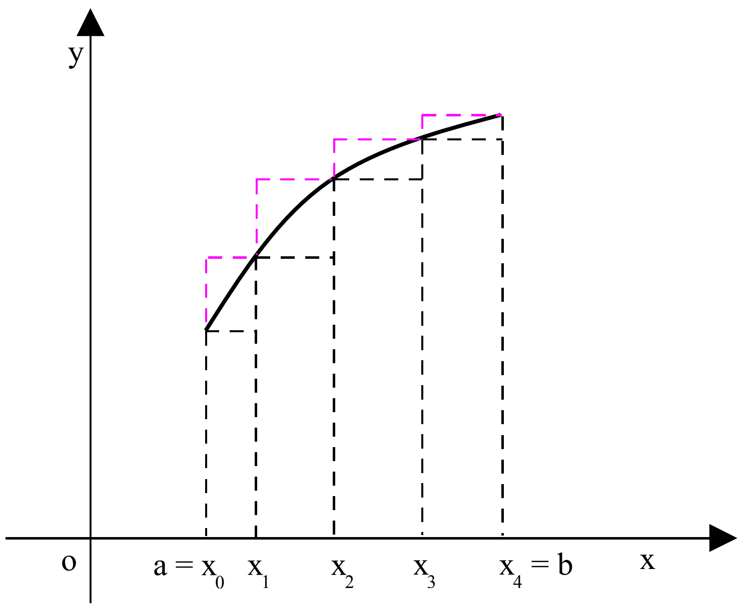
il che vuol dire che esisterà un c che in f(c) sarà uguale a $= \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$

ma da ciò si ricava la tesi, infatti: $f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$

Significato geometrico dell'integrale di Riemann

f:[a,b] → R funzione a valori non negati, ovvero f(x) ≥ 0

Si partiziona l'intervallo [a,b] in intervalli più piccoli e da ogni punto trovato si conduce la parallela all'asse delle ordinate



Si considera l'estremo inferiore dei piccoli intervalli trovati, creando dei piccoli rettangoli. Si ottiene un Plurirettangolo [formato dai vari rettangoli che si trovano al di sotto della curva] inscritto nel trapezoide curvilineo
Se invece si considera l'estremo superiore dei piccoli intervalli trovati, si ottiene un plurirettangolo [formato dai vari rettangoli che si trovano al di sopra della curva] circoscritto
L'area di ogni singolo rettangolo inscritto è data dall'ampiezza dell'intervallo per l'estremo inferiore, e la somma di tutte le aree dei rettangoli da la somma inferiore: $i(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1})$
Invece l'aria di ogni rettangolo circoscritto è data dall'ampiezza dell'intervallo per l'estremo superiore, e la somma di tutte le aree dei rettangoli da la somma superiore: $s(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1})$

Da ciò si denota che vale la seguente disuguaglianza: i(P,f) ≤ A ≤ s(P,f) [A = area del trapezoide]
Quindi l'area per i(P,f) rappresenta un maggiorante, mentre per s(P,f) rappresenta un minorante
Si considerano l'insiemi che ha come elementi i(P,f) e l'insieme che ha come elementi s(P,f); nuovamente l'area sarà un maggiorante per l'insieme i(P,f) e un minorante per l'insieme s(P,f)

Ma sup{i,(P,f) : P∈ **P**([a,b])}= $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ [→ integrale inferiore di Riemann]

e inf {s,(P,f) : P∈ **P**([a,b])} = $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ [→ integrale superiore di Riemann]

quindi si ottiene che: $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq$ Area $\leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

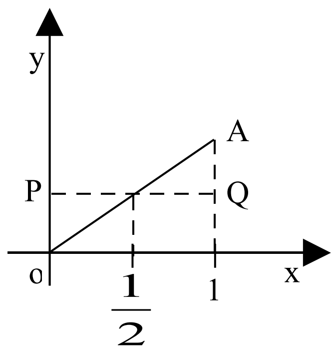
Ma per ipotesi la funzione è integrabile secondo Riemann, ma se una funzione è integrabile secondo Riemann l'integrale superiore e l'integrale inferiore devono essere uguali. Quindi saranno uguali all'area del trapezoide.
Quindi in definitiva l'integrale di Riemann altro non è che l'area del trapezoide [ovvero: dal grafico della funzione, dall'asse delle x e dalle parallele all'asse delle ordinate condotte per i punti a,b]

Esempio:
f:[0,1]→R definita dalla legge f(x) = x
[è l'equazione della diagonale del 1° e 3° quadrante, e si chiama 1° bisettrice]
si disegna la bisettrice solo nell'intervallo [0,1] perché è quello interessato

Per il teorema della media integrale ∃ c ∈ [0,1] : f(c)(1 – 0) = $\int_0^1 f(x)\,dx$

Si calcola l'integrale: $\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0$

Quindi per il teorema della media integrale $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} = f(c)(1-0) = c$



Ciò vuol dire che l'area del triangolo (o,A,1) è uguale all'area del rettangolo (o,P,Q,1)

Esercizio:

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}dx$$

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{Bx+C}{(1+x^2)}$$

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C)(1+x)}{(1+x)(1+x^2)}$$

$A+Ax^2+Bx+Bx^2+C+Cx = 1$
$Ax^2+Bx^2 = 0$
$Bx+Cx = 0$
$A+C = 1$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \begin{cases} A=-B \\ C=-B \\ -2B=1 \end{cases} \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}dx = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{1+x^2}dx$$

spezzando si ottiene: $\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{1+x^2}dx$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx = \frac{1}{2}\log|1+x|$

$-\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{1+x^2}dx$ lo si spezza nuovamente in $-\frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx$

$-\frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}dx$ moltiplicando e dividendo per 2 si ottiene $-\frac{1}{4}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{4}\log(1+x^2)$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}x$

in definitiva $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}\log|1+x| - \frac{1}{4}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}x + c$

Esercizi

$$\int \frac{1}{sen^2x\cdot\cos^2x}dx = \int \frac{sen^2x+\cos^2x}{sen^2x\cdot\cos^2x}dx = \int \frac{sen^2x}{sen^2x\cdot\cos^2x}dx + \int \frac{\cos^2x}{sen^2x\cdot\cos^2x}dx =$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2x} + \int \frac{dx}{sen^2x} = tg\,x - \cot g\,x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

[moltiplicando numeratore e denominatore per $(1-\cos x)$ si ha:

a denominatore: $(1+\cos x)(1-\cos x) = 1-\cos^2x = sen^2x$

quindi: $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos}{sen^2x}dx = \int \frac{dx}{sen^2x} - \int \frac{\cos}{sen^2x}dx$

$$\int \frac{dx}{sen^2x} = -\cot g\,x$$

$\int \frac{\cos}{sen^2x}dx$ applicando il metodo di sostituzione: $\begin{matrix} sen\,x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{matrix}$

$$\int \frac{\cos}{sen^2x}dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \rightarrow \int \frac{\cos}{sen^2x}dx = -\frac{1}{sen\,x}$$

quindi: $\int \frac{dx}{1+\cos x} = -\cot g\,x + \frac{1}{sen\,x} + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ a > 0

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$ metodo di sostituzione $\begin{matrix} \frac{x}{a} = t \\ \frac{1}{a}dx = dt \end{matrix}$

$$\int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = arcsen\,t + c$$

quindi: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsen\frac{x}{a} + c$

$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ si applica il metodo di sostituzione per parti

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int \sqrt{a^2-x^2}\cdot 1dx$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\cdot\frac{-2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

semplificando: $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\cdot\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

aggiungendo e sottraendo a^2 a numeratore si ha: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

spezzando la frazione: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \left[\frac{(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] dx$

spezzando l'integrale: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

sapendo che sussiste l'uguaglianza: $\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right)^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sqrt{a^2 - x^2}$

si sostituisce nel primo integrale: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

portando $- \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ a primo membro: $2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

svolgendo l'integrale: $2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot arcsen \frac{x}{a}$

moltiplicando i due membri per $\frac{1}{2}$ si ha: $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot arcsen \frac{x}{a}\right] + c$

$\int sen^2 x\, dx = \int sen\, x \cdot sen\, x\, dx$

integrando per parti si ottiene: $\int sen^2 x\, dx = -sen\, x \cdot \cos x - \int -\cos^2 x\, dx$

sapendo che sussiste l'eguaglianza $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$

si sostituisce: $\int sen^2 x\, dx = -sen\, x \cdot \cos x + \int \left(1 - sen^2 x\right) dx$

spezzando l'integrale: $\int sen^2 x\, dx = -sen\, x \cdot \cos x + \int dx - \int sen^2 x\, dx$

portando $- \int sen^2 x\, dx$ a primo membro: $2\int sen^2 x\, dx = -sen\, x \cdot \cos x + \int dx$

svolgendo l'integrale: $2\int sen^2 x\, dx = -sen\, x \cdot \cos x + x + c$

moltiplicando i due membri per $\frac{1}{2}$ si ha: $\int sen^2 x\, dx = \frac{1}{2}[-sen\, x \cdot \cos x + x] + c$

$\int \frac{dx}{(x \log x)(\log\log x)}$ metodo di sostituzione: $\log\log x = t$

$\frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} dx = dt$

$\int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\log\log x| + c$

Serie Numerica

Sia data una successione $(a_n) = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; l'espressioni $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ costruita con i numeri della successione, è detta **serie numerica.** I numeri naturali $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sono detti termini della serie e a_n è detto termine generale della serie

L'espressione $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ si può anche scrivere come $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Per dare significato alla scrittura $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ si considera una successione (s_n) così definita:

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ che prende il nome di successione delle somme parziali o delle ridotte n-sime

Di tale successione (che è costituita da un numero finito di termini) ha senso calcolare $\lim_{n\to+\infty} s_n$

Se il limite tende ad un numero finito *s* ovvero: $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$, la successione (s_n) è convergente e converge ad *s*, mentre la serie si dice convergente e ammette come somma *s*

Se il limite tende ad un numero infinito ovvero: $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, la successione (s_n) diverge a $+\infty$, mentre la serie si dice divergente positivamente

Se il limite tende ad un numero infinito ovvero: $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$, la successione (s_n) diverge a $-\infty$, mentre la serie si dice divergente negativamente

Se la successione (s_n) è o convergente o divergente è regolare, e anche la serie si dice regolare

Se la successione (s_n) non è regolare la serie si dice indeterminata

Studiare il carattere di una serie significa stabilire se essa è convergente, divergente o indeterminata

TEOREMA: Si considera la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se questa serie è convergente, il termine generale $a_n \to 0$

Dimostrazione:

Si considerano s_n e $s_{n-1} \Rightarrow s_n - s_{n-1} = a_n$ poiché

$s_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$

$s_{n-1} = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}$ sottraendo

$s_n - s_{n-1} = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n - a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_{n-1}$ semplificando:

$s_n - s_{n-1} = a_n$

Ma per ipotesi la serie è convergente quindi s_n converge ad s e anche s_{n-1} converge a s

Sostituendo si trova: $s - s = 0 \Rightarrow$ quindi a_n converge a 0

TEOREMA: Se si considera la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ serie a termini non negativi

la serie risulterà o convergente o divergente positivamente

considerando la successione (s_n) delle ridotte n-sime, si tratta di una successione non decrescente

Dimostrazione:

si considera (s_{n+1}), che equivale a: $s_{n+1} = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}$

s_{n+1} lo si può scrivere come $s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$ poiché la serie è a termini non negativi [ovvero $a_n \geq 0$]

allora $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$ ma se $s_{n+1} \geq s_n$ $\forall n$ allora per definizione vuol dire che s_n è non decrescente $\Rightarrow s_n$ è una successione monotona.

Ma sulle successione monotone si può dire che se è una successione non decrescente e limitata superiormente, converge all'estremo superiore, se non è limitata superiormente diverge a $+\infty$

Da ciò segue:

Condizione necessaria perché una serie sia convergente: se si ha una serie a termini positivi e il termine generale tende a 0, allora la serie potrebbe essere convergente, se invece il termine generale della serie non tende a 0 allora la serie sarà sicuramente divergente positivamente.

data la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n}$ il termini generale della serie tende ad 1 e non a 0 quindi la successione diverge positivamente

Esercizio:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ si tratta di una serie a termini positivi, il cui termine generale tende a 0, quindi la serie potrebbe essere convergente

come si calcola la somma di una serie?

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

semplificando i termini opposti si ha: $1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$ la serie è convergente e ammette come somma 1 perché la successione è convergente e ammette come limite 1

Serie geometrica di ragione x

È una successione del tipo $1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$

Ragione geometrica = rapporto costante tra un termine e il suo precedente

Per studiare il carattere di questa serie si fa riferimento alla successioni delle somme parziali

$s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ moltiplicando entrambi i membri per x si ha:

$x \cdot s_n = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ sottraendo membro a membro si ha:

$s_n - x \cdot s_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} - x - x^2 - x^3 - \ldots - x^n$ mettendo in evidenza e semplificando si ha:

$s_n(1-x) = 1 - x^n$ da cui segue che:

$s_n = \frac{1 - x^n}{1 - x}$ quando $x \neq 1$, invece $s_n = n$ quando $x = 1$

infatti quando $x = 1$ si ha: $1 + 1 + 1^2 + \ldots + 1^{n-1}$: tutti gli addendi sono uguali a 1 e sono in numero di n

quindi: $s_n = \begin{cases} \frac{1 - x^n}{1 - x} & x \neq 1 \\ n & x = 1 \end{cases}$

Come si comporta s_n?

Quando $x = 1$ si ha che $s_n = n$ si ha che $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ quindi diverge positivamente

Quando $x \neq 1$ si ha che $s_n = \frac{1 - x^n}{1 - x}$, un ruolo fondamentale lo gioca x^n

Ricordando la successione a^n si ha: $\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a > 1 \\ 1 & a = 1 \\ 0 & |a| < 1 \\ non\ esiste & a \leq -1 \end{cases}$

Allora:

se $|x| < 1$, $x^n \to 0$ quindi la serie geometrica è convergente e ammette come somma $s = \dfrac{1}{1-x}$

se $x > 1$ la serie è divergente positivamente perché $x^n \to +\infty$ ma c'è il segno – davanti quindi il numeratore tende a $-\infty$, quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{-\infty}{numero\ negativo} = +\infty$

se $x \le -1$ la serie è indeterminata perché si considera $x^n = (-1)^n |x|^n$ e da queste si possono estrarre due sottosuccessioni che ammettono limiti diversi (a secondo che n sia pari o dispari) infatti $|x|^n$ diverge a $+\infty$ e si possono estrarre due successioni, una delle quali (quella di posto pari) ammette come limite $+\infty$ e l'altra (quella di posto dispari) ammette come limite $-\infty$

Ricapitolando:

in presenza di serie geometrica di ragione x si ha $s_n = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ e il carattere è:

se $|x| < 1$ la serie è convergente
se $x \ge 1$ la serie è divergente
se $x < -1$ la serie è indeterminata

Criteri per lo studio del carattere delle serie

Criterio di Cauchy (senza dimostrazione)

Data la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ questa serie è convergente $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon : \forall\, n \ge n_\varepsilon, \forall p \in N \Rightarrow \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$

lo si applica per mettere in evidenza che la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ (detta serie armonica) è divergente positivamente

si prende $p = n$
(essendo la serie a termini positivi si può togliere il segno di valore assoluto)

$$\sum_{k=n+1}^{n+n=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1+1} + \ldots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \ge \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

li si prendono tutti uguali a $\dfrac{1}{2n}$ che è il termine più piccolo e tutti sono in numero di n.

Quindi tutta la somma è $\ge n \cdot \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2}$

Per l'arbitrarietà di ε, se si prende $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$ la sommatoria risulterebbe $>\varepsilon$, ma ciò è impossibile quindi la serie non è convergente, ma essendo una serie a termini positivi risulta essere divergente positivamente.

Criterio del confronto

Date due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ a termini non negativi

con $a_n \leq b_n$ $\forall n$

la prima serie si dice minorante la seconda; la seconda serie si dice maggiorante la prima serie

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è divergente

Per ipotesi $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente

(t_n) = successioni somme parziali di $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ dal momento che $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge anche (t_n) converge

(s_n) = successioni somme parziali di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$s_n \leq t_n$ $\forall n$ poiché $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n = t_n$

s_n e t_n sono monotone non decrescenti [in virtù di una dimostrazione precedente]

quindi s_n e t_n ammettono limite

se t_n ammette come limite un numero reale, cioè è convergente, anche s_n è convergente e quindi dal momento che $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è convergente anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sarà convergente

Esempio:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, poiché deve sussistere la relazione $a_n \leq b_n$ si ha che $\frac{1}{n(n+1)} = a_n \leq \frac{1}{n^2} = b_n$

se $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente, anche $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è convergente

In termini di limiti:

se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}^+$ le due serie hanno lo stesso carattere

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1$$ le due serie hanno lo stesso carattere $\rightarrow$ sono convergenti

Esempio:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ è divergente

$n^{\frac{1}{2}} < n \Rightarrow \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} > \frac{1}{n}$ si può utilizzare il criterio del confronto.

Criterio della radice

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini non negativi

se $\exists\, x \in]0,1[: \sqrt[n]{a_n} \leq x \ \forall n$ la serie è convergente

se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \ \forall n$ la serie è divergente positivamente

Primo caso: $\sqrt[n]{a_n} \leq x$ elevando tutto a n si ha: $a_n \leq x^n$ allora per il criterio del confronto si ha:

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ minorante $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ [$\rightarrow$ serie geometrica]

poiché $x^n \in]0,1[$ la serie risulta convergente [quando $x < 1$ la serie geometrica è convergente], quindi convergerà anche la prima serie

Secondo caso: $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_n \geq 1$ il termine generale è ≥ 1 [essendo una serie non negativa il cui termine generale non tende a 0 non può essere convergente] quindi la serie diverge a $+\infty$

In termini di limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} a = 1 & \textit{non si può dire nulla} \\ a < 1 & \textit{la serie è convergente} \\ a > 1 & \textit{la serie è divergente} \end{cases}$

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[\log(n+1)]^n} =$$

calcolando il limite della radice n-sima si ha: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{[\log(n+1)]} = 0$

il limite è un numero < 1 quindi $\Rightarrow$ la serie è convergente

Criterio del rapporto

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini positivi

se $\exists\, x \in]0,1[: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq x \ \forall n$ la serie è convergente

se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n$ la serie è divergente positivamente

Primo caso: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq x \Rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot x$

vale la disuguaglianza $a_n \leq a_1 \cdot x^{n-1}$ si verifica per induzione:

per n =1 $a_1 = a_1 \cdot 1$ è vera

supposta vera per n la si verifica per n+1

per n+1 di deve trovare che: $a_{n+1} = a_1 \cdot x^n$

per ipotesi: $a_{n+1} \leq a_n \cdot x$
per ipotesi induttiva si ha: $a_n \leq a_1 \cdot x^{n-1}$
moltiplicando per x la disuguaglianza continua a sussistere: $a_n \cdot x \leq a_1 \cdot x^{n-1} \cdot x = a_1 \cdot x^n$
ricapitolando si ha: $a_{n+1} \leq a_n \cdot x \leq a_1 \cdot x^{n-1} \cdot x = a_1 \cdot x^n$
da cui si ricava: $a_{n+1} \leq a_1 \cdot x^n$ quindi la disuguaglianza $a_n \leq a_1 \cdot x^{n-1}$ è vera

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 \cdot x^{n-1} \Rightarrow$ serie geometrica di ragione x moltiplicata per un numero.

Poiché $x \in]0,1[$[quando x < 1 la serie geometrica è convergente] la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 \cdot x^{n-1}$ è convergente

confrontando la serie di partenza $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_1 \cdot x^{n-1}$ si ottiene che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente

Secondo caso: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

quindi a_n è monotona non decrescente quindi diverge positivamente

In termini di limiti si considera: $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} l = 1 & \textit{non si può dire nulla} \\ l < 1 & \textit{la serie è convergente} \\ l > 1 & \textit{la serie è divergente} \end{cases}$

Esempio:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\dfrac{3^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{3^n}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{n(3^{n+1})}{3^n(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \dfrac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} 3 \cdot \dfrac{n}{n+1} = 3 > 1$ quindi la serie è divergente

Esercizi:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n + 3^n}$ si ha che $\dfrac{1}{2^n + 3^n} < \dfrac{1}{3^n}$ (poiché $2^n + 3^n > 3^n$)

$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{3^n}$ serie geometrica di ragione $\dfrac{1}{3}$; poiché $\dfrac{1}{3} < 1$, la serie è convergente

quindi per il criterio del confronto anche la prima serie è convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n}$ la serie è a termini positivi

si applica il criterio del rapporto:

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{n} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{n+1}{n} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la serie è convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ metodo di radice

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = 1$ caso critico ricorrere ad altro criterio

Criterio della serie di Cauchy

Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se $a_n \to 0$ non crescente, la serie ha lo stesso carattere della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot a_{2^k}$

Dove a_{2^k} è l'elemento di posto 2^k della serie di partenza, moltiplicato per il coefficiente 2^k

Questo criterio è utilizzato per studiare il carattere della serie armonica generalizzata: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

La successione $\frac{1}{n^\alpha}$ converge a 0 (infatti quando n diverge $\frac{1}{n^\alpha} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$),

decrescendo (infatti $\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ $\forall n \in N$), quindi non crescente

Quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ha lo stesso carattere di $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^\alpha} =$

Scambiando gli esponenti a denominatore (per la commutativa): $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^\alpha)^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{2^\alpha}\right)^k =$

Semplificando si ha: $\sum_{k=1}^{+\infty} (2^{1-\alpha})^k$ che è una serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$

Quindi si ottiene che:

$2^{1-\alpha} < 1$ la serie è convergente $\Rightarrow 1-\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1$

$2^{1-\alpha} \geq 1$ la serie è divergente $\Rightarrow 1-\alpha \geq 0 \Rightarrow -\alpha \geq -1 \Rightarrow \alpha \leq 1$

Esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \Rightarrow 3 > 1 \Rightarrow \alpha > 1 \Rightarrow$ convergente

Criterio degli infinitesimi

Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ positivi; se $\exists\, \alpha, l \in R^+ : n^\alpha \cdot a_n \to l$

allora se $\alpha > 1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente

se $\alpha \leq 1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente

Dimostrazione con i limiti: (si utilizza il confronto e la serie armonica generalizzata)

Quando $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha \cdot a_n = l$ con $l \in R^+$ per il criterio del confronto le due serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hanno lo stesso carattere,

quindi quando $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge (ovvero quando $\alpha > 1$), $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

invece quando $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (ovvero quando $\alpha \leq 1$) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

Serie assolutamente convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente se è convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$

una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ assolutamente convergente è convergente

una serie convergete non è detto che sia assolutamente convergente

Primo caso: Ipotesi: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente

Tesi: $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente

Dimostrazione:

Dire che una serie è convergente, vuol dire che verifica il criterio di Cauchy, che afferma che una serie è convergente $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon : \forall\ n \geq n_\varepsilon , \forall p \in N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$

Perché $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$ sia convergente, per il criterio di Cauchy deve risultare $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|\right| < \varepsilon$

Ma il valore assoluto più esterno si può togliere perché la serie $\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$ è una serie a termini positivi

per la proprietà del valore assoluto $|x+y| \leq |x|+|y|$ si ha la disuguaglianza $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$

quindi si ottiene la disuguaglianza $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon$ che conferma la tesi.

Secondo caso: lo si dimostra con un esempio:
si considera la serie a termini di segno alterno
ovvero una serie formata da infiniti termini positivi e infiniti termini negativi

$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$

Criterio di Leibniz:

Se $a_n \to 0$ decrescendo la serie è convergente e, denotata con s la sua somma, risulta: $|s-s_n| \leq a_{n+1}$
$|s-s_n| \leq a_{n+1} \to$ è la maggiorazione dell'errore che si commette quando si sostituisce la somma della serie con s_n)

si considera la serie a segni alterni $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ con termine generale $\frac{1}{n}$ (moltiplicato per un coefficiente) che tende a 0 decrescendo. Per il criterio di Leibniz la serie è convergente, ma non è assolutamente convergente, perché per essere assolutamente convergente la serie dei valori assoluti dovrebbe essere convergente.
se si prende la serie dei valori assoluti, si ottiene che $|(-1)^{n+1}|$ risulta essere un numero positivo, moltiplicato per $\frac{1}{n}$ da origine alla serie armonica che però è divergente: quindi la serie dei valori assoluti è divergente

Esempi

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^{n-1}}{5^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$ → serie geometrica di ragione $\frac{4}{5} < 1$ quindi la serie è convergente

quando la ragione convergente la somma è = $\frac{1}{1-x}$ quindi s = $\frac{1}{1-\frac{4}{5}} = 5$ → ammette come somma 5

$\sum_{n=1}^{+\infty} sen\frac{1}{n}$ → utilizzando il criterio del confronto con $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ si ha:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{sen\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ quindi le due serie hanno lo stesso carattere: sono divergenti

perché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$ → utilizzando il criterio della radice

$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 0$ [$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$ → per stolz-cesaro], poiché 0 < 1 la serie è convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+3}\right)^n$ → utilizzando il criterio della radice

$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2} > 1$ → divergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)^n$ → utilizzando il criterio della radice

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = 0$ [$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ → per stolz-cesaro] = 0

la serie è convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ → utilizzando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)}{(n+1)^n(n+1)} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

semplificando: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(\frac{1}{n}(n+1))^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$

la serie è convergente

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^{\alpha}}$ → utilizzando il criterio della serie di Cauchy poiché la successione tende a 0 decrescendo la serie in questione ha lo stesso carattere della serie: $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \cdot \frac{\log 2^k}{(2^{\alpha})^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (2^{1-\alpha})^k \cdot k \log 2 =$

$\log 2 \sum_{k=1}^{+\infty} (2^{1-\alpha})^k \cdot k$ → utilizzando il criterio della radice:

$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{(2^{1-\alpha})^k \cdot k} = \lim_{k\to+\infty} 2^{1-\alpha} \cdot \sqrt[k]{k} = 2^{1-\alpha} \cdot 1$ [$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ per stolz-cesaro]

$2^{1-\alpha} > 1 \Rightarrow 1 - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1$ → divergente

$2^{1-\alpha} < 1 \Rightarrow 1 - \alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1$ → convergente

La serie è convergente

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$ applicando De l'Hopital

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2}$ ri-applicando De l'Hopital

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{6x} = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$ applicando la formula di Taylor con resto di Peano

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + f^n(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \omega(x)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

si utilizza la formula di Taylor di ordine 3 (grado massimo della x) per la funzione e ^{x}, e punto iniziale 0

$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1$;

$f'(x_0)\,(x - x_0) = f' e^x = e^x$ nel punto $0 = e^0 = 1(x - 0) = x$

$f''(x_0)\,\frac{(x-x_0)^2}{2!} = f'' e^x = e^x$ nel punto $0 = e^0 = 1\,\frac{(x-0)^2}{2!} = \frac{x^2}{2!}$

$f'''(x_0)\,\frac{(x-x_0)^3}{3!} = f''' e^x = e^x$ nel punto $0 = e^0 = 1\,\frac{(x-0)^3}{3!} = \frac{x^3}{3!}$

quindi: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \omega(x)\frac{x^3}{3!}$ $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \omega(x)\frac{x^3}{3!}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \omega(x)\frac{x^3}{3!} - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} =$$

semplificando: $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3!} + \omega(x)\frac{x^3}{3!}}{x^3}$

poiché $\omega(x)\frac{x^3}{3!}$ risulta un infinitesimo di ordine inferiore al passaggio al limite è = 0 quindi il limite diventa $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{3!}\cdot\frac{1}{x^3} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - sen\frac{1}{n}$$

Si utilizza la formula di Taylor sul seno di ordine 3 e punto iniziale o0
f(x) = sen$x$
$f^{(n)}(x) = sen\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$,
non occorre calcolare le varie derivate, infatti dalla derivata n-sima, volta per volta particolarizzando n si trovaquello che serve:
$f(x_0) = f(0) = sen0 = 0$
$f'(x_0)\,(x - x_0)$ = dando a n valore 1 si ha: $sen\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = 1(x-0) = x$
$f''(x_0)\,\frac{(x-x_0)^2}{2!}$ = dando a n valore 2 si ha $sen\left(0 + \frac{2}{2}\pi\right) = sen\pi = 0\,\frac{(x-0)^2}{2!} = 0$
$f'''(x_0)\,\frac{(x-x_0)^3}{3!}$ = dando a n valore 3 si ha $sen\left(0 + \frac{3}{2}\pi\right) = -1\,\frac{(x-0)^3}{3!} = -\frac{x^3}{3!}$
quindi si ottiene che sen$x$ = $x - \frac{x^3}{3!} + \omega(x)\frac{x^3}{3!}$
sostituendo x con $\frac{1}{n}$ si ottiene: $sen\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{3!n^3} + \omega\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!n^3}$
quindi la serie diventa: $\frac{1}{n} - sen\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3!n^3} - \omega\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!n^3}$
semplificando $\frac{1}{n} - sen\frac{1}{n} = \frac{1}{3!n^3} - \omega\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!n^3}$
Paragonando questa serie alla serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ si ottiene:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3!n^3} - \omega\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{3!}$ serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$, la serie originale converge

$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1$ la si confronta con $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ (si utilizza come termine di paragone proprio $\frac{1}{n^\alpha}$ per ricondurlo al limite notevole)

$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1$ quindi $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} \Rightarrow \begin{cases}\alpha > 1 \Rightarrow \textit{convergente} \\ \alpha \le 1 \Rightarrow \textit{divergente}\end{cases}$

$\int sen\, nx \cdot sen\, mx\, dx$

$\int \cos nx \cdot \cos mx\, dx$

$\int sen\, nx \cdot \cos mx\, dx$

$\int sen\, nx \cdot sen\, mx\, dx$ utilizzando le formule di addizione e sottrazione del seno

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - sen\alpha\, sen\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + sen\alpha\, sen\beta$ sottraendo membro a membro si ottiene:

$2sen\alpha\, sen\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \longrightarrow sen\alpha\, sen\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$

$\int sen\, nx \cdot sen\, mx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(n - m)x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(n + m)x\, dx$

se n ≠ m

$\int sen\, nx \cdot sen\, mx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(n - m)x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(n + m)x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{sen(n - m)x}{n - m} - \frac{1}{2} \cdot \frac{sen(n + m)x}{n + m} + c$

se n = m

$\int sen\, nx \cdot sen\, mx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos(n - m)x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos(n + m)x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{sen\, 2nx}{2n} + c$