Capitolo 1

RETI LOGICHE E ALGEBRA DELLA COMMUTAZIONE

1.1 - Introduzione

Informazione è ciò che si conosce di una determinata realtà; per esprimere questa conoscenza occorre un criterio (**codice**) di rappresentazione, che sia correlato in maniera adeguata alla natura e alle proprietà della realtà in esame.

Per esempio se si considera la geometria, l'informazione è costituita dalla conoscenza delle proprietà metriche delle figure ed è convenientemente rappresentata da numeri.

Nel rispetto delle proprietà del codice, l'informazione può essere manipolata per ottenerne di nuova, accrescendo il livello di conoscenza sulla realtà di interesse: questo processo é detto **elaborazione dell'informazione**; tornando all'esempio della geometria, quando si addizionano due numeri che rappresentano la misura di due grandezze omogenee, si esegue un'elaborazione il cui risultato è un nuovo numero che viene interpretato come misura della grandezza somma delle due grandezze date.

L'elaborazione può essere compiuta da sistemi naturali, primo tra tutti la mente umana, oppure da sistemi artificiali, dei quali il più noto e complesso è il calcolatore.

I sistemi artificiali, a seconda della capacità di elaborazione che devono possedere, possono avere complessità strutturali e funzionali molto differenti, ma tutti sono riconducibili ad un unico modello denominato **rete logica**.

Una rete logica può essere schematizzata esternamente come una scatola (in inglese **black box**) con n punti di ingresso ed m punti di uscita, attraverso i quali la rete scambia informazione con l'ambiente: l'informazione viene introdotta nella rete applicando ai punti di entrata n **segnali di ingresso** x_0, x_1, …, x_{n-1} e viene fatta uscire come risultato dell'elaborazione prelevando dai punti di uscita m **segnali di uscita** z_0, z_1, …, z_{m-1}; in altri termini i segnali di ingresso *codificano* l'informazione che deve essere elaborata dalla rete, quelli di uscita l'informazione prodotta dall'elaborazione (Fig. 1.1). Anche all'interno alla rete, durante il suo funzionamento, sono presenti segnali che codificano l'informazione nel suo fluire dall'ingresso verso l'uscita nel processo di elaborazione.

Poiché con la tecnologia attuale le reti logiche sono realizzate convenientemente sotto forma di circuiti elettronici, tutti i segnali in gioco sono di natura elettrica e magnetica e si fa in modo che possano assumere solo **valori discreti** in numero finito e quindi possano codificare solo l'informazione istanziabile dall'insieme finito di combinazioni di quei valori. Per esempio un segnale a due valori può codificare l'informazione relativa allo stato (*aperto* o *chiuso)* di un interruttore, oppure allo stato (*acceso* o *spento*) di una lampada. Si tratta di segnali **digitali**, così detti in riferimento alle cifre (in inglese *digits)* di un sistema di numerazione, che sono appunto in numero finito.

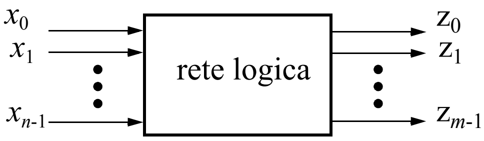


Fig. 1.1

I segnali digitali sono funzioni del tempo continue a tratti, assumendo valori costanti per certi intervalli di tempo e cambiando bruscamente alla fine di ogni intervallo, con un andamento formato da una successione di gradini, in generale di varia durata e variamente distanziati (Fig. 1.2a). Per questo comportamento i segnali digitali si differenziano dai **segnali analogici**, che matematicamente sono funzioni del tempo continue e derivabili (Fig. 1.2b) e si ritrovano nella maggior parte dei sistemi fisici, naturali o artificiali.

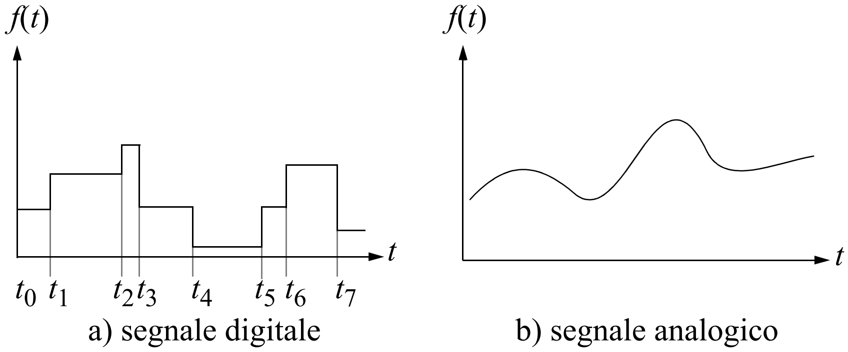
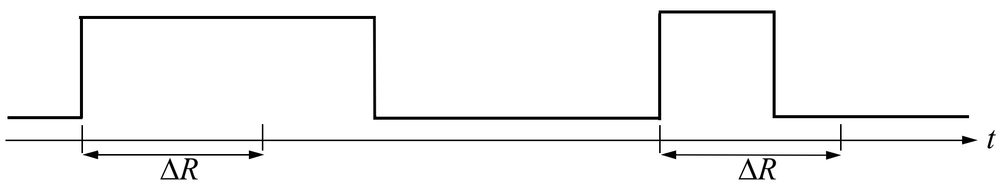


Fig. 1.2

Per le reti logiche hanno pratico interesse solo i segnali digitali binari, ovvero quei segnali che possono assumere solo due valori. Questa limitazione dipende da due ragioni principali: una è di natura tecnologica, in quanto è molto più facile realizzare dispositivi che lavorano con segnali binari, che non costruire dispositivi in grado di operare su segnali a più di due valori. L'altra ragione è di carattere logico e su di essa torneremo ampiamente in seguito.

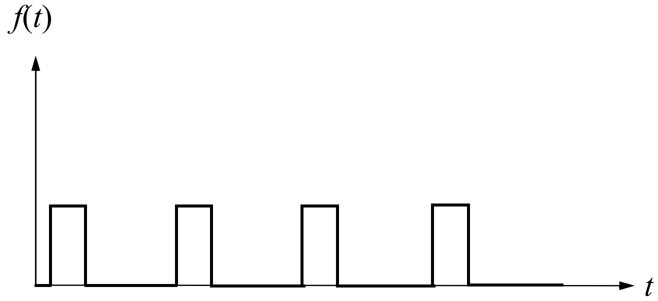
Riguardo alla durata degli intervalli in cui un segnale binario si mantiene ad un valore stabile, si distingue tra segnali **a livelli** e segnali **ad impulsi**. La differenza tra i due tipi non è peraltro assoluta, ma è in relazione al fatto che una rete logica risponde in uscita con un certo ritardo ΔR rispetto all'istante in cui si verifica una variazione di ingresso: se un segnale di ingresso mantiene il proprio valore stabile per un tempo più lungo di tale ritardo, è da considerare a livelli, altrimenti è trattato come un segnale ad impulsi (Fig. 1.3).



segnale a livelli segnale a impulsi

Fig. 1.3

Quando l'andamento di un segnale digitale è costituito da una successione di impulsi della stessa durata che si ripetono con cadenza costante, il segnale è detto **periodico** (Fig. 1.4).



segnale digitale periodico

Fig. 1.4

Quanto detto circa la ripidità dei fronti di salita e di discesa dei segnali digitali è puramente ideale, poiché nella realtà, a causa di fenomeni parassiti e inerziali, il valore dei segnali non può cambiare istantaneamente nè in un verso nè nell'altro, ma richiede un tempo non nullo sia in salita (**tempo di salita, setup time**, **rise time**) che in discesa (**tempo di discesa, reset time**, **fall time**). Volendo conservare l'aderenza al modello ideale (segnali con fronti ripidi) e al tempo stesso tenere conto dell'andamento reale, al posto dell'intervallo T in cui il livello del segnale rimane fisso consideriamo l'intervallo T'che include anche il tempo di salita e quello di discesa nel seguente modo. Se V_1 e V_2 sono rispettivamente il valore minimo e massimo del segnale, con tempo di salita si intende il tempo necessario perchè il segnale si porti da un valore che supera V_1 del 10% del valore finale V_2 ad un valore non inferiore al 90% di V_2; analogamente il tempo di discesa è il tempo impiegato dal segnale per passare da un valore pari al 90% del livello V_2 ad un valore che supera V_1 del 10% di V_2 (Fig. 1.5)).

L'intervallo T' in generale è più lungo di T e inizia in ritardo di t_s.

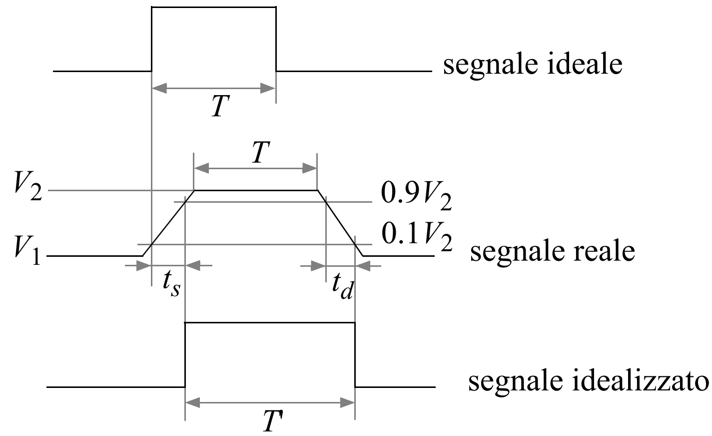


Fig. 1.5

Torniamo a considerare le reti logiche dal punto di vista matematico, al fine di ricavare un modello funzionale che ne spieghi la capacità di elaborazione. Ci riferiamo ad una branca della matematica, la logica, che ha come oggetto di indagine le proposizioni logiche e le loro proprietà e costruisce regole (**connettivi logici**) per combinarle in nuove proposizioni; in questo senso si può affermare che essa realizza una semplice forma di elaborazione dell'informazione. Per la logica una proposizione è una frase della quale è possibile stabilire in modo non ambiguo e senza contraddizioni la verità o la falsità; per esempio le frasi: *"il sole risplende"* e "*gli uomini hanno quattro mani"* sono proposizioni nel senso della logica, dal momento che la prima può essere vera o falsa e la seconda è sempre falsa. La frase "*tutti gli uomini sono alti"* non è una proposizione in quanto è ambigua, mancando il riferimento rispetto al quale l'altezza è valutata, e neppure è una proposizione la frase "*è falso che in questo momento io stia leggendo"* in quanto contraddice se stessa.

Astraendo dalla struttura sintattica delle proposizioni, ma considerandone solo la verità o la falsità, possiamo indicarle in modo sintetico con lettere dell'alfabeto, alle quali risultano associati i valori di verità delle proposizioni stesse; in questo senso le lettere assumono il ruolo di variabili e precisamente di **variabili logiche** i cui valori appartengono ad un insieme $\mathcal{B}$ di due soli elementi, indicati con la notazione inglese T (**true**) ed F (**false**), oppure più frequentemente con la notazione 1 e 0. Ne segue che un connettivo logico è una funzione f che ha per argomenti variabili logiche e definisce una variabile logica; si tratta di una funzione definita nel dominio $\mathcal{B}$, a valori nel codominio $\mathcal{B}$, ovvero f: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$.

Le funzioni logiche possono essere realizzate con i dispositivi che abbiamo chiamato reti logiche, associando variabili logiche e segnali: poichè le variabili logiche hanno solo due valori, è sufficiente che anche i segnali associati abbiano solo due valori e questa è l'altra ragione della quale si è parlato circa il fatto che si considerano solo segnali binari. Nel seguito faremo riferimento a segnali o a variabili logiche indifferentemente ed una rete fisica che manipola segnali potrà essere considerata in modo astratto come una funzione logica su variabili logiche. Da qui discende che, ai fini del progetto logico delle reti, i valori effettivi dei segnali, da associare ai valori logici *T* ed *F*, non hanno importanza, purchè siano sufficientemente differenti per non creare ambiguità di riconoscimento da parte delle reti stesse. Per esempio se un segnale-tensione può variare nell'intervallo 0÷5 V, possiamo convenire di associare al valore logico *F* qualsiasi livello di tensione compreso nella fascia 0÷1V, al valore logico *T* qualsiasi livello nella fascia 4.5÷ 5.5V o viceversa, considerando invece logicamente ambigui, e quindi proibiti, i livelli tra 1 e 4.5 V (Fig. 1.6).

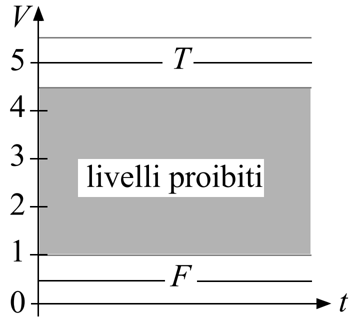


Fig. 1.6

Le variabili logiche, oltre a rappresentare segnali, possono anche rappresentare la condizione o **stato** in cui si trovano elementi di commutazione (switch). Un commutatore *S* può essere chiuso, ossia può fare fluire corrente in un circuito, ed il suo stato è **on**, rappresentato dal valore *T* di una variabile logica *s*; oppure può essere aperto e non consentire il passaggio della corrente: il suo stato è allora **off**, rappresentato con il valore *F* della stessa variabile *s*.

Per studiare le reti logiche si ricorre all'algebra booleana che, sviluppata intorno alla metà del XIX secolo dal matematico inglese George Boole per studi sulla logica, da poco più di mezzo secolo, fondamentalmente per opera di Shannon (1938), è applicata in una sua variante in questo contesto. Questa variante viene chiamata **algebra della commutazione.**

1.2 - Algebra della commutazione

1.2.1 - Operatori fondamentali e porte logiche

L'algebra della commutazione definisce due postulati fondamentali: il postulato dell'operatore di **moltiplicazione logica** e quello dell'operatore di **addizione logica**. La loro descrizione funzionale è fatta mediante **tavole di verità**, tabelle nelle quali ad ogni combinazione dei valori delle variabili-operando sono associati i valori delle variabili generate dall'applicazione degli operatori.

Ricordando che una sequenza di cifre binarie costituisce la rappresentazione biunivoca in base 2 di un numero naturale, le combinazioni dei valori binari degli operandi possono essere interpretate come le rappresentazioni binarie degli interi nell'intervallo $[0, 2^n)$, essendo n il numero degli operandi, e quindi una tabella di verità può essere organizzata ordinando tali combinazioni secondo la successione naturale.

In particolare dette x, y, z tre variabili logiche, le tavole di verità dei postulati fondamentali sono le seguenti:

***a) Postulato della moltiplicazione logica*: $z = x \cdot y$** o semplicemente $z = xy$:

x	y	$z = x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

***b) Postulato dell'addizione logica*: $z = x+y$**:

x	y	$z = x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Esiste un terzo postulato, o della ***complementazione***, definito nel seguente modo; data una variabile x, la variabile di valore opposto $z = \overline{x}$, detta **complemento** o **negazione** di x, è descritta attraverso la tavola di verità:

x	$z = \overline{x}$
0	1
1	0

Gli operatori di moltiplicazione e addizione corrispondono ai connettivi di congiunzione e disgiunzione della logica delle proposizioni e alle operazioni di intersezione ed unione dell'algebra degli insiemi; analogamente il concetto di complemento di una variabile trova i suoi equivalenti nei concetti di proposizione negata e di complemento di un insieme.

Passando all'ambito delle reti logiche, agli operatori moltiplicazione e addizione logici corrispondono due reti elementari che li realizzano e sono dette **porta logica AND** e **porta logica OR**, o semplicemente **AND** e **OR** (in inglese AND-gate e OR-gate).

La porta AND possiede due segnali di ingresso x ed y ed uno di uscita z il quale assume valore 1 se e solo se entrambi i segnali di ingresso valgono 1, in accordo alla definizione di moltiplicazione logico. Analogamente la porta OR possiede due segnali di ingresso x ed y ed uno di uscita z il quale vale 0 se e solo se entrambi gli ingressi valgono 0, come è affermato dalla definizione di addizione logica.

Il concetto di AND e di OR può essere esteso ad un numero di ingressi $n > 2$; in tal caso l'uscita della porta assumerà valore 1 o 0 se e solo se tutti gli n ingressi assumono contemporaneamente valore 1 o 0, rispettivamente per la porta AND e per la porta OR.

Infine all'operatore di complementazione corrisponde una rete chiamata **invertitore** o porta **NOT**: essa possiede un solo ingresso x ed una uscita z, la quale assume valore 1 se l'ingresso ha valore 0 e viceversa.

La figura seguente riporta i simboli usati per rappresentare le porte logiche.

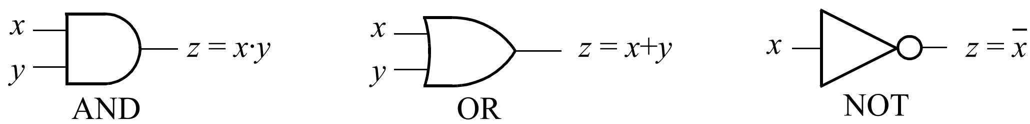


Fig. 1.7

1.2.2 - Principio di dualità

Osservando le tavole di verità della moltiplicazione logica e dell'addizione logica, è immediato verificare che, mentre la moltiplicazione dà risultato 1 solo se entrambi gli operandi valgono 1, l'addizione dà risultato 0 solo nel caso che gli operandi siano 0. La possibilità di trasferire un ragionamento fatto su uno dei due operatori all'altro operatore semplicemente scambiando i termini moltiplicazione e addizione e 0 e 1 non è casuale, bensì è un fatto proprio dell'algebra della commutazione, e più in generale di qualunque algebra di Boole, noto come ***principio di dualità***, e può essere formulato come segue:

Se una proposizione dell'algebra, il cui enunciato coinvolge solo gli operatori + *e* · *, è vera, rimane tale se si scambiano i termini moltiplicazione e addizione tra di loro e le costanti* 0 *ed* 1 *tra di loro, ovunque nell'enunciato.*

È opportuno sottolineare che il principio di dualità non è un postulato nè un teorema, bensì una proprietà (o *metateorema* secondo McCluskey) di cui godono teoremi e postulati dell'algebra e che può essere utilmente sfruttata per la loro definizione e dimostrazione; la dualità è una caratteristica intrinseca alla definizione degli operatori moltiplicazione logica e addizione logica ed esprime la simmetria esistente nelle strutture algebriche che possono essere costruite sull'insieme $\mathcal{B}$.

Un'immediata applicazione del principio di dualità si trova stabilendo le seguenti proposizioni, che costituiscono le **proprietà fondamentali delle costanti logiche**; tali proposizioni sono elencate a coppie, in quanto l'una è deducibile dall'altra per il principio di dualità:

$$x = 0 \text{ se } \overline{x} = 1 \qquad x = 1 \text{ se } \overline{x} = 0$$

Le seguenti ulteriori proprietà delle costanti logiche, a coppie duali, possono essere stabilite da una diversa definizione della moltiplicazione, dell'addizione e della complementazione logici:

$$0 \cdot 0 = 0 \qquad 1+1 = 1$$
$$0+0 = 0 \qquad 1 \cdot 1 = 1$$
$$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0 \qquad 0+1 = 1+0 = 1$$
$$\overline{0} = 1 \qquad \overline{1} = 0$$

1.2.3 - Teoremi fondamentali dell'algebra della commutazione

Introduciamo ora i teoremi e le proprietà fondamentali. Della maggior parte di essi esistono le due forme duali e in tale doppia formulazione saranno enunciati. Per quanto riguarda la dimostrazione, può essere seguito il metodo della ***induzione perfetta***, ovvero per dimostrare un teorema se ne prova la validità per tutte le possibili combinazioni dei valori delle variabili, cosa possibile essendo l'insieme $\mathcal{B}$ finito. In alternativa è possibile una dimostrazione algebrica, ottenuta sfruttando i postulati, teoremi e proprietà precedentemente definiti e dimostrati, nonchè le proprietà delle costanti 0 e 1. Per la dimostrazione algebrica si rimanda all'Appendice.

1.2.3.1 - Teoremi di una variabile

- Teorema dell'elemento indifferente e dell'elemento nullo

$$x \cdot 1 = x \qquad x+0 = x$$
$$x+1 = 1 \qquad x \cdot 0 = 0$$

- Teorema della complementazione

$$x+\overline{x} = 1 \qquad x \cdot \overline{x} = 0$$

- Teorema di idempotenza

$$x+x = x \qquad x \cdot x = x$$

- Teorema di involuzione

$$\overline{(\overline{x})} = x$$

1.2.3.2 - Teoremi di due o più variabili

•Proprietà commutativa

$$x+y = y+x \qquad x\cdot y = y\cdot x$$

• Proprietà associativa

$$x+(y+z) = (x+y)+z = x+y+z \qquad x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z = x\cdot y\cdot z$$

• Proprietà distributiva

$$x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z\,) \qquad x+(y\cdot z) = (x+y)\cdot(x+z\,)$$

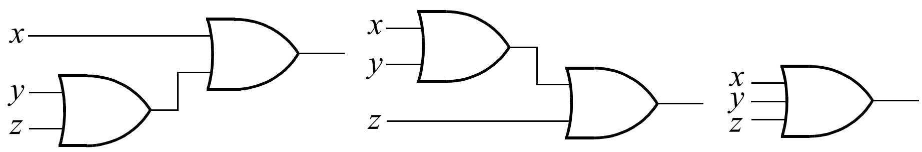
• Proprietà di assorbimento

$$x+x\cdot y = x \qquad x\cdot(x+y) = x$$

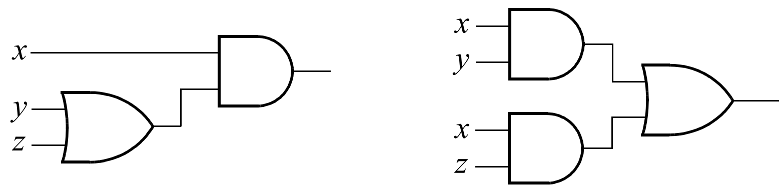
• Proprietà del consenso

$$x\cdot y+\bar{x}\cdot z+y\cdot z = x\cdot y+\bar{x}\cdot z \qquad (x+y)\cdot(\bar{x}+z)(y+z) = (x+y)\cdot(\bar{x}+z)$$

Gli enunciati algebrici precedenti hanno una immediata interpretazione alla luce delle reti logiche; per esempio la proprietà associativa dell'addizione logica stabilisce l'equivalenza tra le tre reti illustrate nella parte superiore della Fig. 1.8; analogamente la proprietà distributiva esprime il fatto che le reti nella parte inferiore della stessa figura sono funzionalmente equivalenti:



a) Proprietà associativa



b) Proprietà distributiva

Fig. 1.8

1.2.4 - Funzioni ed espressioni logiche

Riprendendo i concetti introdotti nel paragrafo 1.1, siano date n variabili logiche $x_0, x_1, ..., x_{n\text{-}1}$; una funzione logica (booleana) di tali variabili è una legge f che fa corrispondere ad ogni combinazione di valori di esse uno ed un solo valore di una variabile logica z e si indica con

$$z = f(x_0, x_1, ..., x_{n\text{-}1})$$

Una funzione logica è rappresentata in modo implicito da una ***tavola di verità***, in quanto questa specifica il valore della variabile dipendente z per ogni combinazione di valori binari delle variabili indipendenti, in modo simile a quanto visto per gli operatori fondamentali.

In modo esplicito una funzione è data attraverso un'***espressione algebrica***, ovvero un'espressione nella quale variabili logiche e costanti sono legate tra loro dagli operatori logici; il valore di una funzione è ottenuto calcolandone l'espressione, ossia applicando agli operandi gli operatori logici secondo l'ordinamento naturale prioritario decrescente NOT, AND, OR. Tale ordinamento può essere alterato mediante l'uso delle parentesi, secondo le stesse regole dell'algebra dei reali.

Ad una funzione logica f possono corrispondere più espressioni algebriche, formalmente diverse ma equivalenti tra loro; in particolare un'espressione algebrica può essere trasformata in un'altra più semplice, applicando opportunamente le proprietà dell'algebra.

Per esempio consideriamo la seguente tavola di verità:

a	b	c	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

essa rappresenta in forma implicita la funzione logica $z = f(a,b,c) = (a+b+c)(a+b+\overline{c})(a+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$, come è possibile verificare per sostituzione diretta in essa dei valori 0 e 1. La rete di Fig. 1.9 è la sua realizzazione.

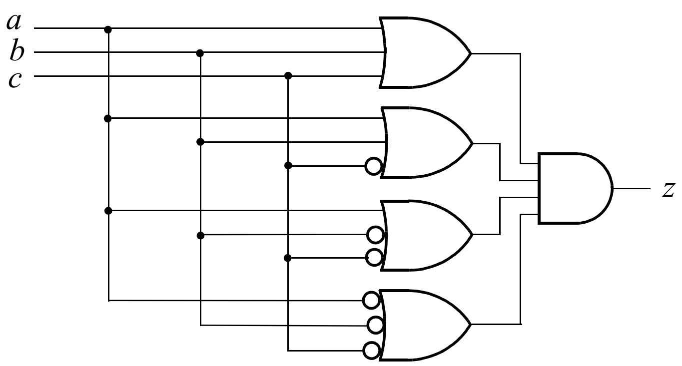


Fig. 1.9

Nella figura i cerchietti su alcuni ingressi delle porte OR rappresentano in forma abbreviata il simbolo delle porte NOT richieste per complementare le variabili come richiesto dall'espressione; i pallini rappresentano punti in cui una linea si biforca, distribuendo in più punti della rete lo stesso segnale (**fan-out**).

1.2.5 - Forme canoniche

Tra tutte le espressioni algebriche equivalenti di una stessa funzione logica hanno particolare importanza due espressioni costruite a partire da due tipi di funzioni elementari, dette rispettivamente mintermini e maxtermini e definite come segue.

*Un **mintermine** o **prodotto fondamentale** p_j è la funzione che vale 1 per la combinazione dei valori delle variabili $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ che codifica in binario il numero naturale j, ovvero per* $\overset{*}{x}_0\overset{*}{x}_1\ldots\overset{*}{x}_{n-1} \equiv j$, *dove* $\overset{*}{x}_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, \ldots, n-1$; *la sua espressione algebrica è costituita dalla moltiplicazione di n **letterali** derivati dalle n variabili con il criterio di scegliere la variabile x_i affermata se vale 1 nella rappresentazione di j, negata se vale 0.*

*Un **maxtermine** o **somma fondamentale** s_k è la funzione che vale* 0 *per la combinazione dei valori delle variabili $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ che codifica in binario il numero naturale k, ovvero per* $\overset{*}{x}_0\overset{*}{x}_1\ldots\overset{*}{x}_{n-1} \equiv k$, *con* $\overset{*}{x}_i \in \{0, 1\}, i = 0, 1, \ldots, n-1$; *la sua espressione algebrica è costituita dall'addizione logica di n letterali derivati dalle n variabili con il criterio di scegliere la variabile x_i negata se vale 1 nella rappresentazione di k, affermata se vale 0.*

Sia i mintermini che i maxtermini costruiti su *n* variabili sono 2^n. Notare che i mintermini ed i maxtermini non hanno alcuna relazione diretta con una data funzione, ma sono esclusivamente definiti dal numero delle variabili .

Le due espressioni costruite a partire dai mintermini o dai maxtermini prendono il nome di **forme canoniche** e sono definite nel modo seguente.

*La prima forma canonica o **forma canonica SP** (somma di prodotti) di una funzione f è la somma dei mintermini p_j, corrispondenti alle combinazioni j per le quali* $f = 1$. *La seconda forma canonica o **forma canonica PS** (prodotto di somme) di una funzione f è il prodotto dei maxtermini s_k, corrispondenti alle combinazioni k per le quali* $f = 0$.

Consideriamo per esempio la funzione logica definita dalla seguente tavola di verità.

a	b	c	z	
0	0	0	0	s_0
0	0	1	0	s_1
0	1	0	1	p_2
0	1	1	0	s_3
1	0	0	1	p_4
1	0	1	1	p_5
1	1	0	0	s_6
1	1	1	0	s_7

In corrispondenza di ogni riga in cui la funzione ha valore 1, scriviamo un termine ottenuto come prodotto di tre letterali derivati dalle variabili a, b, c, prese in forma diretta (affermata) o complementata a seconda che figurino in quella riga con valore 1 o 0 rispettivamente; tale prodotto è uno dei mintermini della funzione.

Analogamente per ogni riga per cui la funzione vale 0, si può scrivere un termine somma, ovvero un maxtermine, ottenuto come somma logica di tre letterali derivati dalle variabili a, b, c, complementate o affermate a seconda che figurino in quella riga rispettivamente con valore 1 o 0.

Le due forme canoniche sono pertanto le seguenti:

SP) $z = p_2+p_4+p_5 = \overline{a}\cdot b\cdot\overline{c}+ a\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}+a\cdot\overline{b}\cdot c$

PS) $z = s_0\cdot s_1\cdot s_3\cdot s_6\cdot s_7 = (a+b+c)\cdot(a+b+\overline{c})\cdot(a+\overline{b}+\overline{c})\cdot(\overline{a}+\overline{b}+c)\cdot(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})$

Il procedimento descritto è un'applicazione del **teorema di espansione di Shannon**, la cui dimostrazione è facilmente condotta con il metodo della induzione perfetta:

Una funzione logica di n variabili $z = f(x_0, x_1 ..., x_{n-1})$ *può essere decomposta nella somma di due funzioni di* n-1 *variabili,* $f(x_0, x_1 ..., x_{n-1}) = \overline{x}_i\cdot f(x_0, x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_{n-1})+x_i\cdot f(x_0, x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_{n-1})$, *oppure nel prodotto di due funzioni di* n-1 *variabili,* $f(x_0, x_1, ..., x_{n-1}) = (\overline{x}_i+f(x_0, x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_{n-1}))\cdot(x_i+f(x_0, x_1, ..., x_{i-1}, 0, x_{i+1}, ..., x_{n-1}))$.

Applicando iterativamente questo teorema, le forme canoniche SP e PS di una funzione $z = f(x_0, x_1 ..., x_{n-1})$ sono esprimibili rispettivamente con le relazioni:

$$f_{SP}(x_0, x_1 ..., x_{n-1}) = x_0x_1\ldots x_{n-1}f(1, 1, \ldots, 1)+x_0x_1\ldots\overline{x}_{n-1}f(1, 1, \ldots, 0)+...+\overline{x}_0\overline{x}_1\ldots x_{n-1}f(0, 0, \ldots, 1) +\overline{x}_0\overline{x}_1\ldots\overline{x}_{n-1}f(0, 0, \ldots, 0) = \sum_{i=0}^{2^n-1} p_i\cdot f(i);$$

$$f_{PS}(x_0, x_1 ..., x_{n-1}) = (x_0+x_1+\ldots+x_{n-1}+f(0, 0 ,\ldots, 0))\cdot(x_0+x_1+\ldots+\overline{x}_{n-1}+f(0, 0, \ldots, 1))\cdot\ldots\cdot(\overline{x}_0+\overline{x}_1+\ldots x_{n-1}+f(1, 1, \ldots, 0))\cdot\ldots\cdot(\overline{x}_0+\overline{x}_1+\ldots+\overline{x}_{n-1} +f(1, 1, \ldots, 1)) = \prod_{i=0}^{2^n-1}(s_i+f(i));$$

dove p_i ed s_i sono rispettivamente i mintermini ed i maxtermini delle n variabili; le quantità $f(i) = f(x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*) \in \{0, 1\}$ sono i valori che la funzione assume per le 2^n possibili combinazioni binarie $x_0^*x_1^*\ldots x_{n-1}^*$ delle variabili e $x_i^* \in \{0, 1\}$.

Ovviamente poichè alcuni di questi valori sono 0 ed altri 1, nella forma canonica SP figureranno, di tutti i mintermini possibili, solo quelli che garantiscono gli 1 della funzione; analogamente nella forma PS entreranno solo i maxtermini che garantiscono gli 0 della funzione.

In generale, per una funzione di n variabili, supponendo di ordinarne le righe della tabella di verità da 0 a 2^n-1, le forme canoniche si scrivono in forma abbreviata come segue:

$f_{SP} = \Sigma_n(m_1, m_2, ..., m_k)$
$f_{PS} = \Pi_n(M_1, M_2, ..., M_h)$

dove m_i sono numeri naturali con $0 \leq m_i \leq 2^n$-1, $m_i < m_{i+1}$, $i = 1, ..., k$, e $k \leq 2^n$-1 e M_j numeri naturali con $0 \leq M_j \leq 2^n$-1, $M_j < M_{j+1}$, $j = 1, ..., h$, e $h \leq 2^n$-1. Gli interi m_i e M_j indicano le posizioni, riferite alle righe appropriate della tabella, rispettivamente dei mintermini e dei maxtermini di cui è costituita la funzione; l'indice n apposto ai simboli di sommatoria e di prodottoria specifica il numero delle variabili.

Per esempio, per $n = 3$, la forma canonica espressa dalla notazione: $\Sigma_3(1, 3, 6)$ rappresenta la funzione logica

$$z = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + ab\bar{c}$$

E` facile rendersi conto che la forma canonica PS della stessa funzione è univocamente espressa, in modo implicito, come $\Pi_3(0, 2, 4, 5, 7)$, ovvero:

$$z = (a+b+c)(a+\bar{b}+c)(\bar{a}+b+c)(\bar{a}+b+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$$

Ovviamente valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\Sigma_r(m_1, m_2, ..., m_k) \neq \Sigma_s(m_1, m_2, ..., m_k) \quad \text{se } r \neq s$$
$$\Pi_r(M_1, M_2, ..., M_h) \neq \Pi_s(M_1, M_2, ..., M_h) \quad \text{se } r \neq s$$

Vale la pena sottolineare anche che la fprma SP e la forma PS di una funzione f non sono l'una la duale dell'altra, come viceversa lo sono la somma ed il prodotto logico; tuttavia tra le due forme esiste una relazione che sarà illustrata nel seguito.

Le forme canoniche, come del resto qualsiasi altra espressione, possono essere semplificate applicando le proprietà dell'algebra; per esempio consideriamo la funzione:

$$z = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + abc$$

Applicando successivamente la proprietà di idempotenza e la proprietà di assorbimento, essa può essere semplificata nel modo seguente:

$$z = \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc + \bar{a}bc + abc = \bar{a}c(\bar{b}+b) + bc(\bar{a}+a) = \bar{a}c + bc$$

1.2.6 - Teoremi di De Morgan

Nell'algebra della commutazione valgono due importanti teoremi, duali l'uno dell'altro, il cui enunciato è:

Date n variabili logiche $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$, *il complemento della loro addizione logica è uguale* *alla moltiplicazione logica dei loro complementi*; *dualmente*, *il complemento della loro moltiplicazione logica è uguale alla addizione dei loro complementi*:

$$\overline{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}} = \bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_{n-1}$$
$$\overline{x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}} = \bar{x}_0 + \bar{x}_1 + \ldots + \bar{x}_{n-1}$$

Dimostrazione

La dimostrazione è condotta per induzione matematica, ovvero si dimostra la validità dei teoremi per $n = 2$, quindi, ammesso che valgano per un generico n, si dimostrano per $n+1$.

Limitandoci alla prima delle due formulazioni, cominciamo a dimostrare la validità del teorema per due variabili x_1, x_2 e per questo, ricordando che la somma di due variabili è sempre 1 se esse sono l'una il complemento dell'altra (teorema della complementazione $x+\bar{x} = 1$), consideriamo la catena di uguaglianze

$$x_1+x_2+\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2 = (x_1+x_2+\bar{x}_1)\cdot(x_1+x_2+\bar{x}_2) = (1+x_2)\cdot(1+x_1) = 1\cdot1= 1$$

la quale prova che x_1+x_2 è il complemento di $\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2$, ossia che si può scrivere $\overline{x_1 + x_2} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$. Supponiamo ora che valga l'uguaglianza:

$$\overline{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}} = \bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_{n-1}$$

e indichiamo con y l'addizione logica delle prime n variabili:

$$y = x_1+x_2+\ldots+x_{n-1};$$

in questo modo il complemento dell'addizione di n+1 variabili $x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n$ può essere scritto nella forma:

$$\overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n} = \overline{y + x_n}$$

Poiché il teorema di De Morgan vale nel caso di due variabili e per la precedente posizione si può scrivere:

$$\overline{y + x_n} = \bar{y} \cdot \bar{x}_n = \overline{x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}} \cdot \bar{x}_n = \bar{x}_0 \cdot \bar{x}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_{n-1} \cdot \bar{x}_n$$

che dimostra il teorema nel caso di n+1 variabili. La dimostrazione del teorema duale procede in modo analogo.

La proprietà espressa dai teoremi di De Morgan non riguarda solo funzioni espresse come prodotto o come somma di variabili, ma può essere estesa al caso di funzioni qualsiasi attraverso una generalizzazione la quale consente di ottenere direttamente il complemento di una funzione assegnata:

Sia $f(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, +, \cdot)$ *una funzione logica di n variabili, la cui espressione algebrica contenga operatori moltiplicazione logica, addizione logica e complementazione*; *il complemento della funzione f si ottiene da questa complementandone le variabili e sostituendo l'operatore moltiplicazione logica con l'operatore addizione logica e viceversa*:

$$\bar{f}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, +, \cdot) = f(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n-1}, \cdot, +)$$

Dimostrazione

Una funzione f può essere sempre scritta in una delle due forme:

$$f = A+B \qquad f = A\cdot B$$

dove A e B sono due espressioni logiche; il suo complemento, per i teoremi di De Morgan, si può scrivere in una delle due forme :

$$\bar{f} = \overline{A+B} = \bar{A}\cdot\bar{B} \qquad \bar{f} = \overline{A\cdot B} = \bar{A}+\bar{B}$$

A loro volta nelle espressioni A e B possono essere ulteriomente individuate sottoespressioni più semplici del tipo $A'+B'$ o $A'\cdot B'$, a cui si possono applicare nuovamente i teoremi di De Morgan; ripetendo il procedimento più volte, si arriverà ad applicarlo alle singole variabili che risulteranno complementate, mentre gli operatori + e · saranno scambiati tra di loro.

Per esempio data la funzione

$$f = a\bar{b} + \overline{a\bar{c} + (d+\bar{e})}$$

se ne ricava immediatamente la funzione complemento che ha la seguente espressione:

$$\bar{f} = (\bar{a}+b)\cdot\overline{(\bar{a}+c)\cdot\bar{d}\cdot e}$$

si noti che il segno di complementazione esteso nell'espressione originaria non alle singole variabili ma a sottoepressioni rimane immutato.

La verifica è facile, ricorrendo ai teoremi di De Morgan e alle proprietà dell'algebra:

$$\bar{f} = \overline{a\bar{b} + \overline{a\bar{c} + (d+\bar{e})}} = \overline{a\bar{b}}\cdot\overline{\overline{(a\bar{c} + (d+\bar{e}))}} = (\bar{a}+b)\cdot\overline{\overline{a\bar{c}}\cdot(\overline{d+\bar{e}})}$$

$$= (\bar{a}+b)\cdot\overline{(\bar{a}+c)\cdot\bar{d}\cdot e}$$

1.2.7 - Dualità - Relazione tra funzione duale e funzione complemento

Data un'espressione booleana $E(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, +, \cdot)$, si dice **duale** di E l'espressione $D[E]$

$= E(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, \cdot , +)$, ottenuta da E scambiando il ruolo degli operatori + e ·. Per esempio la duale dell'espressione $xy+z$ è $(x+y)z$.

Vale il seguente teorema:

Se $E(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, +, \cdot)$ *è un'espressione di una funzione* $f(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$, *allora la sua duale* $D[E]$ *rappresenta la funzione* $\overline{f}(\overline{x}_0, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_{n-1})$.

Dimostrazione

Data $f(x_0, x_1, ..., x_{n-1} +, \cdot)$, si consideri la funzione $f(\overline{x}_0, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_{n-1}, +, \cdot)$ ed il suo complemento $\overline{f}(\overline{x}_0, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_{n-1}, +, \cdot)$; per il teorema di De Morgan generalizzato esso è uguale a $f(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, \cdot, +)$ che, per la definizione di dualità, è la funzione duale di quella data.

Da questo teorema discende che il complemento di una funzione $f(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ si può ottenere calcolando la duale della funzione $f(\overline{x}_0, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_{n-1})$; per esempio sia data la funzione $f(x, y, z)= xy+z$ e consideriamo la duale della $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \overline{x}\,\overline{y}+\overline{z}$, ossia $(\overline{x}+\overline{y})\overline{z}$: si vede immediatamente che essa coincide con il complemento della f, ottenuto in base al teorema di De Morgan generalizzato.

L'introduzione del concetto di duale di un'espressione data permette di esprimere la relazione che lega le forme SP e PS di una funzione $f(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, +, \cdot)$; precisamente, la forma PS è la duale della duale in forma SP dell'espressione data, la forma SP la duale della duale della forma PS data, ovvero:

$$E_{PS}(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, + ,\cdot) = D[D_{SP}[E_{SP}(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, + ,\cdot)]]$$
$$E_{SP}(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, + ,\cdot) = D[D_{PS}[E_{PS}(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, + ,\cdot)]]$$

In pratica, per passare dalla forma SP (PS) alla PS (SP) basta applicare la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione (della moltiplicazione rispetto all'addizione) e semplificare con le regole dell'algebra.

Per esempio consideriamo l'espressione SP $xy+\overline{y}z$; distribuendo, semplificando e applicando il consenso si ottiene:

$$xy+\overline{y}z = (xy+\overline{y})(xy+z) = (x+\overline{y})(x+z)(y+z) = (x+\overline{y})(y+z)$$

Analogamente data l'espressione PS $(x+y)(\overline{y}+\overline{z})$, si ottiene:

$$(x+y)(\overline{y}+\overline{z}) = x\overline{y}+y\overline{y}+x\overline{z}+y\overline{z} = x\overline{y}+x\overline{z}+y\overline{z} = x\overline{y}+y\overline{z}$$

1.2.8 - Insiemi funzionalmente completi - Gli operatori universali NAND e NOR

Gli operatori booleani AND, OR, NOT formano un **insieme funzionalmente completo**, nel senso che qualunque funzione logica booleana può essere espressa in termini di essi.

Tra gli operatori fondamentali è possibile definire anche altri insiemi funzionalmente completi, e precisamente la coppia (AND, NOT) e la coppia (OR, NOT). Infatti i teoremi di De Morgan garantiscono che l'addizione logica può essere espressa attraverso la moltiplicazione e la complementazione e che, dualmente, la moltiplicazione logica può essere espressa attraverso la addizione logica e la complementazione. Al riguardo è opportuno notare che le due coppie menzionate sono insiemi completi non ridondanti, in quanto non è possibile eliminare da esse uno degli operatori, senza perdere la completezza dell'insieme. Invece l'insieme di tutti gli operatori è ridondante, dal momento che l'eliminazione dell'operatore AND o OR lo trasforma in uno dei due insiemi completi irridondanti.

Infine la coppia (AND, OR) non è un insieme funzionalmente completo, poichè non è possibile ottenere il complemento di una funzione solo attraverso tali operatori.

Le implicazioni pratiche di quanto detto consistono nel fatto che per realizzare una qualunque funzione logica non è necessario disporre di porte AND, OR e NOT, ma sono sufficienti porte NOT insieme a porte AND oppure OR. In particolare, ad esempio, una porta AND (OR) ad n ingressi può essere realizzata con n+1 porte NOT ed una porta OR (AND), essendo:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n} \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n}$$

Definamo ora due nuovi operatori logici, denominati NAND e NOR e simboleggiati nelle espressioni con i simboli $|$ e $\downarrow$ rispettivamente, attraverso le tavole di verità:

x	y	$x \vert y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

x	y	$x{\downarrow}y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

È immediato verificare che valgono le uguaglianze:

$$x|y = \overline{x \cdot y} \qquad x{\downarrow}y = \overline{x + y}$$

le quali esprimono il fatto che eseguire l'operazione NAND o l'operazione NOR tra due variabili equivale ad eseguire rispettivamente le operazioni AND e NOT oppure le operazioni OR e NOT. Di fatto i nomi dei due nuovi operatori sono le contrazioni di NOT-AND e NOT-OR. I due operatori sono commutativi, ma non associativi, come si può verificare immediatamente dalle rispettive tavole di verità:

$$x \mid y = y \mid x \qquad x{\downarrow}y = y{\downarrow}x$$

$$x \mid (y \mid z) \neq (x \mid y) \mid z \qquad x{\downarrow}(y{\downarrow}z) \neq (x{\downarrow}y){\downarrow}z$$

ad essi corrispondono due porte logiche che vengono rappresentate con i simboli seguenti:

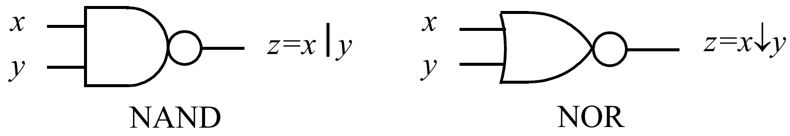


Fig. 1.10

Gli operatori NAND e NOR sono detti **operatori universali**, in quanto è possibile definire qualunque altro operatore dell’algebra attraverso uno solo di essi; in questo senso quindi ciascuno costituisce un insieme funzionalmente completo.

La verifica dell’universalità degli operatori NAND e NOR è immediata e consiste nell’esprimere gli operatori AND, OR, NOT solo mediante l’operatore NAND o l’operatore NOR:

a) NAND

$$x + y \;=\; \overline{\overline{x+y}} \;=\; \overline{\bar{x}\bar{y}} \;=\; \overline{(\overline{xx})(\overline{yy})} \;=\; (x|x)|(y|y)$$

$$xy \;=\; \overline{\overline{xy}} \;=\; \overline{(\overline{xy})(\overline{xy})} \;=\; (x|y)|(x|y)$$

$$\bar{x} \;=\; \overline{xx} \;=\; x|x$$

b) NOR

$$x + y \;=\; \overline{\overline{x+y}} \;=\; \overline{(\overline{x+y}) + (\overline{x+y})} \;=\; (x{\downarrow}y){\downarrow}(x{\downarrow}y)$$

$$xy \;=\; \overline{\overline{xy}} \;=\; \overline{\bar{x}+\bar{y}} \;=\; \overline{(\overline{x+x}) + (\overline{y+y})} \;=\; (x{\downarrow}x){\downarrow}(y{\downarrow}y)$$

$$\bar{x} \;=\; \overline{x+x} \;=\; x{\downarrow}x$$

Nella Fig. 1.11 sono illustrate le reti funzionalmente equivalenti alle porte logiche AND, OR, NOT, costruite solo in termini di porte NAND e NOR.

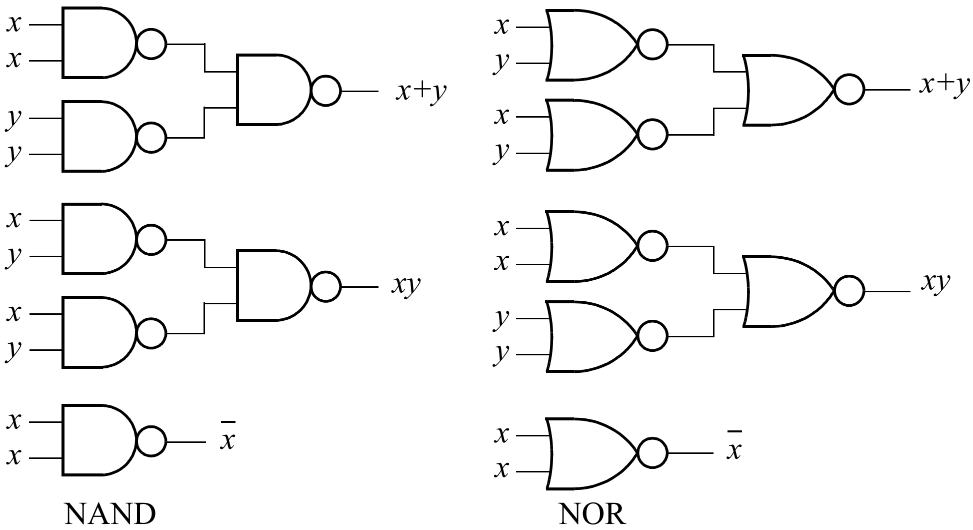


Fig. 1.11

Mediante l'algebra qualunque espressione può essere trasformata in una espressione equivalente nella quale compaiono solo gli operatori NAND e NOR. In particolare le forme canoniche SP e PS si trasformano rispettivamente in due espressioni che prendono il nome di forma normale NAND e forma normale NOR.

Per esempio consideriamo le seguenti espressioni canoniche:

$$z = \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c$$

$$z = (a+b+c)(a+b+\bar{c})(a+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})$$

Dalla prima, complementando due volte e applicando il teorema di De Morgan, si ottiene:

$$z = \overline{\overline{\bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + a\bar{b}c}} = \overline{(\overline{\bar{a}b\bar{c}})(\overline{a\bar{b}\bar{c}})(\overline{a\bar{b}c})} = ((|a)|b|(|c))|(a|(|b)|(|c))|(a|(|b)|c)$$

Analogamente dalla seconda si ricava:

$$\begin{aligned} z &= \overline{\overline{(a+b+c)(a+b+\bar{c})(a+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})}} \\ &= \overline{(\overline{a+b+c}) + (\overline{a+b+\bar{c}}) + (\overline{a+\bar{b}+\bar{c}}) + (\overline{\bar{a}+\bar{b}+c}) + (\overline{\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}})} \\ &= (a{\downarrow}b{\downarrow}c){\downarrow}(a{\downarrow}b{\downarrow}({\downarrow}c)){\downarrow}(a{\downarrow}({\downarrow}b){\downarrow}({\downarrow}c)){\downarrow}(({\downarrow}a){\downarrow}({\downarrow}b){\downarrow}c){\downarrow}(({\downarrow}a){\downarrow}({\downarrow}b){\downarrow}({\downarrow}c)) \end{aligned}$$

1.2.9 - Funzioni di *n* variabili

Date n variabili logiche indipendenti, ci proponiamo di determinare il numero di funzioni booleane distinte di tali variabili.

Poichè ogni variabile può assumere due valori 0 e 1, per n variabili esistono 2^n combinazioni diverse di valori binari. D'altra parte per ciascuna di tali combinazioni una qualunque funzione delle n variabili assume uno dei due valori possibili 0 e 1. Il numero di funzioni possibili è allora pari al numero dei modi in cui possono essere disposti a gruppi di 2^n con ripetizione i simboli 0 e 1, ovvero 2^{2^n}. Per esempio se $n = 2$, si hanno $2^{2^2} = 16$ disposizioni distinte e quindi 16 tabelle di verità a cui corrispondono altrettante funzioni; la tabella seguente mostra le più comuni espressioni algebriche di tali funzioni:

a	0	0	1	1	
b	0	1	0	1	
$f_0 = 0$	0	0	0	0	costante logica 0 (inconsistenza)
$f_1 = ab$	0	0	0	1	AND
$f_2 = a\overline{b}$	0	0	1	0	mintermine di f_6
$f_3 = a$	0	0	1	1	variabile a
$f_4 = \overline{a}b$	0	1	0	0	mintermine di f_6
$f_5 = b$	0	1	0	1	variabile b
$f_6 = a\overline{b}+\overline{a}b$	0	1	1	0	OR esclusivo: $a \oplus b$
$f_7 = a+b$	0	1	1	1	OR
$f_8 = a \downarrow b$	1	0	0	0	NOR
$f_9 = (a+\overline{b})(\overline{a}+b)$	1	0	0	1	identità
$f_{10} = \overline{b}$	1	0	1	0	complemento di $\overline{\mathrm{b}}$
$f_{11} = a+\overline{b}$	1	0	1	1	maxtermine di f_9
$f_{12} = \overline{a}$	1	1	0	0	complemento di a
$f_{13} = \overline{a}+b$	1	1	0	1	implicazione (maxtermine di f_9)
$f_{14} = a \vert \overline{b}$	1	1	1	0	NAND
$f_{15} = 1$	1	1	1	1	costante logica 1 (tautologia)

ESERCIZI

1) Semplificare le seguenti espressioni logiche:

$xyz+\bar{x}y+xy\bar{z}$

$bc+a\bar{c}+ab+bcd$

$\bar{a}\bar{c}+abd+b\bar{c}d+a\bar{b}\bar{d}+abc\bar{d}$

$\bar{a}b+abd+a\bar{b}c\bar{d}+bc$

$y(xz+\bar{x})+xy$

$abc+\bar{a}\bar{b}c+\bar{a}bc+ab\bar{c}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}$

$(b+c)(a+\bar{c})(a+b)(b+c+d)$

$(a+c+d)(a+c+\bar{d})(a+\bar{c}+d)(a+\bar{b})$

$\bar{a}\bar{b}c+\bar{a}bc+a\bar{b}$

$a\bar{b}\bar{c}+a\bar{b}\bar{c}d+ac$

$\bar{a}\bar{b}c+bc+ac$

$(a+b+cd)(\bar{a}+b)(\bar{a}+b+c)$

$(ab+\bar{a}c\bar{d}e+\bar{b}c\bar{d})(ab\bar{c}d+b\bar{c}\bar{e}+ae)$

$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}+\bar{a}b\bar{c}\bar{d}+a\bar{b}\bar{c}\bar{d}+\bar{a}bd+bcd+abd$

$(a+\bar{b}+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+c)(a+\bar{b}+\bar{c})(\bar{a}+b)$

$bc+a\bar{c}+ab+bcd$

$(a+b)\overline{\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})}+ab+\overline{ac}$

$a\bar{c}+ace+ac\bar{e}+\bar{a}c\bar{d}+\bar{a}\bar{d}\bar{e}$

$(\bar{y}+\bar{w})(\bar{x}+\bar{z}+w)(x+\bar{y}+\bar{z}+w)(\bar{x}+y+\bar{z}+\bar{w})$

2) Verificare se le seguenti uguaglianze sono vere:

$xy+\bar{x}\bar{y}+\bar{x}yz \;=\; xy\bar{z}+\bar{x}\bar{y}+yz$

$\bar{x}\bar{y}(xz+\bar{y})+(x+y)(x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}yz) \;=\; \bar{y}\bar{z}+xz$

$ab+\bar{c}\bar{d}+\bar{a}bc\bar{d}+a\bar{b}\bar{c}d \;=\; (a+\bar{d})(b+\bar{c})$

$ab+\bar{a}\bar{b}c \;=\; (a+c)(b+c)$

$(a+\bar{b})(b+\bar{c})(\bar{a}+c) \;=\; (\bar{a}+b)(\bar{b}+c)(a+\bar{c})$

$bc+abd+a\bar{c} \;=\; bc+a\bar{c}$

$ab+\bar{a}\bar{b}+bc \;=\; ab+\bar{a}\bar{b}+\bar{a}c$

$\bar{a}b+\bar{b}c+a\bar{c} \;=\; a\bar{b}+b\bar{c}+\bar{a}c$

$a+bc \;=\; ab+ac+\bar{a}bc+a\bar{b}\bar{c}$

3) Ricordando che la duale $D[f]$ di una funzione f è la funzione ottenuta da quella data scambiandone nell'espressione gli operatori di somma e prodotto logico, una funzione f si dice **autoduale** se vale l'uguaglianza $f = D[f]$. Verificare se le seguenti funzioni sono autoduali:

$f = x\bar{y} + \bar{x}y$
$f = \bar{y}(x + z) + x(\bar{y} + z)$
$f = (x + y)(\bar{x} + \bar{y})$
$f = x(y + z) + \bar{x}yz$
$f = \bar{a}\bar{b}c(\bar{c} + \bar{d}) + a\bar{b} + ac + a\bar{c}\bar{d}$

4) Facendo uso del teorema di espansione di Shannon, trovare le forme canoniche delle seguenti funzioni:
$f = xy + \bar{x}(y\bar{z} + \bar{y}z)$
$f = (a + b\bar{c})(a\bar{c} + b)$
$f = a\bar{b}(c + d) + \bar{a}b(\bar{c} + \bar{d})$
$f = (ab + c\bar{d})(\bar{a}\bar{b} + \bar{c}d)$
$f = \bar{a}b + \bar{c} + abc$
$f = \bar{a}(b + \bar{c})$
$f = (\bar{a} + b)(\bar{b} + c)$
$f = 1$
$f = (ab + c)(b + ac)$
$f = (xy + z)(y + xz)$
$f = \bar{y}z + wx\bar{y} + wx\bar{z} + w\bar{x}z$

5) Complementare le seguenti funzioni:
$f = \overline{a + b\bar{c}} + a\bar{b}c$
$f = (a + b\bar{c})\overline{a + \bar{b}}$
$f = x\overline{yz} + \overline{x\bar{y} + y\bar{z}}$
$f = (b\bar{c} + \bar{a}d)(a\bar{b} + c\bar{d})$
$f = \overline{a + \bar{c}d}(\bar{b} + \bar{a}d)$

6) Utilizzando il principio di dualità, trovare la forma PS o SP delle seguenti funzioni:
$z = xy + \bar{x}$
$z = a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}c + b$
$z = a + \bar{b}c + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}c$
$z = (a + \bar{b})(a + \bar{b} + \bar{c})(b + c)$
$z = (x + \bar{y} + v)(\bar{x} + \bar{y})\bar{v}$
$z = (\bar{a} + b)c(\bar{b} + \bar{d})$

7) Trovare le forme normali NAND e NOR delle seguenti funzioni:
$z = \sum_{4}(0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14)$
$z = \sum_{3}(1, 2, 4, 6, 7)$
$z = \prod(5, 7, 9, 11, 12, 17, 18, 22, 25, 29, 30)$

8) Verificare se gli operatori di seguito definiti sono operatori universali, utilizzando, ove necessario, anche le costanti logiche:

$$
\begin{aligned}
y \perp x &= x\bar{y} \\
x \nabla y &= \bar{x} + y \\
x \Delta y &= \bar{x} y \\
x \square y &= (x + \bar{y})(\bar{x} + y) \\
x \oplus y &= x\bar{y} + \bar{x}y
\end{aligned}
$$