SPAZI VETTORIALI

Definizione: Uno spazio vettoriale V su un campo K è un insieme in cui sono definite le operazioni di <u>somma</u> e <u>prodotto per scalari</u>.

Ogni elemento dello spazio vettoriale si chiama <u>vettore</u>

Il più piccolo spazio vettoriale è l'insieme che ha come unico elemento l'elemento neutro additivo ovvero lo 0. Questo spazio vettoriale si indica con $\overline{0}$.

COMBINAZIONE LINEARE

La combinazione lineare è una operazione che consiste nel moltiplicare uno scalare per ogni vettore dello spazio vettoriale. I vettori vengono sommati fra loro.

Esempio:

V_1, V_2 e V_3 sono 3 vettori dello spazio ~~lineare~~ vettoriale V:

$V_1, V_2, V_3 \in V$

a_1, a_2 e a_3 sono 3 scalari appartenenti al campo K (chiamati coefficienti)

$a_1, a_2, a_3 \in K$

La combinazione lineare sarà

$$\boxed{a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3}$$

DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

Dato un campo vettoriale, si dice che i vettori del campo vettoriale sono <u>linearmente indipendenti</u> se l'unica combinazione lineare che fa ottenere il vettore nullo è data da scalari <u>**tutti nulli**</u>.

Esempio:

Prendiamo questo campo vettoriale: $V = \{1, t^2\}$

Adesso facciamo la combinazione lineare con 2 scalari α e β e poniamola uguale al vettore nullo:

$$\alpha 1 + \beta t^2 = \overline{0}$$

Ci accorgiamo che per ottenere $\overline{0}$ l'unico modo è imporre $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Quindi, siccome gli scalari sono nulli (= a 0) allora $\{1\}$ e $\{t^2\}$ sono linearmente indipendenti.

—

Dato un campo vettoriale, si dice che i vettori del campo vettoriale sono <u>linearmente dipendenti</u> se esiste una combinazione lineare a scalari <u>non nulli</u> che fa ottenere il vettore nullo.

Esempio:

Prendiamo questo campo vettoriale: $V = \{t, 2t, t^3\}$

Procediamo come prima:

$$\alpha t + \beta 2t + \gamma t^3 = \overline{0}$$

Ci accorgiamo che si può ottenere 0 in due modi:

$\alpha = -2 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 0$ oppure

$\alpha = 2 \quad \beta = -1 \quad \gamma = 0$

Abbiamo trovato scalari non nulli e quindi i 3 vettori sono linearmente dipendenti.

CASI NOTEVOLI

- Spazi vettoriali con un solo vettore:
  - Se il vettore è nullo è linearmente dipendente
  - Se il vettore non è nullo è linearmente indipendente
- Spazi vettoriali con due vettori:
  - Se uno dei due vettori è nullo allora sono linearmente dipendenti
  - Se i due vettori sono proporzionali allora sono dipendenti
  - Se non sono proporzionali allora sono indipendenti

ALTRE INFORMAZIONI

Per "rango" si intende il numero di vettori indipendenti fra loro. È definita anche con "dimensione dello spazio vettoriale".

Quando il rango coincide con il numero di vettori (ovvero quando tutti i vettori sono indipendenti fra loro) si ha una base canonica.

Ogni spazio vettoriale può essere formato dalla combinazione lineare di una certa base canonica.

Esempio:

$\{1+x, 1-x, x^2\}$ è una base canonica. Scopriamo il perché.

Facciamo la solita combinazione lineare con 3 coefficienti $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e poi poniamola uguale al vettore nullo:

$$\alpha_1(1+x)+\alpha_2(1-x)+\alpha_3 x^2=\bar{0}$$
$$\alpha_1+\alpha_1 x+\alpha_2-\alpha_2 x+\alpha_3 x^2=\bar{0}$$
$$(\alpha_1+\alpha_2)1+(\alpha_1-\alpha_2)x+\alpha_3 x^2=\bar{0}$$

L'unico modo per ottenere $\bar{0}$ è avere tutti i coefficienti uguali a 0. Quindi:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \boxed{\alpha_3 = 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha_2 = 0 \\ \dots \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{\alpha_2 = 0} \\ \boxed{\alpha_1 = 0} \\ \boxed{\alpha_3 = 0} \end{cases}$$

Siccome avevamo 3 vettori e siccome i 3 vettori sono tutti linearmente indipendenti, allora $\{1+x, 1-x, x^2\}$ è una base canonica.

Adesso prendiamo un polinomio generico di 2° grado:

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

e prendiamo pure la combinazione lineare della base canonica che avevamo già fatto:

$(\alpha_1 + \alpha_2) 1 + (\alpha_1 - \alpha_2) x + \alpha_3 x^2$

A questo punto uguagliamo fra loro i coefficienti del polinomio e della base canonica:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ a_1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ a_2 = \alpha_3 \end{cases}$$

Da questo sistema ci ricaviamo i coefficienti della base canonica (ovvero α_1, α_2 e α_3)

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{a_0 + a_1}{2}} \quad \boxed{\alpha_2 = \frac{a_0 - a_1}{2}} \quad \boxed{\alpha_3 = a_2}$$

In questo modo abbiamo trovato il valore dei coefficienti della base canonica in modo tale da ottenere il polinomio.

In parole povere, ~~lo~~ lo spazio vettoriale $\{1+x, 1-x, x^2\}$ è una base canonica del polinomio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.