TRIGONOMETRIA

Ripasso veloce

Definizioni principali

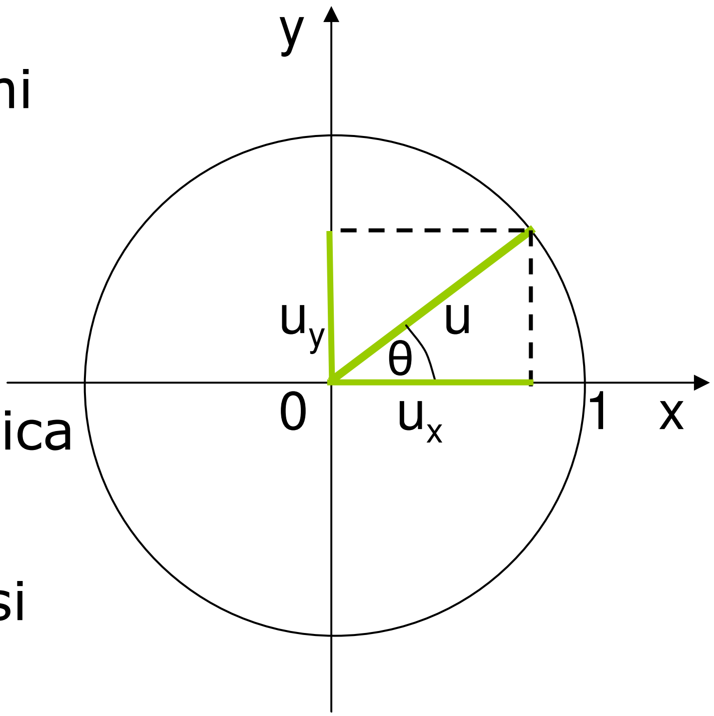
Sia **u** un segmento con un estremo nell'origine e l'altro sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 (circonferenza goniometrica) che formi un angolo θ con l'asse *x*.

Si chiama **coseno** dell'angolo θ, e si indica con **cos**θ, la lunghezza u_x.

Si chiama **seno** dell'angolo θ, e si indica con **sen**θ, la lunghezza u_y.

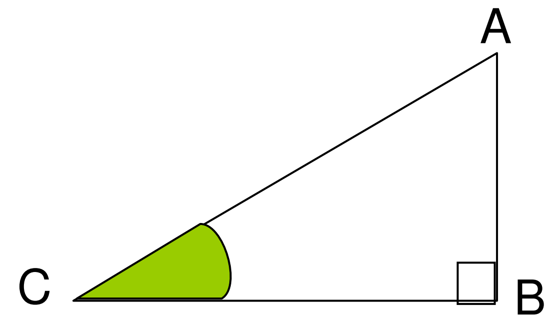
Si chiama **tangente** dell'angolo θ, e si indica con **tg**θ, il rapporto

$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$$



Altre funzioni trigonometriche

Risulta:



$$\text{sen}\theta = \frac{\text{cateto opposto a }\theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adiacente a }\theta}{\text{ipotenusa}}$$

Si possono definire anche altre funzioni trigonometriche, di minore uso, che sono le reciproche di senθ, cosθ e tgθ :

Cosecante di θ: $$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\theta} = \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto opposto a }\theta}$$

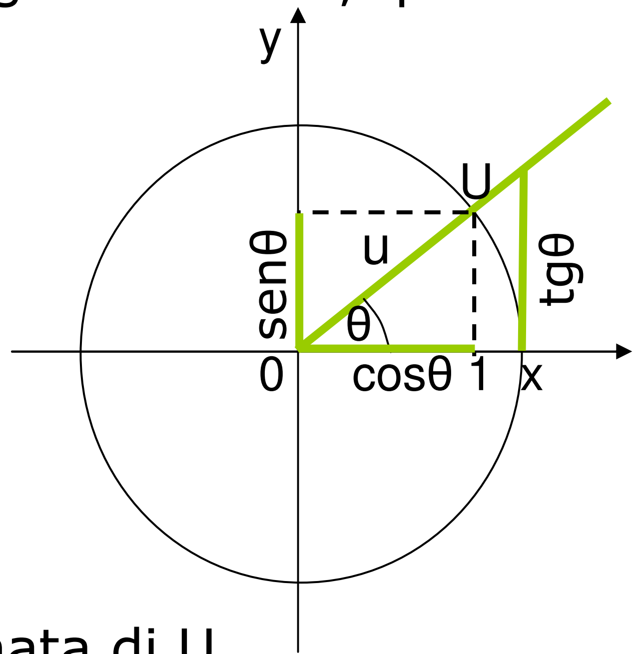
Secante di θ: $$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{ipotenusa}}{\text{cateto adiacente a }\theta}$$

Cotangente di θ: $$\text{cotg}\theta = \frac{1}{\text{tg}\theta} = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} = \frac{\text{cateto adiacente a }\theta}{\text{cateto opposto a }\theta}$$

Proprietà

Il segmento **u** ha lunghezza 1, qualsiasi sia la posizione del suo punto finale U sulla circonferenza goniometrica, quindi:

- $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$
- $-1 \leq \cos\theta \leq 1$
- $-1 \leq \text{sen}\theta \leq 1$



Poiché $\text{tg}\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$ risulta

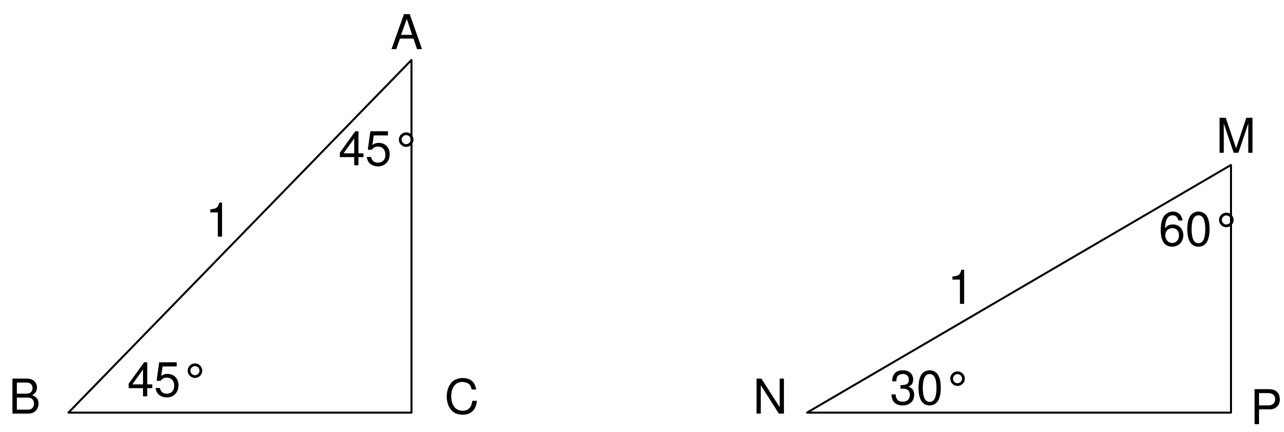
- $-\infty \leq \text{tg}\theta \leq +\infty$

Graficamente

- cosθ e senθ sono l’ascissa e l’ordinata di U
- tgθ è la lunghezza del segmento di tangente alla circonferenza goniometrica tra l’asse x e la semiretta di u.

Valori negli angoli elementari

Consideriamo i due triangoli rettangoli delle figure seguenti:



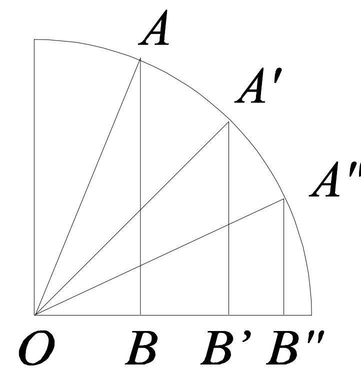
Il primo è mezzo quadrato, il secondo mezzo triangolo equilatero.

Poiché l'ipotenusa, in entrambi i casi, vale 1, si ricava:

- cos(45°)=sen(45°)= $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- cos (60°)=sen(30°)= $\frac{1}{2}$ cos (30°)=sen(60°)= $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

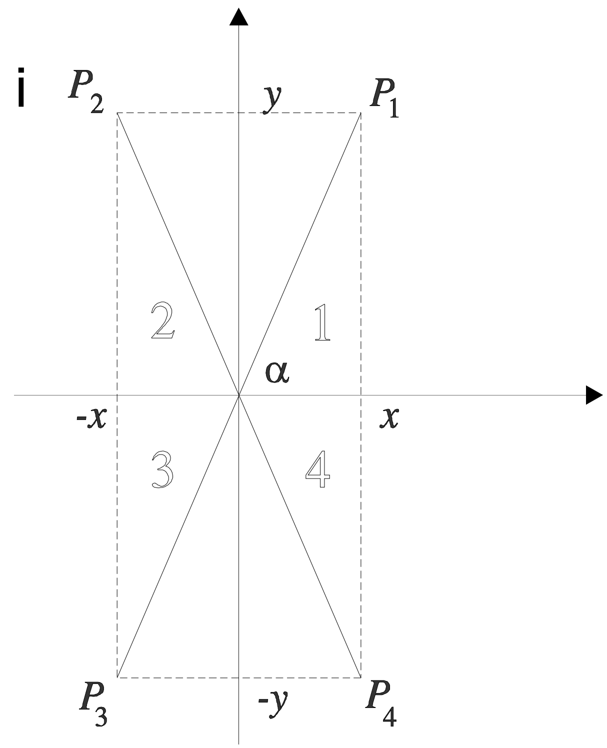
Altri angoli elementari

Gli angoli di 60°, 45° e 30° corrispondono ai triangoli OAB, OA’B’, OA”B” della figura a fianco e abbiamo visto i valori delle funzioni trigonometriche per tali valori.



Per calcolare gli altri angoli elementari osserviamo la seconda figura, che presenta i 4 quadranti.

I 4 punti P_k hanno ascisse e ordinate uguali in valore assoluto, dunque i triangoli rettangoli 1, 2, 3, 4 sono congruenti, quindi per calcolare i valori delle funzioni negli altri angoli elementari ci riferiamo al primo quadrante e cambiamo opportunamente i segni.



Curiosità

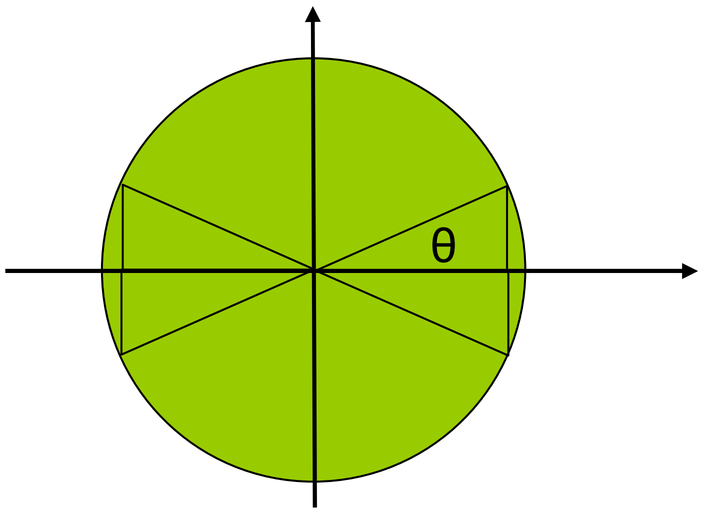
Il seno e il coseno degli angoli notevoli si possono ricordare facilmente con la regola mnemonica:

senθ	θ	cosθ
$\frac{\sqrt{0}}{2}$	0°	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\frac{\sqrt{1}}{2}$	30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	60°	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
$\frac{\sqrt{4}}{2}$	90°	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Periodicità

Sia θ un angolo acuto in un triangolo rettangolo.

Per quanto detto valgono le relazioni:



- $\operatorname{sen}\theta=\cos(90°-\theta)$
- $\cos\theta=\operatorname{sen}(90°-\theta)$
- $\operatorname{sen}\theta=-\operatorname{sen}(-\theta)$
- $\cos\theta=\cos(-\theta)$
- $\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}(180°-\theta)$
- $\cos\theta=-\cos(180°-\theta)$
- $\operatorname{sen}(90°+\theta)=\operatorname{sen}(180°-(90°+\theta))=\operatorname{sen}(90°-\theta)=\cos\theta$
- $\cos(90°+\theta)=-\cos(180°-(90°+\theta))=-\cos(90°-\theta)=-\operatorname{sen}\theta$

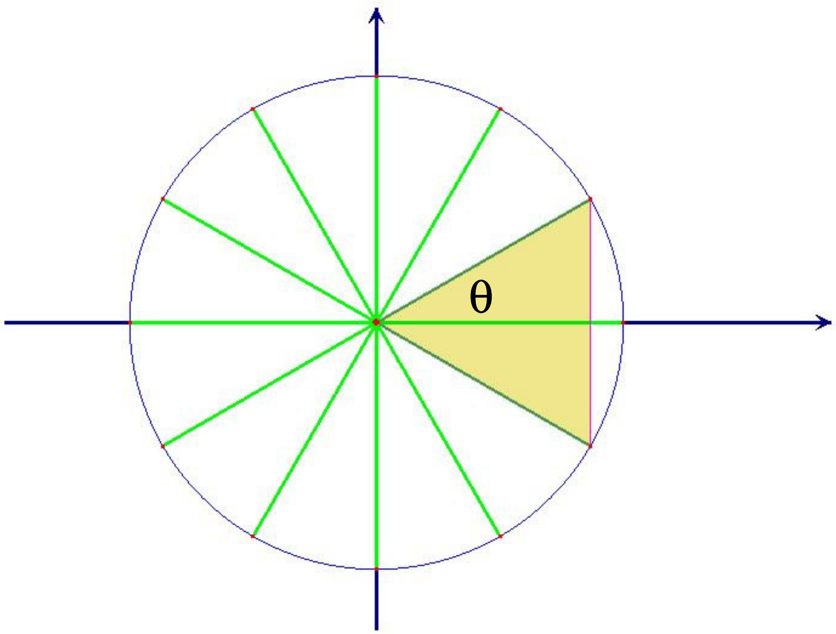
Gradi e radianti

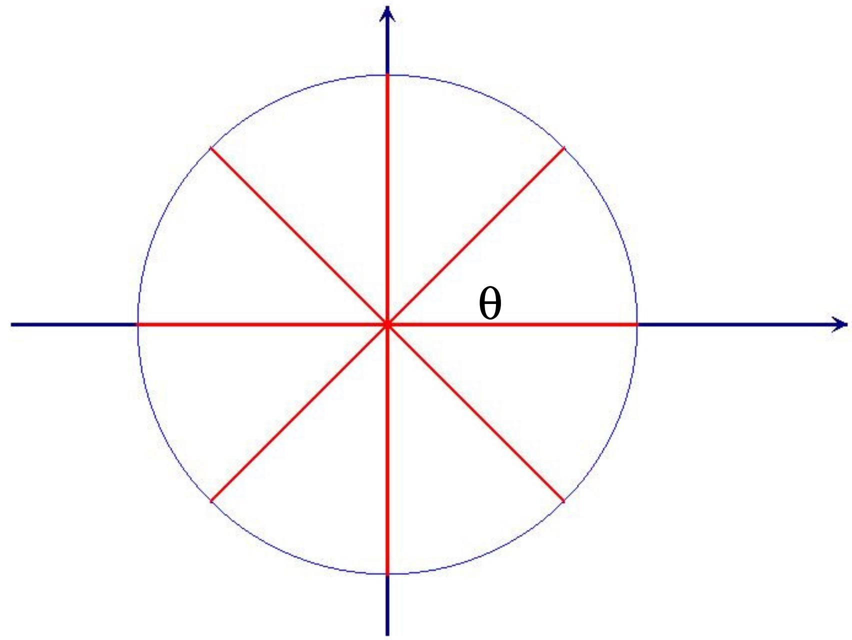
Quando il punto finale U del segmento u si muove sulla circonferenza goniometrica in verso antiorario, aumenta l'angolo α (tra 0 e 360°) e aumenta **di conseguenza** anche la lunghezza dell'arco di circonferenza tra l'asse x e la retta di u, da 0 a 2π=lunghezza circonferenza.

La misura dell'arco corrisponde a quella dell'angolo: gli angoli sono quindi misurabili anche in **radianti** (rapporto tra la lunghezza dell'arco e quella del raggio della circonferenza).

La corrispondenza tra angoli e radianti e il valore delle funzioni trigonometriche negli angoli elementari è data dalla tabella della pagina seguente.

Angoli principali

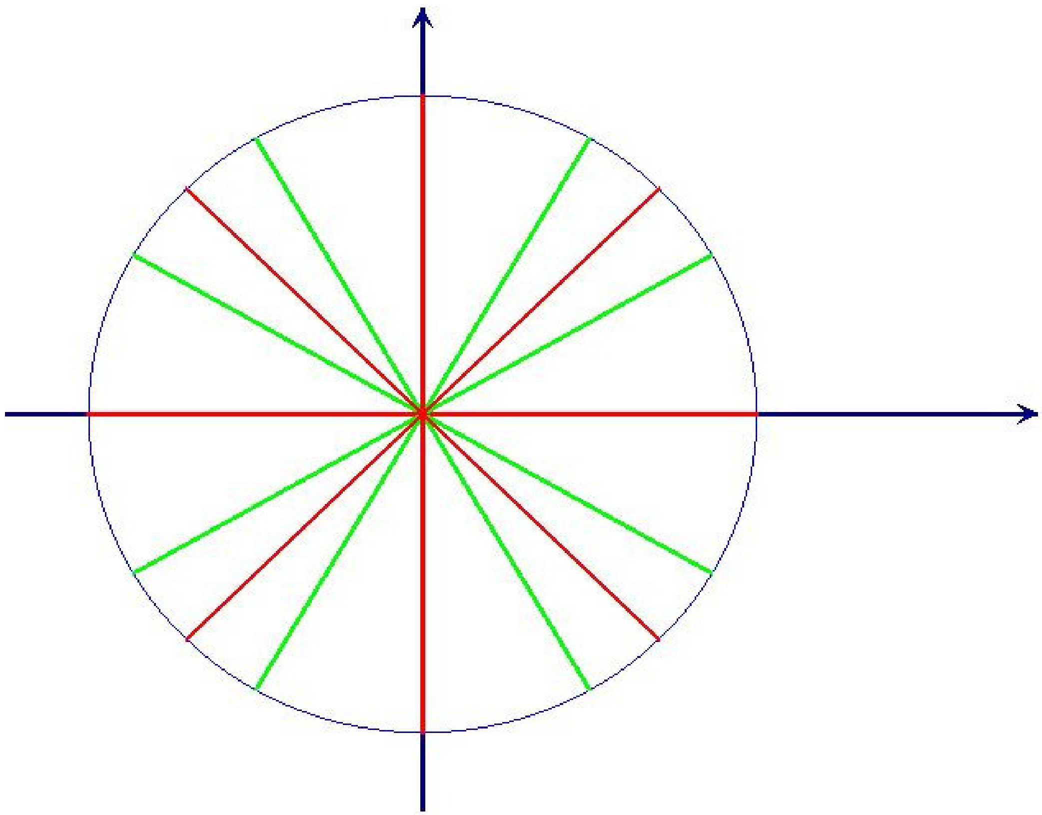




L’angolo θ della prima figura è di 30°, infatti il triangolo giallo è equilatero; tutti gli altri angoli sono uguali al primo; dalla figura è evidente che misura $\pi/6$

L’angolo θ della seconda figura è di 45°, e tutti gli altri angoli sono uguali al primo, che misura, in radianti, $\pi/4$.

Conversione gradi-radianti

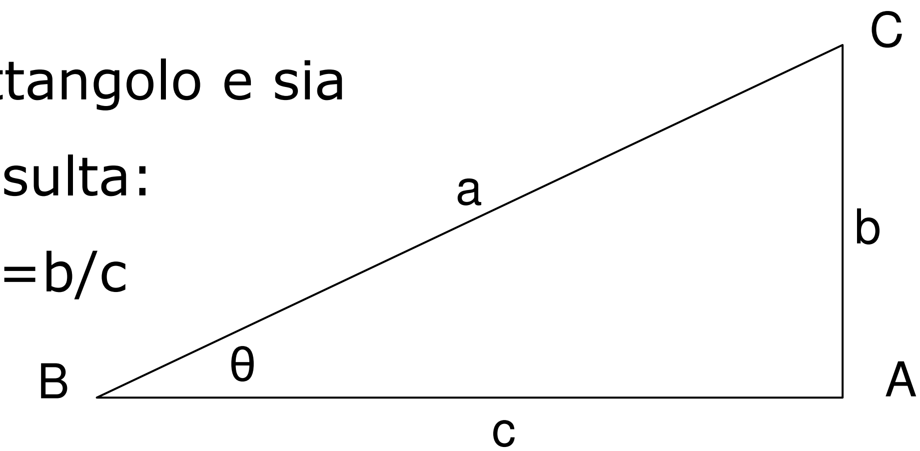


gradi	Rad.	gradi	Rad.
0°	0	180°	π
30°	π/6	210°	π/6
45°	π/4	225°	5π/4
60°	π/3	240°	4π/3
90°	π/2	270°	3π/4
120°	2π/3	300°	5π/3
135°	3π/4	315°	7π/4
150°	5π/6	330°	11π/6

Tabella dei valori

gradi	Rad.	senα	cosα	tgα	gradi	Rad.	senα	cosα	tgα
0°	0	0	1	0	**180°**	π	0	-1	0
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**210°**	$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	**225°**	$5\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	**240°**	$4\pi/3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	N.D.	**270°**	$3\pi/4$	-1	0	N.D.
120°	$2\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	**300°**	$5\pi/3$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	**315°**	$7\pi/4$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	**330°**	$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Sui triangoli rettangoli



Consideriamo un triangolo rettangolo e sia

a l'ipotenusa, b e c i cateti. Risulta:

$\text{sen}\theta = b/a$, $\cos\theta = c/a$ ⇨ $\text{tg}\theta = b/c$

Per cui

$b = a\ \text{sen}\theta$, $c = a\cos\theta$, $c = b\ \text{tg}\theta$.

"Risolvere" un triangolo rettangolo significa, dati alcuni elementi, ricavare gli altri elementi non conosciuti.

Poiché si parla di triangoli rettangoli, l'angolo retto è dato, poi, per conoscere tutto basta avere in più:

- Ipotenusa e un angolo
- un cateto e un angolo
- L'ipotenusa e un cateto
- i due cateti

I due angoli invece non caratterizzano il triangolo, ma solo tutti i triangoli simili.

Teoremi sui triangoli

Dato un triangolo qualsiasi, di lati a, b, c, e angoli opposti α, β, γ rispettivamente, valgono i seguenti teoremi:

Teorema dei seni:

$$\frac{a}{\mathrm{sen}\alpha} = \frac{b}{\mathrm{sen}\beta} = \frac{c}{\mathrm{sen}\gamma}$$

Teorema del coseno (o di Carnot):

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

$$c^2=b^2+a^2-2ba\cos\gamma$$

È chiaramente una generalizzazione del teorema di Pitagora.

Altre proprietà

Abbiamo visto che: $$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Questa relazione ha un significato geometrico: i tre rapporti rappresentano la lunghezza del diametro del cerchio circoscritto al triangolo.

Teorema della corda: ogni corda di una circonferenza ha una lunghezza pari al prodotto della misura del diametro per il seno di qualunque angolo alla circonferenza che insista su tale corda.

Teorema dell'area: L'area di un triangolo qualsiasi di lati a, b, c vale

$$\frac{1}{2}\, bc \operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}\, ac \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen}\gamma$$

Identità trigonometriche

Per ogni angolo θ vale la identità fondamentale:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

e da questa si ricava che:

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\theta} \quad \text{e} \quad \text{sen}\theta = \pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

Nelle slide seguenti presenteremo svariate formule che legano tra loro le funzioni trigonometriche.

La loro dimostrazione è abbastanza semplice ed è riportata su ogni libro di matematica delle superiori che preveda la trigonometria.

Formule 1

Dati due angoli qualsiasi θ e φ valgono le seguenti relazioni:

Formule di addizione e sottrazione:

- $\mathrm{sen}(\theta \pm \varphi) = \mathrm{sen}\theta \cdot \cos\varphi \pm \cos\theta \cdot \mathrm{sen}\varphi$
- $\cos(\theta \pm \varphi) = \cos\theta \cdot \cos\varphi \pm \mathrm{sen}\theta \cdot \mathrm{sen}\varphi$
- $\mathrm{tg}(\theta + \varphi) = \dfrac{\mathrm{tg}\theta + \mathrm{tg}\varphi}{1 - \mathrm{tg}\theta \cdot \mathrm{tg}\varphi}$ $\qquad$ $\mathrm{tg}(\theta - \varphi) = \dfrac{\mathrm{tg}\theta - \mathrm{tg}\varphi}{1 + \mathrm{tg}\theta \cdot \mathrm{tg}\varphi}$

Formule di duplicazione:

- $\mathrm{sen}2\theta = 2\mathrm{sen}\theta\cos\theta$
- $\cos2\theta = \cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta = 1 - 2\mathrm{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$
- $\mathrm{tg}(2\theta) = \dfrac{2\mathrm{tg}\theta}{1 - \mathrm{tg}^2\theta}$

Formule 2

Altre formule interessanti:

Formule di bisezione:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

Formule parametriche:
chiamata t la tangente di θ/2, è

$$\operatorname{sen}(t) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{tg}(t) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Formule 3

Queste formule legano somme di funzioni trigonometriche con prodotti delle medesime e viceversa:

Formule di prostaferesi:

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$$

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$$

Formule di Werner (o del prodotto):

$$\cos\theta\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)\right]$$

$$\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi)\right]$$

$$\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\theta+\varphi)+\operatorname{sen}(\theta-\varphi)\right]$$