ESEMPIO $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^4}$

1. $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

2. $$\begin{cases} c_1'(x) e^x + c_2'(x) x e^x = 0 \\ c_1'(x) e^x + c_2'(x) [e^x + x e^x] = \frac{e^x}{x^4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1'(x) = \frac{-c_2'(x) \cdot x \cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = -x\, c_2'(x)$$

$$\cancel{-x\, c_2'(x) e^x} + c_2'(x) \cancel{e^x} + \cancel{c_2'(x) x e^x} = \frac{\cancel{e^x}}{x^4}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) = -\frac{1}{x^3} \\ c_2'(x) = \frac{1}{x^4} \end{cases}$$

3. $c_1(x) = \int -\frac{1}{x^3}\, dx = \frac{1}{2x^2}$ $\qquad c_2(x) = \int \frac{1}{x^4}\, dx = -\frac{1}{3x^3}$

$$y_p(x) = \frac{1}{2x^2} e^x - \frac{1}{3x^{\cancel{3}\,2}} x e^x = \frac{e^x}{6x^2}$$

4. $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{e^x}{6x^2}$$ è la soluzione generale cercata

SE BISOGNA RISOLVERE CONDIZIONI DI CAUCHY
IL VALORE DEI COEFFICIENTI c_1 e c_2 PUÒ ESSERE DETERMINATO ANDANDO AD IMPORRE CHE VALGANO LE CONDIZIONI INIZIALI DATE (x, y)