

AUTOMI A STATI FINITI

4.1 - Introduzione

L'addizione di due numeri binari X e Y di n bit può essere eseguita, oltre che con gli addizionatori esaminati nel cap. 3, anche disponendo di un solo full adder, se si procede nel seguente modo. Si comincia a sommare la coppia di bit meno significativi degli addendi ad un istante scelto come iniziale t_0 , ottenendo dopo il ritardo δ del full adder il bit meno significativo della somma ed un bit di riporto; ad un istante successivo $t_1 = t_0 + \delta$ si addizionano i bit della coppia successiva ed il bit di riporto generato al primo passo e ritardato nella propagazione dall'uscita all'ingresso del full adder di δ unità di tempo, e ancora dopo un tempo δ si ottiene il secondo bit della somma ed il nuovo riporto. Il processo si ripete fino all'esaurimento degli addendi (Fig. 4.1).

Questo modello di addizione presenta alcune importanti caratteristiche:

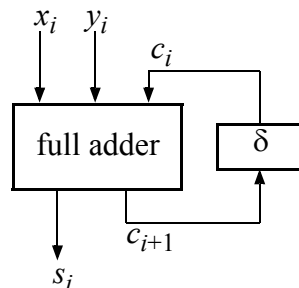


Fig. 4.1

- 1) la somma è calcolata in n passi, un bit dopo l'altro, con cadenza uguale a δ .
- 2) Al passo i -esimo si sommano insieme i bit i -esimi degli addendi e il riporto del passo $(i-1)$ -esimo reso disponibile in ingresso al tempo t_i ritardandolo da t_{i-1} di δ unità di tempo mediante un elemento di ritardo.
- 3) Il riporto del passo $(i-1)$ -esimo dipende oltre che dal valore degli addendi a quel passo anche dal riporto del passo $(i-2)$ -esimo il quale dipende dagli addendi del passo $(i-2)$ -esimo e dal riporto del passo $(i-3)$ -esimo e così via. Questo significa che per poter

conoscere il valore della somma all'istante t_i è necessaria la conoscenza del valore degli addendi su cui si opera in quell'istante e di tutti i valori precedenti, ovvero della "storia" temporale dei valori degli addendi. Il riporto riassume questa storia.

In generale per situazioni come quella dell'addizione seriale è necessario ricorrere ad un modello in grado di descrivere funzioni logiche che definiscono non corrispondenze tra valori degli argomenti e valori del risultato, ma tra **sequenze** dei valori degli argomenti e valori del risultato, ossia deve essere in grado di descrivere **funzioni sequenziali**. Tale modello, che non può essere una semplice tavola di verità come quella delle funzioni combinatorie, prende il nome di **macchina sequenziale** o **automa**.

Ritornando all'esempio, osserviamo che la storia dei valori degli addendi può essere divisa in due classi: quella che porta a generare un riporto 0 all'istante t_i e quella che dà luogo ad un riporto 1. Chiamiamo queste classi **stati interni** o semplicemente stati dell'addizione seriale. Memorizzando il valore attuale del riporto nello stato appropriato, è possibile tenere una traccia sintetica della storia degli addendi dall'istante iniziale fino all'istante t_i . Indichiamo con A lo stato dell'addizione all'istante t_i se un riporto uguale a 0 si è generato all'istante t_{i-1} , e con B lo stato se un riporto uguale a 1 si è generato all'istante t_{i-1} . Chiamiamo inoltre **stato attuale** lo stato dell'addizione nell'istante in cui una nuova coppia di bit viene presentata all'ingresso e **stato successivo** lo stato in cui l'addizione viene a trovarsi dopo che una coppia di bit è stata elaborata.

L'addizione seriale può essere allora descritta mediante la seguente tabella, nella quale viene specificato, per ogni combinazione di valori degli argomenti e per ogni stato attuale, lo stato successivo ed il valore della somma:

| | x_i, y_i | | | |
|-----|------------|--------|--------|--------|
| | 00 | 01 | 11 | 10 |
| A | $A, 0$ | $A, 1$ | $B, 0$ | $A, 1$ |
| B | $A, 1$ | $B, 0$ | $B, 1$ | $B, 0$ |

Fig. 4.2

Ad esempio se lo stato attuale è A (riporto uguale a 0) e la coppia di bit da sommare è (1,1), lo stato successivo diventa B e la somma assume valore 0 e così via.

Gli automi che considereremo hanno tutti un numero finito di stati (**automi a stati finiti**).

4.2 - Modelli di automi a stati finiti

Sia dato un automa \mathcal{A} a stati finiti che descrive una funzione sequenziale e siano $\mathcal{X} = \{X(t_i)\}$ l'insieme degli stati di ingresso, ovvero l'insieme di tutte le possibili combinazioni di valori che possono essere assunte dagli argomenti negli istanti $\{t_i = t_0 + i\Delta, i = 0, 1, 2, \dots\}$, essendo t_0 l'istante iniziale e Δ l'incremento (supposto costante) di tempo tra un istante ed il successivo; $S = \{S(t_i)\}$ l'insieme degli stati interni; $Z = \{Z(t_i)\}$ l'insieme degli stati di uscita, ossia l'insieme di tutte le possibili combinazioni di valori prodotti dalla funzione negli istanti $\{t_i\}$.

Il comportamento nel tempo di \mathcal{A} può essere descritto nel seguente modo. Se all'istante attuale t_i \mathcal{A} si trova nello stato $S(t_i) \in S$ e viene applicato lo stato di ingresso $X(t_i) \in \mathcal{X}$, si produce in conseguenza lo stato di uscita $Z(t_i) \in Z$ e l'automata si porta nello stato successivo $S(t_{i+1}) \in S$. Sia $Z(t_i)$ che $S(t_{i+1})$ dipendono univocamente da $S(t_i)$ e da $X(t_i)$ e tale dipendenza è espressa attraverso le seguenti equazioni, che sono dette **equazioni caratteristiche** o rispettivamente **funzione di transizione degli stati** e **funzione di uscita** di \mathcal{A} :

$$S(t_{i+1}) = f(S(t_i), X(t_i))$$

$$Z(t_i) = g(S(t_i), X(t_i))$$

Il modello descritto è noto come **modello di Mealy** ed è caratterizzato dal fatto che in esso sia lo stato successivo sia lo stato di uscita sono definiti in funzione dello stato di ingresso e dello stato interno attuale.

Esiste un altro modello, detto **modello di Moore**, secondo il quale l'uscita dipende solo dallo stato attuale, e per il quale le equazioni caratteristiche hanno la seguente forma:

$$S'(t_{i+1}) = f'(S'(t_i), X(t_i))$$

$$Z'(t_i) = g'(S'(t_i))$$

Il comportamento del modello di Moore, riassunto dalle sue equazioni caratteristiche, è descrivibile nel seguente modo. Se all'istante t_i l'automata \mathcal{A}' si trova nello stato attuale $S'(t_i)$ con uno stato di uscita qualsiasi e viene applicato lo stato di ingresso $X(t_i)$, essa si porta nello stato $S'(t_{i+1})$, e in dipendenza di questo nuovo stato interno lo stato di uscita viene aggiornato a $Z'(t_i)$.

La funzione di transizione degli stati, comune ai due modelli, può essere riscritta per qualunque istante tra t_0 (istante iniziale) e t_i (istante attuale) nella seguente forma, iterando la prima delle equazioni caratteristiche per ogni i , fino a $i = 0$:

$$S(t_{i+1}) = f(X(t_i), S(t_i)) = f(X(t_i), X(t_{i-1}), S(t_{i-1})) = \dots = f(X(t_i), X(t_{i-1}), \dots, X(t_0), S(t_0))$$

Sostituendo questa espressione nelle funzioni di uscita dei modelli di Mealy e di Moore otteniamo rispettivamente:

$$Z(t_i) = g(X(t_i), X(t_{i-1}), \dots, X(t_0), S(t_0))$$

$$Z'(t_i) = g'(X(t_{i-1}), X(t_{i-2}), \dots, X(t_0), S'(t_0))$$

Queste stabiliscono che lo stato di uscita all'istante attuale dipende dalla successione degli stati di ingresso a partire dallo stato iniziale e dallo stato interno iniziale. È da notare inoltre che mentre nel modello di Mealy la sequenza degli stati di ingresso da cui dipende lo stato di uscita all'istante attuale t_i termina all'istante attuale, nel modello di Moore questa sequenza termina all'istante precedente t_{i-1} . In altre parole nel modello di Mealy una sequenza di stati di ingresso genera una sequenza **simultanea** di stati di uscita; viceversa nel modello di Moore la sequenza di uscita è **ritardata** di un passo temporale rispetto a quella di ingresso che la genera, come è schematizzato nella seguente tabella, nella quale si è posto per semplicità $S(t_j) = S_j$, $Z(t_j) = Z_j$ e si è ammesso che $S'(t_i) \equiv S(t_i)$ e $Z'(t_i) \equiv Z(t_i)$:

| Mealy | | | | | Moore | | | | |
|-------|-------|-------|-------|--|-------|-------|-------|-------|-------|
| t_0 | t_1 | t_2 | t_3 | | t_0 | t_1 | t_2 | t_3 | t_4 |
| S_0 | S_1 | S_2 | S_3 | | S_0 | S_1 | S_2 | S_3 | |
| Z_0 | Z_1 | Z_2 | Z_3 | | Z_0 | Z_1 | Z_2 | Z_3 | |

I modelli di Mealy e di Moore possono essere interpretati secondo gli schemi a blocchi funzionali descritti dalla Fig. 4.3:

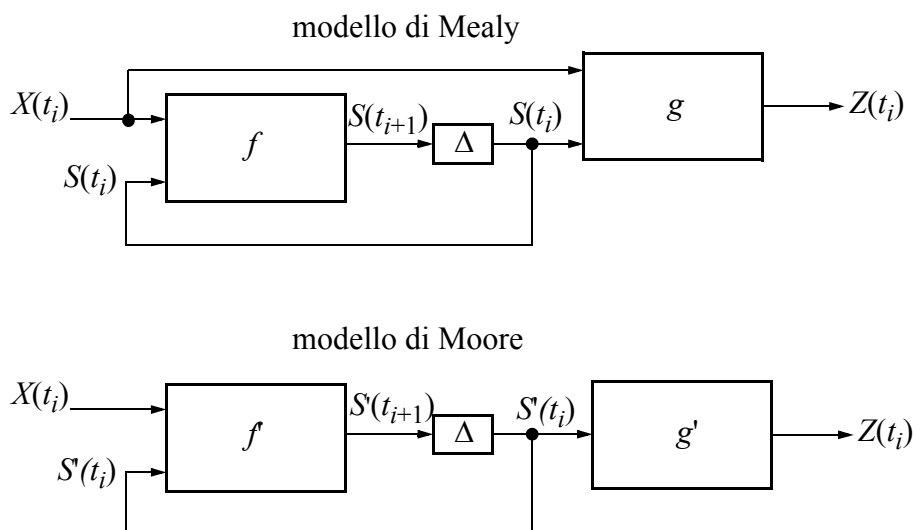


Fig. 4.3

I blocchi f e g (o f' e g') sono realizzazioni delle funzioni f e g (f' e g') rispettivamente. Sia f che f' hanno per argomenti $X(t_i)$ e lo stato attuale $S(t_i)$ e generano lo stato successivo $S(t_{i+1})$ o $S'(t_{i+1})$, il quale, dopo il ritardo Δ , diventa stato attuale e come tale si ripresenta all'ingresso del

blocco f o f' , nonché all'ingresso del blocco g o g' , insieme allo stato di ingresso $X(t_i)$ per il modello di Mealy, da solo per il modello di Moore.

4.3 - Rappresentazione degli automi

Rappresentare un automa significa specificarne le equazioni caratteristiche, rendendo esplicite le relazioni funzionali che esse esprimono e definendo in qualche modo i simboli che rappresentano gli stati di ingresso, interni e di uscita, per esempio attraverso un codice alfabetico o numerico; un modo di rappresentazione è attraverso un **grafo di stato**, ossia un grafo orientato nel quale i nodi corrispondono agli stati interni e gli archi alle transizioni da uno stato all'altro. Come vedremo successivamente il grafo di stato è uno strumento molto utile nel procedimento di sintesi, costituendone il primo passo che parte dalla descrizione a parole del comportamento di una funzione sequenziale e ne ricava una descrizione formale.

Aderendo alla convenzione, d'ora in poi costantemente seguita, di indicare con X_j , S_j e Z_j rispettivamente $X(t_j)$, $S(t_j)$ e $Z(t_j)$, nel modello di Mealy ogni nodo del grafo è etichettato con la specifica di uno stato S_j , mentre gli archi sono contrassegnati con la coppia di stati esterni (X_h , Z_k); quindi per esempio la porzione di grafo indicato nella seguente figura:

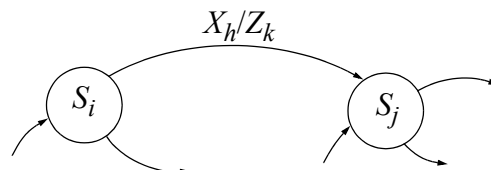


Fig. 4.4

si interpreta dicendo che se lo stato attuale è S_i e si presenta lo stato di ingresso X_h , l'automata si porta nello stato S_j e lo stato di uscita diventa Z_k . Nel modello di Moore i nodi sono contrassegnati con la coppia (S_j , Z_k) e gli archi con X_h ; pertanto il grafo precedente assume la forma mostrata in Fig. 4.5:

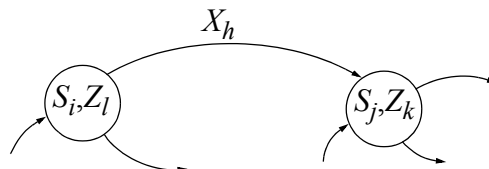


Fig. 4.5

intendendo che se l'automata è nello stato S_i , a cui corrisponde uno stato di uscita Z_l , lo stato di ingresso X_h provoca la transizione allo stato S_j , raggiunto il quale l'uscita assume lo stato corrispondente Z_k .

Il grafo di stato può essere rappresentato sotto forma di una tabella, detta **tabella di flusso**,

le cui righe corrispondono agli stati interni e le colonne agli stati di ingresso; nel modello di Mealy ciascuna casella contiene lo stato successivo e l'uscita attuale corrispondenti alla coppia di coordinate (S_j, X_h) che costituiscono lo **stato totale**.

Per esempio consideriamo un automa di Mealy avente due stati di ingresso, quattro stati interni e due stati di uscita, che indichiamo rispettivamente con $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, S_4, Z_1, Z_2$. Esso può essere definito dalla sua tabella di flusso costruita specificando per ogni coppia (stato attuale, stato di ingresso) la corrispondente coppia (stato successivo, stato di uscita):

| | X_1 | X_2 |
|-------|------------------------|------------------------|
| S_1 | S_2, Z_1 α | S_2, Z_1 |
| S_2 | S_3, Z_2 β | S_1, Z_2 |
| S_3 | S_1, Z_1 | S_4, Z_2 γ |
| S_4 | S_4, Z_1 | S_3, Z_1 |

Fig. 4.6

La tabella di flusso permette anche di descrivere il comportamento dell'automata nel tempo, seguendo in essa gli spostamenti del **punto di operazione**. Per esempio supponiamo che partendo dallo stato interno iniziale S_1 , sia applicata all'ingresso la sequenza di stati $X_1 X_1 X_2$. All'istante iniziale t_0 l'automata si trova ad operare con lo stato totale (S_1, X_1) in corrispondenza del quale lo stato di uscita è Z_1 e lo stato successivo è S_2 (punto di operazione α). All'istante t_1 lo stato totale diventa (S_2, X_1) , a cui corrisponde uscita Z_2 e stato successivo S_3 (punto di operazione β). Infine al terzo istante t_2 , si deve considerare la riga della tabella (S_3, X_2) , cui corrisponde uscita Z_2 e stato successivo S_4 (punto di operazione γ). L'evoluzione degli stati è indicata sulla tabella dalla successione delle frecce ed è riassunta come mostra il seguente quadro:

| | t_0 | t_1 | t_2 |
|--------------|-------|-------|-------|
| $X(t_i)$ | X_1 | X_1 | X_2 |
| $S(t_i)$ | S_1 | S_2 | S_3 |
| $Z(t_i)$ | Z_1 | Z_2 | Z_2 |
| $S(t_{i+1})$ | S_2 | S_3 | S_4 |

Fig. 4.7

Nel modello di Moore le caselle della tabella di flusso contengono solo lo stato successivo, mentre lo stato di uscita è riportato in una colonna separata; infatti dal momento che lo stato di

uscita dipende solo dallo stato attuale e non dallo stato di ingresso, tutte le caselle di una stessa riga avrebbero lo stesso simbolo per lo stato di uscita, e si può risparmiare scrivendolo una sola volta (Fig. 4.8).

| | X_1 | X_2 | |
|-------|-------|-------|-------|
| S_1 | S_2 | S_2 | Z_1 |
| S_2 | S_3 | S_1 | Z_1 |
| S_3 | S_1 | S_4 | Z_2 |
| S_4 | S_4 | S_3 | Z_2 |

Fig. 4.8

4.4 - Similitudine tra modello di Mealy e modello di Moore

Un automa può essere modellato indifferentemente secondo Mealy o secondo Moore, in quanto si può dimostrare la validità del seguente asserto:

Dato un automa di Mealy \mathcal{A}_1 ed un automa di Moore \mathcal{A}_2 , uno stato $S_{i,1}$ di \mathcal{A}_1 ed uno stato $S_{i,2}$ di \mathcal{A}_2 sono simili, e si scrive $S_{i,1} \sim S_{i,2}$, se sono soddisfatte le seguenti condizioni, per qualunque stato di ingresso X_h :

$$f(X_h, S_{i,1}) \sim f'(X_h, S_{i,2})$$

$$g(X_h, S_{i,1}) = g'(f'(X_h, S_{i,2}))$$

dove per l'automata di Moore $g'(f'(X_h, S_{i,2}))$ è lo stato di uscita associato allo stato interno successivo di $S_{i,2}$. Ovviamente la sequenza di uscita di \mathcal{A}_2 è ritardata di un passo rispetto alla corrispondente sequenza di ingresso.

Gli automi \mathcal{A}_1 ed \mathcal{A}_2 sono simili se per una stessa sequenza di stati di ingresso, partendo da due qualunque stati iniziali simili $S_{i,1}$ ed $S_{i,2}$ generano la stessa sequenza di stati di uscita.

Per esempio se consideriamo gli automi definiti dalle tabelle di flusso della Fig. 4.9:

| | X_1 | X_2 | X_3 | |
|-------|----------|----------|----------|--|
| 1 | 2, Z_1 | 2, Z_1 | 3, Z_2 | |
| 2 | 3, Z_3 | 1, Z_4 | 3, Z_1 | |
| 3 | 1, Z_4 | 2, Z_5 | 2, Z_5 | |
| Mealy | | | | |

| | X_1 | X_2 | X_3 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| a | c | d | f | Z_1 |
| b | d | e | e | Z_2 |
| c | d | e | e | Z_3 |
| d | a | a | b | Z_4 |
| e | c | d | f | Z_5 |
| f | d | e | e | Z_1 |
| Moore | | | | |

Fig. 4.9

si può facilmente verificare in base alla definizione che $1 \sim d$; $2 \sim a, e$; $3 \sim b, c, f$. Perciò i due automi sono simili.

Dato un automa \mathcal{A}_1 (di Mealy o di Moore), è possibile convertirlo in un automa \mathcal{A}_2 simile (di Moore o di Mealy) utilizzando i seguenti procedimenti.

1) *Trasformazione Mealy-Moore*

- Ad ogni stato interno S_j di \mathcal{A}_1 (di Mealy) corrispondono n_j stati simili $S_{j,i}$ di \mathcal{A}_2 (di Moore), dove n_j è uguale al numero di coppie distinte stato successivo-stato di uscita (S_j, Z_i) presenti nella tabella di flusso di \mathcal{A}_1 . Se S_j è uno stato singolare di \mathcal{A}_1 , cioè se nella tabella di \mathcal{A}_1 non compare anche come stato successivo, ad esso corrisponde in \mathcal{A}_2 uno stato simile pure singolare S'_j .

- Lo stato successivo corrispondente ad ogni stato $S_{j,i}$ viene determinato in modo che siano rispettate le relazioni:

$$f(X_h, S_j) \sim f'(X_h, S_{j,i})$$

$$g(X_h, S_j) = g'(f'(X_h, S_{j,i}))$$

ovvero se $f(X_h, S_j) = S_p$ e $g(X_h, S_j) = Z_m$, allora $f'(X_h, S_{j,i}) = S_{p,m}$.

- Lo stato di uscita è determinato dalla relazione $g'(S_{j,i}) = Z_i$; lo stato di uscita corrispondente allo stato S'_j è lasciato non specificato. La ragione di questo assegnamento sta nel fatto che, coerentemente con lo sfasamento di un passo temporale tra \mathcal{A}_1 ed \mathcal{A}_2 , l'uscita associata allo stato $S_{j,i}$ in \mathcal{A}_2 deve essere la stessa generata dall'automa \mathcal{A}_1 in corrispondenza di un proprio stato interno attuale S_k avente come successore lo stato S_j , per ogni stato di ingresso X_h .

- Alle eventuali righe della tabella di \mathcal{A}_2 per le quali non siano stati definiti stati successivi potranno essere assegnati valori identici.

La procedura di conversione sopra descritta si giustifica facilmente in merito alla individuazione degli stati successivi e degli stati uscita mediante i grafi di stato delle due macchine, come illustrato in Fig. 4.10.

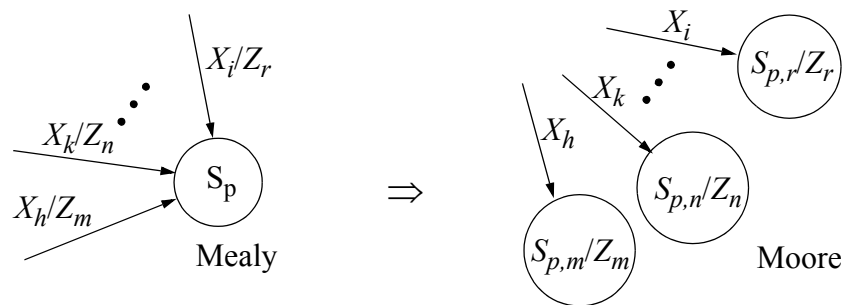


Fig. 4.10

Come esempio consideriamo la tabella di Mealy di Fig. 4.11a. Allo stato S_1 corrisponde nella tabella di Moore lo stato simile $S_{1,1}$; allo stato S_2 corrisponde lo stato $S_{2,1}$. Allo stesso modo allo stato S_3 corrispondono come simili gli stati $S_{3,1}$ e $S_{3,2}$, allo stato S_4 gli stati simili $S_{4,1}$ e $S_{4,2}$. Infine allo stato S_5 singolare corrisponde lo stato $S'_{5,}$ pure singolare. Nella tabella di Moore così definita gli stati successivi di $S_{1,1}$ sono $S_{3,1}$ e $S_{1,1}$; i successori di $S_{2,1}$ sono $S_{2,1}$ e $S_{1,1}$; gli stati $S_{3,1}$ e $S_{3,2}$ hanno entrambi come successori gli stati $S_{4,2}$ e $S_{3,2}$, mentre gli stati $S_{4,1}$ e $S_{4,2}$ hanno entrambi per successori gli stati $S_{4,1}$ e $S_{2,1}$. Infine allo stato $S'_{5,}$ corrispondono gli stati successivi $S_{3,2}$ e $S_{1,1}$.

Per quanto riguarda lo stato di uscita, si ha $g'(S_{1,1}) = Z_1$, ossia l'uscita associata allo stato $S_{1,1}$ è la stessa relativa allo stato 1 dell'automa di Mealy e così via per le altre righe, tranne che per la riga $S'_{5,}$ dove l'uscita non è specificata.

| | X_1 | X_2 | |
|---|----------|----------|-------|
| 1 | 3, Z_1 | 1, Z_1 | Z_1 |
| 2 | 2, Z_1 | 1, Z_1 | Z_1 |
| 3 | 4, Z_2 | 3, Z_2 | Z_1 |
| 4 | 4, Z_1 | 2, Z_1 | Z_2 |
| 5 | 3, Z_2 | 1, Z_1 | Z_1 |

a

| | X_1 | X_2 | |
|----------------|----------------|----------------|-------|
| 1 ₁ | 3 ₁ | 1 ₁ | Z_1 |
| 2 ₁ | 2 ₁ | 1 ₁ | Z_1 |
| 3 ₁ | 4 ₂ | 3 ₂ | Z_1 |
| 3 ₂ | 4 ₂ | 3 ₂ | Z_2 |
| 4 ₁ | 4 ₁ | 2 ₁ | Z_1 |
| 4 ₂ | 4 ₁ | 2 ₁ | Z_2 |
| 5' | 3 ₂ | 1 ₁ | - |

b

Fig. 4.11

2) Trasformazione Moore-Mealy

- Ad ogni stato interno S_j dell'automa di Moore corrisponde uno stato interno simile S'_j

dell'automa di Mealy, dal momento che la riga corrispondente a S'_j della tabella di \mathcal{A}_2 può essere completamente definita tramite le relazioni $f(X_h, S_j) \sim f'(X_h, S'_j)$, $g(f(X_h, S_j)) = g'(X_h, S'_j)$.

- Lo stato successivo corrispondente allo stato S'_j viene determinato dalla relazione $f'(X_h, S'_j) \sim f(X_h, S_j)$, ovvero se $f(X_h, S_j) = S_k$ allora $f'(X_h, S'_j) = S'_k \sim S_k$.

- Lo stato di uscita è determinato dalla relazione $g'(X_h, S'_j) = g(f(X_h, S_j))$, vale a dire se $f(X_h, S_j) = S_k$, e $g(S_k) = Z_m$ allora $g'(X_h, S'_j) = Z_m$.

La giustificazione di questa regola è data nella Fig. 4.12.

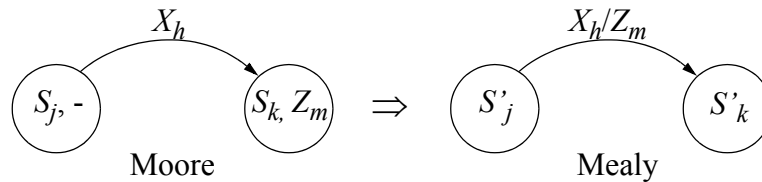


Fig. 4.12

Per esempio consideriamo la tabella di Moore di Fig. 4.13a; la tabella di Mealy simile ha lo stesso numero di stati interni 1', 2', 3', 4' e gli stati successivi si trovano rispetto agli stati attuali nella stessa corrispondenza che si riscontra nell'automa di Moore. Per lo stato di uscita consideriamo che allo stato attuale 1 corrisponde lo stato successivo 2 per lo stato di ingresso X_1 e che lo stato di uscita corrispondente a 2 è Z_2 : tale stato viene indicato come uscita nella casella (1', X_1) di \mathcal{A}_2 ; analogamente si procede per tutti gli altri stati totali di \mathcal{A}_1 .

| | X_1 | X_2 | | | X_1 | X_2 | |
|---|-------|-------|-------|----|-----------|-----------|--|
| 1 | 2 | 3 | Z_1 | 1' | 2', Z_2 | 3', Z_1 | |
| 2 | 1 | 4 | Z_2 | 2' | 1', Z_1 | 4', Z_2 | |
| 3 | 2 | 2 | Z_1 | 3' | 2', Z_2 | 2', Z_2 | |
| 4 | 1 | 4 | Z_2 | 4' | 1', Z_1 | 4', Z_2 | |
| a | | | | b | | | |

Fig. 4.13

La trasformazione dal modello di Mealy a quello di Moore o viceversa conduce ad un nuovo automa simile che, almeno per il primo tipo di trasformazione, ha il minimo numero di stati interni, se minimo è il numero di stati dell'automa originario. Nel secondo caso può essere necessario minimizzare il numero di stati dell'automa ottenuto, secondo un procedimento che sarà visto più avanti. E' conveniente usare queste conversioni quando, disponendo di un automa di un certo tipo, se ne vuole ottenere uno dell'altro tipo senza bisogno di ripercorrere tutto il processo di definizione.

In taluni casi tuttavia è desiderabile che, dato un automa \mathcal{A}_1 di un tipo, si possa ottenere un automa simile \mathcal{A}_2 dell'altro tipo che conservi il più possibile la struttura interna di \mathcal{A}_1 .

a) Consideriamo il modello di automa di Mealy e ricordiamo che la sequenza degli stati di uscita di un automa di Moore è ritardata di un passo rispetto alla sequenza degli stati di ingresso da cui ha origine e quindi anche rispetto alla sequenza degli stati di uscita di un automa di Mealy simile, al quale sia applicata la stessa sequenza di ingresso. Pertanto la struttura di un automa di Moore \mathcal{A}_2 simile ad uno di Mealy dato si può ottenere dalla struttura di questo semplicemente aggiungendo all'uscita un elemento di ritardo identico a quello presente sull'anello di reazione. L'automato che ne risulta è chiamato **automa di Mealy ritardato** (Fig. 4.14b).

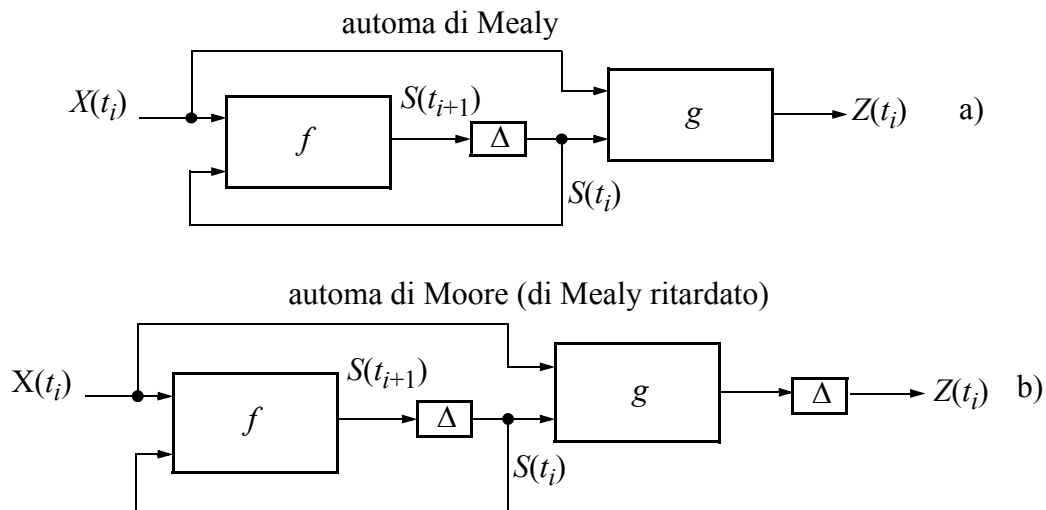


Fig. 4.14

b) Si consideri ora la struttura di un automa di Moore; la struttura di un automa di Mealy simile si può ottenere da questo se si riesce ad anticipare di un passo l'uscita. Ciò può essere fatto se si sconnette l'ingresso della rete g dall'uscita dell'elemento di ritardo e la si collega all'uscita del blocco f , come è mostrato in Fig. 4.15b. L'automato che ne risulta è detto **automa di Moore anticipato**.

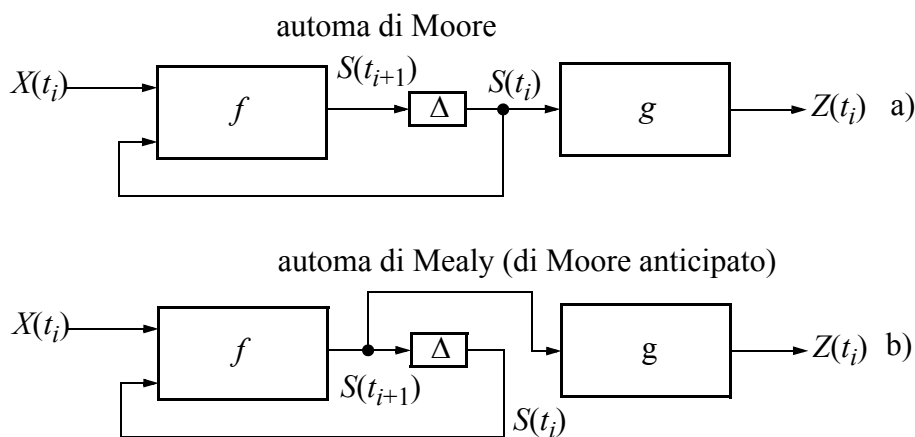


Fig. 4.15

Le trasformazioni sopra descritte possono portare ad un aumento considerevole di stati

interni, dal momento che i blocchi f e g della macchina trasformata rimangono inalterati. In particolare nella trasformazione Mealy \rightarrow Moore ad uno stato della macchina di Mealy può corrispondere un numero di stati della macchina di Moore simile che al massimo è pari al numero degli stati di uscita; se indichiamo con n il numero di stati interni, con l quello degli stati di ingresso e con m quello degli stati di uscita e tenendo conto del fatto che la tabella di flusso possiede $n \times l$ caselle, il numero complessivo di stati della macchina di Moore può arrivare a $n \times \min(m, l)$.

Pur essendo possibile realizzare un automa secondo un modello o l'altro indifferentemente, nei casi concreti la scelta deve essere fatta secondo opportuni criteri. Se il criterio è unicamente quello di una minore complessità logica, il modello di Mealy è da preferire perchè in generale presenta un numero di stati interni inferiore a quello di Moore. Tuttavia esiste un altro parametro in base al quale si può procedere. In un automa di Moore lo stato di uscita è sempre significativo, in quanto dipende solo dallo stato interno e quindi può essere fatto variare, come vedremo, in corrispondenza di istanti ben precisi, in sincronismo con un riferimento temporale esterno (clock); invece nell'automa di Mealy lo stato di uscita può cambiare in risposta a transizioni spurie dello stato di ingresso e durante l'intervallo tra il segnale di sincronismo ed il cambiamento dello stato di ingresso, assumendo eventualmente valori non significativi.

Come conclusione, in tutti i casi in cui lo stato di uscita deve essere sempre significativo deve essere preferito l'automa di Moore, anche se questo porta ad una maggiore complessità logica della realizzazione.

4.5 - Riduzione delle tabelle di flusso

4.5.1 - Tabelle di flusso completamente specificate

Data la tabella di flusso completa di un automa \mathcal{A} , talvolta è possibile trovare un altro automa \mathcal{A}' il cui comportamento è sostanzialmente identico a quello di \mathcal{A} , tanto che l'uno può essere sostituito all'altro. Se \mathcal{A}' ha meno stati di \mathcal{A} , si dice che \mathcal{A} può essere ridotto. La riduzione del numero di stati di un automa può condurre ad una minore complessità della rete che lo realizza e quindi è un procedimento che merita attenzione. Consideriamo per esempio i due automi di Fig. 4.16:

| | X_1 | X_2 |
|-------|------------|------------|
| S_1 | S_1, Z_1 | S_2, Z_1 |
| S_2 | S_1, Z_1 | S_3, Z_1 |
| S_3 | S_1, Z_1 | S_4, Z_1 |
| S_4 | S_1, Z_1 | S_5, Z_2 |
| S_5 | S_1, Z_1 | S_5, Z_2 |

\mathcal{A}

| | X_1 | X_2 |
|-------|------------|------------|
| S_1 | S_1, Z_1 | S_2, Z_1 |
| S_2 | S_1, Z_1 | S_3, Z_1 |
| S_3 | S_1, Z_1 | S_4, Z_1 |
| S_4 | S_1, Z_1 | S_4, Z_2 |

\mathcal{A}'

Fig. 4.16

Per l'automa \mathcal{A} è immediato rendersi conto che la sequenza di stati di uscita per una qualunque sequenza di stati di ingresso è la stessa sia che l'automa parta dallo stato S_4 , sia che parta dallo stato S_5 . Possiamo cambiare quindi S_5 in S_4 in tutte le caselle della tabella di flusso in cui tale stato compare, in modo che esso non figuri più come stato successivo; così facendo tanto S_4 quanto S_5 vengono ad avere gli stessi stati successivi e gli stessi stati di uscita. Si dice che S_4 ed S_5 sono stati *indistinguibili*; S_5 può essere rimosso dalla tabella che pertanto si trasforma in \mathcal{A}' .

In generale diremo che uno stato S di un automa \mathcal{A} è *indistinguibile* da uno stato S' di un automa \mathcal{A}' se i due automi, partendo rispettivamente da S e da S' , generano la stessa sequenza di stati di uscita per qualunque sequenza di stati di ingresso. Se due stati S ed S' sono indistinguibili, si scrive $S \equiv S'$.

Il concetto di indistinguibilità tra stati può essere esteso agli automi, dicendo che un automa \mathcal{A} ed uno \mathcal{A}' sono *indistinguibili* (e pertanto possono essere scambiati tra di loro senza alcuna conseguenza) se per ogni stato S_i di \mathcal{A} esiste uno stato S_j' di \mathcal{A}' , con $S_i \equiv S_j'$, tale che per qualunque sequenza di stati di ingresso i due automi, partendo rispettivamente dagli stati iniziali S_i ed S_j' , generano la stessa sequenza di stati di uscita; in maniera alternativa diremo che \mathcal{A} e \mathcal{A}' sono *indistinguibili* se per ogni stato S_i di \mathcal{A} esiste uno stato S_j' di \mathcal{A}' tale che sia $S_i \equiv S_j'$ e viceversa.

La relazione di indistinguibilità è *riflessiva* (infatti ogni automa è indistinguibile da se stesso), è *simmetrica* (se $\mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_j$, allora $\mathcal{A}_j \equiv \mathcal{A}_i$), è *transitiva* (ovvero se $\mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_j$ e $\mathcal{A}_j \equiv \mathcal{A}_k$, allora è anche $\mathcal{A}_i \equiv \mathcal{A}_k$) e pertanto è una **relazione di equivalenza**. Essa, applicata all'insieme degli stati di un automa \mathcal{A} , individua una partizione completa Π che divide gli stati in sottoinsiemi disgiunti, tali che tutti gli elementi di uno stesso sottoinsieme sono stati tra loro indistinguibili ed elementi appartenenti a sottoinsiemi diversi sono stati distinguibili. I sottoinsiemi di Π sono detti **classi di indistinguibilità** di \mathcal{A} .

Consideriamo ora un automa \mathcal{A} e tutti quelli \mathcal{A}' indistinguibili da \mathcal{A} ed aventi un numero di stati inferiore. Tra gli automi \mathcal{A}' ce ne sarà uno, \mathcal{A}_{min} , che possiede il minimo numero di stati, e precisamente, per quanto detto, pari al numero delle classi di indistinguibilità di \mathcal{A} e questo sarà l'automa da sostituire ad \mathcal{A} . Per il problema della minimizzazione degli stati di \mathcal{A} è dunque essenziale determinarne le classi di indistinguibilità.

Secondo la definizione, un insieme di stati $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ di un automa \mathcal{A} costituisce una classe di indistinguibilità se essi generano, per qualunque sequenza di stati di ingresso, la stessa sequenza di stati di uscita, quando siano assunti come stati iniziali di \mathcal{A} : si tratta di una definizione non utilizzabile direttamente a causa della sua impraticità; tuttavia per risolvere il problema è sufficiente considerare sequenze di ingresso di lunghezza uno e di lunghezza due, verificando che:

- 1) per ogni stato di ingresso X_k , sia verificate le uguaglianze $g(X_k, S_1) = g(X_k, S_2) = \dots = g(X_k, S_r)$, ovvero gli stati dell'insieme $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ siano indistinguibili sotto una

sequenza di ingresso di lunghezza unitaria;

- 2) gli stati successivi, per ogni stato di ingresso X_k , siano pure indistinguibili, ovvero $f(X_k, S_1) \equiv f(X_k, S_2) \equiv \dots \equiv f(X_k, S_r)$.

Segue che due stati S_i ed S_j sono distinguibili se e solo se *a)* sono distinguibili sotto una sequenza di ingresso unitaria oppure *b)* esiste almeno uno stato di ingresso X_k per il quale i loro successori $f(X_k, S_i), f(X_k, S_j)$ sono distinguibili.

Inoltre, poichè la relazione di indistinguibilità è transitiva, nella ricerca ci si può limitare a determinare solo le coppie di stati indistinguibili, seguendo una procedura che si avvale di una tabella, detta **tabella a scala** o **di Unger**, la quale, per una tabella di flusso con n stati, possiede $n-1$ righe, numerate da S_2 ad S_n ed $n-1$ colonne, numerate da S_1 ad S_{n-1} (Fig. 4.17).

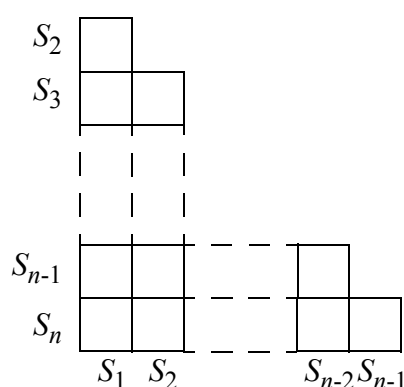


Fig. 4.17

a) Ricerca delle coppie di stati indistinguibili

La casella (S_i, S_j) , $i < j$ viene contrassegnata con \times se S_i ed S_j sono distinguibili; altrimenti è riempita con tutte le coppie implicate da S_i ed S_j per tutti gli stati di ingresso. Se S_i ed S_j non implicano alcuna coppia, ossia sono tali che per essi valgono le uguaglianze $f(X_k, S_i) = f(X_k, S_j)$ e $g(X_k, S_i) = g(X_k, S_j)$, per ogni X_k , la casella è lasciata vuota. Dopo aver riempito tutte le caselle con questo procedimento, si sostituisce ulteriormente con \times il contenuto di ogni casella contenente almeno una coppia (S_m, S_n) tale che la casella di coordinate (S_m, S_n) contenga \times e si procede in questo modo finchè è possibile. Quando nessun contrassegno può più essere inserito, tutte le coppie di stati distinguibili hanno \times nelle rispettive caselle. Viceversa tutte le coppie rimaste indicate nelle caselle sono indistinguibili, come lo sono a maggior ragione tutte quelle che costituiscono le coordinate di caselle rimaste vuote.

b) Ricerca delle classi di indistinguibilità.

1) Partendo dallo stato S_i , $i = 1, 2, \dots$, si costruisce un insieme B_i comprendente S_i e tutti gli stati da esso indistinguibili, tenendo conto che se gli stati S_i, S_j, \dots, S_k sono indistinguibili da uno stesso stato S_h , per la proprietà transitiva, l'insieme $\{S_i, S_j, \dots, S_k, S_h\}$ è una classe di

indistinguibilità.

2) Per uno stato S_l non contenuto in alcuno degli insiemi B_k costruiti in questo modo e tale che per qualunque altro stato S_m , sia $l < m$, si costruisce un ulteriore insieme B_l contenente S_l e tutti gli stati da esso indistinguibili.

3) Si ripete il passo 2 finchè tutti gli stati figurano in qualche insieme B_i .

Gli insiemi così generati sono disgiunti e definiscono la partizione Π che viene utilizzata per generare la tabella minima.

c) Ricerca della tabella minima.

1) Gli stati dell'automa ridotto corrispondono alle classi di indistinguibilità definite dalla partizione Π .

2) Gli stati successivi e gli stati di uscita sono definiti come segue. Se lo stato attuale è $B_i = \{S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ik}\}$ e lo stato di ingresso è X_j , sia $B_{ij} = \{f(X_j, S_{i1}), f(X_j, S_{i2}), \dots, f(X_j, S_{ik})\}$. Poichè tutti gli stati in B_{ij} sono indistinguibili, ci deve essere in Π uno ed un solo insieme B_h tale che $B_{ij} \subseteq B_h$; definiamo tale insieme come stato successivo, corrispondente allo stato totale (X_j, B_i) e come stato di uscita assumiamo $g(X_j, B_i) = g(X_j, S_{i1}) = g(X_j, S_{i2}) = \dots = g(X_j, S_{ik})$.

Vediamo come esempio la riduzione della tabella di flusso di Fig. 4.18:

| | X_1 | X_2 |
|-------|------------|------------|
| S_1 | S_3, Z_1 | S_2, Z_1 |
| S_2 | S_3, Z_1 | S_4, Z_1 |
| S_3 | S_5, Z_1 | S_6, Z_1 |
| S_4 | S_5, Z_2 | S_1, Z_2 |
| S_5 | S_1, Z_1 | S_2, Z_1 |
| S_6 | S_5, Z_1 | S_4, Z_1 |

Fig. 4.18

a) Si costruisce la tabella di Unger, osservando che sono coppie di stati distinguibili le coppie (S_1, S_4) , (S_2, S_4) , (S_3, S_4) , (S_4, S_5) , (S_4, S_6) , per cui inizialmente essa si presenta come in Fig. 4.19a:

| | | | | | |
|-------|------------------------|------------------------|------------------------|----------|------------------------|
| S_2 | $S_2 S_4$ | | | | |
| S_3 | $S_3 S_5$ $S_2 S_6$ | $S_3 S_5$ $S_4 S_6$ | | | |
| S_4 | \times | \times | \times | | |
| S_5 | $S_1 S_3$ | $S_1 S_3$ $S_2 S_4$ | $S_1 S_5$ $S_2 S_6$ | \times | |
| S_6 | $S_3 S_5$ $S_2 S_4$ | $S_3 S_5$ | $S_4 S_6$ | \times | $S_1 S_5$ $S_2 S_4$ |
| | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S_5 |

a)

| | | | | | |
|-------|------------------------|-----------|------------------------|----------|----------|
| S_2 | \times | | | | |
| S_3 | $S_3 S_5$ $S_2 S_6$ | \times | | | |
| S_4 | \times | \times | \times | | |
| S_5 | $S_1 S_3$ | \times | $S_1 S_5$ $S_2 S_6$ | \times | |
| S_6 | \times | $S_3 S_5$ | \times | \times | \times |
| | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S_5 |

b)

Fig. 4.19

Quindi, poichè la casella (2, 4), corrispondente alla coppia di stati distinguibili (S_2, S_4), contiene una \times , anche la casella (1, 2), contenente all'inizio la coppia suddetta, viene contrassegnata con \times ; lo stesso procedimento è ripetuto per tutte le altre caselle non contrassegnate inizialmente e si arriva così alla tabella di Fig. 4.19b. A questo punto una ripetizione del procedimento non porta ad inserire ulteriori \times , per cui le coppie rimaste non sostituite nella tabella sono tutte le coppie di stati indistinguibili: (S_1, S_3), (S_3, S_5), (S_1, S_5), (S_2, S_6).

b) Poichè gli stati S_3 ed S_5 sono indistinguibili da S_1 , formano l'insieme $B_1 = \{S_1, S_3, S_5\}$. Lo stato S_2 , non appartenente a B_1 , è indistinguibile da S_6 con cui forma l'insieme B_2 . Infine lo stato S_4 costituisce da solo un terzo insieme B_3 , e quindi si ha la partizione $\Pi = [\{S_1, S_3, S_5\}, \{S_2, S_6\}, S_4]$.

c) L'automa ridotto ha quindi tre stati definiti da Π , B_1, B_2, B_3 . Poichè $B_1 = \{S_1, S_3, S_5\}$, l'insieme $B_{11} = \{f(X_1, S_1), f(X_1, S_3), f(X_1, S_5)\}$, desumibile dalla tabella di flusso dell'automa, è $\{S_1, S_3, S_5\} = B_1$; l'insieme $B_{12} = \{f(X_2, S_1), f(X_2, S_3), f(X_2, S_5)\}$ è $\{S_2, S_6\} = B_2$. Pertanto i successori dello stato B_1 per i due stati di ingresso sono rispettivamente B_1 stesso e B_2 . Analogamente si trova che i successori di B_2 sono B_1 e B_3 e quello di B_3 è B_1 per entrambi gli stati di ingresso. Per quanto riguarda lo stato di uscita, si ha $g(X_1, B_1) = g(X_1, S_1) = f(X_1, S_3) = f(X_1, S_5) = Z_1$ e così via per tutti gli altri stati totali. Si arriva così alla tabella di flusso ridotta di Fig. 4.20:

| | | X_1 | X_2 |
|---------------------|-------|------------|------------|
| $\{S_1, S_3, S_5\}$ | B_1 | B_1, Z_1 | B_2, Z_1 |
| $\{S_2, S_6\}$ | B_2 | B_1, Z_1 | B_3, Z_1 |
| $\{S_4\}$ | B_3 | B_1, Z_2 | B_1, Z_2 |

Fig. 4.20

Come secondo esempio consideriamo la tabella di flusso dell'automa di Fig. 4.21:

| | 0 | 1 |
|---|------|------|
| A | H, 0 | G, 1 |
| B | C, 0 | E, 0 |
| C | B, 0 | A, 0 |
| D | E, 1 | H, 0 |
| E | H, 0 | D, 1 |
| F | E, 1 | H, 0 |
| G | A, 1 | H, 0 |
| H | D, 0 | F, 1 |

Fig. 4.21

alla quale corrispondono le tabelle di Unger di Fig. 4.22a e 4.22b.

La figura 4.22b mostra che gli stati indistinguibili sono: $A \equiv E$; $B \equiv C$; $D \equiv F \equiv G$; pertanto $a = \{A, E\}$; $b = \{B, C\}$; $c = \{D, F, G\}$; $d = \{H\}$ sono gli stati dell'automa ridotto; inoltre gli stati successivi sono: $a_1 = \{H\} = d$; $a_2 = \{G, D\} \subseteq c$; $b_1 = \{C, B\} = b$; $b_2 = \{E, A\} = a$; $c_1 = \{E, A\} = a$; $c_2 = \{H\} = d$; $d_1 = \{D\} \subseteq c$; $d_2 = \{F\} \subseteq c$ e le uscite: $g(0, a) = g(0, A) = g(0, E) = 0$; $g(1, a) = g(1, A) = g(1, E) = 1$; $g(0, b) = g(0, C) = g(0, B) = 0$; $g(1, b) = g(1, C) = g(1, B) = 0$; $g(0, c) = g(0, D) = g(0, F) = g(0, G) = 1$; $g(1, c) = g(1, D) = g(1, F) = g(1, G) = 0$; $g(0, d) = g(0, H) = 0$; $g(1, d) = g(1, H) = 1$.

| | | | | | | | |
|---|----------|----------|---|----|----------|----|---|
| B | × | | | | | | |
| C | × | BC AE | | | | | |
| D | × | × | × | | | | |
| E | DG | × | × | × | | | |
| F | × | × | × | | × | | |
| G | × | × | × | AE | × | AE | |
| H | DH FG | × | × | × | DH DF | × | × |
| | A | B | C | D | E | F | G |

| | | | | | | | |
|---|----|----------|---|----|---|----|---|
| B | × | | | | | | |
| C | × | BC AE | | | | | |
| D | × | × | × | | | | |
| E | DG | × | × | × | | | |
| F | × | × | × | | × | | |
| G | × | × | × | AE | × | AE | |
| H | × | × | × | × | × | × | × |
| | A | B | C | D | E | F | G |

Fig. 4.22

Pertanto la nuova tabella è la seguente:

| | 0 | 1 |
|---|------|------|
| a | d, 0 | c, 1 |
| b | b, 0 | a, 0 |
| c | a, 1 | d, 0 |
| d | c, 0 | c, 1 |

Fig. 4.23

4.5.2 - Tabelle di flusso incomplete

Consideriamo ora il caso di tabelle di flusso nelle quali vi siano condizioni di indifferenza sugli stati interni oppure sugli stati di uscita o su entrambi, dovute a sequenze “proibite” di stati di ingresso per la presenza di vincoli su transizioni simultanee di due o più variabili di ingresso, oppure più in generale contenute nelle specifiche del comportamento dell’automa. Tali tabelle sono dette **incomplete** o non completamente specificate e si prestano molto spesso, proprio per questa loro caratteristica, ad essere ridotte.

Ci proponiamo perciò di trovare un metodo semplice per questo scopo.

Esaminiamo dapprima tabelle nelle quali le condizioni di indifferenza riguardano solo gli stati di uscita e definiamo una relazione, detta **di compatibilità**, nel seguente modo:

due stati S_i ed S_j si dicono compatibili, e si scrive $S_i \approx S_j$, se per ogni stato di ingresso X_k , gli stati successivi $f(X_k, S_i)$ e $f(X_k, S_j)$ sono pure compatibili, mentre gli stati di uscita $g(X_k, S_i)$ e $g(X_k, S_j)$ sono uguali laddove sono specificati, sono qualsiasi se non specificati.

Si tratta di una relazione più lasca di quella di indistinguibilità e precisamente di una relazione che è riflessiva e simmetrica, ma non necessariamente transitiva, e pertanto non è una relazione di equivalenza. E’ evidente che la relazione di indistinguibilità per le tabelle complete è un caso particolare della relazione di compatibilità.

Definiamo inoltre **classe di compatibilità** un insieme di stati interni $\{S_1, S_2, \dots, S_r\}$ tali che ogni elemento sia compatibile con tutti gli altri; una classe di compatibilità è **massima** se non è contenuta in alcun’altra classe di compatibilità. Il concetto di classe di compatibilità è importante perchè la procedura per la riduzione di una tabella di flusso incompleta porta a generare una nuova tabella di flusso i cui stati sono classi di compatibilità della tabella data.

Tuttavia, a differenza del caso delle tabelle complete, la ricerca non può essere condotta sistematicamente, ma attraverso tentativi, a causa della non transitività della relazione di compatibilità.

Di fatto, con l’aiuto della tabella di Unger si individuano tutte le coppie di stati compatibili, come nel caso delle tabelle complete; quindi si procede come segue:

1) muovendo da destra verso sinistra sulla tabella di Unger finale, si considera la prima colonna che contiene una o più coppie di stati compatibili e si costruisce una classe di

2) si considera la colonna precedente che contiene almeno una coppia di stati compatibili. Se lo stato che la identifica è compatibile con tutti gli stati di una classe di compatibilità già definita, si aggiunge a tale classe a formarne una più grande; altrimenti si aggiungono a quelle già esistenti una o più nuove classi di compatibilità comprendenti il nuovo stato e quelli con esso compatibili; notare che questi possono eventualmente essere presenti anche in altre classi già definite;

Questo procedimento genera, per il modo come vengono costruite, tutte classi di compatibilità massime.

Applicando la procedura descritta si ottiene:

colonna S_3 : S_3 è compatibile con S_4 , ma non con S_5 , per cui entra a far parte di una nuova classe insieme ad S_4 e si ottiene $\{S_4, S_5\}$, $\{S_3, S_4\}$);

colonna S_2 : anche in questo caso lo stato S_2 definisce una nuova classe insieme allo stato S_3 con cui è compatibile e che si trova già in una classe precedentemente definita, ottenendo le classi $\{S_4, S_5\}$, $\{S_3, S_4\}$, $\{S_2, S_3\}$).

Fig. 4.24

Per concludere introduciamo i concetti di **relazione di copertura** e di **insieme chiuso di classi di compatibilità**:

- 123 -

uno stato S_j di T tale che le due tabelle, partendo rispettivamente da S_j e da S'_j , danno luogo alla stessa sequenza di stati di uscita, per la stessa sequenza di stati di ingresso, in tutti i punti in cui la tabella T è specificata.

2) un insieme di classi di compatibilità è *chiuso* se, per ogni sua classe, tutte le classi di compatibilità implicate dall'applicazione di una qualunque sequenza di stati di ingresso sono contenute nell'insieme.

La ricerca della tabella minima mira ad individuare un insieme di classi di compatibilità che copra la tabella data, che sia chiuso e che abbia la minima cardinalità. Al riguardo occorre osservare che la tabella di flusso, che ha come stati le classi di compatibilità massime ottenute con la procedura descritta sopra, è certamente una soluzione, ma non è detto che sia necessariamente quella minima, non valendo sempre la proprietà transitiva per la relazione di compatibilità; pertanto il numero di classi di compatibilità massima costituisce un limite superiore al numero di stati di una tabella ridotta.

Riguardo al modo come sono determinati gli stati successivi nella tabella ridotta, per ogni sua riga (ossia per ogni data classe di compatibilità) e per ogni stato di ingresso si considerano i successori di tutti gli stati della tabella data, i quali faranno parte di una stessa classe di compatibilità implicata da quella data: la classe implicata definisce lo stato successivo cercato.

Per gli stati di uscita infine, se in almeno uno degli stati appartenenti ad una classe di compatibilità implicata da una data classe lo stato di uscita è definito, esso viene assunto come stato di uscita da associare a quella data classe, altrimenti lo stato di uscita rimane non specificato.

Ritornando all'esempio, indichiamo con a , b e c gli stati della tabella ridotta, coincidenti rispettivamente con le classi di compatibilità $\{S_1, S_2, S_3\}$, $\{S_3, S_4\}$, $\{S_4, S_5\}$ determinate in precedenza e osserviamo che risulta $f(0, S_1) = S_4, f(0, S_2) = S_5, f(0, S_3) = S_4$ per cui $f(0, a) = c$; $f(1, S_1) = S_2, f(1, S_2) = S_1, f(1, S_3) = S_3$ per cui $f(1, a) = a$; $f(0, S_3) = S_4, f(0, S_4) = S_3$ per cui $f(0, b) = b$; $f(1, S_3) = S_3, f(1, S_4) = S_3$ per cui $f(1, b) = b$, oppure $f(1, b) = a$; $f(0, S_4) = S_3, f(0, S_5) = S_2$ per cui $f(0, c) = a$; $f(1, S_4) = S_3, f(1, S_5) = S_2$ per cui $f(1, c) = a$. In definitiva si ottiene la seguente tabella ridotta:

| | | |
|-----|----------|----------|
| a | c, Z_1 | a, Z_1 |
| b | b, Z_2 | b, Z_1 |
| c | a, Z_2 | a, Z_1 |

Fig. 4.25

Nella costruzione della tabella ridotta si può presentare una situazione di incertezza circa la classe di compatibilità da scegliere come stato successivo, a causa del fatto che uno stesso stato della tabella originaria può figurare in più classi di compatibilità; quando le condizioni di indifferenza nella tabella di flusso originaria riguardano solo le uscite, si può risolvere il problema seguendo un criterio analogo a quello visto a proposito del metodo di

Quine-McCluskey per le funzioni combinatorie, relativamente alla determinazione dell'insieme non ridondante di implicanti primi condotta con l'aiuto della tabella di copertura e con i criteri di essenzialità e di dominanza: qui le classi di compatibilità giocano il ruolo degli implicanti e gli stati della tabella originaria quello degli "1" della funzione. Procedendo in questo modo si può arrivare anche ad escludere una o più classi di compatibilità dalla tabella ridotta.

Per esempio nel caso della tabella di Fig. 4.24, osserviamo che le classi di compatibilità a e c sono essenziali per la sua copertura, mentre la b è inclusa in esse, come mostra la Fig. 4.26a, e pertanto può essere eliminata dalla tabella ridotta, che risulta composta da due soli stati (Fig. 4.26b):

| | | | | | | |
|--------------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | S_1 | S_2 | S_3 | S_4 | S_5 |
| essenziale → | a | × | × | × | | |
| | b | | | × | × | |
| essenziale → | c | | | | × | × |

a

| | | |
|-----|----------|----------|
| a | c, Z_1 | a, Z_1 |
| c | a, Z_2 | a, Z_1 |

b

Fig. 4.26

Consideriamo ora le tabelle di flusso che presentano condizioni di indifferenza anche sugli stati interni. In queste situazioni è possibile riportarci facilmente al caso trattato finora. Consideriamo infatti uno stato fittizio s stabile, ossia tale che $f(X_h, s) = s, \forall X_h$, e con uscite non specificate: se nella tabella originaria si specifica s come stato successivo in ogni casella in cui lo stato successivo non è specificato, non si altera la tabella di flusso, in quanto lo stato s , essendo stabile, è compatibile con tutti gli stati della tabella data e non introduce in essa alcun vincolo. Con questo artificio si può procedere alla riduzione della tabella trasformata, individuando le classi di compatibilità massime, dalle quali poi avremo cura di eliminare lo stato fittizio s . Come esempio, consideriamo la situazione descritta nella Fig. 4.27a.

La procedura per la determinazione delle classi di compatibilità sopra descritta porta a individuare solo le classi di compatibilità massime $1 = \{A, C, s\}$ e $2 = \{B, D, s\}$, ovvero le classi $1 = \{A, C\}$ e $2 = \{B, D\}$ che costituiscono un insieme chiuso che copre la tabella modificata, senza condizioni di indifferenza sugli stati interni; pertanto la tabella ridotta finale è quella mostrata in Fig. 4.27d.

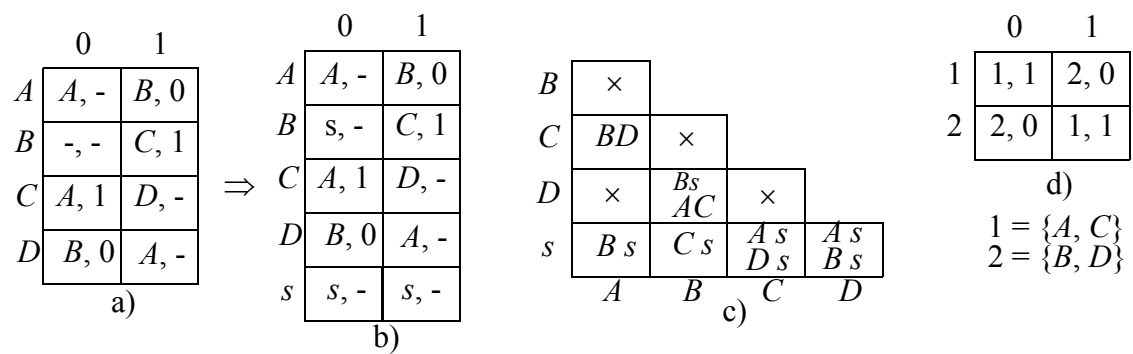


Fig. 4.27

ESERCIZI

1) Convertire la seguente tabella di flusso di Mealy in quella di Moore simile:

| | X_0 | X_1 | X_2 |
|-----|-------|-------|-------|
| A | $A,0$ | $B,1$ | $D,2$ |
| B | $C,2$ | $E,0$ | $F,1$ |
| C | $C,1$ | $D,1$ | $A,2$ |
| D | $A,0$ | $A,1$ | $C,1$ |
| E | $E,0$ | $F,1$ | $B,2$ |
| F | $F,0$ | $F,2$ | $C,0$ |
| G | $A,1$ | $B,2$ | $D,0$ |

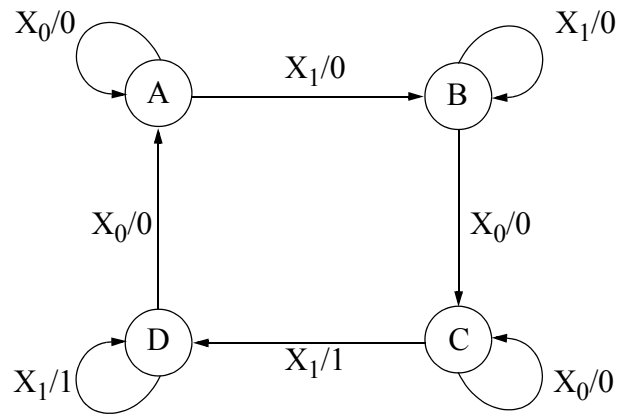
2) Convertire la seguente tabella di flusso di Moore in quella di Mealy simile:

| | X_0 | X_1 | X_2 | |
|-----|-------|-------|-------|---|
| A | A | B | D | 0 |
| B | C | E | F | 0 |
| C | C | D | A | 1 |
| D | A | A | C | 2 |
| E | E | F | B | 1 |
| F | F | F | C | 0 |
| G | A | B | D | - |

3) Minimizzare la seguente tabella di flusso, quindi convertire la tabella ridotta in quella di Moore simile:

| | $X1$ | $X2$ | $X3$ | $X4$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| a | $a,0$ | $b,2$ | $e,0$ | $d,2$ |
| b | $b,2$ | $f,0$ | $g,1$ | $c,3$ |
| c | $e,1$ | $d,1$ | $f,0$ | $c,2$ |
| d | $d,2$ | $d,1$ | $f,0$ | $d,1$ |
| e | $e,1$ | $g,2$ | $e,0$ | $f,3$ |
| f | $a,1$ | $d,1$ | $f,0$ | $c,2$ |
| g | $b,2$ | $c,0$ | $g,1$ | $f,3$ |

4) Disegnare il grafo degli stati dell'automa di Moore simile a quello dato in figura, senza passare attraverso la trasformazione per similitudine delle tabelle di flusso:



- 5) Si minimizzi il seguente automa di Mealy, quindi si converta l'automa ridotto in quello simile di Moore:

| | X ₁ | X ₂ | X ₃ | X ₄ |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|
| A | -, - | E, 1 | A, - | C, 1 |
| B | -, - | B, - | E, 1 | F, 1 |
| C | F, 0 | -, - | -, - | B, 1 |
| D | -, - | -, - | C, 0 | -, - |
| E | A, - | E, 0 | F, - | -, - |
| F | D, 0 | F, - | -, - | -, - |

- 6) Convertire la seguente tabella di flusso in quella simile di Moore:

| | x ₁ | x ₂ |
|---|----------------|----------------|
| 1 | 1,0 | 3,1 |
| 2 | 2,0 | 4,1 |
| 3 | 2,0 | 3,1 |
| 4 | 6,0 | 4,1 |
| 5 | 1,0 | 5,0 |
| 6 | 6,0 | 5,0 |

- 7) Ridurre il seguente automa, quindi si effettui la conversione Me → Mo dell'automa ridotto:

| | x ₁ | x ₂ | x ₃ |
|---|----------------|----------------|----------------|
| 1 | 4,1 | 5,0 | 6,1 |
| 2 | 8,0 | 2,1 | 8,1 |
| 3 | 1,0 | 3,1 | 7,0 |
| 4 | 5,1 | 1,0 | 4,1 |
| 5 | 5,1 | 6,0 | 4,1 |
| 6 | 1,1 | 4,0 | 5,1 |
| 7 | 4,1 | 7,0 | 3,1 |
| 8 | 2,0 | 2,1 | 8,1 |

- 8) Trasformare il seguente automa di Moore in quello di Mealy simile, quindi ridurre la tabella di flusso ottenuta:

| | x ₁ | x ₂ | x ₃ | |
|---|----------------|----------------|----------------|---|
| A | A | C | B | 0 |
| B | A | F | G | 1 |
| C | E | E | H | 1 |
| D | B | C | E | - |
| E | F | F | G | 0 |
| F | H | A | B | 0 |
| G | B | E | A | 0 |
| H | A | B | F | 1 |

- 9) Ridurre la seguente tabella di flusso:

| | x ₁ | x ₂ |
|---|----------------|----------------|
| A | C,1 | A,0 |
| B | D,0 | B,0 |
| C | C,1 | B,0 |
| D | D,0 | E,0 |
| E | H,1 | E,0 |
| F | F,1 | A,0 |
| G | F,0 | G,0 |
| H | H,1 | G,0 |

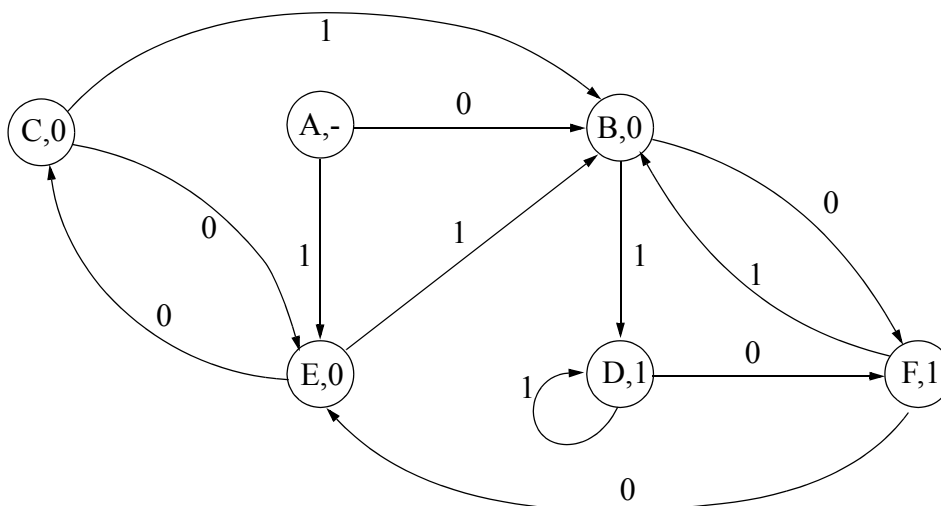
10) Ridurre la seguente tabella di flusso:

| | <i>X1</i> | <i>X2</i> | <i>X3</i> | <i>X4</i> |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>a</i> | <i>a</i> ,1 | <i>b</i> ,1 | -, - | <i>c</i> ,0 |
| <i>b</i> | <i>a</i> ,0 | <i>b</i> ,0 | <i>b</i> ,1 | <i>c</i> ,0 |
| <i>c</i> | <i>c</i> ,0 | <i>b</i> ,0 | <i>c</i> ,0 | <i>c</i> ,0 |

11) Ridurre la seguente tabella di flusso, quindi trasformare la tabella ridotta in quella di Moore simile:

| | <i>X1</i> | <i>X2</i> | <i>X3</i> | <i>X4</i> |
|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <i>a</i> | <i>a</i> ,0 | -, - | <i>b</i> ,0 | <i>a</i> ,1 |
| <i>b</i> | -, - | <i>c</i> ,0 | <i>b</i> ,0 | <i>d</i> ,1 |
| <i>c</i> | <i>d</i> ,0 | <i>c</i> ,1 | <i>b</i> ,1 | -, - |
| <i>d</i> | <i>d</i> ,1 | -, - | <i>f</i> ,0 | <i>d</i> ,1 |
| <i>e</i> | -, - | <i>e</i> ,0 | <i>f</i> ,1 | <i>e</i> ,1 |
| <i>f</i> | -, - | <i>c</i> ,1 | <i>f</i> ,0 | <i>e</i> ,0 |

12) Trasformare il seguente grafo degli stati di Moore in quello di Mealy simile, senza passare attraverso la procedura di conversione delle tabelle di flusso:



Quindi ridurre la tabella di Mealy ottenuta.

