DETERMINARE L'INVERSO DI UN INSIEME GENERICO $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$

Sia K un insieme che include i numeri razionali (ovvero $\mathbb{Q}$) ma non includa tutti i numeri reali (ovvero $\mathbb{R}$).
Si dirà cioè che K è un sovracampo di $\mathbb{Q}$ e un sottocampo di $\mathbb{R}$. Facciamo un esempio.

$$K = \{ a + b\sqrt{2}, \quad a, b \in \mathbb{Q} \}$$

Si nota subito che c'è una radice.
Le radici (a meno che non si tratti di quadrati perfetti come $\sqrt{4}, \sqrt{16}, \sqrt[3]{8} \ldots$) NON sono numeri razionali poiché non si possono esprimere con una frazione $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.
Per esempio, se prendiamo "$\sqrt{2}$" avremo che:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$
$$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Ritornando all'insieme K, adesso è logico attribuire a questo insieme le proprietà tipiche dell'addizione e della moltiplicazione. Ovviamente la proprietà associativa e commutativa vale sia per la somma sia per il prodotto. Varrà anche la proprietà distributiva e non sarà un problema trovare l'opposto (ovvero "$-(a+\sqrt{2})^{b}$").
L'unico problema rimane nel trovare l'inverso!

In un insieme generico sappiamo che il prodotto fra un elemento e il suo inverso deve dare "1" cioè l'elemento neutro del prodotto (o moltiplicativo). Ovvero:

$$n \cdot n' = 1 \Rightarrow n \cdot \frac{1}{n} = 1 \qquad n' : \text{"inverso"}$$

Ritornando a K:

$$(a+b\sqrt{2}) \cdot (x+y\sqrt{2}) = 1 \Rightarrow (a+b\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{(a+b\sqrt{2})} = 1$$

Adesso rimane il problema di portare $\frac{1}{(a+b\sqrt{2})}$ nella forma $(x+y\sqrt{2})$.

Si procede subito con la "razionalizzazione" ovvero si fa il classico "prodotto coniugato" del denominatore.

$$\frac{1}{(a+b\sqrt{2})} = \frac{a-b\sqrt{2}}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}$$

Adesso, poiché abbiamo un unico "blocco" esso va scomposto:

$$\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \boxed{\frac{a}{a^2-2b^2} - \frac{b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}}$$

In pratica, abbiamo che:

$$x = \frac{a}{a^2-2b^2}$$

$$y = -\frac{b}{a^2-2b^2}$$

Altro esempio rapido:

$$K = \{a+b\sqrt{3},\ a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$$\frac{1}{a+b\sqrt{3}} = \frac{a-b\sqrt{3}}{(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})} = \frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2} = \boxed{\frac{a}{a^2-3b^2} - \frac{b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}}$$