**Relazioni**:

$$Sin^2(x)+Cos^2(x)=1$$

$$Sinx=\pm\sqrt{1-Cos^2(x)}$$

$$Cosx=\pm\sqrt{1-Sin^2(x)}$$

$$Arc\sin x + Arc\cos x = \pi/2$$

$$Arctgx+Arcctgx=\pi/2$$

$$Sin(\pi-\alpha)=Sin(\alpha)$$

$$Sin(\pi+\alpha)=-Sin(\alpha)$$

$$Sin(2\pi-\alpha)=-Sin(\alpha)$$

$$Sinx=Cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$Cos(\pi-\alpha)=-Cos\alpha)$$

$$Cos(\pi+\alpha)=-Cos\alpha)$$

$$Cos(2\pi-\alpha)=Cos\alpha)$$

$$Cosx=Sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Formule di **addizzione**

$$Sin(a+b)=SinaCosb+SinbCosa$$

$$Cos(a+b)=CosaCosb-SinaSinb$$

$$Tg(a+b)=\frac{Tga+Tgb}{1-TgaTgb}\ \text{con}\ (a+b)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Formule di **sottrazione**:

$$Sin(a-b)=SinaCosb-SinbCosa$$

$$Cos(a-b)=CosaCosb+SinaSinb$$

$$Tg(a-b)=\frac{Tga-Tgb}{1+TgaTgb}\ \text{con}\ (a-b)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$$

Formule di **duplicazione**:

$$Sin2a=2SinaCosa$$

$$Cos2a=Cos^2a\text{-}Sin^2a=1\text{-}2Sin^2a=2Cos^2a\text{-}1$$

$$Tg2a=\frac{2Tga}{1-Tg^2a}$$

Formule di **bisezione**:

$$Sin\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-Cosa}{2}}$$

$$Cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+Cosa}{2}}$$

$$Tg\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-Cosa}{1+Cosa}}=\frac{Sina}{1+Cosa}=\frac{1-Cosa}{Sina}$$

Formule di **Prostaferesi**:

$$Sina + Sinb = 2Sin\frac{a+b}{2}Cos\frac{a-b}{2}$$

$$Sina - Sinb = 2Cos\frac{a+b}{2}Sin\frac{a-b}{2}$$

$$Cosa + Cosb = 2Cos\frac{a+b}{2}Cos\frac{a-b}{2}$$

$$Cosa - Cosb = -2Sin\frac{a+b}{2}Sin\frac{a-b}{2}$$

Formule **parametriche**:

$$\left.\begin{aligned} Sina &= \frac{2t}{1+t^2} \\ Cosa &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ Tga &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned}\right\} \text{con } t = Tg\,\frac{a}{2}$$

## Limiti Notevoli

$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x} = 1$ $\qquad \frac{tg\,x}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

$\lim_{x\to x_0}\frac{sen\,x - sen\,x_0}{x - x_0} = \cos x_0$ $\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^b} = 0$ con b≥1

$\lim_{x\to x_0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$ $\quad$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to x_0}\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)} = e$ $\quad$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

$\lim_{x\to x_0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)} = \log a$ $\quad$ con $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to x_0}\frac{[1+f(x)]^k - 1}{f(x)} = k$ $\quad$ con $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} a^{f(x)}}$

se $a$>1 e $f(x)\to +\infty$ $\quad\Rightarrow \lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = +\infty$

se $0 < a < 1$ e $f(x) \to +\infty$ $\quad\Rightarrow \lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = 0$

se $a$>1 e $f(x)\to -\infty$ $\quad\Rightarrow \lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = 0$

se $0 < a < 1$ e $f(x) \to -\infty$ $\quad\Rightarrow \lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = +\infty$

In generale se $f(x)\to l$ e se $g(x)\to m$ si ha che $[f(x)]^{g(x)}\to l^m$

**Limiti di un Polinomio:**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} : \lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)^n}{Q(x)^m}$$

n = m → rapporto tra i coefficienti di grado massimo: $\frac{a_0}{b_0}$

n < m → 0

se n > m allora si avrà il prodotto $x^{n-m} \frac{a_0}{b_0}$.

Se il limite tenderà a +∞ allora $x^{n-m}$ tenderà +∞, che si moltiplicherà col segno di $\frac{a_0}{b_0}$: se $+\infty \cdot \left(+\frac{a_0}{b_0}\right) = +\infty$ ; se $+\infty \cdot \left(-\frac{a_0}{b_0}\right) = -\infty$

Se il limite tenderà a -∞ allora se n-m è pari $x^{n-m}$ tenderà a +∞ che si moltiplicherà col segno di $\frac{a_0}{b_0}$: se $+\infty \cdot \left(+\frac{a_0}{b_0}\right) = +\infty$ ; se $+\infty \cdot \left(-\frac{a_0}{b_0}\right) = -\infty$

se n-m è dispari $x^{n-m}$ tenderà a -∞ che si moltiplicherà col segno di $\frac{a_0}{b_0}$: se $-\infty \cdot \left(+\frac{a_0}{b_0}\right) = -\infty$ ; se $-\infty \cdot \left(-\frac{a_0}{b_0}\right) = +\infty$

**Derivate:**

| | |
|---|---|
| $f(x) = k$ | $f'(x) = 0$ |
| $f(x) = k \cdot x$ | $f'(x) = k$ |
| $f(x) = x^n$ | $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x}$ | $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}$ | $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ |
| $f(x) = \frac{1}{f(x)}$ | $f'(x) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x) = \sqrt[n]{n}$ | $f'(x) = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |

$f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \cdot \log a$

$f(x) = \log x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = \log|x| \qquad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x) = \log|f(x)| \qquad f'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$f(x) = \mathrm{sen}x \qquad f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\mathrm{sen}x$

$f(x) = \mathrm{tg}x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ oppure $1 + tg^2 x$

$f(x) = \mathrm{cotg}x \qquad f'(x) = -\dfrac{1}{sen^2 x}$ oppure $-1 - \cot g^2 x$

$f(x) = \mathrm{arcsen}x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f(x) = \arccos x \qquad f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$f(x) = \mathrm{arctg}x \qquad f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$f(x) = \mathrm{arccotg}x \qquad f'(x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

$f(x) = f^{-1}(x) \qquad f'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$

***In generale :***

$F(x) = f(x)+g(x) \qquad F'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$

$F(x) = f(x)\cdot g(x) \qquad F'(x_0) = f(x_0)\cdot g'(x_0) + f'(x_0)\cdot g(x_0)$

$F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad F'(x) = \dfrac{g(x_0)\cdot f'(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

$F(x) = [f(x)]^{g(x)} \qquad F'(x) = [f(x)]^{g(x)}\cdot[g(x)\cdot \dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x) + g'(x)\cdot \log f(x)]$

$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad F'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

## Integrali

$\int \cos x\, dx = \mathrm{sen}x + c$

$\int sen\, x\, dx = -\cos x + c$

$\int dx = x + c$

$\int \dfrac{1}{x} dx = \log|x| + c$

$\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$

$$\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \mathrm{arctg}\, x + c$$

$$\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \mathrm{tg}\, x + c$$

$$\int \frac{dx}{x+1} = \log|x+1| + c$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c$$

$$\int \log x\, dx = x(\log x - 1) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \log\left|\tan\frac{2x + pigreco}{4}\right| + c$$

$$\int 2\cos(x)\, dx = 2\int \cos(x)\, dx = 2\sin(x) + c$$

$$\int (\sin x + x^2)\, dx = \int \sin(x)\, dx + \int x^2\, dx = -\cos(x) + \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int \log(x)\, dx = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\, dx = x(\log(x) - 1) + c$$

$$\int e^x (1+e^x)^{-1}\, dx = \log(1+e^x) + c$$

$$\int (x \log x)^{-1}\, dx = \log|\log x| + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\, artg\, \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{1+t}\, dt = \log(1+t)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

## Studio di funzione:

Dominio:

| | |
|---|---|
| razionale intera | tutto il dominio $\forall x \in R$ |
| razionale fratta | denominatore diverso da 0 |
| irrazionale | $\sqrt[n]{x}$ se n è pari $x \geq 0$ se n è dispari $\forall x \in R$ |
| irrazionale fratta | denominatore diverso da 0 e tutta la funzione segue la regola precedente |
| esponenziale | $a^x$ con la base $a \geq 0$ $\forall x \in R$ |
| logaritmo | con l'argomento positivo $\forall x \in R^+$ |

Parità o Disparità della funzione

La funzione è pari quando f(-x) = f(x)

La funzione è dispari quando f(-x) = -f(x)

Discontinuità

Asintoto verticale

la retta $x = x_0$ è asintoto verticale per f se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

Asintoti Orizzontali

y = *l* è asintoto orizzontale per la funzione se

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Asintoti Obliqui

è una retta di equazione $y = m \cdot x + n$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - m \cdot x - n] = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - m \cdot x - n] = 0$$

Inoltre: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - m \cdot x]$$

Derivata:

Calcolare la derivata; gli zeri della derivata sono potenziali punti di max e min

Calcolare il segno della derivata per verificare se veramente i punti trovati precedentemente sono max o min e per vedere l'andamento della funzione, ovvero vedere se è crescente o decrescente

Derivata seconda:

Calcolare la derivata seconda; studiarne il segno per vedere la concavità e la convessità o eventuali punti di flesso

## Teorema di Rolle

Sia [a,b] un intervallo chiuso e limitato

Data f: [a,b]→R continua in [a,b] e derivabile in ]a,b[

Se f(a) = f(b) allora esiste un punto $\alpha \in ]a,b[$ tale che $f'(\alpha) = 0$

Verificare se la funzione in questione è continua e calcolare la derivabile
Calcolare f(a) e f(b) e vedere se sono uguali
Se sì porre la derivata = 0 e trovare il punto $\alpha$

## Teorema di esistenza degli zeri

Data $f: [a,b] \to R$ con f continua in tutto l'intervallo [a,b],
tale che agli estremi dell'intervallo assuma valori discordi ovvero $f(a) \cdot f(b) < 0$
Allora esiste un $c \in ]a,b[ : f(c) = 0$

## Continuità e Derivabilità

Una funzione è continua quando esiste finito il limite destro e il limite sinistro. Il valore fra loro è uguale ed è uguale al valore che la funzione assume in quel punto

Derivabile quando il limite del rapporto incrementale da destra è uguale al limite del rapporto incrementale da sinistra ed il valore è un valore finitessa

**Stolz-Cesaro** ( solo per le successioni):

Date due successioni $(a_n)$ e $(b_n)$ con $(b_n)$ strettamente monotona
se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$ oppure $\lim_{n \to +\infty} b_n = \pm\infty$
e se $\left( \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \right)$ è regolare
allora anche $\left( \frac{a_n}{b_n} \right)$ è regolare e $\lim_{n \to +\infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \lim_{n \to +\infty} \left( \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \right)$
(è utile per la risoluzione di limiti di successioni che danno come risultato forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$)

***<u>Conseguenze del teorema:</u>***

- $(a_n)$ successione regolare, anche la successione $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n}$ è regolare e

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} = \lim_{n \to +\infty} a_n$$

- Se $(a_n)$ è una successione regolare di numeri positivi (cioè $a_n > 0$) anche la successione $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n}$ è regolare e $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n} = \lim_{n \to +\infty} a_n$

- Se $(a_n)$ è una successione di numeri positivi ($a_n > 0$)

Se $\left(\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right)$ è regolare anche $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ è regolare e $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

***Esempi***

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$

$$\int G \cdot DF = F \cdot G - \int F \cdot DG$$

Fattore differenziale (Fd)

Fattore finito (Ff)

Si considerano due integrali $\int f(x)\,dx, \quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Il secondo si ottiene dal primo mediante la seguente posizione:

x = $\varphi(t)$

dx = $\varphi'(t)dt$

Indicando con F(x) una primitiva di f(x) allora la funzione F(φ(t)) è una primitiva di f(φ(t))φ'(t)

DF(φ(t)) = F'(φ(t))φ'(t) = f(φ(t))φ'(t)

È la derivata di una funzione composta

$\displaystyle\int \frac{mx+n}{x^2+bx+c}\,dx$ in questo caso il grado del numeratore < del grado del denominatore

$\Delta > 0 \quad \dfrac{A}{x-x_1} + \dfrac{B}{x-x_2} = \dfrac{mx+n}{x^2+bx+c}$ da cui si ricavano A e B

$\Delta = 0 \quad \dfrac{A}{x-x_1} + \dfrac{B}{(x-x_1)^2} = \dfrac{mx+n}{x^2+bx+c}$ da cui si ricavano A e B

$\Delta < 0 \quad \dfrac{f'(x)}{f(x)} + \dfrac{C}{f(x)}$ si ottiene un integrale di tipo logaritmo ed un integrale di tipo arctg

$\displaystyle\int \frac{x^3-4x^2+2x+5}{x^2-5x+6}\,dx$ in questo caso il grado del numeratore > del grado del denominatore si dividono i due polinomi

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)} dx$$

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{(1+x)} + \frac{Bx+C}{(1+x^2)}$$

***Caso 1)*** $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ caso particolare dei due integrali:

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} artg \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

Fare il delta $b^2$-4ac

Se Delta < 0 si calcola il valore $k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$

Si riscrive l'integrale $\int \frac{dx}{a[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + k^2]} = \frac{1}{ak} arctg \frac{(2ax+b)}{2ak} + c$

Delta > 0 si calcola il valore $-k^2 = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$

Si scrive l'integrale $\int \frac{dx}{a[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - k^2]} = \frac{1}{2ak} \log \left| \frac{2ax+b-2ak}{2x+b+2ak} \right| + c$

***Caso 2)*** $\int \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$

$$\frac{B}{2a} \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(C - \frac{bB}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{B}{2a} \log |ax^2+bx+c| + \left(C - \frac{bB}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$