TEOREMA DEL COMPLETAMENTO A BASE

Partiamo da alcune informazioni di base.

Per "dimensione" di uno spazio vettoriale si intende il numero di vettori linearmente indipendenti. Si indica così:

$n = \dim_K V$ $\quad$ K: campo $\quad$ V: spazio vettoriale.

Alcuni esempi sono:

$\dim_R R = 1$ $\quad \dim_R \mathbb{R}^2 = 2$ $\quad \dim_R \mathbb{R}^3 = 3$ $\quad \dim_R \mathbb{C} = 2$ $\quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

Prendiamo adesso uno spazio vettoriale V su un campo K. Esso avrà una certa dimensione "n" ovvero la sua base canonica sarà:

$\boxed{\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle}$

Prendiamo adesso un insieme di vettori indipendenti che fanno parte di V.

$\boxed{w_1, w_2 \dots w_r \in V}$

Sappiamo che:

- $r \leq n$ perché non possono esserci più vettori indipendenti rispetto alla base. Ovvero: dimensione sottospazio $\leq$ dimensione spazio.
- Se $r = n$ allora $w_1, w_2 \dots w_r$ è una base di V
- Se $r < n$ allora $w_1, w_2 \dots w_r$ è un sottospazio di V ed allora esistono $n - r$ vettori che insieme a $w_1, w_2 \dots w_r$ formano una base. I due sottospazi che si formano (cioè $w_1, w_2 \dots w_r$ e $w_{r+1}, w_{r+2} \dots w_n$) saranno disgiunti ovvero hanno in comune solo il vettore nullo.

Dimostreremo adesso il Teorema del complemento a base per assurdo. Quindi supponiamo che il numero di vettori indipendenti sia maggiore del numero di vettori che formano la base.

$\boxed{r > n}$ (Per assurdo)

Siccome $\langle v_1, v_2 ... v_n \rangle$ è una base di V, possiamo dire che i vettori $w_1, w_2 ... w_r$ si possono formare dalla combinazione lineare della base con degli scalari (non nulli ovviamente). Partiamo dal primo vettore w_1:

$w_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

Siccome w_1 non è nullo, allora anche un elemento della base sarà non nullo. Supponiamo quindi che v_1 non è nullo. Possiamo ricavarci:

$$\alpha_1 v_1 = w_1 - \alpha_2 v_2 - .... - \alpha_n v_n$$
$$v_1 = \frac{1}{\alpha_1} w_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$$

In pratica nella base togliamo v_1 ed inseriamo w_1.

Nuova base: $\langle w_1, v_2 ... v_n \rangle$ e quindi $v_1 \in \langle w_1, v_2 ... v_n \rangle$

Andiamo avanti con w_2:

$$w_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 v_2 + ... \beta_n v_n$$
$$v_2 = \frac{1}{\beta_1} w_2 - \frac{\beta_1}{\beta_2} w_1 - ... - \frac{\beta_n}{\beta_2} v_n$$

Nuova base: $\langle w_1, w_2 .... v_n \rangle$ e quindi $v_2 \in \langle w_1, w_2 .... v_n \rangle$

Con gli stessi passaggi otteniamo che $v_n \in \langle w_1, w_2 ... w_n \rangle$

Andiamo oltre procedendo con w_r.

$w_r = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + ... \gamma_n w_n$

ALT! Tutti i vettori w_i erano indipendenti fra di loro. Come può w_r essere il risultato di una combinazione lineare fra vettori w_i? ASSURDO. Il numero di vettori w_i deve essere $\leq$ al numero di vettori della base. $\boxed{r \leq n}$