JORDAN - ESERCIZIO RISOLTO E CORRETTO: 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dalla legge $Ax = \lambda x$, con $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, scriviamo.

$$\begin{cases} 2x-2y = \lambda x \\ 2x+2z = \lambda y \\ 2y+2z = \lambda z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-\lambda)x - 2y = 0 \\ 2x - \lambda y + 2z = 0 \\ 2y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Si considera il polinomio caratteristico $p(\lambda)$, ottenuto annullando il determinante della matrice $(A-\lambda I)$ come segue:

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(-\lambda) - \cancel{4(2-\lambda)} + \cancel{4(2-\lambda)} =$$

$$= (2-\lambda)^2(-\lambda) = 0$$

$$p(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2 = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 0 & M_a(\lambda_1) = M_a(0) = 1 \\ \lambda_2 = 2 & M_a(\lambda_2) = M_a(2) = 2 \end{matrix}$$

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovettore $\lambda_1 = 0$:

$$\mathrm{Ker}(A - 0I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0} \qquad \begin{cases} 2x-2y=0 \\ 2x+2z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x=-z \\ y=-z \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(A-0I) = \{(\alpha, \alpha, -\alpha) \;/\; \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,-1,1)\rangle$$

$$V_{(0)} = \langle(-1,-1,1)\rangle \qquad \dim(V_{(0)}) = 1$$

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovettore $\lambda_2 = 2$:

$$\mathrm{Ker}(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0} \qquad \begin{cases} -2y=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-z \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(A-2I) = \{(-\alpha, 0, \alpha) \;/\; \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle(-1,0,1)\rangle$$

$$V_{(2)} = \langle(-1,0,1)\rangle \qquad \dim(V_{(2)}) = 1 \qquad M_g(2) = 1 \neq M_a(2)$$

La matrice non è pertanto diagonalizzabile.

Consideriamo il quadrato della matrice $(A-2I)$ e, per tale matrice, determiniamo il nucleo: ②

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix}0&-2&0\\2&-2&2\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&-2&2\\0&2&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4&4&-4\\-4&4&-4\\4&-4&4\end{pmatrix}$$

$$Ker(A-2I)^2 = \begin{pmatrix}-4&4&-4\\-4&4&-4\\4&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \bar{0} \quad \begin{cases}-4x+4y-4z=0\\-4x+4y-4z=0\\4x-4y+4z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x+y-z=0\\x-y+z=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=y-z\\ \end{cases}$$

V_3

$$Ker(A-2I)^2 = \left\{(\alpha+\beta,\alpha,\beta) \,/\, \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\} = \langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle$$

Scelgo uno dei 2 vettori ottenuti, e tale vettore dovrà essere linearmente indipendente da $V_1 = (-1,-1,1)$ di $\lambda_1=0$ e si chiamerà V_3.

$V_3 = (1,1,0)$

$$(A-2I)V_3 = \begin{pmatrix}0&-2&0\\2&-2&2\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Abbiamo così trovato il vettore

$$V_2 = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

Moltiplicando adesso $(A-2I)$ per V_2 si dovrebbe ottenere il vettore nullo:

$$(A-2I)V_2 = \begin{pmatrix}0&-2&0\\2&-2&2\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$AV_1 = \begin{pmatrix}2&-2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$AV_2 = \begin{pmatrix}2&-2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$AV_3 = \begin{pmatrix}2&-2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}AV_1 = 0\\AV_2 = 2V_2\\AV_3 = 2V_3+V_2\end{cases}$$

Abbiamo allora i 3 vettori

$V_1 = (-1,-1,1)$

$V_2 = (-2,0,2)$

$V_3 = (1,1,0)$

$$M_J = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}V_1\\V_2\\V_3\end{array}$$

JORDAN

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Dalla legge $Ax=\lambda x$ con $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ scriviamo

$$\begin{cases}x+y+z=\lambda x\\x+2y+z=\lambda y\\x-y+z=\lambda z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1-\lambda)x+y+z=0\\x+(2-\lambda)y+z=0\\x-y+(1-\lambda)z=0\end{cases}$$

Ricaviamo il polinomio caratteristico, ottenuto annullando il determinante della matrice $(A-\lambda I)$:

$$(A-\lambda I)=\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&-1&1-\lambda\end{pmatrix}$$

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&-1&1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)+\cancel{(1-\lambda)}-\cancel{(1-\lambda)}+1-1(2-\lambda)=$$

$$=(2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=(2-\lambda)\left[1-\lambda-1\right]\left[1-\lambda+1\right]$$

$$=-\lambda(2-\lambda)^2=0$$

$$p(\lambda)=-\lambda(2-\lambda)^2=0\quad\begin{cases}\lambda_1=0 & Ma(\lambda_1)=Ma(0)=1\\ \lambda_2=2 & Ma(\lambda_2)=Ma(2)=2\end{cases}$$

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1=0$:

$$Ker(A-0I)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\bar{0}\qquad\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y+z=0\\x-y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x+z\\2x+2z=0\\3x+3z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x+z\\x=-z\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-z\\y=0\end{cases}$$

$$Ker(A-0I)=\{(-\alpha,0,\alpha)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\}=<(-1,0,1)>$$

$V(0)=<(-1,0,1)>$ $\quad\dim(V(0))=1\quad$ $Mg(0)=1=Ma(0)$

Determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2=2$:

$$Ker(A-2I)=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\bar{0}\qquad\begin{cases}-x+y+z=0\\x+z=0\\x-y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y+z\\x+z=0\\y+\cancel{z}-y-\cancel{z}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-2z\\x=-z\end{cases}$$

$$Ker(A-2I)=\{(-\alpha,-2\alpha,\alpha)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\}=<(-1,-2,1)>$$

Consideriamo adesso la matrice $(A-2I)^2$ e determiniamo il suo nucleo:

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{0} \qquad \begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ -3x+2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow z = 3x-2y$$

$$\operatorname{Ker}(A-2I)^2 = \{(\alpha,\beta,3\alpha-2\beta) \,/\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,3),(0,1,-2) \rangle$$

Scegliamo uno dei 2 autovettori ottenuti come vettore V_3.

$V_3 = (1,0,3)$ Calcoliamo il vettore V_2 da $(A-2I)V_3$:

$V_1 = (-1,0,1)$

$$(A-2I)V_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo trovato il vettore V_2:

$V_2 = (2,4,-2)$

$$(A-2I)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I vettori sono pertanto:

$V_1 = (-1,0,1)$

$V_2 = (2,4,-2)$

$V_3 = (1,0,3)$

Calcoliamo AV_i per $i=1,2,3$ così da costruire la Matrice di Jordan

$$AV_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AV_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$AV_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AV_1 = 0 \\ AV_2 = 2V_2 \\ AV_3 = V_2 + 2V_3 \end{cases}$$

La matrice di Jordan sarà pertanto:

$$M_J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

blocco di Jordan