
Equazioni differenziali

Determinare le primitive di una funzione $f(x)$ significa risolvere

$$y'(x) = f(x)$$

dove l'incognita è la funzione $y(x)$. Questa equazione è un semplice esempio di equazione differenziale. In particolare se

$$y'(x) = 2x$$

le soluzioni che si ottengono integrando $2x$ sono

$$y(x) = x^2 + c$$

ossia le soluzioni sono infinite e ciascuna è individuata da un diverso valore della costante reale c . La costante c può essere determinata imponendo un'ulteriore condizione. Ad esempio se vogliamo che $y(1) = 3$ allora $c = 2$ e $y(x) = x^2 + 2$.

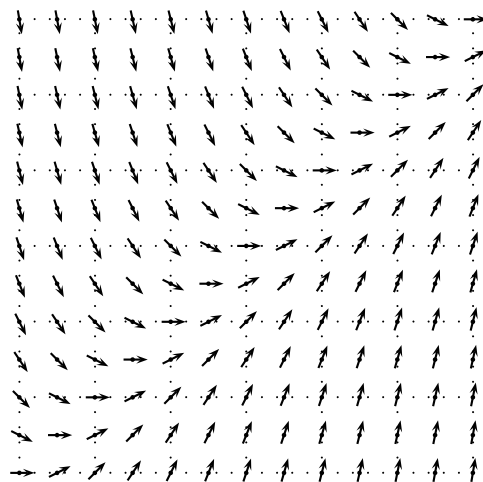
Più in generale un'equazione differenziale è un'equazione dove compaiono la funzione incognita $y(x)$ assieme ad alcune sue derivate. L'ordine massimo di derivazione dell'incognita $y(x)$ individua l'ordine dell'equazione differenziale. L'equazione $y'(x) = 2x$ è del primo ordine. Un altro esempio di equazione differenziale del primo ordine è

$$y'(x) + y(x) = x$$

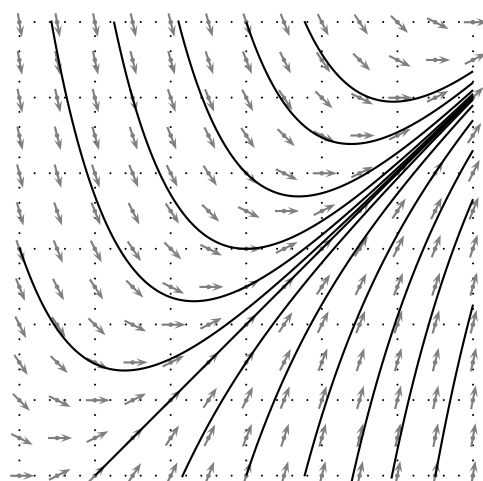
in questo caso però le soluzioni non possono essere determinate direttamente con una sola integrazione. Prima di descrivere qualche tecnica di risoluzione cerchiamo dare un'interpretazione “visiva” dell'equazione. Consideriamo un punto (x_0, y_0) del piano. Se una soluzione passa per (x_0, y_0) , ossia $y(x_0) = y_0$, allora l'equazione permette di calcolare la derivata di $y(x)$ in quel punto:

$$y'(x_0) = x_0 - y(x_0) = x_0 - y_0.$$

Associamo dunque a tale punto la direzione della corrispondente retta tangente a $y(x)$ in x_0 . Al variare del punto (x_0, y_0) nel piano determiniamo così un *campo di direzioni*. Ecco quello che succede nel quadrato $[-3, 3] \times [-3, 3]$



Le soluzioni dovranno seguire in ogni punto la direzione associata. In seguito determineremo la loro formula esplicita, ma grazie a queste prime osservazione possiamo già avere un'idea qualitativa del loro grafico.



Anche in questo caso le soluzioni sono infinite e il passaggio per un punto assegnato individua una sola soluzione. Ad esempio per il punto $(-1, -2)$ si riesce addirittura ad “indovinare” una soluzione esplicita: seguendo la direzione iniziale le direzioni successive sono tutte allineate e quindi la soluzione è la retta $y(x) = x - 1$.

1. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

Un'equazione differenziale lineare del primo ordine ha la seguente forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

con $a(x)$ e $f(x)$ due funzioni continue in un certo intervallo I . Come abbiamo già osservato nell'introduzione, se la funzione $a(x)$ fosse identicamente nulla allora per

determinare la funzione incognita $y(x)$ basterebbe integrare entrambi i membri

$$y(x) = \int y'(x) dx = \int f(x) dx + c.$$

Avremmo così infinite soluzioni dipendenti dalla costante arbitraria c e tutte definite nell'intervallo I .

Quando $a(x)$ non è identicamente nulla il problema della determinazione delle soluzioni si può fare in modo simile dopo aver preventivamente moltiplicato l'equazione per cosiddetto *fattore integrante* $e^{A(x)}$ dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$:

$$e^{A(x)} y'(x) + e^{A(x)} a(x) y(x) = e^{A(x)} f(x).$$

In questo modo il primo membro di questa equazione può essere interpretato come la derivata della funzione $e^{A(x)} y(x)$:

$$\frac{d}{dx} (e^{A(x)} y(x)) = e^{A(x)} y'(x) + e^{A(x)} a(x) y(x) = e^{A(x)} f(x).$$

A questo punto è possibile come prima integrare entrambi i membri

$$e^{A(x)} y(x) = \int e^{A(x)} f(x) dx + c.$$

e quindi esplicitare la soluzione

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} f(x) dx + c \right).$$

SOLUZIONE GENERALE DI UN'EQUAZIONE
DIFFERENZIALE LINEARE DEL PRIMO ORDINE

La soluzione generale dell'equazione

$$y'(x) + a(x) y(x) = f(x)$$

con $a(x)$ e $f(x)$ due funzioni continue in un certo intervallo I è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x) dx + c e^{-A(x)} \quad \text{per } x \in I.$$

dove c è una costante arbitraria.

La costante arbitraria può essere determinata se si aggiunge la condizione supplementare, detta *condizione iniziale*,

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{con } x_0 \in I$$

ossia si impone che la soluzione passi per un punto assegnato (x_0, y_0) . Si verifica facilmente che tale problema, detto *problema di Cauchy*,

$$\begin{cases} y'(x) + a(x) y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione definita in tutto l'intervallo I . Nel prossimo esempio risolveremo esplicitamente proprio l'equazione discussa nell'introduzione.

Esempio 1.1 Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = x \\ y(-1) = -2 \end{cases}$$

Qui $a(x) = 1$ e $f(x) = x$ quindi possiamo considerare $I = \mathbb{R}$. Troviamo la soluzione generale in I . Una primitiva di $a(x) = 1$ è

$$A(x) = \int a(x) dx = \int dx = x$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^x.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di $e^{A(x)} f(x)$

$$\int e^{A(x)} f(x) dx = \int e^x x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = e^{-x} (x e^x - e^x + c) = x - 1 + c e^{-x}.$$

Ora imponiamo la condizione $y(-1) = -2$:

$$y(-1) = -1 - 1 + c e^1 = -2 + c e = -2$$

da cui si ricava che $c = 0$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = x - 1 \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Esempio 1.2 Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 4x^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases}$$

Mentre $f(x) = 4x^2$ è continua in \mathbb{R} , la funzione $a(x) = 1/x$ è continua solo nell'insieme $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Dato che $x_0 = -1$, l'intervallo "massimale" dove cercare la soluzione è $I = (-\infty, 0)$. Dobbiamo prima determinare una primitiva di $a(x) = 1/x$ per $x < 0$

$$A(x) = \int a(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \log |x| = \log(-x)$$

e dunque il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log(-x)} = -x.$$

Quindi possiamo calcolare le primitive di

$$e^{A(x)} f(x) = -x 4x^2 = -4x^3.$$

ossia

$$\int e^{A(x)} f(x) dx = - \int 4x^3 dx = -x^4 + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = -\frac{1}{x} (-x^4 + c) = x^3 - \frac{c}{x}.$$

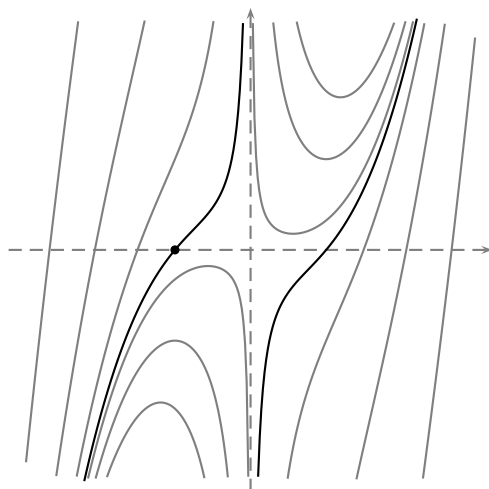
Ora imponiamo la condizione $y(-1) = 0$

$$y(-1) = -1 + c = 0$$

da cui si ricava che $c = 1$. Quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = x^3 - \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in (-\infty, 0).$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al “flusso” delle altre soluzioni ottenuto variando la costante c .



Esempio 1.3 Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \frac{y(x)}{e^x + 1} = e^x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

L'intervallo “massimale” dove cercare la soluzione è $I = \mathbb{R}$. Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = -1/(e^x + 1)$

$$\begin{aligned} A(x) &= - \int \frac{1}{e^x + 1} dx = - \int \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \int \frac{1}{1 + e^{-x}} d(1 + e^{-x}) = \log(1 + e^{-x}). \end{aligned}$$

e dunque il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = 1 + e^{-x}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x) dx = \int (1 + e^{-x}) e^x dx = \int (e^x + 1) dx = e^x + x + c$$

e la soluzione generale è uguale a

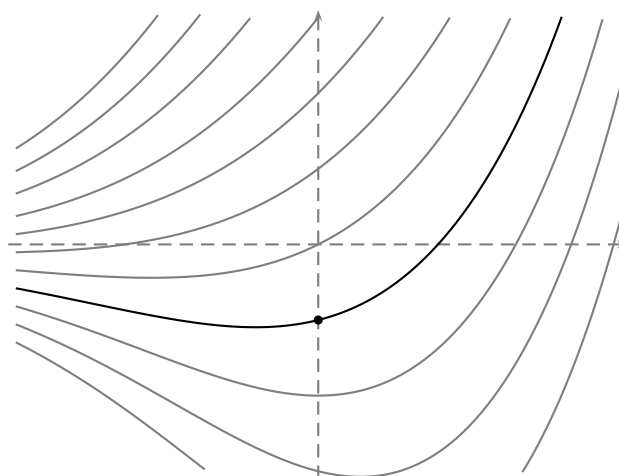
$$y(x) = \frac{e^x + x + c}{1 + e^{-x}}.$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = -1$:

$$y(0) = \frac{1 + c}{2} = -1$$

da cui si ricava che $c = -3$ e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{e^x + x - 3}{1 + e^{-x}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$



2. EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Un'equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti ha la seguente forma

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

con il coefficiente $a_n \neq 0$ e la funzione continua in un intervallo I . A questa equazione, detta *equazione completa*, è associata l'*equazione omogenea*

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0.$$

Si dimostra che l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea è uno spazio vettoriale di dimensione n : se indichiamo con y_1, y_2, \dots, y_n una base di tale spazio ogni altra soluzione è del tipo

$$\sum_{k=1}^n c_k y_k(x)$$

dove c_1, c_2, \dots, c_n sono delle costanti arbitrarie. Per determinare l'insieme delle soluzioni dell'equazione completa basta “traslare” opportunamente lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea.

SOLUZIONE GENERALE DI UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE
LINEARE DI ORDINE n A COEFFICIENTI COSTANTI

La soluzione generale dell'equazione

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

con $a_n \neq 0$ e f una funzioni continue in un certo intervallo I è

$$y(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(x) + y_*(x)$$

dove

- (1) $\sum_{k=1}^n c_k y_k(x)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea con c_1, c_2, \dots, c_n costanti arbitrarie;
- (2) y_* è una soluzione particolare dell'equazione completa.

Per risolvere l'omogenea percorriamo i seguenti passi. Prima si determinano le radici del *polinomio caratteristico*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

Quindi, per costruire una base dello spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea, si associa ad ogni radice un insieme di funzioni. Più precisamente:

- (1) ad ogni radice reale α con molteplicità m si associano le m funzioni:

$$e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x};$$

- (2) ad ogni coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ ciascuna di molteplicità m si associano le $2m$ funzioni:

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Dato che la somma delle molteplicità è uguale al grado n del polinomio alla conclusione di questo procedimento avremo le n funzioni che formano una base dello spazio delle soluzioni le quali sono evidentemente definite per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 2.1 Risolviamo l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - 2z - 3 = 0$$

che ha radici: -1 e 3 entrambe di molteplicità 1 . Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Esempio 2.2 Risolviamo l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 + 4z + 4 = 0$$

che ha un'unica radice: -2 di molteplicità 2 . Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{-2x}.$$

Esempio 2.3 Risolviamo l'equazione differenziale omogenea

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

che ha due radici complesse coniugate: $-1 + 2i$ e $-1 - 2i$ entrambe di molteplicità 1 . Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)).$$

Le costanti si possono determinare imponendo un certo numero di condizioni di vario tipo. Nel caso del problema di Cauchy si assegnano i valori delle prime $n - 1$ derivate in un punto.

Esempio 2.4 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 9y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^2 - 9 = 0$$

che ha radici: 3 e -3 entrambe di molteplicità 1. Quindi la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

Ora imponiamo le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1$$

e dato che $y'(x) = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x}$

$$y'(0) = 3c_1 - 3c_2 = 6.$$

Quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 2 \end{cases}$$

da cui si ricava che $c_1 = 3/2$ e $c_2 = -1/2$. La soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{3}{2}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-3x}.$$

Esempio 2.5 Risolviamo il problema

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) = 16y(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} y(x) = 3 \end{cases}$$

Risolviamo prima l'equazione differenziale omogenea

$$y^{(4)}(x) - 16y(x) = 0.$$

L'equazione caratteristica associata è

$$z^4 - 16 = (z^2 - 4)(z^2 + 4) = (z - 2)(z + 2)(z - 2i)(z + 2i) = 0$$

che ha radici: 2, -2 , $2i$, $-2i$. Dunque la generica soluzione omogenea è:

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x).$$

Ora imponiamo condizione richiesta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (c_1 e^{4x} + c_2 + c_3 e^{2x} \cos(2x) + c_4 e^{2x} \sin(2x)) = 3.$$

Il limite esiste se e solo $c_3 = c_4 = 0$ perché le funzioni $e^{2x} \cos(2x)$ e $e^x \sin(2x)$ non hanno limite per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre siccome il limite deve essere finito ($= 3$) anche $c_1 = 0$. Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = c_2 = 3$$

e così

$$y(x) = 3e^{-2x}$$

è la soluzione cercata.

Per determinare una soluzione particolare descriveremo un metodo che vale solo nel caso in cui la funzione $f(x)$ abbia una forma particolare:

$$f(x) = e^{ax}P(x)\cos(bx) \quad \text{oppure} \quad f(x) = e^{ax}P(x)\sin(bx).$$

In questi casi si cerca una soluzione particolare definita su tutto \mathbb{R} della forma

$$y_{\star}(x) = x^m e^{ax} (Q_1(x)\cos(bx) + Q_2(x)\sin(bx))$$

- (1) m è la molteplicità di $a + ib$ come radice dell'equazione caratteristica,
- (2) $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono generici polinomi di grado uguale al grado di $P(x)$.

Esempio 2.6 Risolviamo l'equazione

$$y'''(x) + 3y''(x) = 9x.$$

L'equazione caratteristica è

$$z^3 + 3z^2 = 0$$

che ha radici: 0 (di molteplicità 2) e -3 (di molteplicità 1). Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x \quad \text{e} \quad y_3(x) = e^{-3x}.$$

La funzione $f(x) = 2x$ è del tipo discusso con $a = b = 0$. Dato che $z = a + ib = 0$ ha molteplicità 2 allora $m = 2$ e la soluzione particolare da cercare ha la forma

$$y_{\star}(x) = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star}(x) = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y''_{\star}(x) = 6Ax + 2B, \quad y'''_{\star}(x) = 6A$$

e sostituiamole nell'equazione

$$9x = y'''_{\star}(x) + 3y''_{\star}(x) = 6A + 3(6Ax + 2B) = 18Ax + 6A + 6B.$$

Quindi $A = 1/2$ e $B = -1/2$ e una soluzione particolare è

$$y_{\star}(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 + c_2x + c_3e^{-3x}.$$

Esempio 2.7 Risolviamo l'equazione

$$2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = \sin(2x).$$

L'equazione caratteristica è

$$2z^2 - 5z + 3 = 0$$

che ha due radici semplici: 1 e $3/2$. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = e^x, \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{3x/2}.$$

La funzione $f(x) = \sin(2x)$ è del tipo discusso con $a = 0$ e $b = 2$. Dato che $z = a + ib = 2i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica (la molteplicità è zero), la soluzione particolare ha la forma

$$y_*(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x).$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_*(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x), \quad y''_*(x) = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x)$$

e sostituiamole nell'equazione

$$\sin(2x) = 2y''_*(x) - 5y'_*(x) + 3y_*(x) = 5(2A - B) \sin(2x) - 5(A + 2B) \cos(2x).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 5(2A - B) = 1 \\ 5(A + 2B) = 0 \end{cases}$$

si ottiene che $A = 2/25$, $B = -1/25$ e una soluzione particolare è

$$y_*(x) = \frac{2}{25} \cos(2x) - \frac{1}{25} \sin(2x).$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x/2} + \frac{2}{25} \cos(2x) - \frac{1}{25} \sin(2x).$$

Esempio 2.8 Risolviamo l'equazione

$$y''(x) - 2y'(x) = x - e^{3x}.$$

L'equazione caratteristica è

$$z^2 - 2z = z(z - 2) = 0$$

che ha due radici semplici: 0 e 2. Quindi una base dello spazio delle soluzioni omogenee è:

$$y_1(x) = 1, \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{2x}.$$

La funzione $f(x) = x - e^{3x}$ non è del tipo discusso, ma grazie alla linearità è sufficiente trovare una soluzione particolare prima per $f_1(x) = x$, poi per $f_2(x) = -e^{3x}$ e quindi sommarle. Per $f_1(x) = x$ allora $a = 0$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = 0$ è una soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità 1, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 1}(x) = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star 1}(x) = 2Ax + B, \quad y''_{\star 1}(x) = 2A$$

e sostituiamole nell'equazione

$$x = y''_{\star 1}(x) - 2y'_{\star 1}(x) = -4Ax + 2A - 2B.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 2A - 2B = 0 \end{cases}$$

si ottiene che $A = -1/4$, $B = -1/4$ e

$$y_{\star 1}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x.$$

Per $f_2(x) = e^{3x}$ allora $a = 3$ e $b = 0$. Dato che $z = a + ib = 3$ non è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare ha la forma

$$y_{\star 2}(x) = Ce^{3x}.$$

Calcoliamo le derivate

$$y'_{\star 2}(x) = 3Ce^{3x}, \quad y''_{\star 2}(x) = 9Ce^{3x}$$

e sostituiamole nell'equazione

$$-e^{3x} = y''_{\star 2}(x) - 2y'_{\star 2}(x) = 3Ce^{3x}$$

da cui $C = -1/3$ e

$$y_{\star 2}(x) = -\frac{1}{3}e^{3x}.$$

Dunque una soluzione particolare per $f(x) = x - e^{3x}$ è

$$y_{\star}(x) = y_{\star 1}(x) + y_{\star 2}(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}e^{3x}$$

mentre la soluzione generale è

$$y(x) = c_1 + c_2e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}e^{3x}.$$

Esempio 2.9 Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int e^x x \cos x \, dx.$$

Invece di integrare direttamente, possiamo ricondurre il problema alla risoluzione di un'equazione differenziale. Infatti determinare le primitive $y(x)$ della funzione $e^x x \cos x$ equivale a risolvere la seguente equazione differenziale lineare:

$$y'(x) = e^x x \cos x.$$

In questo caso l'equazione caratteristica è semplicemente $z = 0$ e quindi la parte omogenea è generata dalla funzione costante $y_1(x) = 1$. La soluzione particolare deve avere invece la forma:

$$y_*(x) = e^x(Ax + B) \cos x + e^x(Cx + D) \sin x.$$

Per determinare il valore dei coefficienti A , B , C e D dobbiamo derivare

$$\begin{aligned} y'_*(x) &= e^x(Ax + B) \cos x + Ae^x \cos x - e^x(Ax + B) \sin x \\ &\quad + e^x(Cx + D) \sin x + Ce^x \sin x + e^x(Cx + D) \cos x \\ &= (A + C)e^x x \cos x + (A + B + D)e^x \cos x \\ &\quad + (C - A)e^x x \sin x + (C - B + D)e^x \sin x \end{aligned}$$

e imporre che $y'_*(x) = x \cos x e^x$. Quindi

$$A + C = 1, \quad A + B + D = 0, \quad C - A = 0, \quad C - B + D = 0$$

e risolvendo si trova che $A = C = -D = 1/2$ e $B = 0$. Così

$$y(x) = y_*(x) + cy_1(x) = \frac{1}{2}e^x x \cos x + \frac{1}{2}e^x(x - 1) \sin x + c.$$

3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI NON LINEARI A VARIABILI SEPARABILI

Un'equazione differenziali a *variabili separabili* ha la seguente forma

$$y'(x) = a(x) \cdot b(y(x))$$

dove $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni continue rispettivamente negli intervalli I e J . Si tratta dunque di un'equazione differenziale del primo ordine ed è *non lineare* se b non è un polinomio di primo grado. Le equazioni non lineari sono in generale molto più difficili da trattare rispetto alle equazioni lineari. In questo caso la determinazione esplicita delle eventuali soluzioni è legata come vedremo alla forma particolare dell'equazione.

Consideriamo il relativo problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = a(x) \cdot b(y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$. Se $b(y_0) = b(y(x_0)) = 0$ allora il problema ha come soluzione la funzione costante $y(x) = y_0$ (soluzione stazionaria). Se invece $b(y_0) \neq 0$ allora si procede prima “separando le variabili” x e y

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x)$$

e quindi si integra rispetto a x tenendo conto della condizione $y(x_0) = y_0$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(x)}{b(y(x))} dx = \int_{x_0}^x a(x) dx.$$

Riscrivendo il primo integrale nella variabile y otteniamo

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{b(y)} dy = \int_{x_0}^x a(x) dx$$

Allora se $H(y)$ è una primitiva di $1/b(y)$ e $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$ si ha che

$$H(y(x)) - H(y_0) = [H(y)]_{y_0}^{y(x)} = [A(x)]_{x_0}^x = A(x) - A(x_0).$$

A questo punto l'intervallo di esistenza e l'unicità della soluzione dipende dall'invertibilità della funzione $H(y)$:

$$y(x) = H^{-1}(A(x) - A(x_0) + H(y_0)).$$

Esempio 3.1 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) - y^2(x) \\ y(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

In questo caso la funzione $a(x) = 1$ mentre $b(y) = y - y^2$. Dato che $b(y_0) = 1/4 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{\frac{1}{2}}^{y(x)} \frac{1}{y(1-y)} dy = \int_0^x 1 dx.$$

Il primo integrale si sviluppa nel seguente modo

$$H(y) = \int \frac{1}{y(1-y)} dy = \int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \right) dy = \log \left| \frac{y}{1-y} \right| + c$$

Quindi

$$\left[\log \left| \frac{y}{1-y} \right| \right]_{\frac{1}{2}}^{y(x)} = [x]_0^x$$

ossia

$$H(y(x)) = \log \left| \frac{y(x)}{1-y(x)} \right| = x.$$

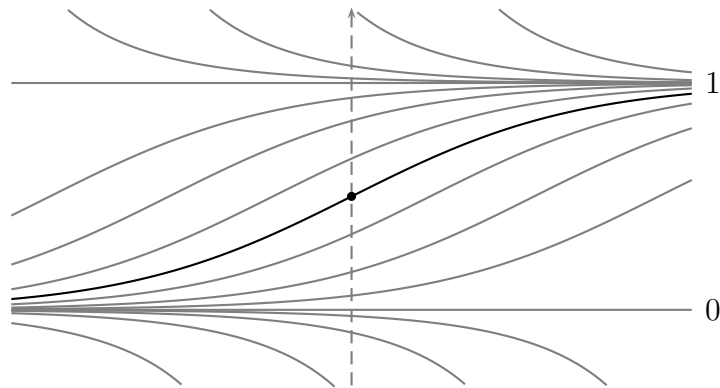
Per determinare la soluzione basta invertire la funzione $H(y)$ ossia esplicitare la funzione $y(x)$:

$$\frac{y(x)}{1-y(x)} = \pm e^x.$$

Siccome $y(0) = \frac{1}{2}$ si sceglie il segno positivo e

$$y(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale.



Notiamo la presenza delle soluzioni stazionarie $y(x) = 0$ e $y(x) = 1$. Inoltre si può facilmente dimostrare che la soluzione $y(x) = 1$ è “attrattiva” ovvero se $y(0) > 0$ allora la soluzione corrispondente tende a 1 per $x \rightarrow +\infty$.

Esempio 3.2 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Qui $a(x) = 2x$ mentre $b(y) = y^2$. Dato che $b(y_0) = 1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{y^2} dy = \int_0^x 2x dx$$

e dunque

$$\left[-\frac{1}{y}\right]_{-1}^{y(x)} = [x^2]_0^x$$

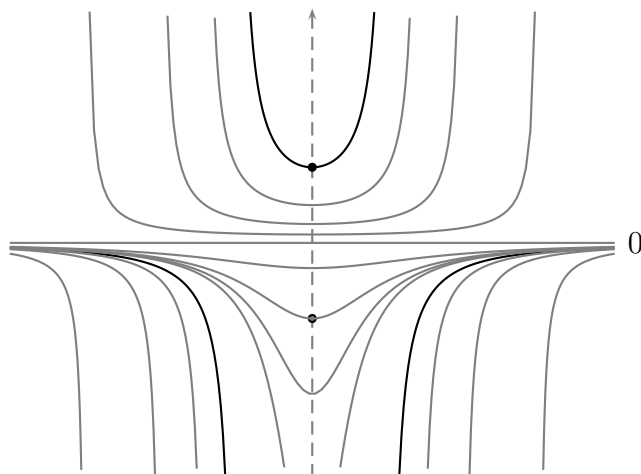
ossia

$$-\frac{1}{y(x)} + 1 = x^2.$$

Quindi

$$y(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

e la soluzione è definita sull'intervallo massimale $(-1, 1)$. Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale.



In questo caso c'è un'unica soluzione stazionaria $y(x) = 0$. Inoltre notiamo che se la condizione iniziale fosse stata $y(0) = -1$ la soluzione sarebbe stata

$$y(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Esempio 3.3 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x}{x^2+1}(y(x)-1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Qui $a(x) = x/(x^2+1)$ mentre $b(y) = y-1$. Dato che $b(y_0) = -1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_0^{y(x)} \frac{1}{y-1} dy = \int_0^x \frac{x}{x^2+1} dx$$

e dunque

$$[\log |y-1|]_0^{y(x)} = \left[\frac{1}{2} \log(x^2+1)\right]_0^x$$

ossia

$$\log |y(x)-1| = \log \sqrt{x^2+1}.$$

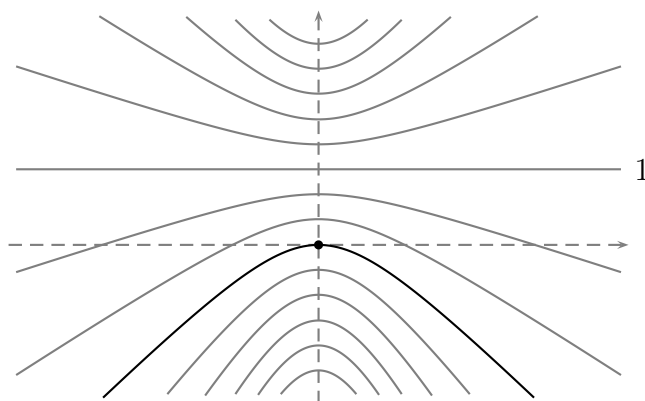
Esplicitiamo la funzione $y(x)$:

$$y(x) = 1 \pm \sqrt{x^2+1}$$

Dato che $y(0) = 0$ scegliamo il segno negativo e la soluzione è

$$y(x) = 1 - \sqrt{x^2+1} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. Anche questo caso c'è un'unica soluzione stazionaria $y(x) = 1$.



Esempio 3.4 Risolviamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = 2x (\cos y(x))^2 \\ y(0) = 2\pi \end{cases}$$

e determiniamo il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$. Qui $a(x) = 2x$ mentre $b(y) = 1/(\cos y)^2$. Dato che $b(y_0) = 1 \neq 0$, la soluzione cercata risolve

$$\int_{2\pi}^{y(x)} \frac{1}{(\cos y)^2} dy = \int_0^x 2x dx$$

e dunque

$$[\tan y]_{2\pi}^{y(x)} = [x^2]_0^x$$

ossia

$$\tan y(x) = x^2.$$

Per esplicitare la $y(x)$ dobbiamo invertire la funzione tangente:

$$y(x) = \arctan(x^2) + k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Il parametro k individua i diversi rami del grafico della tangente; nel nostro caso dobbiamo scegliere $k = 2$ in modo da soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 2\pi$. Quindi la soluzione è

$$y(x) = \arctan(x^2) + 2\pi \quad \text{per } x \in \mathbb{R}$$

e così

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}.$$

Nel seguente grafico questa soluzione è evidenziata rispetto al flusso delle altre soluzioni ottenute variando la condizione iniziale. Le soluzioni stazionarie sono infinite: $y(x) = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

