EQUAZIONI DIFFERENZIALI

DEL PRIMO ORDINE A VARIABILI SEPARABILI

SONO DEL TIPO: $y' = f(x)\cdot g(y)$

PER RISOLVERLA BISOGNA FARE:
1. SEPARARE LE VARIABILI X ED Y
2. INTEGRARE CIASCUN MEMBRO RISPETTO ALLA VARIABILE DA CUI DIPENDE
3. RICAVARE $y(x)$

ESEMPIO

$$y' = y^2 \ln x$$

1 $\frac{dy}{dx} = y^2 \ln x \rightarrow \frac{dy}{y^2} = \ln x \, dx$

2 $\int \frac{dy}{y^2} = \int \ln x \, dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x\ln x - x + c$

3 $y(x) = \frac{-1}{x\ln x - x + C}$ (VA BENE ANCHE PER $y(x)=0$)

LINEARI DEL PRIMO ORDINE

FORMA: $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$

SE $a(x)=0$ È ELEMENTARE (INTEGRALE DIRETTO)
SE $f(x)=0$ (OMOGENEA) DIVENTA UN'EQ. DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

PER RISOLVERLA:
1. TROVO UNA PRIMITIVA DI $a(x)$ CIOÈ UNA FUNZIONE $A(x)$ TALE CHE $A'(x)=a(x)$
2. MOLTIPLICO ENTRAMBI I MEMBRI PER $e^{A(x)}$

$$y'(x)e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}y(x) = f(x)e^{A(x)}$$

È LA DERIVATA DI

3. INTEGRO ENTRAMBI I MEMBRI

$$y(x)e^{A(x)} = \int f(x)e^{A(x)}dx + C$$

4. RICAVO $y(x)$ MOLTIPLICANDO ENTRAMBI I MEMBRI PER $e^{-A(x)}$

$$y(x) = e^{-A(x)}\int f(x)e^{A(x)}dx + Ce^{A(x)}$$

ESEMPIO

$$y'(x) - xy(x) = 2x$$

1 $A(x) = \int -x = -\frac{x^2}{2}$

2 $\underbrace{y'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}y(x)}_{\left[y(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\right]'} = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$

3 $y(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = \int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}dx + c = -2e^{-\frac{x^2}{2}} + c$

$y(x)\cancel{e^{-\frac{x^2}{2}}}\cancel{e^{\frac{x^2}{2}}} = -2\cancel{e^{-\frac{x^2}{2}}}\cancel{e^{\frac{x^2}{2}}} + ce^{\frac{x^2}{2}}$

$$y(x) = -2 + ce^{\frac{x^2}{2}}$$

OMOGENEE DEL SECONDO ORDINE

FORMA: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$

ES. $y'' + 2y' + 2y = 0$ $a,b,c \in \mathbb{R}$ NUMERI REALI
$a=1$ $b=2$ $c=2$

LA SOLUZIONE GENERALE È: $y(x) = c_1 \underbrace{y_1(x)}_{} + c_2 \underbrace{y_2(x)}_{\text{BASI}}$

PER TROVARE UNA BASE BISOGNA RISOLVERE L'EQUAZIONE ASSOCIATA $az^2 + bz + c = 0$

	BASE	SOLUZIONE GENERALE
– 2 SOLUZIONI REALI DISTINTE $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$	$\Rightarrow y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$
– 2 SOLUZIONI REALI COINCIDENTI $\lambda_1 = \lambda_2$	$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}$	$\Rightarrow y(x) = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}$
– 2 SOLUZIONI COMPLESSE $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$\Rightarrow y(x) = c_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

ESEMPIO $y'' - 5y' + 4y = 0$ EQ. CARATTERISTICA $z^2 - 5z + 4 = 0$ SOLUZ. $\lambda_1 = 4$ $\lambda_2 = 1$

BASE e^{4x}, e^{x}

QUINDI LA SOLUZIONE GENERALE È

$$y(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{x}$$