DETERMINARE LA BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE DA UN INSIEME DI GENERATORI

Sia dato uno spazio vettoriale "V" non vuoto su un campo K.
Sia dato anche un insieme di generatori "G" ovvero un insieme di vettori che sono in grado di generare tutto lo spazio vettoriale V.
Il nostro scopo è di ricavare una base canonica dal generatore.
I passaggi da svolgere sono i seguenti:

- Considerare il primo vettore non nullo e inserirlo nella base.
- Considerare il secondo vettore non nullo e verificare che è linearmente indipendente dal primo. Se lo è (cioè se non è proporzionale al primo) allora andrà inserito nella base, altrimenti non farà parte della base.
- Procedere con gli altri vettori non nulli e inserirli nella base solo se sono linearmente indipendenti rispetto alla combinazione dei vettori precedenti.

Esempio:

Spazio vettoriale: $\mathbb{R}^3$ sul campo $\mathbb{R}$

Insieme di generatori:

$$G = \{ v_1 = (1,1,0),\ v_2 = \bar{0},\ v_3 = (0,1,-1),\ v_4 = (1,2,-1),\ v_5 = (0,1,2) \}$$

Base canonica:

$$< w_1, w_2, w_3 > \quad (\text{Incognita})$$

Prendiamo in esame il vettore v_1. Ci accorgiamo che non è nullo ed essendo il primo farà parte sicuramente della base.

$\boxed{w_1 = v_1}$

Passiamo adesso al vettore v_2. Siccome è nullo non si considera.

Prendiamo v_3. Bisognerà stabilire se è indipendente o se è proporzionale rispetto al primo elemento della base (w_1)
Si può notare subito che sono indipendenti perché nei due

vettori sono presenti degli $\emptyset$ in posizioni diverse. In pratica facendo la combinazione lineare si ottiene $\overline{0}$ solo con scalari tutti nulli.

$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,-1) = \overline{0}$

$(\alpha, \alpha+\beta, -\beta) = \overline{0}$

$\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix} \Rightarrow$ $\boxed{v_1 \text{ e } v_3 \text{ linearmente indipendenti}}$

Essendo v_3 linearmente indipendente, possiamo prenderlo come secondo vettore della base canonica.

$\boxed{w_2 = v_3}$

Passiamo al vettore v_4. Questa volta dobbiamo confrontarlo contemporaneamente sia con w_1 sia con w_2.

$\alpha(1,1,0) + \beta(0,1,-1) = (1,2,-1)$

$(\alpha, \alpha+\beta, -\beta) = (1,2,-1)$

Ci accorgiamo che per $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ l'equivalenza è verificata.
E siccome ci sono scalari non nulli allora v_4 dipende da w_1 e w_2 e quindi non si considera.

Passiamo a v_5. Facendo lo stesso procedimento di sopra ci accorgiamo che non esistono valori di α e β che danno $(0,1,2)$ come risultato. Volendo, potremmo verificare facendo la combinazione lineare dei vettori w_1, w_2 e v_5 ponendola uguale al vettore nullo.
Ci accorgeremmo che gli scalari vengono tutti $\emptyset$.
In definitiva, v_5 è indipendente e può far parte della base.

$\boxed{w_3 = v_5}$

Fatto! Abbiamo trovato una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. La base è:

$\langle w_1, w_2, w_3 \rangle = \langle v_1, v_3, v_5 \rangle = \boxed{\langle (1,1,0), (0,1,-1), (0,1,2) \rangle}$