# Лабораторная работа №4

# Решение ДУЧП гиперболического типа

## 1. 2D уравнение конвекции

Необходимо решить уравнение конвекции

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

при распространении косинусоидального импульса

$$\phi(x) = cos(\frac{\pi x}{2}), x \in [0, 10]$$

Также использовались граничные условия:

$$\begin{cases} U(0, t) = cos(-\frac{\pi x}{2}) \\ U(10, t) = cos(\frac{\pi x}{2}) \end{cases}$$

Цель:

- получить аналитическое решение
- явная двухслойная схема (FTCS метод)
- явная схема Лакса-Вендрофа,
- схема Рихтмайера (двухшаговый метод типа Лакса-Вендрофа)
- схема МакКормака (предиктор-корректорная схема типа Лакса-Вендрофа)
- противопотоковый метод первого порядка
- противопотоковый метод второго порядка

#### Необходимые библиотеки

In [1]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
```

#### Начальные и граничные условия

In [2]:

```
u, length, time, columns = 1, 10., 10, 100


def initial(x: float) -> float:
    return math.cos(math.pi * x / 2)


def first_border(t: float) -> float:
    return math.cos(- math.pi * t / 2)


def second_border(t: float) -> float:
    return math.cos(math.pi * t / 2)
```

#### Функция отрисовки

In [6]:

```
def draw(dt1: float, u1: list) -> None:
    a, b = np.shape(u1)
    x = np.linspace(0, length, b)
    fig = plt.figure()

    ax1 = fig.add_subplot(221)
    ax1.grid()
    plt.plot(x, u1[int(0.1 / dt), :])

    ax2 = fig.add_subplot(222)
    ax2.grid()
    plt.plot(x, u1[int(0.5 / dt), :])

    ax3 = fig.add_subplot(223)
    ax3.grid()
    plt.plot(x, u1[int(1 / dt), :])

    ax4 = fig.add_subplot(224)
    ax4.grid()
    plt.plot(x, u1[int(5 / dt), :])

    plt.show()
```

## 1.1 Явная двухслойная схема

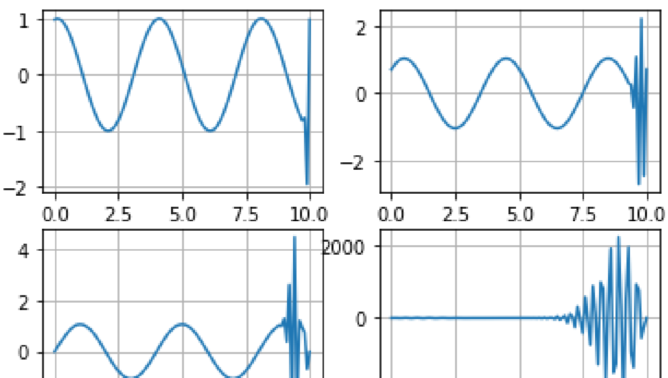
$$\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\tau} + u\frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2dx} = 0$$

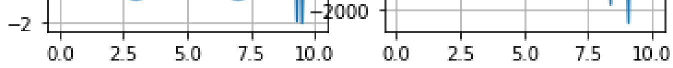
In [7]:

```
def explicity(c: float):
    dx = length / columns
    dt = dx * c / u
    lines = int(time / dt)
    T = np.zeros((lines + 1, columns + 1))

    for i in range(1, columns):
        T[0][i] = initial(i * dx)

    for i in range(lines + 1):
        T[i][0] = first_border(i * dt)
        T[i][columns] = second_border(i * dt)

    for k in range(lines):
        for j in range(1, columns):
            T[k + 1][j] = T[k][j] - c * (T[k][j + 1] - T[k][j - 1]) / 2
    return T, dt
```

In [8]:

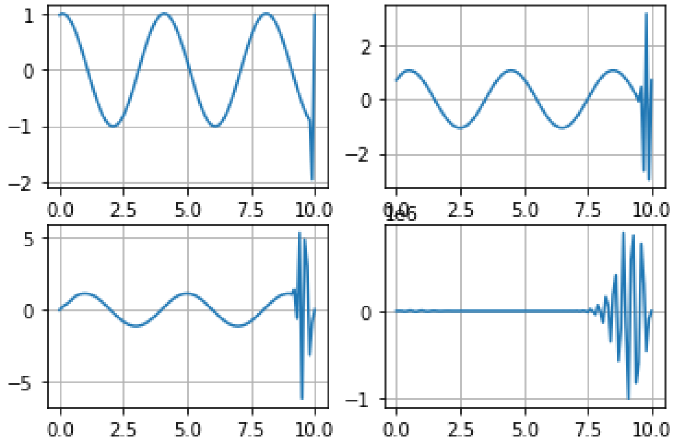
```
T, dt = explicity(c=0.5)
draw(dt, T)
```





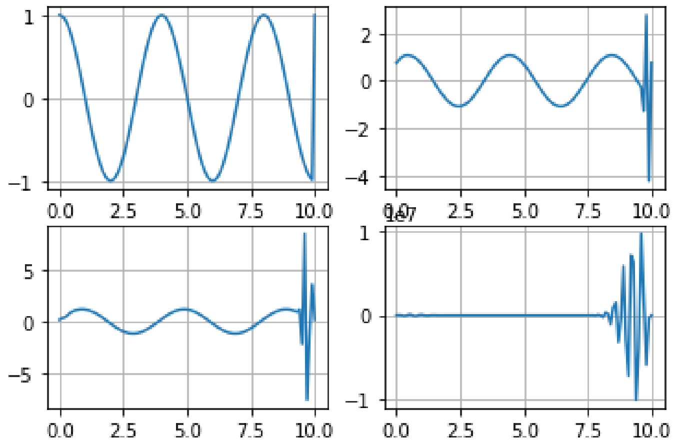

In [9]:

```
T, dt = explicity(c=1)
draw(dt, T)
```




In [11]:

```
T, dt = explicity(c=1.5)
draw(dt, T)
```




Все графики представленные в этой работе построены при значениях времени **0.1, 0.5, 1** и **5** секундах**,** а также при значениях конвекционного числа **0.5, 1** и **1.5.**

Как видно из представленных графиков выше**,** решение явной схемой расходится при любых значениях конвекционного числа**.**

## 1.2 Явная схема Лакса-Вендрофа

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - u\left(\frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h}\right)\tau + \frac{1}{2}u^2\left(\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}\right)$$

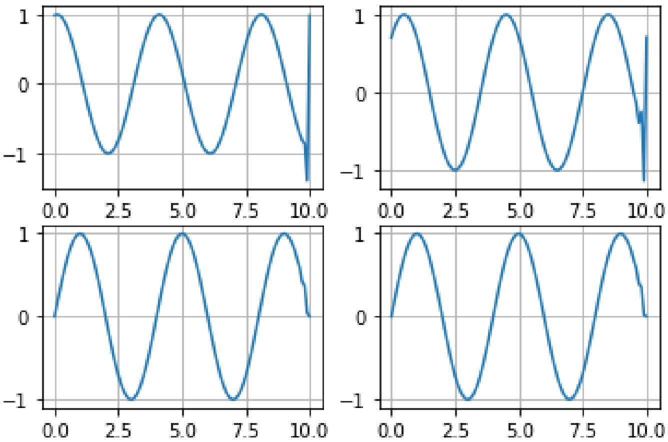
In [13]:

```
def lax_wendroff(c: float):
    dx = length / columns
    dt = dx * c / u
    lines = int(time / dt)
    T = np.zeros((lines + 1, columns + 1))

    for i in range(1, columns):
        T[0][i] = initial(i * dx)

    for i in range(lines + 1):
```

```
        T[i][0] = first_border(i * dt)
        T[i][columns] = second_border(i * dt)

    for k in range(lines):
        for j in range(1, columns):
            T[k+1][j]=T[k][j]-c*(T[k][j+1]-T[k][j-1])/2+c**2*(T[k][j+1]-2*T[k][j]+T[k][j
-1])/2
    return T, dt
```

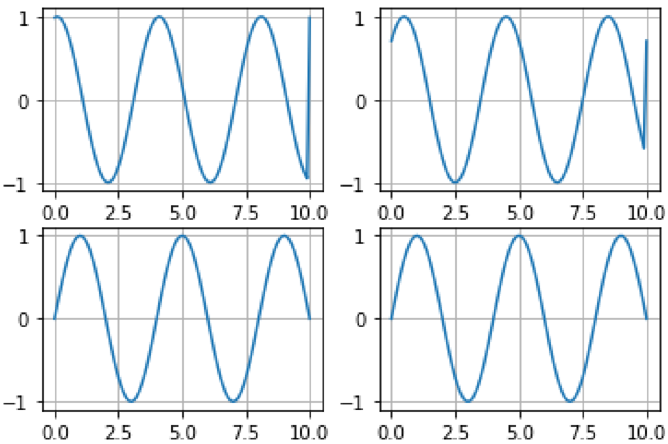
In [14]:

```
T, dt = lax_wendroff(c=0.5)
draw(dt, T)
```



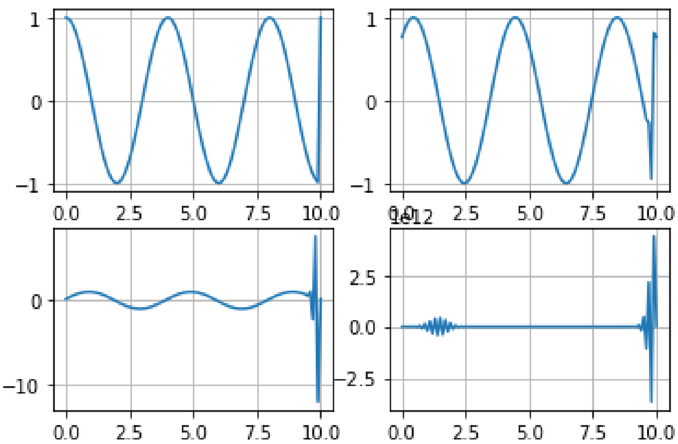

In [15]:

```
T, dt = lax_wendroff(c=1)
draw(dt, T)
```




In [17]:

```
T, dt = lax_wendroff(c=1.5)
draw(dt, T)
```




При $c = 1$ явная схема Лакса-Вендрофа показывает наиболее точный результат. При значениях $c > 1$

решение расходится.

## 1.3 Схема Рихтмайера (двухшаговый метод типа Лакса-Вендрофа)

$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2}\left(U_{i+1,j} + U_{i-1,j}\right) - \frac{c}{2}\left(U_{i+1,j} - U_{i-1,j}\right)$$

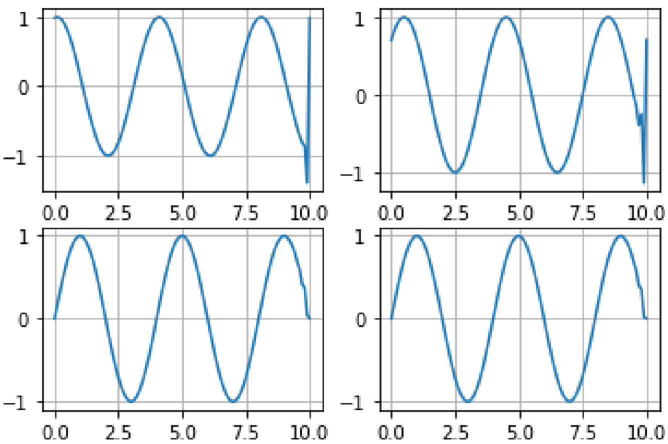
$$U_{i,j+2} = U_{i,j} - c\left(U_{i+1,j+1} - U_{i-1,j+1}\right)$$

In [19]:

```
def lax_wendroff_2step(c: float):
    dx = length / columns
    dt = dx * c / u
    lines = int(time / dt)
    T = np.zeros((lines + 1, columns + 1))

    for i in range(1, columns):
        T[0][i] = initial(i * dx)

    for i in range(lines + 1):
        T[i][0] = first_border(i * dt)
        T[i][columns] = second_border(i * dt)

    for k in range(lines):
        prev_value = (T[k][1] + T[k][0]) / 2 - c * (T[k][1] - T[k][0]) / 2
        for j in range(1, columns):
            next_value = (T[k][j + 1] + T[k][j]) / 2 - c * (T[k][j + 1] - T[k][j]) / 2
            T[k + 1][j] = T[k][j] - c * (next_value - prev_value)
            prev_value = next_value
    return T, dt
```

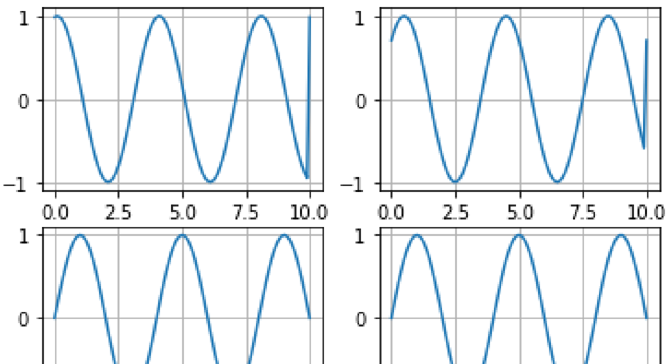
In [20]:

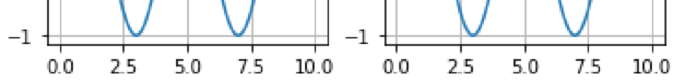
```
T, dt = lax_wendroff_2step(c=0.5)
draw(dt, T)
```




In [21]:

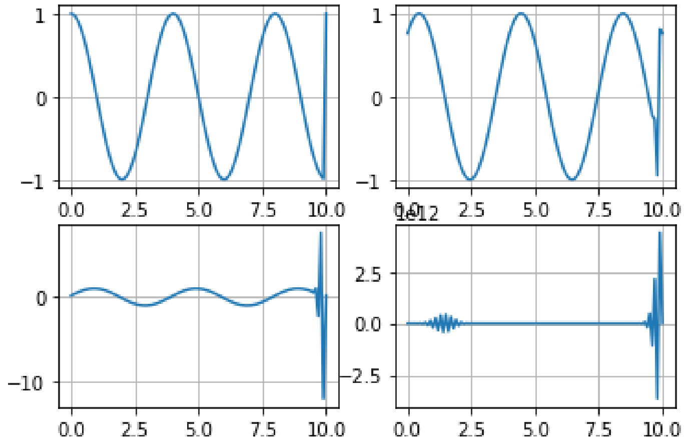
```
T, dt = lax_wendroff_2step(c=1)
draw(dt, T)
```





In [23]:

```
T, dt = lax_wendroff_2step(c=1.5)
draw(dt, T)
```



Точно такая же ситуация как и с одношаговым методом.

### 1.4 Схема МакКормака (предиктор-корректорная схема типа Лакса-Вендрофа)

$$\bar{U}_{i,j+1} = U_{i,j} - c\left(U_{i+1,j} - U_{i,j}\right)$$

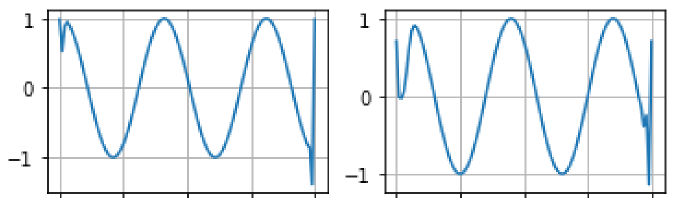
$$U_{i,j+1} = \frac{1}{2}\left[U_{i,j} + \bar{U}_{i,j+1} - c\left(\bar{U}_{i,j+1} - \bar{U}_{i-1,j+1}\right)\right]$$

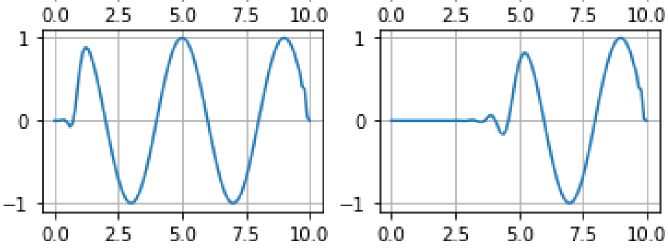
In [25]:

```
def mc_cormack(c: float):
    dx = length / columns
    dt = dx * c / u
    lines = int(time / dt)
    T = np.zeros((lines + 1, columns + 1))
    T_up = np.zeros((lines + 1, columns + 1))
    T_down = np.zeros((lines + 1, columns + 1))

    for i in range(0, columns):
        T[0][i] = initial(i * dx)

    for i in range(lines + 1):
        T[i][0] = first_border(i * dt)
        T[i][columns] = second_border(i * dt)

    for k in range(lines):
        for j in range(1, columns):
            T_up[k + 1][j] = T[k][j] - c * (T[k][j + 1] - T[k][j])
            T[k + 1][j] = (T[k][j] + T_up[k + 1][j] - c * (T_up[k + 1][j] - T_up[k + 1][j - 1])) / 2
    return T, dt
```

In [26]:

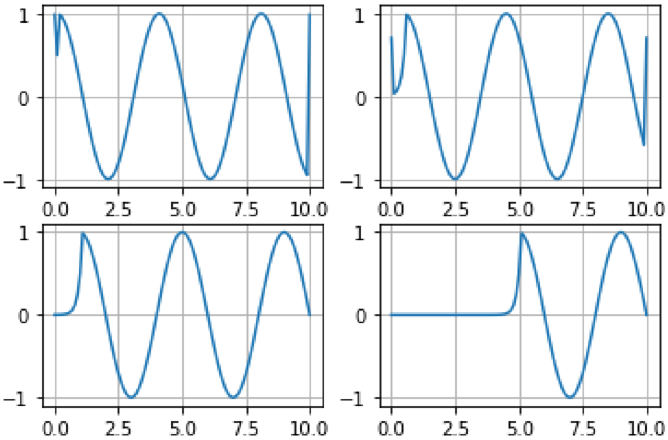
```
T, dt = mc_cormack(c=0.5)
draw(dt, T)
```





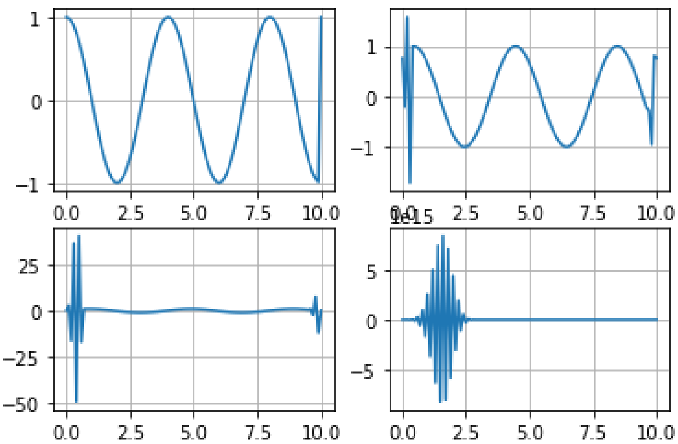

In [27]:

```
T, dt = mc_cormack(c=1)
draw(dt, T)
```




In [29]:

```
T, dt = mc_cormack(c=1.5)
draw(dt, T)
```




**С**хема МакКормака лучше всего ведет себя при маленьких $c$ **.** Что-то непонятное происходит при больших значениях времени**,** но на маленьких получается достаточно хорошее решение при $c <= 1$ **.**

## **1.5** Противопотоковый метод первого порядка

$$\frac{U_{i,j+1}-U_{i,j}}{\tau} + u\frac{U_{i,j}-U_{i-1,j}}{h} = 0$$

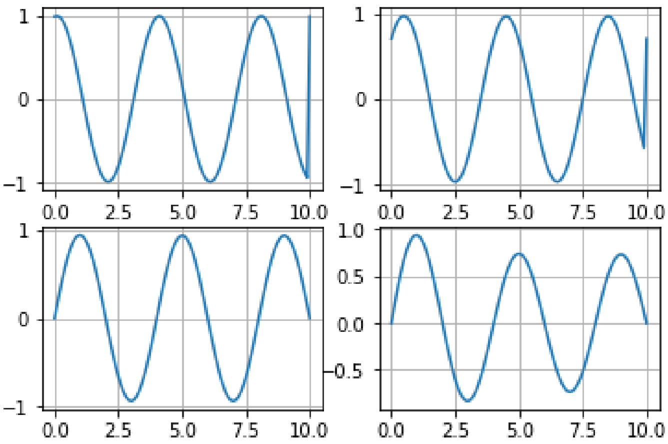
In [32]:

```
def upwind_step1(c: float):
    dx = length / columns
    dt = dx * c / u
    lines = int(time / dt)
    T = np.zeros((lines + 1, columns + 1))
```

```
    for i in range(1, columns):
        T[0][i] = initial(i * dx)

    for i in range(lines + 1):
        T[i][0] = first_border(i * dt)
        T[i][columns] = second_border(i * dt)

    for k in range(lines):
        for j in range(1, columns):
            T[k + 1][j] = T[k][j] - c * (T[k][j] - T[k][j - 1])
    return T, dt
```

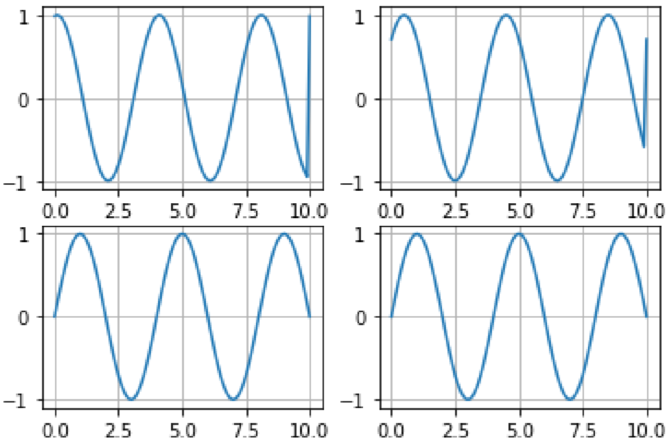
In [33]:

```
T, dt = upwind_step1(c=0.5)
draw(dt, T)
```



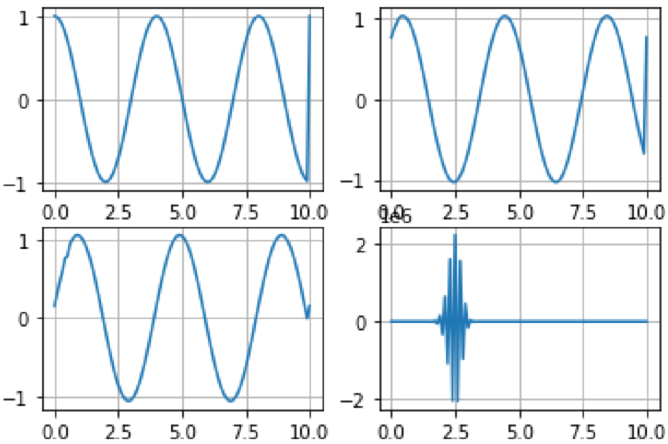

In [34]:

```
T, dt = upwind_step1(c=1)
draw(dt, T)
```




In [36]:

```
T, dt = upwind_step1(c=1.5)
draw(dt, T)
```



Противопотоковый метод первого порядка показывает лучшее решение при $c = 1$. При $c > 1$ начинает расходится на большом значении времени. При маленьких значениях $c$ происходит тоже самое.

## 1.6 Противопотоковый метод первого порядка

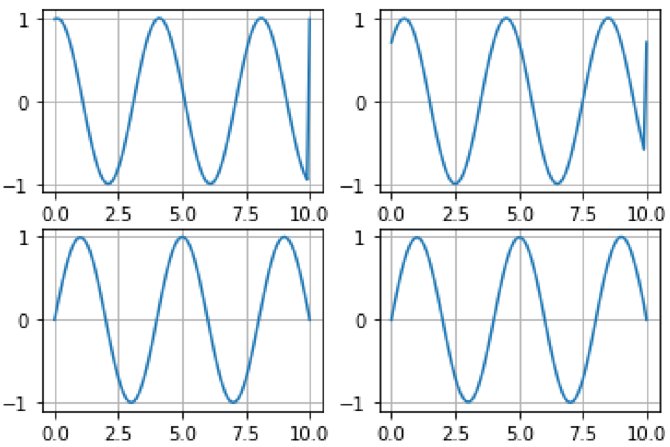
$$U_{i,j+1} = U_{i,j} - c\left(U_{i,j} - U_{i-1,j}\right) - \frac{c(1-c)}{2}\left(U_{i,j} - 2U_{i-1,j} + U_{i-2,j}\right)$$

In [50]:

```
def upwind_step2(c: float):
    dx = length / columns
    dt = dx * c / u
    lines = int(time / dt)
    T = np.zeros((lines + 1, columns + 1))

    for i in range(1, columns):
        T[0][i] = initial(i * dx)

    for i in range(lines + 1):
        T[i][0] = first_border(i * dt)
        T[i][columns] = second_border(i * dt)

    for i in range(1, lines + 1):
        T[i][1] = T[i - 1][1] - c * (T[i - 1][1] - T[i - 1][0])

    for k in range(lines):
        for j in range(2, columns):
            T[k+1][j] = T[k][j]-c*(T[k][j]-T[k][j-1])-c*(1-c)*(T[k][j]-2*T[k][j-1]+T[k][j-2])/2
    return T, dt
```

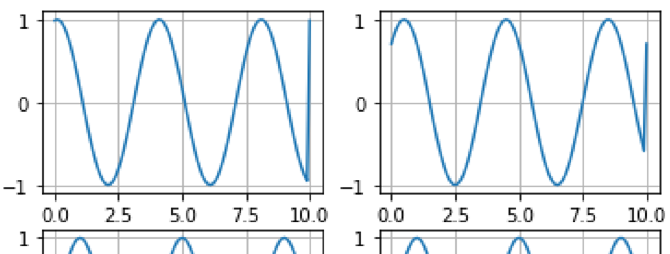
In [43]:

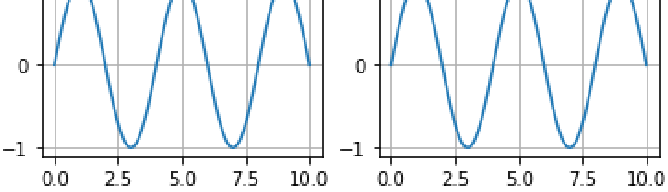
```
T, dt = upwind_step2(c=0.5)
draw(dt, T)
```



In [44]:

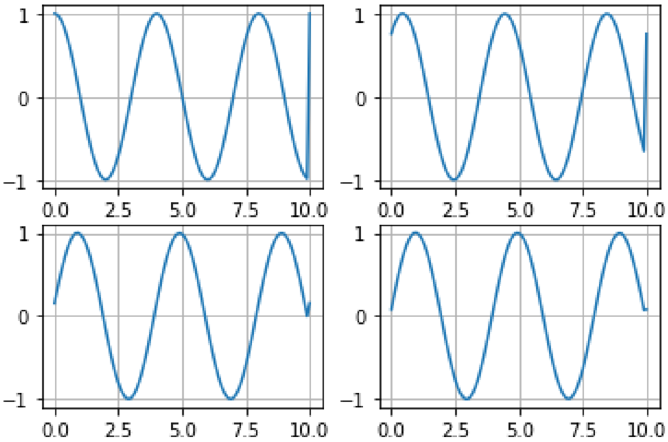
```
T, dt = upwind_step2(c=1)
draw(dt, T)
```





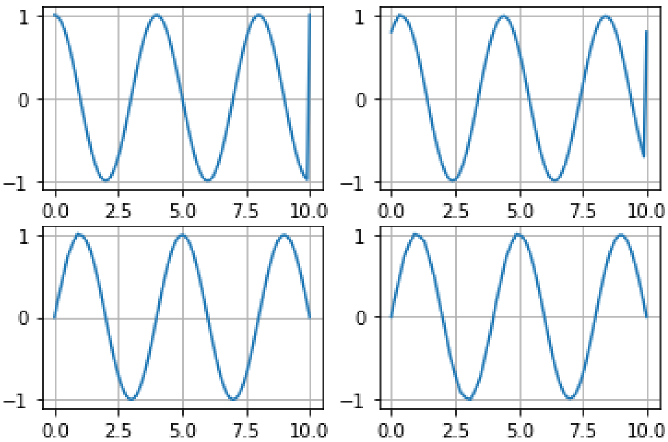
In [47]:

```
T, dt = upwind_step2(c=1.5)
draw(dt, T)
```



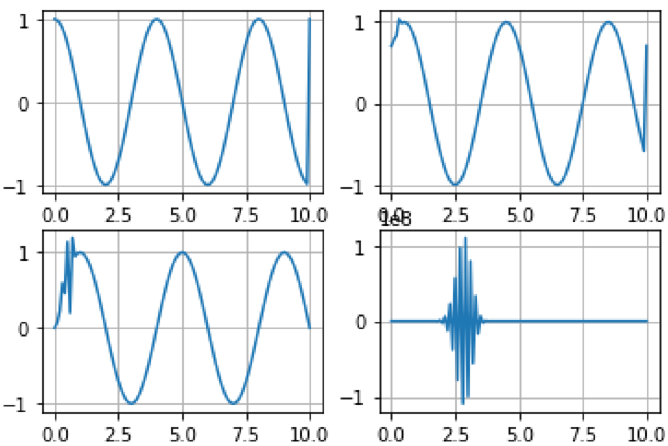
In [48]:

```
T, dt = upwind_step2(c=2)
draw(dt, T)
```



In [49]:

```
T, dt = upwind_step2(c=2.5)
draw(dt, T)
```



Данный метод показывает наилучшие результаты. Расходится при значениях $c > 2$

.

## 2. Аналитическое решение

```
s = NDSolve[{D[T[t, x], t] + D[T[t, x], x] == 0, T[0, x] == Cos[Pi * x / 2], T[t, 0] == Cos[-Pi * t / 2], T[t, 1] == Cos[Pi * (1 - t) / 2]}, T,
  {t, 0, 10}, {x, 0, 1}]
Plot[{Evaluate[T[0.1, x] /. s], Evaluate[T[0.5, x] /. s], Evaluate[T[1, x] /. s], Evaluate[T[10, x] /. s]}, {x, 0, 1}, PlotRange → All]
Plot3D[Evaluate[T[t, x] /. s], {t, 0, 10}, {x, 0, 1}, PlotRange → All]
```

```
{{T → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 10.}, {0., 1.}} Output: scalar ]}}
```