# Лабораторная работа №1

# Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

## 1. Методы решения ОДУ

Существует большое количество методов численного решения задачи. Для решения ОДУ в данной лабораторной работе будут использованы: явный и неявный метод Эйлера, усовершенствованный метод Эйлера, методы Гира различных порядков.

При построении численных алгоритмов будем считать, что решение этой дифференциальной задачи существует, оно единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости.

Идея численных методов решения задачи состоит из четырех частей:

1. Вводится расчетная сетка по переменной t (время) из $N_t + 1$ точки $t_0, t_1, \dots, t_{N_t}$. Нужно найти значения неизвестной функции u в узлах сетки $t_n$. Обозначим через $y^n$ приближенное значение u($t_n$).
2. Предполагаем, что дифференциальное уравнение выполнено в узлах сетки.
3. Аппроксимируем производные конечными разностями.
4. Формулируем алгоритм, который вычисляет новые значения $y^{n+1}$ на основе предыдущих вычисленных значений $y^k$, $k < n$

### Явный метод Эйлера

Проиллюстрируем указанные шаги. Для начала введем расчетную сетку. Очень часто сетка является равномерной, т.е. имеет одинаковое расстояние между узлами $t_n$ и $t_{n+1}$:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_t\}.$$

Затем, предполагаем, что уравнение выполнено в узлах сетки, т.е.:

$$u'(t_n = F(t_n, u(t_n))$$

Заменяем производные конечными разностями. Запишем определение производной в произвольном узле сетки $t_n$:

$$u'(t_n) = \lim_{\tau \to 0} \frac{u(t_n + \tau) - u(t_n)}{\tau}$$

Вместо того, чтобы устремлять шаг сетки к нулю, мы можем использовать малый шаг $\tau$, который даст численное приближение $u'(t_n)$:

$$u'(t_n) \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}$$

Такая аппроксимация известна как разностная производная вперед и имеет первый порядок по $\tau$, то есть $O(\tau)$. Теперь можно использовать аппроксимацию производной. Таким образом получим явный метод Эйлера:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = F(t_n, y^n)$$

Выразим $y^{n+1}$:

$$y^{n+1} = y^n + \tau F(t_n, y^n)$$

При условии, что $y^0 = u_0$, можно находить решения на последующих временных слоях.

### Неявный метод Эйлера

При построении неявного метода Эйлера значение функции $F$ берется на новом временном слое, т.е.

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = F(t_{n+1}, y^{n+1})$$

Таким образом для нахождения приближенного значения искомой функции на новом временном слое $t_{n+1}$ нужно решить нелинейное уравнение относительно $y^{n+1}$:

$$y^{n+1} - \tau F(t_{n+1}, y^{n+1}) - y^n = 0$$

Для решения уравнения можно использовать метод прогонки или метод Ньютона.

### Усовершенствованный метод Эйлера 2-го порядка

Основная идея этого метода: вычисляемое очередное значение $y^{n+1} = y^n + \tau F(t_n, y^n)$ будет точнее, если значение производной, то есть угловой коэффициент прямой замещающей интегральную кривую на отрезке $[t_n, t_{n+1}]$ будет вычисляться не по левому краю (то есь в точке $t_n$), а по центру отрезка $[t_n, t_{n+1}]$.

Но так как значение производной между точками $t_n$ и $t_{n+1}$ не вычисляется, то перейдем к сдвоенным участкам $[t_{n-1}, t_{n+1}]$ центром в которых является точка $t_n$, при этом уравнение прямой получает вид:

$$y = y^{n-1} + f(t_n, y^n)(t - t_{n-1})$$

А формула $y^{n+1} = y^n + \tau F(t_n, y^n)$:

$$y^{n+1} = y^{n-1} + 2\tau F(t_n, y^n)$$

Данная формула применима только для $n \geqslant 1$, следовательно, значени $y^1$ по ней получить нельзя, поэтому $y^n$ находят по методу Эйлера, при этом для получения более точного результата поступают так: сразу по формуле явного метода Эйлера находят значение:

$$y^{\frac{1}{2}} = y^0 + \frac{\tau}{2} F(t_0, y^0)$$

В точке $t_{\frac{1}{2}} = t_0 + \frac{\tau}{2}$, а затем находится $y^1$ по формуле $y^{n+1} = y^{n-1} + 2\tau F(t_n, y^n)$ с шагом $\frac{\tau}{2}$:

$$y^1 = y^0 + \tau F(t_{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}})$$

После того как $y^1$ найдено дальнейшие вычисления при $n = 1, 2, 3, \ldots N$ производится по формуле

$$y^{n+1} = y^{n-1} + 2\tau F(t_n, y^n)$$

Пример: $y^2 = y^0 + 2\tau F(t_1, y^1)$

### Методы Гира

Метод Гира 1-го порядка: $y^n - y^{n-1} = \tau F(t_n, y^n)$

Метод Гира 2-го порядка: $3y^n - 4y^{n-1} + y^{n-2} = 2\tau F(t_n, y^n)$

Метод Гира 3-го порядка: $11y^n - 18y^{n-1} + 9y^{n-2} - 2y^{n-3} = 6\tau F(t_n, y^n)$

Метод Гира 4-го порядка: $25y^n - 48y^{n-1} + 36y^{n-2} - 16y^{n-3} + y^{n-4} = 12\tau F(t_n, y^n)$

Для нахождения неизвестных значений $y^0, y^1, y^2, y^3$ использовался метод Рунге-Кутта 4-го порядка.

## 2. Аналитическое решение и число жесткости

Необходимо решить дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 998y + 1998z \\ \frac{dz}{dt} = -999y - 1999z \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 1, z(0) = 1$

Решение:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 998y + 1998z \\ \frac{dz}{dt} = -999y - 1999z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(t) = 4e^{-t} - 3e^{-1000t} \\ z(t) = -2e^{-t} + 3e^{-1000t} \end{cases} (t >> 1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(t) = 4e^{-t} \\ z(t) = -2e^{-t} \end{cases}$$

**Число жесткости:**

$$A = \begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1000 \Rightarrow$$

Число жесткости равно

$$\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} = 1000$$

## 3. Реализация методов решения ОДУ

Для решения ДУ были использованы такие методы, как явный и неявный методы Эйлера, усовершенственный метод Эйлера, методы Гира 1-го, 2-го и 4-го порядка.

**Реализация данных методов:**

In [1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import optimize
from typing import Callable
import math
```

In [2]:
```
def du(t: list, u: list) -> list:
    return [998 * u[0] + 1998 * u[1], -999 * u[0] - 1999 * u[1]]


def analytical_du(t: list, i: int) -> list:
    return [4 * math.exp(-t[i]) - 3 * math.exp(- 1000 * t[i]),
            - 2 * math.exp(-t[i]) + 3 * math.exp(- 1000 * t[i])]


def runge_kutta(du_: Callable, order: int, tau: float, u: list, t: list) -> list:
    for i in range(order - 1):
        k1 = du_(t[i], u[i])
        k2 = du_(t[i] + tau / 2, u[i] + tau * k1  / 2)
        k3 = du_(t[i] + tau / 2, u[i] + tau * k2  / 2)
        k4 = du_(t[i] + tau, u[i] + tau * k3)
        u[i + 1] = u[i] + tau * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
    return u


def analytical_solution(tau: float, T_size: float, u0=[1, 1]) -> list and list:
    amount_t = int(round(T_size / tau))
    t = np.linspace(0, amount_t * tau, amount_t + 1)
    u = np.zeros((amount_t + 1, len(u0)))
    for i in range(amount_t + 1):
        u[i] = analytical_du(t, i)
    return u, t
def explicity_euler(du: Callable, u0: list, tau: float, T_size: float) -> list and list:
    amount_t = int(round(T_size / tau))
    t = np.linspace(0, amount_t * tau, amount_t + 1)
    u = np.zeros((amount_t + 1, len(u0)))
    u[0] = u0
    for i in range(amount_t):
        du_ = np.asarray(du(t[i], u[i]))
        u[i + 1] = u[i] + tau * du_
    return u, t


def implicity_euler(du: Callable, u0: list, tau: float, T_size: float) -> list and list:
    amount_t = int(round(T_size / tau))
    du_ = lambda t, u: np.asarray(du(t, u))
    t = np.linspace(0, amount_t * tau, amount_t + 1)
    u = np.zeros((amount_t + 1, len(u0)))
    u[0] = u0

    def func(a, t, b):
        return a - tau * du_(t, a) - b

    for i in range(amount_t):
        u[i + 1] = optimize.fsolve(func, u[i], (t[i + 1], u[i]))
    return u, t


def improved_euler(du: Callable, u0: list, tau: float, T_size: float) -> list and list:
    amount_t = int(round(T_size / tau))
    du_ = lambda t, u: np.asarray(du(t, u))
    t = np.linspace(0, amount_t * tau, amount_t + 1)
    u = np.zeros((amount_t + 1, len(u0)))
    u[0] = u0

    for i in range(0, amount_t):
        t_ = t[i] + tau / 2
        u_ = u[i] + tau / 2 * du_(t[i], u[i])
        u[i + 1] = u[i] + tau * du_(t_, u_)
    return u, t
```

```python
def gear_first(du: Callable, u0: list, tau: float, T_size: float) -> list and list:
    u, t = implicity_euler(du, u0=[1, 1], tau=tau, T_size=T_size)
    return u, t


def gear_second(du: Callable, u0: list, tau: float, T_size: float) -> list and list:
    amount_t = int(round(T_size / tau))
    du_ = lambda t, u: np.asarray(du(t, u))
    t = np.linspace(0, amount_t * tau, amount_t + 1)
    u = np.zeros((amount_t + 1, len(u0)))
    u[0] = u0

    u = runge_kutta(du_=du_, order=2, tau=tau, u=u, t=t)

    def func(a, t, b, c):
        return 3 * a - 4 * b + c - 2 * tau * du_(t, a)

    for i in range(amount_t - 1):
        u[i + 2] = optimize.fsolve(func, u[i], (t[i + 2], u[i + 1], u[i]))
    return u, t


def gear_fourth(du: Callable, u0: list, tau: float, T_size: float) -> list and list:
    amount_t = int(round(T_size / tau))
    du_ = lambda t, u: np.asarray(du(t, u))
    t = np.linspace(0, amount_t * tau, amount_t + 1)
    u = np.zeros((amount_t + 1, len(u0)))
    u[0] = u0

    u = runge_kutta(du_=du_, order=4, tau=tau, u=u, t=t)

    def func(a, t, b, c, d, e):
        return 25 * a - 48 * b + 36 * c - 16 * d + e - 12 * tau * du_(t, a)

    for i in range(amount_t - 3):
        u[i + 4] = optimize.fsolve(func, u[i], (t[i + 4], u[i + 3], u[i + 2], u[i + 1], u[i]))
    return u, t


T_size = 0.1
```

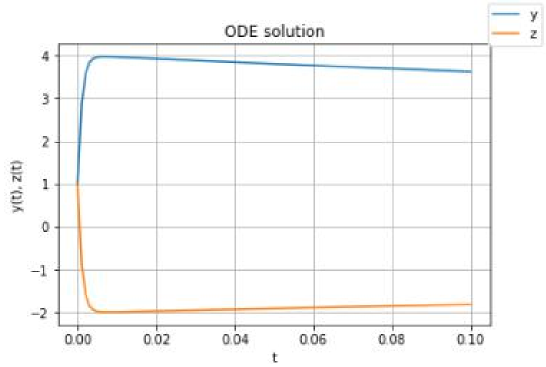
**Функции отрисовки:**

In [3]:
```python
def draw(t: list, u: list):
    fig = plt.figure()
    plt.title('ODE solution')
    plt.ylabel('y(t), z(t)')
    plt.xlabel('t')
    l1 = plt.plot(t, u)
    fig.legend((l1), ('yz'))
    plt.grid(True)
    plt.show()


def draw_analytical_solution():
    u, t = analytical_solution(tau=tau, T_size=T_size, u0=[1, 1])
    draw(t, u)


def draw_explicity_euler():
    u, t = explicity_euler(du, u0=[1, 1], tau=tau, T_size=T_size)
    draw(t, u)


def draw_implicity_euler():
    u, t = implicity_euler(du, u0=[1, 1], tau=tau, T_size=T_size)
    draw(t, u)


def draw_improved_euler():
    u, t = improved_euler(du, u0=[1, 1], tau=tau, T_size=T_size)
    draw(t, u)


def draw_gear_first():
    u, t = gear_first(du, u0=[1, 1], tau=tau, T_size=T_size)
    draw(t, u)


def draw_gear_second():
    u, t = gear_second(du, u0=[1, 1], tau=tau, T_size=T_size)
    draw(t, u)


def draw_gear_fourth():
    u, t = gear_fourth(du, u0=[1, 1], tau=tau, T_size=T_size)
    draw(t, u)
```

## 4. Итоговые результаты

### Аналитическое решение

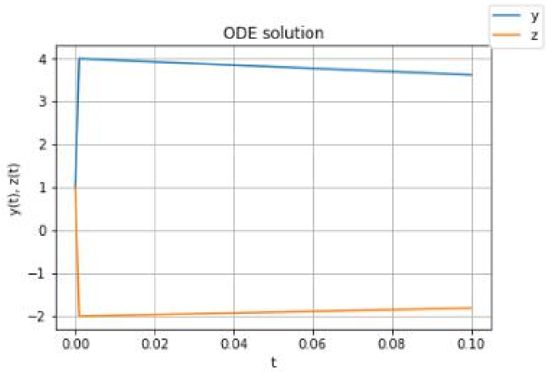
In [4]:
```
tau = 0.001
draw_analytical_solution()
```




### Явный метод Эйлера

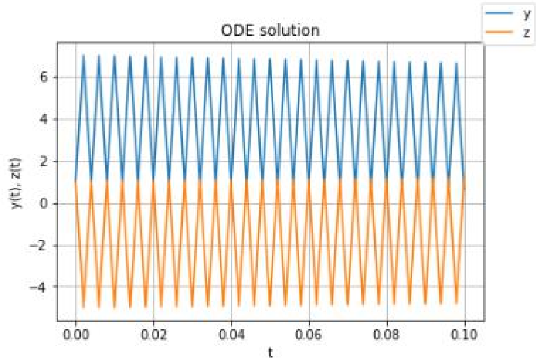
Шаг $\tau = 0.001$:

In [5]:
```
tau = 0.001
draw_explicity_euler()
```



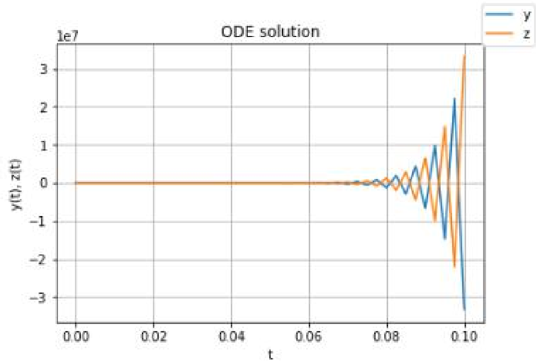
Шаг $\tau = 0.002$:

In [6]:
```
tau = 0.002
draw_explicity_euler()
```




Шаг $\tau = 0.0025$:

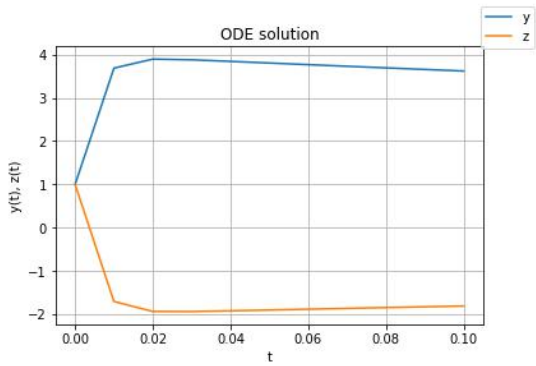
In [7]:
```
tau = 0.0025
draw_explicity_euler()
```




### Неявный метод Эйлера

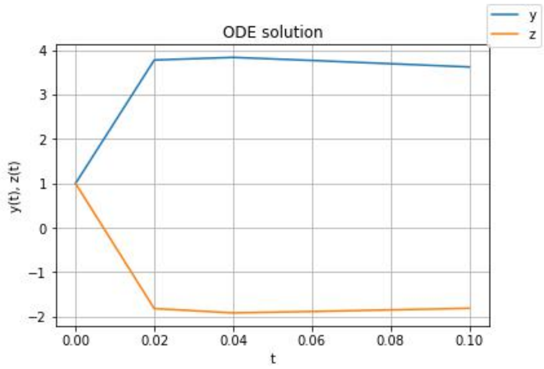
Шаг $\tau = 0.01$:

In [8]:
```
tau = 0.01
draw_implicity_euler()
```



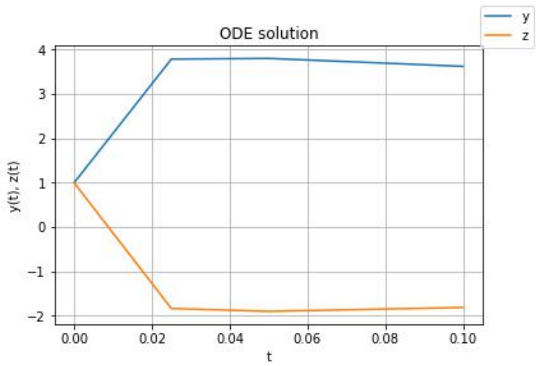
Шаг $\tau = 0.02$:

In [9]:
```
tau = 0.02
draw_implicity_euler()
```




Шаг $\tau = 0.025$:

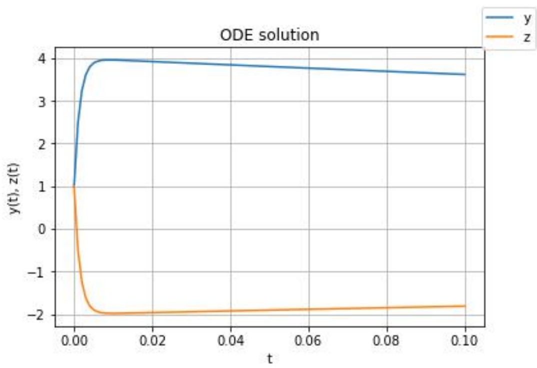
In [10]:
```
tau = 0.025
draw_implicity_euler()
```




### Усовершенствованный метод Эйлера

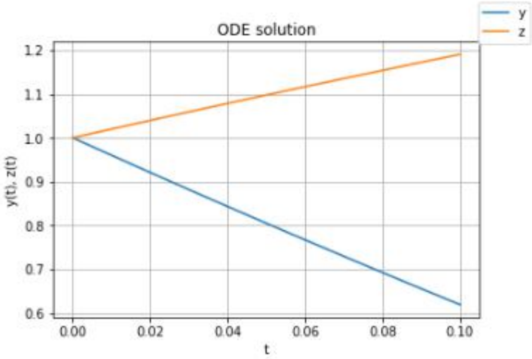
Шаг $\tau = 0.001$:

In [11]:
```
tau = 0.001
draw_improved_euler()
```



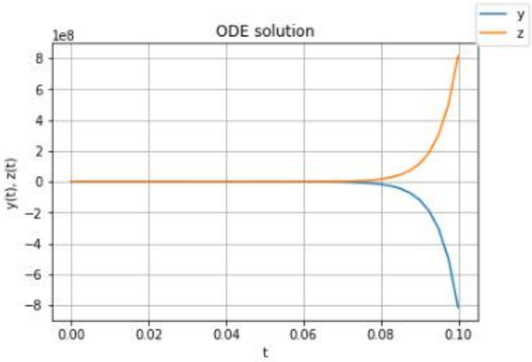
Шаг $\tau = 0.002$:

In [12]:
```
tau = 0.002
draw_improved_euler()
```




Шаг $\tau = 0.0025$:

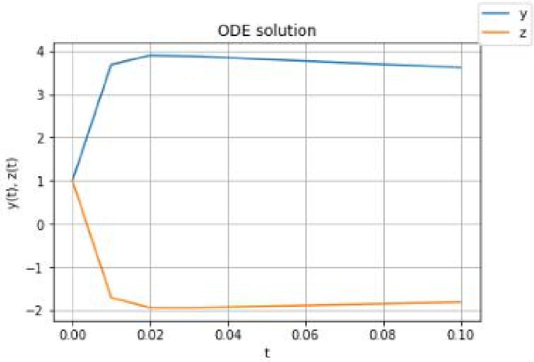
In [13]:
```
tau = 0.0025
draw_improved_euler()
```



### Метод Гира 1-го порядка

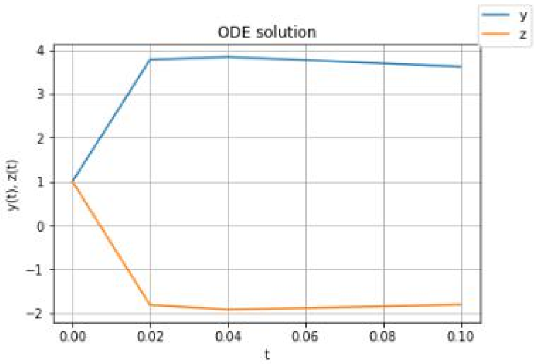
Шаг $\tau = 0.01$

In [14]:
```
tau = 0.01
draw_gear_first()
```




Шаг $\tau = 0.02$

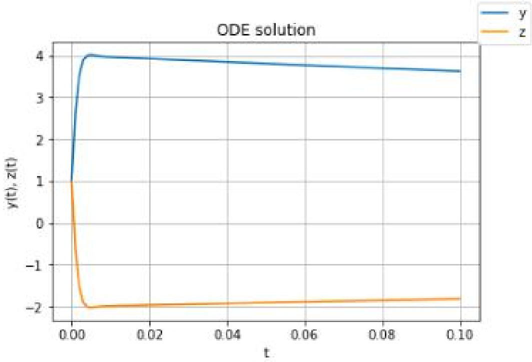
In [15]:
```
tau = 0.02
draw_gear_first()
```



### Метод Гира 2-го порядка

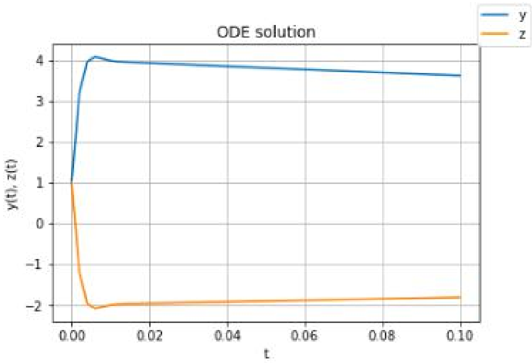
Шаг $\tau = 0.01$

In [50]:
```
tau = 0.01
draw_gear_second()
```




Шаг $\tau = 0.02$

In [51]:
```
tau = 0.02
draw_gear_second()
```




### Метод Гира 4-го порядка

Шаг $\tau = 0.01$

In [52]:
```
tau = 0.01
draw_gear_fourth()
```