УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФПМИ, ФБМФ, ФРКТ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составили:

ст. преподаватель А. Ю. Головко
к. ф.-м. н., доцент М. О. Голубев
д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Петрович
д. ф.-м. н., профессор В. Ж. Сакбаев
к. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Действительные числа. Отношения неравенства между действительными числами. Свойство Архимеда. Плотность множества рациональных чисел во множестве действительных чисел. Теорема о существовании и единственности точной верхней грани (точной нижней грани) числового множества, ограниченного сверху (снизу). Арифметические операции с действительными числами. Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

2. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечно большие последовательности и их свойства.

3. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

4. Предел функции одной переменной. Определения в терминах последовательностей (по Гейне) и в терминах окрестностей (по Коши), их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

5. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

6. Свойства функций, непрерывных на отрезке, — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность и теорема Кантора

7. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции. Свойства показательной функции. Замечательные пределы, следствия из них.

8. Сравнение величин (символы o, O, $\sim$). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.

9. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной

и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.
11. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.
12. Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.
13. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Информация об основной теореме алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.
14. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.
15. Элементы дифференциальной геометрии. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Оценка приращения вектор-функции через производную. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Введение в математический анализ. — Москва : МФТИ, 2017.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1981.
12. *Рудин У.* Основы математического анализа. — Москва : Мир, 1976.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С1)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 06–12 октября)

I. Действительные числа

С1, §3: 1(2); <u>2</u>.

Т.1. Доказать для $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Т.2. Найти сумму $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ для $q \in \mathbb{R}$.

Т.3. Найти суммы:

а) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$;

б)* $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$.

II. Комплексные числа

С1, §5: 4(4); 13(4); 15(2); 18(6); 30(4); 31(2); 32(4, 8).

III. Производная

С1, §13: 32; 75; 117; 149.

Т.4. Найти производную функции (ответ можно не упрощать)

$$y = \left(\frac{\arccos \sqrt{x} + \sin^2(3x - 1)}{5^{x^3} + \ln^2(1 + e^x)} \right)^{x^2 \operatorname{sh} x}.$$

IV. Последовательности. Предел последовательности

С1, §7: 275(4); 276(6); 279(2); 300(3).

С1, §8: 2(2) (по определению); 13(3); 17; 18; 25(1); 27; 28*; 46.

С1, §8: 91; 53(4); 74(3); 7; 71(1); 60 (для всех $a > 0$); 67; 63(4).

С1, §8: 119; 121; 116(2); 117(2); 141(2); 143(3); 147(4); 158; 164(1); 220*; 246(1, 2*,3*).

Т.5. Последовательности a_n и b_n ограничены и расходятся; $c_n = a_n + b_n$.

1. Может ли последовательность c_n сходиться?
2. Пусть последовательность a_n имеет ровно 6 частичных пределов, а последовательность b_n - ровно 3 частичных предела. Может ли в этом случае последовательность c_n: а*) сходиться; б)иметь ровно 3 частичных предела; в*) иметь ровно 2 частичных предела?

V. Функции. Предел функции. Непрерывность

С1, §7: 218(5); 219(3).

С1, §9: 1(1); 8(1); 16; 18; 25(5); 26(2); 27(3); 30(3); 33(3); 35(5); 61.

С1, §10: 5(2) (по определению); 14; 22; 23; 40; 41(1); 42; 46; 47*; 66*; 76.

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §4:** 1(2); 2; Т.1; Т.2; Т.3(а, б*). **С1, §5:** 4(4); 13(4); 15(2); 18(6); 30(4); 31(2); 32(4, 8).
2 неделя	**С1, §13:** 32; 75; 117; 149; Т.4. **С1, §7:** 275(4); 276(6); 279(2); 300(3). **С1, §8:** 2(2); 13(3); 17; 18; 25(1); 27; 28*; 46.
3 неделя	**С1, §8:** 91; 53(4); 74(3); 7; 71(1); 60; 67; 63(4). **С1, §8:** 119; 121; 116(2); 117(2); 141(2); 143(3); 147(4); 158.
4 неделя	**С1, §8:** 164(1); 220*; 246(1, 2*, 3*); Т.5. **С1, §7:** 218(5); 219(3). **С1, §9:** 1(1); 8(1); 16; 18; 25(5); 26(2); 27(3); 30(3).
5 неделя	**С1, §9:** 33(3); 35(5); 61. **С1, §10:** 5(2); 14; 22; 23; 40; 41(1); 42; 46; 47*; 66*; 76.

$\boxed{70 + 7^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 ноября)

I. Дифференцируемость. Дифференциал

С1, §13: <u>197(3)</u>; 201(2); 214(2); <u>173</u>; 179(5).

С1, §14: 10(1).

II. Производные и дифференциалы высших порядков

С1, §15: 1(6); 10(4); 13(2); 14(3); <u>22(2)</u>; 24(5, <u>9</u>, 13); 25(3, 5, <u>10</u>); 26(2, 4*).

III. Теоремы о среднем

С1, §16: <u>5</u>; 15(2); <u>19</u>; <u>33</u>; 31; 20*.

IV. Формула Тейлора

С1, §9: 50; 51.

Т.1. Докажите, что если $f(x) = x \cdot o(x^n)$ при $x \to 0$, то $f(x) = o(x^{n+1})$ при $x \to 0$.

Т.2. Докажите, что если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) \sim h(x)$ при $x \to x_0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to x_0$.

Т.3. При каких $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено $x^2 - 2x + 1 = o(x^2 - 3x + 2)$ при $x \to x_0$?

<u>Т.4</u>. Разложите по формуле Тейлора в точке $x = 0$ с точностью до $o(x^5)$ функцию $(x + x^2 - x^3 + x^4)^3$.

С1, §18: 2(7); 3(2, 5); 4(9); 5(5); 14(4); 20(7); 30(2); 39(4, 7).

Т.5. Представить формулой Маклорена до $o(x^6)$ функции:
а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \arcsin x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

V. Вычисление пределов

С1, §17: 27; 40; 64; 76; 80*.

С1, §19: 7(2); 8(5); 14(5); 21(4); 30(4); 47(1); 58(2)*.

**Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям**

1 неделя	**С1, §13:** 197(3); 201(2); 214(2); 173; 179(5). **С1, §14:** 10(1). **С1, §15:** 1(6); 10(4); 13(2); 14(3); 22(2).
2 неделя	**С1, §15:** 24(5, 9, 13); 25(3, 5, 10); 26(2, 4*). **С1, §16:** 5; 15(2); 19; 33; 31; 20*.
3 неделя	**С1, §9:** 50; 51; Т.1; Т.2; Т.3; Т.4; Т.5. **С1, §18:** 2(7); 3(2, 5); 4(9); 5(5); 14(4); 20(7); 30(2); 39(4, 7).
4 неделя	**С1, §17:** 27; 40; 64; 76; 80*. **С1, §19:** 7(2); 8(6); 14(5); 21(4); 30(4); 47(1); 58(2)*.

$\boxed{50 + 4^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Равномерная непрерывность

С1, §12: 2(1,4); 3(3, 9); 4(4, 8*); 7; 9; 17; 20; 23; 25.

Т.1. Пусть функция f дифференцируема на множестве $I = [a, +\infty)$. Доказать следующие утверждения:

а) если f' ограничена на I, то f равномерно непрерывна на этом множестве;

б) если f' бесконечно большая при $x \to +\infty$, то f не является равномерно непрерывной;

в)* если f' неограничена, но не является бесконечно большой на I, то f может быть, а может и не быть равномерно непрерывной на I (привести примеры).

II. Исследование функций

С1, §20: 2(3); 20(2); 23(8); 35^*; 39(4); 42(2); 49(6); 69(<u>2</u>, 5); $71(4)^*$.

III. Построение графиков функций

С1, §21: 4(4); 5(2); 9(1); 10(2); 12(2, <u>8</u>); 13(9); 15(6); $23(4)^*$; $31(1)^*$.

IV. Элементы дифференциальной геометрии

С1, §24: 48; 51; 78(3); <u>80(2)</u>; 81(3); 109(2); 122(2); 14^*, 118^*.

Рекомендации по решению
третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §12:** 2(1, 4); 3(3, 9); 4(3, 8^*); 7; 9; 17; 20; 23; 25; Т.1(а, б, $в^*$).
2 неделя	**С1, §20:** 2(3); 20(2); 23(8); 35^*; 39(4); 42(2); 49(6); 69(2, 5); $71(4)^*$. **С1, §21:** 4(4); 5(2); 9(1); 10(2); 12(2, 8).
3 неделя	**С1, §21:** 13(9); 15(6); $23(4)^*$; $31(1)^*$. **С1, §24:** 48; 51; 78(3); 80(2); 81(3); 109(2); 122(2); 14^*, 118^*.

$\boxed{35 + 8^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент Б. О. Волков