УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2023 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая геометрия**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФПМИ, ФБМФ, ФРКТ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составили:
к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров
к. ф.-м. н., доцент О. К. Подлипский
к. ф.-м. н., доцент О. Г. Подлипская
к. ф.-м. н., доцент Д. А. Степанов
к. п. н., доцент Д. А. Терёшин
к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 11 апреля 2023 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Направленные отрезки и векторы, линейные операции над ними. Свойства линейных операций. Коллинеарность и компланарность векторов. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь линейной зависимости с коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Действия с векторами в координатах.

2. Определения общей декартовой и прямоугольной (ортонормированной) системы координат. Матрица перехода и ее основное свойство. Изменение координат вектора при замене базиса. Изменение координат точки при переходе к новой системе координат. Формулы перехода от одной прямоугольной системы координат на плоскости к другой.

3. Скалярное произведение и его свойства. Ортогональные проекции. Выражение скалярного произведения в координатах, выражение в ортонормированном базисе. *Матрица Грама*[1]. Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами.

4. Ориентация на плоскости и в пространстве. Смешанное и векторное произведения векторов, их свойства и геометрический смысл. Выражение смешанного и векторного произведений через координаты векторов. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Формула двойного векторного произведения. Биортогональный (взаимный) базис.

5. Алгебраические линии и поверхности, их порядок. Теорема об инвариантности порядка линии на плоскости (поверхности в пространстве) при переходе к новой декартовой системе координат.

6. Векторные и координатные формы уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Условия параллельности (или совпадения), перпендикулярности прямых на плоскости, заданных в координатной форме. *Пучок прямых на плоскости*[2] Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости и в пространстве. Расстояние между двумя прямыми в пространстве.

7. Векторные и координатные формы уравнения плоскости. Условия параллельности (или совпадения) плоскостей, заданных в координатной форме. Расстояние от точки до плоскости в пространстве и расстояние между параллельными плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. *Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых*[3]. *Связка и пучок плоскостей*[4].

---

[1] Для потоков А.Н. Бурмистрова, Д.А. Терёшина и И.А. Чубарова.
[2] Для всех, кроме потоков Д.А. Терёшина и И.А. Чубарова.
[3] Для потоков О.Г. Подлипской и И.А. Чубарова.
[4] Для потока А.Н. Бурмистрова.

8. Алгебраические линии второго порядка на плоскости, их классификация. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Центр линии второго порядка, центральные и нецентральные линии. *Ортогональные инварианты*[5].
9. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. *Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат*[6].
10. *Асимптотические направления и диаметры линий второго порядка.*[7]
11. *Цилиндрические и конические поверхности*[8]. Поверхности вращения. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды и конус второго порядка, их основные свойства. Прямолинейные образующие.
12. Отображения и преобразования плоскости. Произведение (композиция) отображений. Взаимно однозначное отображение, обратное отображение. Линейные преобразования плоскости. Координатное представление линейных преобразований плоскости.
13. Аффинные преобразования плоскости и их основные свойства. Геометрический смысл модуля и знака определителя аффинного преобразования плоскости. Аффинная классификация линий второго порядка. Ортогональные преобразования плоскости и их свойства. Разложение аффинного преобразования плоскости в произведение ортогонального преобразования и двух сжатий. *Понятие о группе преобразований*[9].
14. Алгебраические операции с матрицами. *Элементарные преобразования матриц*[10]. Обратная матрица.
15. Определение детерминанта. Свойства детерминанта. Миноры, алгебраические дополнения. Детерминант произведения матриц. Правило Крамера. Критерий обратимости. Формула для элементов обратной матрицы.

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2018.
2. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. — Москва : МФТИ, 2011, `http://www.umnov.ru`.
3. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : Физматлит, 2005.

[5] Для потока А.Н. Бурмистрова.

[6] Для потоков А.Н. Бурмистрова, Д.А. Терёшина и И.А. Чубарова.

[7] Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.

[8] Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.

[9] Для всех, кроме потока А.Н. Бурмистрова.

[10] Для всех, кроме потока И.А. Чубарова.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : Физматлит, 2014. (Цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные «*», являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября – 05 октября)

I. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

С: $14.4(\underline{2}, 5)$; $14.7(\underline{3}, 5)$; $15.2(3)$; $15.5(1, 2, \underline{8})$; $15.10(4)$; $15.12(6)$; $15.13(2)$.

Т.1. Описать все квадратные матрицы второго порядка, перестановочные с любой другой матрицей второго порядка.

С: $17.2(\underline{5})$.

II. Векторы

С: 1.6; 1.8; $\underline{1.9}$; $1.11(2)$; $1.24(\underline{1}, 2)$; $\underline{1.28(2)}$; $1.30(1, 2)$; 1.35^*; 1.37; 1.50^*.

III. Замена базиса и системы координат

С: $\underline{4.5}$; 4.16; $\underline{4.20}$; 4.25.

IV. Скалярное, векторное и смешанное произведение

С: $2.7(2)$; $2.10(2)$; $\underline{2.21}$; 2.25; $2.27(2)$; 2.30; 2.37; $\underline{3.1(1)}$; $3.8(1, 2)$; 3.11; $\underline{3.12}$; $3.13(1, \underline{2})$; $3.19(1)$; $\underline{3.20}$; $3.26(1, 3)$.

Т.2. Тройка векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ такова, что $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$. Верно ли, что $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$?

Т.3. Решить уравнение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}] = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x}$, считая вектор $\boldsymbol{a}$ известным.

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 14.4(2, 5); 14.7(3, 5); 15.2(3); 15.5(1, 2, 8); 15.10(4); 15.12(6); 15.13(2); Т.1; 17.2(5).
2 неделя	**С:** 1.6; 1.8; 1.9; 1.11(2); 1.24(1, 2); 1.28(2); 1.30(1, 2); 1.35*; 1.37; 1.50*.
3 неделя	**С:** 4.5; 4.16; 4.20; 4.25; 2.7(2); 2.10(2); 2.21; 2.25; 2.27(2); 2.30; 2.37.
4 неделя	**С:** 3.1(1); 3.8(1, 2); 3.11; 3.12; 3.13(1, 2); 3.19(1); 3.20; 3.26(1, 3); Т.2; Т.3.

$47 + 2^*$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 03–09 ноября)

I. Прямая на плоскости

С: 5.4; 5.5; 5.11; 5.19; 5.34(2); 5.36*; 5.54.

II. Плоскость и прямая в пространстве

С: 6.1(1, 3, 5); 6.2(1, 2, 3); 6.8(1); 6.10(1, 4); 6.11(2, 4, 9); 6.15; 6.18(1, 2); 6.20(1); 6.27(2); 6.29(2); 6.41; 6.54(2); 6.60; 6.72(2); 6.80.

III. Линии второго порядка

С: 7.25(4); 7.26(2); 7.27*; 7.38(6); 7.40(2); 7.49(1); 7.54(3); 7.56*; 8.1(2); 8.7(3); 8.9(2); 8.13; 8.24(2); 8.28(3); 8.29(2)*; 9.1(2); 9.3(2); 9.4(1, 7); 9.19(3).

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 5.4; 5.5; 5.11; 5.19; 5.34(2); 5.36*; 5.54; 6.1(1, 3, 5); 6.2(1, 2, 3); 6.8(1); 6.10(1, 4).
2 неделя	**С:** 6.11(2, 4, 9); 6.15; 6.18(1, 2); 6.20(1); 6.27(2); 6.29(2); 6.41; 6.54(2); 6.60; 6.72(2); 6.80.
3 неделя	**С:** 7.25(4); 7.26(2); 7.27*; 7.38(6); 7.40(2); 7.49(1); 7.54(3); 7.56*; 8.1(2); 8.7(3); 8.9(2).
4 неделя	**С:** 8.13; 8.24(2); 8.28(3); 8.29(2)*; 9.1(2); 9.3(2); 9.4(1, 7); 9.19(3).

$46 + 4^*$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Поверхности второго порядка

С: $10.3(\underline{2}, 6)$; $10.7(2)$; $10.9(2)$; $\underline{10.15}$; $\underline{10.37}$; 10.39; 10.41; $10.65(1)$; 10.83.

Т.1*. Доказать, что линия пересечения поверхности второго порядка с плоскостью, которая целиком на ней не лежит, есть алгебраическая линия не выше второго порядка.

II. Аффинные преобразования плоскости

С: $12.28(1, 2^*, 3)$; $9.13(\underline{2}, 4)$; $\underline{12.31}$; $12.40(1)$; $12.42(4)$; $12.43(2)$; $12.53(\underline{2}, 3, \underline{5}, 8)$; $\underline{12.82}$ (для преобразования $12.81(8)$).

III. Определители n-го порядка

С: $14.12(1, 2)$; $14.23(3, 7, \underline{8}, 9, 11, 16)$; $14.24(\underline{1}, 7)$; $14.31(1)^*$.

Т.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти $\det\left(A^{37} - 36 \cdot A^{36} + 35 \cdot A^{35}\right)$.

IV. Операции с матрицами. Обратная матрица

С: $15.11(2, 7)$; $15.22(3)$; $15.24(1)$; $\underline{15.45(1, 2, 5)}$; $\underline{15.48(1, 3, 6)}$; 15.55; $15.65(4)$.

Т.3*. Пусть A и B квадратные вещественные матрицы порядка n. Доказать, что если $AB = BA$, то $\det(A^2 + B^2) \geq 0$. Привести пример некоммутирующих матриц, для которых это утверждение неверно.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** $10.3(2, 6)$; $10.7(2)$; $10.9(2)$; 10.15; 10.37; 10.39; 10.41; $10.65(1)$; 10.83; Т.1*.
2 неделя	**С:** $12.28(1, 2^*, 3)$; $9.13(2, 4)$; 12.31; $12.40(1)$; $12.42(4)$; $12.43(2)$; $12.53(2, 3, 5, 8)$; 12.82 (для преобразования $12.81(8)$).
3 неделя	**С:** $14.12(1, 2)$; $14.23(3, 7, 8, 9, 11, 16)$; $14.24(1, 7)$; $14.31(1)^*$; Т.2.
4 неделя	**С:** $15.11(1, 7)$; $15.22(3)$; $15.24(1)$; $15.45(1, 2, 5)$; $15.48(1, 3, 6)$; 15.55; $15.65(4)$; Т.3*.

$\boxed{46 + 4^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент С. В. Ленюк