14.10. Используя принцип виртуальных перемещений, доказать, что равенство нулю главного вектора **R** и главного момента $\mathbf{M}_O$ сил, действующих на твердое тело, является необходимым и достаточным условием равновесия свободного твердого тела.

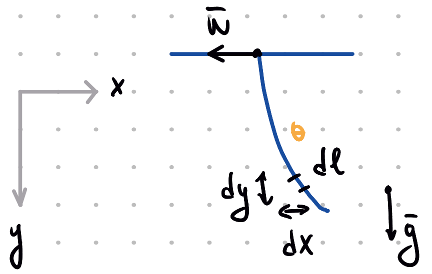
$d\bar f = \bar f\, dm \qquad \bar v = \bar v_0 + \bar\omega \times \bar\rho \;|\cdot dt \;\to\; d\bar r = d\bar r_0 + d\bar\varphi \times \bar\rho$

$$\delta A = \int \bar f \cdot \delta \bar r\, dm = \int \left[\bar f \cdot d\bar r_0 + \bar f\,(d\bar\varphi \times \bar\rho) \right] dm =$$

$$= \bar R\, d\bar r_0 + \int d\bar\varphi\,(\bar\rho \times \bar f)\, dm = \bar R\, d\bar r_0 + \bar M_0\, d\bar\varphi = 0 \quad (\text{ПВП})$$

$$\forall\, d\bar r_0,\, d\bar\varphi \;\to\; \begin{cases} \bar R = \bar 0 \\ \bar M_0 = \bar 0 \end{cases} \qquad \text{н.р.} \Leftrightarrow \forall \text{ в.п. } \delta A = 0$$

14.20. Точка подвеса однородной нити движется с постоянным ускорением **w** вдоль горизонтальной оси Ox. Найти форму нити в положении её относительного равновесия в системе координат Oxy, движущейся поступательно с точкой подвеса O.



$$\delta A = 0 = \delta A_g + \delta A_w \qquad \begin{cases} \delta A_g = \delta_{dx}(-w)\,\frac{dl}{l}\,m \\ \delta A_w = \delta_{dy}(-g)\,\frac{dl}{l}\,m \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx = dl \sin\theta \\ dy = dl \cos\theta \end{cases} \to \begin{cases} \delta_{dx} = dl \cos\theta\, \delta\theta \\ \delta_{dy} = -dl \sin\theta\, \delta\theta \end{cases}$$

$$\delta A = \frac{dl}{l}\, m\,(g \sin\theta - w\cos\theta)\,\delta\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{w}{g}} \quad \boxed{y = \frac{g}{w}\, x}$$ – прямая

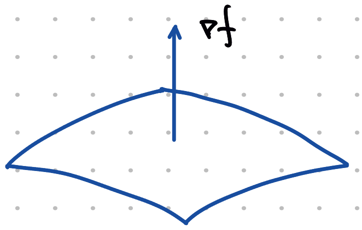
14.29. Материальная точка может двигаться без трения по поверхности $f(x,y,z)=0$ в силовом поле

$$\{F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)\}.$$

Показать, что решение относительно x, y, z, λ системы уравнений

$$F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}=0,\quad f(x,y,z)=0$$

определяет положение равновесия точки и обратно, любому положению равновесия соответствует решение этой системы.



$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (\text{т.к. } f(x,y,z)=0)$$

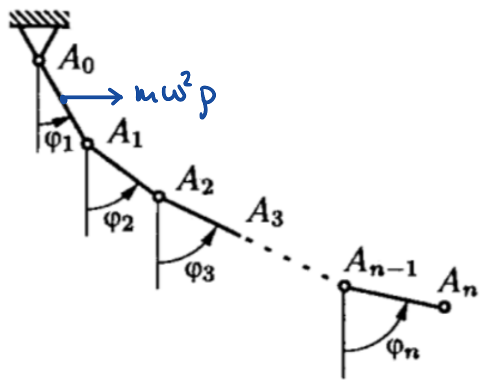
$$\Downarrow$$

$$\nabla f\cdot\delta\bar r = 0 \qquad \delta\bar r = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \qquad \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

ПВП: $0 = \delta A = dT = \frac{1}{2} m v\, dv = \frac{1}{2} m \begin{bmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} dt = \delta\bar r\cdot\bar F = 0$

$\Rightarrow (F+\lambda\nabla f)\,\delta\bar r = 0$ и обратно $(F+\lambda\nabla f) = 0 \Rightarrow F+\nabla f = 0$

14.40. Маятник составлен из n одинаковых стержней массы m и длины L каждый, последовательно соединенных друг с другом шарнирами (n–звенный маятник). Маятник может совершать движение в вертикальной плоскости, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через точку A_0 закрепления конца первого стержня. Составить уравнения, определяющие положения относительного равновесия системы.



К задачам 14.39, 14.40

центробежная сила J_e явл-ся потенциальной

НЕВЕРНОЕ РЕШ-Е

$$П = П_g + П_c \rightarrow П_g = -mg\frac{l}{2}\cos\varphi_1 - mgl\cos\varphi_1 - mg\frac{l}{2}\cos\varphi_2 -$$

$$- mgl\cos\varphi_1 - mgl\cos\varphi_2 - \ldots - mg\frac{l}{2}\cos\varphi_n$$

СМ. ДАЛЬШЕ

$$\Pi_g = -mgl\left[n-1+\frac{1}{2}\right]\cos\varphi_1 - mgl\left[n-2+\frac{1}{2}\right]\cos\varphi_2 - mgl\left[n-k+\frac{1}{2}\right]\cos\varphi_k - \ldots -$$

$$- mg\frac{l}{2}\cos\varphi_n$$

$$\Pi_c = -m\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{l}{2}\sin\varphi_1\right)^2 - m\frac{\omega^2}{2}\left(l\sin\varphi_1 + \frac{l}{2}\sin\varphi_2\right)^2 - \ldots - m\frac{\omega^2}{2}\left(l\sin\varphi_1 + \ldots + \frac{l}{2}\sin\varphi_n\right)^2$$

$$\Pi_{\varphi_k} = 0 \Rightarrow \overbrace{mgl\left[n-k+\frac{1}{2}\right]\sin\varphi_k}^{\Pi^g_{\varphi_k}} + \Pi^c_{\varphi_k}$$

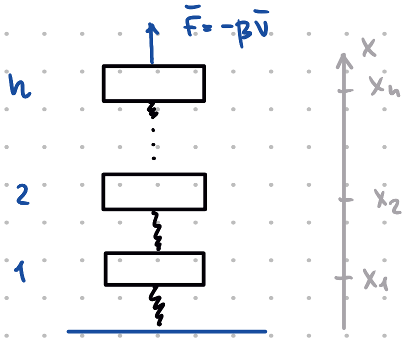
$$\Pi^c_{\varphi_k} = -m\omega^2\left(\cos\varphi_k\left[l\sin\varphi_1 + \ldots + \frac{l}{2}\sin\varphi_k + \ldots + l\sin\varphi_1 + \ldots + l\sin\varphi_k + l/_2\sin\varphi_n\right]\right)$$

$$\underbrace{\varphi_1 \ldots \varphi_{k-1}}_{\sum_{i=1}^{k-1}(n-k)\sin\varphi_i}\ \varphi_k\ \underbrace{\varphi_{k+1} \ldots \varphi_n}_{\sum_{i=k+1}^{n}\left(n-i-\frac{1}{2}\right)\sin\varphi_i} \rightarrow$$

$$\varphi_k \downarrow \ \frac{1}{2}\sin\varphi_k + (n-k)\sin\varphi_k$$

$$\boxed{\left(n-k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi_k = \frac{\omega^2 l}{g}\left(\sum_{i=1}^{k-1}(n-k)\sin\varphi_i + \left(n-k+\frac{1}{2}\right)\sin\varphi_k + \sum_{i=k+1}^{n}\left(n-i-\frac{1}{2}\right)\sin\varphi_i\right)}$$

17.8. Система состоит из n грузов, которые последовательно связаны между собой и с неподвижной опорой пружинами жесткости c_i и могут перемещаться по вертикали. На последний груз m_n действует сила вязкого трения $F = -\beta v$, $\beta > 0$. Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.



$$m_1\ddot{x}_1 = -c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1)$$

$$m_i\ddot{x}_i = c_i(x_{i-1} - x_i) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \qquad (2 \leq i \leq n-1)$$

$$m_n\ddot{x}_n = c_n(x_{n-1} - x_n) - \beta\dot{x}_n$$

$$\forall i \quad m_i\ddot{x}_i = -c_i(x_i - x_{i-1}) + c_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - \beta\dot{x}_n\delta_{in}, \quad x_0 = 0$$

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})^2 \rightarrow \dot{V} = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i\ddot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) =$$

ф-ция Ляпунова в виде полной мех. энергии

подставляем ур-я дв-я

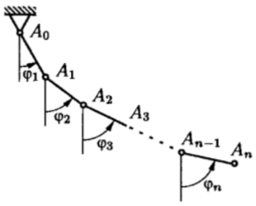
$$= -\beta\dot{x}_n^2 \leq 0 \Rightarrow$$ энергия диссипирует через последний груз

Мн-во, где $\dot{V} = 0$ соотв. $\dot{x}_n = 0$. по Th. Ла-Салле для асимп. уст. необх., чтобы в этом мн-ве сис-ма не имела нетрив. реш-й.

Если $\dot{x}_n = 0 \Rightarrow$ из ур-й дв-я $\ddot{x}_i = 0$. Это возм. только в положении равновесия.

мн-во $\dot{V} = 0$ содержит только пол. равн-я $\Rightarrow$ по теореме К.р. асимпт. уст.

14.40. Маятник составлен из n одинаковых стержней массы m и длины L каждый, последовательно соединенных друг с другом шарнирами (n-звенный маятник). Маятник может совершать движение в вертикальной плоскости, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через точку A_0 закрепления конца первого стержня. Составить уравнения, определяющие положения относительного равновесия системы.



К задачам 14.39, 14.40

$$(\Pi + V)_{\varphi_k} = 0 \to \Pi_{\varphi_k} = mgl\left[n - k + \frac{1}{2}\right]\sin\varphi_k$$

$$T^r = \frac{1}{2} m (v^r)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_k^2$$

$$T^a = \frac{1}{2} m (v^e, v^e) + \frac{1}{2}\bar{\Omega}^T J \bar{\Omega} \qquad \bar{\Omega} = \bar{\omega} + \dot{\bar{\varphi}}$$

$$T^a = \frac{1}{2} m\left[v^{r2} + 2\cancel{(v^r, v^a)}^{\,0} + v^{e2}\right] + \frac{1}{2}\bar{\Omega}^T J \bar{\Omega} \qquad \Omega = \begin{bmatrix} -\omega\cos\varphi_k \\ \omega\sin\varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{bmatrix}$$

$v^r \perp v^e$ — в гл. осях

$$J = \mathrm{diag}\left(0, \frac{ml^2}{12}, \frac{ml^2}{12}\right)$$

обобщ. потенциал

$$V_k = T^r - T^a = -\frac{1}{2} m v^{e2} - \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\omega^2 \sin^2\varphi_k =$$

$$= -\frac{1}{2} m\omega^2 l^2 \left[\left(\sin\varphi_1 + \ldots + \frac{1}{2}\sin\varphi_k\right)^2 + \frac{1}{12}\sin^2\varphi_k\right]$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \to V_{\varphi_k} = -\frac{1}{2} m\omega^2 l^2 \cdot 2\cos\varphi_k \left[\sum_{i=k}^{n}\left(\sin\varphi_1 + \ldots + \frac{1}{2}\sin\varphi_i\right) + \frac{1}{6}\sin\varphi_k\right] =$$

$$= m\omega^2 l^2 \cos\varphi_k [\ \ldots\ ]$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(n - i + \frac{1}{2}\right)\sin\varphi_i - \sum_{i=1}^{k}(k-i)\sin\varphi_i$$

$$(\Pi + V)_{\varphi_k} = 0 \to \boxed{\left(n - k + \frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}\,\varphi_k = \frac{\omega^2 l}{g}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(n - i + \frac{1}{2}\right)\sin\varphi_k + \frac{1}{6}\sin\varphi_k - \sum_{i=1}^{k}\left(k - i + \frac{1}{2}\right)\sin\varphi_i\right]}$$

T1.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^3 + xy^3, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - x^4. \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{4}(x^4 + y^4) \to \dot{V} = \dot{x}x^3 + \dot{y}y^3 = x^3(-x^3 - y^3 + xy^3) + y^3(x^3 - y^3 - x^4) =$$

$$= -x^6 - \cancel{x^3y^3} + \cancel{x^4y^3} + \cancel{x^3y^3} - y^6 - \cancel{x^4y^3} = -x^6 - y^6 \Rightarrow \text{асимпт. уст.}$$

T2.
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + x^3, \\ \dot{y} = x - y - y^3. \end{cases}$$

Первый метод Ляпунова: $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \Leftrightarrow B\dot{q} + Cq = 0$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$

$$f(\lambda) = |B\lambda + C| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 - 1 = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \lambda_1 = -\sqrt{2} \\ \searrow \lambda_2 = +\sqrt{2}, \ \mathrm{Re}\,\lambda_2 > 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ полином НЕ устойчив $\Rightarrow$ положение НЕ устойчиво

T3.
$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$$

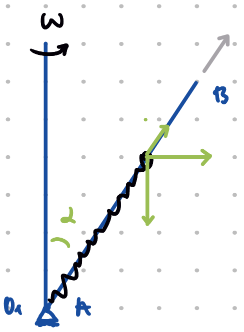
Примечание к задаче Т3 $\qquad c > 0$

Функцию Ляпунова искать в виде $V = (ax + by)^2 + cx^4$.

$$\dot{V} = 2a^2 x\dot{x} + 2ab\dot{x}y + 2abx\dot{y} + 2b^2 y\dot{y} + 4c\dot{x}x^3 = 2a^2xy - 6a^2x^2 - 2a^2x^4 +$$
$$+ 2aby^2 - 6abxy - 2abx^3y + 12abx^2 - 4abxy + 12b^2xy - 4b^2y^2 +$$
$$+ 4cx^3y - 12cx^4 - 4cx^6 = x^2(-\cancel{6a^2 + 12ab}) + xy(2a^2 - \cancel{6ab - 4ab} + 12b^2) +$$
$$\ {\scriptstyle -4b^2}$$
$$+ y^2(\cancel{2ab - 4b^2}) + x^3y(-2ab + 4c) + x^4(-2a^2 - 12c) - 4cx^6 =$$
$$= \{a = 2b\} = \{c = b^2\} = -4cx^6 - 20cx^4 < 0 \Rightarrow \text{асимпт. уст.}$$

15.2. Стержень AB, образующий угол α с вертикалью, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси O_1O_2, проходящей через его конец A. По стержню может двигаться без трения колечко массы m, соединенное с точкой A пружиной жесткости c. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0. Найти положения относительного равновесия колечка и исследовать их устойчивость.

l - расс-е от A до m



$$\Pi = \frac{c}{2}(l - l_0)^2 + mgl\cos\alpha - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\alpha \sim$$
$$\sim \frac{c}{2}l^2 - cll_0 + mgl\cos\alpha - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\alpha =$$
$$= l^2\left(\frac{c}{2} - \frac{1}{2}m\omega^2\sin^2\alpha\right) + l\,(mg\cos\alpha - cl_0)$$

$$\Pi_l = l\left(c - m\omega^2\sin^2\alpha\right) + \left(mg\cos\alpha - cl_0\right) = 0$$

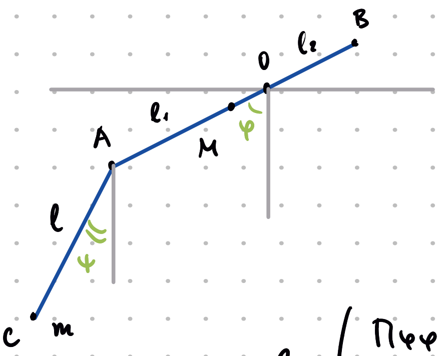
$$\boxed{l = \frac{cl_0 - mg\cos\alpha}{c - m\omega^2\sin^2\alpha}}$$

$\Pi_{ll} = c - m\omega^2\sin^2\alpha$ → $c > m\omega^2\sin^2\alpha$ – уст. по т. Л-Д.

↘ $c < m\omega^2\sin^2\alpha$ – неуст. по т. Ляпунова

при $cl_0 = mg\cos\alpha$ → любое пол. явл. пол. равн.

15.13. Груз массы m подвешен на невесомой нерастяжимой нити длины l к точке A однородного стержня массы M, который может вращаться вокруг своей неподвижной точки O $(AO = l_1,\ OB = l_2)$. Движение происходит в вертикальной плоскости. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.



$$\Pi = -Mg\left(\frac{l_2 - l_1}{2}\right)\cos\varphi - mg\left(l_1\cos\varphi + l\cos\psi\right)$$

$$\Pi_\varphi = Mg\left(\frac{l_2 - l_1}{2}\right)\sin\varphi + mgl_1\sin\varphi = 0 \to \varphi = 0, \pi$$

$$\Pi_\psi = mgl\sin\psi = 0 \to \psi = 0, \pi$$

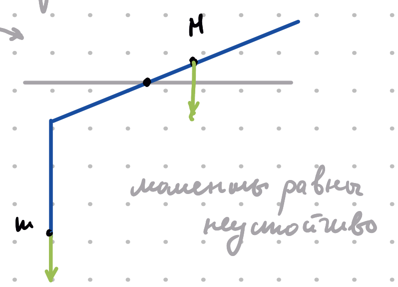
$$C = \begin{pmatrix} \Pi_{\varphi\varphi} & \Pi_{\varphi\psi} \\ \Pi_{\psi\varphi} & \Pi_{\psi\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{M(l_2 - l_1)}{2} + ml_1\right)g\cos\varphi & 0 \\ 0 & mgl\cos\psi \end{pmatrix} \to \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases}$$

1. $\frac{1}{2}M(l_2 - l_1) + ml_1 > 0$: $\begin{cases} \cos\varphi > 0 \to \varphi_1 = 0 \\ \cos\psi > 0 \to \psi_1 = 0 \end{cases}$ ⇒ уст. по т. Л-D

2. $\frac{1}{2}M(l_2 - l_1) + ml_1 < 0$: $\begin{cases} \cos\varphi < 0 \to \varphi_2 = \pi \\ \cos\psi > 0 \to \psi_2 = 0 \end{cases}$ ⇒ уст. по т. Л-Д

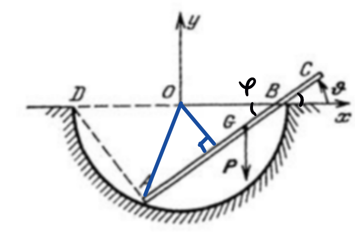
3. $\frac{1}{2}M(l_2 - l_1) + ml_1 = 0$: $\psi_3 = 0$, φ_3 - любое ⇒ неуст.

вот этом случай



моменты равны
неустойчиво

15.26. Тяжёлый однородный стержень длины l и массы m, опираясь на край полусферической чаши радиуса r, нижним концом может скользить по её внутренней гладкой поверхности. Геометрические параметры удовлетворяют условию $r<l<2r$. Определить значение угла наклона θ стержня к линии горизонта в положении равновесия. Исследовать устойчивость положений равновесия.



К задаче 15.26

$AB = 2r\cos\varphi \quad AG = \frac{l}{2} \to GB = AB - AG = 2r\cos\varphi - \frac{l}{2}$

$\Pi = -mg\left(2r\cos\varphi - \frac{l}{2}\right)\sin\varphi \to \Pi_\varphi = -2mgr\cos 2\varphi + \frac{1}{2}mgl\cos\varphi =$

$= -\frac{1}{2}mgr\left(4\cos 2\varphi - \frac{l}{r}\cos\varphi\right) = 0 \to 8\cos^2\varphi - 4 - \frac{l}{r}\cos\varphi = 0$

$8\cos^2\varphi - \frac{l}{r}\cos\varphi - 4 = 0 \to D = \frac{l^2}{r^2} + 128 \to \cos\varphi = \dfrac{\frac{l}{r} \pm \sqrt{\frac{l^2}{r^2}+128}}{16}$

$\Pi_{\varphi\varphi} = 4mgr\sin 2\varphi - \frac{1}{2}mgl\sin\varphi > 0 \to \cos\varphi > \frac{l}{16r}$

$\varphi = \arccos\left(\dfrac{\frac{l}{r} + \sqrt{\frac{l^2}{r^2}+128}}{16}\right)$, уст.

T4. Материальная точка находится в однородном поле тяжести на гладкой поверхности, определяемой уравнением (ось Oz направлена вертикально вверх):

$$z = \sin(x+y) - \cos y.$$

Найдите все положения равновесия материальной точки и исследуйте их устойчивость.

$\Pi = mgz \sim z = \sin(x+y) - \cos y$

$\Pi_x = \cos(x+y) = 0 \to x+y = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\Pi_y = \cos(x+y) + \sin y = 0 \to y = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

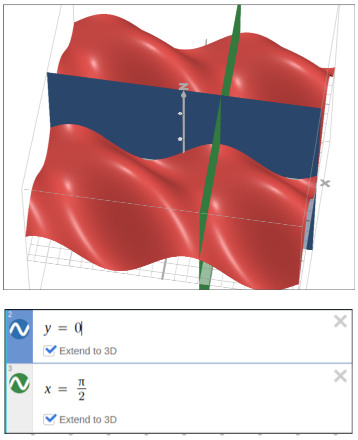
$C = \begin{pmatrix} -\sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin(x+y) + \cos y \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -\sin(x+y) > 0 \to \sin(x+y) < 0 \\ \sin^2(x+y) - \sin(x+y)\cos y - \sin^2(x+y) > 0 \to \end{cases}$

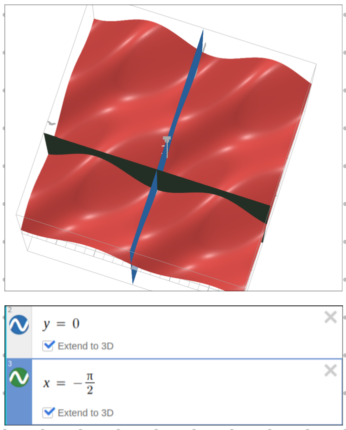
$\to \cos y > 0$

$\begin{cases} \sin(x+y) < 0 \to x+y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \to x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ \cos y > 0 \to y = 2\pi k \qquad y = 2\pi k \end{cases}$

мн-во уст. точек



– седловая точка неуст.



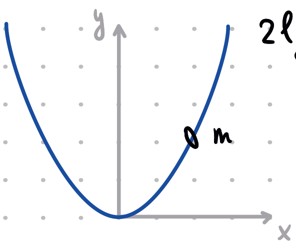
– точка локального минимума уст.

16.6. Показать, что амплитудные векторы $\mathbf{u}_j$ и $\mathbf{u}_k$, соответствующие различным собственным частотам малых колебаний консервативной системы, линейно независимы.

$$u_j^T \cdot \big| \; C u_k = \omega_k^2 A u_k \quad (-)$$
$$u_k^T \cdot \big| \; C u_j = \omega_j^2 A u_j$$
$$\to (\omega_k^2 - \omega_j^2)\, u_k^T A u_j = 0 \xrightarrow{\omega_k \neq \omega_j} u_k^T A u_j = 0$$

⇒ амплитудные векторы ортогональны в метрике матрицы кин. энергии ⇒ векторы ЛНЗ

16.17. Тяжёлое колечко массы m может скользить по гладкой проволочной параболе $2l\,y = x^2$ (ось Oy направлена вертикально вверх). Показать, что период малых колебаний колечка вблизи положения равновесия совпадает с периодом математического маятника длины l.



$2ly = x^2$

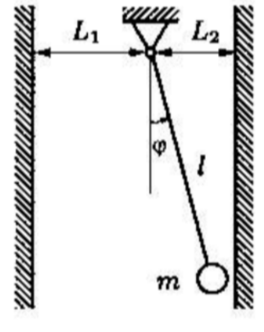
$$\Pi = mgy = \frac{mg}{2l}x^2$$

$$T = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{\dot{x}^2 x^2}{l^2}\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2\left(1 + \frac{x^2}{l^2}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \to \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \to m\ddot{x} + m\frac{g}{l}x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0 \to \omega^2 = \frac{g}{l} \to \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

16.30. Точка подвеса математического маятника массы m и длины l расположена между двумя вертикальными стенками. Расстояния L_1 и L_2 между точкой подвеса маятника и стенками удовлетворяют неравенству $L_1 + L_2 \ll l$. Считая удары массы о стенки абсолютно упругими, найти такое значение $\varphi(0)$, чтобы частота колебаний равнялась $\dfrac{l}{L_1 + L_2}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$, если $\varphi(0) = 0$



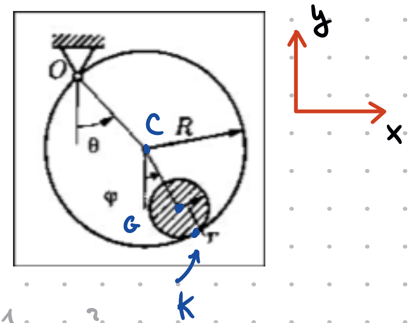
К задаче 16.30

$V = \ell\dot{\varphi}(0)$, т.к $L_1 + L_2 << \ell$, можем считать, что $V = const$?

$$T = \frac{2(L_1+L_2)}{V} = \frac{\cancel{2}(\cancel{L_1+L_2})}{\ell\dot{\varphi}(0)} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\cancel{\ell}}(\cancel{L_1+L_2})\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\boxed{\dot{\varphi}(0) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

16.51. По внутренней поверхности полого цилиндра радиуса R и массы m, который может свободно качаться вокруг горизонтальной образующей O, катится без проскальзывания однородный цилиндр радиуса $r = \frac{R}{4}$ и той же массы. Найти малые колебания системы вблизи устойчивого положения равновесия.



$T = \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}\omega^T J\omega = \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$, $J_c = mR^2$, $J_G = \frac{1}{2}mr^2$

$\Pi_ц = -mgR\cos\theta \approx -mgR\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \sim \frac{1}{2}mgR\theta^2$ $\quad \Pi_о = -mgR\cos\theta - mg(R-r)\cos\varphi =$

$\approx -mgR\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) - mg(R-r)\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \sim \frac{1}{2}mgR\theta^2 + \frac{1}{2}mg(R-r)\varphi^2 =$

$= \frac{1}{2}mgR\theta^2 + \frac{1}{2}mg\frac{3}{4}R\varphi^2$ $\quad \Pi = \Pi_о + \Pi_ц = mgR\theta^2 + \frac{1}{2}mg\frac{3}{4}R\varphi^2$

$T_ц = \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2}J_c\Omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = mR^2\dot{\theta}^2$ Найдём угловую скорость однородного цилиндра

$\bar{V}_G + \bar{\omega} \times \bar{GK} = \bar{V}_c + \bar{\Omega} \times \bar{CK}$, $T_о = \frac{1}{2}mV_G^2 + \frac{1}{2}J_G\omega^2$

$(R\dot{\theta}\cos\theta + (R-r)\dot{\varphi}\cos\varphi)\bar{e}_x + (R\dot{\theta}\sin\theta + (R-r)\dot{\varphi}\sin\varphi)\bar{e}_y +$

$+ \omega(\bar{e}_z \times (r\sin\varphi\,\bar{e}_x + r\cos\varphi\,\bar{e}_y)) = R\dot{\theta}\cos\theta\,\bar{e}_x + R\dot{\theta}\sin\theta\,\bar{e}_y +$

$+ \dot{\theta}(\bar{e}_z \times (R\sin\varphi\,\bar{e}_x - R\cos\varphi\,\bar{e}_y))$

$R\dot{\theta}\sin\theta + (R-r)\dot{\varphi}\sin\varphi + \omega r\sin\varphi = R\dot{\theta}\sin\theta + R\dot{\theta}\sin\varphi$

$$\Rightarrow \omega = \frac{(R\dot{\theta} - (R-r)\dot{\varphi})}{r}$$

$T_о = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta} + (R-r)\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m\cancel{r^2}\cdot\frac{1}{\cancel{r^2}}(R\dot{\theta} - (R-r)\dot{\varphi})^2 =$

$= \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + 2R(R-r)\dot{\theta}\dot{\varphi} + (R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2 - R(R-r)\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2\right) =$

$= \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}R^2\dot{\theta}^2 + R(R-r)\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{3}{2}(R-r)^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}R^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}R^2\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{27}{32}R^2\dot{\varphi}^2\right)$

$$T = T_к + T_б = \frac{1}{2}m\left(\frac{7}{2}R^2\dot\theta^2 + \frac{3}{4}R^2\dot\theta\dot\varphi + \frac{27}{32}R^2\dot\varphi^2\right)$$

$$\Pi = \Pi_б + \Pi_к = mgR\theta^2 + \frac{1}{2}mg\frac{3}{4}R\varphi^2 = \frac{1}{2}m\left(2gR\theta^2 + \frac{3}{4}gR\varphi^2\right)$$

$$C = \begin{bmatrix} 2g & 0 \\ 0 & \frac{3}{4}g \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{7}{2}R & \frac{3}{8}R \\ \frac{3}{8}R & \frac{27}{32}R \end{bmatrix} \rightarrow |\underbrace{C - \omega^2 A}_{X}| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2g - \frac{7}{2}\omega^2 R & -\frac{3}{8}\omega^2 R \\ -\frac{3}{8}\omega^2 R & \frac{3}{4}g - \frac{27}{32}\omega^2 R \end{vmatrix} = \frac{3}{2}g^2 - \frac{27}{16}gR\omega^2 - \frac{21}{8}gR\omega^2 + \frac{7\cdot 27}{64}\omega^4R^2 -$$

$$-\frac{9}{64}\omega^4R^2 = \frac{3}{2}g^2 - \frac{69}{16}gR\omega^2 + \frac{45}{16}\omega^4R^2 = 45\omega^4R^2 - 69gR\omega^2 + 24g^2 = 0$$

$$D = 69^2g^2R^2 - 4\cdot 45\cdot 24g^2R^2 = 441g^2R^2 \rightarrow \sqrt{D} = 21gR \qquad \omega^2 = \frac{69gR \pm 21gR}{90R^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{g}{R} \xrightarrow[R=4r]{} \frac{g}{4r} \\ \frac{8}{15}\frac{g}{R} \rightarrow \frac{2}{15}\frac{g}{r} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \omega_1^2 = \frac{g}{4r} \\ \omega_2^2 = \frac{2}{15}\frac{g}{r} \end{array}$$

$\rightarrow (C - \omega^2 A)u = 0 \rightarrow$ подставляем собств. зн-я и находим u

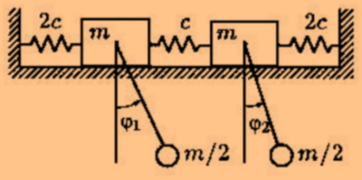
$$\omega_1^2 \rightarrow X: \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}g & -\frac{3}{8}g \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2 \rightarrow X: \begin{pmatrix} \frac{2}{15}g & -\frac{3}{15}g \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\left(C_1\cos\omega_2 t + C_2\sin\omega_2 t\right) + \\ + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}\left(C_3\sin\omega_1 t + C_4\sin\omega_1 t\right) \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{4r}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2g}{15}} \end{array}}$$

С ответом сошлось, хз что такое главные координаты

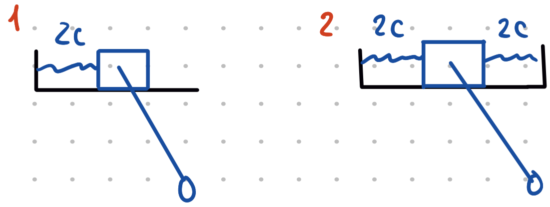
16.70. Два груза массы m каждый, соединенные между собой пружиной жесткости c, а с неподвижными стенками пружинами жесткости $2c$ каждая, могут скользить по гладкой горизонтальной направляющей. К каждому грузу подвешен математический маятник массы $\frac{m}{2}$ и длины l. Используя симметрию системы, найти её малые колебания. При вычислениях положить $2cl = mg$.



К задаче 16.70

1 мода - в синфазе

2 мода - в противофазе



2) $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m(\dot{x}+l\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{4}m(3\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}l + l^2\dot{\varphi}^2)$

$П = 2cx^2 + \frac{mgl}{2}(1-\cos\varphi) \sim 2cx^2 + \frac{1}{4}mgl\varphi^2$ $\quad A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & l/2 \\ l/2 & l^2/2 \end{bmatrix} m$

$c = \frac{1}{2}m\frac{g}{l}$

$C = \begin{bmatrix} 4c & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mgl \end{bmatrix}$ $\quad |C - \lambda A| = 0 \to \begin{vmatrix} 2\frac{g}{l} - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{l}{2}\lambda \\ -\frac{l}{2}\lambda & \frac{gl}{2} - \lambda\frac{l^2}{2} \end{vmatrix} =$

χ_2

$= g^2 - \lambda gl - \frac{3}{4}\lambda gl + \frac{3}{4}\lambda^2 l^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 l^2 = \frac{1}{2}\lambda^2 l^2 - \frac{7}{4}\lambda gl + g^2 = 0 \to \lambda^2 - \frac{7}{2}\lambda\frac{g}{l} + 2\frac{g^2}{l^2} = 0$

$D = \frac{g^2}{l^2}\left(\frac{49}{4} - \frac{32}{4}\right) = \frac{17}{4}\frac{g^2}{l^2} \to \lambda = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}\frac{g}{l}$

1) для этого случая выкладки всё те же, но т.к пружина одна, то вместо $c_{11} = 4c \to c_{11} = 2c$

$\begin{vmatrix} \frac{g}{l} - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{l}{2}\lambda \\ -\frac{l}{2}\lambda & \frac{1}{2}gl - \lambda\frac{l^2}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g^2 - \frac{1}{2}\lambda gl - \frac{3}{4}\lambda gl + \frac{3}{4}\lambda^2 l^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 l^2 = \frac{1}{2}g^2 - \frac{5}{4}\lambda gl + \frac{1}{2}\lambda^2 l^2 = 0$

$\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda\frac{g}{l} + \frac{g^2}{l^2} = 0 \quad D = \left(\frac{25}{4} - \frac{16}{4}\right)\frac{g^2}{l^2} = \frac{9}{4}\frac{g^2}{l^2}$

χ_1

$\lambda = \frac{5 \pm 3}{4}\frac{g}{l} = \left[\begin{array}{l} \frac{g}{2l} \\ \frac{2g}{l} \end{array}\right.$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{g}{2l},\ \omega_2^2 = \frac{2g}{l},\ \omega_{3,4}^2 = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}\frac{g}{l}}$$

$$\omega_1^2 \to X_1: \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{4}\frac{g}{\ell} & -\frac{1}{4}\frac{g}{\ell} \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \to u_1 = \begin{pmatrix} \ell \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_2^2 \to X_1: \quad \begin{vmatrix} -2\frac{g}{\ell} & -\frac{g}{\ell} \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} \to u_2 = \begin{pmatrix} \ell \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \omega_4^2 \to u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2g - 2\ell\omega_4^2}{\ell\omega_4^2} \end{pmatrix}$$

$$\omega_3^2 \to X_2: \quad \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \to u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2g - 2\ell\omega_3^2}{\ell\omega_3^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{2g - 2\ell\,\frac{7+\sqrt{17}}{4}\,\frac{g}{\ell}}{\ell\,\frac{7+\sqrt{17}}{4}\,\frac{g}{\ell}} = \frac{8 - 14 - 2\sqrt{17}}{7+\sqrt{17}}\ell = \frac{(-6-2\sqrt{17})(7-\sqrt{17})\ell}{32} = \frac{-42+6\sqrt{17}-14\sqrt{17}+34}{32}\ell =$$

$$= \frac{-8-8\sqrt{14}}{32}\ell = -\frac{1+\sqrt{14}}{4}\ell\,; \quad \frac{(-6+2\sqrt{17})(7+\sqrt{17})\ell}{32} = \frac{-42-6\sqrt{17}+14\sqrt{17}+32}{32}\ell =$$

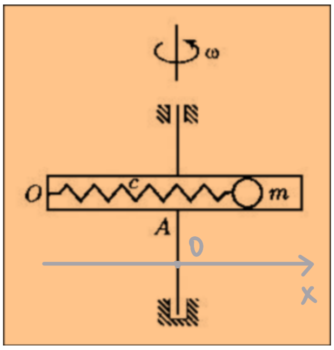
$$= \frac{-1+\sqrt{14}}{4}\ell$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \ell\varphi_1 \\ x_2 \\ \ell\varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 1-\sqrt{17} & -1+\sqrt{17} \\ 1 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & -1+\sqrt{17} & 1-\sqrt{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1\cos\omega_1 t + C_2\sin\omega_1 t \\ C_3\cos\omega_2 t + C_4\sin\omega_2 t \\ C_5\cos\omega_3 t + C_6\sin\omega_3 t \\ C_7\cos\omega_4 t + C_8\sin\omega_4 t \end{bmatrix}$$

т.к в фазе $\begin{pmatrix} x_1 = x_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \end{pmatrix}$ т.к в антифазе $\begin{pmatrix} x_1 = -x_2 \\ \varphi_1 = -\varphi_2 \end{pmatrix}$

C_i $i = \overline{1,8}$ зависят от Н.У.

17.1. Внутри горизонтальной шероховатой трубки (см. рисунок), вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, пересекающей ось трубки, может перемещаться шарик массы m, соединённый с концом трубки O пружиной жесткости c. При недеформированной пружине центр шарика находится на оси вращения. Пренебрегая действием силы тяжести, найти условия, при которых положение относительного равновесия шарика будет асимптотически устойчиво.



$m\ddot{x} = m\omega^2 x - kx \to \ddot{x} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)x = 0 \to \lambda^2 + \mu = 0$

$\mu > 0 \Rightarrow \sim C_1 e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \gamma) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$\mu < 0 \Rightarrow \sim e^{\lambda t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

$\boxed{c - m\omega^2 > 0}$

17.26. Цилиндр, заполненный жидкостью вязкости β (см. рисунок), может скользить без трения по горизонтальной направляющей. В цилиндре находится поршень, который может перемещаться относительно цилиндра. Масса цилиндра с жидкостью и масса поршня соответственно равны M и m. Цилиндр и поршень соединены с неподвижными стенками пружинами жесткости k. Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.

К задаче 17.26

x - коорд. цилиндра
y - смещение поршня отн. цилиндра

цилиндр: $M\ddot{x} = -kx + ky + \beta\dot{y}$ → предположим реш-я в виде:

поршень: $m(\ddot{x} + \ddot{y}) = -ky - \beta\dot{y}$ $x(t) = Xe^{\lambda t}$ $y(t) = Ye^{\lambda t}$

$$\begin{cases} (M\lambda^2 + k)X + (-k - \beta\lambda)Y = 0 \\ m\lambda^2 X + (m\lambda^2 + k + \beta\lambda)Y = 0 \end{cases}$$ → усл-е ∃ нетрив. реш-й →

$$\to f(\lambda) = \begin{vmatrix} M\lambda^2 + k & -k - \beta\lambda \\ m\lambda^2 & m\lambda^2 + k + \beta\lambda \end{vmatrix} = 0 = (M\lambda^2 + k)(m\lambda^2 + k + \beta\lambda) +$$

$$+ m\lambda^2(k + \beta\lambda) \to f(\lambda) = a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad \forall i = \overline{1,5} \Rightarrow a_i > 0$$

по т. Ляпунова н.р. асимпт. уст

17.30. Динамика склерономной системы описывается уравнениями $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$, где матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ положительно определены, а симметричная матрица $\mathbf{B}$ соответствует знакопостоянной квадратичной форме. Доказать, что равновесие системы $\mathbf{q} = 0$ асимптотически устойчиво в том и только в том случае, если $\mathbf{u}_k\mathbf{B}\mathbf{u}_s \neq 0$, $s = \overline{1,n}$, где $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_n$ – амплитудные векторы консервативной системы $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$.

Собственные векторы $u_1, \dots, u_n$ консервативной системы обр. базис, в котором матрицы A и C - - диагональны.

$$U = [u_1, \dots, u_n]^T \to U^T A U = E \quad U^T C U = \Omega^2 = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2)$$

В новых коорд-ах $q = U\theta \to \ddot{\theta} + D\dot{\theta} + \Omega^2\theta = 0$

$D = U^T B U$ Усл-е на диссипацию: D должна быть полож. опр.

Поскольку B - симм. и знакоп., то значит, что D также знакоп.

Если $D_{ss} = u_s^T B u_s \neq 0 \ \forall s \Rightarrow D_{ss} > 0 \Rightarrow D_{ss}$ полож. опр.

$\Rightarrow$ все моды затухают $\Rightarrow$ асимпт. уст.

Обратно, если система асимпт. уст. то $\forall s \to D_{ss} > 0$

$\Rightarrow u_s B u_s \neq 0 \quad \forall s$

T5. Исследуйте на устойчивость все положения равновесия системы при всех значениях параметра a:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + y + x^2, \\ \dot{y} = x + ay + y^2. \end{cases}$$

Ищем стац. точки: $\begin{cases} \dot{x} = 0 = ax + y + x^2 \\ \dot{y} = 0 = x + ay + y^2 \end{cases}$

Из симметрии системы можем предположить симметричные реш-я $x = y \to ax + x + x^2 = 0 \to x(x + (a+1)) = 0 \to x = -(a+1), \ y = -(a+1)$

$\to x = 0, \ y = 0$

Другие не симметричные реш-я: $y = -x^2 - ax$

$\to x - a^2x^2 - ax + x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 = x^4 + 2ax^3 + x^2(a^2 - a) + x(1 - a^2) =$

$= x\,(x+a+1)\left(x^2+(a-1)x+1-a\right)=0$ нас интересует $x^2+(a-1)x+1-a=0$

о чудо, или из симметрии угадали корень

$$D=(a-1)^2-4(1-a)=(a+3)(a-1)\quad \begin{matrix} <0, & -3<a<1 \\ \geq 0, & a\geq 1,\ a\leq -3 \end{matrix}$$

1. $-3<a<1 \to$ 2 т.р. $(0,0)$, $(-(a+1),-(a+1))$
2. $a=1 \to$ 2 т.р. $(0,0)$, $(-2,-2)$

   $a=3 \to$ 2 т.р. $(0,0)$, $(-4,-4)$
3. $\left[\begin{matrix} a>1 \\ a<-3 \end{matrix}\right. \to$ 4 т.р. $(0,0)$, $(-(a+1),-(a+1))$, ...

Исследуем на устойчивость

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+2x & 1 \\ 1 & a+2y \end{bmatrix} \to |J-\lambda E|=0 \quad \begin{vmatrix} a+2x-\lambda & 1 \\ 1 & a+2y-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\lambda^2+[a+2x+a+2y]\lambda+[(a+2x)(a+2y)+1]=f(x,y)=0$$

$$f(0,0)=\lambda^2+2a\lambda+a^2-1=\left(\lambda-(a+1)\right)\left(\lambda-(a-1)\right)=0$$

$\lambda_1=a+1$, $\lambda_2=a-1$ $\to$

1. $a<-1 \to \lambda_1<0,\ \lambda_2<0 \Rightarrow$ устойчивый узел
2. $-1<a<1 \to \lambda_1>0,\ \lambda_2<0 \Rightarrow$ седло
3. $a=-1 \to \lambda_1=0,\ \lambda_2<0$; $a=1 \to \lambda_2=0,\ \lambda_1>0 \Rightarrow$ вырожденный случай

   "бифуркация через нулевое собственное зн-е"
4. $a>1 \to \lambda_1>0,\ \lambda_2>0 \Rightarrow$ неуст. узел

$$f(-(a+1),-(a+1))=\left(\lambda-(-(a+1))\right)\left(\lambda-(-(a+3))\right)=0$$

$\lambda_1=-(a+1)$, $\lambda_2=-(a+3)$ $\Rightarrow$

1. $a>-1 \Rightarrow$ устойчивый узел
2. $-1<a<-3 \Rightarrow$ седло
3. $a=-1$, $a=-3 \Rightarrow$ вырожд. случай
4. $a<-3 \Rightarrow$ неуст. узел

Реш-я кв. ур-я:

по ф-ле Виета: $x+y = 1-a$, $xy = 1-a$

$|J| = (a+2x)(a+2y) - 1 = -[(a+3)(a-1)]$

Поскольку реш-е $\exists$ при $\left[\begin{array}{l} a>1 \\ a<-3 \end{array}\right.$, то $|J| < 0$

$T_J = 1+1 = 2 \Rightarrow T>0$ и $|J|<0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ каждая у точек явл. седлом

след матрицы J

получаем: $a < -3$: $(0,0)$ - уст. узел, $(-(a+1), -(a+1))$ - неуст. узел.
(x_1, y_1), (x_2, y_2) - седло

$a = -3$: $(0,0)$ - уст, $(2,2)$ - вырожд. случай

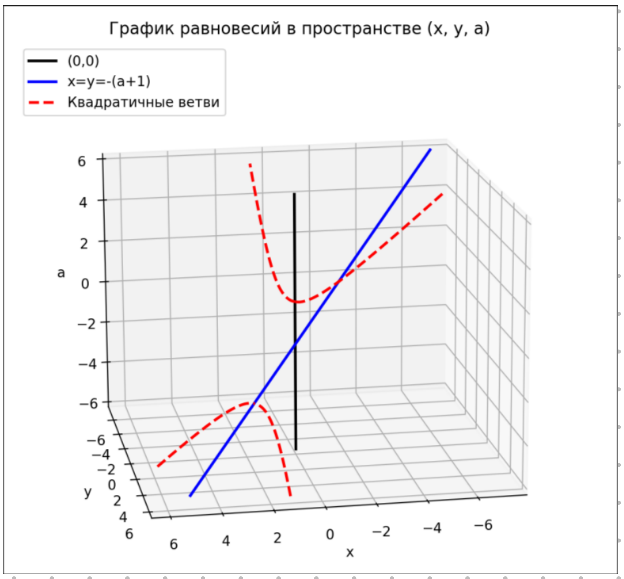
$-3 < a < -1$: $(0,0)$ - уст, $(-(a+1), -(a+1))$ - седло

$a = -1$: $(0,0)$ - вырожд. случай

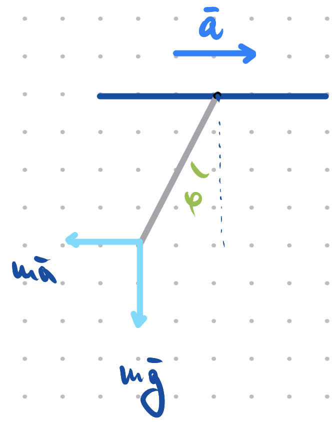
$-1 < a < 1$: $(0,0)$ - седло, $(-(a+1), -(a+1))$ - уст.

$a = 1$: $(0,0)$ - вырожд. случай, $(-2,-2)$ - уст.

$a > 1$: $(0,0)$ - неуст. узел, $(-(a+1), -(a+1))$ - уст.
(x_1, y_1), (x_2, y_2) - седло



18.3. Точка подвеса математического маятника длины l движется по горизонтальной прямой по закону $s=\frac{1}{2}at^2+A\sin(\omega t)$. Найти движение маятника в системе отсчёта, движущейся по закону $s=\frac{1}{2}at^2$. Исследовать случай резонанса.



$\bar g' = \bar g + \bar a$, $g' = \sqrt{g^2+a^2}$, $\Pi = mg'l(1-\cos\varphi) \approx$

$\approx \frac{1}{2}mg'l\varphi^2 \quad T_{\text{отн}} = \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2$

$ml^2\ddot\varphi + mg'l\varphi = mlA\,\omega^2\sin\omega t \quad \ddot\varphi + \frac{g'}{l}\varphi = \frac{A}{l}\omega^2\sin\omega t$

одн.: $\ddot\varphi + \frac{g'}{l}\varphi = 0 \rightarrow \varphi_o = C\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, $\omega_0^2 = \frac{\sqrt{a^2+g^2}}{l}$

$D = -\omega^2\frac{1}{2}ml^2 + \frac{1}{2}mg'l = \frac{1}{2}ml^2(\omega_0^2-\omega^2) \sim \omega_0^2-\omega^2$

$W = \frac{1}{D} = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}$, $\psi = \arg W = 0$

$\varphi_2 = \frac{1}{|\omega_0^2-\omega^2|}\cdot\frac{A}{l}\omega^2\sin\omega t \Rightarrow \varphi = C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t + \frac{\omega^2}{|\omega_0^2-\omega^2|}\frac{A}{l}\sin\omega t$

$\varphi(0) = \varphi_0: \quad C_1 = \varphi_0$

$\dot\varphi(0) = \dot\varphi_0: \quad C_2 = \frac{\dot\varphi_0}{\omega_0} - \frac{\omega^3}{\omega_0|\omega_0^2-\omega^2|}\frac{A}{l}$

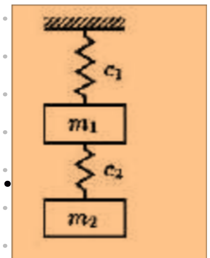
$$\boxed{\varphi = \varphi_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot\varphi_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{\omega^2}{\omega_0|\omega_0^2-\omega^2|}\cdot\frac{A}{l}(\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t)}$$

Резонанс: $\lim\limits_{\omega\to\omega_0}\frac{\omega^2}{\omega_0|\omega_0^2-\omega^2|}(\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t) = \lim\limits_{\omega\to\omega_0} -\frac{\omega^2}{2\omega_0\omega}(\omega_0 t\cos\omega t -$

$-\omega\sin\omega_0 t) = \frac{1}{2}(\omega_0\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t)$

При $\omega\to\omega_0$: $\boxed{\varphi = \varphi_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot\varphi_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{A}{2l}(\omega_0\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t)}$

18.25. Массы m_1 и m_2, последовательно подвешенные на невесомых пружинах жёсткости c_1 и c_2, могут двигаться по вертикали. К массе m_1 приложена вертикальная сила $F(t) = a\sin(pt)$. При заданных c_1, m_1 и p найти начальные условия системы и значения параметров c_2 и m_2, при которых амплитуда вынужденных колебаний массы m_1 равна нулю (успокоитель колебаний без трения).



К задаче 18.25

18.26. Решить предыдущую задачу, считая, что на массу m_1 действует также сила сопротивления $F = -\beta v_1$.

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \qquad \Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) x_1^2 - c_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2$$

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$D = -p^2 A + pB + C = \begin{bmatrix} -p^2 m_1 - \beta p + c_1 + c_2 & c_2 \\ -c_2 & c_1 + c_2 - p^2 m_1 - \beta p \end{bmatrix}$$

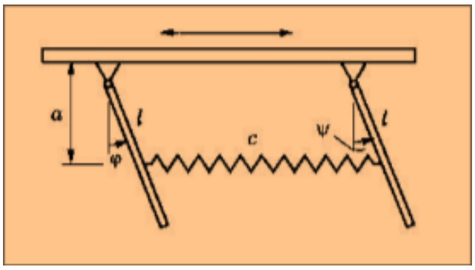
$$W = D^{-1} = \frac{1}{\det D} \begin{bmatrix} c_2 - p^2 m_2 & c_2 \\ c_2 & c_1 + c_2 - p^2 m_1 - \beta p \end{bmatrix} \qquad \exists\, p_0 = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$$

$$\det D(\omega_0) = \begin{vmatrix} -p_0^2 m_1 - \beta_1 p_0 + c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & 0 \end{vmatrix} = -c_2^2 \neq 0$$

$W_{11}(p_0) = 0$ – антирезонанс (m_1 покоится)

$$\boxed{c_2 - p^2 m_2 = 0}$$

18.37. Два одинаковых однородных стержня длины l и массы m каждый подвешены своими концами к горизонтальной опоре. Стержни соединены пружиной жесткости c. Расстояние между точкой подвеса и точкой крепления пружины для каждого стержня равно a, длина пружины в ненапряженном состоянии равна расстоянию между точками подвеса стержней. Опора совершает горизонтальные колебания по закону $A\sin(pt)$. Считая углы отклонения стержней от вертикали малыми, найти движение системы.



18.38. При каких частотах p возможен резонанс в системе, описанной в предыдущей задаче?

$A\ddot{q} + Cq = Q \to q = U\theta \to \quad AU\ddot{\theta} + CU\theta = Q \to U^T A U \ddot{\theta} + U^T C U \theta = U^T Q$

$U^T A U = E \quad U^T C U = \Omega = \mathrm{diag}\{\omega_k^2\} \to \ddot{\theta} + \Omega\theta = Q$

$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) \to A = \frac{1}{3} ml^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ из сообр. симметрии

находим собственные вектора: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

нормировка — фаза — противофаза

$U = \sqrt{\frac{3}{ml^2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_1 = Q_2 = mlAp^2 \sin pt \to Q = Q_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U^T Q \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ проекция только на u_1

в фазе: $\Pi_1 = \frac{1}{2} mgl (1-\cos\varphi) \approx \frac{1}{4} mgl\varphi_1^2, \quad T_1 = \frac{1}{6} ml\dot{\varphi}_1^2 \to$

$\to \frac{1}{3} ml\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} mgl = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ при $\boxed{p = \sqrt{\frac{3g}{2l}}}$ — резонанс

18.43. Для каждой координаты от указанного внешнего воздействия найти и построить графически на комплексной плоскости амплитудно-фазовую характеристику системы, заданной уравнениями динамики:

д) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x + y = A\sin(\omega t), \quad \ddot{y} + \dot{y} + y - x = 0;$

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x + y = A\sin\omega t \\ \ddot{y} + \dot{y} + y - x = 0 \end{cases} \to A = E,\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = -\omega^2 A + i\omega B + C = \begin{pmatrix} -\omega^2 + 2i\omega + 1 & 1 \\ -1 & -\omega^2 + i\omega + 1 \end{pmatrix}$$

$$W = D^{-1} = \frac{1}{\det D}\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2i\omega + 1 & 1 \\ -1 & -\omega^2 + i\omega + 1 \end{pmatrix}$$

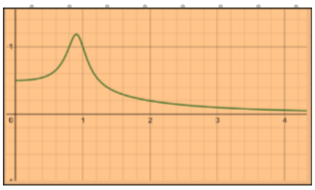
$$\det D = (-\omega^2 + 2i\omega + 1)(-\omega^2 + i\omega + 1) + 1 = \omega^4 - 3i\omega^3 - 4\omega^2 + 3i\omega + 2$$

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Ae^{i\omega t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{pmatrix} e^{i\omega t} A$$

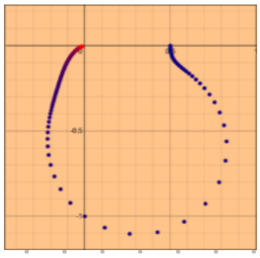
$$W_{11}=\frac{-\omega^2+i\omega+1}{(\omega^4-4\omega^2+2)+i(3\omega-3\omega)^3}=\frac{(-\omega^6+2\omega^4+3\omega^2+2)+i(-2\omega^5+2\omega^3-\omega)}{(\omega^4-4\omega^2+2)^2+(3\omega-3\omega^3)^2}$$

$$R_{11}=\frac{\sqrt{(-\omega^6+2\omega^4-3\omega^2+2)^2+(2\omega^5-2\omega^3+\omega)^2}}{(\omega^4-4\omega^2+2)^2+(3\omega-3\omega^3)^2}$$

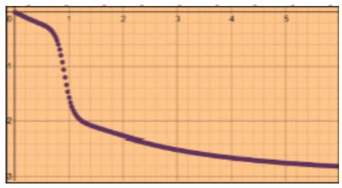
$$\Psi_{11}=\arg\left[(-\omega^6+2\omega^4+3\omega^2+2)+i(-2\omega^5+2\omega^3-\omega)\right]$$



АЧХ



АФХ

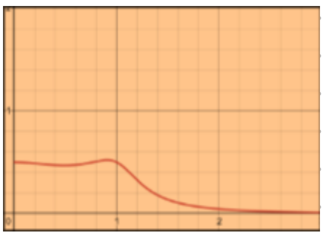


ФЧХ

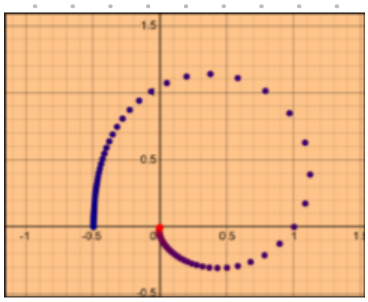
$$W_{21}=-\frac{(\omega^4-4\omega^2+2)+i(3\omega^3-3\omega)}{(\omega^4-4\omega^2+2)^2+(3\omega-3\omega^3)^2}$$

$$\Psi_{21}=-\arg\left[(\omega^4-4\omega^2+2)+i(3\omega^2-3\omega)\right]$$

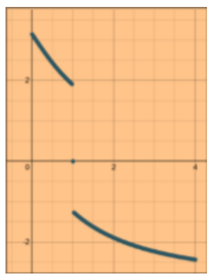
$$R_{21}=\frac{1}{\sqrt{(\omega^4-4\omega^2+2)^2+(3\omega-3\omega^3)^2}}$$



АЧХ



АФХ



ФЧХ

16.30. Точка подвеса математического маятника массы m и длины l расположена между двумя вертикальными стенками. Расстояния L_1 и L_2 между точкой подвеса маятника и стенками удовлетворяют неравенству $L_1+L_2 \ll l$. Считая удары массы о стенки абсолютно упругими, найти такое значение $\varphi(0)$, чтобы частота колебаний равнялась $\dfrac{l}{L_1+L_2}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$, если $\varphi(0)=0$

Уберём стенки, тогда: $\varphi = A\sin\omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ $\rightarrow$ $\dot\varphi = A\omega\cos\omega_0 t$ $\rightarrow$ $A = \frac{\dot\varphi(0)}{\omega_0}$

$\exists$ φ_1 – угол, соотв. смещ. на L_1, $\sin\varphi_1 = \frac{L_1}{\ell} \approx \varphi_1$ $\rightarrow$ $\varphi_1 = A\sin\omega_0 t_1$ $\rightarrow$

$$\omega_0 t_1 = \arcsin\frac{\varphi_1}{A} \approx \frac{\varphi_1}{A}, \quad \omega_0 t_2 = \pi - \arcsin\frac{\varphi_1}{A} \approx \pi - \frac{\varphi_1}{A} \rightarrow \Delta t_1 = \frac{t_1 - t_2}{\omega_0} = \frac{\pi - 2\frac{\varphi_1}{A}}{\omega_0} =$$

$$= \frac{\pi}{\omega_0} - 2\frac{L_1}{\ell}\cdot\frac{1}{\dot\varphi(0)}$$

аналогично для φ_2, $\varphi_2 \rightarrow L_2$

т.е. со стенками имеем $T = \frac{2\pi}{\omega_0} - \Delta t_1 - \Delta t_2 = 2\frac{L_1 + L_2}{\ell\,\dot\varphi(0)} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{L_1 + L_2}{\ell} \overset{\text{конст.}}{\cdot} \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\boxed{\dot\varphi(0) = \frac{\omega_0}{\pi} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$