

# Задание 1

Научнов В.

## ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября – 04 октября)

### I. Комплексные числа

§1: ~~1(2, 4); 2(2, 3, 4); 3(4); 4(2); 5(4); 6; 7(3); 9(3,4); 10(7, 9); 18\*~~.

### II. Элементарные функции. Функциональные ряды

§3: ~~8(1, 2, 4); 9(3, 4, 8); 11(1, 2, 3, 4); 12(1, 2); 13(1, 3); 14(1, 4); 17(1, 4, 8); 19(3)~~.

§4: ~~6(4)~~.

### III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

§5: ~~1(2, 4, 6); 6(2, 5); 7(1, 6); 13(1, 2); 17(3, 6)~~.

### IV. Ряд Тейлора

§7: ~~4; 5\*; 6(5); 11(1, 4); 12(1)~~.

### V. Теорема единственности

§9: ~~2(1, 2, 5, 11, 12); 13(5, 8)~~.

1\*. Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G$ . Пусть существует натуральное число  $n$  такое, что для всех  $z \in G$  выполнено  $f^{(n)}(z) = 0$ . Доказать, что  $f$  – многочлен степени меньше  $n$ .

2\*. Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G$ , и для любого  $z \in G$  существует натуральное число  $n$  такое, что  $f^{(n)}(z) = 0$ . Верно ли, что  $f(z)$  – многочлен?

3. Пусть функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , гармонические в области  $D$ , совпадают в ней в окрестности некоторой точки  $(x_0, y_0) \in D$ . Доказать, что эти функции тождественно равны друг другу в области  $D$ .

4. Пусть функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , гармонические в области  $D$ , совпадают в ней на бесконечном множестве точек  $E$ , имеющем предельную точку в  $D$ . Верно ли, что эти функции тождественно равны друг другу в области  $D$ ?

### VI. Ряд Лорана

§11: ~~1(6); 2(1, 4, 6); 3(1, 6); 4(4); 5(4); 7(3); 8(6); 9(2); 10(6)~~.

5. Доказать, что если четная функция регулярна в кольце с центром в точке  $z = 0$ , то ее разложение в этом кольце в ряд Лорана не содержит нечетных степеней.

## 5. Комплексные числа:

№ 1:

$$N_1(2, 4)$$

$$(1+2i)(1-2i) = 1+4$$

1. Вычислить:

$$1) \cancel{(1+2i)(2-i)} + \cancel{(1-2i)(2+i)}; \quad 2) \frac{5}{1+2i} + \frac{5}{2-i};$$

$$3) \cancel{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3}; \quad 4) \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}.$$

$$2) \frac{5}{1+2i} + \frac{5}{2-i} = 5\left(\frac{1-2i}{5} + \frac{2+i}{5}\right) = 3-i$$

$$4) \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2} = \frac{(-3+4i)}{(-9+46i)} + \frac{(2+2i)}{(3+4i)} = \frac{-1+6i}{-12+42i}$$

$$= -\frac{1}{318} (-44+5i)$$

$$N_2(2, 3, 4)$$

$$4) \frac{22}{159} - \frac{5}{318} i.$$

2. Записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число  $z$ :

$$1) \cancel{z = 1+i^{101}}; \quad 2) z = (-3+4i)^3;$$

$$3) z = 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}; \quad 4) z = \frac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}.$$

$$2) z = (-3+4i)^3 = \left[ 5 \left( -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \right) \right]^3$$

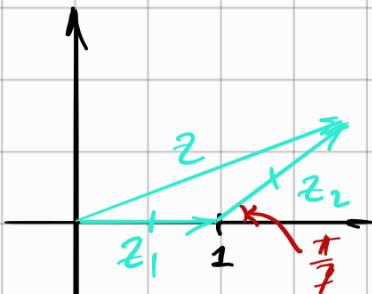
$$\phi = \pi - \arctg \left( \frac{4}{3} \right)$$

$\Rightarrow$

$$z = 125 \left( \cos 3\phi + i \sin 3\phi \right) = 125 \cdot e^{3i\phi}$$

$$3) z = \underbrace{1 + \cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14}}_{z_1} + \underbrace{i \sin \frac{\pi}{14}}_{z_2}; \quad \rho = \frac{\pi}{14} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{14}$$

$$r = 2 \cos \frac{\pi}{14}$$



$$\Rightarrow z = 2 \cos \frac{\pi}{14} \left( \cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14} \right)$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{14} \cdot e^{i \frac{\pi}{14}}$$

$\sqrt{4}$

$$z = \frac{(1+i)^9}{(1-\sqrt{3}i)^6} = \frac{(\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^9}{(2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}})^6} = 2^{\frac{9}{2}-6} \cdot e^{i\left(\frac{9}{4}\pi + \frac{6}{3}\pi\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{-3}{2}} \cdot \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2) 125(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi) = 125e^{i3\varphi}; \quad \varphi = \pi - \arctg \frac{4}{3}$$

$$3) 2 \cos \frac{\pi}{14} \left( \cos \frac{\pi}{14} + i \sin \frac{\pi}{14} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{14} e^{i\pi/14};$$

$$4) \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\pi/4}.$$

3. Найти все корни уравнения:

$$4) |z|^2 - 2iz + 2i = 0.$$

$$|z|^2 - 2iz + 2i = 0$$

$$|x+iy|^2 - 2i(x+iy) + 2i = 0$$

$$(x^2+y^2) + 2y - 2xi + 2i = 0$$

$$\operatorname{Re}[(x^2+y^2) + 2y - 2xi + 2i] = 0$$

$$\rightarrow \operatorname{Re}[x^2+y^2 + 2y] = 0$$

$$\operatorname{Im}[(x^2+y^2) + 2y - 2xi + 2i] = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}[-2xi + 2i] = 0 \rightarrow -2x + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y = 0 \\ -2x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z = 1 - i$$

$$; 4) z = 1 - i.$$

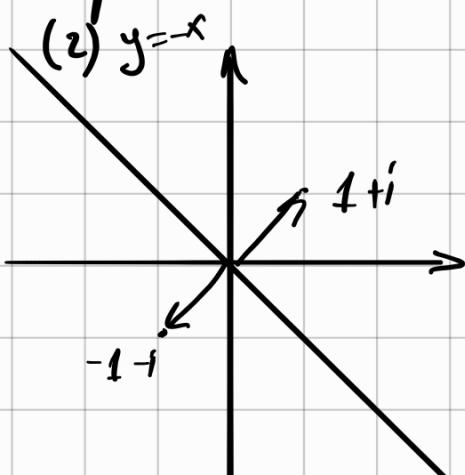
$\sqrt[4]{z}$

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{array}{l} 1) \left\{ \begin{array}{l} |z - 2i| = |z| \\ |z - i| = |z - 1| \end{array} \right. \\ 2) \left\{ \begin{array}{l} |z^2 - 2i| = 4, \\ |z + 1 + i| = |z - 1 - i|. \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{cases} |z^2 - 2i| = 4 & (1) \\ |z + 1 + i| = |z - 1 - i| & (2) \end{cases}$$

Числительные из (2):



$$\Rightarrow z: x(1-i)$$

подставляем в (1):

$$|x^2(1-i)^2 - 2i| = 4$$

$$|x^2(1-2i-i^2) - 2i| = 4$$

$$\Rightarrow |x^2(-2i) - 2i| = 4 \Rightarrow \underbrace{|-2i|}_{2} / |x^2 + 1| = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow z_1 = 1 - i \\ z_2 = -1 + i$$

$$2) z_1 = 1 - i; z_2 = -1 + i.$$

$1$        $i^{2\pi/4}$

$$\sqrt[5]{4}$$

5. Решить уравнение:

1)  $z^2 = 1+i$   
2)  $z^6 = 1+i$   
4)  $z^8 = 1+i$ .

$$z^8 = 1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_k = \sqrt[16]{2} \cdot e^{i\frac{1}{8}( \frac{\pi}{4} + 2\pi k)}$$

$$= \sqrt[16]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{32}(8k+1)}, k = 0..7$$

4)  $z_k = \sqrt[16]{2} e^{i(8k+1)\pi/32}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$

$$\sqrt[6]{6}$$

6. Пусть  $z = z_0$  — корень многочлена  $P(z)$  с действительными коэффициентами. Доказать, что  $P(\bar{z}_0) = 0$ , т. е.  $\bar{z}_0$  — корень многочлена  $P(z)$ .

□ Пусть  $\bar{z}_0 = \text{не корень} \Rightarrow P(\bar{z}_0) \neq 0$ ;  $P$ -полином степени  $n$

представим  $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^n$ ;  $a_i \in \mathbb{R}$

$$\text{тогда } P(\bar{z}_0) = \sum_{i=0}^n a_i (\bar{z}_0)^i \quad \text{□}$$

$$\text{если } z = re^{i\varphi} \text{ то } \bar{z}_0 = r e^{-i\varphi} \Rightarrow (\bar{z}_0)^n = r^n \cdot e^{-n\varphi} \\ = \frac{1}{(\bar{z}_0^n)}$$

$$\text{□} \quad \sum_{i=0}^n a_i (\bar{z}_0^n) = \sum_{i=0}^n \overline{a_i z_0^n} = \sum_{i=0}^n \overline{a_i} \bar{z}_0^i \\ = \overline{\sum_{i=0}^n a_i z_0^i} = \overline{P(z_0)} = 0$$



✓ 4(3)

7. Пусть  $z_1$  и  $z_2$  — фиксированные точки комплексной плоскости. Дать геометрическое описание множества всех точек  $z$ , удовлетворяющих уравнению:

3)  $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ , где  $a > \frac{1}{2} |z_2 - z_1|$ ;



Эллипс, с фокусами  $z_1$  и  $z_2$ ,  $a = \text{большая полуось}$

точка  $z = 1$ .

3) Эллипс с фокусами в точках  $z_1$  и  $z_2$  и с большой полуосью, равной  $a$ .

✓ 5(3,4)

$z_2 \quad z_1 \quad z_2 \quad z_1$

9. Выяснить, какая линия на плоскости задается уравнением:

3)  $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$ ;      4)  $\operatorname{Re} \frac{z-a}{z+a} = 0$  ( $a > 0$ ).

3)  $\operatorname{Im} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] = 0$ , пусть  $t = z+1$ ;  $z \neq -1$

$$\operatorname{Im} \left[ \frac{t-2}{t} \right] = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} \left[ \frac{(t-2)\bar{t}}{|t|^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|t|^2} \cdot \operatorname{Im}[(t-2)F] = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}[t(t-2)] = 0$$

ngmnb  $t = x+iy$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}[(x-2)+iy)(x-iy)] = 0$$

$$\operatorname{Im}[iy \cdot x - (x-2)iy] = 0 \Rightarrow xy - xy + 2y = 0 \\ y = 0$$

$t \neq 0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$4) \operatorname{Re}\left[\frac{z-a}{z+a}\right] = 0 \quad ; a > 0 \quad u \quad z \neq -a$$

ngmnb  $t = z+a$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{t-2a}{t}\right] = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\left[\frac{(t-2a) \cdot \bar{t}}{|t|^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|t|^2} \operatorname{Re}[(t-2a)\bar{t}] = 0$$

$$\text{ngmnb } t = x+iy \Rightarrow \operatorname{Re}[(x-2a)+iy)(x-iy)] = 0$$

$$(x-2a)x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \quad \text{gndt}$$

$$\Rightarrow \text{гнд } z: \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(f-a) = x-a$$

$$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z = y$$

$$\Rightarrow \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = a^2; \text{ где } z = \tilde{x} + i \tilde{y}$$

окружность с центром  $b z=0$

и радиусом  $a$ , кроме  $z = -a$

3) Действительная ось.

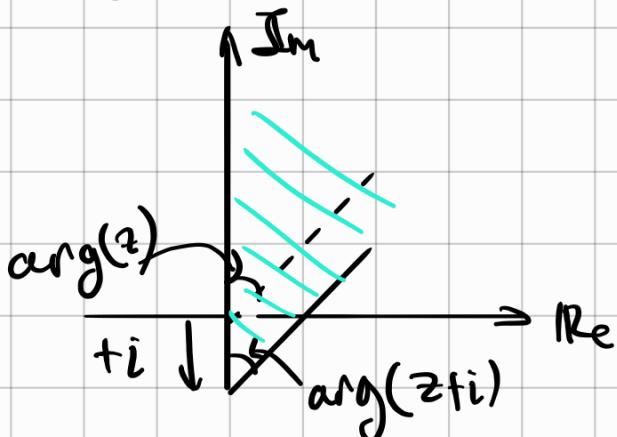
4) Окружность радиуса  $a$  с центром в точке  $z = 0$ .

10. (7, 9)

10. Выяснить, какое множество точек  $z$  комплексной плоскости удовлетворяет неравенству:

7)  $\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}; \quad 8) |z| > \operatorname{Re} z; \quad 9) \operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4.$

7)  $\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}$



9)  $\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$z^4 = r^4 (\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi)$$

$$\operatorname{Re} z^4 = r^4 \cos 4\varphi$$

$$\operatorname{Im} z^4 = r^4 \sin 4\varphi$$

$$\Rightarrow \cos 4\varphi > \sin 4\varphi$$

$$\cos 4\varphi - \sin' 4\varphi > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin' 4\varphi > 0$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 4\varphi - \sin \frac{\pi}{4} \sin' 4\varphi > 0$$

$$\cos \left( 4\varphi + \frac{\pi}{4} \right) > 0$$

$$2\pi k < 4\varphi + \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi k$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < 4\varphi < \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$$

$$-\frac{\pi}{16} + \frac{1}{2}\pi k < \varphi < \frac{3}{16}\pi + \frac{1}{2}\pi k, \quad k = 0, \dots, 3$$

7) Угол раствора  $\frac{\pi}{4}$  с вершиной в точке  $z = -i$ , стороны которого проходят через точки  $z = 1, z = 0$ .

8) ~~Часть плоскости, лежащая с той же стороны параболы  $y^2 = 1 - 2x$ , что и точка  $z = 1$  (и ограниченная этой параболой).~~

9) Четыре угла раствора  $\frac{\pi}{4}$  с вершиной в точке  $z = 0$ , биссектрисами которых являются лучи  $\arg z = -\frac{\pi}{16} + \pi k, k = 0, 1, 2, 3$ .

Во всех случаях точки граничных линий не включаются.

## II. Элементарные функции

### Функциональные ряды

№3

№ 8(1, 2, 4)

8. Вычислить значения функции  $e^z$  в точках:

- 1)  $z = 2\pi i$ ; 2)  $z = \pi i$ ;
- ~~3)  $z = \pi i/2$ ;~~ 4)  $z = -\pi i/2$ ;
- ~~5)  $z = \pi i/4$ .~~

$$e^z \text{ по формуле } 1) z = 2\pi i$$

$$e^z = e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi \\ = 1$$

$$2) z = \pi i : e^z = e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$4) z = -\pi i/2 : e^z = e^{-\pi i/2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

8. 1) 1; 2) -1; ~~3)~~, 4) -i;

$$\sqrt{g(3,4,8)}$$

9. Доказать формулы:

$$3) \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z; \quad 4) \sin(\pi + z) = -\sin z;$$

$$8) \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

$$3) \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\begin{aligned} \square \quad & \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{iz+i\frac{\pi}{2}} - e^{-iz-i\frac{\pi}{2}}}{2i} = \frac{e^{iz} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-iz} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i}; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ & = \frac{e^{iz} \cdot i - e^{-iz} \cdot (-i)}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \quad (\square) \end{aligned}$$

$$4) \sin(\pi + z) = -\sin z$$

$$\square \quad \frac{e^{i\pi+iz} - e^{-i\pi-iz}}{2i} = \frac{e^{i\pi} \cdot e^{iz} - e^{-i\pi} \cdot e^{-iz}}{2i} \quad (\ominus); \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{-i\pi} = -1$$

$$\ominus \quad (-1) \cdot e^{iz} - (-1) \cdot e^{-iz} = (-1) \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) = -\sin z \quad (\square)$$

$$8) \cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2,$$

$$\square \quad \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{i}{-i} \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \cdot \frac{-i}{-i} \\
&= \frac{1}{4} (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{4} (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) \\
&= \frac{1}{4} \left[ e^{iz_1+iz_2} + e^{iz_1-iz_2} + e^{-iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2} + e^{iz_1+iz_2} - e^{-iz_1-iz_2} \right] \\
&= \frac{e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2}}{2} = \cos(z_1 + z_2) \quad \text{□}
\end{aligned}$$

✓ 11 (1, 2, 3, 4)

11. Доказать формулы:

- 1)  $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$ ; 2)  $\operatorname{sh}(iz) = i \sin z$ ;  
 3)  $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$ ; 4)  $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$ ;

$$\operatorname{sh} \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} \quad \operatorname{ch} \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

$$1) \operatorname{sh} z = -i \sin iz$$

$$\begin{aligned}
\text{□ } -i \sin iz &= -i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\frac{e^{-z} - e^z}{2} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\
&= \operatorname{sh} z \quad \text{□}
\end{aligned}$$

$$2) \operatorname{sh}(iz) = i \sin z$$

$$\begin{aligned}
\text{□ } \operatorname{sh} iz &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \sin z \quad \text{□}
\end{aligned}$$

$$3) \cos(iz) = ch z$$

$$\square \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = ch z \quad \text{□}$$

$$4) ch(iz) = \cos z$$

$$\square \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \quad \text{□}$$

$$\sqrt{12}(1, 2)$$

12. Пусть  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ . Доказать, что:

- 1)  $\operatorname{Re} \sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$ ,  $\operatorname{Im} \sin z = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$ ;  
 2)  $\operatorname{Re} \cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y$ ,  $\operatorname{Im} \cos z = -\sin x \cdot \operatorname{sh} y$ ;

$$1) \operatorname{Re} \sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$$

$$\square \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \quad z = x + iy$$

$$\operatorname{Im} \sin z = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$$

$$= \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = -\frac{1}{2}i(e^{ix-y} - e^{-ix+y})$$

$$= -\frac{1}{2}i(\cos x + i \sin x)e^{-y} + \frac{1}{2}i(\cos x - i \sin x)e^y$$

$$= \frac{1}{2}e^{-y}(\sin x - i \cos x) + \frac{1}{2}e^y(\sin x + i \cos x)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \sin z = \sin x \cdot \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} \sin z = \frac{1}{2}e^{-y}(-\cos x) + \frac{1}{2}e^y \cdot \cos x = \cos x \cdot \operatorname{sh} y \quad \text{□}$$

$$2) \operatorname{Re} \cos z = \cos x \cosh y \quad \operatorname{Im} \cos z = -\sin x \cdot \sinh y$$

$$\square \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; z = x+iy$$

$$= \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} = \frac{1}{2} e^{-y} (\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2} e^y (\cos x - i \sin x)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \cos z = \frac{1}{2} e^{-y} \cos x + \frac{1}{2} e^y \cos x = \cos x \cdot \cosh y$$

$$\operatorname{Im} \cos z = \frac{1}{2} e^{-y} \sin x - \frac{1}{2} e^y \sin x = \sin x \sinh y$$

№13(1,3)

13. Пусть  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ . Доказать, что:

$$1) |\sin z| = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x}; \quad \cancel{\text{доказательство}}$$

$$3) |\sinh z| = \sqrt{\cosh^2 x - \cos^2 y}; \quad \cancel{\text{доказательство}}$$

$$|z|^2 = \operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z; \quad z = x+iy$$

$$1) |\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \quad (\text{из } 12(1,2))$$

$$= (1 - \cos^2 x) \cosh^2 y + \cos^2 x (\sinh^2 y - 1)$$

$$= \cosh^2 y - \cos^2 x \Rightarrow |\sin z| = \sqrt{\cosh^2 y - \cos^2 x} \quad \text{□}$$

$$3) \text{ замечание, что } \sinh z = -i \sin iz \quad (\text{из } 11(1))$$

$$\text{moga } |\operatorname{sh} z| = |\sin iz| \quad \text{uz (1)}$$

$$\Rightarrow |\operatorname{sh} z|^2 = |\sin iz|^2 = \operatorname{ch}^2 \operatorname{Im}(iz) - \cos^2 \operatorname{Re}(iz)$$

$$= \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y \Rightarrow |\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$$

✓

$$\sqrt{14(1,4)}$$

14. Описать точки  $z$ , в которых следующие функции принимают действительные значения:

- 1)  $\cos z$ ; 2)  ~~$\operatorname{ch} z$~~ ; 3)  ~~$\sin z$~~ ; 4)  $\operatorname{tg} z$ ; 5)  ~~$\operatorname{ctg} z$~~ .

1)  $\cos z \in \mathbb{R} ? \Leftrightarrow \operatorname{Im} \cos z = 0$

uz 12(z):  $\operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k; k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{sh} y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Im} z = 0 \\ \operatorname{Re} z = \pi k; k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

14. 1)  $\operatorname{Im} z = 0; \operatorname{Re} z = k\pi, k \in \mathbb{Z};$

4)  $\operatorname{Im} \operatorname{tg} z = 0$

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x + iy = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh}(2y)}{\cos 2x + i \operatorname{ch} 2y} \Rightarrow \operatorname{Im} \operatorname{tg} z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sh}(2y) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0$$

$\Rightarrow \text{Im } z = 0$

4)  $\text{Im } z = 0;$

✓ 17 (1, 4, 8)

17. Найти все решения следующих уравнений:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin z = \frac{4i}{3}; & 2) \sin z = -\frac{5}{3}; \\ 3) \cos z = \frac{3i}{4}; & 4) \cos z = \frac{3+i}{4}; \\ 5) \operatorname{tg} z = \frac{5i}{3}; & 6) \operatorname{ctg} z = -\frac{3i}{5}; \\ 7) \operatorname{sh} z = \frac{i}{2}; & 8) \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}. \end{array}$$

$$1) \sin z = \frac{4i}{3} \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{4i}{3}$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = -\frac{8}{3}; \text{ nyumb } t = e^{iz}$$

$$t - \frac{1}{t} = -\frac{8}{3}$$

$$t^2 + \frac{8}{3}t - 1 = 0$$

$$t = \frac{-\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + 4}}{2} = \frac{-\frac{8}{3} \pm \frac{10}{3}}{2} = -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow t_1 = -3 \Rightarrow e^{iz} = -3 \Rightarrow iz = \ln 3 + i(2\pi k + \pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t_2 = \frac{1}{3}$$

$$z_1 = -i \ln 3 + 2\pi k + \pi$$

$$t_2: e^{iz} = \frac{1}{3} \Rightarrow iz = \ln \frac{1}{3} + i \cdot 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$z_2 = -i \ln \frac{1}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

17. 1)  $z = i(-1)^k \ln 3 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$

$$4) \cos z = \frac{3+i}{4}$$

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{3+i}{4} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \left(\frac{3+i}{2}\right)$$

$$t^2 - 2 \cdot \frac{(3+i)}{4} t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{3+i}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3+i}{4}\right)^2 - 1} = \frac{3+i}{4} \pm \sqrt{-\frac{4+3i}{8}} = \frac{3+i}{4} \pm \frac{1+3i}{4}$$

$$\Rightarrow t_1 = 1+i$$

$$t_2 = \frac{1-i}{2}$$

$$\Rightarrow e^{iz} = 1+i \Rightarrow zi = \ln \sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

$$z_1 = -i \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{iz} = \frac{1-i}{2} \Rightarrow zi = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

$$z_2 = -i \ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \pm \left( -\frac{i}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$4) z = \pm \left( -\frac{i}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$8) \operatorname{ch} z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^z + e^{-z} = 1$$

$$t = e^z \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 1$$

$$t^2 - t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)} = e^z$$

$$\Rightarrow z = \pm \frac{\pi}{3} i + i \cdot 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$8) z = \pm \frac{\pi i}{3} + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}.$$

$\sqrt{19(3)}$

19. Пусть  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ . Доказать, что:

3) Функции  $\sin z$  и  $\cos z$  стремятся к бесконечности при  $y \rightarrow \pm\infty$  и это стремление равномерно по  $x$ .

□ заметим, что  $\sin z = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos x$  - ограничено

$\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow \sin z \rightarrow \infty$  при  $y \rightarrow \pm\infty$

и  $\cos z$ :

$$\sin^2 z = 1 - \cos^2 z \Rightarrow \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x = 1 - \cos^2 z$$

$$\Rightarrow \cos z = \sqrt{1 + \cos^2 x - \sin^2 y}$$

$$\cos x = \text{окр}$$

$$\sin y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow \cos z \rightarrow 1 \quad \square$$

№ 4

№ 6 (4)

6. Доказать равномерную сходимость ряда на множестве  $E$ :

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos nz, \quad E = \{z : |\operatorname{Im} z| \leq \delta < \ln 2\}.$$

Ограничим дружищональный ряд, числовым рядом  
(где T. Венгеритраса)

$$|\cos nz| = \left| \frac{e^{inz} + e^{-inz}}{2} \right| \leq \frac{|e^{inz}| + |e^{-inz}|}{2}$$

$$|e^{inz}| = |e^{in(x+iy)}| = |e^{inx - ny}| = e^{-ny}$$

$$|e^{-inz}| = e^{-ny}$$

$$|\cos nz| \leq \frac{|e^{inz}| + |e^{-inz}|}{2} \leq \frac{2e^{-ny}}{2} = e^{-ny} \leq e^{-n\delta}$$

$$\text{тогда } |\alpha_n| = |2^{-n} \cos nz| \leq 2^{-n} e^{-n\delta} = e^{-n \ln 2} e^{-n\delta} = e^{n(8-\ln 2)} e^{-n(\delta-\ln 2)} = 1$$

по признаку Данаидера  $e^{-n(\delta-\ln 2)}$ сходится  
→ оценим ряд с. равнов  $\square$

## III Условие Коши — Римана

### Гармоническая функция

#### СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

##### 1. Дифференцируемость. Условия Коши—Римана

1.1. *Дифференцируемость.* Пусть функция  $f(z)$  определена в некоторой окрестности точки  $z_0 \in \mathbb{C}$ , т. е. на множестве

$$B_r(z_0) = \{z : |z - z_0| < r\},$$

где  $r > 0$ . Если существует конечный предел отношения  $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  при  $z \rightarrow z_0$ , тот этот предел называется *производной* функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  и обозначается  $f'(z_0)$ , т. е.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1)$$

или

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z},$$

где

$$\Delta z = z - z_0, \quad \Delta f = f(z) - f(z_0).$$

Если функция  $f(z)$  имеет в точке  $z_0$  производную, то говорят, что функция  $f(z)$  *дифференцируема* в точке  $z_0$ .

##### 1.2. Условия дифференцируемости. Для того чтобы функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

была дифференцируема в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$ , необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- 1) функции  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  и  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$  дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ;
- 2) в точке  $(x_0, y_0)$  справедливы равенства (*условия Коши—Римана*):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2)$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

##### 2. Понятие регулярной функции. Функция $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ называется *регулярной* (или *голоморфной*) функцией в области $G \subset \mathbb{C}$ , если она определена и дифференцируема в каждой точке области $G$ .

Говорят, что функция  $f$  *регулярна* в точке  $z_0 \in \mathbb{C}$ , если она регулярна в некоторой окрестности этой точки.

Говорят, что функция  $f$  *регулярна на множестве*  $D$ , если существует область  $G \supset D$ , в которой функция  $f$  определена и регулярна.

### 3. Понятие гармонической функции

3.1. *Определение гармонической функции.* Действительная функция  $u(x, y)$ , определенная и дважды непрерывно дифференцируемая в области  $G \subset \mathbb{R}^2$ , называется гармонической в области  $G$ , если в любой точке  $(x, y) \in G$  справедливо равенство

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

h5

$\sqrt{1}(2, 4, 6)$

1. Найти все точки  $z = x + iy$ , в которых дифференцируемы функции:

- 1)  ~~$\operatorname{Im} z$~~ ; 2)  $|\bar{z}|^2$ ; 3)  ~~$x^2 - iy^2$~~ ; 4)  $x^2 - y^2 - 2ixy$ ;  
5)  ~~$x^2 + i(y + x)$~~ ; 6)  $z \operatorname{Re} z$ .

$$2) |\bar{z}|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = 0 \end{cases}$$

Проверим:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} : 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} : 2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow z = 0$$

$$4) x^2 - y^2 - 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = -2xy \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} : 2x = -2x \Rightarrow x = 0$$

$$\Rightarrow z = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} : -2y = 2y \Rightarrow y = 0$$

$$6) z \operatorname{Re} z = (x+iy)x = x^2 + ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 \\ v = xy \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \therefore 2x = x \Rightarrow x=0 \\ \Rightarrow z=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \therefore 0 = -y \Rightarrow y=0$$

1. ~~1) нигде; 2) в точке  $z=0$ ; 3) на прямой  $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$ ;~~  
 4) нигде; ~~5) всюду; 6) в точке  $z=0$ .~~

№ 6(2,5)

6. Выяснить, в каких точках  $z \in \mathbb{C}$  дифференцируемы функции, и найти их производные:

1)  $e^{\operatorname{sh} z}$ ; 2)  $\cos(2e^z)$ ; 3)  ~~$\sin z \operatorname{sh} z + i \cos z \operatorname{ch} z$~~ ;  
~~4)  $\frac{e^z}{z}$ ; 5)  $\frac{z}{e^z}$ ; 6)  $\frac{\sin z}{1+z^2}$ .~~

По определению  
 (из можно или сломано)  
 функция!

2)  $\cos(2e^z)$

$$2e^z = 2e^{x+iy} = 2e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Из задания ранее:  $\operatorname{Re} \cos(2e^z) = \cos(2e^x \cos y) \cdot \operatorname{ch}(2e^x \sin y)$

$$\operatorname{Im} \cos(2e^z) = -\sin(2e^x \cos y) \cdot \operatorname{sh}(2e^x \sin y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(2e^x \cos y) \cdot 2e^x \cos y \cdot \operatorname{ch}(2e^x \sin y) \\ + \cos(2e^x \cos y) \cdot \operatorname{sh}(2e^x \sin y) \cdot 2e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\cos(2e^x \cos y) \cdot 2e^x \cdot (-\sin y) \cdot \operatorname{sh}(2e^x \sin y) \\ - \sin(2e^x \cos y) \cdot \operatorname{ch}(2e^x \sin y) \cdot 2e^x \cos y$$

Но нужно заметить, что условие  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  выполнено.

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Hängen  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos(2e^x \cos y) \cdot 2e^x \cos y \cdot \sinh(2e^x \sin y)$   
 $- \sin(2e^x \cos y) \cdot \cosh(2e^x \sin y) \cdot 2e^x \sin y$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \left( -\sin(2e^x \cos y) \cdot 2e^x \cos y \cdot \cosh(2e^x \sin y), \right. \\ \left. + \cos(2e^x \cos y) \cdot \sinh(2e^x \sin y) \cdot 2e^x \sin y \right) \\ + i \left( -\cos(2e^x \cos y) \cdot 2e^x \cos y \cdot \sinh(2e^x \sin y) \right. \\ \left. - \sin(2e^x \cos y) \cdot \cosh(2e^x \sin y) \cdot 2e^x \sin y \right)$$

$$= 2e^x \left( \cos(2e^x \cos y) \sinh(2e^x \sin y) \sin y \right. \\ \left. - i \cos(2e^x \cos y) \sinh(2e^x \sin y) \cos y \right)$$

$$-i \cdot i = 1$$

$$+ 2e^x \left( -\sin(2e^x \cos y) \cosh(2e^x \sin y) \cos y \right. \\ \left. - i \sin(2e^x \cos y) \cosh(2e^x \sin y) \sin y \right)$$

$$= 2e^x \cdot (-i) \left( \cos(2e^x \cos y) \sinh(2e^x \sin y) \sin y \right. \\ \left. - \cos(2e^x \cos y) \sinh(2e^x \sin y) \cos y \right)$$

$$2e^x \cdot (-1) \left( \sin(2e^x \cos y) \cosh(2e^x \sin y) \cos y \right. \\ \left. - \sin(2e^x \cos y) \cosh(2e^x \sin y) \sin y \right)$$

$$- 2e^x \cdot (-i) \cdot e^{iy} \cdot \cos(2e^x \cos y) \sinh(2e^x \sin y)$$

$$+ 2e^x \cdot (-1) \cdot e^{iy} \cdot \sin(2e^x \cos y) \cosh(2e^x \sin y)$$

$$= -2e^x \cdot \sin(2e^x)$$

5)  $\frac{z}{e^z}$  В узедмике Половинкина приведено гол-бо  
координал  $\left(\frac{f}{g}\right)'$  нормы боконбозгасе ен

$\frac{z}{e^z}$  гүлг. бөзгэ

$$\left(\frac{z}{e^z}\right)' = \frac{e^z - ze^z}{e^{2z}} = (1-z)e^{-z}$$

6. 1)  ~~$\operatorname{ch} z e^{-iz}$~~ ; 2)  $-2e^z \sin(2e^z)$ ;  
 3)  ~~$(1+i) \cos z \operatorname{sh} z + (1-i) \sin z \operatorname{ch} z$~~ ;  
 4)  ~~$\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) e^z, z \neq 0$~~ ; 5)  $(1-z)e^{-z}$ ;

# N7(1,6)

7. Выяснить, где дифференцируемы функции, и найти их производные:

$$1) \operatorname{tg} z; \quad 2) \operatorname{ctg} z; \quad 3) \frac{e^z + 2}{e^z - 2}; \quad 4) \frac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z};$$

$$5) \cancel{\frac{e^z + 2}{e^z - 2}}; \quad 6) \frac{\sin z}{\sin z - \cos z}.$$

$$1) \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{для } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}' z = \frac{\frac{1}{\cos^2 z} \sin z - \frac{1}{\cos z} \sin z \cdot (-\frac{1}{\sin^2 z})}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$6) \frac{\sin z}{\sin z - \cos z}$$

$$\text{доп-ена: } \sin z - \cos z \neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sin z + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos z \neq 0$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin z + \cos \frac{\pi}{4} \cos z \neq 0$$

$$\cos \left( z + \frac{\pi}{4} \right) \neq 0$$

$$z + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$z = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \text{доп-ена } z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \right\}$$

проверка:  $\frac{\cos z(\sin z - \cos z) - \sin z(\cos z + \sin z)}{(\sin z - \cos z)^2}$

$$= \frac{-1}{(\sin z - \cos z)^2}$$

7. 1)  $\frac{1}{\cos^2 z}$ ; 2)  $-\frac{1}{\sin^2 z}$ ; 3)  $\frac{-4e^z}{(e^z - 2)^2}$ ; 4)  $\cos 2z$ ;  
 5)  $\frac{3(e^{-z} - e^z)}{(e^z + e^{-z})^4}$ ; 6)  $\frac{-1}{(\sin z - \cos z)^2}$ .

№13(1,2)

13. В следующих задачах дается одна из пары сопряженных гармонических функций  $u$  или  $v$ . Найти вторую функцию пары.

1)  $u = xy$ ; 2)  $u = x^2 - y^2 + 2xy$ ;

гармоническая;  $\Delta u(x,y) = 0$

сопр.  $u$  и  $v \Rightarrow$  гдл них верен критерий К-Р

1)  $u = xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \frac{y^2}{2} + \phi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = -x \Rightarrow \phi = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow v = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + C$$

; заменим, что  $\Delta v = 0$   
верно

$$2) u = x^2 - y^2 + 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x + 2y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = 2xy + y^2 + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -2y + 2x = -2y - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2x \Rightarrow \varphi = -x^2 + C$$

$$\Rightarrow v = 2xy + y^2 - x^2 + C; \Delta v = 0 \text{ верно}$$

$$13. \quad 1) -\frac{x^2 - y^2}{2} + C; \quad 2) 2xy - x^2 + y^2 + C;$$

✓ 17(3,6)

17. Восстановить регулярную функцию  $f(z)$  по условию

$$3) \operatorname{Im} f(z) = y \operatorname{ch} x \cos y + x \sin y \operatorname{sh} x, \quad f(0) = 1;$$

$$v = \operatorname{Im} f = y \operatorname{ch} x \cos y + x \sin y \operatorname{sh} x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ch} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y + x \cos y \operatorname{sh} x$$

$$\Rightarrow u = \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{sh} x \sin y + \cos y (x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) + \varphi(y)$$

$$= -y \operatorname{sh} x \sin y + \cos y x \operatorname{ch} x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -\operatorname{sh} x \sin y - y \operatorname{sh} x \cos y - \sin y x \operatorname{ch} x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$= -y \operatorname{sh} x \cos y - \sin y \operatorname{sh} x - x \sin y \operatorname{ch} x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \varphi = C$$

$$\Rightarrow u = -y \operatorname{sh} x \sin y + \cos y \cdot x \operatorname{ch} x + C$$

no gennähren  $f(0) = 1$ ;  $f = u + iv$

$$v(0) = 0; u(0) = C \Rightarrow C = 1$$

$$f(z) = (-y \operatorname{sh} x \sin y + \cos y \cdot x \operatorname{ch} x + 1) \\ + i(y \operatorname{ch} x \cos y + x \sin y \operatorname{sh} x)$$

$$= (iy \sin y \sin ix + x \cos y \cos ix) + i \\ + i(y \cos ix \cos y - ix \sin y \sin ix)$$

$$= iy(\sin y \cdot \sin ix + \cos y \cdot \cos ix) \\ + x(\cos y \cdot \cos ix + \sin y \cdot \sin ix) + 1$$

$$= iy \cdot \cos(y - ix) + x \cdot \cos(y - ix) + 1$$

$$= z \operatorname{ch} z + 1$$

6) 6)  $\operatorname{Re} f(z) = xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y, f(0) = i;$

$$u = \operatorname{Re} f = xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow e^x \cos y + xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v = \cancel{e^x \sin y} + xe^x \sin y + (y+1) \cancel{e^x \cos y} - \cancel{e^x \sin y} + \varphi(x)$$

$$= xe^x \sin y + (y+1) \cos y e^x + \varphi(x)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -xe^x \sin y - e^x \sin y - ye^x \cos y - e^x \cos y \\ &= -e^x \sin y - xe^x \sin y - (y+1) \cos y e^x + \frac{d\varphi}{dx} \\ \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \Rightarrow \varphi = C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow V = xe^x \sin y + (y+1) \cos y e^x + C$$

$$f(0) = i \Rightarrow i(1+C) = i \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow f = u + iv = (xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y) + i(xe^x \sin y + (y+1) \cos y e^x)$$

$$\begin{aligned} & xe^x (\cos y + i \sin y) + ye^x (-\sin y + i \cos y) + e^x (-\sin y + i \cos y) \\ &= xe^x e^{iy} + ye^x ie^{iy} + e^x ie^{iy} = (z+i)e^z \end{aligned}$$

6)  $(z+i)e^z;$

# IV Ряд Тейлора:

н7

н4

4. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{2z^2 + 2z - 7}{z^2 + z - 2}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = -1$ .

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z^2 + 2z - 7}{z^2 + z - 2} = 2 + \frac{-3}{z^2 + z - 2} \\ &= 2 + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$

в окрестности  $z = -1 \Rightarrow$  пусть  $t = z + 1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) &= 2 + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{t}{2}} \\ &= 2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n \\ &= \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \left( \frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n \right) = \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (z+1)^n \left( \frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n \right) \end{aligned}$$

$|z+1| < 1$

4.  $f(z) = \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-(n+1)} + (-1)^n) (z+1)^n.$

# √6(6)

6. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  функции:

6)  $\operatorname{ch} z \cdot \cos z$ .

$$6) \operatorname{ch} z \cdot \cos z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} (e^z + e^{-z})(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{4} (e^{(1+i)z} + e^{-(1+i)z} + e^{(1-i)z} + e^{-(1-i)z})$$

$$= \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(1+i)z + \operatorname{ch}(1-i)z)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^{2n} z^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^{2n} z^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} ((1+i)^{2n} + (1-i)^{2n})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \cdot ((2i)^n + (-2i)^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{4k}}{(4k)!} \cdot (-1)^k \cdot 2^{2k}$$

$$6) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \frac{z^{4n}}{(4n)!}.$$

# √11(1,4)

11. Определить порядок  $m$  нуля  $z = a$  функции  $f(z)$ , если:

$$1) f(z) = (\cos 3z - \cos 5z)^2 (1 - \cos 2z)^3, \quad a = 0;$$

$$4) f(z) = (z^4 + 2z^3 - 2z - 1)^2 (e^{i\pi z} + 1)^3, \quad a = -1.$$

$$1) f(z) = (\cos 3z - \cos 5z)^2 (1 - \cos 2z)^3; \quad z=0$$

$$g(z) = (\cos 3z - \cos 5z) = z^2 \cdot h_1(z)$$

$$-\sin 3z \cdot 3 + \sin 5z \cdot 5 = 0, \quad -\cos 3z \cdot 9 + \cos 5z \cdot 25 \neq 0$$

$$t(z) = (1 - \cos 2z) = z^2 \cdot h_2(z)$$

$$\sin 2z \cdot 2 = 0, \quad \cos 2z \cdot 4 \neq 0$$

$$\Rightarrow f(z) = z^{10} \cdot h_1(z) \cdot h_2^3(z)$$

$$\Rightarrow m = 10$$

$$4) f(z) = (z^4 + 2z^3 - 2z - 1)^2 (e^{i\pi z} + 1)^3; z = -1$$

$$\begin{aligned} g(z) &= (z^4 + 2z^3 - 2z - 1) = (z-1)(z+1)^3 \\ &= (z+1)^3 h_1(z) \end{aligned}$$

$$t(z) = e^{i\pi z} + 1 = (z+1) h_2(z)$$

$$i\pi e^{i\pi z} = -i\pi \neq 0$$

$$\Rightarrow (z+1)^3 h_1(z) \cdot h_2(z) \Rightarrow m = 9$$

11. 1)  $m = 10$ ; 2)  ~~$m = 6$~~ ; 3)  ~~$m = 6$~~ ; 4)  $m = 7$ . ?

## N12(1)

12. Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$  функции, удовлетворяющей указанным ниже условиям:

$$1) f'(z) = f(z), f(0) = 1;$$

$$f'(z) = f(z) \Rightarrow f(z) = e^z \cdot C; f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(z) = e^z$$

$$\text{б) при } z=0: f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$12. 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

## V. Теорема единственности

**1. Теорема единственности.** Если функции  $f_1$  и  $f_2$  регулярны в области  $G$ , совпадают в ней на бесконечном множестве точек  $E$ , имеющем предельную точку в  $G$ , то эти функции тождественно равны друг другу в области  $G$ .

н. г;

$$\sqrt{2}(1, 2, 5/1, 12)$$

2. Существует ли функция  $f(z)$ , регулярная в некоторой окрестности точки  $z = 0$  и удовлетворяющая одному из следующих условий (для всех  $n = 1, 2, \dots$ ):

$$1) f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2};$$

~~9)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2};$~~

$$2) f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos \pi n;$$

~~10)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n^3};$~~

~~3)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1};$~~

~~11)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2(\pi n)}{n^2};$~~

~~4)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2 \pi n}{2n+1};$~~

~~12)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{2}}{n^2};$~~

~~5)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n + \cos \pi n};$~~

~~13)  $f\left(\frac{1}{n}\right) =$~~

$$1) f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{\pi n}{2}$$

запомнил, что  $f\left(\frac{1}{2k}\right) = \sin \pi k = 0$

$\Rightarrow$  пусть  $g(z) = 0$ ; на чо-бе може  $z = \frac{1}{2k}$

$f$  и  $g$  совпадают, може бъде чо много

и пределна този  $(0, 0)$ .  $G = \mathbb{C}$ . Тога

если  $f$  — регуларна, то

no ychobus neoperubl  $f \equiv g$ , zmo ne prabga

ypu  $z + \frac{l}{2k} \Rightarrow$  protivopere., ne cyuscimbyem

2)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cos \pi n$

$$\text{gnd } f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k} \cos 2\pi k = \frac{1}{2k}$$

nycmo  $g(z) = z$

$\Rightarrow$  gnd  $z = \frac{1}{2k} \hookrightarrow$  fung cobragan

$G = \mathbb{C}$ ,  $(0,0)$ -npegevnaia  $\Rightarrow$  econ f perzneprua  $\Rightarrow$

$f \equiv g$ , zmo ne berno (gnd  $n = 2k+1$ )

$\Rightarrow$  ne cyuscimbyem

5)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n + \cos \pi n}$

$$\text{gnd } n = 2k: f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{4k+1}$$

nycmo  $g(z) = \frac{z}{z+2}$ , gnd  $z = \frac{1}{2k}$  fung cohni:

$G = \mathbb{C}, (0,0)$ -npegev.  $\Rightarrow$  w3 trop  $f \equiv g$ , gnd  $n = 2k+1$   
nporub

$\Rightarrow$  ne cyu.

$$11) f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2(\pi n)}{n^2}$$

заметим, что  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2(\pi n)}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 \Rightarrow \text{сущ.}$$

$$12) f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin^2 \frac{\pi n}{2}}{n^2}$$

где  $n=2k$ :  $f\left(\frac{1}{2k}\right) = f\left(-\frac{1}{2k}\right) = \frac{\sin^2 \pi k}{n^2} = 0$

пусть  $g(z)=0 \Rightarrow$  где  $z=\frac{1}{2k}$   $g$  не собр

$G \subseteq \mathbb{C}, (0,0)$ -пределная  $\Rightarrow$  из теоремы  $\Rightarrow$  против

т.к.  $n=2k+1$   
не собр

$\Rightarrow$  не сущ

2. 1) Нет; 2) нет; 3) да; 4) да.  
 5) нет; 6) да; 7) нет; 8) нет.  
 9) нет; 10) нет; 11) да; 12) нет.

$N(3(5,8))$

13. Опираясь на справедливость приводимых ниже формул для действительных значений переменных, доказать их справедливость и для произвольных комплексных значений этих переменных:

5)  $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$

8)  $\sinh z_1 + \sinh z_2 = 2 \sinh \frac{z_1 + z_2}{2} \cosh \frac{z_1 - z_2}{2}.$

5)  $\sin(z_1 + z_2) - \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2 = 0$

□  
пусть  $z_1 = x \in \mathbb{R}$

обозначим  $\varphi(z_2) = \sin(x + z_2) - \sin x \cos z_2 - \cos x \sin z_2$

пусть  $G = \mathbb{C}$ , док. либо можно:  $z_2 \in \mathbb{R}$  и  $z_2 = 0$   
(пред. токмо)

заметим, что для  $z_2 \in \mathbb{R} \hookrightarrow \varphi(z_2) = 0$

$\Rightarrow$  по теор. единственности  $\hookrightarrow \varphi(z_2) = 0$  при  $z_2 \in \mathbb{R}$

пок.  $z_2 \in \mathbb{C}$ ,

пок.  $\psi(z_1) = \sin(z_1 + z_2) - \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$

было показано, что при  $z_1 \in \mathbb{R} \hookrightarrow \psi(z_1) = 0$

$G = \mathbb{C}$ ,  $z_2 \in \mathbb{R}$ ,  $z_2 = 0$  предполож

$\Rightarrow$  по теор.  $\hookrightarrow \psi(z_1) = 0$   $\forall z_1 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$  □

$$8) \operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 28h \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}$$

□ Аналогично пункту 5) ,  $G = \mathbb{C}$  , где мы-то  $\mathbb{R}$   
 $z=0$  предельная

Б)

$N_{T1}$

1. Пусть функция  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  регулярна в области  $G$ . Пусть существует натуральное число  $n$  такое, что для всех  $z \in G$  выполнено  $f^{(n)}(z) = 0$ .  
Доказать, что  $f$  – многочлен степени меньше  $n$ .

□ Заметим, что т.к  $f^{(n)}(z) = 0 \Rightarrow f^{(m)}(z) = 0$  для  $m > n$

выберем точку  $z_0 \in G$  и  $r$  такие, что  $B_r(z_0) \subset G$

тогда  $\forall z \in B_r(z_0) \Leftrightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$

т.к  $f^{(k)}(z) = 0 \forall k \geq n \Leftrightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$

послб  $P(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$  где  $\forall z \in \mathbb{C}$

покажем, что  $f = P$  где  $\forall z \in \mathbb{C}$ , не только  
где  $z \in B_r(z_0)$

Возьмем now  $z_m = z_0 + \frac{r}{m+1} i$   $\{z_m\} \subset B_r(z_0)$

$z_m \rightarrow z_0$ , т.к  $P$  регулярна

$\Rightarrow$  no TE  $\Rightarrow f = P$  где  $\forall z \in G$  Б)

NT3

3. Пусть функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , гармонические в области  $D$ , совпадают в ней в окрестности некоторой точки  $(x_0, y_0) \in D$ . Доказать, что эти функции тождественно равны друг другу в области  $D$ .

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D$$

$$\Delta v = 0$$

$\exists (x_0, y_0) \in D \hookrightarrow f(x, y) \text{ в некоторой окр } U(x_0, y_0)$   
 $\hookrightarrow u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$

□ Пусть  $w = u - v$

Рассмотрим произвольную точку  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in G$

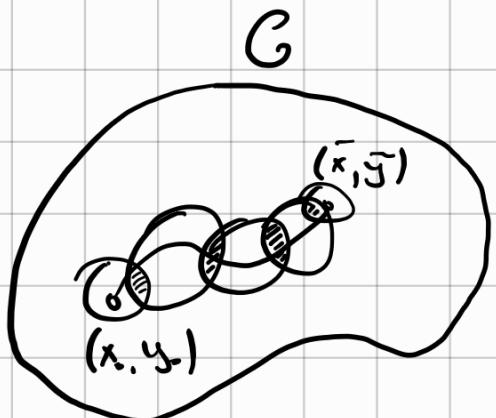
т.к. область является связанным и непод

но Э кривая  $\gamma$  соединяющая  $(x_0, y_0)$  и  $(\tilde{x}, \tilde{y})$

Покроим  $\gamma$  кругами  $B_0, B_1 \dots B_n$

так, что

- 1)  $B_i \subset G$
- 2)  $B_0 \subset U(x_0, y_0)$  и  $(x_0, y_0) \in B_0$
- 3)  $B_k \in (\tilde{x}, \tilde{y})$
- 4)  $B_i$  пересекается с  $B_{i+1}$



база:

множество рассматриваем  $B_0$ :  $\omega$  - гармоническая по.

$\Rightarrow \exists f_0(z)$  отвечающее  $B_0$ :  $\operatorname{Re}(f_0) = \omega$  и  $f_0$  - регулярна

$\Rightarrow \operatorname{Re} f_0 \equiv 0 \quad \forall z_0 \in B_0$

из критерия К-Р  $\Rightarrow \operatorname{Im} f_0 = C_0 \Rightarrow f_0 = :C_0$

Наз индуцируем:

число  $g_n B_i$  верно, что  $\omega = 0$

число  $B_{i+1} \exists f_{i+1}$ :  $\operatorname{Re}(f_{i+1}) = \omega$  и  $f_{i+1}$  - рег.

Рассматриваем  $B_i \cap B_{i+1}$  = область

т.к. в  $B_i \cap B_{i+1}$   $\omega = 0 \Leftrightarrow F_{i+1}$  соединяется с  $iC_{i+1}$  на  $B_i \cap B_{i+1}$

но ТЕ  $f_{i+1} = iC_{i+1}$  для  $B_{i+1} \Rightarrow \operatorname{Re} f_{i+1} = 0$

$\Rightarrow$  но индуцируем  $\operatorname{Re} F_k = 0 \Rightarrow \omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$

т.к. выбор  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  - произвольны  $\Rightarrow \omega = 0$  на  $G \Rightarrow u = v$

□

# N<sub>ТЧ</sub>

4. Пусть функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , гармонические в области  $D$ , совпадают в ней на бесконечном множестве точек  $E$ , имеющем предельную точку в  $D$ . Верно ли, что эти функции тождественно равны друг другу в области  $D$ ?

рассмотрим  $\begin{cases} u(x, y) = x \\ v(x, y) = 0 \end{cases}, D = \mathbb{C}$

$u = v$  где  $E = \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=\frac{1}{n} \end{array} \right.$  бесконечн-во + предельная точка  $(0, 0)$

$u$  не совпадает с  $v$

$\Rightarrow$  **контр**

VI Ряд Лорана.

n 11

N<sub>1(6)</sub>

1. Найти множество точек  $z$ , в которых сходится ряд Лорана:

$$6) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1};$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \frac{1}{n^2+1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{n^2+1}$$

$\uparrow$  сх при  $|z| \leq 1$        $\uparrow$  сх при  $|z| \geq 1$

$\Rightarrow$  гнд сходимости неодн  $|z|=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| z^n \cdot \frac{1}{n^2+1} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

$\Rightarrow$  ряд absolutely сходится

Аналогично для  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{n^2+1}$

при  $|z|=1$  сходится

$$6) |z|=1;$$

$N_2(1, 4, 6)$

2. Опираясь на формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а также используя дифференцирование и интегрирование, доказать:

$$1) \frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n, \quad |z| > |b|;$$

$$4) \frac{1}{(z-b)^2} = - \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) b^{-n-2} z^n, \quad |z| > |b|;$$

$$6) \left( \frac{z-a}{z-b} \right)^2 = \sum_{n=-\infty}^0 (1-n)(b-a)^{-n} (z-a)^n, \quad a \neq b, \quad |z-a| > |b-a|.$$

$$1) \frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n; \quad |z| > |b|$$

$$\square \frac{1}{z-b} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{b}{z}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{b}{z} \right)^n = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b}{z} \right)^{n-1} = \frac{1}{z} \sum_{n=-\infty}^{-1} \left( \frac{b}{z} \right)^{-n-1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} \cdot z^n \quad \boxed{2}$$

$$4) \frac{1}{(z-b)^2} = - \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) b^{-n-2} z^n; \quad |z| > |b|$$

$$\square \int \frac{1}{(z-b)^2} dz = - \frac{1}{z-b} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} \cdot z^n (n+1)$$

$$\int S dz = - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n \Rightarrow S = - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^{n-1} \cdot n$$

$$\rightarrow S = - \sum_{n=-\infty}^{-2} b^{-n-2} z^n (n+1) \quad \boxed{2}$$

$$6) \left( \frac{z-a}{z-b} \right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1-n)(b-a)^{-n} (z-a)^n, \quad |z-a| > |b-a|$$

$\square$  nycmb  $t = z - a$   
 $\Rightarrow z - b = t - (b-a), \quad b-a = d$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left( \frac{z-a}{z-b} \right)^2 &= \left( \frac{t}{t-d} \right)^2 = t^2 \cdot \left[ - \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)d^{-n-2} t^n \right] \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)d^{-n-2} t^{n+2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (1-n)(b-a)^{-n} (z-a)^n \end{aligned}$$

$\square$

$N_3(1,6)$

3. Разложить в ряд Лорана по степеням  $z$  в кольце  $1 < |z| < 2$  функцию:

$$1) \frac{1}{(z+1)(z-2)};$$

$$6) \frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}.$$

$$1) \frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2-z} + \frac{1}{z+1} \right] = -\frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z}} \right]$$

$$|z| < 2 \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \cdot z^n$$

$$\frac{1}{|z| < 1} \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \left[ \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot z^n + \underbrace{\frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n}}_{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n}} \right]$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{3} \cdot (-1)^{n+1} \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3} \cdot 2^{-n-1} \cdot z^n$$

$$1) \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3 \cdot 2^{n+1}} z^n;$$

6)  $\frac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$

$$t = z^2; \quad 1 < |t| < 4$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(t-1)^2(t+4)} &= \frac{1}{100(1+\frac{t}{4})} - \frac{1}{25(t-1)} + \frac{1}{5(t-1)^2} \\ &= \frac{1}{100} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{t}{4}\right)^n - \frac{1}{25} \sum_{n=-\infty}^{-1} t^n - \frac{1}{5} \sum_{n=-\infty}^{-2} t^n (n+1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n \cdot (-1)^n}{100} \cdot t^n - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{25} t^n - \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{1}{5} t^n (n+1) \\ &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\quad}_{n=-1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{5} t^n (n+1), \text{ t.k. npu } n = -1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} -\frac{5n-6}{25} \cdot z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{100 \cdot 4^n} \cdot z^{2n}$$

$$6) \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{-5n-6}{25} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{100 \cdot 4^n} z^{2n}.$$

# N4(4)

4. Разложить в ряд Лорана по степеням  $z - a$  в кольце  $D$  (точка  $a$  и кольцо  $D$  указаны в скобках) функцию:

$$4) \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \quad (a = 1, \quad 2i \in D);$$

разложить по  $z - 1$

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} = \frac{z^2 + 1 - 2}{z^2 + 1} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{1+z^2}$$

функция не регулярна при  $z = \pm i \Rightarrow D = \{z | |z - 1| > \sqrt{2}\}$

$$f(z) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{z^2 + 1} = 1 + i \left( \frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) \quad \text{и } 2i \in D$$

пусть  $t = z - 1$

$$\stackrel{?}{=} 1 + i \left( \frac{1}{t+1-i} - \frac{1}{t+1+i} \right) \quad |+| \geq 2$$

$$= 1 + i \left( \frac{1}{t \left( 1 + \frac{1-i}{t} \right)} - \frac{1}{t \left( 1 + \frac{1+i}{t} \right)} \right)$$

$$= 1 + i \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1-i)^n}{t^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(1+i)^n}{t^{n+1}} \right)$$

$$= 1 + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} \underbrace{\left( (1-i)^n - (1+i)^n \right)}_{\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi i}{4} n}} = 1 + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} (-2i) \frac{e^{\frac{\pi i}{4} n} - e^{-\frac{\pi i}{4} n}}{2i}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} 2^{\frac{n}{2} + 1} \sin \frac{\pi}{4} n = 1 + \sum_{n=-\infty}^0 (-1)^{n+1} 2^{-\frac{n}{2} - 1} \sin \frac{\pi}{4} n (z-1)^{n-1}$$

$$4) 1 + \sum_{n=0}^{-\infty} (-1)^{n+1} 2^{-\frac{n}{2}+1} \sin \frac{\pi n}{4} (z-1)^{n-1};$$

$\sqrt[5]{u}$

5. Разложить данную функцию  $f(z)$  в ряд Лорана по степеням  $z$  в кольце, которому принадлежит точка  $z_0$ . Указать границы кольца сходимости.

$$4) f(z) = \frac{z}{z^2+6} + \frac{z-1}{2z^2-3z}, \quad z_0 = 2;$$

$f$  регулярна при  $z^2 \neq -6$   
 $2z^2-3z \neq 0 \Rightarrow z \neq \pm i\sqrt{6}$   
 $z = 0$   
 $z = \frac{3}{2}$

$$D: \frac{3}{2} < |z| < \sqrt{6}$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{z}{z^2+6}}_{f_1(z)} + \underbrace{\frac{z-1}{2z^2-3z}}_{f_2(z)}$$

$$f_1(z) = \frac{z}{z^2+6} = \frac{z}{6} \cdot \frac{1}{1+\frac{z^2}{6}} = \frac{z}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{6^{n+1}}$$

$$f_2(z) = \frac{z-1}{2z^2-3z} = \frac{1}{3z} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2z-3} = \frac{1}{3z} + \frac{1}{6z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{2z}}$$

$$= \frac{1}{3z} + \frac{1}{6z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{1}{3z} + \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}} \cdot z^{2n+1} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}} z^{2n+1} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{9} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{z^n}, \quad \frac{3}{2} < |z| < \sqrt{6};$$

$\sqrt{f(z)}$

7. Разложить функцию  $f(z)$  в ряд Лорана по степеням  $z - a$  в кольце  $D$ , которому принадлежит точка  $z_0$ . Указать границы кольца  $D$ .

3)  $f(z) = \frac{5 - 4z}{(z + 1)(z^2 - 1)^2}, \quad a = 1, \quad z_0 = 0;$

$f$  не регулярна при  $z \neq \pm 1$   
 $0 \in D \Rightarrow D = 0 < |z - 1| < 2$

$$t = z - 1$$

$$f(t) = \frac{1 - 4t}{(t+1)^3 t^2} = \left( \frac{1 - 4t}{8t^2} \right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^3}}_{g(t)}$$

$$g(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (n+1)(n+2)$$

$$f(t) = \frac{(1 - 4t)}{t^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{t^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} (n+1)(n+2) - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (n+1)(n+2) \right]$$

$$= \frac{1}{t^2} \left[ \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} (n+1)(n+2) - \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} n(n+1) \right]$$

$$= \frac{1}{t^2} \left[ \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} \left[ (n+1)(n+2) + 8n(n+1) \right] \right]$$

$$= \frac{1}{t^2} \left[ \frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} (n+1)(9n+2) \right]$$

$$= \frac{1}{8t^2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-2} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} (n+1)(9n+2)$$

$$= \frac{1}{8t^2} + \sum_{n=-1}^{\infty} t^n \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+6}} (n+3)(9n+20)$$

$$= \frac{1}{8(z-1)^2} - \frac{11}{16(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \frac{(-1)^n}{2^{n+6}} (n+3)(9n+20)$$

? 3)  $f(z) = -\frac{1}{4(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{9n+10}{2^{n+3}} (z-1)^n, 0 < |z-1| < 2;$

✓ 8(6)

8. Разложить функцию  $f(z)$  в ряд по степеням  $z$  в кольце, которому принадлежит точка  $z_0$ . Указать границы кольца сходимости.

6)  $f(z) = \frac{(1-i)z-5}{iz^2+(2-3i)z-6}, z_0 = 1+2i;$

$f$  не регулярна при  $z=3$  и  $z=2i$

$$|z_0| = \sqrt{5} \Rightarrow D = \{z \mid 2 < |z| < 3\}$$

$$f(z) = \frac{(1-i)z-5}{iz^2+(2-3i)z-6} = -\frac{1}{z-3} - \frac{i}{z-2i} = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}}_{f_1} - \underbrace{\frac{i}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{2i}{z}}}_{f_2}$$

$$f_1 = \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$f_2 = \frac{1}{1 - \frac{2i}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2i}{z}\right)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n - \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2i}{z}\right)^n$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot z^n - \frac{i}{2} \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(2i)^n} \cdot z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} -\frac{1}{2^{n+1} i^n} z^n \end{aligned}$$

$$6) f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(-\frac{1}{2^{n+1} i^n}\right) z^n, \quad 2 < |z| < 3;$$

$\sqrt{g(z)}$

9. Разложить функцию  $f(z)$  в ряд Лорана по степеням  $z - a$  в кольце, которому принадлежит точка  $z_0$ . Указать границы кольца сходимости.

$$2) f(z) = \frac{-4 - 2i}{(z + 1 + 2i)(z - 3)}, \quad a = -1, \quad z_0 = -1 - 5i;$$

$f$  не регулярна при  $\frac{z}{z-3} = -1 - 2i$   $\Rightarrow |z+1| > 4$

$$\begin{aligned} | -1 - 5i | &> | -1 - 2i | \\ &> | 3 + 1 | \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{-4 - 2i}{(z + 1 + 2i)(z - 3)} = -\frac{1}{z-3} + \frac{1}{z + 1 + 2i}$$

$$t = z + 1 \Rightarrow f(t) = -\frac{1}{t-4} + \frac{1}{t + 2i}$$

$$= -\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{t}} + \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1+\frac{2i}{t}}$$

$$= -\frac{1}{t} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{t}\right)^n + \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2i}{t}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2i)^{n-1}}{(z+1)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(z+1)^{n+1}}$$

$$2) f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2i)^{n-1}}{(z+1)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(z+1)^{n+1}}, |z+1| > 4;$$

## №10(б)

10. Разложить функцию  $f(z)$  в ряд Лорана по степеням  $z - a$  в кольце, которому принадлежит точка  $z_0$ . Указать границы кольца сходимости.

$$6) f(z) = \frac{z-1-5i}{z^2-2z+2} + \frac{3z-1-3i}{z^2-z(1+2i)-1+i}, a = 2i, z_0 = 0;$$

по степеням  $z - z_0$

$f$  не пер. при  $z = 1 \pm i$

$$z = i \Rightarrow D = \{z / 1 < |z - zi| < \sqrt{2}\}$$

$z_0 \in D$

$$|1-i-2i| = \sqrt{10} \neq$$

$$|i-2i| = 1$$

$$|1+i-2i| = \sqrt{2}$$

$$f(z) = \frac{z-1-5i}{z^2-2z+2} + \frac{3z-1-3i}{z^2-z(1+2i)-1+i} = \frac{1}{z-i} + \frac{3}{z-(1-i)}$$

$$\text{пусть } t = z - 2i \Rightarrow f(t) = \frac{1}{t+i} + \frac{3}{t+3i-1}$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{i}{t}}}_{f_1} + \frac{3}{(3i-1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{t}{3i-1}}}_{f_2}$$

$$f_1(t) = \frac{1}{1+\frac{i}{t}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i}{t}\right)^n$$

$$f_2(t) = \frac{1}{1+\frac{t}{3i-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{3i-1}\right)^n$$

$$f(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i}{t}\right)^n + \frac{3}{3i-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{3i-1}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)(z-2i)^n}{(1-3i)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(z-2i)^n}$$

6)  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)(z-2i)^n}{(1-3i)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(z-2i)^n},$   
 $z \neq 1+i \quad 1 < |z-2i| < \sqrt{10}; ?$

$\sqrt{15}$

5. Доказать, что если четная функция регулярна в кольце с центром в точке  $z = 0$ , то ее разложение в этом кольце в ряд Лорана не содержит нечетных степеней.

Без звездочки

$\square f(z) = f(-z)$

разложение по  $z$

$$\mathcal{D}_r = \{z \mid |z|=r\}, r \in \{p, R\}$$

разложение:  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot z^n; c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{D}_r} \frac{f(\psi)}{\psi^{n+1}} d\psi$

$$\text{genl } n=2k-1: \quad C_{2k-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\psi)}{\psi^{2k}} d\psi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{\psi^{n+1}} d\psi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} \frac{f(\psi)}{\psi^{2k}} d\psi \quad \ominus$$

$$\gamma_1, \gamma_2 \in \gamma_r : \gamma_1 = -\gamma_2$$

$$\begin{aligned} & \ominus \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{\psi^{2k}} d\psi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} \frac{f(-\psi)}{(-\psi)^{2k}} d(-\psi) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{\psi^{2k}} d\psi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{f(t)}{t^{2k}} dt = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{when } n=2k+1 \rightarrow C_{2k+1} = 0$$

□