Наумов В Б01-303

# ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 марта)

**I. Зависимость решений от параметра и начальных условий**

**Ф.:** ~~1064~~ ~~1068~~; 1070*.

**II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами**

**Ф.:** ~~667~~; ~~668~~; ~~677~~.

**С. §9:** ~~6~~; ~~16~~; ~~53~~; 47*; ~~73~~ (найти общее решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, используя формулу Лиувилля–Остроградского).

**Ф. §22:** ~~47~~.

~~1~~. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, где $\nu=\mathrm{const}$ на $(0;\infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

**2*.** Доказать, что для решения задачи Коши $y''+e^{\frac{2}{x+1}}y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ выполнено неравенство: $|y(x)|\le e^{\frac{x}{x+1}}$ при $x\ge 0$.

**III. Теорема сравнения Штурма**

**Ф.:** ~~723~~; ~~726~~.

**С. §10:** ~~2~~; ~~3~~; ~~6~~.

~~3~~. Пусть функция $q(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $q(x)\le 0$. Доказать, что краевая задача $y''+q(x)y=0, y(x_1)=a$, $y(x_2)=b$, при любых $a,b,x_1\ne x_2$ имеет решение и это решение единственно.

~~4~~. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения

$$y''+2x^2y'+(2x+1)y=0$$

имеет на действительной оси не более трех нулей.

~~5~~. Доказать, что для любого решения уравнения

$$y''+(2+\cos 3x)y=0$$

существует точка $\xi\in[-1;6]$ такая, что $y'(\xi)=0$.

~~6~~. Доказать, что:

~~а)~~ любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,\quad \nu=\mathrm{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0,+\infty)$;

б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1}-x_n|$ любого указанного выше решения стремится к $\pi$ при $n\to+\infty$.

**IV. Исследование поведения фазовых траекторий**

Во всех задачах изобразить фазовые траектории, для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

**Ф.:** ~~971~~; ~~972~~; ~~973~~; ~~974~~; ~~975~~; 976*.

**С. §13:** ~~39~~; ~~48~~; ~~57~~.

**Ф. §25:** ~~161~~.

**V. Устойчивость по Ляпунову**

**Ф.:** ~~894~~; ~~920~~; 889*.

$\boxed{32+6^*}$

# I. Зависимость решений от параметра и начальных условий

Ф:

В задачах **1064—1073** найти производные по параметру или по начальным условиям от решений данных уравнений и систем.

## №1064

**1064.** $y' = y + \mu(x + y^2)$, $y(0) = 1$; найти $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

Разложим функцию $y$ по степеням $\mu$:

$y_\mu(x) = y_0(x) + \mu y_1(x) + \dots$ достаточно разложить до $\mu^1$, т.к. все выше занулятся при нахождении $\left.\frac{\partial y}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$

подставим:

$$y_0' + \mu y_1' = y_0 + \mu y_1 + \mu\left[x + (y_0 + \mu y_1)^2\right]$$

$$y_0' + \mu y_1' = y_0 + \mu(x + y_1 + y_0^2) + \dots$$

$$\begin{cases} y_0' = y_0 \\ y_1' = x + y_1 + y_0^2 \\ y_0(0) = 1 \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = e^x \\ y_1' - y_1 = x + e^{2x} \\ y_0(0) = 1 \\ y_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = e^x \\ y_1 = e^{2x} - x - 1 \end{cases}$$

$y_1' - y_1 = x + e^{2x}$

$\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$, $y_1 = y_1^{ч} + y_1^{о}$

$y_1^{о} = C_1 \cdot e^x$

$y_1' - y_1 = x \Rightarrow y_1^{ч_1} = -1 - x$

$y_1' - y_1 = e^{2x} \Rightarrow y_1^{ч_2} = e^{2x}$

$\Rightarrow y_1 = C_1 \cdot e^x - 1 - x + e^{2x}$

$y_1(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y_1 = e^{2x} - x - 1$

$\Rightarrow y = e^x + \mu(e^{2x} - x - 1)$

тогда $\left.\frac{dy}{d\mu}\right|_{\mu=0} = e^{2x} - x - 1$

**1064.** $e^{2x} - x - 1.$

№1068

**1068.** $\frac{dx}{dt} = x^2 + \mu t x^3$, $x(0) = 1 + \mu$; найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$.

$x' = x^2 + \mu t x^3$
$x(0) = 1 + \mu$

$x = x_0 + \mu x_1 + \dots$

$x_0' + \mu x_1' = x_0^2 + 2\mu x_0 x_1 + \mu t x_0^3$

$$\begin{cases} x_0' = x_0^2 \\ x_1' = 2x_0 x_1 + t x_0^3 \\ x_0(0) = 1 \\ x_1(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{1-t} \\ x_1 = -\frac{1}{(t-1)^2}\left[t + \ln(1-t) - 1\right] \end{cases}$$

$\frac{dx_0}{dt} = x_0^2 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{t + C_0}$

$x_0(0) = 1 \Rightarrow C_0 = -1$

$x_1' = x_1 \cdot \frac{2}{1-t} + \frac{t}{(1-t)^3} \Rightarrow x_1' - \frac{2}{1-t} x_1 = \frac{t}{(1-t)^3}$

$e$

МВП: $x_1' - \frac{2}{1-t} x_1 = 0 \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = -2\frac{d(t-1)}{t-1} \Rightarrow \ln x_1 = -2\ln(t-1) + C_1$

$x_1 = \frac{C_1}{(t-1)^2}$, $C_1 = C_1(x)$

$\Rightarrow \frac{C_1'(t-1)^2 - \cancel{C_1 2(t-1)}}{(t-1)^4} + \cancel{\frac{2C_1}{(t-1)^3}} = \frac{t}{(1-t)^3}$

$\Rightarrow \frac{C_1'}{(t-1)^2} = -\frac{t}{(t-1)^3} \Rightarrow C_1' = -\frac{t}{t-1}$

$$\Rightarrow C_1 = -\int \frac{t\,dt}{t-1} + \overset{\in\mathbb{R}}{C_2} = -\int \left[1 + \frac{1}{t-1}\right] dt + C_2 = -t - \ln|t-1| + C_2$$

$$x_1 = -\frac{1}{(t-1)^2}\left[t + \ln|t-1| + C_2\right],\quad x_1(0) = 1 \Rightarrow C_2 = -1$$

$$x = \frac{1}{1-t} + \mu\left[-\frac{1}{(t-1)^2}\left(t + \ln(1-t) - 1\right)\right] + \dots$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0} = -\frac{1}{(t-1)^2}\left[t + \ln(1-t) - 1\right]$$

. **1068.** $\frac{1-t-\ln(1-t)}{(1-t)^2}$.

## II Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф:

№667

**667.** Функции $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = |x^5|$ удовлетворяют уравнению $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Являются ли они линейно зависимыми на интервале $(-1, 1)$? Объяснить ответ.

Заметим, что $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0 \Rightarrow y'' + a_0(x)y' + a_1(x)y = 0$

должны быть непрерывными функциями

тогда решения будут ЛЗ

но это не так

□ покажем ЛНЗ: на $(0,1)$:

$$\alpha x + (\beta+\gamma)x^5 \equiv 0$$

на $(-1,0)$

$$\alpha x + (\beta-\gamma)x^5 \equiv 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \beta-\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ЛНЗ}$$

■

**667.** Линейно независимы. Уравнение не удовлетворяет условиям теоремы.

Рассмотрим линейное однородное уравнение порядка $n$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0, \tag{1}$$

где $a_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, заданные непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$.

**Определение.** Определителем Вронского (или сокращенно вронскианом) решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (1) называется определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

и обозначается $W(x)$ или $W[y_1(x), \ldots, y_n(x)]$.

**Теорема 3.** *Решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (1) линейно зависимы тогда и только тогда, когда $W(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (1) линейно независимы тогда и только тогда, когда $W(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$.*

**Теорема 4.** *Пусть $W(x)$ — определитель Вронского решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (1) и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда для всех $x \in [\alpha, \beta]$ справедлива формула Лиувилля — Остроградского*

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(\zeta)d\zeta}.$$

№668

**668.** Доказать, что два решения уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (с непрерывными коэффициентами), имеющие максимум при одном и том же значении $x$, линейно зависимы.

◻ два решения $y_1$ и $y_2$ имеют макс в $x_0$: $y_1'(x_0) = 0$ и $y_2'(x_0) = 0$

запишем вронскиан:

$$W[y_1, y_2](x_0) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = (y_1 y_2' - y_1' y_2)(x_0) = 0$$

по формуле Л-О:

$$W(x) = \underbrace{W(x_0)}_{0} \exp\left(-\int\limits_{x_0}^{x} p(\zeta)d\zeta\right)$$

$$\Rightarrow W(x) \equiv 0 \Rightarrow y_1 \text{ и } y_2 \text{ ЛЗ } ■$$

В каждой из задач **674—680** составить линейное однородное дифференциальное уравнение (возможно меньшего порядка), имеющее данные частные решения.

№677

**677.** $x^2-3x,\ 2x^2+9,\ 2x+3.$

$$W[y_1,y_2,y_3](x)=\begin{vmatrix} x^2-3x & 2x^2+9 & 2x+3 \\ 2x-3 & 4x & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}=-8(x^2-3x)+4(2x^2+9)-12(2x+3)\equiv 0 \Rightarrow \text{ЛЗ}$$

$\Rightarrow$ достаточно 2го порядка

$$W[y,y_2,y_3]=\begin{vmatrix} y & 2x^2+9 & 2x+3 \\ y' & 4x & 2 \\ y'' & 4 & 0 \end{vmatrix}=(-4x^2-12x+18)y''+(8x+12)y'-8y=0$$

$$(2x^2+6x-9)y''-(4x+6)y'+4y=0$$

**677.** $(2x^2+6x-9)y''-(4x+6)y'+4y=0.$

С пз:

Решить уравнения (1–66):

Для получения общего решения линейного неоднородного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами наиболее часто применяется следующий метод. Сначала путем подбора находят какое-нибудь решение соответствующего линейного однородного уравнения и с помощью формулы Лиувилля-Остроградского получают общее решение линейного однородного уравнения. Затем методом вариации постоянных находят общее решение заданного линейного неоднородного уравнения.

№6

$\boxed{6.}$ $(1-\ln x)y''+\dfrac{1}{x}\,y'-\dfrac{1}{x^2}\,y=(1-\ln x)^2.$

Одн-ур: $(1-\ln x)y''+\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=0$

Заметим, что $y_0=\ln x$ = реш $\Rightarrow$ $y_0'=\frac{1}{x}$, $y_0''=-\frac{1}{x^2}$ $\Rightarrow (\ln x-1)\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}=0$

Формула Л-О: $W[y_0, y] = C_1 \exp\left[-\int \frac{q}{p} dx\right]$ для $py'' + qy' + ry = 0$

$$\ln x \cdot y' - \frac{1}{x} y = C_1 \exp\left[\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}\right]$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = \int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = \ln|\ln x - 1|,$$ $C_1$ – конст интегр.

$$y' \ln x - y \cdot \frac{1}{x} = C_1 (\ln x - 1) \Big/ : \ln^2 x \Rightarrow \frac{y' \ln x - y \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{C_1 (\ln x - 1)}{\ln^2 x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{\ln x}\right)' = C_1 \frac{(\ln x - 1)}{\ln^2 x} \Rightarrow \frac{y}{\ln x} = \frac{C_1 x}{\ln x} + C_2 \Rightarrow y = C_1 x + C_2 \ln x$$ – решение одн-ур

$$\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx = \int \frac{\ln x \cdot 1 - \frac{1}{x} \cdot x}{\ln^2 x} dx = \frac{x}{\ln x} + C_2$$

МВП: $\begin{cases} C_1' x + C_2' \ln x = 0 \\ C_1' + C_2' \cdot \frac{1}{x} = \frac{(1 - \ln x)^2}{1 - \ln x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{\ln x}{x} \cdot C_2' \\ C_2' \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 - \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\ln x \\ C_2' = x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -x(\ln x - 1) + C_3 \\ C_2 = \frac{x^2}{2} + C_4 \end{cases}$$

$$\int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C_4$$

$u = \ln x \quad u' = \frac{1}{x}$
$v' = 1 \Rightarrow v = x$

$$\Rightarrow y = \left[-x(\ln x - 1) + C_3\right] x + \left[\frac{x^2}{2} + C_4\right] \ln x = C_3 x + C_4 \ln x + x^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x$$

**6.** $y = C_1 x + C_2 \ln x + x^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x.$

№16

**16.** $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 2x^2e^{2x}.$

Одн. ур: $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$

Найдём частное реш одн-ур в виде $y_0 = e^{\beta x}$, $y_0' = \beta e^{\beta x}$, $y_0'' = \beta^2 e^{\beta x}$

$$x\beta^2 e^{\beta x} - (2x+1)\beta e^{\beta x} + (x+1)e^{\beta x} = 0 \quad \Big| : e^{\beta x}$$

$$x\beta^2 - (2x+1)\beta + (x+1) = 0$$

$$x(\beta^2 - 2\beta + 1) + (1-\beta) = 0 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow y_0 = e^x$$

$$\Rightarrow e^x y' - e^x y = C_1 \exp\left[\int \frac{2x+1}{x} dx\right] = C_1 \exp[2x + \ln x] = C_1 e^{2x} \cdot x$$

$$\int \frac{2x+1}{x} dx = \int 2 + \frac{1}{x} dx = 2x + \ln x + C_1$$

$$y' \cdot e^x - ye^x = C_1 e^{2x} x \quad \Big| : e^{2x} \Rightarrow \left(\frac{y}{e^x}\right)' = C_1 x \Rightarrow \frac{y}{e^x} = C_1 x^2 + C_2$$

$$y = C_1 x^2 e^x + C_2 e^x$$

МВП: $\begin{cases} C_1' x^2 e^x + C_2' e^x = 0 \\ C_1'(2x + x^2)e^x + C_2' e^x = 2x e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' x^2 + C_2' = 0 \\ C_1'(2x + x^2) + C_2' = 2x e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2' = -C_1' x^2 \\ C_1' \cdot 2x = 2x e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' = e^x \\ C_2' = -x^2 e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = e^x + C_3 \\ C_2 = -e^x(x^2 - 2x + 2) + C_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = [e^x + C_3]x^2 e^x + [-e^x(x^2 - 2x + 2) + C_4]e^x = (C_4 + C_3 x^2)e^x + 2(x-1)e^{2x}$$

**16.** $y = (C_1 + C_2x^2)e^x + 2(x-1)e^{2x}.$

№53

**53.** $x(x+1)y'' + (4x+2)y' + 2y = 6(x+1).$

Одн-ур: $x(x+1)y'' + (4x+2)y' + 2y = 0$

$y_0 = \frac{1}{x}$ - реш $\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{x} + y \cdot \frac{1}{x^2} = C_1 \exp\left[-\int \frac{4x+2}{x(x+1)} dx\right] \quad / \cdot x^2$

$-\int \frac{4x+2}{x(x+1)} dx = -2\int \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} dx = -2[\ln x + \ln(x+1)] + C_1$

$\Rightarrow$

$= (yx) = C_1 \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow xy = C_1 \frac{1}{x+1} + C_2 \Rightarrow y = \frac{C_1}{x(x+1)} + \frac{C_2}{x}$

МВП: $\begin{cases} \frac{C_1'}{x(x+1)} + \frac{C_2'}{x} = 0 \\ C_1' \cdot \left(\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2}\right) + C_2'\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2' = \frac{-C_1'}{x+1} \\ C_1'\left[\frac{-2x-1}{x^2(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2(x+1)^2}\right] = \frac{6}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1' = -6(x+1)^2 \\ C_2' = 6(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2(x+1)^3 + C_3 \\ C_2 = 3(x+1)^2 + C_4 \end{cases}$

$\Rightarrow y = \frac{C_4}{x} + \frac{C_3}{x(x+1)} + x + 2$

**53.** $y = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x(x+1)} + x + 2.$

№73

**73.** $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 2x^{\frac{5}{2}}e^x.$

Одн. ур: $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ ур. Бесселя*

Заметим, что $y_0=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ - решение

$$y'\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-y\cdot\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)'=C_1\exp\Big[-\underbrace{\int\frac{1}{x}dx}_{=-\ln x}\Big] \quad \Big/ : \left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^2$$

$$\left(\frac{y}{\sin x/\sqrt{x}}\right)'=\frac{C_1}{\sin^2 x}\Rightarrow\frac{y}{\sin x/\sqrt{x}}=C_1\,\mathrm{ctg}\,x+C_2\Rightarrow y=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}C_1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}C_2$$

МВП:
$$\begin{cases}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}C_1'+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}C_2'=0\\ -\left[\frac{2x\sin x+\cos x}{2x^{3/2}}\right]C_1'+\left[\frac{2x\cos x-\sin x}{2x^{3/2}}\right]C_2'=2\sqrt{x}\,e^x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1'=-C_2'\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\\ -[2x\sin x+\cos x]C_1'+[2x\cos x-\sin x]C_2'=4x^2e^x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1'=-C_2'\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\\ C_2'\left[\frac{\sin x}{\cos x}(2x\sin x+\cos x)+2x\cos x-\sin x\right]=4x^2e^x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1'=-C_2'\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\\ C_2'\left[2x\frac{\sin^2 x}{\cos x}+2x\cos x\right]=4x^2e^x \Big/\cdot\frac{\cos x}{2x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1'=-C_2'\frac{\sin x}{\cos x}\\ C_2'=2xe^x\cos x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1'=-2xe^x\sin x\\ C_2'=2xe^x\cos x\end{cases}$$

$$z'=C_2'-iC_1'=2xe^x\cdot[\cos x+i\sin x]=2xe^x\cdot e^{ix}=2xe^{x(1+i)}$$

$$z=2\int xe^{x(1+i)}dx \ominus \qquad \begin{matrix}u=x & \Rightarrow & u'=1\\ v'=e^{x(1+i)} & & v=\frac{(1-i)}{2}e^{x(1+i)}\end{matrix}$$

$$\ominus\ 2\left[x\,\frac{(1-i)}{2}e^{x(1+i)}-\frac{(1-i)}{2}\int e^{x(1+1)}\,dx\right]= x(1-1)e^{x(1+i)}-\underbrace{\frac{(1-i)^2}{2}}_{i}e^{x(i+1)}$$

$$= e^x\left[x(1-i)+i\right](\cos x+i\sin x)+(C_4+iC_3)$$

$$\operatorname{Re} z = e^x(x\cos x + x\sin x - \sin x)+C_4 = C_2'$$

$$\operatorname{Im} z = e^x(x\sin x - x\cos x + \cos x)+C_3 = -C_1'$$

$$y=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}C_3+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}C_4+\frac{e^x}{\sqrt{x}}\left[-\cos x(\cancel{x\sin x}-x\cos x+\cos x)+\sin x\,(\cancel{x\cos x}+x\sin x-\sin x)\right]$$

$$=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}C_3+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}C_4+\frac{x-1}{\sqrt{x}}e^x$$

**73.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\,e^x.$

Ф n 22

№47:

**47.** Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ — решения уравнения $(x+2)y''-3y'+y\sqrt{1-x}=0$ с начальными условиями $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$, $y_2(0)=3$, $y_2'(0)=2$.

а) Указать интервал, на который их можно продолжить.

б) Составляют ли они фундаментальную систему?

в) Чему равен детерминант Вронского этих решений при $x=-1$?

а) $(x+2)y''-3y'+\sqrt{1-x}\,y=0$

$$\begin{cases} x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2 \\ \sqrt{1-x}\in\mathbb{R} \Rightarrow x\le 1\end{cases}$$ коэфф аналитичны

$x_0=0 \Rightarrow$ интервал $(-2,1)$

б) ФСР $\Leftrightarrow W[y_1,y_2](0)\neq 0 \to \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow$ да в) ф. Л-О:

$$W(x) = W(0)\exp\left[3\int_0^x \frac{dt}{t+2}\right]$$

$$\int_0^x \frac{dt}{t+2} = \ln|t+2|\Big|_0^x = \ln(x+2) - \ln 2$$

$$\Rightarrow W(x) = 2\exp[3\ln(x+2) - 3\ln 2] = \frac{1}{4}(x+2)^3$$

при $x=-1$: $W(-1) = \frac{1}{4}$

**47.** а) $-2 \leqslant x \leqslant 1$; б) да; в) $1/4$.

T1:

**1.** Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, где $\nu = \mathrm{const}$ на $(0;\infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

$\square$ от противного пусть $y_1, y_2$ - ЛНЗ решения

по формуле Л-О:

$$W(x) = W(x_0)\exp\left[-\int_{x_0}^x \frac{1}{t}dt\right] = \frac{C}{x},\ C \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} W(x) = \infty$, но $y_1, y_2, y_1', y_2'$ - ограничены (по усл) $\Rightarrow W(x)$ ограничена

противоречие

$\blacksquare$

# III Теорема сравнения Штурма.

**Теорема 1** *Пусть* $y'' + P(x)y = 0$, $z'' + Q(x)z = 0$, $P(x) \geq Q(x)$ *и* $\forall x \in I$. *Тогда между двумя нулями любого решения* $z(x)$ *содержится по крайней мере 1 нуль любого решения* $y(x)$.

**Теорема 2 (Критерий Кнезера)** *Пусть* $y'' + Q(x)y = 0$.

*Если* $Q(x) < \frac{1}{4x^2}$ $\forall x \in [x_0; +\infty)$, $x_0 > 0$, *то любое решение* $y(x)$ *имеет не более 1 нуля.*

*Если для некоторого* $\varepsilon > 0$ $Q(x) > \frac{1+\varepsilon}{4x^2}$ $\forall x \in [x_0; +\infty)$, $x_0 > 0$, *то каждое решение* $y(x)$ *имеет бесконечно много нулей.*

Следствие (*):

$q(x) \leq 0$ для $y'' + q(x)y = 0$, $\forall x \in I \Leftrightarrow$ любое нетр решение имеет не более 1 нуля

(для доказательства достаточно применить Т. Штурма для $z'' = 0$ и $z(x) \equiv 1$)

Ф:

№723

**723.** Доказать, что в случае $q(x) \leqslant 0$ все решения уравнения $y'' + q(x)y = 0$ с положительными начальными условиями $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$ остаются положительными при всех $x > x_0$.

□ по следствию (*) $\Rightarrow$ при $x \in (x_0, +\infty)$ $y(x)$ имеет не более 1 нуля

пусть $\exists x_1 > x_0 : y(x_1) = 0$

$y'' + qy = 0 \Rightarrow y'' = -qy \geq 0$ на $(x_0, x_1)$ $\Rightarrow$ $y'$ возр на $(x_0, x_1)$

$y'(x_0) > 0$

$\Rightarrow y' > 0$ на $(x_0, x_1)$ $\Rightarrow$ $y$ возр на $(x_0, x_1)$

$y(x_0) > 0$

$\Rightarrow y > y(x_0) > 0$ на $(x_0, x_1)$

противоречие ■

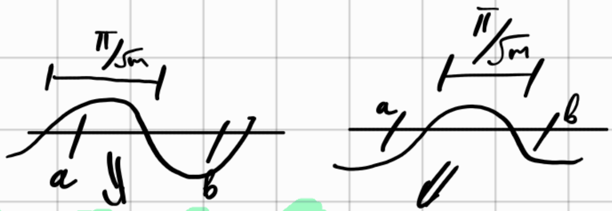
№726

**726.** Найти расстояние между двумя соседними нулями любого (не тождественно равного нулю) решения уравнения $y'' + my = 0$, где $m = \mathrm{const} > 0$. Сколько нулей может содержаться на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$?

$y'' + my = 0$

решение: $y = A \cdot \cos(\sqrt{m}\,x + \varphi_0) = 0$

$\Rightarrow \Delta x = \frac{\pi}{\sqrt{m}}$




На отрезке $x \in [a, b]$ лежит $n = \left[\frac{b-a}{\pi/\sqrt{m}}\right]$ или $\left[\frac{b-a}{\pi/\sqrt{m}}\right] + 1$ нуля

б) Да. в) Нет. г) Нет. **726.** $\pi/\sqrt{m}$; $[(b-a)\sqrt{m}/\pi]$ нулей или на один больше (квадратные скобки означают целую часть числа).

С п10

№2

**2.** Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' + \frac{1}{4(x^2+1)}y = 0$ имеет на промежутке $[0, +\infty)$ лишь конечное число нулей.

□ по Критерию Кнезера $\frac{1}{4(x^2+1)} < \frac{1}{4x^2}$ при $[x_0, +\infty)$ при $x_0 > 0$ не более 1 нуля

рассмотрим $[0, x_0)$: $\frac{1}{4(x^2+1)} \leq \frac{1}{4} = m$

тогда из т. Штурма $\Rightarrow |x_1 - x_2| \geq \frac{\pi}{\sqrt{m}} = 2\pi$ (Задача 726)

и на $[0, x_0)$ лежит не более $\left[\frac{x_0}{2\pi}\right] + 1$ нуля

$\Rightarrow$ на $[0, +\infty)$ лежит не более $\left[\frac{x_0}{2\pi}\right] + 2$ нуля

$\boxtimes$

№3

**3.** Доказать, что каждое решение уравнения $y'' + \frac{1}{1+x^2} y = 0$ имеет на промежутке $[0, +\infty)$ бесконечное число нулей.

$\square$ по Кр. Кнейзера

пусть $\varepsilon = 1$, $x_0 = 1$

если $\exists \varepsilon = 1 : \frac{1}{1+x^2} > \frac{1+\varepsilon}{4x^2}$ $\forall x \in [1, +\infty)$ ($x_0 = 1$) $\Rightarrow$ любое решение имеет б. число реш на $[1, +\infty)$

$\Rightarrow$ и на $[0, +\infty)$ $\blacksquare$

Теория: (**) для ур. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, замена $y = z \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^x P(t)dt\right]$ позволяет избавиться от $y'$

$\to z'' + \left[Q - \frac{1}{2}P' - \frac{1}{4}P^2\right]z = 0$ (для док-ва нужно рассмотреть замену $y = \mu z$)

№6

**6.** Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' + x^2y' + (x+4)y = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет не более шести нулей.

$\square$ замена $y = z \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^x t^2 dt\right] = z \cdot e^{\frac{-x^3}{6}}$

$\to$

$$z'' + \underbrace{\left(-\frac{x^4}{4} - \frac{3x}{4} + 1\right)}_{Q(x)} z = 0$$

1) при $x \in (-2, 2)$ $Q(x) \leq 2$ $\Rightarrow |x_1 - x_2| \geq \frac{\pi}{\sqrt{2}} > 2 \Rightarrow \leq 2$ нулей

2) при $x \in [2, +\infty)$ $Q(x) < 0 \Rightarrow$ из следствия (*) не более 1 нуля

3) для $x \in (-\infty, -2]$ аналогично не более 1

$\to z'' + Q(x) z = 0$ имеет не более 4 нулей на $\mathbb{R}$

в силу замены число нулей изначального ур. совпадает с числом нулей $z'' + Qz = 0$ $\Rightarrow$ доказано $\blacksquare$

№ T3

**3.** Пусть функция $q(x)$ непрерывна на всей действительной оси и $q(x) \leq 0$. Доказать, что краевая задача $y'' + q(x)y = 0, y(x_1) = a,\ y(x_2) = b$, при любых $a, b, x_1 \neq x_2$ имеет решение и это решение единственно.

□ Существование:

пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – два линейно незав. решения (существуют т.к. $q(x)$ – непр.)

$\Rightarrow y(x) = C_1\varphi(x) + C_2\psi(x)$ пусть $\varphi(x_1) = 1$ $\varphi'(x_1) = 0$

$y(x_1) = a = C_1$ $\psi(x_1) = 0$ $\psi'(x_1) = 1$

$y(x_2) = a\varphi(x_2) + C_2\psi(x_2) = b$

$\Rightarrow C_2 = \dfrac{b - a\varphi(x_2)}{\psi(x_2)}$ ; $\psi(x_2)$, иначе $\psi(x_2) \equiv 0$

$\Rightarrow$ решение существует

Единственность: от противного: пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ решения

пусть $z(x) = y_1(x) - y_2(x)$

тогда $z'' + qz = 0$, $z(x_1) = 0$, $z(x_2) = 0$

$$\int_{x_1}^{x_2} [z''z + qz^2]\,dx = (zz')\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} z'^2\,dx + \int_{x_1}^{x_2} qz^2\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} z'^2\,dx = \int_{x_1}^{x_2} q z^2\,dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} z'^2\,dx \leq 0, \text{ т.к. } z'^2 \geq 0$$

$\Rightarrow z(x) = 0 \Rightarrow z \equiv 0$

$\Rightarrow$ решение единственно.

$\boxtimes$

№T4

**4.** Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения

$$y'' + 2x^2y' + (2x+1)y = 0$$

имеет на действительной оси не более трех нулей.

$\square$ замена $y = z \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^x 2t^2 dt\right] = z \cdot \exp\left(-\frac{x^3}{3}\right)$

$\Rightarrow z'' + \underbrace{(1-x^4)}_{Q(x)} z = 0$

1) при $x \in (-1,1)$ : $Q(x) \leq 1$ , $y'' + y = 0$ $\Rightarrow$ $|x_1 - x_2| \geq \pi > 2$ $\Rightarrow$ $\leq 1$ нуля

2) при $x \geq 1$ $Q(x) \leq 0 \Rightarrow$ по сл. (*) $\Rightarrow$ $\leq 1$ нуля

3) при $x \leq -1$ аналогично $\leq 1$ нуля

$\Rightarrow \leq 3$ нулей для $z'' + Qz = 0$

$\Rightarrow \leq 3$ нулей для решений изн. уравн

$\blacksquare$

№T5

**5.** Доказать, что для любого решения уравнения

$$y'' + (2 + \cos 3x)y = 0$$

существует точка $\xi \in [-1; 6]$ такая, что $y'(\xi) = 0$.

решение $y \in C^2[-1,6]$

$\square$ $q = 2 + \cos 3x \geq 1$ $\Rightarrow$ (Задача 726) нулей $\left[\frac{7}{\pi}\right] = 2$ нуля

$\Rightarrow$ по т. Ролля $\exists \xi : y'(\xi) = 0$

$\blacksquare$

## №6 (a)

**6.** Доказать, что:

a) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \mathrm{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0, +\infty)$;

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

Замена: $y = z \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{1}{t}\,dt\right] = \frac{z}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow z'' + \underbrace{\left[\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) + \frac{1}{4}\cdot x^2\right]}_{Q(x)} z = 0$$

По критерию Кнезера: $\exists \varepsilon = 4\nu^2 : \; Q(x) > \frac{1+\varepsilon}{4x^2}, \; \forall x \in [x_0, +\infty)$, где $x_0 = \sqrt{2}\,\nu + 1$

$\Rightarrow$ на $[x_0, +\infty)$ бес. много нулей

$\Rightarrow$ на $(0, +\infty)$ б.м. нулей

$\blacksquare$

# IV Исследование поведения фазовых траекторий.

Теория. Классификация положений равновесия:

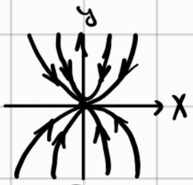
$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $\lambda_i$ – собств. значения, $h_i$ – собств. вектора.

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_i \neq 0,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$

то $\begin{cases} x = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \Rightarrow y = c_1\left(\frac{x}{c_2}\right)^{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}$

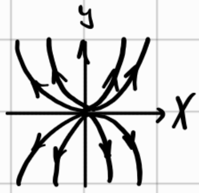
если $|\lambda_2| > |\lambda_1|,\ \lambda_1\lambda_2 > 0$ 　　　　 если $\lambda_1\lambda_2 < 0$

$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$

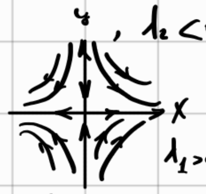



устойчивый узел

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$




неустойч. узел

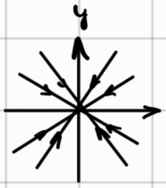



седло (неуст)

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ 　　　　 $A$ – недиаг $\Rightarrow A \to \begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$

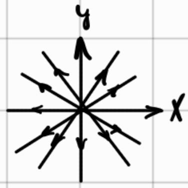
$\begin{cases} x = c_1 e^{\lambda t} \\ y = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$ 　 $A$ – диагонализ. 　　　　 $\begin{cases} x = (c_1 t + c_2) \\ y = c_1 e^{\lambda t} \end{cases}$

$\lambda < 0$




уст. дикритический узел

$\lambda > 0$




неуст. дикритический узел

$\lambda > 0$


неуст вырожденный узел

$\lambda < 0$


уст вырожденный узел

3) $\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

фокус

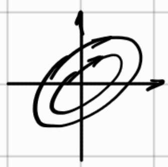
$\alpha < 0$ уст 　　　 $\alpha > 0$ неуст 　　　 $\alpha = 0$ центр



$\begin{cases} x = \rho e^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi) \\ y = \rho e^{\alpha t}\sin(\beta t + \varphi) \end{cases}$

где $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

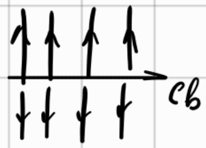


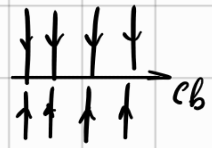


>> опр подстановкой точки

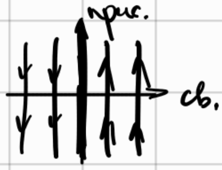
4) $\det A = 0 \Rightarrow$ а) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

а)




б)




в) все точки равновесия

Во всех задачах изобразить фазовые траектории, для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

В задачах **961—978** исследовать особые точки написанных ниже уравнений и систем. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости $(x, y)$.

Ф:

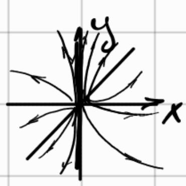
№971.

**971.** $\begin{cases} \dot{x} = 3x, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

собств вектор: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$




неустойчивый узел

**971.** Узел.

№972

**972.** $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$ кр 2

неуст. выр. узел

**972.** Вырожденный узел.

св: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

присоед: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$


напр опр подст. точки в систему

в т $(1, 0)$ $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

№973

**973.** $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda + 13$

$\lambda_1 = -2 + 3i$

$\lambda_2 = -2 - 3i$

$\mathrm{Re}\,\lambda_1 = -2 < 0 \Rightarrow$ уст. фокус

в т. $(1,0)$ $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

**973.** Фокус.

№974

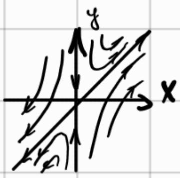
**974.** $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix} \Rightarrow$ седло

**974.** Седло.

С В: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$




№975

**975.** $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$

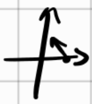
$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = i\sqrt{6}$

$\lambda_2 = -i\sqrt{6}$

$\mathrm{Re}\,\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ центр

в т. $(1,0)$; $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$



**975.** Центр.

С п13:

№39

$\boxed{39.}$ $\begin{cases} \dot{x} = 8 + 4y - 2xy, \\ \dot{y} = x^2 - 4y^2. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 8 + 4y - 2xy = 0 \\ x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ 1) $\begin{cases} u = x+2 \\ v = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u-2 \\ y = v-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot u = 8+4(v-1)-2(u-2)(v-1) \\ \dot v = (u-2)^2-4(v-1)^2 \end{cases}$ линеариз $\Rightarrow \begin{cases} \dot u = 2u+8v \\ \dot v = -4u+8v \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 5+i\sqrt{23}$

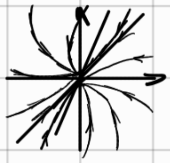
$\lambda_2 = 5-i\sqrt{23}$

$\mathrm{Re}\,\lambda_1 = 5>0 \Rightarrow$ неуст фокус

в т $(1,0)$: $\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$  

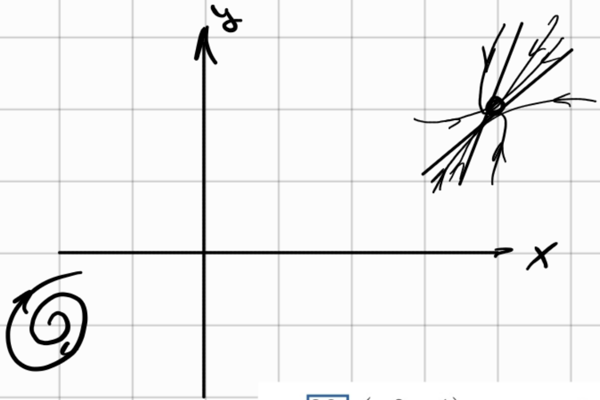
2) $\begin{cases} u = x-4 \\ v = y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u+4 \\ y = v+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot u = 8+4(v+2)-2(u+4)(v+2) \\ \dot v = (u+4)^2-4(v+2)^2 \end{cases}$

лин $\Rightarrow \begin{cases} \dot u = -4u-4v \\ \dot v = 8u-16v \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 8 & -16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -12, \ \lambda_2 = -8$ уст узел

$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 

$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$




**39.** $(-2,-1)$ — неустойчивый фокус, $\circlearrowright$;

$(4,2)$ — устойчивый узел, $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = -12$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

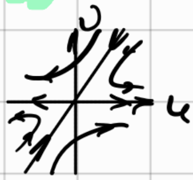
№48

**48.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(1 - y^2). \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} x - y^2 = 0 \\ \operatorname{arctg}(1-y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

1) $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u+1 \\ y = v+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = (u+1) - (v+1)^2 \\ \dot{v} = \operatorname{arctg}(1-(v+1)^2) \end{cases} \xRightarrow{\text{лин}} \begin{cases} \dot{u} = u - 2v \\ \dot{v} = -2v \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix} \Rightarrow$ седло

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$



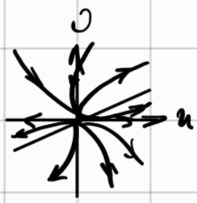

$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u+1 \\ y = v-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = (u+1) - (v-1)^2 \\ \dot{v} = \operatorname{arctg}(1-(v-1)^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = u + 2v \\ \dot{v} = 2v \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix} \Rightarrow$ неуст узел

$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$




**48.** $(1,-1)$ — неустойчивый узел, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
$(1,1)$ — седло, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованного уравнения в окрестности положений равновесия для уравнений (53–82):

## №57

**57.** $\ddot{x} + 2\dot{x} + x - 2x^2 + 1 = 0.$

$$y = \dot{x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\dot{x} - x + 2x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2y - x + 2x^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2y - x + 2x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u + 1 \\ y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -2v - (u+1) + 2(u+1)^2 - 1 \end{cases}$

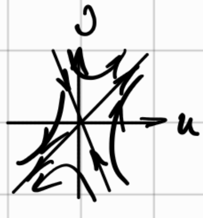
$$\overset{\text{лин}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = 3u - 2v \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 1 \end{matrix}$$

седло

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

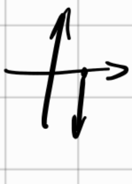


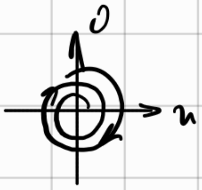

2) $\begin{cases} u = x + \frac{1}{2} \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u - \frac{1}{2} \\ y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -2v - (u - \frac{1}{2}) + 2(u - \frac{1}{2})^2 - 1 \end{cases}$

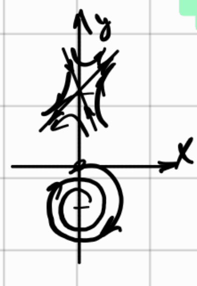
$$\overset{\text{лин}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -3u - 2v \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

$\operatorname{Re} \lambda_1 = -1 < 0 \Rightarrow$ уст фокус

в т $(0,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$






**57.** $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ — устойчивый фокус, $\circlearrowright$;
$(1,0)$ — седло, $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ф л25:

№161

**161.** При каких соотношениях между коэффициентами $a$, $b$, $c$, $d$ особая точка системы $\dot{x} = ax + by$, $\dot{y} = cx + dy$ является
а) седлом,
б) узлом?

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

а) седло: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{4}\left((a+d) - \sqrt{D}\right)\left((a+d) + \sqrt{D}\right) < 0$$

$$(a+d)^2 - D < 0 \Rightarrow D > (a+d)^2$$

$$ad - bc < 0 \Rightarrow ad < bc$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ \lambda_i \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D > 0 \Rightarrow (a+d)^2 - 4(ad-bc) > 0 \text{ или } (a-d)^2 + 4bc > 0$$

, но $(ad-bc) < 0$

$\Rightarrow (a+d)^2 - 4(ad-bc) > 0$

$\Rightarrow$ Усл: $ad < bc$

б) узел: $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow (a+d)^2 - 4(ad-bc) \geq 0 \Rightarrow (a-d)^2 + 4bc \geq 0$$

$$\lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow (a^2+d)^2 - D > 0 \Rightarrow D < (a+d)^2$$

$$(ad - bc) > 0 \Rightarrow ad > bc$$

$$\Rightarrow \text{Усл: } \begin{cases} (a-d)^2 + 4bc \geq 0 \\ ad > bc \end{cases}$$

**161.** а) $ad < bc$; б) $ad > bc$, $(a-d)^2 + 4bc > 0$.

# V. Устойчивость по Ляпунову.

Опр:

Пусть $\dot{x} = f(t, x)$

реш $x = \varphi(t)$, $x(t_0) = x_0$ уст. по Л:

если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall \tilde{x}_0: |x_0 - \tilde{x}_0| < \delta\ \exists x = \tilde{\varphi}(t)$ и $|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)| < \varepsilon\ \forall t \geq t_0$

Ф:

№894:

**894.** Доказать, что если какое-нибудь одно решение линейной системы дифференциальных уравнений устойчиво по Ляпунову, то устойчивы все решения этой системы.

□

$\dot{x} = Ax$ система

пусть $x_0(t)$ - решение стабильное по Ляпунову

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta \leftrightarrow |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon,\ t \geq t_0$

Пусть $x(t)$ - решение, запишем в виде $x(t) = x_0(t) + y(t)$

$y(t)$ уд $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(t_0) = x(t_0) - x_0(t_0) \end{cases}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |y(t_0)| = |x(t_0) - x_0(t_0)| < \delta$

$\leftrightarrow |y(t)| = |x(t) - x_0(t)| < \varepsilon \Leftrightarrow$ нулевое решение $\dot{y} = Ay$ стабильно по Ляпунову

$\Rightarrow$ т.к тривиальное решение стабильно и какое-то решение стабильно $\Rightarrow$ стабильно любое реш

☒

В задачах **915—922** для данных систем найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

№920

**920.** $\begin{cases} \dot{x} = e^y - e^x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} e^y - e^x = 0 \\ \sqrt{3x+y^2} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u+1 \\ y = v+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = e^{v+1} - e^{u+1} \\ \dot{v} = \sqrt{3(u+1) + (v+1)^2} - 2 \end{cases} \xRightarrow{\text{лин}} \begin{cases} \dot{u} = -eu + ev \\ \dot{v} = \frac{3}{2}u + v \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & e \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -e-\lambda & e \\ \frac{3}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-e-\lambda)(1-\lambda) - \frac{3}{2}e = 0$

$\lambda^2 + (e-1)\lambda - \frac{5}{2}e = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 - e \pm \sqrt{1+8e+e^2}\right)$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1 - e + \sqrt{1+8e+e^2}\right) > 0 \Rightarrow$ неуст

$\begin{cases} u = x+4 \\ v = y+4 \end{cases} \to \begin{cases} x = u-4 \\ y = v-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = e^{v-4} - e^{u-4} \\ \dot{v} = \sqrt{3(u-4) + (v-4)^2} - 2 \end{cases} \xRightarrow{\text{лин}} \begin{cases} \dot{u} = -e^{-4}u + e^{-4}v \\ \dot{v} = \frac{3}{2}u - 4v \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-4} & e^{-4} \\ \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -e^{-4}-\lambda & e^{-4} \\ \frac{3}{2} & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-e^{-4}-\lambda)(-4-\lambda) - \frac{3}{2}e^{-4} = 0$

$\lambda^2 + (4+e^{-4})\lambda + \frac{5}{2}e^{-4} = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-4 - e^{-4} \pm \sqrt{16 - 2e^{-4} + e^{-8}}\right)$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{5}{2}e^{-4} > 0$

$\lambda_1 < 0$
$\lambda_2 < 0$

уст

$(1,1)$ – неуст
$(-4,-4)$ – уст

**920.** (1, 1) неустойчиво, (-4, -4) устойчиво.