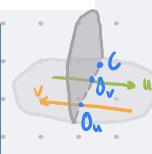


11.1. Показать, что моменты инерции твёрдого тела относительно любых двух параллельных осей u и v связаны соотношением $J_u = J_v + m(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_u)$, где векторы $\mathbf{r} = \overrightarrow{O_u O_v}$ и $\mathbf{r}_c = \overrightarrow{O_c C}$ лежат в плоскости, проходящей через центр масс C тела, перпендикулярно этим осям. Оси u и v пересекают упомянутую плоскость соответственно в точках O_u и O_v .

Dано: $\overline{r} = \overline{O_u O_v}$
 $\overline{r}_c = \overline{O_c C}$
 $U \parallel V$



D-Tb: $J_v = J_u + m(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - 2\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{r}_u)$

$$\overline{r}_v = \overline{r}_c - \overline{r} \quad J_u = J_c + m(\overline{r}_c \cdot \overline{r}_u)$$

$$J_v = J_c + m(\overline{r}_v \cdot \overline{r}_v) = J_u + m(-\overline{r}_c \cdot \overline{r}_c + \overline{r}_c \cdot \overline{r}_c - 2\overline{r}_c \cdot \overline{r} + \overline{r} \cdot \overline{r}) = J_u + m(\overline{r} \cdot \overline{r} - 2\overline{r}_c \cdot \overline{r}_u)$$

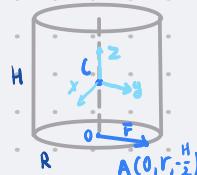
11.11. Высота однородного кругового цилиндра равна H , радиус его основания — R , а масса — m . Найти главные оси инерции в точке A цилиндра. Для случая $H = \sqrt{3}R$ выписать моменты инерции относительно найденных осей.



К задаче 11.11

Дано: H, R, m
ГЛ. оси иск.?

$\hat{\mathbf{j}}$?



$$\hat{J}_c = \text{diag}(A, A, C), \quad A = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mH^2, \quad C = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\hat{J}_A = \hat{J}_c + m j(\overline{r}), \quad j(\overline{r}) = Er^2 - \overline{r}\overline{r}$$

$$j_A = j_c + m \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2 + c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

при $H = R\sqrt{3}$: $\hat{J}_c = \frac{1}{2}mR^2 \cdot E$, $\hat{J}_A = \hat{J}_c + m j(\overline{r})$, где $j(\overline{r}) = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & -a_1 a_2 & -a_1 a_3 \\ a_1 a_2 & a_1^2 + a_3^2 & -a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & -a_2 a_3 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix}$, $j(r) = j(r)$
Найдем ГЛ. оси. иск.:

OAC-плоскость искл. \Rightarrow огра нж. искл. осей \perp ей ($\parallel O_x$)
расположим базис $E\eta\zeta$ так, что ось $\zeta \parallel CA$, $\eta \parallel O_x$,



Тогда \hat{J}_A будет иметь гарм. фиг

$$\text{и } J_{11} = J_{22} = \frac{1}{2}mR^2 + m(CA)^2 = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{3}{4}mR^2 = \frac{9}{4}mR^2, \quad J_{33} = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H/2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\hat{J} = \frac{1}{4}mR^2 \cdot \text{diag}(9, 9, 2)$$

Найдем α & θ общими способами:

$$\hat{J}_A = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} Am + R^2 + \frac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & Am + \frac{H^2}{4} & \frac{1}{2}RH \\ 0 & \frac{1}{2}RH & CM + R^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} \frac{5}{4}R^2 + \frac{1}{3}H^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{3}H^2 & \frac{1}{2}RH \\ 0 & \frac{1}{2}RH & \frac{3}{2}R^2 \end{pmatrix}$$

Найдем угол α такой, чтобы \hat{J}_A обладался

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & -S \\ 0 & S & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & S \\ 0 & -S & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & ca - sb & cb - sd \\ 0 & sa + cb & sb + cd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C & -S \\ 0 & S & C \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & Ca - 2Sc + b^2 & Csa - s^2b + C^2b - Cs^2d \\ 0 & Csa - s^2b + C^2b - Cs^2d & C^2a + 2Scb + s^2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}$$

$$CSa - S^2b + C^2b - CSd = 0 \Rightarrow \frac{d-a}{2} \sin 2\alpha = b \cos 2\alpha \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2b}{d-a} = \frac{RH}{\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{3}H^2} = \frac{RH}{\frac{5}{4}R^2 - \frac{1}{3}H^2} = \frac{12RH}{15R^2 - 4H^2}$$

$$17 \text{ ру } H=R\sqrt{5}; \operatorname{tg} 2\alpha = 4\sqrt{3}$$

11.11. Одна из главных осей перпендикулярна плоскости, проходящей через ось цилиндра и точку A , а две другие лежат в этой плоскости и составляют с образующей цилиндра углы α и $\frac{\pi}{2} - \alpha$, причем $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{12RH}{15R^2 - 4H^2}$. При

$$H = R\sqrt{3} \text{ имеем } \bar{J} = \frac{1}{4}mR^2(i\theta + j\phi + k\psi).$$

11.18. Однородный параллелепипед массы m с ребрами a, b, c вращается с угловой скоростью ω относительно своей диагонали OB . Найти кинетическую энергию T параллелепипеда и его момент импульса \bar{K}_A относительно произвольной точки A пространства.

Дано: m, a, b, c
 $T, \bar{K}_A = ?$

$$\int G x^2 dm = \frac{m}{abc} \int G x^2 dx dy dz = \frac{m}{abc} \int_{-c/2}^{c/2} dz \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \frac{ma^3}{12}$$

$$J_{xx} = \int G (y^2 + z^2) dm = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2) \Rightarrow \bar{J} = \frac{m}{12} \cdot \operatorname{diag}(b^2 + c^2, a^2 + c^2, a^2 + b^2)$$

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot w \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \bar{K}_c = \bar{J} \cdot \bar{w}, \bar{K}_A = \bar{K}_c + \bar{A}(x\sqrt{V_c}) = \bar{K}_c \quad \bar{K}_A = \frac{mw}{12\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{pmatrix} a(b^2 + c^2) \\ b(a^2 + c^2) \\ c(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} \bar{w}^T \bar{J} \bar{w} = \frac{mw^2}{24(a^2 + b^2 + c^2)} \cdot (a^2(b^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2)) = \frac{mw^2}{12} \cdot \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$T = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^T J_\omega \omega = \frac{1}{2} (\omega, j_\omega \omega) = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

$$11.18. K_{AB} = \frac{m \cos(\theta^2 + \phi^2)}{12(a^2 + b^2 + c^2)}, K_{AC} = \frac{m \cos(\theta^2 + \psi^2)}{12(a^2 + b^2 + c^2)}, K_{BC} = \frac{m \cos(\phi^2 + \psi^2)}{12(a^2 + b^2 + c^2)}, T = \frac{m \omega^2 (a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 r^2)}{12(a^2 + b^2 + c^2)}$$

11.23. Однородная квадратная пластина массы m вращается с угловой скоростью ω вокруг диагонали AC прямоугольной рамы $ABCD$. Диагональ рамы AC проходит через центр масс пластины O и лежит в ее плоскости. Рама вращается вокруг несоприкасавшейся с ней оси AB с угловой скоростью Ω . Найти кинетическую энергию T пластины, если ее сторона равна a , $AB = b$, $\angle BAC = \alpha$, $AO = OC$. В начальный момент пластины и рамы совпадали.

11.24. Решить задачу 11.23 для однородной треугольной пластинки со сторонами a, b, c .

Дано: m, w, Ω
 a, b, c, α
 $T = ?$

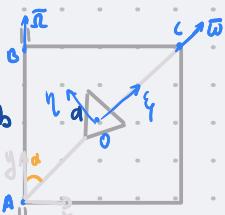


$$J_{33} \sim mr^2 \sim r^4$$

$$J_{33} = \frac{1}{16} J_{33} - \text{мом. ин. мал. } \Delta \text{ отн. бисс.}$$

$$\text{но Th. Г-и: } J_{33} = \frac{4}{16} J_{33} + \frac{3m}{4} x^2 \Rightarrow J_{33} = mx^2$$

$$h - \text{бис. мал. } \Delta \Rightarrow x = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a}{2\sqrt{3}}, J_{33} = \frac{ma^2}{12}, J_{11} = J_{22} = \frac{ma^2}{24}$$



$$T = \frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} \bar{w}^T \bar{J}_0 \bar{w}$$

$$\bar{w} = \bar{\Omega} \times \bar{AO} \Rightarrow V_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{\cos \alpha} \cdot \Omega \sin \alpha = \frac{1}{2} \Omega b \operatorname{tg} \alpha$$

$$\bar{w}_a = \bar{w} + \bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega \cos \alpha + w \\ \Omega \cos \alpha \cos \omega t \\ \Omega \sin \alpha \sin \omega t \end{pmatrix}$$

$$T_{BP} = \frac{ma^2}{2\cdot 2\cdot I} (\Omega^2 \cos^2 \alpha + 2\omega \Omega \cos \alpha + \omega^2 + \Omega^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \omega t + 2\Omega^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \omega t) = \\ = \frac{ma^2}{4B} (\omega^2 + 2\omega \Omega \cos \alpha + \Omega^2 (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \omega t))$$

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \hat{J} \cdot \omega = \frac{1}{2} (\omega, \hat{J}, \omega) = \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2)$$

$$11.24. T = \frac{mb^2}{8} \Omega^2 \lg^2 \alpha + \frac{ma^2}{48} [\omega^2 + 2a\Omega \cos \alpha + \Omega^2 (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \omega t)].$$

$$T = \frac{1}{8} m b^2 \Omega^2 \lg^2 \alpha + \frac{ma^2}{4B} (\omega^2 + 2\omega \Omega \cos \alpha + \Omega^2 (1 + \sin^2 \alpha \sin^2 \omega t))$$

11.32. Показать, что для твёрдого тела с неподвижной точкой кинетическая энергия сохраняется в том и только в том случае, когда во всё время движения вектор момента импульса \bar{K}_o и вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ ортогональны.

Дано: Неподг. Т. | **В Неподг. доказ:** $\bar{K}_o = \hat{J} \bar{\omega}$, но $J \neq \text{const} \Rightarrow$

D-Tb: $T = \text{const} \Leftrightarrow \bar{K}_o \perp \bar{\varepsilon}$ | **В доказ. оцн:** $\bar{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, $\bar{K}_o = \begin{pmatrix} AP \\ BQ \\ CR \end{pmatrix}$ | $\dot{\bar{K}}_o = \frac{d}{dt} \bar{K}_o + \bar{\omega} \times \bar{K}_o$, $\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\bar{\omega}} = \frac{d}{dt} \bar{\omega}$

Решение

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{K}_o \Rightarrow 2\dot{T} = \dot{\bar{\omega}} \cdot \bar{K}_o + \bar{\omega} \cdot \dot{\bar{K}}_o = \dot{\bar{\varepsilon}} \cdot \bar{K}_o + \bar{\omega} \cdot \frac{d\bar{K}_o}{dt} + \bar{\omega} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{K}_o) = 2\dot{\bar{\varepsilon}} \cdot \bar{K}_o$$

$$T = \text{const} \Leftrightarrow \bar{K}_o \perp \bar{\varepsilon}$$

11.61. Однородному круговому цилиндру (высота h , радиус основания R), который может двигаться вокруг своего неподвижного центра масс, сообщается вращение с угловой скоростью ω , вокруг оси, образующей угол α с плоскостью основания цилиндра. Определить движение цилиндра.

Дано: $h, R, \bar{\omega}, \alpha$ | **Найти?**

$$\text{Случай Эйнштейна, } A=B=\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2, C=\frac{1}{2}mR^2$$



$$\dot{\psi} = \frac{K}{A} = \frac{\sqrt{A^2 \omega^2 \cos^2 \alpha + C^2 \omega^2 \sin^2 \alpha}}{A} = \omega \cos \alpha \sqrt{1 + \frac{C^2}{A^2} \lg^2 \alpha} = \omega \cos \alpha \sqrt{1 + \frac{36R^4 \lg^2 \alpha}{(h^2 + 3R^2)^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{Cr_0}{K_0}$$

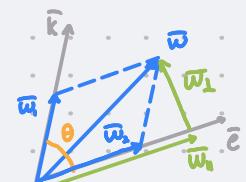
$$\dot{\psi} = \frac{K_0}{A}$$

$$\dot{\varphi} = r_0 \left(1 - \frac{C}{A}\right)$$

$$\dot{\varphi} = r \cdot \frac{A - C}{A} = \omega \sin \alpha \cdot \frac{\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 - \frac{1}{2}mR^2}{\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2} = \omega \sin \alpha \cdot \frac{h^2 - 3R^2}{h^2 + 3R^2}$$

$$\cos \theta = \frac{Cr}{K} = \frac{C \omega \sin \alpha}{\sqrt{A^2 \omega^2 \cos^2 \alpha + C^2 \omega^2 \sin^2 \alpha}}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{A \omega \cos \alpha}{C \omega \sin \alpha} = \frac{6R^2 \lg \alpha}{h^2 + 3R^2}$$

11.75. Симметричное твёрдое тело ($A = B = C$) с неподвижной точкой O совершает регулярную прецессию. Показать, что вектор момента импульса определяется выражением $\mathbf{K}_O = \left[C + (C - A) \frac{\omega_0}{\omega_1} \cos \theta_0 \right] \omega_1 + A \omega_2$, где ω_1 и ω_2 – векторы угловых скоростей собственного вращения и прецессии соответственно, а θ – угол между ними. Используя это соотношение, получить выражение для момента импульса \mathbf{K}_c в случае движения симметричного твёрдого тела по инерции.



$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_1, \text{ где } \bar{\omega}_1 \text{ - оси динамич. симметрии, } \bar{\omega}_2 \text{ - оси дин. сим.}$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 + \bar{e} \bar{w}, \cos \theta - \bar{e} \bar{w}, \cos \theta + \bar{\omega},$$

$$\bar{K} = ((\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_2 \frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_2} \cos \theta) + A(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 \frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_2} \cos \theta)) = (C + (C - A) \frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_2} \cos \theta) \bar{\omega}_2 + A \bar{\omega}_1$$

11.91. Оси $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ являются главными осями инерции твёрдого тела. Моменты инерции тела относительно этих осей равны A, B, C . Найти центробежные моменты инерции для системы осей $Oxyz$, повернутых вокруг оси Oz на угол α .

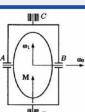
$$11.91. J_{xy} = (A - B) \sin \alpha \cos \alpha, \quad J_{yz} = 0, \quad J_{zx} = 0.$$

$$S = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{J} = \text{diag}(A, B, C)$$

$$\hat{J}' = S^T \hat{J} S = \begin{pmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ac & -S B & 0 \\ As & C B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}' = \begin{pmatrix} Ac^2 + S^2 B & AsC - BSc & 0 \\ AsC - BSc & As^2 + BC^2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad J_{xy} = (A - B) \sin \alpha \cos \alpha, \quad J_{yz} = 0, \quad J_{zx} = 0$$

11.113. Велосипедное колесо радиуса r и массы m , равномерно распределённой по ободу, установлено в раме. Колесо вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси AB . Рама вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг оси CD , перпендикулярной оси AB . Определить динамические реакции в подшипниках C и D рамы, если расстояние $CD = l$.



Дано:
 $r, m, \bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, l$
 $N_c, N_D = ?$



$$M_D = f N_D = (\bar{\omega}_1, x \bar{\omega}_0) \left(C + ((C - A) \frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_0} \cos \theta) \right) = \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_0 \cdot l = m r^2 \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1$$

$$m \bar{\omega}_0 = R \Rightarrow N_D = -N_c = \frac{m r^2}{l} \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1$$

$$11.113. F_C = F_D = \frac{mr^2}{l} \omega_0 \omega_1$$

11.132. Симметричное твёрдое тело с неподвижной точкой O , для которой главные моменты инерции равны $A = B \neq C$, движется в однородном поле тяжести. Масса тела равна m , а его центр тяжести лежит на оси динамической симметрии на расстоянии l от неподвижной точки (случай Лагранжа). К начальный момент углы Эйлера и их первые производные по времени равны $1. \psi(0) = 0, \phi(0) = 0, \theta(0) = \frac{\pi}{2}$.

$$2. \dot{\psi}(0) = 2 \sqrt{\frac{mgL}{A}}, \dot{\theta}(0) = 0, \dot{\phi}(0) = \frac{\sqrt{Amgl}}{C}$$

Угол нутации ψ отчищается от оси, направленной вертикально вверх. В каких пределах будет изменяться угол θ в процессе движения тела? Избрать след оси симметрии тела на сфере с центром в неподвижной точке.

Добавить
Быстро

$$A \dot{\psi} \sin^2 \theta + H \cos \theta = K.$$

$$H = Cr = C(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta).$$

$$A(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + 2mgL \cos \theta = 2E.$$

$$K = A\dot{\psi} \sin^2\theta + H \cos\theta = \sqrt{4A \cdot mg^2}, \quad \dot{\psi} = \frac{k - Hu}{A(1 - u^2)}$$

$$H = C(\dot{\psi} + \dot{\psi} \cos \theta) \stackrel{!}{=} \sqrt{A m g r}$$

$$U = \cos\theta, \dot{U} = -\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{\dot{U}}{\sin\theta}$$

$$A \left(\frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + \frac{(k-Hu)^2}{A^2(1-u^2)} \right) + 2(mg+u-E) = 0 \quad \cdot A(1-u^2)$$

$$\dot{A}\ddot{u}^2 + (K - Hu)^2 + 2A(1-u^2)(mg\dot{u} - E) = 0$$

$$A^2 \ddot{U}^2 + mgfA(2-U)^2 + 2Amgf(1-U^2)(U-2) = 0$$

$$f(u) = (2-u)^2 - 2(1-u^2)(2-u) \leq 0$$

$$(2-u)(2-u-2-u^2) \leq 0 \quad u(2-u)(1-2u) \geq 0$$

На отр $[-1, 1]$ только $U_1=0, U_2=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



$$\dot{\psi} = \frac{k - HU}{A(1-u^2)} = \frac{A\omega_0^2}{A} \cdot \frac{2-u}{1-u^2} > 0, \text{ при } \theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$$

$$11.132. \quad 1) \quad \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\psi} > 0;$$

T6 (случай Горячева - Чаплыгина). Твердое тело массы m движется в однородном поле гравитации. Главные моменты инерции для неподвижной точки O в осих $O\xi_1\xi_2\xi_3$ равны $A = B = AC$, а центр масс тела C лежит на оси ξ_1 на расстоянии l от неподвижной точки. В начальный момент времени проекция кинетической энергии K_O на вертикаль равна нулю: $K_O \cdot \gamma|_{t=0} = 0$, где $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$ — орт вертикали. Показать, что уравнения Эйлера допускают интеграл

$$Cr(p^2 + q^2) \neq m a l p \gamma_3 \equiv \text{const}$$

$$\text{Dано: } \begin{aligned} f &= \text{diag}(4C, 4C, C) \\ k(0) &= 0 \\ f &= (f_1, f_2, f_3)^T \end{aligned}$$

$$D-Tb: Cr(p^2+q^2) + mg_f p \chi_s = \text{const}$$

$$\{4(p=3(q,r)$$

$$4(q_1 + 3(r_p = -s_3))$$

$$(\dot{r} = s)_{\eta}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 r - x_3 q = x_1 \\ \end{array} \right.$$

$$k_p - k_r = k_i$$

$$\lambda_1 q - \lambda_2 p = i$$

$$\bar{\omega} = p\bar{\xi}_1 + q\bar{\xi}_2 + r\bar{\xi}_3, \quad \bar{K}_0 = 4(p\bar{\xi}_{11} + q\bar{\xi}_{12} + r\bar{\xi}_{13})$$

$$\dot{\bar{j}}\bar{\omega} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{j}}\bar{\omega} = \bar{M} = d(\bar{\xi}_1 \times \bar{j}), \text{ use } S = mqf$$

$$\bar{\xi}_1 \times \bar{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{z} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \quad \dot{\bar{j}} = \bar{j} \times \bar{\omega} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_2r - \bar{x}_3q \\ \bar{x}_3p - \bar{x}_1r \\ \bar{x}_1q - \bar{x}_2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

$$P_{accM} \quad f = (r(p^2 + q^2) + s p) \gamma_3$$

$$\dot{f} = (\dot{r}(p^2 + q^2) + r(2p\dot{p} + 2q\dot{q}) + \xi\dot{p})x_3 + \xi p\dot{x}_3 =$$

$$= S\chi_2(P^2+q^2) + r2P \cdot \frac{3}{n}(q,r+r2q \cdot \frac{1}{n}(-3rP-S)\chi_3) +$$

$$+ S_{\bar{u}}^3 q r f_3 + S p (f_1 q - f_2 p) =$$

$$= S \{ p^2 + q^2 + \frac{3}{2} pq r^2 - \frac{3}{2} p q r^2 - \frac{1}{2} S \} s q r + \frac{3}{4} s q r p_3 + S \} p q - S \} p^2 =$$

$$= \frac{S}{4} (4 p_2 q + r p_3 + 4 q_2 p)$$

$$\bar{M}_o = mgl \bar{f} \times \bar{e}_i = \dot{\bar{K}}_o$$

$$\dot{K} = \dot{\bar{K}}_o \cdot \bar{f} = mgl [\bar{f} \times \bar{e}_i] \cdot \bar{f} = 0$$

$$k = \text{const} \Rightarrow 0 \Rightarrow 4 p_2 + 4 q_2 + r p_3 = 0 \Rightarrow \dot{f} = \frac{S}{4} \cdot k = 0 \Rightarrow f = \text{const}$$

$$Cr(p^2 + q^2) - mgl p \gamma_3 = \text{const.}$$

12.3. Определить число степеней свободы системы, состоящей из двух волчков, установленных один на другом, как показано на рисунке. Точка опоры нижнего волчка неподвижна.



К задаче 12.3

нижн. волчок: $A \in SO(3)$ - матр. опр. ориент. ξ, η, ζ , отн. Xyz : $A = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$

множество таких матр задается 6-ю ур-ми: $\begin{cases} |\bar{a}_1| = 1 \\ |\bar{a}_2| = 1 \\ \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0 \\ \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \bar{a}_3 - 3 \text{ скл. ур-я} \end{cases}$

верхний волчок: $B \in SO(3)$ - матр. опр. ориент. ξ_2, η_2, ζ_2 отн. ξ, η, ζ .

аналогично м. А получаем 6 ур-ий.

ЧИСЛО СТ. СВ = РАЗМ. КОНФ. МНОГООБР $n = 18 - 12 = 6$

разм. пр-ва число ур.

Числом степеней свободы механической системы называется разность между размерностью S вектора R , задающего положение системы без связей, и числом m независимых связей, наложенных на систему:

$$n = S - m.$$

$$(6.13)$$

12.3. Шесть.

12.7. Свободная материальная точка движется под действием силы $F = F_x i + F_y j + k F_z$. Определяя положение точки

5) сферическими ($x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$), координатами, найти соответствующие обобщенные силы.

$$Q_i = \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i}, \quad i = \{r, \theta, \varphi\}$$

$$Q_k = \sum_j \bar{F}_j^T \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial q_k}; \quad k = 1, \dots, n.$$

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} + F_z \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$Q_\varphi = F_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

$$6) Q_r = F_x \sin \theta \cos \varphi + F_y \sin \theta \sin \varphi + F_z \cos \theta,$$

$$Q_\theta = F_x r \cos \theta \cos \varphi + F_y r \cos \theta \sin \varphi - F_z r \sin \theta,$$

$$Q_\varphi = -F_x r \sin \theta \sin \varphi + F_y r \sin \theta \cos \varphi;$$

12.11. Материальная точка массы m движется в плоскости Oxy под действием силового поля с потенциальной энергией $\Pi = \Pi(x, y)$. Найти лагранжиан точки в координатах q_1 и q_2 , связанных с декартовыми координатами равенствами

Дано: $m, \Pi = \Pi(x, y)$,

$$x = \frac{q_1 - q_2}{2}, \quad y = \sqrt{q_1 q_2}$$

$$\vec{r} = \left(\frac{q_1 - q_2}{2}, \sqrt{q_1 q_2} \right)^T \quad \dot{\vec{r}} = -\frac{1}{2} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1, \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \dot{q}_1 + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} \dot{q}_2)^T$$

$$(\dot{\vec{r}})^2 = \frac{1}{4} (\dot{q}_2^2 - 2\dot{q}_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_1^2) + \frac{q_2}{q_1} \dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2 \dot{q}_1 + \frac{q_1}{q_2} \dot{q}_2^2$$

$$\mathcal{L} = T - \Pi = \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 - \Pi(r_1, r_2) = \frac{m}{8} \left[\dot{q}_1^2 \left(\frac{q_2}{q_1} + 1 \right) + \dot{q}_2^2 \left(\frac{q_1}{q_2} + 1 \right) \right] - \Pi \left(\frac{q_1 - q_2}{2}, \sqrt{q_1 q_2} \right)$$

$$12.11. \quad L = \frac{m}{8} \left[\dot{q}_1^2 \left(\frac{q_2}{q_1} + 1 \right) + \dot{q}_2^2 \left(\frac{q_1}{q_2} + 1 \right) \right] - \Pi \left(\frac{q_1 - q_2}{2}, \sqrt{q_1 q_2} \right).$$

12.38. Однородный диск радиуса R и массы m может катиться без проскальзывания по параболе $2y = ax^2$. Ось

Оу вертикальна, $Ra \leq 1$. Определяя положение диска координатой x от точки касания, составить функцию Лагранжа.

Дано: $R, m,$

$2y = ax^2, Ra \leq 1$

$L = ?$

$$A(x_A, y_A) = A(x, \frac{1}{2}ax^2)$$

$$(x_A, y_A) = ((x_A - R \sin \alpha, y_A + R \cos \alpha))$$

$$\tan \alpha = y'_x = ax \Rightarrow \sin \alpha = \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}$$

$$\text{Без проск.} \Rightarrow WR = V_c \Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} MR^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m V_c^2 = \frac{3}{4} m V_c^2$$

$$\dot{x}_c = \dot{x} - \frac{Ra}{1+a^2x^2} \left[\dot{x}(1+a^2x^2)^{1/2} - a^2x^2 \cdot \dot{x}(1+a^2x^2)^{-1/2} \right] = \dot{x} - \frac{Ra \dot{x}}{(1+a^2x^2)^{3/2}}$$

$$\dot{y}_c = a x \dot{x} - \frac{Ra^2 x \dot{x}}{(1+a^2x^2)^{3/2}} = a x \dot{x}_c$$

$$\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 = \dot{x}_c^2 (1+a^2x^2) = \dot{x}^2 \left(1 - \frac{Ra}{(1+a^2x^2)^{3/2}} \right)^2 \cdot (1+a^2x^2)$$

$$\mathcal{L} = T - \Pi = \frac{3}{4} m V_c^2 - m g y_c = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 \left(\sqrt{1+a^2x^2} - \frac{Ra}{1+a^2x^2} \right)^2 - mg \left(\frac{1}{2} ax^2 + \frac{R}{\sqrt{1+a^2x^2}} \right)$$

$$12.38. \quad L = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 \left(\sqrt{1+a^2x^2} - \frac{Ra}{1+a^2x^2} \right)^2 - mg \left(\frac{1}{2} ax^2 + \frac{R}{\sqrt{1+a^2x^2}} \right)$$

12.39. Груз массы m , подвешенный на пружине длины

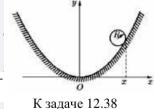
c , может двигаться под трением по вертикальным направляющим. К центру massa груза шарнирно приведен своим концом однородный стержень массы M и длины $2l$, который может двигаться в неизменной вертикальной плоскости. Составить уравнения Лагранжа.

Дано: $m, c, M, 2l$

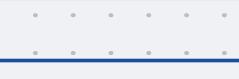
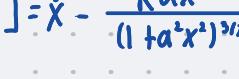
Что-я Лагранжа?

Введем обобщ. коорд. $\vec{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$T = T_{rp} + T_{cr}, \quad T_{rp} = \frac{1}{2} m V_c^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad T_{cr} = \frac{1}{2} M V_A^2 + \frac{1}{2} J_A W^2$$



К задаче 12.38



$$\vec{V}_A = \vec{V}_c + \bar{\omega} \times \overline{CA} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \cos \psi \\ \dot{y} \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \dot{\psi} \dot{y} \sin \psi \\ \dot{y} \cos \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_{cr} = \frac{1}{2} M V_A^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{\psi}^2 \cdot R^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} M ((\dot{x} - \dot{\psi} \dot{y} \sin \psi)^2 + (\dot{y} \cos \psi)^2) + \frac{1}{2} \cdot M \dot{\psi}^2 \dot{\psi}^2$$

$$\Pi = -M g x - M g (x \cdot \dot{\psi} \sin \psi) + \frac{1}{2} C x^2$$

$$Y = T - \Pi = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M ((\dot{x} - \dot{\psi} \dot{y} \sin \psi)^2 + (\dot{y} \cos \psi)^2) + \frac{1}{2} \cdot M \dot{\psi}^2 \dot{\psi}^2 + M g x + M g (x \cdot \dot{\psi} \sin \psi) - \frac{1}{2} C x^2$$

$$\frac{dY}{dx} = m \dot{x} + M (\dot{x} - \dot{\psi} \dot{y} \sin \psi) \quad \frac{dY}{dx} = mg + Mg - Cx \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dY}{dx} \right) - \left(\frac{dY}{dx} \right) = 0$$

С помощью этой функции уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (6.44)$$

$$(m+M) \ddot{x} - M \dot{\psi} (\ddot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi) + Cx = (m+M) g$$

$$\frac{dY}{d\dot{\psi}} = -M (\dot{x} - \dot{\psi} \dot{y} \sin \psi) \dot{y} \sin \psi + M \dot{\psi} \dot{\psi} \cos \psi + \frac{1}{2} M \dot{\psi}^2 \dot{\psi} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{dY}{d\dot{\psi}} \right) - \left(\frac{dY}{d\dot{\psi}} \right) = 0$$

$$\frac{dY}{d\psi} = M (-\dot{\psi} \dot{x} \cos \psi (\dot{x} - \dot{\psi} \dot{y} \sin \psi) - \dot{\psi}^2 \dot{\psi}^2 \cos \psi \sin \psi) - M g \dot{\psi} \cos \psi$$

$$-\ddot{x} \sin \psi - \dot{x} \dot{\psi} \cos \psi + \dot{\psi} \dot{y} \sin^2 \psi + 2 \dot{\psi}^2 \dot{y} \sin \psi \cos \psi + \dot{\psi} \dot{\psi} \cos^2 \psi - 2 \dot{\psi}^2 \dot{y} \sin \psi \cos \psi + \frac{1}{2} \dot{\psi} \ddot{\psi} +$$

$$+\dot{x} \dot{\psi} \cos \psi - \dot{\psi}^2 \dot{\psi} \cos \psi \sin \psi + \dot{\psi}^2 \dot{\psi} \cos \psi \sin \psi + g \cos \psi = 0$$

зачерк для себя

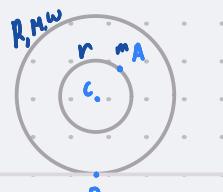
$$12.39. (m+M) \ddot{x} - M (\dot{\psi} \sin \psi + \dot{\psi}^2 \cos \psi) + Cx = (m+M) g,$$

$4 \dot{\psi} \dot{\psi} - 3 \ddot{x} \sin \psi + 3g \sin \psi = 0$, где x – смещение груза из положения равновесия, в котором пружина недеформирована, ψ – угол поворота стержня.

$$4 \dot{\psi} \ddot{\psi} - 3 \ddot{x} \sin \psi + 3g \cos \psi = 0$$

- 12.48. Однородный диск массы M и радиуса R может катиться без проскальзывания по горизонтальной прямой. В диске имеется гладкий круговой желоб радиуса r , центр которого совпадает с центром диска. По желобу может скользить материальная точка массы m . Составить уравнения Лагранжа системы и найти их первые интегралы.

можно хвисточ

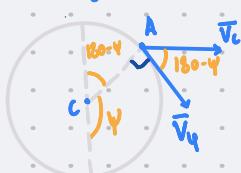


Введем обобщ. коорд. $\bar{q} = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}$, где ψ – угол пов. диска
 φ – угол между верх и са

без проск: $w = \frac{V_c}{R}$; $T = T_g + T_r$,

$$T_g = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} M J_c w^2 = \frac{1}{2} M w^2 R^2 + \frac{1}{2} M \cdot \frac{1}{2} R^2 w^2 = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\psi}^2$$

$$T_r = \frac{1}{2} m V_A^2, \text{ по Th. cos } V_A^2 = V_\varphi^2 + V_c^2 - 2 V_\varphi V_c \cos \psi$$



$$V_{\psi} = \dot{\psi} r, V_r = \dot{\varphi} R \Rightarrow \dot{L} = T - \Pi, \text{ где}$$

$$T = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\psi}^2 r^2 + \dot{\varphi}^2 R^2 - 2 \dot{\psi} \dot{\varphi} r R \cos \psi) \quad \Pi = -m g r \cos \psi,$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{d \dot{L}}{d \dot{\psi}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{d \dot{L}}{d \dot{\psi}} = 0 \Rightarrow \frac{d \dot{L}}{d \dot{\psi}} = \text{const}$$

С помощью этой функции уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (6.44)$$

$$\frac{3}{2} M R^2 \dot{\varphi}^2 + m \dot{\psi}^2 r^2 - 2 r R \cos \psi = \text{const}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d \dot{L}}{d \dot{\psi}} = m r \dot{\psi} - m \dot{\varphi} r \cos \psi \quad \text{зачерк дил сейл}$$

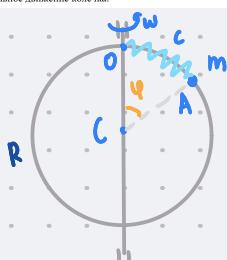
$$\frac{d \dot{L}}{d \dot{\varphi}} = \dot{\psi} \dot{\varphi} r + r \sin \psi - m g r \sin \psi$$

$$r \ddot{\psi} - R \ddot{\varphi} \cos \psi + R \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \psi - \dot{\psi} \dot{\varphi} R \sin \psi + g \sin \psi = 0$$

$$r \ddot{\psi} - R \ddot{\varphi} \cos \psi + g \sin \psi = 0$$

$$12.48. (3M + 2m) R \ddot{\varphi} - 2mr \dot{\varphi} \cos \psi = \text{const}, \\ r \ddot{\varphi} - R \ddot{\varphi} \cos \psi + g \sin \psi = 0.$$

12.64. Гладкая пропелочная окружность радиуса R вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω . На окружность наложен колечко массы m , соединённое с начальной точкой O окружности пружиной жёсткости c , длина пружины в недеформированном состоянии равна R_0 . Составить уравнение Лагранжа, описывающее относительное движение колечка.



ψ -угол между верт. и CA

$$T = \frac{1}{2} m V_A^2, \quad \bar{V}_A = \bar{V}_t + \bar{V}_r, \quad \bar{V}_t = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad V_r = \dot{\varphi} R$$

$$V_A^2 = (R \omega \sin \psi)^2 + \dot{\varphi}^2 R^2; \quad T = \frac{1}{2} m [(R \omega \sin \psi)^2 + \dot{\varphi}^2 R^2]$$

$$\Pi = m g R \cos \psi + \frac{1}{2} c (R^2 (\psi - \psi_0))^2$$

$$\dot{L} = \frac{1}{2} m [(R \omega \sin \psi)^2 + \dot{\varphi}^2 R^2] - m g R \cos \psi - \frac{1}{2} c (R^2 (\psi - \psi_0))^2$$

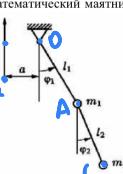
$$\frac{d \dot{L}}{d \psi} = m R^2 \omega^2 \sin \psi \cos \psi + m g R \sin \psi - (R^2 (\psi - \psi_0)), \quad \frac{d \dot{L}}{d \dot{\varphi}} = m \dot{\varphi} R^2 \Rightarrow$$

$$m \ddot{\varphi} R^2 - m R^2 \omega^2 \sin \psi \cos \psi - m g R \sin \psi + (R^2 (\psi - \psi_0)) = 0$$

$$\ddot{\varphi} - \omega^2 \sin \psi \cos \psi - \frac{g}{R} \sin \psi + \frac{c}{m} (R^2 (\psi - \psi_0)) = 0$$

$$12.64. \ddot{\varphi} - \omega^2 \sin \psi \cos \psi - \frac{g}{R} \sin \psi + \frac{c}{m} (\psi - \psi_0) = 0.$$

12.97. Плоскость, в которой совершают колебания двойной математический маятник, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, расположенной в той же плоскости на расстоянии a от точки подвеса маятника. Массы и длины маятников равны m_1, m_2 и l_1, l_2 . Положения маятников определяются углами φ_1, φ_2 отклонения от вертикали. Составить функцию Лагранжа $L = T - \Pi$. Сравнить кинетическую и потенциальную энергии в абсолютном и относительном (в плоскости) движениях маятников.



К задаче 12.97

Л. Т. Зд. обс. (O')

$$T^a = T_1^a + T_2^a, \quad T_i^a = \frac{1}{2} m_i V_{A_i}^2, \quad \bar{V}_A = \bar{V}_A^t + \bar{V}_A^r = \bar{\omega} \times \bar{OA} + \bar{w} \times \bar{OA} \Rightarrow$$

$$T_i^a = \frac{1}{2} m_i (\dot{\varphi}_i^2 l_i^2 + (a + l_i \sin \varphi_i)^2 \omega^2)$$

Все на рисунке

$$T_2 = \frac{1}{2} m V_c^2, \bar{V}_c = \bar{V}_c^e + \bar{V}_c^r = \bar{w} \times \bar{o}, \bar{A} + \bar{V}_c + \bar{w}_2 \times \bar{A} = \bar{w} \times \bar{o}, \bar{A} + \bar{w}_1 \times \bar{o} \bar{A} + \bar{w}_2 \times \bar{A} \bar{C} = \bar{V} + \bar{V}_1 + \bar{V}_2$$



$$\text{По Th. } \cos V_3 = |\bar{V}_1 + \bar{V}_2|^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2 \cos(\phi_1 - \phi_2) V_1 V_2,$$

$$\text{зде } V = (a + l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2) w, V_1 = l_1 \dot{\phi}_1, V_2 = l_2 \dot{\phi}_2.$$

$$\Pi^a = -m_1 g f_1 \cos \phi_1 - m_2 g (f_1 \cos \phi_1 + f_2 \cos \phi_2)$$

$$12.97. L = \frac{m_1}{2} \left[\dot{l}_1^2 \dot{\phi}_1^2 + (a + l_1 \sin \phi_1)^2 \dot{w}^2 \right] + \frac{m_2}{2} \left[\dot{l}_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2l_1 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + (a + l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2)^2 \dot{w}^2 \right] + m_1 g f_1 \cos \phi_1 + m_2 g (f_1 \cos \phi_1 + f_2 \cos \phi_2).$$

$$\mathcal{L}^a = T - \Pi = \frac{1}{2} m_1 [l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + (a + l_1 \sin \phi_1)^2 \dot{w}^2] + \frac{1}{2} m_2 [(a + l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2)^2 \dot{w}^2 + l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + l_2^2 \dot{\phi}_2^2 + 2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \cdot l_1 \dot{\phi}_1 \cdot l_2 \dot{\phi}_2] + m_1 g f_1 \cos \phi_1 + m_2 g (f_1 \cos \phi_1 + f_2 \cos \phi_2)$$

$$(\text{ Т. зр. подб. } 0: T^r = T_1^r + T_2^r = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_3^2$$

$$x_1 - \text{расст от оси } O, O_2 \text{ go } T.A \Rightarrow F_1^e = m w^2 x_1 = - \frac{2(-\frac{w^2 m x^2}{2})}{2x} \Rightarrow$$

$$\Pi_1^e = -\frac{1}{2} m w^2 x_1 = -\frac{1}{2} m_1 w^2 (a + l_1 \cos \phi_1)$$

$$\text{аналогично } \Pi_2^e = -\frac{1}{2} m_2 w^2 (a + l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2)$$

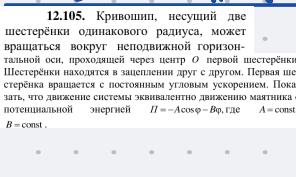
$$\bar{F}_1^k = -2 m_1 \bar{w} \times \bar{V}_1 - \text{Напр } \perp \text{ вдоль перемещ., работы не соверши} \Rightarrow \text{не входит в } \mathcal{L}$$

\bar{F}_2^k - аналогично

$$\mathcal{L}^r = -m_1 g f_1 \cos \phi_1 - m_2 g (f_1 \cos \phi_1 + f_2 \cos \phi_2) - \frac{1}{2} m_1 w^2 (a + l_1 \cos \phi_1) - \frac{1}{2} m_2 w^2 (a + l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2)$$

$\mathcal{L}^r = T^r - \Pi^r$, нетрудно заметить, что $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^a$, но снажаемые, отвечающие

за силы инерции, пересекли из Π^r и T^a



К задаче 12.105

$$1) \text{ без проска } \Rightarrow \bar{V}_c = \bar{w}_1 \times \bar{o} \bar{C} = \bar{V}_A + \bar{w}_2 \times \bar{A} \bar{C} \Rightarrow w_1 r = 2 \dot{\psi} r - w_2 r$$

$$w_2 = 2 \dot{\psi} - w_1$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3, T_1 = \frac{1}{2} J_1 w_1^2, T_3 = \frac{1}{2} J_3 \dot{\psi}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 V_c^2 + \frac{1}{2} J_2 w_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (2r\dot{\psi})^2 + \frac{1}{2} J_2 w_2^2 = 2m_1 r^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_2 w_2^2$$

$$\Pi = -m_3 g r \cos \psi - m_2 g \cdot 2r \cos \psi = -(m_3 g r + 2m_2 g r) \cos \psi$$

$$\mathcal{L} = T - \Pi = \frac{1}{2} J_1 w_1^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\psi}^2 + 2m_1 r^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} J_2 \cdot (2 \dot{\psi} - w_1)^2 + (m_3 g r + 2m_2 g r) \cos \psi$$

12.105. Кривошип, несущий две шестерёнки одинакового радиуса, может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через центр O первой шестерёнки. Шестерёнки находятся в зацеплении друг с другом. Первая шестерёнка вращается с постоянным угловым ускорением. Показать, что движение системы эквивалентно движению маятника с потенциальной энергией $H = -A \cos \varphi - B \varphi$, где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$.

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\dot{\psi}} = J_3 \dot{\psi} + 4M_2 r^2 \dot{\psi} + 2J_2 (2\dot{\psi} - w_i) = \underbrace{(J_3 + 4M_2 r^2 + 4J_2)}_{C_1} \dot{\psi} - 2J_2 w_i$$

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\psi} = - \underbrace{(M_3 r + 2M_2 2r)}_{A_1} g \sin \psi \Rightarrow C_1 \ddot{\psi} + A_1 g \sin \psi = 0$$

Соответствует движению мат. маятника ($P = \frac{C_1}{A_1} = \frac{(M_3 + 4M_2)r}{J_3 + 4M_2 r^2 + 4J_2}$)

Т.к. пот. эн. мат. маятника $\Pi^* = -mgf \cos \psi$, то $A = mgf$, $B = 0$

???

$$2) \Pi = -A \cos \psi - B \psi \Rightarrow \ddot{\varphi} = T_2 - \Pi = \frac{1}{2} a(\psi, t) \dot{\psi}^2 + A \cos \psi + B \psi$$

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\psi} = a(\psi, t) \dot{\psi} + \dot{a}(\psi, t) \dot{\psi} \quad \frac{d\dot{\varphi}}{d\psi} = a'_\psi(\psi, t) - A \sin \psi + B \Rightarrow a(\psi, t) \ddot{\psi} + \dot{a}(\psi, t) \dot{\psi} + a'_\psi(\psi, t) + A \sin \psi - B = 0$$

две к. сист. для: движ. маятника $\Pi = -A \cos \psi - B \psi$

ПРИ $a(\psi, t) = C_1 = J_3 + 4M_2 r^2 + 4J_2$, $A = A_1 = M_3 g r + 2M_2 2g r$, $B = 0$

