

# Неделя 7

7. Функция Гамильтона и канонические уравнения

19.12, 19.21, 19.23 (найти решение в квадратурах), 19.47, 19.51

+ + + +

## № 19.12

В задачах 19.12–19.16 найти функцию Лагранжа механической системы, динамика которой задана функцией Гамильтоновы.

$$19.12. H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 + \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2.$$

Для механических систем  $\mathcal{H}$  выражается более простой формулой

$$\mathcal{H} = \hat{\mathcal{L}}_g - \mathcal{L}_g$$

## Теория из античности ≠ (23 минуты)

Крышкой ( $\hat{q}$ ) обозначаем величину ( $q$ ), выраженную через новые переменные ( $p$  вместо  $q$ )

Оп. (Гамильтониан).

Гамильтониан или функция Гамильтона ( $H$ ) — потенциал обратного преобразования (от  $p$  к  $q$ )

$$H = \sum \dot{q}_i p_i, \text{ где } \hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

| Вывод из Теоремы (Лагранжа)

$$\Rightarrow \hat{\mathcal{L}} = \sum \hat{p}_i \dot{\hat{q}}_i - \hat{\mathcal{H}} \quad (19.2.1)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} p^T \tilde{A} p + \tilde{b}^T p + \tilde{c} \Rightarrow \hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{H}}_2 - \mathcal{H}_0 \quad (\text{аналогично todayy}) \quad [\mathcal{H} = \hat{\mathcal{L}}_g - \mathcal{L}_g]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right. \text{ — уравнения Гамильтона} \Rightarrow \dot{\hat{q}} = \tilde{A} p + b \Rightarrow \hat{p} = \tilde{A}^{-1}(q - \tilde{b})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{q} - \tilde{b})^T \tilde{A}^{-1} (\dot{q} - \tilde{b}) - \mathcal{H}_0 \quad (19.2.3)$$

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)}_{\mathcal{H}_2} + \underbrace{\frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2}_{\mathcal{H}_0} + \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2 \quad (\text{дл. 19.2.1})$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ просто козырь! При } \frac{1}{2} p^2 \text{ и } \frac{1}{2} p^2 \Rightarrow \tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$19.2.3 \rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 - \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2$$

$$19.12. L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 - \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2.$$

19.21. При отсутствии силового поля уравнения динамики гравитационной частицы, масса покоя которой равна  $m_0$ , определяются функцией Лагранжа  $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}$ , где  $c$  — скорость света,  $x, y, z$  — декартовы координаты. Составить канонические уравнения и найти закон движения частицы.

$$1 - \frac{c^2 p^2}{c^2}$$

Система не механическая  $\Rightarrow$  ищем по опр.  $[\mathcal{H} = \sum \dot{q}_i p_i - \hat{\mathcal{L}}]$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}{c^2}}} \quad (19.21.1)$$

$$\mathcal{H} = \sum p_i \hat{x}_i - \hat{\mathcal{L}}, \text{ нужно найти } \hat{x}_i \text{ (выразить } \dot{x}_i \text{ через } p_i\text{)}$$

$\dot{X}_1^2, \dot{X}_2^2, \dot{X}_3^2$  бывают одинак. в (19.21.1)  $\Rightarrow$  ищем  $\hat{X}_i = f(p_i) p_i$ , где  $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$

$$\text{Получ. в (19.21.1): } p_i = \frac{m f p_i}{\sqrt{1 - \frac{p^2 f^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$c^2 - p^2 f^2 = m^2 c^2 f^2 \Rightarrow f = \frac{c}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$\hat{X}_i = f p_i = \frac{c p_i}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$\hat{\mathcal{L}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{f^2 p^2}{c^2}} = -mc \sqrt{1 - \frac{p^2}{p^2 + m^2 c^2}} = -\frac{mc^3}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$\mathcal{H} = \sum p_i \hat{X}_i - \hat{\mathcal{L}} = \frac{c p^2}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}} + \frac{mc^3}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

$\mathcal{H}$  - явно не зависит от  $X_i \Rightarrow X_1, X_2, X_3$  - иском. коорд.

Оп. (Циклические координаты).

Координата  $q_i$  называется циклической, если она не входит в  $\mathcal{L} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}$

Напомним, что

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_i}$$

Следовательно  $q_i$  циклическая в обоих описаниях (Лагранжевом и Гамильтоновом)

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases} \text{ - уравнения Гамильтона}$$

$$p_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{x}_i} \Rightarrow p_i = p_i^\circ = \text{const}$$

$$\dot{X}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{2 c^2 p_i}{2 \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}} = \frac{c^2}{\mathcal{H}} p_i, \quad p_i = p_i^\circ = \text{const} \Rightarrow X_i = X_i^\circ + \frac{c^2}{\mathcal{H}} p_i^\circ t$$

$$\text{ур-е движение: } \bar{X} = \bar{X}^\circ + \frac{c^2 \bar{p}^\circ}{\mathcal{H}} t$$

19.23. Составить канонические уравнения движения материальной точки массы  $m$ , движущейся по гладкой сфере радиуса  $R$  в однородном поле тяжести (сферический маятник).

19.23 (найти решение в квадратуре)

$$T = \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad \Pi = -m g r \cos \theta$$



Система консервативна  $\Rightarrow \mathcal{H} = \hat{T} + \Pi$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} p^T A^{-1} p + \Pi(q)$$

$$A = \begin{bmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & mr^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{mr^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{P_\psi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - mg r \cos \theta$$

$$19.23. H = \frac{1}{2mR^2} \left( P_\theta^2 + \frac{P_\psi^2}{\sin^2 \theta} \right) + mgR \cos \theta.$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \text{ - уравнения Гамильтона}$$

$$(1) \quad \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}; \quad \dot{\psi} = \frac{P_\psi}{mr^2 \sin^2 \theta} \quad (3)$$

$$(2) \quad \dot{P}_\theta = \frac{P_\psi^2}{mr^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta - mgs \sin \theta); \quad \dot{P}_\psi = 0$$

(Частные координаты)

$$\dot{P}_\psi = 0 \Rightarrow P_\psi = P_\psi^0 = \text{const}$$

$$H \text{ не зависит явно от } t \Rightarrow H = h = \text{const}$$

из  $H$  выразим  $P_\theta = P_\theta(\theta, \text{const})$  и подставим в (1):

$$(4) \quad P_\theta = \sqrt{2mr^2(h + mg r \cos \theta) - \frac{P_\psi^2}{\sin^2 \theta}}$$

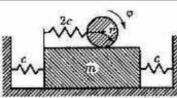
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{P_\theta(\theta)}{mr^2} \Rightarrow t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{mr^2}{P_\theta(\theta)} d\theta \Rightarrow \text{получили } \theta(t)$$

$$\theta(t), P_\psi^0 \rightarrow (3): \quad \dot{\psi}(t) - \dot{\psi}_0 = \int_{t_0}^t \frac{P_\psi^0}{mr^2 \sin \theta(t)} dt$$

$$\theta(t) \rightarrow (4): \quad P_\theta(t) = P_\theta(\theta(t))$$

19.47. Составить канонические уравнения Гамильтона для системы, описанной в задаче 16.40.

16.40. Доска массы  $m$ , которая может скользить по гладкой горизонтальной направляющей, связана с неподвижными стенками двумя одинаковыми пружинами жесткости  $c$  каждая. По доске катится без проскальзывания диск массы  $\frac{m}{2}$  и радиуса  $r$ , центр которого соединён с доской пружиной жесткости  $2c$ , как показано на рисунке. Найти малые колебания системы.



К задаче 16.40

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot C X^2 \cdot 2}_{\text{доска}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2C \cdot (r\dot{\psi})^2}_{\text{диск}} = CX^2 + (r^2\dot{\psi}^2)$$

(\*) касается 6 объектах используем лишь из контура, а не доска

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{\text{доска}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} r^2 \dot{\psi}^2}_{\text{диск отн}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot (\dot{x} + r\dot{\psi})^2}_{\text{диск vs. доска}} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{3}{8} m r^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m r \dot{x} \dot{\psi}$$

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2} p^T A^{-1} p}_{\hat{T}} + \Pi(q)$$

$$\text{Система конс} \Rightarrow H = \hat{T} + \Pi$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & \frac{1}{4}mr \\ \frac{1}{4}mr & \frac{3}{4}mr^2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{16}{7mr^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{4}mr^2 & -\frac{1}{2}mr \\ -\frac{1}{2}mr & \frac{3}{2}m \end{bmatrix} = \frac{4}{7mr^2} \begin{bmatrix} 3r^2 - 4r \\ -4r & 6 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{4}{7mr^2} [3r^2 p_x^2 - 4rp_x p_y + 6p_y^2] + cx^2 + cr^2 \varphi^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right. \text{ — уравнения Гамильтона}$$

Несоог.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{4}{7mr^2} (6rp_x - 4p_y) & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -2cx \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{4}{7mr^2} (12p_y - 4rp_x) & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -2r^2 \varphi \end{aligned}$$

$$19.47. \dot{x} = \frac{4rp_x - 2p_y}{5mr}, \quad \dot{p}_x = -2cx, \quad \dot{\varphi} = \frac{6p_y - 2rp_x}{5mr^2}, \quad \dot{p}_y = -2r^2 \varphi.$$

19.51. В состоянии равновесия  $(q^*, p^*)$  функция Гамильтона

$H(q, p)$  имеет строгий минимум по всем переменным. Доказать, что это состояние устойчиво по Ляпунову.

$\exists H = H(q, p)$ ,  
 $(q^*, p^*)$ -П.Р :  $H(q^*, p^*)$  - стр. лок. мин  $\Rightarrow (q^*, p^*)$  —уст по Ляпунову

1. Без ограничн-ти  $H(q^*, p^*) = 0$  (опр. с точк. до конц.)

или можно:  $\Delta V = H(q, p) - H(q^*, p^*)$

2.  $H(q^*, p^*) = 0$  ;  $\Rightarrow H$  — плав. опр в  $\dot{U}_\epsilon(q^*, p^*)$   
 $H(q, p) \geq 0$  в  $\dot{U}_\epsilon(q^*, p^*)$

3.  $H$  — первый интеграл!  $\frac{dH}{dt} + \{H, H\} = 0$   
 $H(q, p) = 0 \Rightarrow \Pi.R.(q^*, p^*)$  —уст.  
 Th. Ляпунова

Критерий первого интеграла для Гамильтоновых систем имеет вид:  

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{(H, G)} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) = 0$$
, где  $\{H, G\}$  — скобка Пуассона

Теорема. Если дифференциальные уравнения равнинного движения таковы, что существует интеграл движения  $V$ , производная которой  $V$  в силу этих законов является или знакопостоянной функцией противоположного знака с  $V$ , или тождественно равна нулю, то неизменное движение устойчиво.

# Неделя 8

8. Первые интегралы. Скобки Пуассона  
20.2, 20.14, 20.24, 20.34, 20.36

+ + + -

№ 20.2

В задачах 20.2 – 20.13 для заданных функций  $\varphi(q, p)$  и  $\psi(q, p)$  вычислить скобки Пуассона.

$$20.2. \varphi = q^2 + p^2, \quad \psi = \arctan \left( \frac{p}{q} \right).$$

Оп. (Скобка Пуассона):

Сокращенная запись для  $\sum \left( \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right)$

Обозначается  $\{H, G\}$

Можно представить в виде дифференциального оператора  $\{H, G\} = U_H G$

$$U_H = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\{ \varphi, \psi \} = \frac{\partial \varphi}{\partial q} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 2q; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 2p;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{1}{1+(p/q)^2} \cdot \left( -\frac{p}{q^2} \right) = -\frac{p}{p^2+q^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{1+(p/q)^2} \cdot \frac{1}{q} = \frac{q}{p^2+q^2}$$

$$\{ \varphi, \psi \} = 2q \cdot \frac{q}{p^2+q^2} + 2p \cdot \frac{q^2}{p^2+q^2} = 2$$

$$20.2. (\varphi, \psi) = \frac{2}{1+(p/q)^2} + \frac{2p}{1+(p/q)^2} \frac{p}{q^2} = 2.$$

20.14. С помощью скобок Пуассона записать канонические уравнения Гамильтона.

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \text{ — уравнения Гамильтона}$$

Оп. (Скобка Пуассона):

Сокращенная запись для  $\sum \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right)$

Обозначается  $\{H, G\}$

Можно представить в виде дифференциального оператора  $\{H, G\} = U_H G$

$$U_H = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\{ F, H \} = \sum \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \cdot \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \Rightarrow$$

хочуп боризит

$$\begin{aligned} \{ q_i, H \} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\ \{ p_i, H \} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \end{aligned}$$

$$20.14. \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = (q_i, H), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = (p_i, H).$$

№ 20.24

**20.24.** Показать, что для системы с гамильтонианом  $H = H[\phi_1(q_1, p_1), \dots, \phi_n(q_n, p_n), t]$  функции  $\phi_i(q_i, p_i) = \alpha_i$  ( $k = \overline{1, n}$ ) являются первыми интегралами. Считая, что первые интегралы разрешимы относительно импульсов  $p_i = \psi_i(q, \alpha_i)$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) найти движение системы в квадратурах.

## Из Лекции 8:

### 2. Отделенная комбинация

Случай, когда  $\mathcal{H} = \mathcal{H}[\phi_1(q_1, p_1), q_{>1}, p_{>1}, t]$

$\phi_1$  - [Первый интеграл]:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \{\mathcal{H}, \phi_1\} = \frac{\partial H}{\partial \phi_1} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial p_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial p_1} \right)^0$$

$$\phi_1(q_1, p_1) = \text{const} = \phi_1^0$$

Тогда из [уравнений Гамильтона]:

$$\begin{cases} q_1 > 1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} [\phi_1^0, q_{>1}, p_{>1}, t] \\ p_1 > 1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} [\phi_1^0, q_{>1}, p_{>1}, t] \end{cases}$$

Получили понижение порядка на две единицы

Допустим, что  $q_{>1}(t), p_{>1}(t)$  - решения [этой системы]

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} [\phi_1^0, q_{>1}(t), p_{>1}(t), t] \frac{\partial \phi_1^0}{\partial p_1} \\ \dot{p}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} [\phi_1^0, q_{>1}(t), p_{>1}(t), t] \frac{\partial \phi_1^0}{\partial q_1} \\ \phi_1(q_1, p_1) = \phi_1^0 \Rightarrow p_1 = f(q_1, \phi_1^0) \end{cases}$$

Подставляя  $\underline{\phi_1^0}$  в  $\underline{q_1}$  получим уравнение с разделяющимися переменными  
Подставив полученный  $q_1$  в  $\underline{p_1}$  получим  $p_1$

### Составить доделанный конспект

**20.24.** Показать, что для системы с гамильтонианом  $H = H[\phi_1(q_1, p_1), \dots, \phi_n(q_n, p_n), t]$  функции  $\phi_i(q_i, p_i) = \alpha_i$  ( $k = \overline{1, n}$ ) являются первыми интегралами. Считая, что первые интегралы разрешимы относительно импульсов  $p_i = \psi_i(q, \alpha_i)$ , ( $i = \overline{1, n}$ ) найти движение системы в квадратурах.

$$1) \exists H = H[\Psi_k(q_k, p_k), t], \Rightarrow \Psi_k - \text{п.и.}$$

$$\Psi_k(q_k, p_k) = \alpha_k \quad (k = \overline{1, n})$$

$$\square \text{ кр. п.и. : } \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \{H, \Psi_k\} = 0, \quad \{H, \Psi_k\} = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i}$$

$0, t.k. \Psi_k(q_k, p_k)$

$$\Psi_k = \Psi_k(q_k, p_k) \Rightarrow \sum \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k} \Rightarrow \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k}$$

для  $P$  аналогично

$$\text{Тогда } \{H, \Psi_k\} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_k} \cdot \left[ \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k} - \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_k} \right] = 0 \Rightarrow \Psi_k(q_k, p_k) = \alpha_k = \text{const}$$

$$2) \exists P_k = \Psi_k(q_k, \alpha_k), \text{ найти реш в квадратурах}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \text{ - уравнения Гамильтона}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} [\alpha_k, t] \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} [\alpha_k, t] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial \Psi_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k} \end{cases} \quad (\text{II})$$

Опр. (Первый интеграл).

Пусть есть система  $D \times I = F(t, x)$ , тогда  $G(t, x)$  — первый интеграл  $\Leftrightarrow G(t, x(x_0, t_0, t)) = \text{const} \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial x} + \sum \frac{\partial G}{\partial x_i} F_i = 0$  — критерий первого интеграла

В [Гамильтоновых системах] первый интеграл в общем случае:

$G = G(t, x)$

Критерий первого интеграла для Гамильтоновых систем имеет вид:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) = 0, \text{ где } (H, G) — \text{ скобка Пуассона}$$

$$P_k = \Psi_k(q_{ik}, \dot{q}_{ik}) \quad \text{б} \quad (1) \Rightarrow \dot{q}_{ik} = Q_k(q_{ik}, \dot{q}_{ik}, t) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dq_{ik}}{Q_k(q_{ik}, \dot{q}_{ik}, t)} = t + C - \text{нашли } q_{ik}(t)$$

$$P_k(t) = \Psi_k(q_{ik}(t), \dot{q}_{ik})$$

20.34. Система дифференциальных уравнений

$\dot{q}_i = A_i(q, p, t)$ ,  $\dot{p}_i = B_i(q, p, t)$  ( $i=1..n$ ) имеет в некоторой области

$2n$  независимых первых интегралов  $W_i(q, p, t) = \text{const}$  ( $i=1..2n$ ).

Доказать, что эта система является гамильтоновой тогда и только тогда, когда скобки Пуассона любой пары первых интегралов

также являются первым интегралом:  $\{W_i, W_j\} = \text{const}$ .

для  $\dot{q}_i = A_i(q, p, t)$  имеет П.И.  $\{W_k(q, p, t) = \text{const}\}$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = A_i(q, p, t) \\ \dot{p}_i = B_i(q, p, t) \\ i=1..n \end{cases}$$

$$(1) - \text{Гамильтонова} \Leftrightarrow \{W_i, W_j\} = \text{const}$$

□ ⇒ Th. Якоби-Пуассона

Теорема (Якоби-Пуассона).

$F, G$  — первые интегралы системы с гамильтонианом  $H \Rightarrow \{F, G\}$  тоже первый интеграл системы с гамильтонианом  $H$

Доказательство

Хотим доказать, что  $\exists H: A_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ ,  $B_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$   
для этого нужно проверить, что  $\frac{\partial A_i}{\partial q_i p_i} = \frac{\partial A_i}{\partial q_i} = -\frac{\partial B_i}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i \partial q_i}$

$$W^k - \Pi H \Rightarrow \sum_i W^k_{\partial q_i} A^i + W^k_{\partial p_i} B^i + W^k_{\partial t} = 0$$

$$\text{Рассм. } F \text{ и } G - \text{П.И.} \quad \{F, G\} = \sum_k F_{\partial q_k} G_{\partial p_k} - F_{\partial p_k} G_{\partial q_k}$$

$$\text{но умножив на } \{F, G\} - \text{П.И.} \Rightarrow \frac{d}{dt} \{F, G\} = \sum_i \{F, G\}_{\partial q_i} A^i + \{F, G\}_{\partial p_i} B^i + \frac{d\{F, G\}}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \{F_s G\} = \sum \{F_s G\}_{sq_i} A^i + \{F_s G\}_{sp_i} B^i + \{F_s G\}_{st} = 0$$

$$\{F_s G\}_{st} = \{F_{st}, G\} + \{F_s, G_{st}\}, F_{st} = - \sum_i (F_{sq_i} A^i + F_{sp_i} B^i) \Rightarrow$$

$$\{F_{st}, G\} = - \sum_i \{F_{sq_i} A^i, G\} - \sum_i \{F_{sp_i} B^i, G\}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{F_s G\} &= \sum_i \{F_{sq_i}, G\} A^i - \{F_{sq_i} A^i, G\} + \{F_s G_{sq_i}\} A^i - \{F_s G_{sq_i} A^i\} + \\ &+ (q_i \rightarrow p_i, A^i \rightarrow B^i) = 0 \end{aligned}$$

$$\{F_{sqi}, A^i_s, G\} = \{F_{sqi}, G\} A^i + \{A^i_s, G\} F_{sqi} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \{F, G\} = - \sum_i \{A^i, G\} F_{sqi} + \{F, A^i\} G_{sqi} + \{B^i, G\} F_{spi} + \{F, B^i\} G_{spi}$$

$$\sum_i \{A^i, G\} F_{sqi} + \{F, A^i\} G_{sqi} = \sum_{i,x} A^i_{sqx} G_{sqx} F_{sqi} - A^i_{sqx} G_{sqx} F_{q,i} + \\ + F_{sqx} A^i_{sqx} G_{sqi} - F_{sqx} A^i_{sqx} G_{sqi} .$$

Оп. (Независимые первые интеграла).

$G_1, \dots, G_k$  — независимые  $\Leftrightarrow \text{rank}(\nabla G_1, \dots, \nabla G_k) = k$

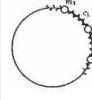
$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial q_n} \quad \frac{\partial}{\partial p_1} \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial p_n} \right]^T$$

$$\nabla F \wedge \nabla G - \Lambda H \beta \Rightarrow \frac{d}{dt} \{F, G\} = 0 \Leftrightarrow \text{коэрп. нум } \nabla F \wedge \nabla G \text{ равны 0}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial B_i}{\partial p_j}$$

$$\frac{d}{dt} \{F, G\} = \sum_i \{F_{sqi}, G\} A^i - \{F_{sqi}, A^i\} G + \{F_{sqi}, G\} A^i - \{F_{sqi}, A^i\} G + \\ + (q_i \rightarrow p_i, A^i \rightarrow B^i) = 0$$

**20.36.** Система состоит из  $n$  точечных масс  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , которые могут перемещаться по гладкому колысу. Массы последовательно соединены пружинами (последняя масса соединена с первой). Определить положение каждой массы её смещением  $\bar{q}_i = r_i - r_0$  по дуге колыса из положения равновесия, подобрать преобразование  $\bar{q}_i = \bar{q}_i(q, a)$  ( $i = 1, n$ ), не меняющее лагранжиан системы. Показать, что в силу теоремы Нэтер система имеет первый интеграл  $\sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{q}}_i = \text{const}$ .



К задаче 20.36

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\psi}_i^2$$

$$\Pi = \sum \frac{1}{2} C (q_i - q_{i+1})^2 = \sum \frac{1}{2} C r^2 (\psi_i - \psi_{i+1})^2 \quad \psi_{n+1} \equiv \psi_1$$

$$I = T - \Pi$$

1) Найдем  $\dot{q}_i' = Q(q, \dot{q})$  такой, что  $\dot{L}(q') = \dot{L}(q)$ :

$$\begin{aligned} \text{для } m_i \quad T_i \sim \dot{\psi}_i^2 & \Rightarrow \dot{\psi}_i' = \dot{\psi}_i + \alpha \\ \text{для } \Pi_i \sim (\psi_i - \psi_{i+1})^2 & \end{aligned}$$

2)

Теорема (Теорема Нэтер).

Если  $\exists$  группа с ядром  $\begin{cases} q' = q + \tau\eta(q, t) \\ t' = t + \tau\zeta(q, t) \end{cases}$ , для которой действует по Гамильтону

$$S = \int_0^{t'} L(q, \dot{q}, t) dt = \text{const},$$

(см. [Sp.15](#) и [Symmetries](#))

Добавить показательство?



Время не преобразовано  $\Rightarrow S = \text{const}$

без учета Th. Нэтер

$$\sum p_i \eta_i - \{H\} = \text{const}, \text{ т.е. } p_i = \text{const}$$

$$p_i = \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{\psi}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_i} \left[ \sum \frac{1}{2} m_i r^2 \dot{\psi}_i^2 - \frac{1}{2} C (\psi_i - \psi_{i+1})^2 \right] = \sum m_i r^2 \dot{\psi}_i^2$$

## Неделя 9

9. Принцип Гамильтона  
21.10, 21.11, 21.23, 21.32

**21.10.** Свободная релятивистская частица имеет лагранжиан  $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}$ , где  $c$  — скорость света, а  $x, y, z$  — декартовы координаты частицы. Показать, что в расширенном координатном пространстве  $(x, y, z, t)$  частицы через любые две точки  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  и  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  ( $t_0 \neq t_1$ ) проходит прямой путь и при этом только один.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad X - \text{уравн.} \Rightarrow p_x = \text{const} \Rightarrow \dot{x} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \text{const}$$

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad q(t) = q_0 + V(t - t_0), \quad \text{пр. путь, ег. реш.}$$

Оп. (Прямой и окольные пути).

$q(t, 0)$  — решение краевой задачи, прямой путь ( $\alpha = 0$ )

$q(t, \alpha)$  — траектория вблизи  $q(t, 0)$ , окольный путь ( $\alpha \neq 0$ )

**21.13.** Одномерный гармонический осциллятор  $L = \frac{1}{2}(q^2 - \omega^2 q^2)$  начинает движение из состояния  $q(0) = q_0$ ,  $\dot{q}(0) = 0$ . Вычислить значение  $W$  действия по Гамильтону на этом прямом пути за время  $\omega t_1 = \sqrt{10} > \pi$ . За то же время вычислить значение действия на околочных путях вида  $q_{\text{ок}} = q_0 + \delta q$ ,  $\delta \dot{q} = \alpha(t_1 - t)$ . На плоскости  $(q, t)$  изобразить прямой путь и семейство околочных путей. Показать, что существуют значения параметра  $\alpha$ , для которых а)  $W_{\text{ок}} > W_{\text{пр}}$ ; б)  $W_{\text{ок}} = W_{\text{пр}}$ ; в)  $W_{\text{ок}} < W_{\text{пр}}$ .

Опред. (действие по Гамильтону).

Действием по Гамильтону называется функционал  $S$ :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Ставит каждой траектории  $q(t)$  в соответствии некоторое число

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = 0 \Rightarrow q_{\text{пр}} = q_0 \cos \omega t$$

$$L_{\text{пр}} = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) = \frac{1}{2}q_0^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t)$$

$$L_{\text{пр}} = -\frac{1}{2}q_0^2 \omega^2 \cos 2\omega t$$

$$1) S_{\text{пр}} = \int_0^{t_1} L_{\text{пр}} dt = -\frac{1}{2}q_0^2 \omega^2 \int_0^{t_1} (\cos 2\omega t) dt = -\frac{1}{4}\omega q_0^2 \sin 2\omega t_1.$$

$$2) q_{\text{ок}} = q_{\text{пр}} + \delta q, \quad \delta \dot{q} = \alpha t(t_1 - t), \quad q_{\text{ок}}(0) = q_{\text{пр}}(0), \quad q_{\text{ок}}(t_1) = q_{\text{пр}}(t_1)$$

$$S_{\text{ок}} = \int_0^{t_1} L_{\text{ок}} dt = \int_0^{t_1} \frac{1}{2}[(\dot{q}_{\text{пр}} + \delta \dot{q})^2 - \omega^2(q_{\text{пр}} + \delta q)^2] dt = S_{\text{пр}} + \delta S + S_2$$

Посчитаем вариацию [действия по Гамильтону](#)

$$\delta S = L_2 dt_2 - L_1 dt_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

Теорема (Принцип Гамильтона (изменения действия)).  
 $\delta S = 0 \Leftrightarrow q = q(t, 0)$  — прямой путь.  
[Доказательство >](#)

но кр. Гамильтон  
 (чий 8, 31 мин.)

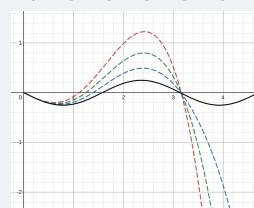
$$S_{\text{ок}} = S_{\text{пр}} + S_2 = S_{\text{пр}} + \frac{1}{2}(\delta \dot{q}^2 - \omega^2 \delta q^2)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\alpha^2 \left[ \int_0^{t_1} (t_1 - 2t)^2 dt - \omega^2 \int_0^{t_1} t^2 (t_1 - t)^2 dt \right] = \frac{1}{2}\alpha^2 \left( \frac{t_1^3}{3} - \frac{\omega^2 t_1^5}{30} \right)$$

$$S_{\text{ок}} = S_{\text{пр}} + S_2 = -\frac{1}{4}\omega q_0^2 \sin 2\omega t_1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \left( \frac{t_1^3}{3} - \frac{\omega^2 t_1^5}{30} \right)$$

$$\text{Sign}(S_2) = \text{Sign}(10 - \omega^2 t_1^2) = \text{Sign}(S_{\text{ок}} - S_{\text{пр}}) \quad (\text{Не забывает о } \alpha)$$

21.13. При любом значении  $\alpha$   $W_{\text{ок}}(0, t_1 = \sqrt{10}) = W_{\text{пр}}(0, t_1 = \sqrt{10})$  и  $W_{\text{ок}}(0, t_1 < \sqrt{10}) > W_{\text{пр}}(0, t_1 < \sqrt{10})$ ;  $W_{\text{ок}}(0, t_1 > \sqrt{10}) < W_{\text{пр}}(0, t_1 > \sqrt{10})$ .



21.23. Показать, что для системы с лагранжианом  
 $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i \dot{q}_i^2 + b_i^2 q_i^2)$  ( $a_i = \text{const}$ ,  $b_i = \text{const}$ ) действие по Гамильтону на прямом пути имеет глобальный минимум.

Пусть  $q_j$  - пр. путь

$$\Delta S = S(q_j + \delta q_j) - S(q_j) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum [a_i^2 (\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i)^2 + b_i^2 (q_i + \delta q_i)^2] dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum [a_i^2 \dot{q}_i^2 + b_i^2 q_i^2] dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum [a_i^2 \delta \dot{q}_i^2 + b_i^2 \delta q_i^2] dt > 0 \Rightarrow \min$$

ЛИН ЧА.  
по  $\delta q_j, \delta \dot{q}_j$  (пред. задана)  
уходит

21.32. Для материальной точки, движущейся по инерции, действие по Гамильтону имеет вид  $W = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\Delta x}{2} dt$ . Найти такие значения параметров  $a_0, a_1, a_2$  на трехпараметрическом семействе кривых  $x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2/2$ , проходящих через две заданные точки  $(x_0, t_0 = 0)$  и  $(x_1, t_1 > 0)$ , чтобы  $W(a_0, a_1, a_2) \leq W(a_0, a_1, a_2)$  (прямой метод отыскания прямых путей на заданном классе функций).

$$X = \alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{1}{2} \alpha_2 t^2 \Rightarrow \tilde{\alpha}_0 = x_0, \quad \alpha_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1} - \frac{1}{2} \alpha_2 t_1,$$

$$\dot{X} = \alpha_1 + \alpha_2 t \Rightarrow S = \int_0^{t_1} \frac{\dot{X}^2}{2} dt = \int_0^{t_1} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 t)^2}{2} dt = \frac{1}{2} \alpha_1^2 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 t_1^2 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 t_1^3,$$

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x}{t_1} - \frac{1}{2} \alpha_2 t_1 \right)^2 t_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x}{t_1} - \frac{1}{2} \alpha_2 t_1 \right) \alpha_2 t_1^2 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 t_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta x^2}{t_1} - \alpha_2 \Delta x t_1 + \frac{1}{4} \alpha_2^2 t_1^3 + \alpha_2 \Delta x t_1 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 t_1^3 + \frac{1}{3} \alpha_2^2 t_1^3 \right] = \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{t_1} + \frac{1}{24} \alpha_2^2 t_1^3$$

$$S \min \text{ при } \alpha_2 = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha}_0 = x_0, \quad \tilde{\alpha}_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1}, \quad \tilde{\alpha}_2 = 0.$$

21.32.  $a_0 = x_0, \quad a_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1}, \quad a_2 = 0.$

# Негеля 10

## 10. Интегральные инварианты

22.6, 22.20, 22.29, 22.31

Выяснить, какие из квадратичных интегралов в задачах 22.3-22.8 являются универсальными интегральными инвариантами. Как связана эти интегралы с универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре?

$$22.6. I = \oint \sum_{i=1}^n [(a_i p_i + \varphi_i(q_i)) \delta q_i + (\beta_i q_i + \psi_i(p_i)) \delta p_i]$$

по Т.Ли Хуанхунда

$$J = \text{inv} \Leftrightarrow J = C J_p \Leftrightarrow J - C J_p = 0$$

$$I = J - C J_p = \oint \sum [(\alpha_i - \beta_i) p_i + \varphi_i(q_i)] \delta q_i + (\beta_i q_i + \psi_i(p_i)) \delta p_i$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i}$$

контур прошл.  $\Rightarrow I = 0 \Leftrightarrow$  по знаком и т. п. полн. дифр

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial \varphi_i(q_i)}{\partial q_j} = 0 = \frac{\partial W_3(p_i)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_j} = \beta_i \quad \frac{\partial F}{\partial p_j \partial q_i} = \alpha_i - \beta_i \Rightarrow C_i = \alpha_i - \beta_i \Rightarrow C = \sum \alpha_i - \beta_i$$

$$J = J_p \cdot (\sum \alpha_i - \beta_i)$$

$$22.6. I = \oint \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) p_i \delta q_i .$$

22.20. Показать, что интегралы

$$I_1 = \int_{G_1} \dots \int \varphi_1(q_1, p_1) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \delta p_1 \delta p_2 \delta p_3 ,$$

$$I_2 = \int_{G_2} \dots \int \varphi_2(q_1, q_2, p_1) \delta q_1 \delta q_2 \delta p_1 \delta p_2 ,$$

$$I_3 = \int_{G_3} \dots \int \varphi_3(q_1, p_1, p_2) \delta q_1 \delta q_2 \delta p_1 \delta p_2 \delta p_3 ,$$

где  $\alpha$  и  $p$  — производные постоянные, являются интегральными инвариантами канонической системы с гамильтонианом  $H = \varphi_1 \{ \varphi_2 \{ \varphi_3 \{ \varphi_1(q_1, p_1), p_2 \}, p_3 \} \}$ .

В линии  $g$  (13 лин.) удаляются без убыток

$$\text{для } H = \varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2), q_3, p_3) \quad \varphi_K = \varphi_K(\varphi_{K-1}, q_{K-1}, p_{K-1}) - \Pi.U.$$

$$\{ \varphi_K, \varphi_I \} = \sum \frac{\partial \varphi_K}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_I}{\partial p_i} - \sum \frac{\partial \varphi_K}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_I}{\partial q_i} = \sum \frac{\partial \varphi_K}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_I}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_K}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_I}{\partial p_i} - \sum \frac{\partial \varphi_K}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_I}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi_K}{\partial q_i} \frac{\partial \varphi_I}{\partial q_i} = 0$$

Критерий первого интеграла для Гамильтоновых систем имеет вид:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{(i,j)} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_j} \right) = 0, \text{ где } (i,j) — \text{символ Пуассона}$$

Алгебра  $g$  (1:11)

$$I_K = \int_{G_1} \dots \int U_K(\varphi_1(q_1, p_1), \varphi_2(q_2, p_2), \dots, \varphi_K(q_K, p_K)) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \delta p_1 \delta p_2 \delta p_3 =$$

$$= \int_{G_1} \dots \int \widetilde{U}_K(\widetilde{\varphi}_1(q_1^\circ, p_1^\circ), \widetilde{\varphi}_2(q_2^\circ, p_2^\circ), \dots, \widetilde{\varphi}_K(q_K^\circ, p_K^\circ)) \left| \frac{\partial (q_n, p_n)}{\partial (q_n^\circ, p_n^\circ)} \right| \delta q_1^\circ \delta q_2^\circ \delta q_3^\circ \delta p_1^\circ \delta p_2^\circ \delta p_3^\circ$$

$$U_K - \Pi.U. \Rightarrow \widetilde{U}_K = U_K$$

$$V = \text{const} \Rightarrow \left| \frac{\partial (q_n, p_n)}{\partial (q_n^\circ, p_n^\circ)} \right| = 1 \Rightarrow \int_{G_1} \dots \int_{G_K} = \int_{G_1} \dots \int_{G_K} = \text{inv}$$

Теорема (Сокращение  $V$  для гамильтоновых систем).

Для гамильтоновых систем (полный объем  $V$  сохраняется)

Доказательство >

22.29. Найти необходимые и достаточные условия сохранения фазового объёма в пространстве  $(x_1, \dots, x_n)$  для стационарной линейной динамической системы  $\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$  ( $i = 1, n$ ).

22.29.  $\operatorname{tr} A = 0$

Теорема (Литвилда о сохранении фазового объема).

$V = \text{const} \Leftrightarrow \operatorname{div} F(x, t) = 0$

Доказательство >

$$\dot{X} = AX \text{ по Th. Литвильда } V = \text{const} \Leftrightarrow \operatorname{div} AX = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_k a_{ik} X_k \right) = \operatorname{tr} A$$

22.31. Груз массы  $m$  движется по прямой  $Ox$  под действием упругой силы  $-cx$  и силы сопротивления  $-\beta \dot{x}$ . На плоскости  $(x, \dot{x})$  выбирается область  $G_0$  площади  $S_0$ . Совокупность движений груза с начальными условиями в  $G_0$  переводит  $G_0$  в  $G_t$ . Найти площадь  $S_t$  области  $G_t$ .

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + cx = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\beta}{m}v \end{cases} \Rightarrow F(x, v) = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{c}{m}x - \frac{\beta}{m}v \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{div} F = -\frac{\beta}{m} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \int_G \operatorname{div} F dx dv = -\frac{\beta}{m} S \Rightarrow \int_{S_0}^{S_t} \frac{dS}{S} = -\frac{\beta}{m} \int_0^t dt \Rightarrow S_t = \exp(-\beta t/m) S_0$$

$$V_t = \int_{G_t} \dots \int_{G_t} \operatorname{div} F(x_1, t) dx_1 \dots dx_n$$

## Неделя II

11. Канонические преобразования  
23.7, 23.20, 23.29, 23.48, 23.71, 23.97

### № 23.7

Для канонических преобразований в задачах 23.4–23.9  
найти вспомогательные с и производящие функции  $F(q, p, t)$ .

23.7.  $\tilde{q} = -q \operatorname{ctg} p$ ,  $\tilde{p} = 2 \ln \cos p$

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

Преобр. канон.  $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} = 2 \frac{1}{\cos p} \cdot \left( -\sin p \right) \cdot \operatorname{ctg} p - 2 \ln \cos p \cdot \frac{1}{\sin^2 p} + C$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} = -2 \ln \cos p \cdot \frac{1}{\sin^2 p}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} \Rightarrow C = 2$$

(Симплекс 10, 40 мин)

$$\begin{cases} 2 \ln \cos p \cdot (-\operatorname{ctg} p) - C p = -\frac{\partial F}{\partial q} \\ 2 \ln \cos p \cdot \left( q \cdot \frac{1}{\sin^2 p} \right) = -\frac{\partial F}{\partial p} \end{cases}$$

Находим  $F$ :  $F(q, p, t) = \int \frac{\partial F}{\partial p} dp + f(q, t)$  (1)

$$\int \frac{\partial F}{\partial p} dp = -2q \int \frac{\ln \cos p}{\sin^2 p} dp = 2q \left[ C \operatorname{tg} p \cdot \ln \cos p + p \right]$$

$$U = p \ln \cos p \quad dU = -\operatorname{tg} p \cdot dp$$

$$dV = \frac{dp}{\sin^2 p} \quad V = -C \operatorname{tg} p$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 2 \ln \cos p \cdot ctg p + 2p = 2 [ctg p \cdot \ln \cos p + p] + f'_q(q_1, t) \Rightarrow$$

$$f'_q(q_1, t) = 0 \Rightarrow f_q(q_1, t) = 0 \quad \text{добавление } g = g(t) \text{ или const не существенно}$$

$$F(q_1, p, t) = 2q_1 [ctg p \cdot \ln \cos p + p]$$

$$23.7. \ c=2, \ F(q, p, t) = 2q [p + \ln(\cos p) \cdot \operatorname{ctg} p]$$

## Nº 23.20

Приведённые в задачах 23.20–23.24 выражения  $x_i = x_i(q, t)$  ( $i=1,2,3$ ) определяют переход от декартовых к обобщённым координатам. Используя результат задачи 23.18, найти соответствующие этому переходу формулы преобразования обобщённых импульсов  $\tilde{p}_i = p_{i,0}(q, q_1, p_1, p_2, p_3, t)$ .

$$23.20. \ x_1 = p \cos \varphi, \ x_2 = p \sin \varphi, \ x_3 = z.$$

23.18. В механической системе с лагранжианом  $L(q, \dot{q}, t)$  при помощи несессенного преобразования  $\tilde{q} = \tilde{q}_i(q, t)$  ( $i=1, n$ ) совершается переход от обобщённых координат  $q$  к обобщённым координатам  $\tilde{q}$ . Найти соответствующий этому переходу закон преобразования обобщённых импульсов  $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q, p, t)$  ( $i=1, n$ ) и доказать каноничность преобразования  $\tilde{q} = \tilde{q}_i(q, t)$ ,  $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q, p, t)$  ( $i=1, n$ ). Найти взаимность  $c$  и производную функцию  $F(q, p, t)$  этого преобразования.

$$23.18. \ \tilde{p}_i = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i} \quad (i=1, n), \ c=1, \ F=0.$$

↑  
3

$$\tilde{P}_i = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \sum_j \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}$$

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_1, t) \Rightarrow \dot{\tilde{q}}_i = \sum_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_i}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_i}$$

$$\tilde{P}_i = \sum_j P_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}$$

$$\text{усл 23.18} \quad \tilde{P}_i = \sum_j P_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}$$

$$23.20. \ x_1 = p \cos \varphi, \ x_2 = p \sin \varphi, \ x_3 = z. \quad p = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \ \psi = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \ \cos \psi = \frac{x_1}{p}, \ \sin \psi = \frac{x_2}{p}$$

$$P_p = \sum_i P_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p} = P_{x_1} \cos \psi + P_{x_2} \sin \psi = \frac{P_{x_1} X_1 + P_{x_2} X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$$

$$P_q = \sum_i P_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q} = -P_{x_1} \cdot p \cdot \sin \psi + P_{x_2} \cdot p \cdot \cos \psi = -P_{x_1} \cdot X_2 + P_{x_2} \cdot X_1$$

$$P_z = \sum_i P_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial z} = P_{x_3}$$

$$P_{x_i} = P_p \frac{\partial p}{\partial x_i} + P_q \frac{\partial q}{\partial x_i} + P_z \frac{\partial z}{\partial x_i} \Rightarrow$$

$$P_{x_1} = P_p \cdot \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} + P_q \left( -\frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2} \right) + 0 = P_p \cos \psi - P_q \frac{\sin \psi}{p}$$

$$P_{x_2} = P_p \cdot \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} + P_q \left( \frac{X_1}{X_1^2 + X_2^2} \right) + 0 = P_p \sin \psi + P_q \frac{\cos \psi}{p}$$

$$P_{x_3} = P_z$$

$$23.20. \ P_p = \frac{P_{x_1} X_1 + P_{x_2} X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}, \quad P_\varphi = -P_{x_1} X_2 + P_{x_2} X_1, \quad P_z = P_{x_3};$$

$$P_{x_1} = P_p \cos \varphi - P_\varphi \frac{\sin \varphi}{p}, \quad P_{x_2} = P_p \sin \varphi + P_\varphi \frac{\cos \varphi}{p}, \quad P_{x_3} = P_z,$$

23.29. Задано каноническое преобразование  
 $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q, p, t)$ ,  $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q, p, t)$  ( $i=1, n$ ). Каким условиям должны удовлетворять функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  для того, чтобы преобразование  $\tilde{q}^* = f_1(t)\tilde{q}_i(q, p, t)$ ,  $\tilde{p}^* = f_2(t)\tilde{p}_i(q, p, t)$  было каноническим?

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\tilde{q}_i, \tilde{p}_i - \text{канон.} \Rightarrow \begin{cases} \sum \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\sum_j P_j^* \frac{\partial q_i^*}{\partial q_j} = f_1(t) \cdot f_2(t) \sum \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = f_1(t) \cdot f_2(t) \left( CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)$$

$$\sum_j P_j^* \frac{\partial q_i^*}{\partial p_j} = f_1(t) \cdot f_2(t) \sum \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \left( -\frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

$$q^*, p^* - \text{канон} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(t) \cdot f_2(t) \left( CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) = C^* P_i - \frac{\partial F^*}{\partial q_i} \\ f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \left( -\frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = -\frac{\partial F^*}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial p_i \partial q_i} = C^* - f_1(t) \cdot f_2(t) \left( C - \frac{\partial F}{\partial p_i \partial q_i} \right)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial q_i \partial p_i} = f_1(t) f_2(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial q_i \partial p_i}$$

$$C^* = f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot C = \text{const} \Rightarrow f_1(t) \cdot f_2(t) = \text{const}$$

23.29.  $f_1(t) f_2(t) = \text{const}$

23.48. Найти движение осциллятора с гамильтонианом  $H = \frac{1}{2} \sum_i (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2)$ . Показать, что закон движения системы  $q_i = q_i(q_0, p_0, t)$ ,  $p_i = p_i(q_0, p_0, t)$  ( $i=1, n$ ) можно рассматривать, как униполярное каноническое преобразование начальных данных. Найти производящую функцию этого преобразования и гамильтониан  $H_n(q_0, p_0)$ .

$$\begin{cases} q_i = q_i^0 \cos \omega_i t + \frac{p_i^0}{\omega_i} \sin \omega_i t \\ p_i = \dot{q}_i = -q_i^0 \omega_i \sin \omega_i t + p_i^0 \cos \omega_i t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\text{канон} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum P_j \frac{\partial q_i^*}{\partial q_j} = P_i \cos \omega_i t = CP_i - \frac{\partial F^*}{\partial q_i^*} \\ \sum P_j \frac{\partial q_i^*}{\partial p_j} = \frac{P_i^0}{\omega_i} \sin \omega_i t = -\frac{\partial F^*}{\partial p_i^0} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial p_i^0 \partial q_i^*} = -\cos^2 \omega_i t + C = \sin^2 \omega_i t = \frac{\partial F}{\partial q_i^0 \partial p_i^0} \Rightarrow C=1 \quad (\text{униполярное})$$

$$F = \int \sum \frac{\partial F}{\partial p_i^0} dp_i^0 + f(q^0, t) = \sum [P_i^0 q_i^0 \sin^2 \omega_i t - \frac{P_i^0}{2\omega_i} \sin \omega_i t \cdot \cos \omega_i t] + f(q^0, t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i^0} = q_i^0 w_i \sin \omega t \cdot \cos \omega t - p_i^0 \cos^2 \omega t + p_i^0 = p_i^0 \sin^2 \omega t + f_i^0$$

$$f = \sum \frac{1}{2} q_i^0 w_i \sin \omega t \cos \omega t$$

23.48.  $F = pq \sin^2 \omega t + \frac{p^2 - q^2 \omega^2}{2\omega} \cos \omega t \sin \omega t, \quad H_0 = 0.$

$$F = \sum_i p_i^0 q_i^0 \sin^2 \omega t - \frac{p_i^0 - q_i^0 w_i^2}{2w_i} \cos \omega t \sin \omega t$$

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial t} \Rightarrow H_0 = H - \frac{\partial F}{\partial t} - \sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

$$\sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} = \sum p_i^2; \quad H = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + w_i^2 q_i^2$$

$$H_0 = -\frac{1}{2} \sum p_i^2 + \frac{1}{2} \sum w_i^2 q_i^2 - \frac{\partial F}{\partial t} \Rightarrow H_0 = 0$$

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = -\sum p_i^0 q_i^0 w_i \sin 2\omega t - \frac{p_i^0 - q_i^0 w_i^2}{2} \cos 2\omega t$$

$$-\frac{1}{2} p_i^2 = -\frac{1}{2} q_i^0 w_i^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} p_i^0 q_i^0 w_i \sin 2\omega t - \frac{1}{2} p_i^0 \cos^2 \omega t$$

$$\frac{1}{2} w_i^2 q_i^2 = \frac{1}{2} w_i^2 q_i^0 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} p_i^0 q_i^0 w_i \sin 2\omega t + \frac{1}{2} p_i^0 \sin^2 \omega t$$

23.71. При каких значениях  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$  ( $i=1, n$ ) преобразование  $\tilde{q}_i = q_i^\infty p_i^0, \quad \tilde{p}_i = q_i^\infty p_i^0$  является каноническим?

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum q_i^{\chi_i} p_i^{\delta_i} \alpha_i q_i^{\alpha_i-1} p_i^{\beta_i} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum q_i^{\chi_i} p_i^{\delta_i} \beta_i q_i^{\alpha_i} p_i^{\beta_i-1} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i \partial q_i} = \alpha_i q_i^{\delta_i + \alpha_i - 1} \cdot (\delta_i + \beta_i) p_i^{\beta_i + \alpha_i - 1} + C$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i \partial p_i} = -(\alpha_i + \chi_i) \beta_i q_i^{\delta_i + \alpha_i - 1} \cdot p_i^{\beta_i + \alpha_i - 1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i \partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i \partial p_i}, \quad C = \text{const} \Rightarrow \chi_i + \alpha_i = 1; \quad \delta_i + \beta_i = 1 \Rightarrow$$

$$C = \alpha_i (\delta_i + \beta_i) - \beta_i (\alpha_i + \chi_i) = \alpha_i - \beta_i = (1 - \chi_i) - (1 - \delta_i) = \delta_i - \chi_i$$

23.71.  $\gamma_i + \alpha_i = 1, \quad \delta_i + \beta_i = 1, \quad c = \alpha_i - \beta_i = \delta_i - \gamma_i$

Используя критерий каноничности преобразования  $(q, \dot{q})$ -описания, выяснить, какие из преобразований в задачах 23.85–23.10 являются каноническими (величины  $a, b, \gamma, \lambda, \mu, a_i, b_i, \omega_i, \alpha_i, \beta_i$  – постоянные). Для канонических преобразований найти величину  $c$  и производящую функцию  $S(q, \dot{q}, t)$ .

23.97.  $\ddot{q}_i = \sqrt{pq_i} q_i^{(a_i-1)}$ ,  $\ddot{p}_i = -\sqrt{pq_i} (q_i^{(a_i-1)})^{(2a_i-1)} (i=1, n)$ .

$$\begin{cases} \ddot{p}_i = -\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \\ c p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \end{cases}$$

Нез. пер.  $(q_i, \dot{q}_i) \Rightarrow$  введем  $\tilde{P}_i$  и  $P_i$  через  $(q_i, \dot{q}_i)$

$$\tilde{q}_i^{d_i} = \gamma P_i q_i^{(1-\gamma)} \Rightarrow P_i = \frac{1}{\gamma} \tilde{q}_i^{d_i} \cdot q_i^{d_i-1}$$

$$\tilde{P}_i = -\sqrt{\left(\tilde{q}_i^{d_i} \cdot q_i^{d_i-1}\right)^{d_i-1}} q_i^{2d_i-1} = -\sqrt{\tilde{q}_i^{d_i^2-d_i} \cdot q_i^{d_i^2}} = -\tilde{q}_i^{d_i-1} \cdot q_i^{d_i}$$

канон  $\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{P}_i = -\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \\ C P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \end{cases}$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i \cdot \partial \tilde{q}_i} = \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial q_i} = \alpha_i q_i^{(d_i-1)} \tilde{q}_i^{(d_i-1)}$$

$$\Rightarrow C = \gamma$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i \cdot \partial q_i} = C \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{C}{\gamma} \alpha_i \tilde{q}_i^{(d_i-1)} q_i^{(d_i-1)}$$

уравн S:  $S = \sum \frac{1}{\alpha_i} (q_i \cdot \tilde{q}_i)^{d_i}$

23.97.  $c = \gamma$ ,  $S(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} (q_i \tilde{q}_i)^{a_i}$

## Лекция 12

12. Уравнение Гамильтон–Якоби  
24.9, 24.18, 24.43, 24.66, 24.87

24.9. Материальная точка массы  $m$  движется в центральном поле с потенциальной энергией  $\Pi(r) = \frac{\mu_1}{r} + \frac{\mu_2}{r^2}$ . Используя сферические координаты  $r, \theta, \phi$ , составить уравнение Гамильтон–Якоби, построить его полный интеграл и получить из него уравнение траектории точки в плоскости меридиана ( $\phi = \text{const}$ ,  $\alpha_0 = 0$ ).

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{P_\phi^2}{2mr^2 \cos^2 \theta} + \Pi(r)$$

$$T.K. \Psi = \text{const} = 0; \quad H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \Pi(r) = h = \text{const}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) = 0$$

уравнение Гамильтон–Якоби

$$c p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Более некоторых производных функции времени Гамильтон–Якоби в виде полного интеграла. Решение  $S = S(\vec{q}, \vec{p}, t)$  – полный интеграл уравнения Гамильтон–Якоби, если

1.  $S$  удовлетворяет уравнению Гамильтон–Якоби

$$2. \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}\right) \neq 0$$

Одним из методов нахождения производной функции в виде полного интеграла является метод разделения переменных. Для этого полный интеграл пишут в виде

$$S = S_0(t, \vec{a}) + S_1(\vec{q}_1, \vec{a}) + \dots + S_n(\vec{q}_n, \vec{a})$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S}{\partial \psi} \right)^2 \right] + \Pi(r) = 0$$

Полный интеграл можно в форме

$$S = S_0(t, \alpha) + S_r(r, \alpha) + S_\psi(\psi, \alpha)$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial S_\psi}{\partial \psi} \right)^2 \right] + \Pi(r) = 0$$

Уравнение распадается на слагаемые, каждое из которых зависит от своих переменных. Но так как уравнение должно тождественно выполняться, то получаем, что все слагаемые есть константы:

$$\left( \frac{\partial S_\psi}{\partial \psi} \right)^2 = \alpha_\psi \Rightarrow S_\psi = \sqrt{\alpha_\psi} \cdot \psi$$

$$\frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\psi}{r^2} \right] + \Pi(r) = h \Rightarrow S_r = \int \sqrt{2m(h - \Pi(r)) - \frac{\alpha_\psi}{r^2}} dr$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + h = 0 \Rightarrow S_0 = -ht$$

$$S = -ht + \int \sqrt{2m(h + \frac{\mu_1}{r} - \frac{\mu_2}{r^2}) - \frac{\alpha_\psi}{r^2}} dr + \sqrt{\alpha_\psi} \cdot \psi$$

$$\beta_h = \frac{\partial S}{\partial h} = -t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(h + \frac{\mu_1}{r} - \frac{\mu_2}{r^2}) - \frac{\alpha_\psi}{r^2}}} \Rightarrow r = r(\alpha, \beta, t)$$

$$\beta_\psi = \int \frac{dr}{2r\sqrt{2m(h + \frac{\mu_1}{r} - \frac{\mu_2}{r^2}) - \frac{\alpha_\psi}{r^2}}} - \frac{\psi}{2\sqrt{\alpha_\psi}}$$

затем находим траектории посчитаем  $\beta_\psi$ :

$$I = \int \frac{dr}{2r\sqrt{2mh + \frac{r^2}{r^2} + 2m\mu_1 r - 2m\mu_2 - \alpha_\psi}}$$

значимо:

$$\sqrt{\alpha_\psi + 2m\mu_2} \cdot 2r \cdot \sqrt{\frac{2mh}{\alpha_\psi + 2m\mu_2} \cdot r^2 + 2 \frac{m\mu_1}{\alpha_\psi + 2m\mu_2} r - 1}$$

однозн.

$$\frac{1}{P} = \frac{m\mu_1}{\alpha_\psi + 2m\mu_2}, \text{ тогда } \frac{2mh}{\alpha_\psi + 2m\mu_2} \cdot r^2 = 2mh \cdot \frac{\alpha_\psi + 2m\mu_2}{(m\mu_1)^2} \cdot \left( \frac{r}{P} \right)^2 e^{2-1}$$

24.9.  $S = -ht + \int \sqrt{2m \left( h + \frac{\mu_1}{r} - \frac{\mu_2}{r^2} \right) - \frac{\alpha_\psi}{r^2}} dr + \sqrt{\alpha_\psi} \cdot 0$ . Траектория определяется квадратурой

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\psi} = -\beta_\psi \rightarrow \rightarrow \frac{0}{2\sqrt{\alpha_\psi}} - \int \frac{dr}{2r^2 \sqrt{2mh + \frac{2m\mu_1}{r} - \frac{\alpha_\psi + 2m\mu_2}{r^2}}} = -\beta_\psi.$$

Вводят обозначения

$$\text{однозн. } e^2 = 2m\mu_1 \cdot \frac{\alpha_\psi + 2m\mu_2}{(m\mu_1)^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\text{пог корнем } (e^2 - 1) \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{\rho}\right) - 1 = e^2 \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - \left(\frac{r}{\rho} - 1\right)^2$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_\psi + 2m\mu_2}} \int \frac{dr}{r \sqrt{e^2 \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - \left(\frac{r}{\rho} - 1\right)^2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\psi} \sqrt{1 + \frac{2m\mu_2}{\alpha_\psi}}} \int}_{w} \frac{d\left(\frac{r}{\rho} - 1\right)}{e \sqrt{1 - \frac{1}{e^2} \left(\frac{\rho}{r} - 1\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_\psi} \cdot w} \cdot \arccos \frac{\frac{\rho}{r} - 1}{e}$$

$$\arccos \frac{\frac{\rho}{r} - 1}{e} = \underbrace{2w\sqrt{\alpha_\psi} \beta_\psi}_\psi + \omega\psi = \psi_0 + \omega\psi \Rightarrow r = \frac{\rho}{1 + e \cdot \cos(\omega\psi + \psi_0)}$$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{1 + 2m\mu_1 \left(\frac{\alpha_\psi + 2m\mu_2}{(m\mu_1)^2}\right)} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{m\mu_1}{\alpha_\psi + 2m\mu_2}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m\mu_2}{\alpha_\psi}}, \\ 0_1 &= 2\alpha\sqrt{\alpha_\psi} \beta_\psi, \text{ получаем} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{0}{2\sqrt{\alpha_\psi}} = \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\alpha_\psi} \sqrt{1 + \frac{2m\mu_2}{\alpha_\psi}}} \int \frac{dr}{r \sqrt{2m\mu_1 \left(\frac{\alpha_\psi + 2m\mu_2}{(m\mu_1)^2}\right) \left[\frac{m\mu_1(r)}{\alpha_\psi + 2m\mu_2} - 1\right]}} = \\ &= -\beta_0 \rightarrow \text{отт} 0_1 = \int \frac{dr}{r \sqrt{\left(\frac{r}{\rho} - 1\right) \left(\frac{r}{\rho} + 2\left(\frac{\rho}{r}\right) - 1\right)}} = \int \frac{dr}{r \sqrt{\left(\frac{r}{\rho}\right) \left(\frac{r}{\rho} - 1\right)}} = \\ &= -\int \frac{d\left(\frac{r}{\rho} - 1\right)}{e \sqrt{1 - \frac{1}{e^2} \left(\frac{\rho}{r} - 1\right)^2}} = \arccos \frac{e}{\rho} \rightarrow r = \frac{\rho}{1 + e \cos(\omega\psi + \psi_0)} \end{aligned}$$

Имеет замкнутые траектории при  $e = 0$ , либо  $e < 1$  и орбитально. Траектории разомкнуты при  $e \geq 1$  либо  $e < 1$  и орбитально. При  $\mu_2 = 0$  имеем обычное коническое сечение:

24.18. Однородный стержень массы  $m$  и длины  $l$  движется по гладкой вертикальной плоскости  $Oz_\Omega$ . Плоскость вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг неподвижной вертикальной оси  $Oz$ . Используя метод Яоби, записать уравнения относительного движения стержня в квадратурах.



$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} (\dot{\psi}^2 + \omega^2 \sin^2 \theta) \quad \Pi(z, r) = mgz - \frac{1}{2} mw^2 r^2$$

$$H = \hat{T} + \Pi = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{6}{ml^2} p_\psi^2 + \frac{ml^2}{24} \omega^2 \sin^2 \theta + mgz - \frac{1}{2} mw^2 r^2$$

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{ds}{dr} \right)^2 + \left( \frac{ds}{dz} \right)^2 \right] + \frac{6}{ml^2} \left( \frac{ds}{d\psi} \right)^2 + f(z, r, \theta) = 0$$

Полный интеграл имеет вида

$$S = S_0(t, \alpha) + S_r(r, \alpha) + S_z(z, \alpha) + S_\psi(u, \alpha)$$

$$\frac{ds_0}{dt} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{ds_r}{dr} \right)^2 + \left( \frac{ds_z}{dz} \right)^2 \right] + \frac{6}{ml^2} \left( \frac{ds_\psi}{du} \right)^2 + \frac{ml^2}{24} w^2 \sin^2 \psi + mgz - \frac{1}{2} mw^2 r^2 = 0$$

Уравнение распадается на слагаемые, каждое из которых зависит от своих переменных. Но так как уравнение должно тождественно выполняться, то получим, что все слагаемые есть константы:

$$\frac{ds_\psi}{du} = \sqrt{\alpha_\psi} \Rightarrow S_\psi = \sqrt{\alpha_\psi} \cdot u$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{ds_z}{dz} \right)^2 + mgz = \alpha_z \Rightarrow S_z = \int \sqrt{2m(\alpha_z - mgz)} dz$$

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} m w^2 r^2 = dr \Rightarrow S_r = \sqrt{2m \cdot (dr + \frac{1}{2} mr^2 w^2)} dr$$

$$\frac{6}{mr^2} \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 - \frac{m l^2}{2u} w^2 \sin^2 \theta = d\theta \Rightarrow S_\theta = \sqrt{\frac{ml^2}{6} (\alpha_\theta + \frac{ml^2}{2u} w^2 \sin^2 \theta)} d\theta$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + dr + d\theta + dz = 0 \Rightarrow S_0 = -\alpha_r t - \alpha_\theta t - \alpha_z t$$

$$S = -\alpha_r t + \sqrt{2m \cdot (dr + \frac{1}{2} mr^2 w^2)} dr - \alpha_\theta t + \sqrt{\frac{ml^2}{6} (\alpha_\theta + \frac{ml^2}{2u} w^2 \sin^2 \theta)} d\theta - \alpha_z t + \sqrt{2m(\alpha_z - mgz)} dz$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -t + \int \frac{2m dr}{2\sqrt{2m dr + mr^2 w^2}} = \beta_r \Rightarrow \int \frac{\sqrt{m} dr}{\sqrt{2dr + mr^2 w^2}} = \beta_r + t$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -t + \int \frac{\frac{ml^2}{6} d\theta}{2\sqrt{\frac{ml^2}{6} (2u d\theta + ml^2 w^2 \sin^2 \theta)}} \Rightarrow \int \frac{\sqrt{ml^2} d\theta}{\sqrt{2u d\theta + ml^2 w^2 \sin^2 \theta}} = \beta_\theta + t$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = -t + \int \frac{2m dz}{2\sqrt{2m(\alpha_z - mgz)}} \Rightarrow \int \frac{\sqrt{m} dz}{\sqrt{2(\alpha_z - mgz)}} = \beta_z + t$$

$$24.18. \int \frac{\sqrt{m} dr}{\sqrt{2\alpha_r + mr^2 \omega^2}} = \beta_r + t,$$

$$\int \frac{\sqrt{m} d\theta}{\sqrt{2(\alpha_\theta - mgz)}} = \beta_\theta + t, \quad \int \frac{\sqrt{ml^2} d\theta}{\sqrt{24\alpha_\theta + ml^2 \omega^2 \sin^2 \theta}} = \beta_\theta + t.$$

В задачах 24.36-24.47 система задаётся своим гамильтонианом. Используя метод Якоби, составить в квадратурах уравнения, определяющие закон движения системы.

$$24.43. H = \frac{p_{q_1}^2}{q_1^2} + \frac{1}{q_1^2} \left( \frac{p_{q_2}^2}{q_2^2} + \frac{p_{q_3}^2}{q_3^2} \right)$$

Аналогично пред. задачам

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{(\partial S_1 / \partial q_1)^2}{q_1^2} + \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \left( (\partial S_2 / \partial q_2)^2 + \frac{(\partial S_3 / \partial q_3)^2}{q_3^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha_1 = 0 \Rightarrow S_0 = -\alpha_1 t$$

$$\left( \frac{\partial S_3 / \partial q_3}{q_3^2} \right)^2 = \alpha_3 \Rightarrow S_3 = \int \sqrt{\alpha_3} q_3 dq_3 = \frac{1}{2} q_3^2 \sqrt{\alpha_3}$$

$$\frac{1}{q_1^2} \left[ (\partial S_2 / \partial q_1)^2 + \alpha_3 \right] = \alpha_2 \Rightarrow S_2 = \int \sqrt{\alpha_2 q_1^2 - \alpha_3} dq_1$$

$$\frac{1}{q_1^2} \left[ (\partial S_1 / \partial q_1)^2 + \alpha_2 \right] = \alpha_1 \Rightarrow S_1 = \int \sqrt{\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2} dq_1$$

$$S = -\alpha_1 t + \int \sqrt{\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2} dq_1 + \int \sqrt{\alpha_2 q_1^2 - \alpha_3} dq_1 + \frac{1}{2} q_3^2 \sqrt{\alpha_3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int \frac{q_1^2 dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2}} = \beta_1 \Rightarrow \int \frac{q_1^2 dq_1}{\sqrt{\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2}} = 2(\beta_1 + t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = - \int \frac{dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2}} + \int \frac{q_2^2 dq_2}{2\sqrt{\alpha_2 q_2^2 - \alpha_3}} = \beta_2$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = - \int \frac{dq_2}{2\sqrt{\alpha_2 q_2^2 - \alpha_3}} + \frac{q_3^2}{4\sqrt{\alpha_3}} = \beta_3$$

$$24.43. \int \frac{q_i^2 dq_i}{\sqrt{a_i q_i^2 - a_2}} = 2(\beta_i + t),$$

$$\int \frac{dq_1}{2\sqrt{a_1 q_1^2 - a_2}} - \int \frac{q_1^2 dq_1}{2\sqrt{a_1 q_1^2 - a_3}} = \beta_1, \quad \int \frac{dq_2}{2\sqrt{a_2 q_2^2 - a_3}} - \frac{q_3^2}{4\sqrt{a_3}} = \beta_3,$$

24.66. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для системы с гамильтонианом

$$H = H[\psi_1(q_1, p_1), \dots, \psi_n(q_n, p_n), t],$$

где функции  $\psi_i(q_i, p_i) = a_i$  ( $i = 1, n$ ) разрешимы относительно импульсов  $p_i = p_i(q_i, a_i)$ .

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}[\Psi(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}), t] = 0$$

$$\Psi_i(q_i, p_i) = a_i \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(a_i, t) = 0$$

$$\text{Ищем } S \text{ в виде } S = S_0(t, a) + \sum S_i(q_i, a_i)$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = -\mathcal{H}(a, t) \Rightarrow S_0 = - \int \mathcal{H}(a, t) dt$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial q_i} = P_i = P_i(q_i, a_i) \Rightarrow S_i = \int P_i(q_i, a_i) dq_i$$

$$S = - \int \mathcal{H}(a, t) dt + \sum \int P_i(q_i, a_i) dq_i$$

$$24.66. S = - \int H(a_1, \dots, a_n, t) dt + \sum_{i=1}^n \int p_i(q_i, a_i) dq_i$$

В задачах 24.84 – 24.89 по заданному полному интегралу  
уравнения Гамильтонона–Якоби найти гамильтониан системы.

24.87.

$$S = -\alpha_1 \int f(t) dt + \int \sqrt{[\alpha_n f_n(q_n)]} dq_n + \sum_{n=1}^{n-1} \int \sqrt{(\alpha_i - \alpha_{i+1}) f_i(q_i)} dq_i.$$

у.п.е Г-я:  $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, p_i, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -H = -\alpha_i f_i(t)$

у.п.е

с

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \Rightarrow \begin{cases} P_{i < n} = \sqrt{(\alpha_i - \alpha_{i+1}) f_i(q_i)} \\ P_n = \sqrt{\alpha_n f_n(q_n)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) = \frac{P_{i < n}^2}{f_i(q_i)} \\ \alpha_n = \frac{P_n^2}{f_n(q_n)} \end{cases}$$

$$\alpha_{n-1} = \alpha_n + \frac{P_{n-1}^2}{f_{n-1}(q)} = \frac{P_n^2}{f_n(q)} + \frac{P_{n-1}^2}{f_{n-1}(q)} \Rightarrow \alpha_1 = \sum \frac{P_i^2}{f_i(q_i)} \Rightarrow H = f(t) \sum \frac{P_i^2}{f_i(q_i)}$$

24.87.  $H = f(t) \sum_{i=1}^n \frac{P_i^2}{f_i(q_i)}$

