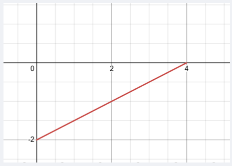
1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской кривой Γ:

4) $\int\limits_\Gamma \frac{ds}{y-x}$, Γ — отрезок с концами $(0;-2)$ и $(4;0)$;



$y=\frac{1}{2}x-2,\ 0\leqslant x\leqslant 4 \qquad x=2y+4,\ -2\leqslant y\leqslant 0$

$$x=\varphi(y),\quad c\leqslant y\leqslant d,$$

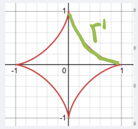
$$\int\limits_\Gamma F(x;y)\,dx = \int\limits_c^d F(\varphi(y);y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy.$$

$$\int\limits_\Gamma \frac{ds}{y-x} = \int\limits_{-2}^{0}\frac{dy}{y-2y-4}\cdot\sqrt{1+4} = -\sqrt5\int\limits_{-2}^{0}\frac{dy}{y+4} = -\sqrt5\ln 2+\sqrt5\ln 4 = \boxed{-\sqrt5\ln 2}$$

4) $-\sqrt5\ln 2$;

Вычислить криволинейный интеграл по плоской кривой Γ (4–11).

9. $\int\limits_\Gamma (x^{4/3}+y^{4/3})\,ds$, Γ — астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.



$x=a\cos^3 t \qquad x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$

$y=a\sin^3 t$

$0<t<2\pi \qquad y'_t=3a\sin^2 t\cos t$

$$\int\limits_\Gamma F(x;y;z)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2} = 3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t} = 3a\cos t\sin t = \frac{3}{2}a\sin 2t,\quad 0<t<\pi/2$$

$$x^{4/3}+y^{4/3} = a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t) = a^{4/3}\left[(\cos^2 t+\sin^2 t)^2-2\cos^2 t\sin^2 t\right] =$$

$$= a^{4/3}\left(1-\frac12\sin^2 2t\right) = \frac12 a^{4/3}(2-1+\cos^2 2t) = \frac12 a^{4/3}(1+\cos^2 2t)$$

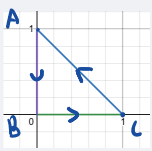
$$\int\limits_\Gamma = 4\int\limits_{\Gamma'}(x^{4/3}+y^{4/3})\,ds = 4\cdot\frac32 a\cdot\frac12 a^{4/3}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos^2 2t)\sin 2t\,dt = \left\{\begin{matrix}u=\cos 2t\\ du=-2\sin 2t\,dt\end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac32 a^{7/3}\int\limits_{-1}^{1}(1+u^2)\,du = 3a^{7/3}\int\limits_0^1(1+u^2)\,du = 3a^{7/3}\left(1+\frac13\right) = \boxed{4a^{7/3}}$$

9. $4a^{7/3}$.

Вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Γ, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (29, 30).

4) $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, Γ — граница треугольника с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$.



$$\int\limits_\Gamma = I_1+I_2+I_3$$

AB: $x=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1 \Rightarrow I_1 = -\int\limits_0^1 y^2\,dy = -\frac13$

BC: $y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1 \Rightarrow I_2 = \int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac13$

CA: $y=1-x,\ 0\leqslant x\leqslant 1 \Rightarrow I_3 = -\int\limits_0^1\left[x^2+(1-x^2)^2\right]dx+\int\limits_0^1\left[x^2-(1-x^2)^2\right]dx = 0$

$$\boxed{\int\limits_\Gamma = 0}$$

4) 0.

85. Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho(x;y)$ по дуге AB плоской кривой Γ, если:

4) Γ: $y^2 = x$, $A(1;1)$, $B(4;2)$; $\rho(x;y) = y$;

4) $(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})/12$;

$$m = \int_{\Gamma} \rho(x,y)\,ds = \int_1^2 y\sqrt{1+(2y)^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{1+4y^2}\,dy^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1+4y^2\right)^{3/2}\Big|_1^2 = \boxed{\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)}$$

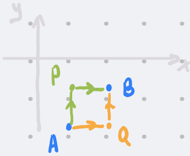
---

110. Найти работу поля $\mathbf{F} = (4x - 5y; 2x + y)$ вдоль дуги AB кривой Γ, где $A(1;-9)$, $B(3;-3)$, если:

1) Γ — ломаная APB, где $P(1;-3)$;

2) Γ — ломаная AQB, где $Q(3;-9)$;

$$A = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$



1) AP: $x = 1$, $-9 \leq y \leq -3$ $\qquad$ PB: $y = -3$, $1 \leq x \leq 3$

$$A_1 = \int_{-9}^{-3} (2+y)\,dy = -6 + \frac{9}{2} + 18 - \frac{81}{2} = -24 \qquad A_2 = \int_1^3 (4x+15)\,dx = 18 + 45 - 2 - 15 = 46$$

$$A = A_1 + A_2 = \boxed{22}$$

110. 1) 22; 2) 106;

2) AQ: $y = -9$, $1 \leq x \leq 3$ $\qquad$ QB: $x = 3$, $-9 \leq y \leq 3$

$$A_1 = \int_1^3 (4x+45)\,dx = 18 + 45\cdot 3 - 2 - 45 = 106 \qquad A_2 = \int_{-9}^{-3} (6+y)\,dy = -18 + \frac{9}{2} + 54 - \frac{81}{2} = 0$$

$$A = A_1 + A_2 = \boxed{106}$$

---

46. $\displaystyle\int_{\Gamma} (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$, Γ — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy,$$

$$Q = x^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$P = 2xy - y \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \Rightarrow \int_{\Gamma} = \iint_S dx\,dy \overset{S_{эл}}{=} \boxed{\pi ab}$$

46. πab.

---

100. Пусть G — ограниченная плоская область с кусочно гладкой границей ∂G, ориентированной так, что область G находится (локально) слева от касательного к ∂G вектора. Доказать, что площадь μG можно вычислять по любой из формул

$$S = \oint_{\partial G} x\,dy = -\oint_{\partial G} y\,dx = \frac{1}{2}\oint_{\partial G} x\,dy - y\,dx. \qquad (36)$$

Рассм. $\displaystyle I = \int_{\partial G^+} \overbrace{(Ax+By)}^{P}dx + \overbrace{(Cx+Dy)}^{Q}dy$ $\quad$ Заметим, что $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = C - B \Rightarrow$

$\displaystyle I = (C-B)\underbrace{\iint_G dx\,dy}_{S} \Rightarrow S = \frac{I}{C-B} \Rightarrow$ $\quad$ при $A = B = D = 0$, $C = 1$: $\boxed{S = \int_{\partial G^+} x\,dy}$

при $A = C = D = 0$, $B = 1$: $\boxed{S = -\int_{\partial G^+} y\,dx}$

Т.к. $\displaystyle\int_{\partial G^+} x\,dy = -\int_{\partial G^+} y\,dx$, возьмем ср. ар.: $\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\partial G^+} x\,dy - y\,dx}$

Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой Γ с началом в точке A и концом в точке B (56–68).

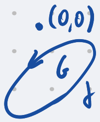
59. $\int\limits_{\Gamma} 2xy\,dx + x^2\,dy,\;\; A(0;0),\;\; B(-2;-1).$

$$\int\limits_{\Gamma} 2xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_{\Gamma} d(x^2 y), \quad U = x^2 y \Rightarrow \begin{matrix} U(A)=0 \\ U(B)=-4 \end{matrix} \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} = U(B) - U(A) = -4$$

59. -4.

T.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, где γ — простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0;0)$, ориентированная против хода часовой стрелки.

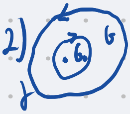
Пусть $\partial G = \gamma$

1) 

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Rightarrow \underset{\text{ф-ла Грина}}{\int\limits_{\gamma} = 0}$$

2) 

G_0 - круг обл, окр. (0,0)

$G_1 = G \setminus G_0$

$$\int\limits_{\partial G\uparrow} + \int\limits_{\partial G_0 \downarrow} = \int\limits_{\partial G_1 \uparrow} = 0 \Rightarrow \int\limits_{\gamma\uparrow} = \int\limits_{\partial G_0 \uparrow} \Rightarrow \begin{matrix} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{matrix} \Rightarrow \int\limits_{\gamma} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t}{r^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

---

37. Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

$$\sigma = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

$G = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ - круг с $R=1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\underbrace{\iint\limits_G dx\,dy}_{\text{пл. } G} = \pi\sqrt{2}$$

37. $\pi\sqrt{2}$.

---

51. Найти площадь поверхности тора $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi,\;\; y = (b+a\cos\psi)\sin\varphi,\;\; z = a\sin\psi,\;\; 0 < a \leqslant b.$

$$[\bar{r}'_\varphi, \bar{r}'_\psi] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -(b+a\cos\psi)\sin\varphi & (b+a\cos\psi)\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\psi\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi & a\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{e}_1\, a(b+a\cos\psi)\cos\varphi\cos\psi + \bar{e}_2\, a(b+a\cos\psi)\sin\varphi\cos\psi + \bar{e}_3\, a(b+a\cos\psi)\sin\psi$$

$$|[\bar{r}'_\varphi, \bar{r}'_\psi]|^2 = a^2(b+a\cos\psi)^2(\cos^2\varphi\cos^2\psi + \sin^2\varphi\cos^2\psi + \sin^2\psi) = a^2(b+a\cos\psi)^2$$

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}a(b+a\cos\psi)\,d\psi = 2\pi\cdot ab\cdot 2\pi = \boxed{4\pi^2 ab}$$

51. $4\pi^2 ab.$

T.2. Вычислить площадь части сферы, заключенной между двумя параллельными плоскостями. Можно рассматривать сферу, заданную уравнением $x^2+y^2+z^2=R^2$, и плоскости $z=c$, $z=c+h, c, c+h \in [-R,R]$. Зависит ли ответ от каких-либо параметров, кроме радиуса сферы R и расстояния между плоскостями h (при условии, что обе плоскости пересекают сферу)?

$$x=R\cos\varphi\cos\psi \qquad R\sin\psi_1=c \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$
$$y=R\sin\varphi\cos\psi \qquad R\sin\psi_2=c+h \Rightarrow \psi_1\leqslant\psi\leqslant\psi_2$$
$$z=R\sin\psi$$

$$S=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2}R^2\cos\psi\,d\psi = 2\pi R^2\int_{\psi_1}^{\psi_2}\cos\psi\,d\psi = 2\pi R^2(\sin\psi_2-\sin\psi_1) = 2\pi R^2\left(\frac{c+h}{R}-\frac{c}{R}\right) = \boxed{2\pi Rh}$$

Вычислить интегралы (1–13).

1. $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, где:

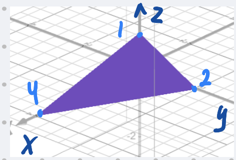
1) S — часть плоскости $x+2y+4z=4$, выделяемая условиями $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$;

имеет вид

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dS = \iint\limits_D f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \quad (4)$$

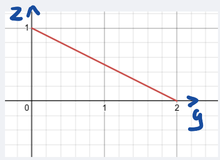
$$x=4-2y-4z$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-2 \quad \frac{\partial x}{\partial z}=-4 \Rightarrow \iint\limits_S(x+y+z)\,dS = \iint\limits_G(4-2y-4z+y+z)\sqrt{1+4+16}\,dy\,dz =$$



$$=\sqrt{21}\iint\limits_G(4-y-3z)\,dy\,dz = \sqrt{21}\int_0^2 dy\int_0^{1-\frac12 y}(4-y-3z)\,dz =$$

$$=\sqrt{21}\int_0^2\left[4-2y-y+\frac12 y^2-\frac32\left(1-\frac12 y\right)^2\right]dy = \frac{\sqrt{21}}{8}\int_0^2(20-12y+y^2)\,dy =$$



$$=\frac{\sqrt{21}}{8}\left(40-24+\frac83\right) = \boxed{\frac73\sqrt{21}}$$

1) $7\sqrt{21}/3$;

18. Определить координаты центра масс однородных поверхностей:

1) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$;

$$x=R\cos\varphi\cos\psi$$
$$y=R\sin\varphi\cos\psi \qquad G=\left\{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$z=R\sin\psi$$

$$M=\iint\limits_S dS = \iint\limits_G R^2\cos\psi\,d\varphi\,d\psi = R^2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$X_c=\frac1M\iint\limits_S x\,dS = \frac{R^3}{M}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^2\psi\,d\psi = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^3}{4} = \frac{R}{2}$$

В силу симм. $\boxed{X_c=Y_c=Z_c=\frac{R}{2}}$

18. 1) $\left(\frac R2;\frac R2;\frac R2\right)$;

Вычислить интегралы (26–43).

37. 1) $\iint\limits_S yz\,dz\,dx$; S — внешняя сторона части эллипсоида $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $z \geqslant 0$.

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv.$$

$$x = a\cos\varphi\cos\psi \qquad y = b\sin\varphi\cos\psi \qquad z = c\sin\psi$$

$$\begin{vmatrix} 0 & bc\sin\varphi\cos\psi\cos\psi & 0 \\ -a\sin\varphi\cos\psi & b\cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -a\cos\varphi\sin\psi & -b\sin\varphi\sin\psi & c\cos\psi \end{vmatrix} = abc^2\sin^2\varphi\cos^3\psi$$

1) $\pi abc^2/4$;

$$\iint\limits_S yz\,dz\,dx = abc\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\psi\cos^3\psi\,d\psi = abc\pi\int_0^{\pi/2}\cos^3\psi\,d\cos\psi = \boxed{\frac{1}{4}\pi abc}$$

38. $\iint\limits_S (2x^2 + y^2 + z^2)\,dy\,dz$, S — внешняя сторона боковой поверхности конуса $\sqrt{y^2+z^2} \leqslant x \leqslant H$.

$x^2 = y^2 + z^2$, сделаем цикл замену: $x = z$, $y = x$, $z = y$ $\Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$

$x = r\cos\varphi \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$y = r\sin\varphi \quad 0 \leqslant r \leqslant H$

38. $-3\pi H^4/2$.

$$\iint\limits_S = -\iint\limits_G \left(2(x^2+y^2) + x^2 + y^2\right)dx\,dy = -3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H r^3\,dr = -3\cdot 2\pi\cdot\frac{H^4}{4} = \boxed{-\frac{3}{2}\pi H^4}$$

42. $\iint\limits_S x^6\,dy\,dz + y^4\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, S — нижняя сторона части эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2$, $z \leqslant 1$.

$x = r\cos\varphi \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$y = r\sin\varphi \quad 0 \leqslant r \leqslant 1$

$$\iint\limits_S = -\iint\limits_G \begin{vmatrix} x^6 & y^4 & (x^2+y^2)^2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} dx\,dy = -\iint\limits_G \left[x^6\cdot(-2x) + y^4(-2y) + (x^2+y^2)^2\right]dx\,dy =$$

$$= -\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(-2r^7\cancel{\cos^7\varphi} - 2r^5\cancel{\sin^5\varphi} + r^4\right)r\,dr = -2\pi\int_0^1 r^5\,dr = -2\pi\cdot\frac{1}{6} = \boxed{-\frac{\pi}{3}}$$

42. $-\pi/3$.

44. Найти производную функции f в точке M по данному направлению, если:

1) $f = 3x^4 + y^3 + xy$, $M(1;2)$, по направлению луча, образующего с осью x угол $135°$;

$$\operatorname{grad} f = (12x^3 + y,\ 3y^2 + x)^T \qquad \operatorname{grad} f(M) = (14,\ 13)^T$$

$$\bar{e} = \frac{\overline{AM}}{AM} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial e} = (\operatorname{grad} f(M), \bar{e}) = -\frac{14}{\sqrt{2}} + \frac{13}{\sqrt{2}} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

44. 1) $-1/\sqrt{2}$;

48. Найти наибольшее значение $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}$ в точке M, если:
1) $f = xy^2 - 3x^4y^5$, $M(1;1)$;

$$\operatorname{grad} f = (y^2 - 12x^3y^5,\ 2xy - 15x^4y^4)^T$$

$$\operatorname{grad} f(M) = (-11, -13)^T$$

$$\bar{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \ell} = (\bar{\ell}, \operatorname{grad} f) \leq |\operatorname{grad} f|$$

$$|\operatorname{grad} f(M)| = \sqrt{11^2 + 13^2} = \sqrt{290} - \max$$

48. 1) $\sqrt{290}$;

13. Пусть u — дифференцируемое поле, $f(t)$ — дифференцируемая функция, $t \in R$. Доказать, что
$$\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u.$$

$$\operatorname{grad} f(u) = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x}, \frac{\partial f(u)}{\partial y}, \frac{\partial f(u)}{\partial z}\right)^T = \left(f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)^T = f'(u) \operatorname{grad} u$$

19. Пусть функция $f(r)$ дифференцируема, $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$, $r = |\mathbf{r}|$.
Доказать, что $\nabla f(r) = f'(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}$.

$$\nabla f(r) = \operatorname{grad} f(r) = f'(r) \cdot \operatorname{grad} r = \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = f'(r)\frac{\bar{r}}{r}$$

15. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$, $r = |\mathbf{r}|$. Найти $\operatorname{grad} u$, если:
3) $u = 1/r$; 5) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$;
6) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$;

$$3)\ \operatorname{grad} u = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r} = -\frac{\bar{r}}{r^3} \qquad 5)\ u = (a_x \cdot x, a_y \cdot y, a_z \cdot z)^T \Rightarrow \operatorname{grad} u = \bar{a}$$

$$6)\ u = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{r}) \Rightarrow \operatorname{grad} u = [\bar{a}, \bar{b}]$$

37. Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать их и проверить, используя символ ∇ и правила действия с ним (α, β — числа, u, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — дифференцируемые скалярное и векторные поля):

2) $\operatorname{div}(u\,\mathbf{a}) = (\operatorname{grad} u, \mathbf{a}) + u \operatorname{div} \mathbf{a}$.

$$\operatorname{div}(u\bar{a}) = (\nabla, u\bar{a}) = (\nabla_u, u\bar{a}) + (\nabla_a, u\bar{a}) = (\operatorname{grad} u, \bar{a}) + u \cdot \operatorname{div}\bar{a}$$

$$\operatorname{div}(u\bar{a}) = \frac{\partial(ua_x)}{\partial x} + \frac{\partial(ua_y)}{\partial y} + \frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = a_x\frac{\partial u}{\partial x} + a_y\frac{\partial u}{\partial y} + a_z\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial a_x}{\partial x} +$$

$$+ u\frac{\partial a_y}{\partial y} + u\frac{\partial a_z}{\partial z} = (\operatorname{grad} u, \bar{a}) + u \operatorname{div}\bar{a}$$

39. Выразить в координатной форме $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = (\nabla, \operatorname{grad} u) = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla) u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

40. Найти:
1) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$;

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) = (\nabla, u\nabla u) = (\nabla_u u, \nabla u) + u(\nabla_{\nabla u}, \nabla u) = (\nabla u)^2 + u\Delta u$$

40. 1) $(\operatorname{grad} u)^2 + u \operatorname{div} \operatorname{grad} u \equiv (\nabla u)^2 + u\Delta u$;

41. Найти $(\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}),\ r = |\mathbf{r}|)$:
3) $\operatorname{div} r\mathbf{c},\ \mathbf{c} = \mathrm{const}$;
6) $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{c}),\ \mathbf{c} = \mathrm{const}$; 7) $\operatorname{div}[\mathbf{c}, \mathbf{r}],\ \mathbf{c} = \mathrm{const}$;

$$3)\ \operatorname{div} r\bar{c} = (\nabla, r\bar{c}) = (\nabla_r r, \bar{c}) = \frac{1}{r}(\bar{r}, \bar{c})$$

$$6)\ \operatorname{div}(f(r), \bar{c}) = (\nabla_f f(r), \bar{c}) = f'(r)\cdot\frac{(\bar{r}, \bar{c})}{r}$$

$$7)\ \operatorname{div}[\bar{c}, \bar{r}] = \frac{\partial(c_y z - c_z y)}{\partial x} + \frac{\partial(c_z x - c_x z)}{\partial y} + \frac{\partial(c_x y - c_y x)}{\partial z} = 0$$

41 3) $(\mathbf{r}, \mathbf{c})/r$;
6) $(\mathbf{r}, \mathbf{c})f'(\mathbf{r})/r$; 7) 0;

---

49. Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать и проверить их, используя символ ∇ и правила действия с ним (α, β — числа, u, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — дифференцируемые скалярное и векторные поля, $\mathbf{c}$ — постоянный вектор):
1) $\operatorname{rot}(\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}) = \alpha \operatorname{rot}\mathbf{a} + \beta \operatorname{rot}\mathbf{b}$; 2) $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{c}) = [\operatorname{grad} u, \mathbf{c}]$;
3) $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = u \operatorname{rot}\mathbf{a} + [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}]$; 4) $\operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{c}\operatorname{div}\mathbf{a} - (\mathbf{c}, \nabla)\,\mathbf{a}$;
5) $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{b}, \nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla)\,\mathbf{b}$;
6) $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b})$.

$$3)\ \operatorname{rot}(u\bar{a}) = [\nabla, u\bar{a}] = [\nabla_u u, \bar{a}] + u[\nabla_{\bar{a}}, \bar{a}] = [\operatorname{grad} u, \bar{a}] + u \operatorname{rot}\bar{a}$$

$$5)\ \operatorname{rot}[\bar{a}, \bar{b}] = [\nabla, [\bar{a}, \bar{b}]] = \bar{a}\cdot(\bar{\nabla}, \bar{b}) - \bar{b}(\bar{\nabla}, \bar{a}) = \bar{a}\operatorname{div}\bar{b} - \bar{b}\operatorname{div}\bar{a}$$

$$6)\ \operatorname{div}[\bar{a}, \bar{b}] = (\nabla, [\bar{a}, \bar{b}]) = (\nabla_{\bar{a}}, \bar{a}, \bar{b}) + (\nabla_{\bar{b}}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \operatorname{rot}\bar{a}) + (\bar{a}, \operatorname{rot}\bar{b})$$

---

50. Найти $(\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},\ r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, $u(r)$ — дифференцируемое поле):
5) $\operatorname{rot}(u(r)\mathbf{r})$.

5) 0.

$$\operatorname{rot}(u(r), \bar{r}) = [\nabla, u\bar{r}] = [\nabla_u u, \bar{r}] + u[\nabla_{\bar{r}}, \bar{r}] = \frac{u'}{r}\overset{=0}{[\bar{r}, \bar{r}]} + u\overset{=0}{[\nabla_{\bar{r}}, \bar{r}]} = 0$$

---

54. Найти:
2) $\operatorname{rot}[\mathbf{r}, [\mathbf{c}, \mathbf{r}]],\ \mathbf{c} = \mathrm{const}$.

$$\operatorname{rot}[\bar{r}, [\bar{c}, \bar{r}]] = \operatorname{rot}(\bar{c}r^2 - \bar{r}(\bar{r}, \bar{c})) = [\nabla_r r^2, \bar{c}] - \overset{=0}{[\nabla_{\bar{r}}, \bar{r}]}(\bar{r}, \bar{c}) - [\nabla_{(\bar{r},\bar{c})}(\bar{r}, \bar{c}), \bar{r}] =$$

$$= 2r\left[\frac{\bar{r}}{r}, \bar{c}\right] - [\bar{c}, \bar{r}] = 3[\bar{r}, \bar{c}]$$

2) $3[\mathbf{r}, \mathbf{c}]$.

---

45. $\iint\limits_S z\,dx\,dy + (5x + y)\,dy\,dz$, где S:

2) внутренняя сторона эллипсоида $x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1$;
3) внешняя сторона границы области $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$.

$$2)\ \bar{a} = (5x + y, 0, z)^T \qquad \operatorname{div}\bar{a} = 5 + 0 + 1 = 6$$

$$x = 2r\cos\varphi\cos\psi$$
$$y = 3r\sin\varphi\cos\psi \qquad J = 6r^2\cos\psi$$
$$z = r\sin\psi$$

$$\iint\limits_S = -6\iiint\limits_G dx\,dy\,dz = -6\cdot 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi \int_0^1 r^2\,dr = -\frac{6\cdot 6\cdot 2}{3}\cdot 2\pi = -48\pi$$

2) -48π;

3) $x = r\cos\varphi\cos\psi$ $\quad J = r^2\cos\psi$
$y = r\sin\varphi\cos\psi$ $\quad 1<r<2$
$z = r\sin\psi$

$$\iint\limits_S = 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi\, d\psi\int_1^2 r^2 dr = 6\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{7}{3} = 56\pi$$

3) 56π.

---

52. $\displaystyle\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S:

3) нижняя сторона части конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, $0<z\leqslant H$.

$\bar a = (x^2, y^2, z^2)^T \quad \operatorname{div}\bar a = 2(x+y+z)$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = h$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S_{бок}} + \iint\limits_{S_{кр}} = 2\iiint\limits_S (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^H dh\int_0^h \left[\cancel{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}+h\right] r\,dr =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^H \frac{1}{2}h^3\,dh = \frac{\pi H^4}{2}$$

$S_{кр}$: $z = H$, $x^2+y^2\leq z^2 \Rightarrow \displaystyle\iint\limits_{S_{кр}} = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^H H^2 r\,dr = 2\pi\cdot\frac{H^4}{2} = \pi H^4$

$$\iint\limits_{S_{бок}} = -\frac{\pi H^4}{2}$$

3) $-\pi H^4/2$.

---

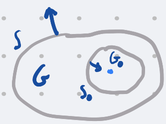
57. Пусть $G\in R^3$ — ограниченная область с гладкой границей S, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S, $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}$:
2) вычислить *интеграл Гаусса*

$$I(x;y;z) = \iint_S \frac{\cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})}{\mathbf{r}^2}\,dS, \quad (x;y;z)\notin S.$$

$$\cos(\widehat{\bar r,\bar n}) = \frac{(\bar r,\bar n)}{r\cdot \underset{1}{n}} \Rightarrow I = \iint\limits_S \frac{(\bar r,\bar n)}{r^3}\,dS_{\xi,\eta,\zeta}, \quad S = \partial G$$

$$\operatorname{div}\frac{\bar r}{r^3} = 3\cdot\frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^4}\,r = 0$$

1) $(x,y,z)\notin G$: $\displaystyle I = \iiint\limits_G \operatorname{div}\frac{\bar r}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = 0$



2) $(x,y,z)\in G$: S_0 - сфера (центр (x,y,z)) - огр. шар. $\bar G_0\in G$

$$G_1 = G\setminus\bar G_0,\ \partial G_1 = S\cup S_0 \Rightarrow \iint\limits_{\partial G_1} = \underset{\text{наружу}}{\iint\limits_{S\uparrow}} + \underset{\text{внутрь}}{\iint\limits_{S_0\downarrow}} = \iiint\limits_{G_1}\operatorname{div}\frac{\bar r}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S\uparrow} = \iint\limits_{S_0\uparrow}$$

На S_0 $r=r_0$

$$\underset{S_0}{\iint}\frac{(\bar r,\bar n)}{r^3}\,dS=\underset{S_0}{\iint}\left(\frac{\bar r}{r^3},d\bar S\right)=\frac{1}{r_0^3}\underset{S_0}{\iint}(\bar r,d\bar S)=\frac{1}{r_0^3}\underset{G_0}{\iiint}\operatorname{div}\bar r\cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta=$$

1-го рода   2-го рода

$$=\frac{1}{r_0^3}\cdot 3\cdot V_{G_0}=\frac{1}{r_0^3}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\pi r_0^3=4\pi$$

$$\boxed{I=\begin{cases}0, & (x,y,z)\notin G\\ 4\pi, & (x,y,z)\in G\end{cases}}$$

---

62. $\int\limits_L y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, L — граница треугольника с вершинами в точках $(a;0;0)$, $(0;a;0)$, $(0;0;a)$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;1;0)$.

$$\bar n=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)^T,\quad \bar m\,(0,1,0),\quad \cos(\widehat{\bar n,\bar m})=\frac{1}{\sqrt3}>0$$

$$\operatorname{rot}\bar a=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}=-2z\bar i-2x\bar j-2y\bar k$$

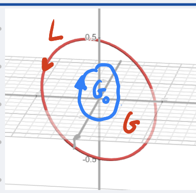
62. $-a^3$.

пл. пр. тр.

$$\int\limits_L=\underset{S}{\iint}(\operatorname{rot}\bar a,\bar n)\,dS=-\frac{2}{\sqrt3}\underset{S}{\iint}(\underbrace{x+y+z}_{=a})\,dS=-\frac{2a}{\sqrt3}\underset{S}{\iint}dS=-\frac{2a}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{4}(\sqrt2 a)^2=\boxed{-a^3}$$

---

63. 2) $\int\limits_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}+z\,dz$; где L — окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;0;1)$.



$L=\partial G$, G_0 - круг. обл. окр. т. $(0,0)$ $G_1=G\setminus G_0$

$$\underset{\partial G_0\downarrow}{\iint}+\underset{L\uparrow}{\iint}=\underset{\partial G_1\uparrow}{\iint}=\underset{S}{\iint}(\operatorname{rot}\bar a,d\bar S)$$

$$\bar a=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ z\right)^T\qquad \operatorname{rot}\bar a=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & z\end{vmatrix}=(0,0,0)^T$$

$$\underset{G_1}{\iiint}=0\Rightarrow\underset{L\uparrow}{\iint}=\underset{\partial G_0\uparrow}{\iint}$$

$x=R\cos\varphi$
$y=R\sin\varphi$
$z=-R(\cos\varphi+\sin\varphi)$
$dz=-R(\cos\varphi-\sin\varphi)$

$$\int\limits_0^{2\pi}(1+\underbrace{R^2\cos2\varphi}_{0})\,d\varphi=\boxed{2\pi}$$

2) 2π.

Т.3. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (2x+3y)dydz + (x+y+z)dzdx + (x+2y+3z)dxdy,$$

где S — часть внешней стороны поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+z^2=1$, $x \geq 0$.

$\bar{a} = (2x+3y,\ x+y+z,\ x+2y+3z)^T \quad \operatorname{div}\bar{a} = 2+1+3=6$

$x = 2r\cos\varphi\cos\psi$
$y = 5r\sin\varphi\cos\psi$
$z = r\sin\psi$

$$\iint_S = 6\iiint_G dxdydz = 60\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\psi\, d\psi \int_0^1 r^2 dr = 40\pi$$

Найти поток поля $\mathbf{a}$ через ориентированную нормалью $\mathbf{n}$ поверхность S ($\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$) (68, 69).

68. 4) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$, S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$;

$$\iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, dS = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\, dS.$$

4) 4π;

На S $r = r_0$ $\quad \operatorname{div}\bar{r} = 3$

$$\iint_S (\bar{a}, \bar{n})\, dS = \iint_S (\bar{a}, d\bar{S}) = \frac{1}{r_0^3}\iiint_G \operatorname{div}\bar{r}\, dxdydz = \frac{1}{r_0^3}\cdot 3V_G = \frac{3}{r_0^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r_0^3 = 4\pi$$

94. Найти по формуле Стокса (19) циркуляцию поля $\mathbf{a}$ вдоль контура Γ, ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат, если:
4) $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; $\Gamma = \{x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ z \geqslant 0\}$;

$$\bar{a} = (y, -x, z)^T \quad \operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & z \end{vmatrix} = (0, 0, -2)^T$$

$$\int_\Gamma (\bar{a}, d\bar{r}) = \iint_S (\operatorname{rot}\bar{a}, d\bar{S}) = -2\iint_S dS = -4\pi$$

$S_{кр},\ r=\sqrt{2}$

4) -4π;

104. Потенциально ли поле $\mathbf{H} = 2I\,\frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2+y^2}$, $(x; y) \neq (0; 0)$:
1) в полупространстве $x > 0$;
2) во всем пространстве без оси Oz?

$\operatorname{rot}\bar{a} = \bar{0}$

1) $G = \{x > 0\}$ – поверхн. односвязна $\Rightarrow$ да

104. 1) да; 2) нет.

2) $G = \{x \neq 0, y \neq 0\}$ – не явл поверхн одн. $\Rightarrow$ нет

112. Является ли поле $\mathbf{a}$ потенциальным, соленоидальным, если ($\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$):
1) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$;

112. 1) Потенциально и соленоидально;

$G = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ – не явл объемно односв.

$\operatorname{div}\bar{a} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\cdot r = 0$ – соленоид в объемно-односв. обл, не сод. $(0,0,0)$

Во всей обл опр – не явл соленоид.

• $r > 0$ – не явл обь-одн $\Rightarrow$ не соленоид

• $z > 0$ – объем-одн $\Rightarrow$ соленоид

$\operatorname{rot}\bar{a} = \bar{0}$, G – поверхн. односв $\Rightarrow$ потенц.

115. Найти такую дифференцируемую функцию Φ, чтобы поле $\mathbf{a} = \Phi(r)\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, было соленоидальным.

$\bar{a} = f(r)\bar{r}$ $\quad \operatorname{rot} \bar{a} = \bar{0}$ $\quad G = \mathbb{R} \setminus \{(0,0,0)\}$ - поверхн. одн. => центр поле всегда потенц

$\operatorname{div} \bar{a} = 3f(r) + rf'(r) = 0 \quad \backslash \cdot r^2$

$3r^2 f(r) + r^3 f'(r) = 0$

$(r^3 f(r))' = 0 \Rightarrow \boxed{f(r) = \frac{C}{r^3}}$

115. C/r^3.