110. Доказать, что если тригонометрический ряд сходится равномерно, то он является рядом Фурье своей суммы.

$l=\pi$ для простоты

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (1)$$

сх. равномерно на R. Надо док-ть, что

$f(x)$ непрер 2π-период ф-ция и (1) — её ряд Фурье

$\square$ $f(x)$ — непр. как сумма равном. сх. ряда из непр ф-ций

$f(x)$ — 2π-периодич — очевидно

Равном сх ряд из непр ф-ций можно почленно интегрир. на отрезке

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt\right) \qquad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$

интеграл и сумму можно менять местами, если ряд сход. равномерно

Утв. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сх равном. на E, $|g(x)| \le M$ на E, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) g(x)$ равном сход.

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)$$ сх. равном на $[-\pi;\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\,dt}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt \cos mt\,dt}_{=0,\ m\neq n} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt \cos mt\,dt}_{=0}\Big)$$

В пр-ве ф-ций, непр на $[a,b]$, можно ввести скалярное произв.

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\,dx$$

В смысле этого скал произв.

сист. $1, \cos x, \sin x, \ldots \cos nx, \sin nx$ ортогональна на $[-\pi;\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt = a_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mt\,dt =$$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cancel{\cos 2mt}^{\,=0}}{2}\, dt = \pi a_m, \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt\, dt.$$

Аналогично b_m.

111. Являются ли нижеследующие тригонометрические ряды рядами Фурье:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

1) да, т.к сх равномерно на $\mathbb{R}$

4) нет, т.к. $b_n = 1 \not\to 0$

1. Разложить в ряд Фурье функцию: $\sin^2 x$;

Ряд вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

называется *тригонометрическим рядом.*

Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого (называемые *коэффициентами Фурье* функции f) определяются по формулам

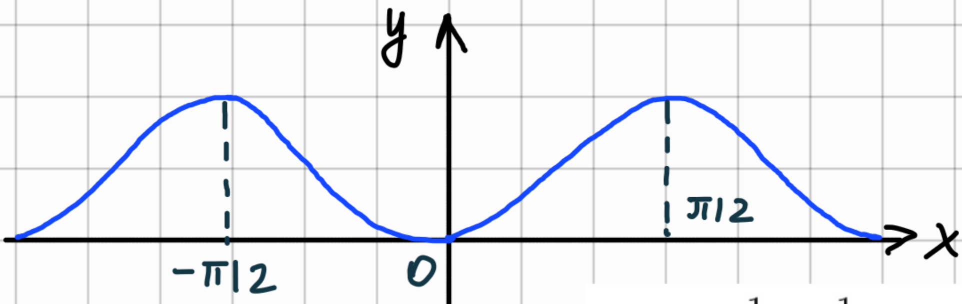
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \quad n \in N, \tag{3}$$

называется *рядом Фурье* функции f, или, подробнее, ее *тригонометрическим рядом Фурье.* В этом случае пишут

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

сх. равномерно,



имеет период π и кус. гладкая

1. 1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$;

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, указать промежутки, в которых сумма ряда Фурье равна функции $f(x)$, и най и сумму ряда в указанной точке x_0 (4–11).

8. $f(x) = \pi + x, \ -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \ x_0 = \pi.$

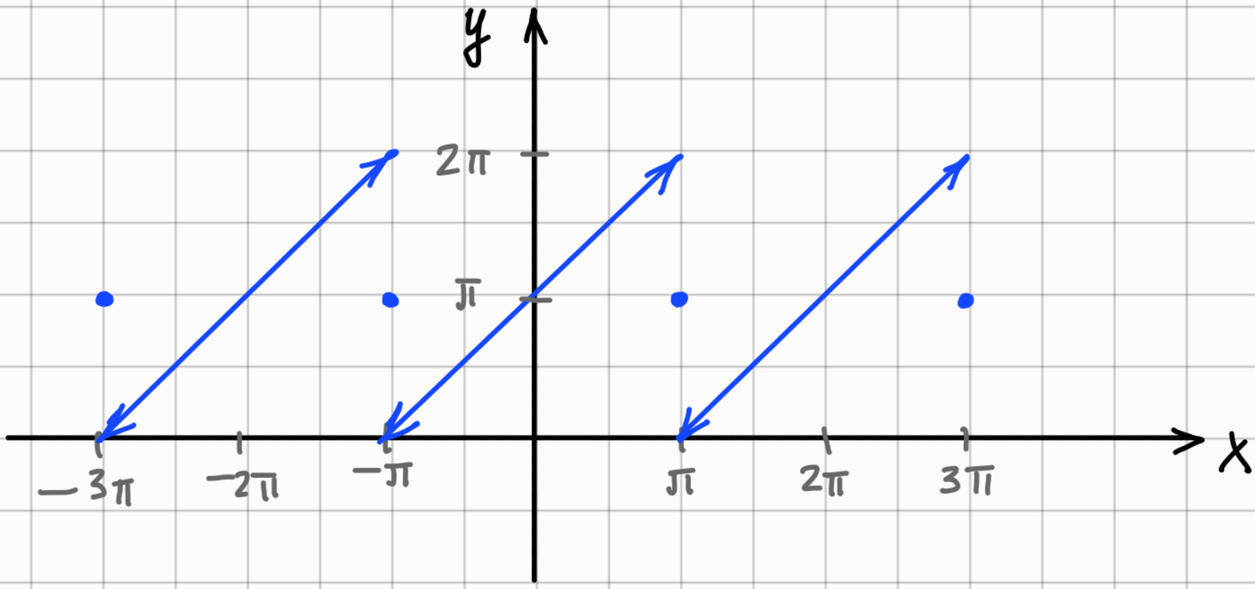
Теорема 1. *Ряд Фурье кусочно гладкой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции f сходится в каждой точке интервала $(-\pi;\pi)$ к значению*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

(*в частности, в точке непрерывности функции f к ее значению в этой точке*), *а в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ к значению*

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}.$$

Теорема 2. *Если функция f имеет на отрезке $[-\pi;\pi]$ $k-1$ непрерывных производных, $k \geqslant 0$, причем $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \dots$ $\dots, k-1$, и кусочно непрерывную k-ю производную, то ряд Фурье функции f сходится абсолютно и равномерно на всем отрезке $[-\pi;\pi]$ к функции f и $|f(x) - S_n(x;f)| < \frac{\alpha_n}{n^{k-1/2}}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.*



сх поточечно на $\mathbb{R}$, но неравномерно, т.к. сумма разрывна

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{2}+\pi x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\cancel{2}\pi^{\cancel{2}}$$

$$= \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\cos nx}_{\text{нечёт} = \text{нечет}\cdot\text{чет}}\,dx$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi\cos\pi n}{n} + \underbrace{\frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}}_{0}\right] = -\frac{2\cos\pi n}{n}$$

$$= \boxed{\frac{2(-1)^{n+1}}{n}}; \quad [\cos\pi n = (-1)^n]$$

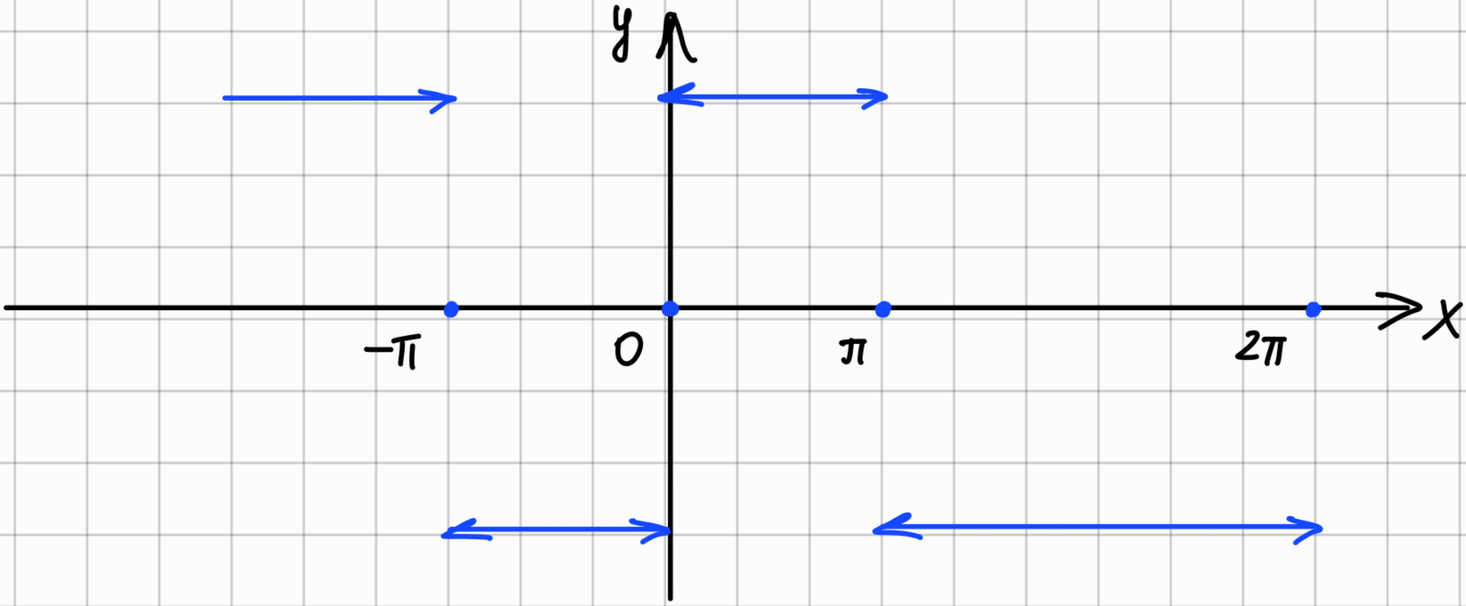
$$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \quad \text{при } x \in (-\pi; \pi)$$

при $x = x_0$ $\quad S(x_0) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\underbrace{\sin\pi n}_{0} = \pi$

8. $f(x) = \pi + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$, $-\pi < x < \pi$; π.

12. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$, и, пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$



Если функция f четная, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0, \quad n \in N;$$

а если — нечетная, то

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \in N.$$

Ряд будет сход. неравном. на $(-\infty;+\infty)$

т.к. сумма его разрывна (равном. сх.

ряд из непр. ф-ций имеет непр. сумму)

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sign} t \sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nt\,dt = \frac{-2}{\pi}\frac{\cos nt}{n}\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{\pi n} = \frac{2}{\pi n}\left(1+(-1)^{n+1}\right)$$

$$\operatorname{sign}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\sin nx, \quad -\pi < x < \pi$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi(2k+1)}, & n = 2k+1, \quad k = 0,1,2 \end{cases}$$

$$\operatorname{sign} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4\sin(2k+1)x}{\pi(2k+1)}; \quad \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k$$

$$x = \frac{\pi}{2}: \quad 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на указанном промежутке, длина промежутка является периодом (13–26).

24. $f(x) = x\sin x$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$x\sin x$ — четная $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right] = 1$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^{\pi} x\left(\frac{\sin(n+1)x + \sin(1-n)x}{\cancel{2}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x\sin(n+1)x\,dx + \int_0^{\pi} x\sin(1-n)x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1}\Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}\Big|_0^{\pi} + \right.$$

$$\left. - \frac{x\cos(1-n)x}{1-n}\Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(1-n)x}{(1-n)^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\cancel{\pi}}\left[-\frac{\cancel{\pi}\cos(n+1)\pi}{n+1}\right.$$

$$\left. - \frac{\cancel{\pi}\cos(1-n)\pi}{1-n}\right] = -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{1-n}}{1-n};\ n \neq 1$$

$$n = 1:\quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{\sin 2x}{2}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$$

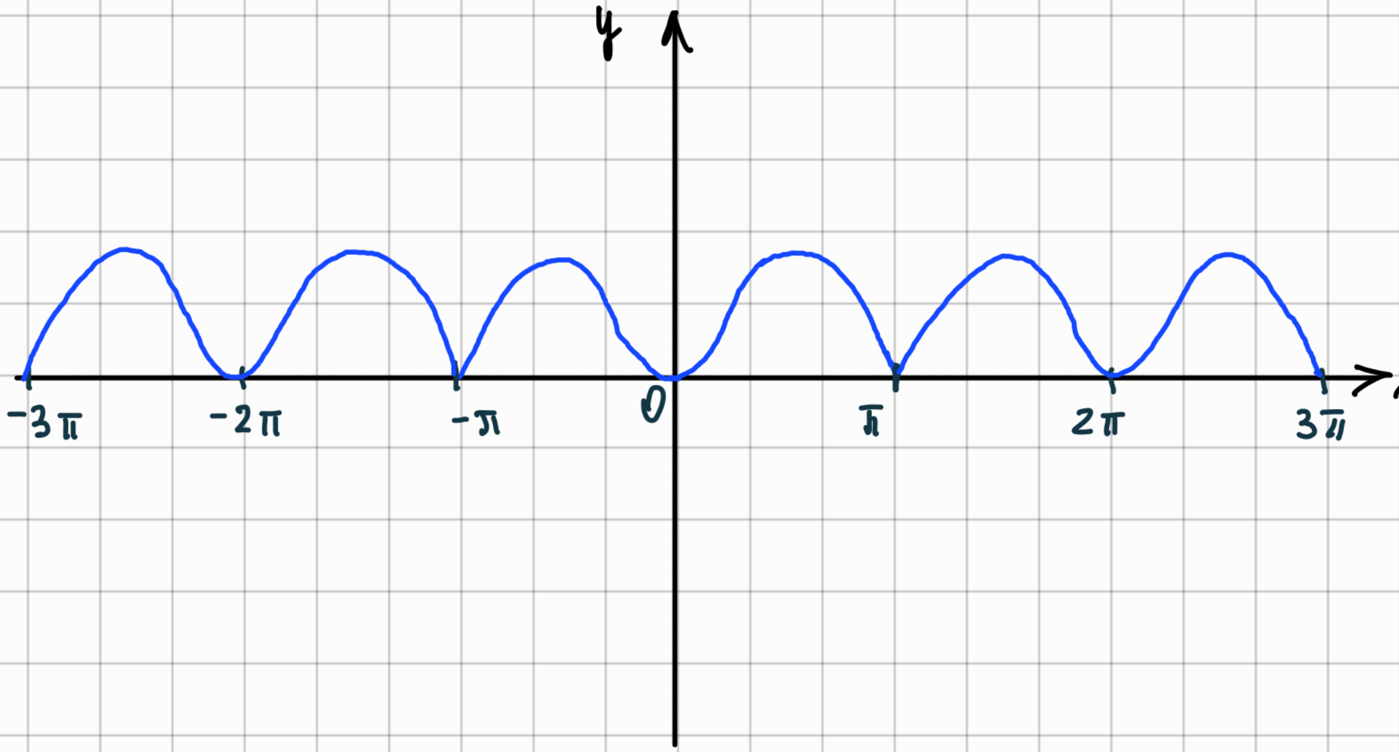
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos 2x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^{2-n}}{n-1} = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^{-n}}{n-1} =$$

$$= \frac{(-1)^n(n-1-n-1)}{n^2-1} = \frac{-2(-1)^n}{n^2-1} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}$$

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$$



ряд $\Rightarrow f(x)$, $f(x)$ имеет период 2π и кус.-гладкая на $\mathbb{R}$

24. $1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx.$

---

25. $f(x) = x\cos x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$.

Теория рядов Фурье 2π-периодических функций переносится на случай периодических функций, имеющих любой период $2l$, с помощью линейного отображения

$$y = \frac{\pi}{l}x, \quad -l \leqslant x \leqslant l, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi,$$

$x\cos x$ – нечётная

$a_n = 0$; $a_0 = 0$

$2l = \pi$, $l = \frac{\pi}{2}$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}^{\,/\!/0}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n^{\,/\!/0}\cos 2nx + b_n\sin 2nx]$$

отрезка $[-l;l]$ на отрезок $[-\pi;\pi]$. *Рядом Фурье функции* f, *абсолютно интегрируемой на отрезке* $[-l;l]$, называется ряд

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{10}$$

где

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n\in N. \tag{11}$$

Если функция f четная, то

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\quad b_n=0,\quad n\in N,$$

а если f нечетная, то

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n\in N,\quad a_n=0,\quad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin 2nx\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\cos x\sin 2nx\,dx$$

$$=\frac{\cancel{4}\,2}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\left[\frac{\sin(2n+1)x+\sin(2n-1)x}{\cancel{2}}\right]dx$$

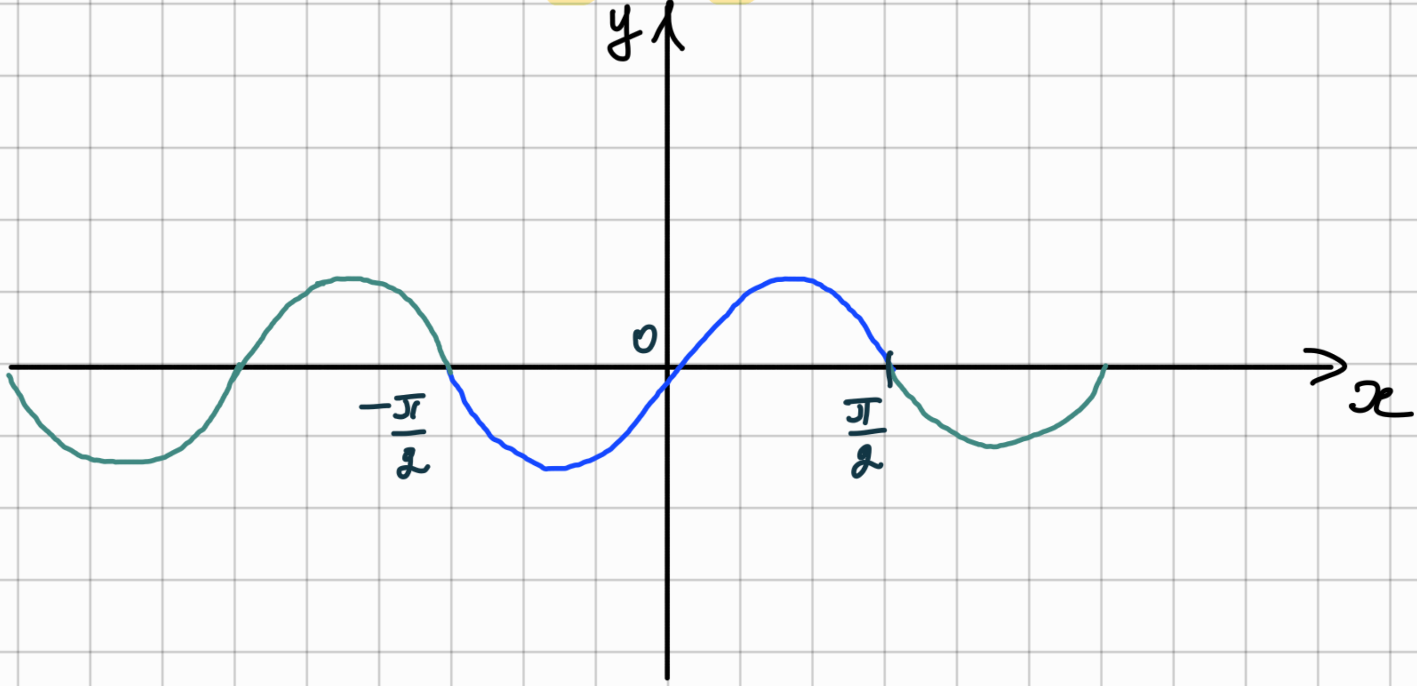
$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}x\sin(2n+1)x\,dx+\int_0^{\pi/2}x\sin(2n-1)x\,dx\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{x\cos(2n+1)x}{2n+1}^{\,/\!/0}+\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}-\left(\frac{x\cos(2n-1)x}{2n-1}^{\,/\!/0}+\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2}+\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^2}\right]=\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\right]=\frac{2(-1)^{n-1}}{\pi}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\left[\frac{2\cdot 4n}{(4n^2-1)^2}\right] = \frac{16}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow x\cos x = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$$



РФ сх. равномерно к $f(x)$, период π и кус. - гладкая

25. $\frac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx.$

II. Разложение в ряд Фурье по синусам. Пусть функция $f \in L_R[0,l]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить по нечётности на отрезок $[-l;l]$ (заменить $f(0)=0$; $f(-x)=-f(x)$, $0 < x \leqslant l$), а затем с периодом $2l$ на всю числовую ось, изменив, если нужно, значения $f(l)$ и $f(-l)$. Продолженная функция абсолютно интегрируема на $[-l;l]$, нечётна и $2l$-периодична, поэтому можно определить её коэффициенты Фурье:

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx,\ n = 1, 2, \ldots$$

Построенный ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$ называется рядом Фурье по синусам функции $f \in L_R[0,l]$.

I. Разложение в ряд Фурье по косинусам. Пусть функция $f \in L_R[0,l]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить по чётности на отрезок $[-l;l]$ $(f(-x) = f(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l)$, а затем с периодом $2l$ на всю числовую ось. Продолженная функция абсолютно интегрируема на $[-l;l]$, чётна и $2l$-периодична, поэтому можно определить её коэффициенты Фурье:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,$$
$$n = 0,1,2,\ \ldots; \quad b_n = 0, \quad n = 1,2,\ \ldots$$

Построенный ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$ называется рядом Фурье по косинусам функции $f \in L_R[0,l]$.

Для функции x^2 на $[0;\pi]$ её рядом Фурье по косинусам будет ряд Фурье функции x^2 на $[-\pi;\pi]$ (в силу чётности функции $f(x) = x^2$) — см. пример 22.5.

Пример 22.6. Разложить функцию $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ в ряд Фурье по синусам на $[0;\pi]$ и построить график суммы ряда.

□ Если функцию $f(x) = x^2$ продолжить по нечётности на $[-\pi;\pi]$ (значение $f(0) = 0$ менять не придётся), а затем на всю числовую ось с периодом 2π, то полученная функция будет дифференцируемой во всех точках $x_0 \neq \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. В точках $x_0 = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, функция f имеет разрыв первого рода, $f(\pi(2k+1)+0) = -\pi^2$, $f(\pi(2k+1)-0) = \pi^2$; в этих точках f имеет конечные обобщённые односторонние производные. В силу следствий 1 и 2 из признака Липшица ряд Фурье f сходится в каждой точке; график суммы ряда изображён на рис. 22.4.

Коэффициенты ряда $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin nx\,dx = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} - \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)$ (выкладки рекомендуется провести самостоятельно). Итак,

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} - \frac{4}{\pi n^3}(1-(-1)^n)\right)\sin nx,\ 0 \leqslant x < \pi. \ ■$$

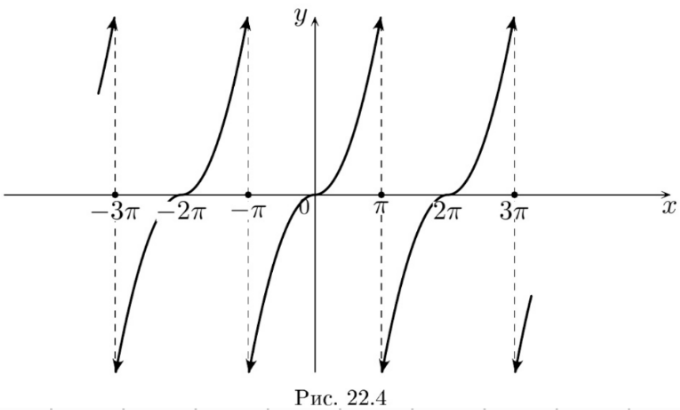


Рис. 22.4

28. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, периодически продолженную с периодом 2. Нарисовать график суммы ряда.

$f(x) = x^2$

$2l = 2$, $l = 1$

x^2 — четная, $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = 2\int_0^1 x^2 \cos \pi n x\,dx$$

$u = x^2, \quad du = 2x\,dx$

$dV = \cos \pi n x\,dx, \quad V = \frac{\sin \pi n x}{\pi n}$

$$a_n = 2\left[\underbrace{x^2 \frac{\sin \pi n x}{\pi n}\Big|_0^1}_{0} - \int_0^1 \frac{\sin \pi n x}{\pi n}\cdot 2x\,dx\right]$$

$$= -4\int_0^1 \frac{\sin \pi n x}{\pi n}\,x\,dx = -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{x\cos \pi n x}{\pi n}\Big|_0^1\right.$$

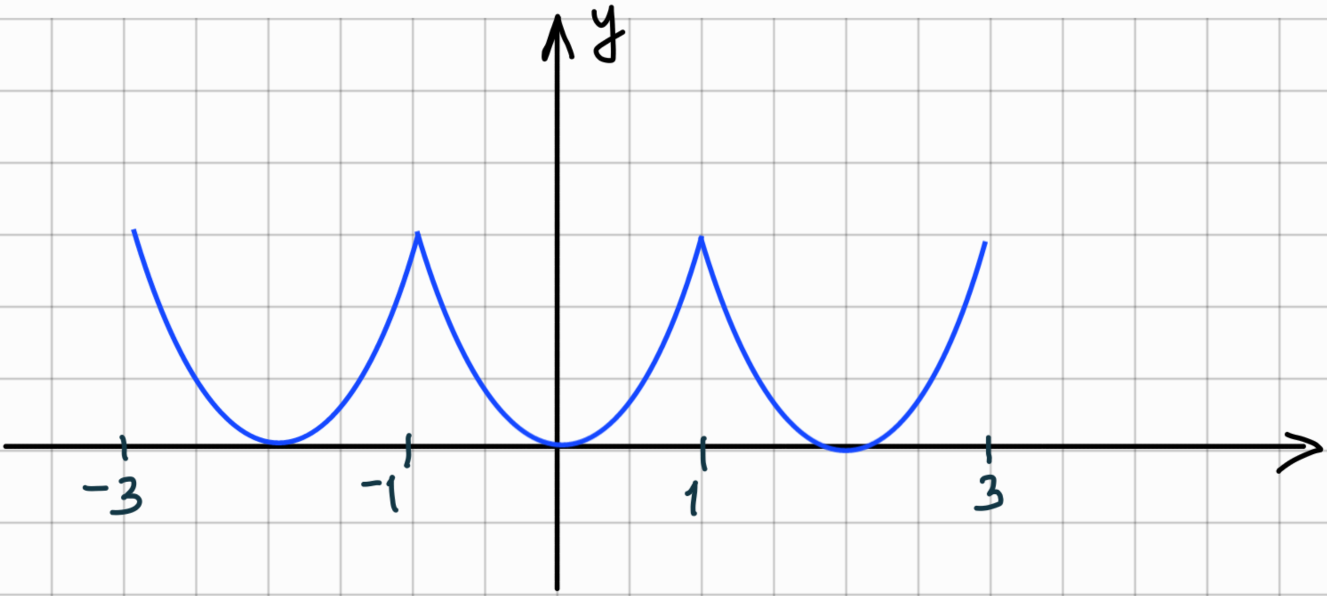
$u = x, \quad du = dx$

$dv = \sin \pi n x\,dx \quad V = -\frac{\cos \pi n x}{\pi n}$

$$\left.+\int_0^1 \frac{\cos \pi n x}{\pi n}\,dx\right] = -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{\cos \pi n}{\pi n} - \underbrace{\frac{\sin \pi n x}{(\pi n)^2}\Big|_0^1}_{0}\right]$$

$$= \frac{4\cos \pi n}{(\pi n)^2} = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

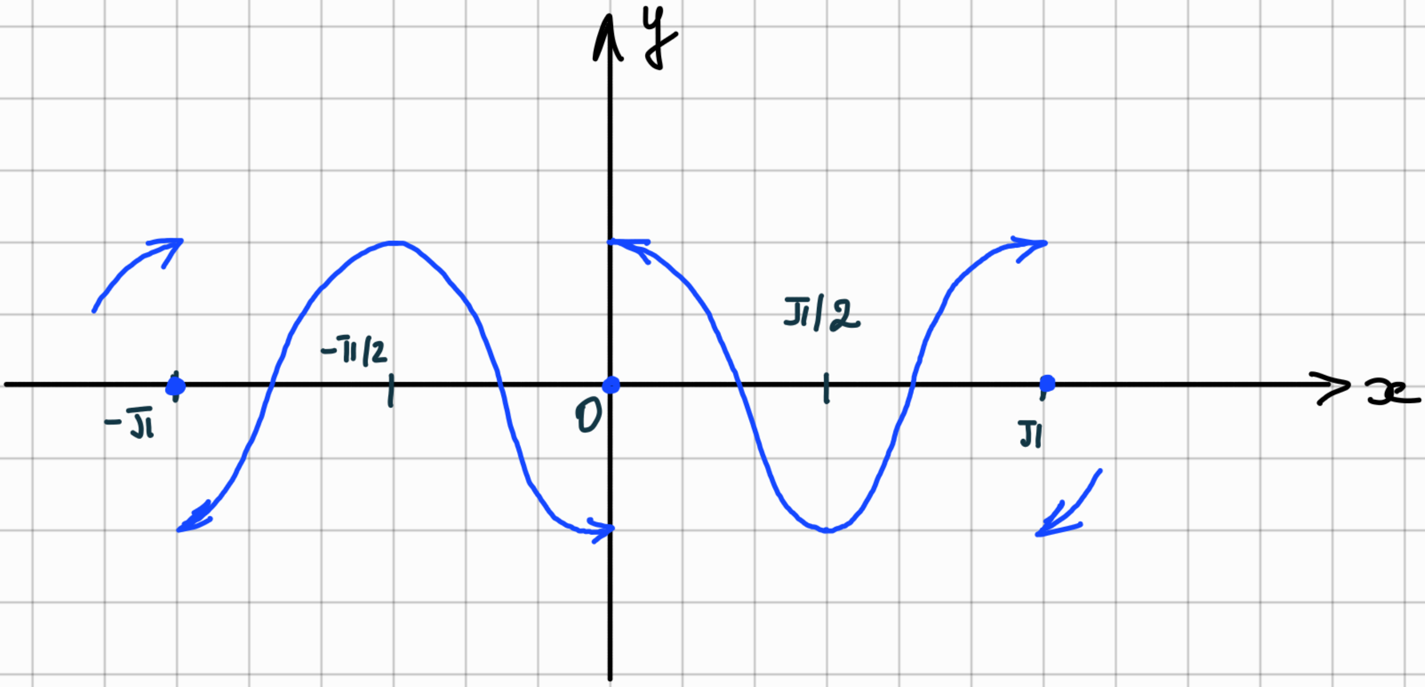
$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos \pi n x$$



РФ сх равномерно к $f(x)$, т.к. $f(x)$ имеет период 2 и кус.-гладк.

28. $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi n x.$

41. Разложить функцию $f(x) = \cos 2x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, в ряд Фурье по синусам.



продолжим по нечетности на $[-\pi, 0]$,
затем с периодом 2π

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n x}{\ell}\, dx, \quad \ell = \pi$$

$a_n = 0$

$a_0 = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin nx\, dx = \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+2)x + \sin(n-2)x}{\cancel{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin(n+2)x\, dx + \int_0^{\pi} \sin(n-2)x\, dx\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+2)x}{n+2}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{\cos(n-2)x}{n-2}\Bigg|_0^{\pi}\right] =$$

$$\text{,,} \cos(\pi n + 2\pi) \qquad \text{,,} \cos(\pi n - 2\pi)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+2)\pi}{n+2} + \frac{1-\cos(n-2)\pi}{n-2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos \pi n}{n+2} + \frac{1-\cos \pi n}{n-2}\right]$$

n чётное $\Rightarrow b_{2n} = 0$

n нечётное $\Rightarrow b_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2}\right) =$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{2(2n-1)}{(2n-3)(2n+1)} \quad \text{при } n \neq 2$$

Если $n = 2$: $b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin 2x\, dx =$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{\cancel{2}} dx = 0$$

$$\cos 2x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-3)(2n+1)}$$

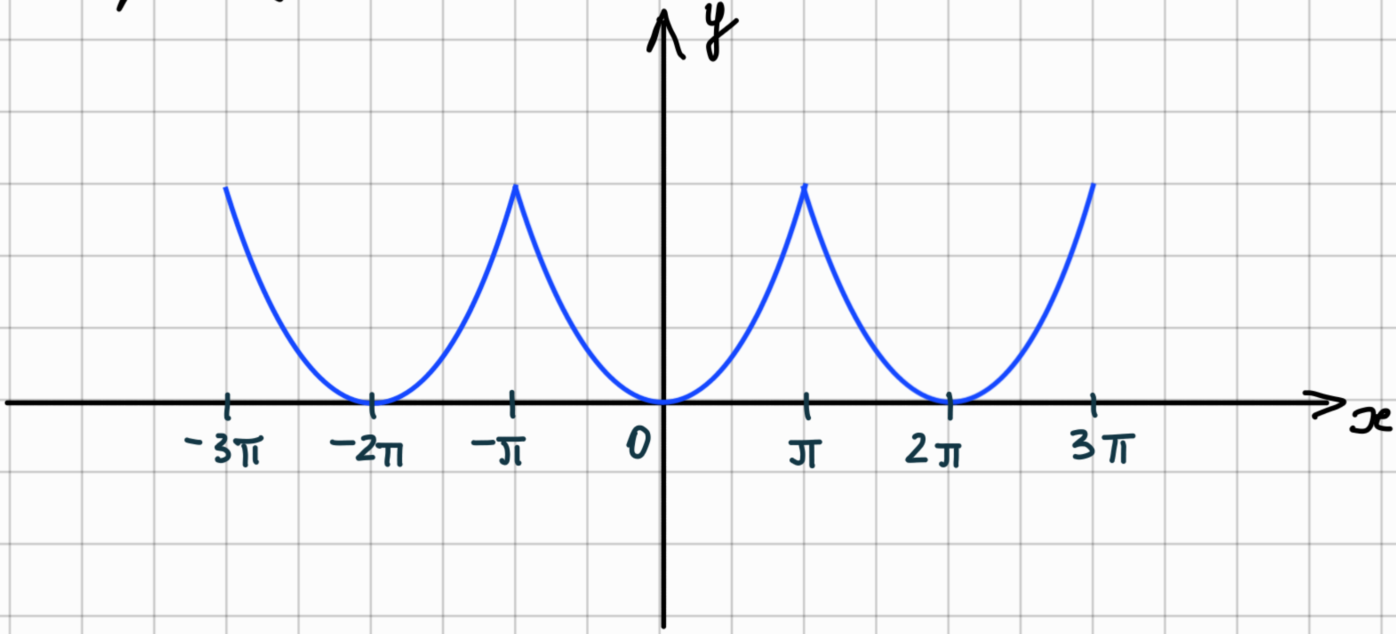
ряд не сход. равномерно к $f(x)$, т.к. сумма разрывна

41. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-3)(2n+1)}$.

45. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье:
1) на отрезке $[-\pi; \pi]$ по косинусам;
2) на интервале $(0; \pi)$ по синусам;
3) на интервале $(0; 2\pi)$ по синусам и косинусам.
Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

1) по cos ⇒ продолж по четности с периодом 2π



$f(x)$ имеет период 2π и кус.-гладк. на $\mathbb{R}$ ⇒ ряд сх. равномерно к $f(x)$.

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dl = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^3}{\pi\cdot 3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi \frac{\sin nx}{n}\,2x\,dx\right] =$$

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = \cos nx\,dx \qquad v = \frac{\sin nx}{n}$

$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin nx\, x\,dx = -\frac{4}{\pi n}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \overbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx}^{0}\right]$$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \sin nx\,dx \qquad v = -\frac{\cos nx}{n}$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{\pi\cos n\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

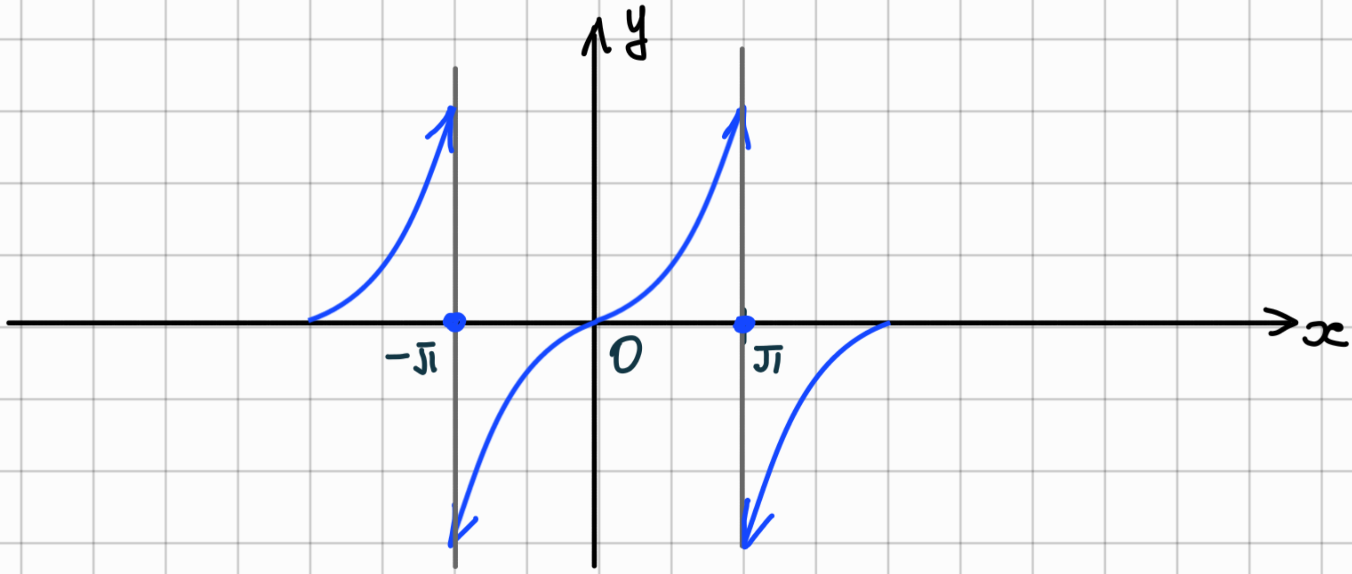
$f(x) = S(x)$ на $[-\pi, \pi]$ (сх равномерно к $f(x)$)

$$f(\pi):\ \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\pi n = \frac{\pi^2}{3} +$$

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overbrace{(-1)^{2n}}^{1}}{n^2} \Rightarrow \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}^{S_1} = \frac{2\pi^2}{3\cdot 4} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f(0):\ 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \Rightarrow S_2(x) = -\left(-\frac{\pi^2}{3\cdot 4}\right) = \frac{\pi^2}{12}$$

2)



продолж на $(-\pi, 0)$ по нечётности,
далее с периодом 2π
ряд сх. неравном к $f(x)$, т.к сумма разрывна.

$a_0 = 0$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-x^2\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,2x\,dx\right] =$$

$u = x^2 \quad du = 2x\,dx$

$dV = \sin nx\,dx \qquad V = -\frac{\cos nx}{n}$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\left(\underbrace{x\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right)\right]$$

$u = x \qquad du = dx$

$dV = \cos nx\,dx \qquad V = \frac{\sin nx}{n}$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\,\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n\ \pi^2}{n}\right.$$

$$\left.+ \frac{2}{n^3}(\cos\pi n - 1)\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n\ \pi^2}{n} + \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3}\right]$$

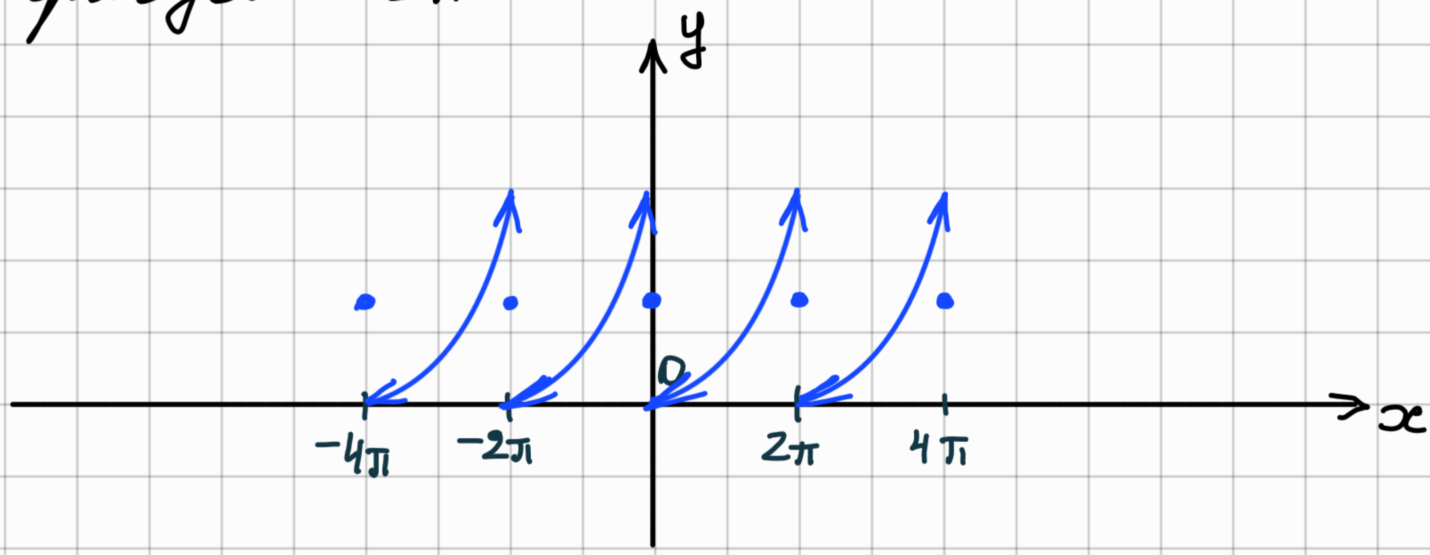
$$\Rightarrow x^2 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\right)\sin nx$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \dots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{\pi^2}{\cancel{6}\,2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

3) по синусам и косинусам $\Rightarrow$ продолж. с периодом 2π



ряд сх неравномерно к $f(x)$, т.к сумма разрывна

Пример 6. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $2l$ функцию f, если $f(x) = x$ при $a \leqslant x < a + 2l$. Выяснить, для каких значений x будет справедливо это разложениеГ Чему будет равна сумма ряда Фурье в остальных точкахГ

▲ Найдем коэффициенты Фурье функции f (см. (12)):

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_a^{a+2l} x\,dx = \frac{x^2}{4l}\Big|_a^{a+2l} = a + l,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \cos\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2l}{n\pi} \sin\frac{n\pi a}{l},$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \sin\frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{2l}{n\pi} \cos\frac{n\pi a}{l}, \quad n \in N.$$

$2l = 2\pi$

$l = \pi$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^3}{2\cdot 3\pi} = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,dx = -\frac{4\pi}{n^2}$$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx}{n^2}\right)$$

45. 1) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$;

2) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\right)\sin nx$;

3) $\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi\sin nx)}{n}\right)$, $S_1 = \frac{\pi^2}{6}$, $S_2 = \frac{\pi^2}{12}$, $S_3 = \frac{\pi^2}{8}$.

---

65. Доказать, что если абсолютно интегрируемая на отрезке $[0;\pi]$ функция f удовлетворяет условию $f(\pi - x) = f(x)$, то ее коэффициенты Фурье обладают следующими свойствами:

1) при разложении f в ряд Фурье по косинусам $a_{2n-1} = 0$, $n \in N$;

2) при разложении f в ряд Фурье по синусам $b_{2n} = 0$, $n \in N$.

$2l = \pi$

$l = \pi/2$

1) по косинусам с периодом π

$$a_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx\right) =$$

$u = \pi - x$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx + \int_{\pi/2}^{0} f(\pi-u)\cos 2(2n-1)(\pi-u)\,d(\pi-u)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx + \int_0^{\pi/2} f(\pi-u)\cos 2(2n-1)(\pi-u)\,du\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx + \int_0^{\pi/2} f(u)\cos 2(2n-1)(\pi-u)\,du\right)$$

$\cos(\alpha-\beta)$

$$\cos 2(2n-1)(\pi-u) = \cos\left(2(2n-1)\pi - 2(2n-1)u\right) = \cos 2(2n-1)\pi \cdot \cos 2(2n-1)u + \underbrace{\sin 2(2n-1)\pi}_{=0}\sin 2(2n-1)u = \cos 2(2n-1)u$$

$\Rightarrow$

$$a_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx - \int_0^{\pi/2} \underbrace{f(u)}_{=f(x)}\cos 2(2n-1)u\,\underbrace{du}_{=-dx}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx - \int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx\right) = 0$$

2) по синусам с периодом π

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 4nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\sin 4nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin 4nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\sin 4nx\,dx + \int_0^{\pi/2} f(u)\sin 4n(\pi-u)\,du\right)$$

$u = \pi - x$

$$\sin 4n(\pi-u) = \sin(4\pi n - 4nu) = -\sin 4nu$$

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\sin 4nx\,dx - \int_0^{\pi/2} f(u)\underbrace{\sin 4nu}_{=-\sin 4nx}\,\underbrace{du}_{=-dx}\right) = 0$$

66. Как следует продолжить абсолютно интегрируемую на отрезке $[0;\pi/2]$ функцию на отрезок $[-\pi;\pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x\Gamma$$

разлож. $f(x) \in L_R(0, \pi/2)$ по косинусам нечётных кратных дуг

$f(x) \in L_R(0, \frac{l}{2}) \Rightarrow l = \pi$

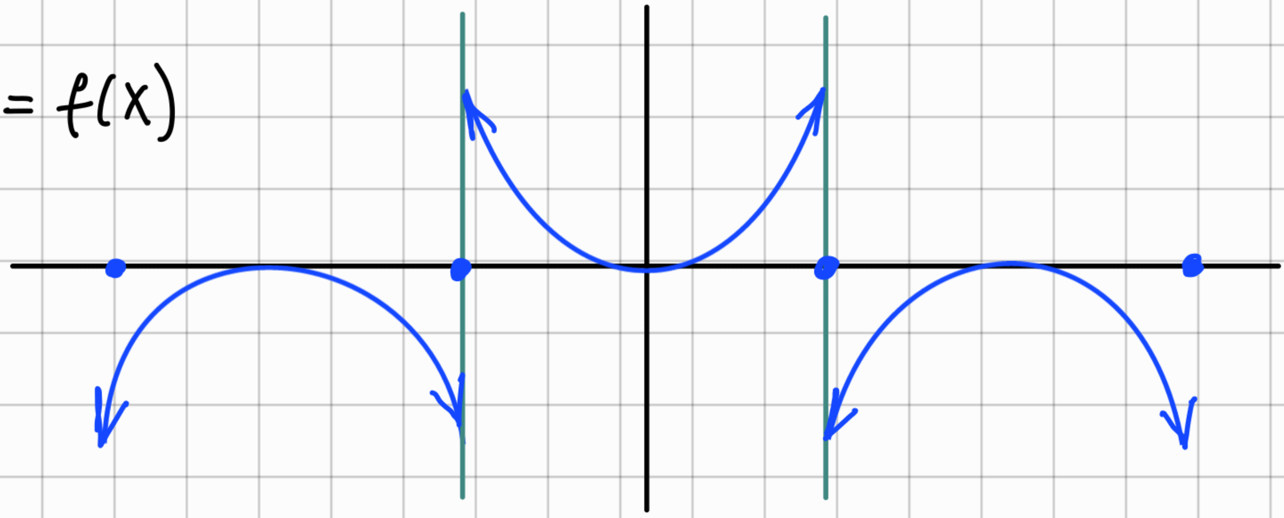
симм относ. $(\frac{l}{2}, 0)$

далее по четности, далее с период. $2l$.

$b_n = 0$, $a_{2n} = 0 \Rightarrow f(l-x) = -f(x)$, $0 < x < \frac{l}{2}$

$\Downarrow$

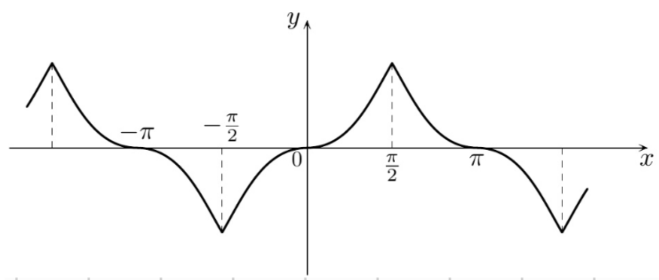
$f(-x) = f(x)$



66. $f(-x) = f(x)$; $f(\pi - x) = -f(x)$.

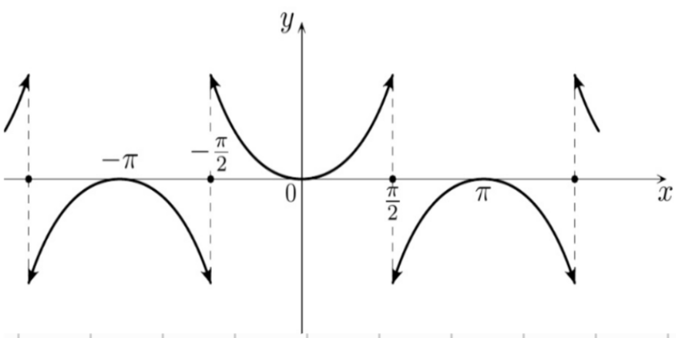
На примере $f(x) = x^2$, $0 \leq x \leq \pi/2$

III. Разложение в ряд Фурье по синусам нечётных кратных дуг. Пусть функция $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить на отрезок $[0;l]$ так: $f(l-x) = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$ (график отражается симметрично относительно прямой $x = \frac{l}{2}$), затем продолжить по нечётности на отрезок $[-l;l]$ и с периодом $2l$ на всю числовую ось (как в п. II). Тогда $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и к тому же $b_{2n} = 0$, $n = 1, 2, \ldots$



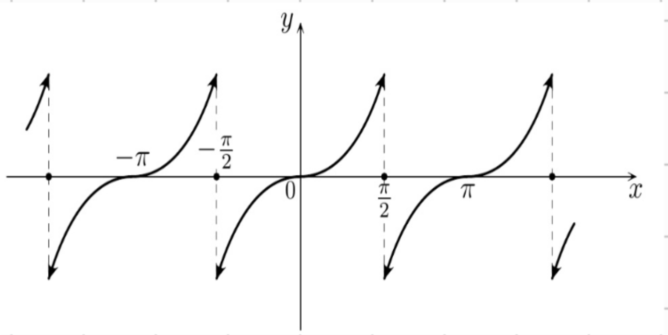
IV. Разложение в ряд Фурье по косинусам нечётных кратных дуг. Пусть функция $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить на отрезок $[0; l]$ так: $f(l-x) = -f(x)$, $0 \leqslant x < \frac{l}{2}$, заменить $f\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ (график отражается симметрично относительно точки $\left(\frac{l}{2}, 0\right)$). Затем функция продолжается по чётности на отрезок $[-l; l]$ и с периодом $2l$ на всю числовую ось. Тогда $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и аналогично п. III можно показать, что $a_{2n} = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$a_{2n+1} = \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

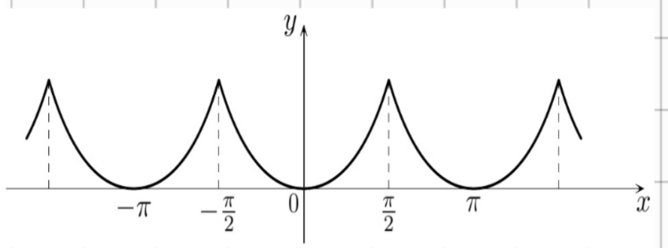


V. Разложение в ряд Фурье по синусам чётных кратных дуг. Пусть функция $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить на отрезок $[0; l]$ так: $f(l-x) = -f(x)$, $0 \leqslant x < \frac{l}{2}$ (заменить $f\left(\frac{l}{2}\right) = 0$) — как в п. IV. Затем функция продолжается по нечётности на отрезок $[-l; l]$ и с периодом $2l$ на всю числовую ось (как в п. II). Тогда $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и аналогично п. III можно показать, что $b_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

$$b_{2n} = \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(x)\sin\frac{2\pi n x}{l}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$



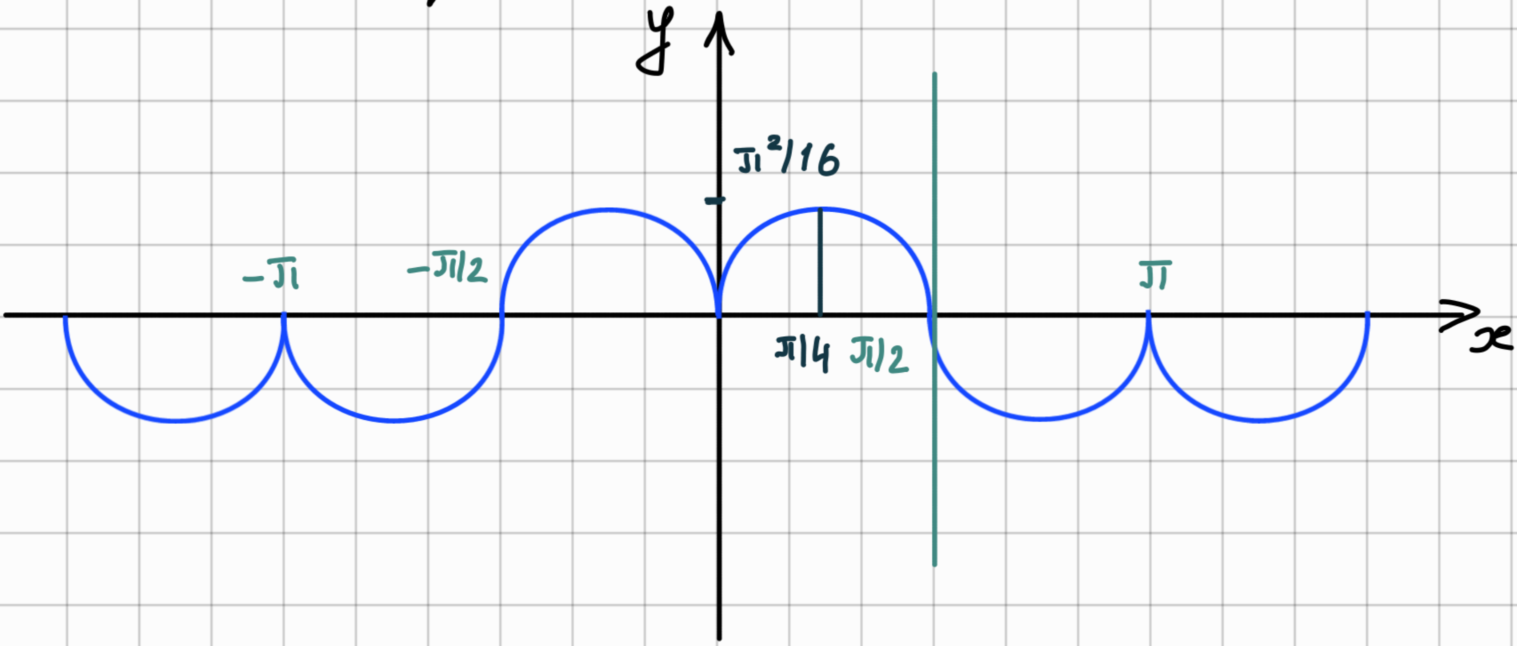
VI. Разложение в ряд Фурье по косинусам чётных кратных дуг. Пусть функция $f \in L_R\left[0, \frac{l}{2}\right]$, $l > 0$. Тогда её можно продолжить на отрезок $[0; l]$ так: $f(l-x) = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}$ (как в п. III). Затем функция продолжается по чётности на отрезок $[-l; l]$ и с периодом $2l$ на всю числовую ось (как в п. I). Тогда $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и аналогично п. III можно показать, что $a_{2n+1} = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $a_{2n} = \frac{4}{l}\int_0^{l/2} f(x)\cos\frac{2\pi n x}{l}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Построенный ряд Фурье



68. Разложить функцию $f(x) = x(\pi/2 - x)$ в ряд Фурье на отрезке $[0; \pi/2]$:
1) по системе $\{\cos(2n-1)x\}$, $n \in N$;
2) по системе $\{\sin(2n-1)x\}$, $n \in N$.

1) по косинусам нечетных кратных дуг

симм отн. $\left(\frac{l}{2},0\right)$, далее по чётности, далее с периодом 2π



$$a_{2n-1}=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos(2n-1)x\,dx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\pi x}{2}\cos(2n-1)x\,dx-\int_0^{\pi/2}x^2\cos(2n-1)x\,dx\right)$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{2(2n-1)}-\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)}+\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^3}\right)$$

1 $$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}x\cos(2n-1)x\,dx=\frac{\pi}{2}\left.\frac{x\sin(2n-1)x}{2n-1}\right|_0^{\pi/2}$$

$u=x \qquad du=dx$

$dv=\cos(2n-1)x\,dx \qquad v=\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}dx=\frac{\pi^2\sin(\pi n-\pi/2)}{4(2n-1)}+\left.\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right|_0^{\pi/2}$$

$=\sin\pi n=0$

$$=\frac{-\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)}+\frac{\pi}{2}\frac{\cos(\pi n-\frac{\pi}{2})}{(2n-1)^2}-\frac{\pi}{2(2n-1)^2}=$$

$$= -\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)} - \frac{\pi}{2(2n-1)^2}$$

② $$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(2n-1)x\,dx = x^2 \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\Big|_0^{\pi/2} -$$

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = \cos(2n-1)x\,dx \qquad v = \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

$$-\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} 2x\,dx = -\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)} - \frac{2}{2n-1}\Big[$$

$$-\underbrace{\frac{x\cos(2n-1)x}{2n-1}\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\,dx\Big] =$$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \sin(2n-1)x\,dx \qquad v = -\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$

$$= -\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)} - \frac{2}{2n-1}\,\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)} + \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^3}$$

$\sin(\pi n - \frac{\pi}{2})$

$n=1: \; -\cos\pi n$

$-(-1)^n$

$$\frac{4}{\pi}\left(-\cancel{\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)}} - \frac{\pi}{2(2n-1)^2} + \cancel{\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)}} - \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^3}\right)$$

$$= -\frac{2}{(2n-1)^2} - \frac{2\cdot 4(-1)^n}{\pi(2n-1)^2(2n-1)}$$

$$x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\right)\cos(2n-1)x$$

Замечание: $\underset{\pi/2}{f(x)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2n-1)x$

$$A_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(2n-1)x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^2(2n-1)x\,dx} = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos^2(2n-1)x = \frac{1+\cos 2(2n-1)x}{2}$$

норма φ_n

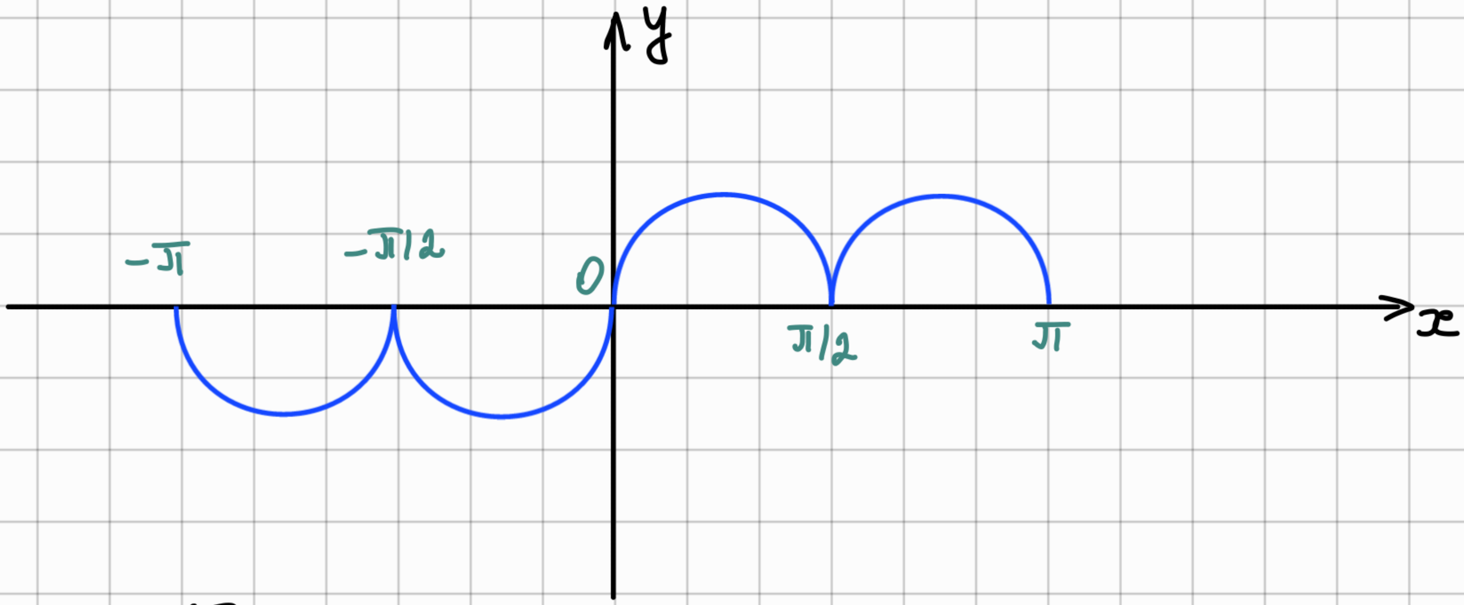
$$A_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(2n-1)x\,dx$$

2) по синусам нечётные кратных дуг

1) по синусам нечётных кратных дуг

$f(x) \in L_R\left(0, \frac{l}{2}\right)$ $\quad f(l-x) = f(x),\ 0 < x < \frac{l}{2}$

симм отн-но $x = \frac{l}{2}$ далее по не-четности, далее период $2l$



$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2n-1)x$$

$$B_n = \frac{\langle f_n, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{\int_0^{\pi/2} f(x) \sin(2n-1)x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^2(2n-1)x \, dx} =$$

$$\sin^2(2n-1)x \overset{\shortparallel}{=} \frac{1}{2} - \frac{\cos 2(2n-1)x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi} \langle f_n, \varphi_n \rangle$$

$$B_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(2n-1)x \, dx = \frac{4}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} x \sin(2n-1)x \, dx - \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2n-1)x \, dx \right)$$

1. $$\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin(2n-1)x \, dx = \frac{\pi}{2}\left[\underbrace{\left. \frac{-x\cos(2n-1)x}{2n-1} \right|_0^{\pi/2}}_{=0} + \right.$$

$u = x \qquad du = dx$

$dV = \sin(2n-1)x \, dx \qquad V = \frac{-\cos(2n-1)x}{2n-1}$

$$\left. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} dx \right] = \frac{\pi}{2} \left. \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$$

2. $$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2n-1)x \, dx = \underbrace{\left. -\frac{x^2 \cos(2n-1)x}{2n-1} \right|_0^{\pi/2}}_{=0} +$$

$u = x^2 \qquad du = 2x \, dx$

$dV = \sin(2n-1)x \, dx \qquad V = -\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} 2x \, dx = \frac{2}{2n-1}\left[\left. \frac{x \sin(2n-1)x}{2n-1} \right|_0^{\pi/2} - \right.$$

$u = x \qquad du = dx$

$dV = \cos(2n-1)x \, dx \qquad V = \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

$$-\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,dx \Big] = -\frac{\pi\,(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^3}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\pi(-1)^n}{(2n-1)^2} - \frac{2}{(2n-1)^3}$$

$$B_n = \frac{4}{\pi}\Big(\underbrace{-\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{\pi(-1)^n}{(2n-1)^2}}_{= \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}} + \frac{2}{(2n-1)^3}\Big)$$

$$x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi(2n-1)^3}\right)\sin(2n-1)x$$

68. 1) $-2\sum\limits_{n=1} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right)\cos(2n-1)x$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi(2n-1)^3}\right)\sin(2n-1)x$.

---

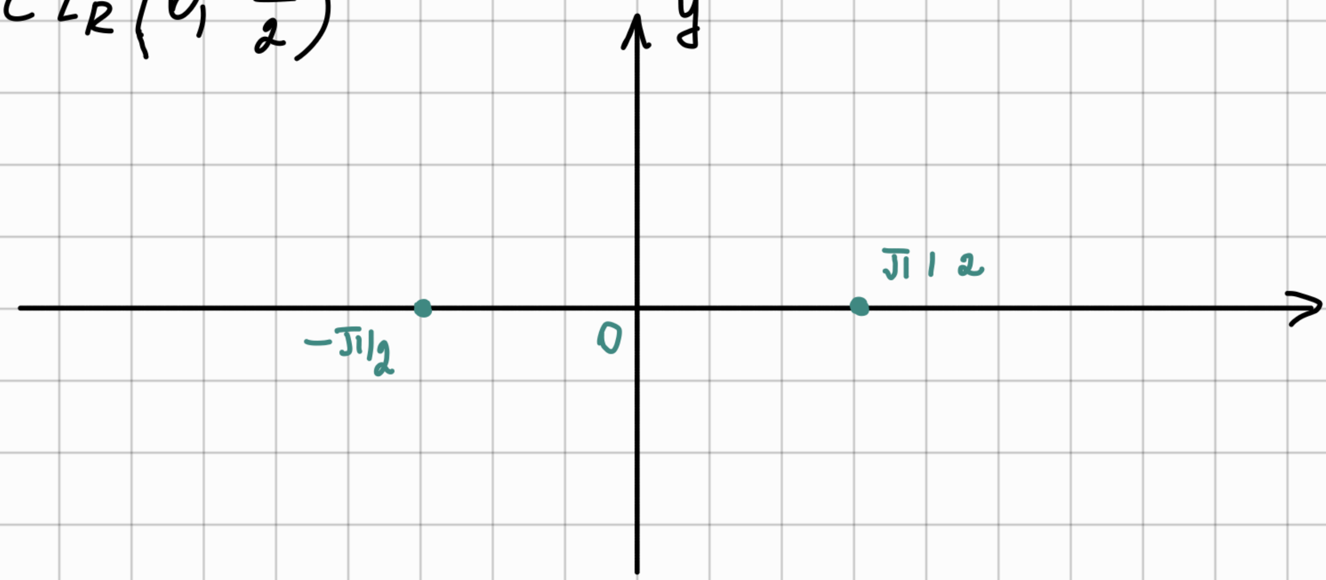
72. Какими особенностями обладают коэффициенты Фурье функции периода 2π, если ее график:

1) имеет центр симметрии в точках $(0;0)$ и $(\pm\pi/2;0)$;

2) имеет центр симметрии в начале координат и оси симметрии $x = \pm\pi/2$Г

1) по синусам чётных кратных дуг

$f(x) \in L_R\left(0, \frac{l}{2}\right)$



центр симметр $(0,0) \Rightarrow$ нечетн., далее по синусам, $a_n = 0$

$f(-x) = -f(x)$

$f(\pi - x) = -f(x)$ — симметрия $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$x \to \pi - x$ $\quad f(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n(\pi - x)) =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\underbrace{\sin \pi n}_{0} \cos nx - \underbrace{\cos \pi n}_{(-1)^n} \sin nx) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-1)^{n+1} \sin nx = -f(x)$$ в силу симметрии $= -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

$$b_n[(-1)^{n+1} + 1] = 0$$

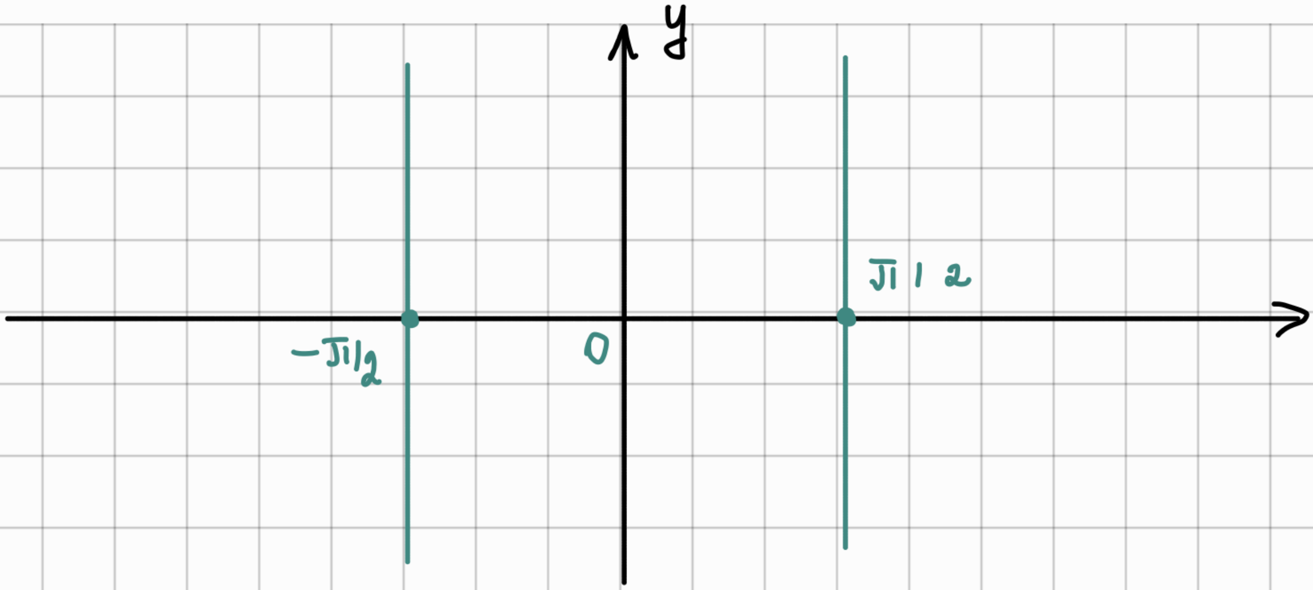
$2n-1$ (нечётное): $2b_{2n-1} = 0$

$2n$ (четное): $(-1)^{2n+1} + 1 = 0$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin 2nx$ — по синусам чётных кратных дуг $f(x) \in L_R\left(0, \frac{l}{2}\right)$

$f(l - x) = -f(x)$, $0 < x < \frac{l}{2}$, далее по нечетности, далее с пер. $2l$

2)



$f(-x) = -f(x)$ нечётная, центр симметрии $(0,0)$ $\Rightarrow$ разложение по синусам

$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ – симметрия отн-но $x=\frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$$

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2} \pm nx\right) = \sin\frac{\pi n}{2}\cos nx \pm \sin nx \cos\frac{\pi n}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n \sin nx \cos\frac{\pi n}{2} = 0$$

$$\Rightarrow b_n \cos\frac{\pi n}{2} = 0$$

$n=1$: b_1 любое

$n=2$: $-1 \Rightarrow b_2=0$

$n=3$: b_3 любое

$n=4$: $1 \Rightarrow b_4=0$

$\Rightarrow \forall n$ нечетного b_n остаются

$b_{2n}=0$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x$$

разложение по синусам нечётных кратных дуг

$f(x)\in L_R(0,\frac{l}{2})$ $\quad f(l-x)=f(x),\ 0<x<\frac{l}{2}$

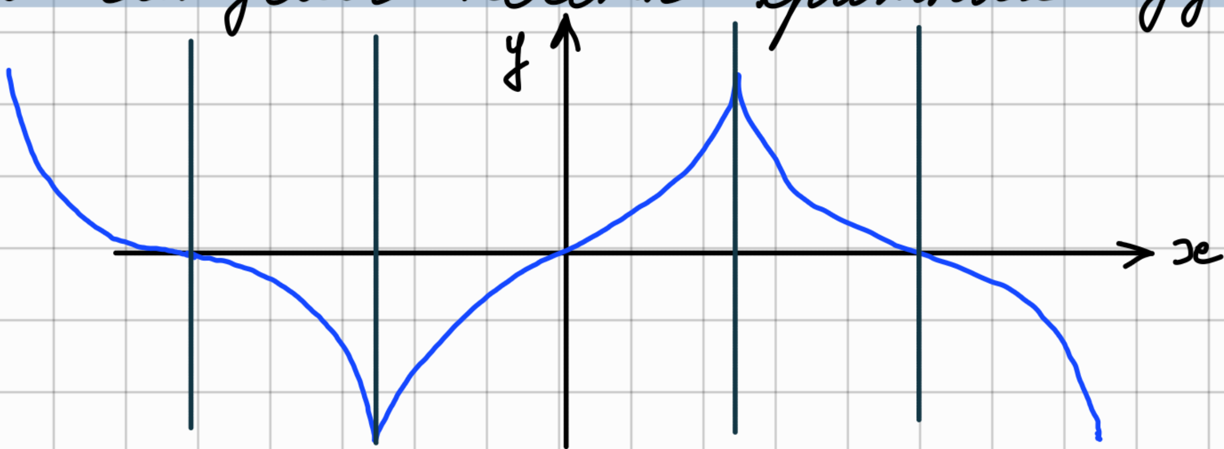
симм отн-но $x=\frac{l}{2}$ далее по нечетности, далее период $2l$

72. 1) $a_n=0,\ b_{2k-1}=0$; 2) $a_n=0,\ b_{2k}=0$.

1. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функций $f(x)=\operatorname{sh}x,\ x\in[0;\pi/2]$ и $g(x)=\operatorname{sh}x+1,\ x\in[0;\pi/2]$ по системам:
а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$;
в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?
Постройте графики сумм этих рядов.

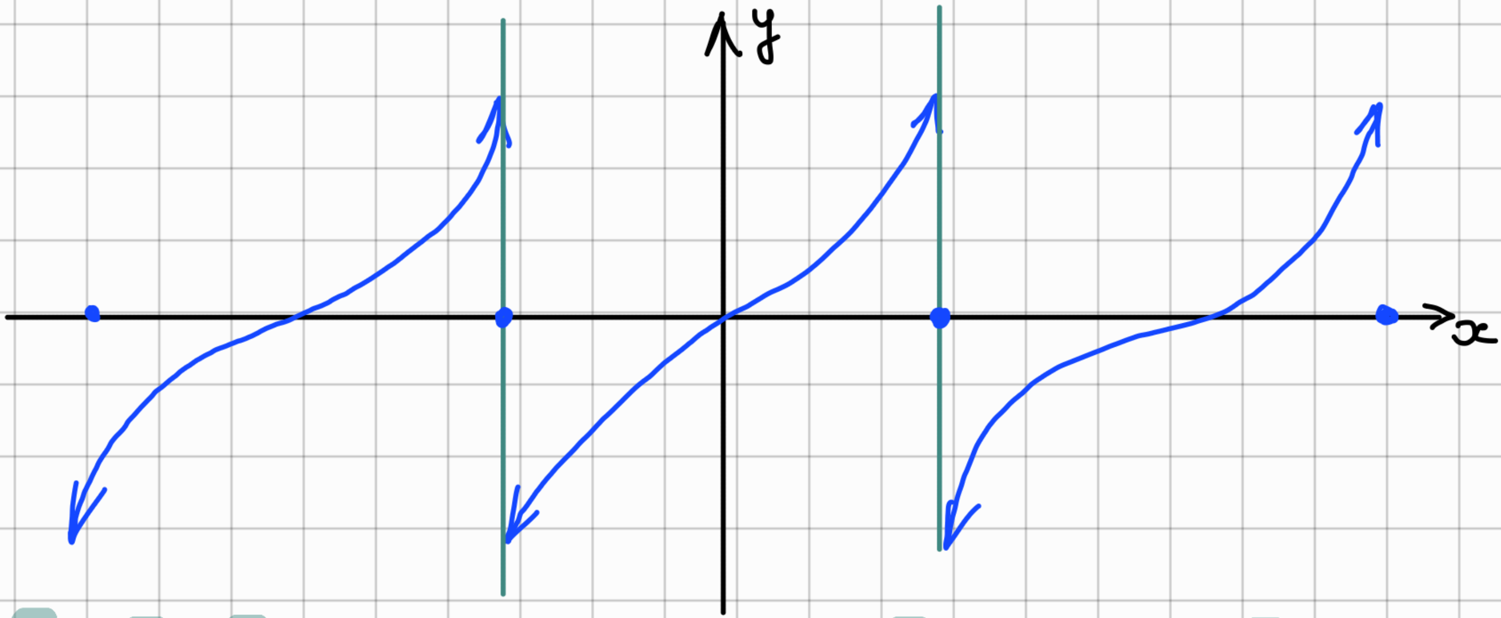
$\boxed{f(x)=\operatorname{sh}x \qquad l=\pi \rightarrow 2l=2\pi}$

а) по синусам нечетн кратных дуг



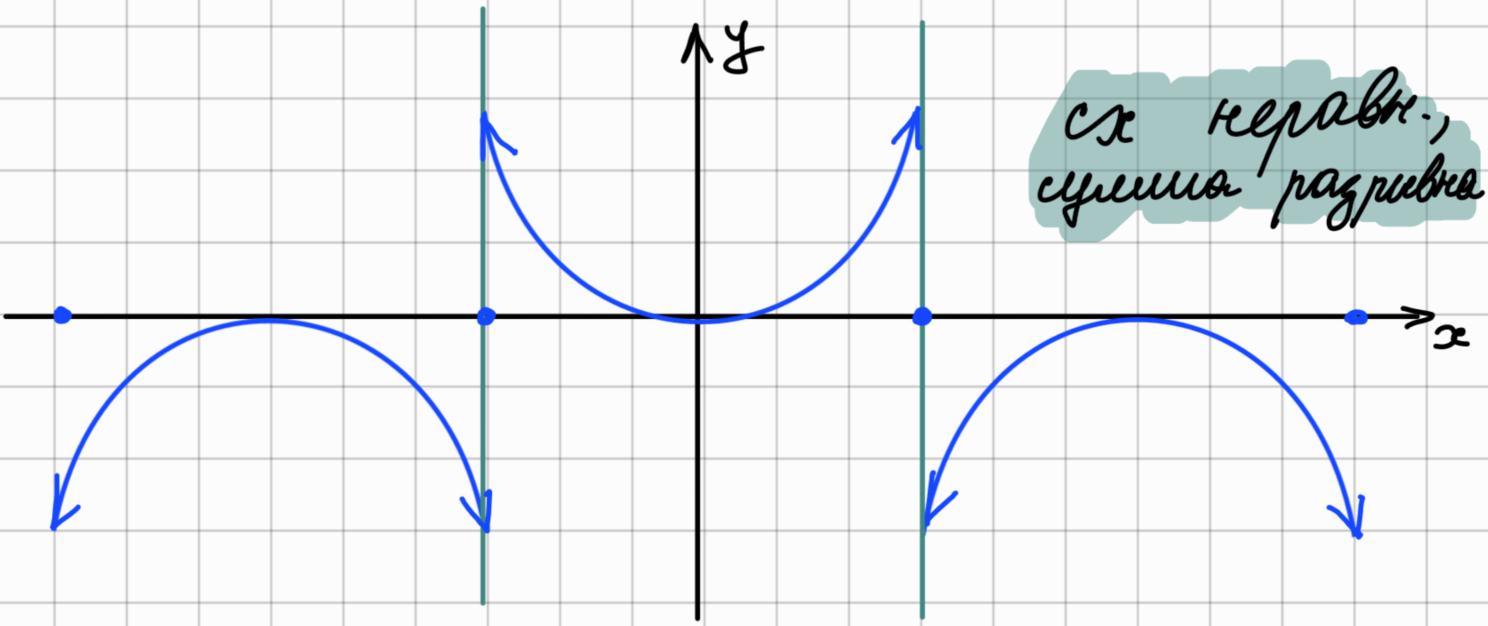
кусочно-гладкая $[-\pi, \pi]$ с периодом 2π ряд сх. равном по св. 1 из призн Липшица.

б по синусам четных кратных дуг



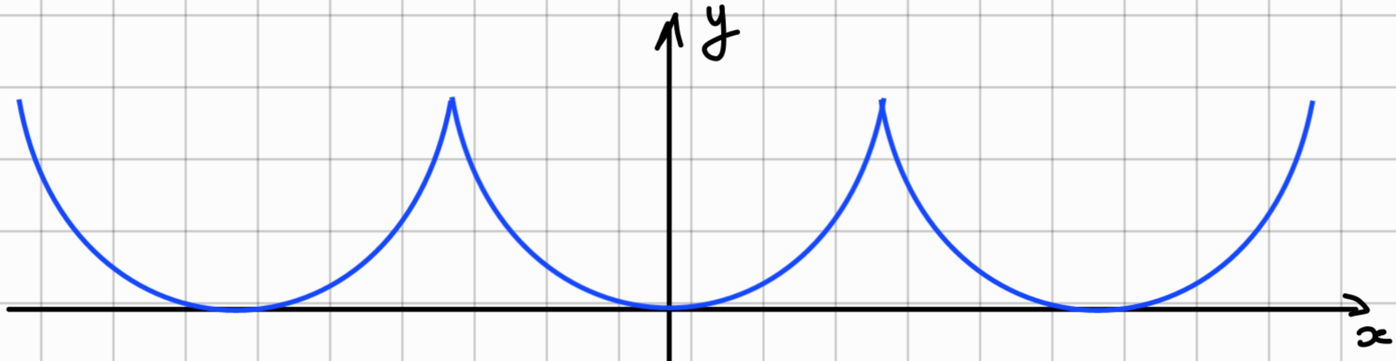
ряд сх неравном, т.к сумма разрывна по св 1,2

в) по косинусам нечетных кр дуг



сх неравн., сумма разрывна

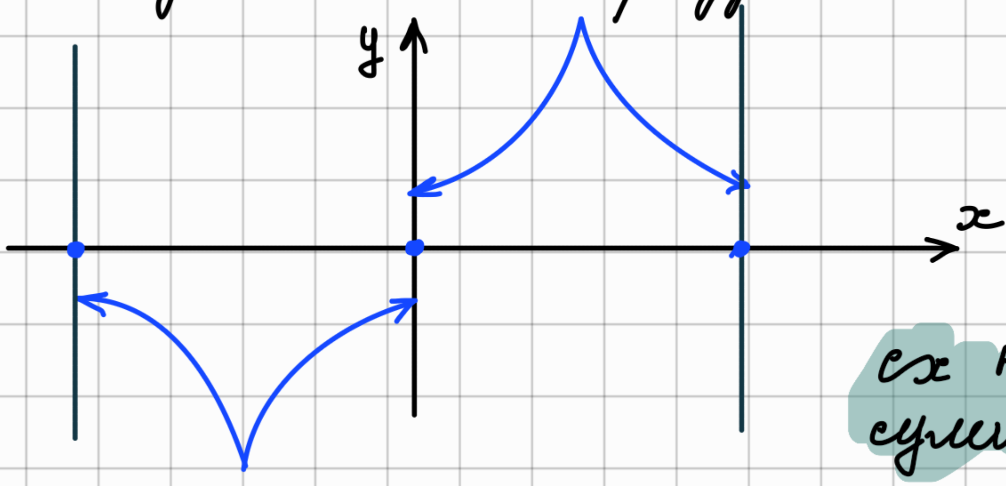
г) по косинусам четн кр дуг



равн сход., период 2π
и кус - гладкая

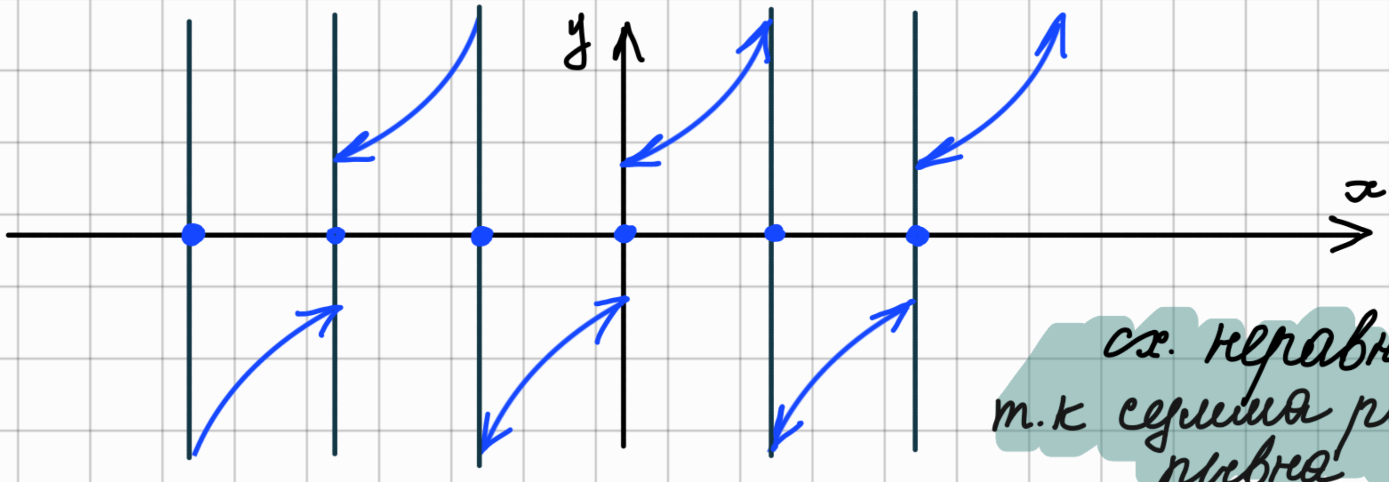
$$\boxed{f(x) = \operatorname{Sh} x + 1 \qquad \ell = \pi \qquad 2\ell = 2\pi}$$

а) по синусам нечетн кр дуг



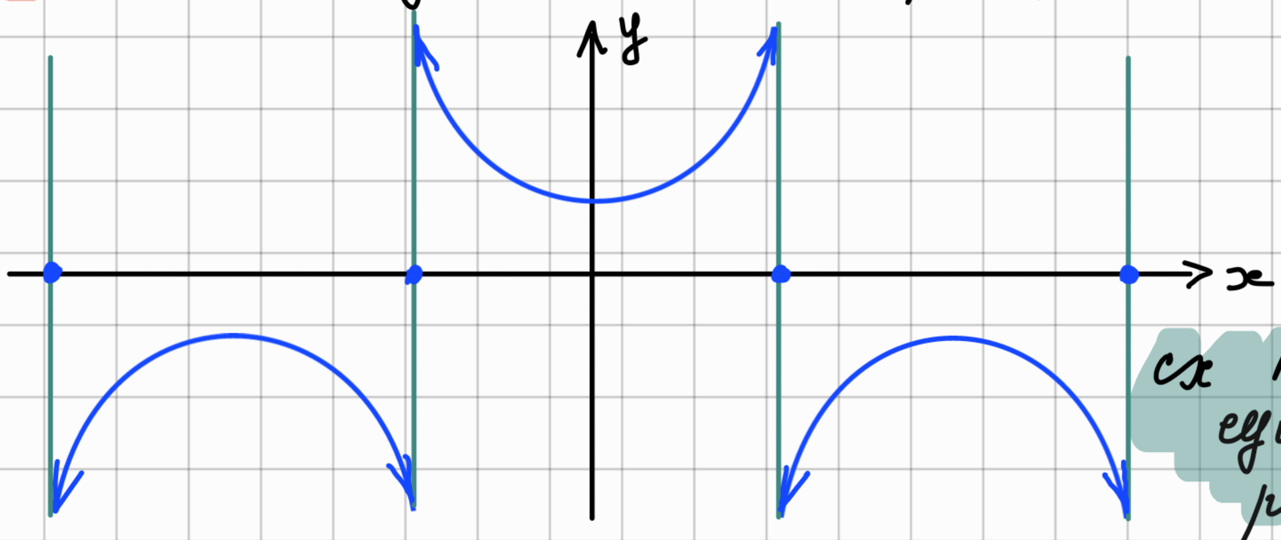
сх неравн., т.к. сумма разрывна

б) по синусам четн кр. дуг



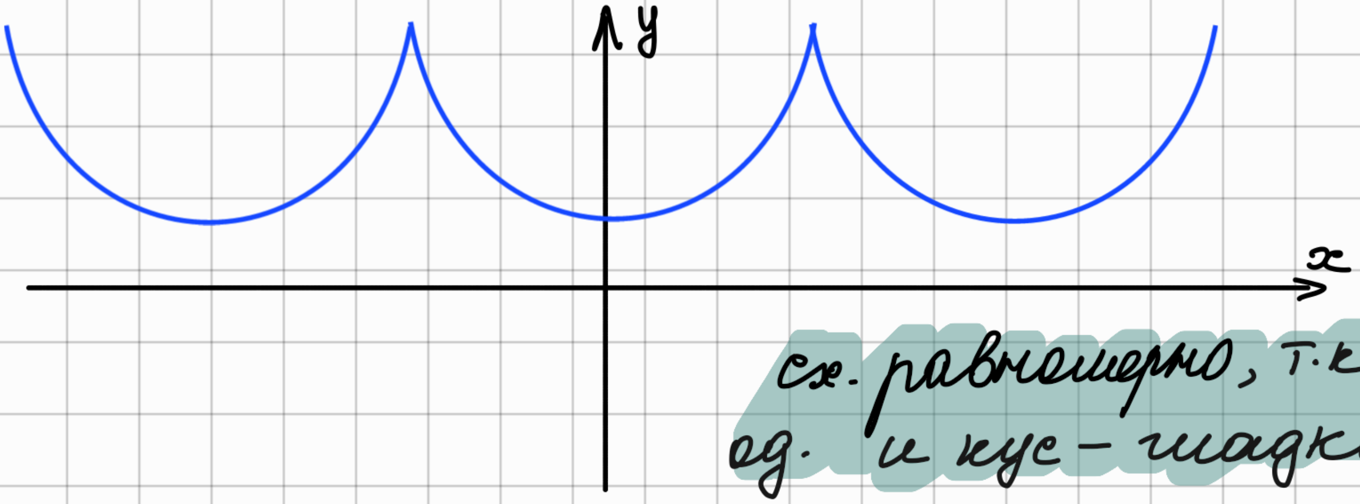
сх. неравн., т.к сумма раз-
рывна

в) по косинусам нечётн кр дуг



сх неравн., т.к. сумма разрывна

г) по косинусам чётн кр. дуг



сх. равномерно, т.к периoд. и кус-гладкая

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определите порядок их убывания, ~~а также порядок убывания остатка ряда~~ для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$:

а) x^{2025}; б) x^{2024}; в) $(x^2 - \pi^2)^3$.

Теорема 22.8. 1) *Пусть функция f имеет период $2l$ и при всех x существует $f^{(k-1)}(x)$ — кусочно-гладкая функция на $[-l; l]$, $l > 0$. Тогда коэффициенты Фурье f удовлетворяют условию $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $k = 1, 2, \ \dots$).*

2) *Пусть функция f имеет период $2l$, причём $f^{(k-2)}$ непрерывна в любой точке, а $f^{(k-1)}$ — кусочно непрерывно дифференцируемая функция на $[-l; l]$, $l > 0$. Тогда коэффициенты Фурье f удовлетворяют условию $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $k = 2, 3, \ \dots$).*

$2l = 2\pi$

Пример 22.9. Оценить скорость стремления к нулю коэффициентов Фурье функции $f(x) = \pi^3 x - x^4 \operatorname{sign} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

□ Так как функция нечётная, то $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ \dots$ (функцию f считаем периодически продолженной на всю числовую прямую с периодом 2π). Имеем

$$f(x) = \begin{cases} \pi^3 x - x^4, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \pi^3 x + x^4, & -\pi \leqslant x \leqslant 0; \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \pi^3 - 4x^3, & 0 < x < \pi, \\ \pi^3 + 4x^3, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Функция f непрерывна на $[-\pi; \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$. Далее, $\lim\limits_{x \to -0} f'(x) = \lim\limits_{x \to +0} f'(x) = \pi^3$; так как f непрерывна в точке 0, то существует $f'(0) = \pi^3$ (теорема 4.16 и замечание к ней). Точно также получим, что $f'(-\pi) = f'(\pi) = -3\pi^3$; значит, периодическая функция f' непрерывна в любой точке. Далее,

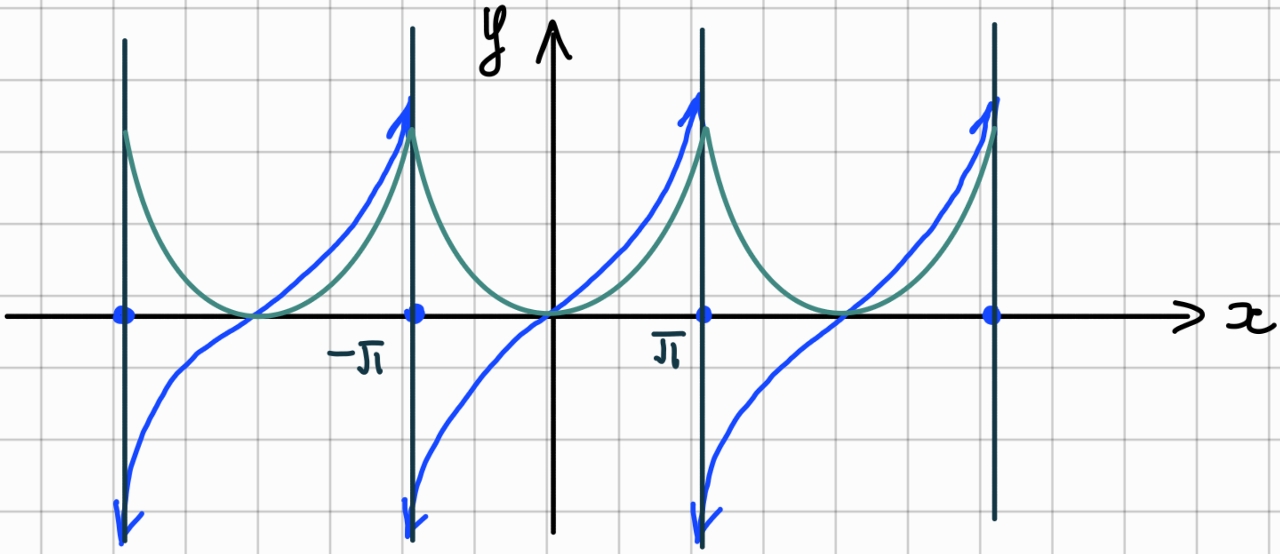
$f''(x) = \begin{cases} -12x^2, & 0 < x < \pi, \\ 12x^2, & -\pi < x < 0. \end{cases}$ Аналогично только что доказанному, $f''(0) = 0$, но $f''(\pi) \neq f''(-\pi)$. Поэтому периодическая функция f'' кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi; \pi]$, но не является непрерывной в точках $x = \pm\pi$. Функция f удовлетворяет условиям второй части теоремы 22.8 при $k - 1 = 2$ и $k - 2 = 1$, т.е. $k = 3$. Поэтому $b_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, $n \to \infty$. Отметим, что первая часть теоремы 22.8 дала бы только $b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \to \infty$. Поэтому на практике обычно выгоднее применять вторую часть теоремы, чем первую. ■

а) x^{2025} нечётная, $a_n = 0$

1) утв-ие неприменимо, т.к. $f(x)$ не явл. кусочно-гладк. $\Rightarrow$ производные тем более

2) $k-1=0$, $f'(x) = 2025\,x^{2024}$ $\Rightarrow$ $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow k = 1$



$f(x)$ кусочно-гладкая

б) x^{2024} чётная $b_n = 0$

1) $k-1=0 \Rightarrow k=1$ $\quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

2) $k-1=1$ $\Rightarrow k=2$ $\quad a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$k-2=0$

$f(x)$ непрер., а $f'(x)$ кусочно-непр дифф.

в) $(x^2-\pi^2)^3$ $\quad f(x) = (x-\pi)^3(x+\pi)^3$

$\Rightarrow f(\pi) = f(-\pi) = 0$

Сравним $f^{(k)}(\pi)$ и $f^{(k)}(-\pi)$ до тех пор,

пока не получ. разл значения.

$f'(x) = 3(x^2-\pi^2)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-\pi^2)^2$

$f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$

$f''(x) = 6(x^2-\pi^2)^2 + 24x^2(x^2-\pi^2) =$

$(x^2-\pi^2)[6(x^2-\pi^2)+24x^2] \Rightarrow f''(\pi) = f''(-\pi)$

$f'''(x) = 24x(x^2-\pi^2) + 96x^3 - 48\pi^2 x =$

$(x^2-\pi^2)24x + 48x(2x^2-\pi^2)$ $\quad f'''(\pi) \neq f'''(-\pi)$

$f(x) \in C^2$, лишь третья произв стан. кус-гладкой, сама ф-ция, первая и вторая произв непрерывны

1) $k-1=2 \Rightarrow k=3$: $a_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

чётная $\Rightarrow b_n = 0$

2) $k-2=2 \Rightarrow k=4$: $a_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$

чётная $\Rightarrow b_n = 0$

115. Не вычисляя коэффициенты ряда Фурье на $(-\pi;\pi)$ функции $f(x) = \pi x - x|x|$, выяснить, сходится ли этот ряд равномерно. Построить графики сумм, продифференцированного и дважды продифференцированного рядов.

$f(-\pi) = f(\pi)$ $\quad f(x)$ непр и кусочно-непр. диффо.

$$f'(x) = \begin{cases} \pi - 2x, & 0 < x < \pi \\ \pi + 2x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -2, & 0 < x < \pi \\ 2, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

4. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная кусочно непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то ряд Фурье для $f'(x)$ получается из ряда Фурье для $f(x)$ почленным дифференцированием, т. е. если*

$$f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{22}$$

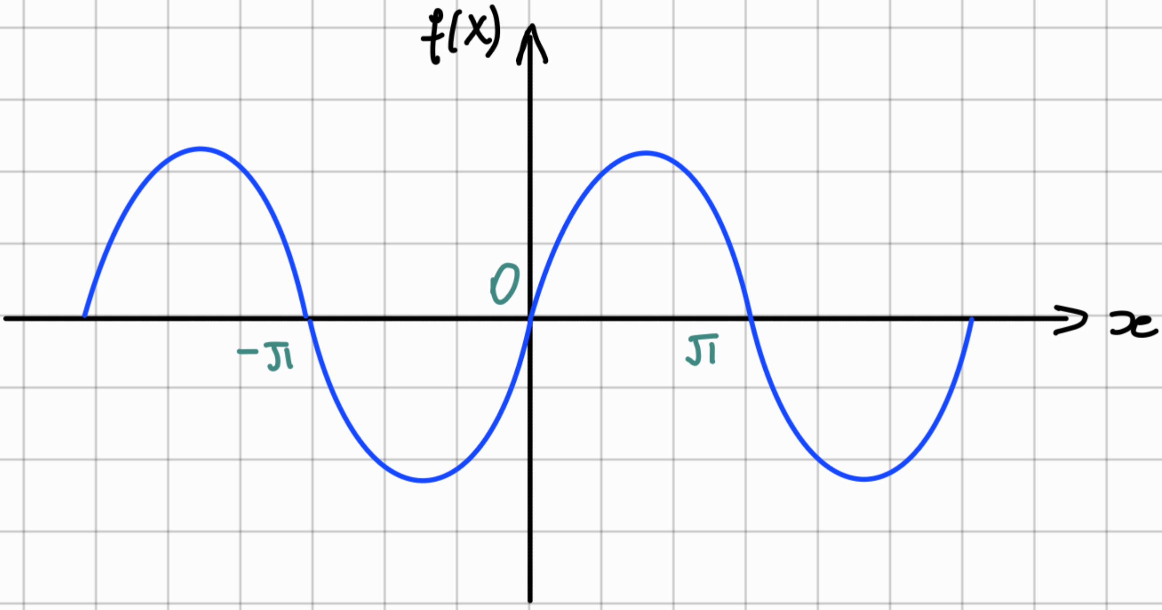
то

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx). \tag{23}$$

Теорема 6. *Если $f(x)$ — кусочно непрерывная и 2π-периодическая функция $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, то*

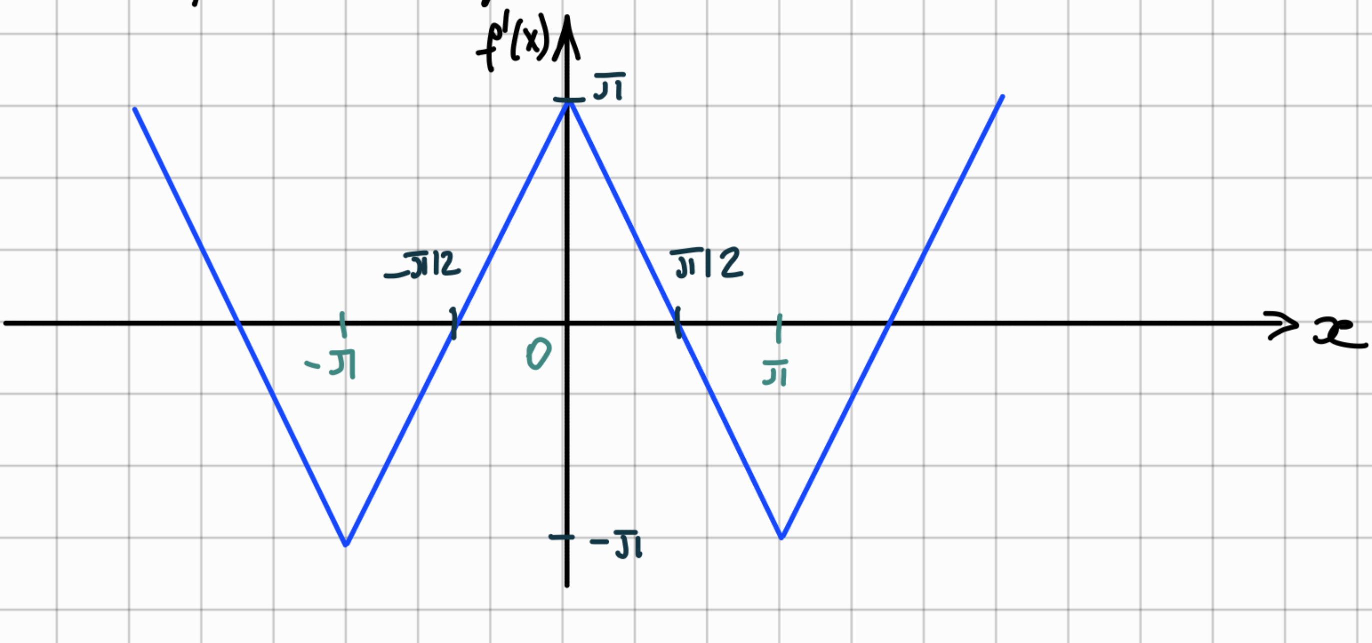
$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{\sin nx}{n} + b_n \frac{1 - \cos nx}{n}\right), \tag{24}$$

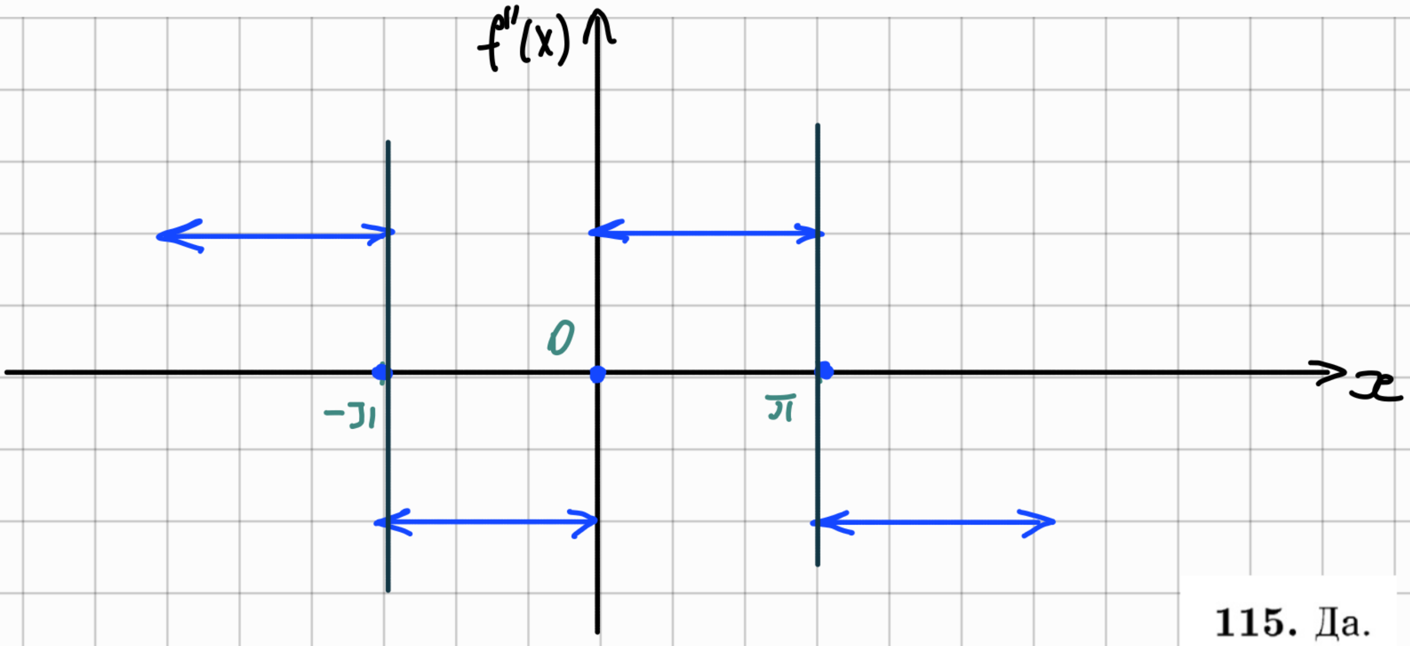
т. е. ряд (24) получается из ряда (22) почленным интегрированием.



период 2π и кус-гладк $\Rightarrow$ ряд сх.

к $f(x)$ равномерно





115. Да.

116. Исходя из разложения

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi,$$

получить почленным интегрированием разложения в ряд Фурье функций x^2, x^3 и x^4.

Теория

$x = f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$

$f(x)$ кусочно-непр на $[-\ell, \ell]$ имеет период 2ℓ

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin\frac{\pi n x}{\ell}$

Тогда $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2}$ — кус-глад. на $[-\ell, \ell]$ с периодом 2ℓ.

$F(x) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell}{\pi n}\left(a_n \sin\frac{\pi n x}{\ell} - b_n \cos\frac{\pi n x}{\ell}\right)$

равн сх ряд $\quad c = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} F(x)\,dx$

а) $f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$; $l=\pi$

$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

$\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$$

б) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$

$l=\pi$

$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2} = \int_0^x t^2\,dt - \frac{\pi^2}{3}x$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left.\left(\frac{x^4}{12} - \frac{\pi^2 x^2}{6}\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n\sin nx}{n^3}$$

$$x^3 = 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n\sin nx}{n^3}$$

$$\Rightarrow x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n \sin nx - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \sin nx}{n^3}$$

$$x^3 = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6 - \pi^2 n^2}{n^3} \sin nx$$

$$б)\ f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3} \sin nx \qquad l = \pi$$

$$b_n = 2(-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3}$$

$$F(x) = \int_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4}$$

$$\frac{x^4}{4} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4} \cos nx$$

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^4}{4} dx = \frac{1}{4\pi} \frac{x^5}{5}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5}{20\pi} = \frac{\pi^4}{10}$$

$$\frac{x^4}{4} = \frac{\pi^4}{20} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4} \cos nx$$

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4} \cos nx$$

116. 1) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$; 2) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3} \sin nx$;

3) $\frac{\pi^4}{5} + 8\sum (\cancel{-1})^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4} \cos nx.$ $(-1)^{n+1}$

$$a_n = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n \cdot \pi^3 \cdot n^3 - 6 \cdot (-1)^n \cdot \pi \cdot n}{n^5}$$

$$a_n = -\frac{8}{\pi} \cdot \pi n (-1)^n \frac{6 - \pi^2 n^2}{n^5} = 8(-1)^{n+1} \frac{6 - \pi^2 n^2}{n^4}$$

С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы рядов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

Если $a_0,\ a_n,\ b_n,\ n \in N,$ — коэффициенты Фурье функции f, то справедливо *равенство Парсеваля*

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{26}$$

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

РФ для $f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$

равенство Парсеваля: $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx =$

$\frac{a_0^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$

$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^5}{5}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^4}{5}$

$b_n = 0$

$a_n^2 = \frac{16}{n^4}$

$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} \Rightarrow 16\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{8\pi^4}{45}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

РФ для $x^3 - 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6 - \pi^2 n^2}{n^3}\sin nx$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^6 dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^7}{7}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^7}{7\pi} = \frac{2\pi^6}{7}$$

$a_n = 0$

$$b_n = 2(-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3}; \quad b_n^2 = 4\frac{(6-\pi^2n^2)^2}{n^6} =$$

$$= 4\frac{36 - 12\pi^2 n^2 + \pi^4 n^4}{n^6}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^6}{7} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36}{n^6} - 4\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\pi^2}{n^4}}_{\pi^4/90} + 4\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^4}{n^2}}_{\pi^2/6}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^6}{7} + \frac{4\cdot 12\pi^6}{90} - \frac{4\pi^6}{6} = 4\cdot 36\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}} = \frac{\cancel{16}\,4\,\pi^6}{105}\cdot\frac{1}{\cancel{4}\cdot\cancel{36}\,9} = \boxed{\frac{\pi^6}{945}}$$

---

3. a) Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[-\pi,\pi]$ функция, такая что $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)dx.$$

Указание: воспользоваться неравенством Парсеваля. б) Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, такая что $f(a) = f(b) = 0$, то

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'^2(x)dx.$$

Указание: после сдвига продолжить функцию нечётным образом.

a) $\square$ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

кус.-непрер. $\left(a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0\right)$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx)$$

Рав. Парсеваля $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

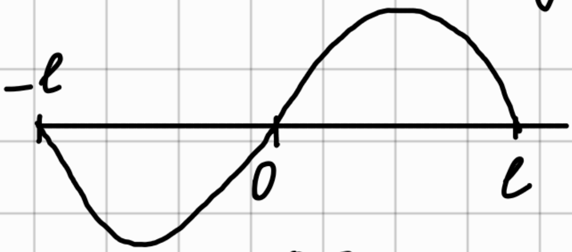
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2dx \qquad \blacksquare$$

б $\square$ $\varphi(x)=f(x+a)$ кус-гл. на $[0,b-a]$,

$b-a=l$ и $\varphi(0)=\varphi(l)=0$

по нечётн., далее с периодом $2l$



$$\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$\varphi'(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}b_n\cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}(\varphi(x))^2dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$$

$$\int\limits_{-l}^{l}(\varphi(x))^2dx\le\frac{l^2}{\pi^2}\int\limits_{-l}^{l}(\varphi'(x))^2dx$$

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}(\varphi'(x))^2dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2n^2}{l^2}b_n^2$$

$$2\int_0^l (\varphi(x))^2\,dx \le \frac{l^2}{\pi^2}\, 2\int_0^l (\varphi'(x))^2\,dx$$

$$\int_0^l (f(x+a))^2\,dx \le \frac{l^2}{\pi^2}\int_0^l (f'(x+a))^2\,dx$$

$x+a \to x$

$$\int_a^b (f(x))^2\,dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b (f'(x))^2\,dx \qquad \blacksquare$$

48. Показать, что ряд суммируется методом Чезаро (см. задачу 47), найдя σ_n и σ:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$; 2) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\theta,\quad 0<|\theta|<\pi$;

47. Пусть задана числовая последовательность $a_0, a_1 \ldots, a_n \ldots$; обозначим

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k,\qquad \sigma_n=\frac{S_0+S_1+\ldots+S_n}{n+1}.$$

Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ *суммируется методом средних арифметических*, а число σ называют *обобщенной* (*в смысле Чезаро*) *суммой* этого ряда.

S_k – k-ая частичн сумма ряда

а) $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k$ $\qquad a_n \not\to 0$ ряд расходится

$n=2m$: $S_{2m}=1-1+1-1+\ldots+1=1$

$S_0+S_2+\ldots S_{2k}$: $k+1$ единиц

$S_1, S_3, \ldots S_{2k-1}$: k нулей

$n=2m-1$ $\quad S_{2m-1}=1-1+1+\ldots+1-1=0$

$S_0, S_2, \ldots S_{2k-2}$: k единиц

$S_1, S_3, \ldots S_{2k-1}$: k нулей

$$S_n = \begin{cases} 1, & n = 2m \\ 0, & n = 2m-1 \end{cases} \qquad \sigma_n = \frac{S_1 + \dots S_n}{n+1}$$

$$\frac{S_1 + S_2 + \dots S_n}{n+1} = \begin{cases} \frac{m+1}{2m+1}, & n = 2m \\ \frac{1}{2}, & n = 2m-1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$$

б) из необх усл-ния следует, что

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$ при $b_n: \lim_{n\to\infty} b_n = 1 \neq 0$

расходится при всех x

$$\measuredangle\ S_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta), \quad 0 < |\theta| < \pi$$

$$S_0 = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{n+1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\underbrace{\frac{k\theta}{2}+\frac{(k+1)\theta}{2}}_{=k\theta+\frac{\theta}{2}}\right) + \sin\left(\underbrace{\frac{k\theta}{2}-\frac{(k+1)\theta}{2}}_{=-\theta/2}\right)}{2\sin(\theta/2)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(k\theta+\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\theta/2} \Rightarrow$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{\theta}{2}}\left[\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k\theta+\frac{\theta}{2}\right) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2}}_{=n\sin\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$=$$

$$\sin k\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\;\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} + \sin\frac{\theta}{2}\;\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\underbrace{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta + \sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta}_{=\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta+\frac{\theta}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n+2}{2}\theta}{\sin^2\theta/2} - n\right] =$$

$$2(n+1)\sin^2\theta/2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\cos\theta - \cos(n+1)\theta}{2\sin^2\theta/2} - n\right] \Rightarrow$$

$$z_n = \frac{\cancel{2(}n+1)\sin^2\theta/2 + \cos\theta - \cos(n+1)\theta - \cancel{2n\sin^2\theta/2}}{4(n+1)\sin^2\theta/2} =$$

$\parallel 1-2\sin^2\theta/2$ $\qquad \parallel 1-2\sin^2\frac{(n+1)\theta}{2}$

$$= \frac{2\sin^2\theta/2 + \cos\theta - \cos(n+1)\theta}{4(n+1)\sin^2\theta/2} = \frac{\cancel{2}\sin^2\frac{n+1}{2}\theta}{\overset{2}{\cancel{4}}(n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 \Rightarrow \theta = fix \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

48. 1) $\sigma_{2k-1} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}$, $\sigma = \frac{1}{2}$;
2) $\sigma_n = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)^2$, $\sigma = 0$;

4. Докажите, что если f — функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, а $\{f_n\}$ — последовательность функций, непрерывных на $[a,b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке приведите контрпример):

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\{f_n\} \text{ сходится равномерно к } f} & \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array} & \boxed{\{f_n\} \text{ сходится по норме } L_2 \text{ к } f} & \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array} & \boxed{\{f_n\} \text{ сходится по норме } L_1 \text{ к } f} \\
\not\uparrow\downarrow & & \not\uparrow\not\downarrow & & \not\uparrow\not\downarrow \\
\multicolumn{5}{c}{\boxed{\{f_n\} \text{ сходится поточечно к } f}}
\end{array}$$

Из равном сход-ти следует сход. в среднем квадр.

$\|f_n - f\|_c \to 0$

$\|f_n - f\|_2^2 = \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx \leq \|f_n - f\|_c^2$

$\cdot \int_a^b 1\,dx = (b-a)\|f_n - f\|_c^2 \to 0$

след. $\|f_n - f\|_2 \to 0$

из равном сход. следует сход. в среднем — аналогично

из сход. в среднем квадр следует сход. в среднем

$\|f_n - f\|_2 \to 0$

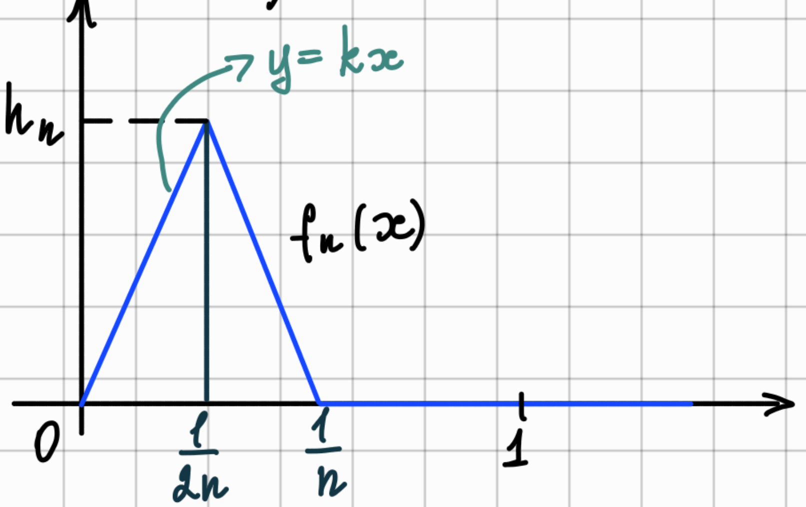
$$\|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n - f| \cdot 1 \, dx \leq \sqrt{\int_a^b |f_n - f|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b 1^2 dx} = \sqrt{b-a} \, \|f_n - f\|_2 \to 0$$

интег нер-во Коши–Буняковского

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \, dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx}$$

в евкл пр-вах

$|(f, g)| \leq |f| \cdot |g|$ $\qquad \int_a^b f(x) g(x) \, dx$ — скал произв. в $\mathcal{L}_c^2[a,b]$



$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$

$\forall x \in [0, 1]$

$\max\limits_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = h_n$ сх. равном. $\Leftrightarrow h_n \to 0$

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - \overset{\overset{0}{\parallel\!\!|}}{f(x)}|\,dx = \frac{h_n}{2n} \to 0$$

сх. в среднем $\Leftrightarrow h_n = o(n)$

$k \cdot \frac{1}{2n} = h_n$; $y = 2n h_n x$

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 2 \int_0^{1/2n} 4n^2 h_n^2 x^2 dx$$

$$= 8n^2 h_n^2 \frac{1}{3} \frac{1}{8n^3} = \frac{h_n^2}{3n} \to 0$$

сх в среднем квадр $h_n = o(\sqrt{n})$

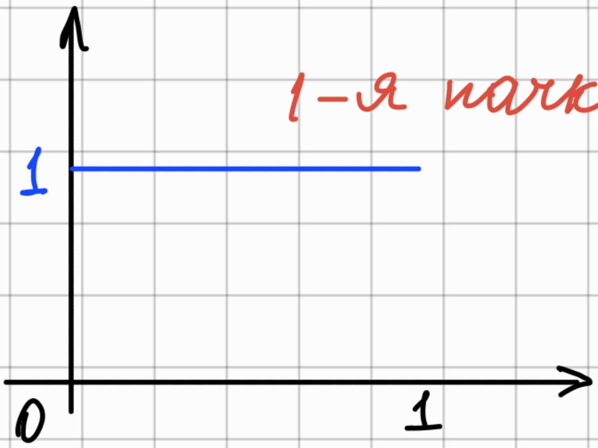
есть сход. в среднем квадр. $\Rightarrow$ нет равномерной $h_n = 1$

есть сход. в среднем $\Rightarrow$ нет в среднем квадрат. $h_n = \sqrt{n}$ нет равномерной

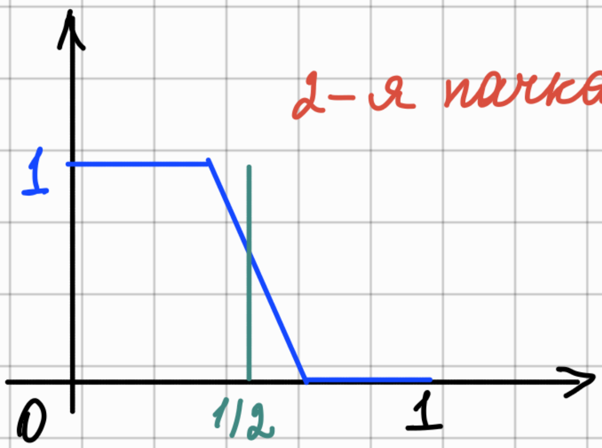
есть поточечная, нет остальных типов $h_n = n$ (или n^2)

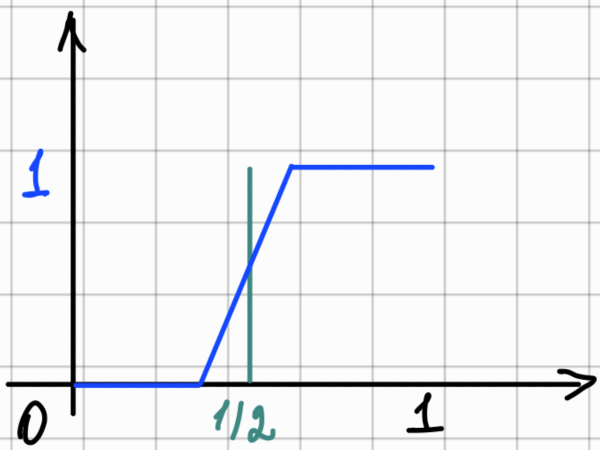
Пример, когда есть сход. в среднем квадр. ($\Rightarrow$ есть сход. в среднем), но нет поточечной

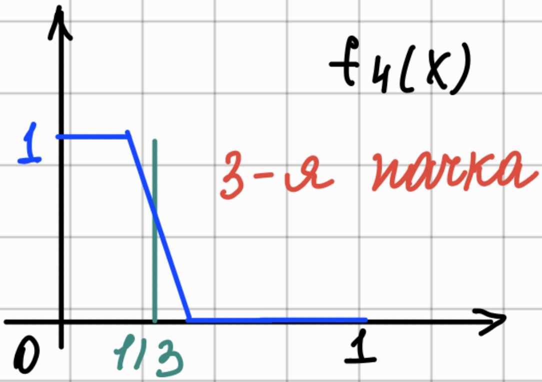
$f_1(x)$

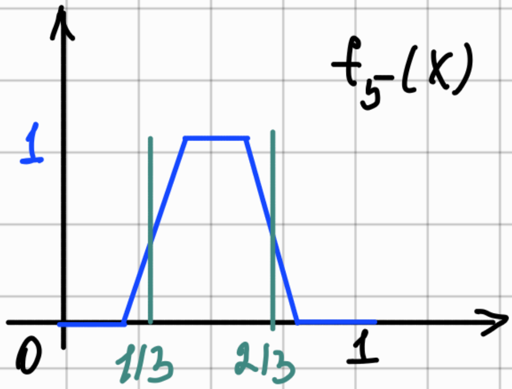


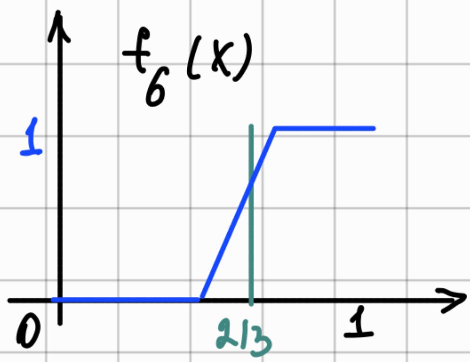
$f_2(x)$











$f_n(x) \to$ в среднем квадр.

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (f_n(x))^2 dx \le \frac{2}{k} \to 0, \ n \to \infty$$

(если не срезать на непр., то $\le \frac{1}{k}$)

Почему нет поточечной сх к $f(x)=0$?

$\forall x \in [0,1]$ сущ сколько угодно больше n, где $f_n(x)=1$

В задачах 87–99 доказать сформулированные утверждения.

97. Подпространство непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a;b]$ (см. задачу 31) не является полным.

$$f_n(x) = n\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2n} \text{ на } [-1,1]$$

$$f(x) = |x| \notin C^1_{[-1,1]}$$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{C[a,b]} \le \max_{[-1,1]} \left| \frac{nx^2}{2} + \frac{1}{2n} - |x| \right| =$$

$$\left.\frac{1}{2n}\right|_{x=0} \to 0 \text{ при } n \to \infty \Rightarrow \text{подпр-во}$$

не явл полным:

в $x=0$ отсутствует производная $f(x)$ и предел фундам. послед $\notin C^1[a,b]$ сх. равном по кр. Коши

f_n сх. по норме к $f(x) \notin C^1_{[a,b]} \Rightarrow$ не явл. полным

98. Пространство $CL_1[a;b]$ (см. задачу 3, 5)) не является полным.

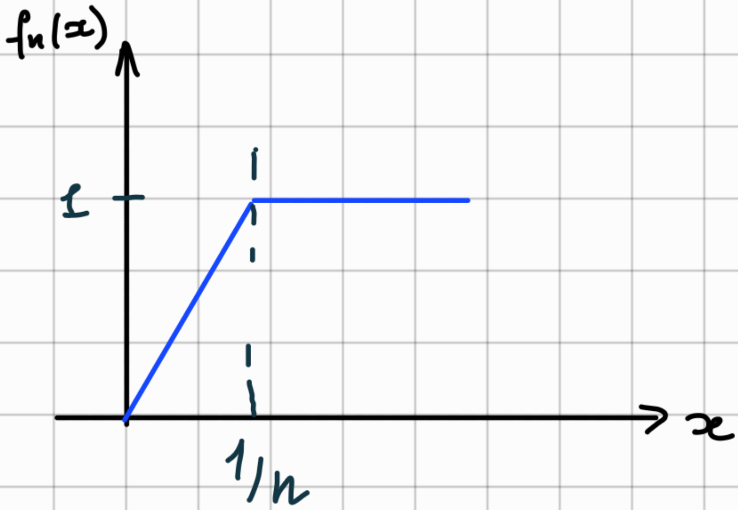
Определение 22.1. Функция f называется абсолютно интегрируемой на промежутке $I \subset \mathbb{R}$, если интеграл (вообще говоря, несобственный с конечным числом особенностей) от функции f по промежутку I абсолютно сходится. Множество функций, абсолютно интегрируемых на промежутке I, обозначается $L_R(I)$ или $L_R^1(I)$.

З а м е ч а н и е. $\int_I f(x)\,dx$ сходится абсолютно, если f интегрируема по Риману на любом конечном отрезке $[a;b] \subset I$, не содержащем особенностей, и $\int_I |f(x)|\,dx$ сходится (иначе говоря, $\int_I f(x)\,dx$ и $\int_I |f(x)|\,dx$ сходятся; см. определения 13.2 и 13.3 и теорему 13.10). Одной сходимости $\int_I |f(x)|\,dx$ мало. Например, функция $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q; \\ -1, & \text{если } x \notin Q \end{cases}$ не интегрируема по Риману ни на каком конечном отрезке (аналогично примеру 12.1), а модуль её интегрируем.

Легко видеть, что $L_R(I)$ образует линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на действительное число (теоремы 13.1 и 13.16). Мы предполагаем, что читатель знаком с основами теории линейных пространств и евклидовых пространств из курса линейной алгебры.

$$CL_1[a,b] = \{ f \in C[a,b],\ \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx \}$$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ nx, & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases}$$



$f_n \in C[-\pi,\pi]$ $\forall n$

почти всюду $f_n \to$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

имеет разрыв в 0

$$\|f_n - f\|_{L_1} = \int_0^{1/n} |1 - nx|\,dx = x - \frac{nx^2}{2}\Big|_0^{1/n} =$$

$= \frac{1}{2n} \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow f_n \to f$ по норме $L_1 \Rightarrow CL_1$ не явл полным

$f_n \in CL_1$ и фундам., сход. к f в норме L_1 : $f \notin CL_1$

5. Полна ли система $\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$ в пространствах

а) $C[-\pi, \pi]$; б) $CL_1[-\pi, \pi]$; в) $C[-1, 1]$?

Теорема 22.11 (Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими многочленами). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-l; l]$, $l > 0$, и $f(l) = f(-l)$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен*

$$T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(A_k \cos \frac{\pi k x}{l} + B_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right)$$

такой, что при всех $x \in [-l; l]$ выполняется неравенство $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$. При этом если $f(x)$ чётна ($\forall\, x \in [-l; l] \longrightarrow f(-x) = f(x)$), то $T(x)$ можно выбрать в виде $T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{N} A_k \cos \frac{\pi k x}{l}$, а если нечётна ($\forall\, x \in [-l; l] \longrightarrow f(-x) = -f(x)$), то в виде $\sum\limits_{k=1}^{N} B_k \sin \frac{\pi k x}{l}$.

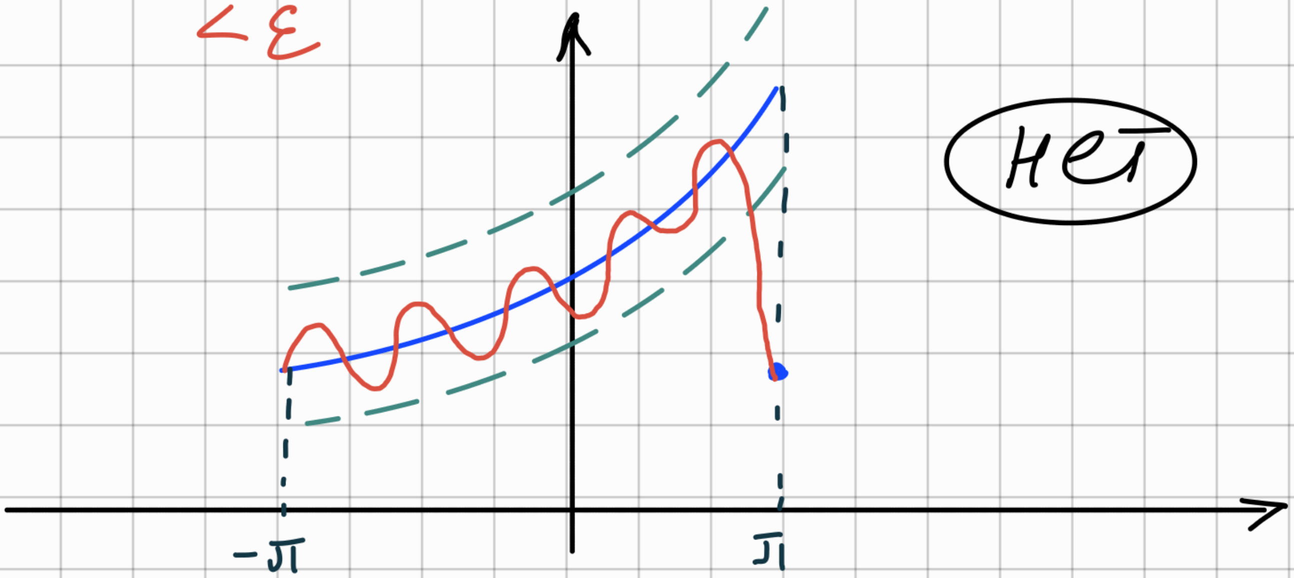
а)

Пусть полна : $\forall \varepsilon > 0$: $\forall f \in C[-\pi, \pi]$ $\exists T(x)$:

$\forall x \in [-\pi, \pi]$ $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$

$$|f(\pi) - f(-\pi)| \le \underbrace{|f(\pi) - T(\pi)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|T(\pi) - T(-\pi)|}_{= 0}$$

$+ \left| \underbrace{T(-\pi) - f(-\pi)}_{<\varepsilon} \right| < 2\varepsilon$



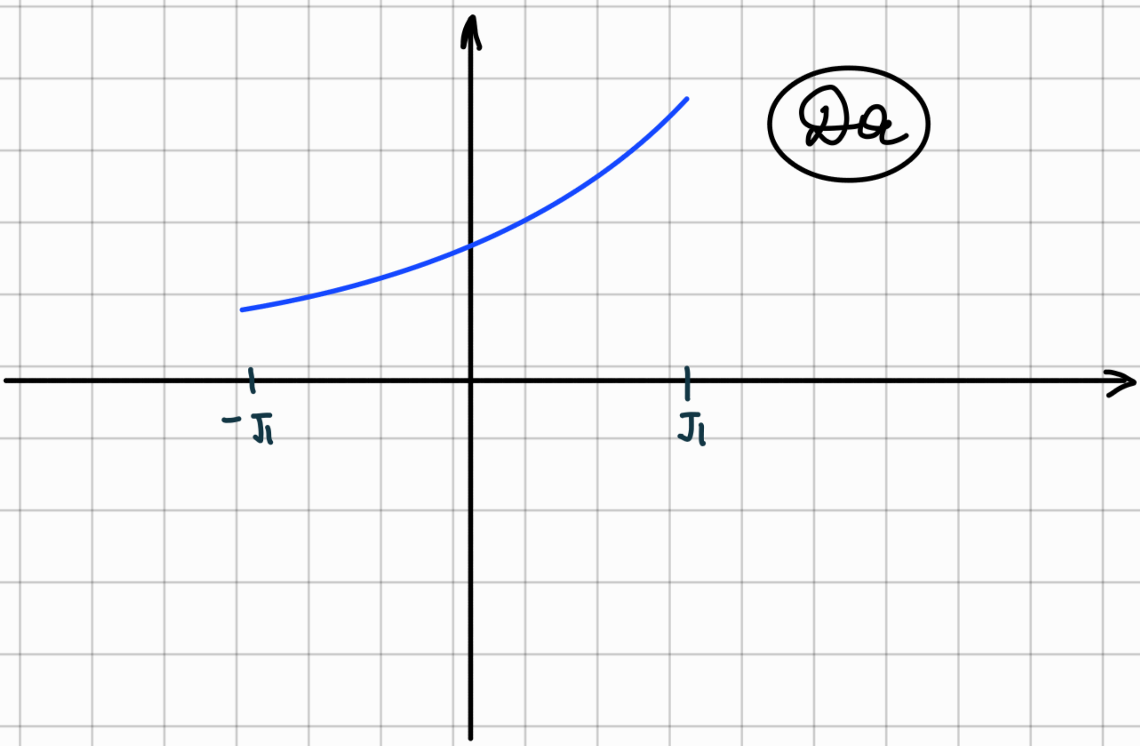
Нет

$\varepsilon > 0$ – произв. $f(\pi) = f(-\pi)$

приблизить можно только такие

ф-ции, что $f(\pi) = f(-\pi)$

б)



Да

поскольку в L_1 есть и кусочно-непр.,

доопред. f: $\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & -\pi < x < \pi \\ \dfrac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}, & x = \pm\pi \end{cases}$ до непрер. $(\|f-\tilde{f}\|_{L_1}=0)$

по Th Вейерштрасса $\forall \varepsilon>0 \ \exists T(x)$:

$\forall x \in [-\pi,\pi] \quad |\tilde{f}(x)-T(x)| < \varepsilon/2\pi$

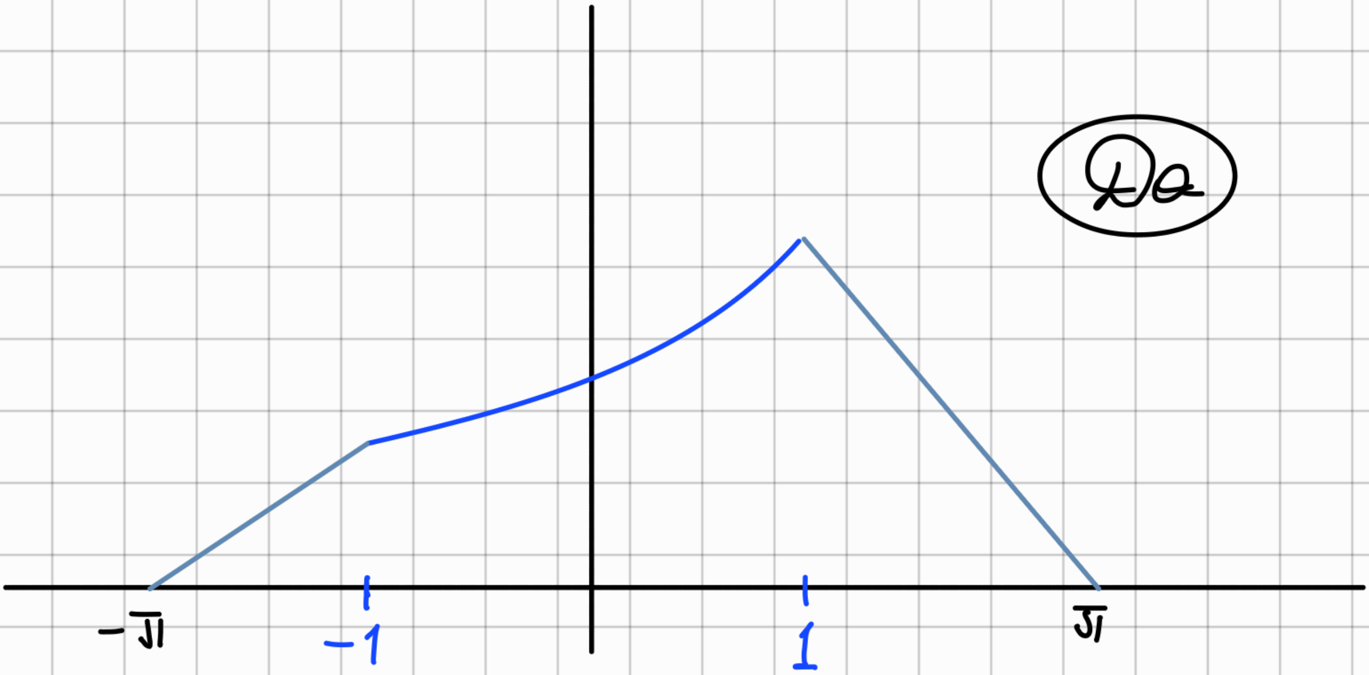
$\forall x \in [-\pi,\pi]$

$$\|\tilde{f}-T\|_{L_1} = \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}-T|\,dx \le \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi}\,dx = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f-T\|_{L_1} = \|\tilde{f}-T\|_{L_1} < \varepsilon$$

в)

Да



Продолжим $f(x)$ по непр-сти на $[-\pi,\pi]$ так, чтобы $f(\pi)=f(-\pi)$

По Th Вейерштрасса

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T(x) \quad \forall x \in [-\pi, \pi] \quad |f(x) - T(x)| < \varepsilon$

с пер. 2π

$\Rightarrow \forall x \in [-1, 1]$

6. Докажите, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах $C[a,b]$, $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$.

Теорема 22.12 (Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует алгебраический многочлен*

$$P(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_N x^N$$

такой, что при всех $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

а) По Th Вейерштрасса $\forall f \in C[a,b]$

$\exists P(x): \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon$

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ сист функций полна в $C[a,b]$

б) $g \in C[a,b]$ и $\|g\|_{L_1} = \int_a^b |g(x)|\,dx$

По Th Вейерштрасса $\forall g \in C[a,b]$

$\exists P(x): \quad |f(x) - P(x)| < \delta \quad \forall x \in [a, b]$

$$\|f - P\|_{L_1} = \int_a^b |f(x) - P(x)|\,dx \leq \delta(b-a)$$

возьмём $\delta = \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, тогда $\forall \varepsilon > 0$

найдётся $P(x)$: $\|f(x)-P(x)\|_{L_1} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ сист полна

в) по нер-ву К-Б: $\|f-P\|_{L_2} \leq \|f-P\|_{L_1}$

$\sqrt{b-a} < \sqrt{b-a}\,\delta$

$$\|g\|_{L_2} = \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx}$$

$|f(x)-P(x)| < \delta \quad \forall x \in [a,b]$

$$\|f-P\|_{L_2}^2 = \int_a^b |f(x)-P(x)|^2 dx \leq (b-a)\,\delta^2$$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}} \Rightarrow \forall f \in CL_2[a,b]$ и $\forall \varepsilon > 0$

$\exists P(x)$: $|f-P(x)| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}$ и $\|f-P\|_{L_2} < \varepsilon$

$\Rightarrow$ сист полна

116. 1) В подпространстве $C^*[-\pi;\pi]$ пространства $C[-\pi;\pi]$ (см. задачу 8), состоящем из таких функций $x(t)$, что $x(-\pi)=x(\pi)$, система

$$\{1; \cos x; \sin x; \ldots; \cos nx; \sin nx; \ldots\}$$

полна, а система $\{1; \cos x; \cos 2x; \ldots; \cos nx; \ldots\}$ не полна;

2) в подпространстве пространства $C[0;\pi/2]$ функций, удовлетворяющих условию $f(0)=0$, система

$$\{\sin x; \sin 3x; \ldots; \sin(2n+1)x; \ldots\}$$

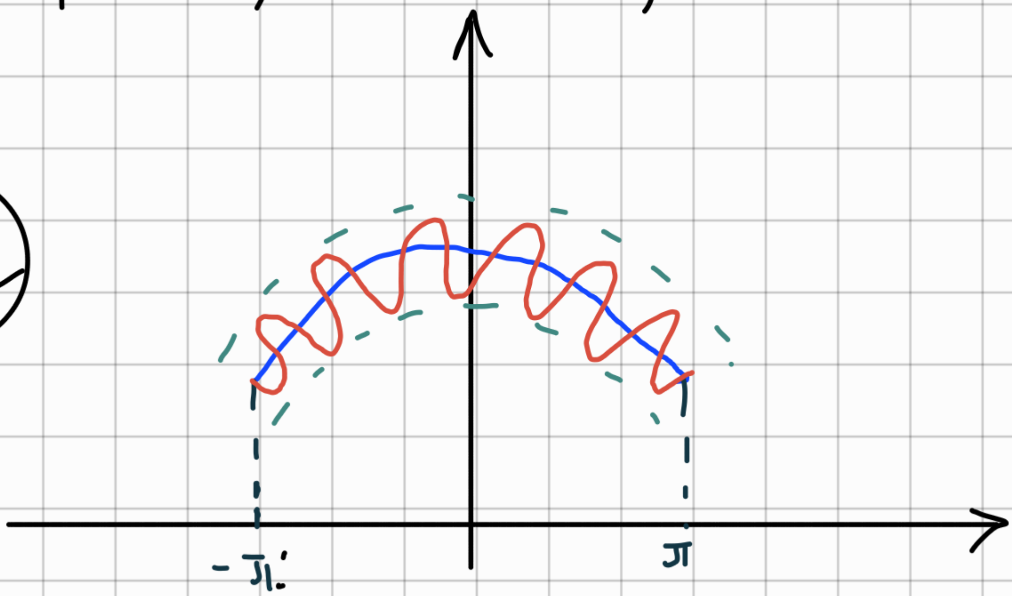
полна.

Полна ли в следующих пр-вах

1) в $C^*[-\pi,\pi] = \{x(t) \mid x(-\pi) = x(\pi)\}$

а) $1, \cos x, \sin x, \dots \cos nx, \sin nx$

Да



$\forall \varepsilon > 0 : \forall f \in C[-\pi, \pi] \ \exists T(x): \forall x \in [-\pi, \pi]$
$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$

$$|f(\pi) - f(-\pi)| \le |\underbrace{f(\pi) - T(\pi)}_{<\varepsilon}| + |\underbrace{T(\pi) - T(-\pi)}_{=0}|$$

$$+ |\underbrace{T(-\pi) - f(-\pi)}_{<\varepsilon}| < 2\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ — произв. $f(\pi) = f(-\pi)$, такие ф-ции можно приблизить, сист полна по Th Вейерштрасса

б) $1, \cos x, \cos 2x, \dots \cos nx$

Нет Можно приб-ть только четные ф-ции

Пусть полна: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists T(x)$ — четная:

$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad |f(x) - T(x)| < \varepsilon$

x – фикс.

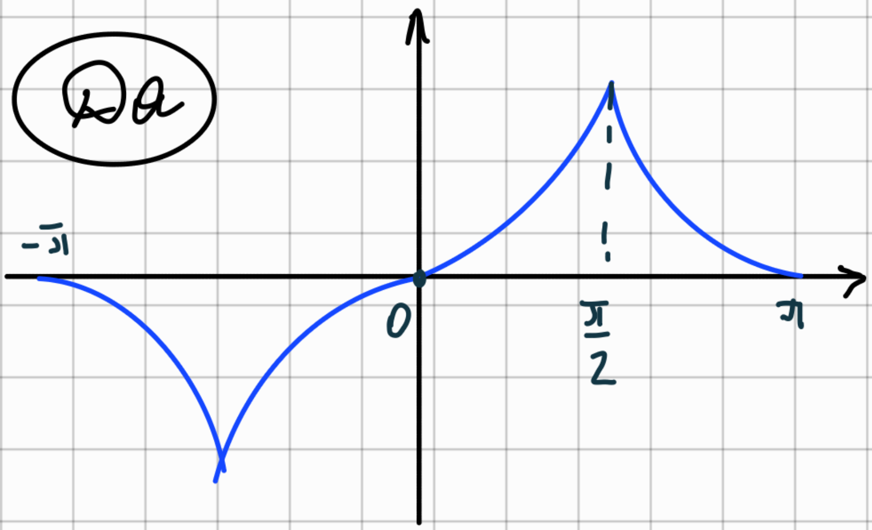
$$|f(x) - f(-x)| \le \underbrace{|f(x) - T(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|T(x) - T(-x)|}_{=0} + \underbrace{|T(-x) - f(-x)|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - f(-x)| < \varepsilon$

$f(x) = f(-x)$ для $\forall$ фикс. x

2) в $C^{+}[0, \frac{\pi}{2}] = \{x(t) : x(0) = 0\}$

Да



Продолжим по четности отн $x = \pi/2$

$f(\pi - x) = f(x), 0 \le x \le \pi/2$

Далее по нечётн.

$f(x)$ непр на $[-\pi, \pi]$,

$f(-\pi) = f(\pi)$

Ост. применить Th. Вейерштрасса, в кач-ве $T(x)$ можно взять суммы Фейера из одних синусов $\sigma_n = \frac{S_0 + \ldots S_n}{n} \rightrightarrows f(x)$

$\Rightarrow$ система полна

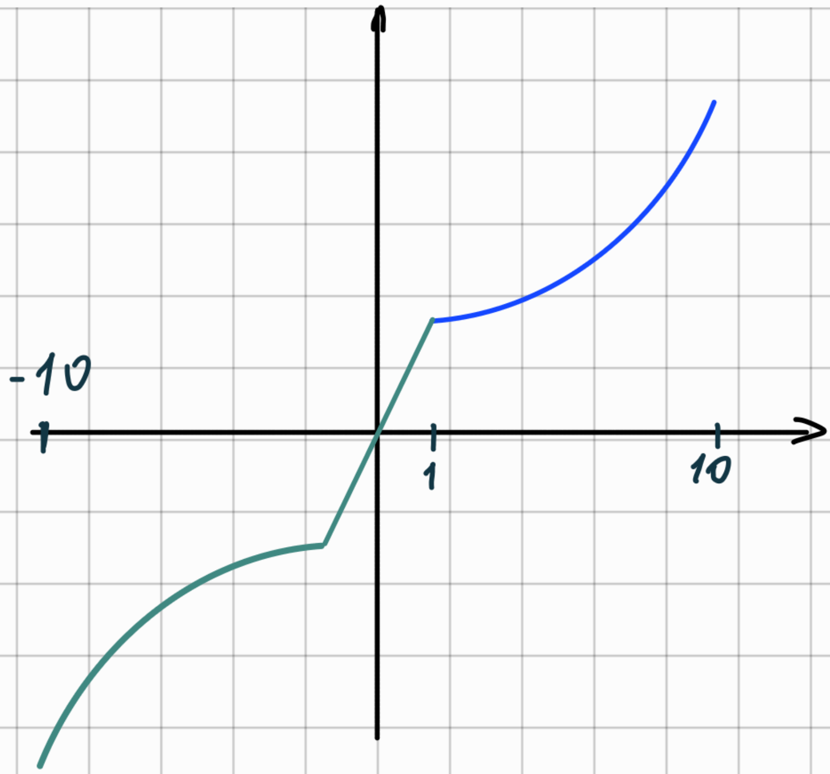
---

7. Полна ли система функций $\{x^{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$ в пространствах

а) $C[1; 10]$; б) $C[0; 2]$?

$x, x^3, \ldots x^{2k-1}$

а)



Да

продолжим до "0" по непрерывн., далее по нечетности на $[-10, 0]$

далее с периодом $2l = 20$, $l = 10$

по Th Вейерштрасса $\exists T(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sin \frac{\pi k x}{10}$

— нечетный как сумма Фурье

$\forall x \in [-10, 10]$ $|f(x) - T(x)| < \varepsilon/2$

$T(x)$ - нечетн аналит ф., далее приближаем $P(x)$ - частичн сумма ряда Маклорена, нечётн алгебр многочлен

$$|T(x) - P(x)| < \varepsilon/2$$

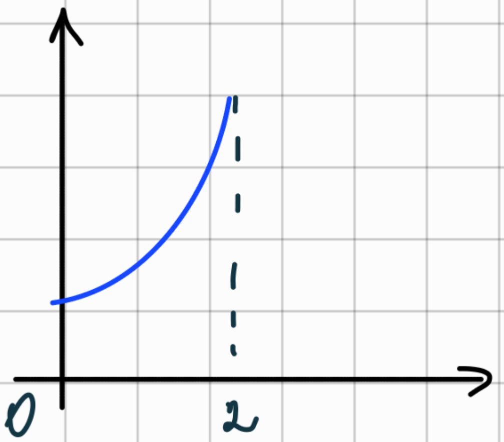
$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{f(x)-f(-x)}{2} - \frac{P_n(x)-P_n(-x)}{2} \right\| \leq \left| \frac{f(x)-P_n(x)}{2} \right|$$

$$+ \left| \frac{f(-x)-P_n(-x)}{2} \right| < \varepsilon \Rightarrow \text{полна}$$

б) Можно приближ. только функции

$f(0) = 0$



$$f \equiv 1 : \quad \|f(x) - P_n(x)\| \geq \|1 - P_n(0)\| = 1 > \varepsilon$$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow$ не полна

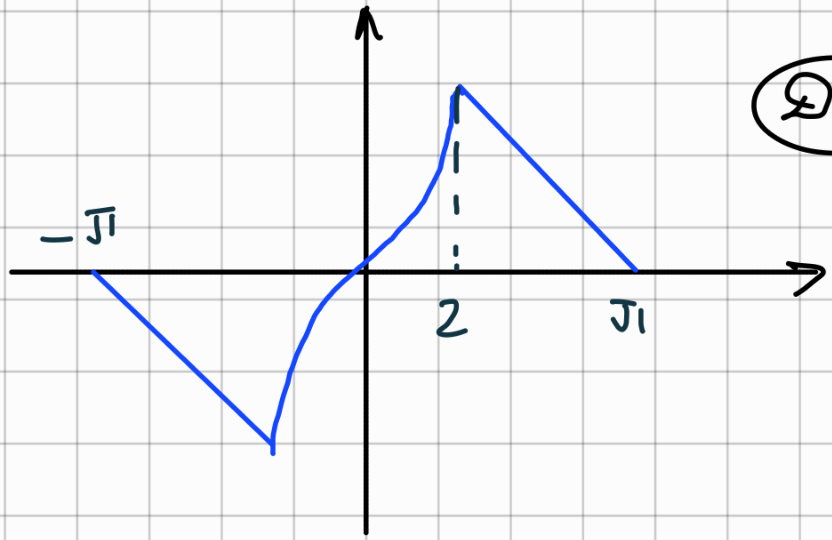
8. Полна ли система функций $\{1\} \cup \left\{x^{2k-1}\right\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $C[0;2]$?

$1, x, x^3, \dots, x^{2k+1}$

$f(x) \in C[0,2] \qquad g(x) = f(x) - f(0) \in C[0,2]$

$g(0) = 0$ продолжим $g(x)$ до непрер. на $[0,\pi]$ $\quad g(\pi) = 0$, далее по нечётности, далее с пер 2π. Непр. на $[-\pi, \pi]$,

$g(-\pi) = g(\pi)$



Да

ПО Th Вейерштрасса $\exists T(x)$ — триг. многочлен

$\forall x \in [-\pi, \pi]$

$|g(x) - T(x)| < \varepsilon/2$ в кач-ве $T(x)$ можно взять сумму Фейера — нечетн. триг. многочлен $T(x)$ — нечетн.

значит ф, R_{cx} ряда Маклорена $+\infty$,

ряд сх. равномерно на $\forall$ кон. отрезке $\Rightarrow$ на $[-\pi, \pi]$

Частичн сумма — нечетн алгебр. многочлен

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists P(x)$ — нечётный $\forall x \in [-\pi, \pi]$

$|T(x) - P(x)| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall x \in [0,2] \to |g(x) - P(x)| < \varepsilon$

$|f(x) - (f(0) + P(x))| < \varepsilon$

многочлен по данной сист.

$Q(x) = f(0) + P(x)$

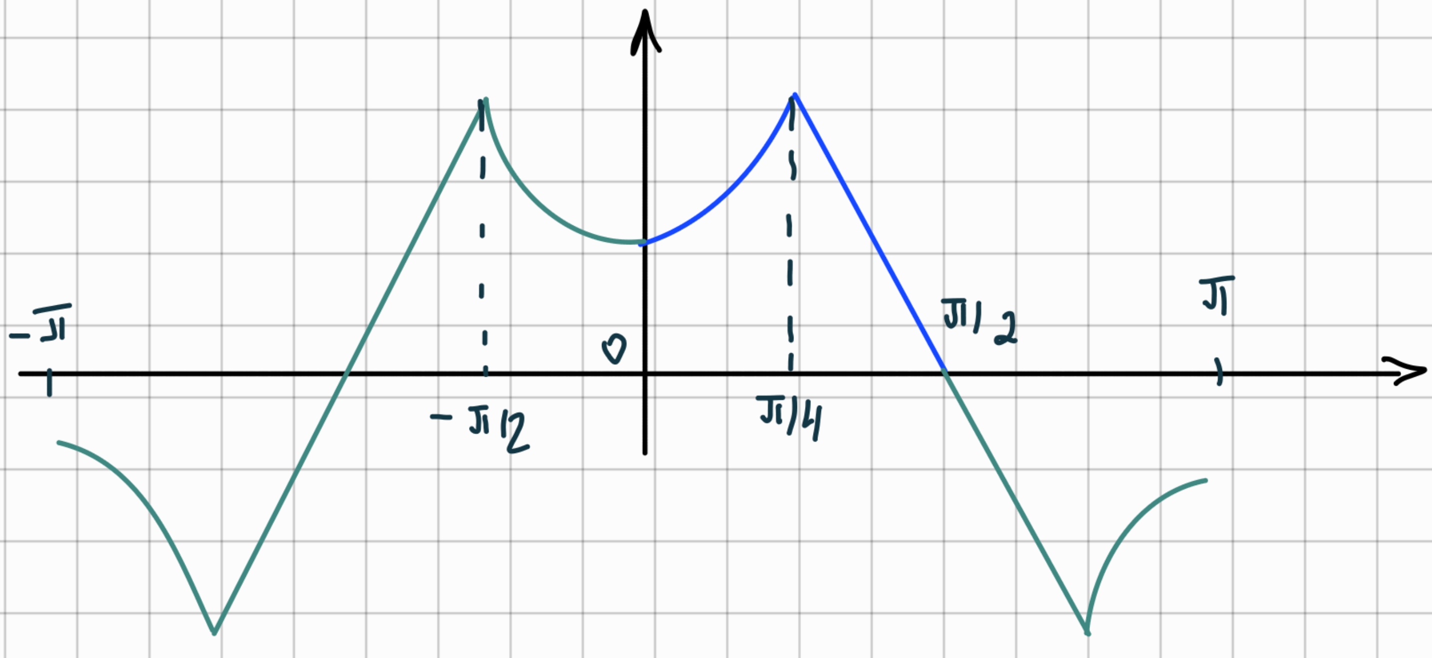
$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon$

9. Полна ли система функций $\{\cos(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространствах

а) $C[0;\pi/4]$; б) $C[\pi/4;\pi/2]$; в) $C[-\pi/8;\pi/8]$?

а) $\cos x, \cos 3x, \ldots \cos(2n+1)x$ в $C[0,\pi/4]$

Да. Продолж по непр. на $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, далее симметр отн точки $\frac{\pi}{2}$ на $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, далее по четности, потом с периодом 2π



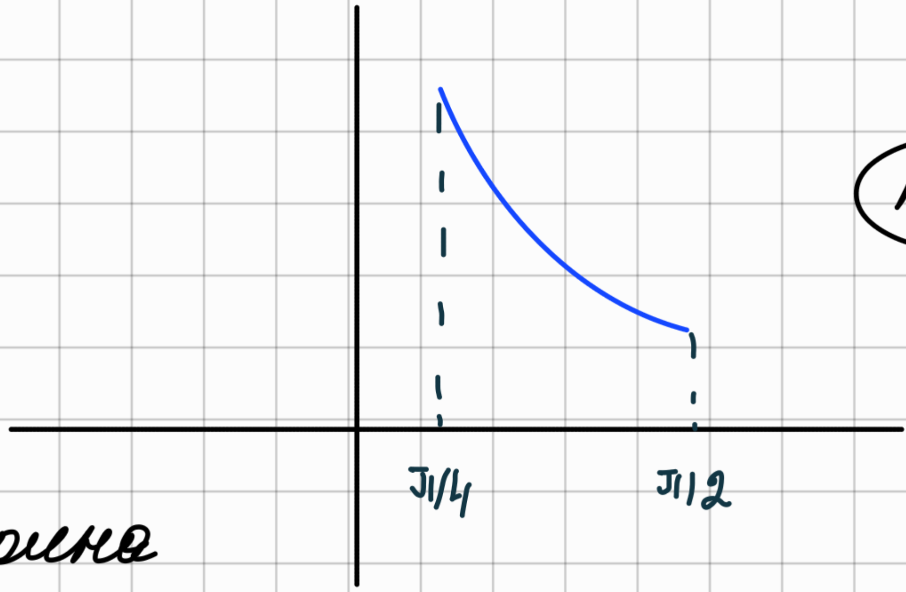
$f(x)$ непр на $[-\pi, \pi]$,

$f(-\pi) = f(\pi)$ Ост. применить Тр. Вейерштрасса

$T(x)$ можно взять суммы Фейера-из одних косинусов

б) Приблизить можно только такие

ф-ции, что $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$



Нет

Пусть можно

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists T(x)$ — по косинусам

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \quad |f(x)-T(x)|<\varepsilon$

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \underbrace{\left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)-T\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|}_{<\varepsilon}+\underbrace{\left|T\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|}_{=0}<\varepsilon$$

$\varepsilon>0$ — любое $\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

6 Приближать можно только четные ф-ции

Пусть можно: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T(x)$ – четный:

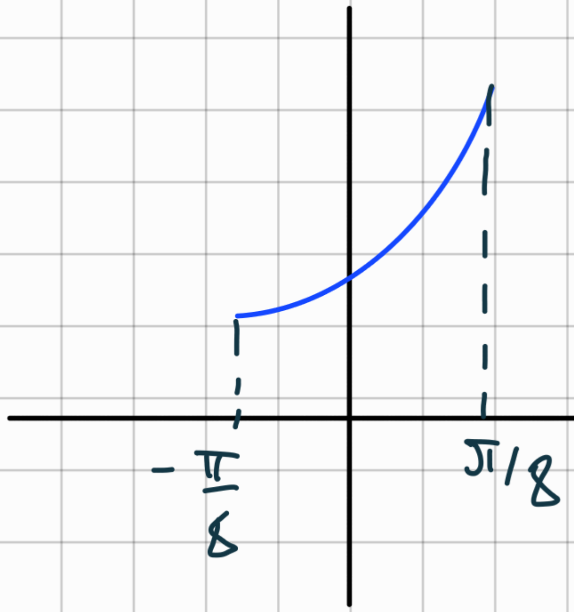
$\forall x \in [-\pi, \pi] \qquad |f(x) - T(x)| < \varepsilon \qquad x$ – фикс.

$$\underbrace{|f(x) - f(-x)| \le |f(x) - T(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|T(x) - T(-x)|}_{0}$$

$$+ \underbrace{|T(-x) - f(-x)|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |f(x) - f(-x)| < \varepsilon$

$f(x) = f(-x)$ для $\forall$ фикс. x



Нет