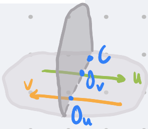
11.1. Показать, что моменты инерции твёрдого тела относительно любых двух параллельных осей u и v связаны соотношением $J_v = J_u + m(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_C)$, где векторы $\mathbf{r} = \overrightarrow{O_u O_v}$ и $\mathbf{r}_C = \overrightarrow{O_u C}$ лежат в плоскости, проходящей через центр масс C тела, перпендикулярно этим осям. Оси u и v пересекают упомянутую плоскость соответственно в точках O_u и O_v.

Дано: $\bar r = \overline{O_u O_v}$

$\bar r_c = \overline{O_u C}$

$u \parallel v$

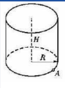
Д-ть: $J_v = J_u + m(\bar r\cdot\bar r - 2\bar r\cdot\bar r_c)$



$$\bar r_v = \bar r_c - \bar r \qquad J_u = J_c + m(\bar r_c\cdot\bar r_c)$$

$$J_v = J_c + m(\bar r_v\cdot\bar r_v) = J_u + m(-\bar r_c\cdot\bar r_c + \bar r_c\cdot\bar r_c - 2\bar r_c\cdot\bar r + \bar r\cdot\bar r) = \boxed{J_u + m(\bar r\cdot\bar r - 2\bar r\cdot\bar r_c)}$$

11.11. Высота однородного кругового цилиндра равна H, радиус его основания – R, а масса – m. Найти главные оси инерции в точке A цилиндра. Для случая $H = \sqrt{3}R$ выписать моменты инерции относительно найденных осей.

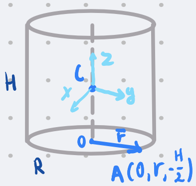


К задаче 11.11

Дано: H, R, m

гл. оси ин −?

$\hat J$ −?



$$\hat J_c = \mathrm{diag}(A, A, C), \quad A = \frac14 mR^2 + \frac1{12} mH^2, \quad C = \frac12 mR^2$$

$$\hat J_A = \hat J_c + m\, j(\bar r), \text{ где } j(\bar r) = E r^2 - \bar r \bar r^T$$

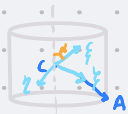
$$\hat J_A = \hat J_C + m\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

при $H = R\sqrt3$: $\hat J_c = \frac12 mR^2\cdot E$, $\quad \hat J_A = \hat J_c + m\, j(\bar r)$, где $j(\bar r) = \begin{pmatrix} a_2^2+a_3^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 \\ & a_1^2+a_3^2 & -a_2a_3 \\ & & a_1^2+a_2^2 \end{pmatrix}$, $j(r) = j(r)^T$

Найдем гл. оси. ин:

ОАС-плоскость симм. ⇒ одна из гл. осей ⊥ ей ($\parallel Ox$)

расположим базис $\xi\eta\zeta$ так, что ось $\zeta \parallel CA$, $\eta \parallel Ox$,



Тогда $\hat J_A$ будет иметь диаг. вид

и $J_{11} = J_{22} = \frac12 mR^2 + m\,CA^2 = \frac12 mR^2 + \frac74 mR^2 = \frac94 mR^2$, $\quad J_{33} = \frac12 mR^2$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{H/2} = \frac{2\sqrt3}{3}} \qquad \boxed{\hat J = \frac14 mR^2\cdot \mathrm{diag}(9, 9, 2)}$$

Найдем α в общем случае!

$$\hat J_A = \frac1m\begin{pmatrix} Am + R^2 + \frac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & Am + \frac{H^2}{4} & \frac12 RH \\ 0 & \frac12 RH & Cm + R^2 \end{pmatrix} = \frac1m\begin{pmatrix} \frac54 R^2 + \frac13 H^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac14 R^2 + \frac13 H^2 & \frac12 RH \\ 0 & \frac12 RH & \frac32 R^2 \end{pmatrix}$$

Найдем угол α такой, что недиаг. эл. $\hat J_A$ обнулятся

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & ca - sb & cb - sd \\ 0 & sa + cb & sb + cd \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & c^2a - 2scb + s^2d & csa - s^2b + c^2b - csd \\ 0 & csa - s^2b + c^2b - csd & c^2a + 2scb + s^2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}$$

$csa - s^2b + c^2b - csd = 0 \Rightarrow \frac{d-a}{2}\sin 2\alpha = b\cos 2\alpha \Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{2b}{d-a} = \frac{RH}{\frac32 R^2 - \frac14 R^2 - \frac13 H^2} = \frac{RH}{\frac54 R^2 - \frac13 H^2} = \boxed{\frac{12RH}{15R^2-4H^2}}$$

При $H = R\sqrt3$: $\operatorname{tg}2\alpha = 4\sqrt3$

11.11. Одна из главных осей перпендикулярна плоскости, проходящей через ось цилиндра и точку A, а две другие лежат в этой плоскости и составляют с образующей цилиндра углы α и $\frac{\pi}{2}-\alpha$, причём $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{12RH}{15R^2-4H^2}$. При $H = R\sqrt3$ имеем $\bar{\bar{J}} = \frac14 mR^2(\mathbf{ii}9+\mathbf{jj}2+\mathbf{kk}9)$.

11.18. Однородный параллелепипед массы m с рёбрами a, b, c вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно своей диагонали OB. Найти кинетическую энергию T параллелепипеда и его момент импульса $\mathbf{K}_A$ относительно произвольной точки A пространства.

Дано: m, a, b, c

$T, \bar K_A - ?$

$$\int_G x^2 dm = \frac{m}{abc}\int_G x^2\,dx\,dy\,dz = \frac{m}{abc}\int_{-c/2}^{c/2}dz\int_{-b/2}^{b/2}dy\int_{-a/2}^{a/2}x^2dx = \frac{ma^2}{12}$$

$$J_{xx} = \int_G (y^2+z^2)\,dm = \frac1{12}m(b^2+c^2) \Rightarrow \hat J = \frac{m}{12}\cdot\operatorname{diag}(b^2+c^2,\ a^2+c^2,\ a^2+b^2)$$

$$\bar\omega = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}\cdot\omega\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow \bar K_A = \hat J\cdot\bar\omega \Rightarrow \boxed{\bar K_A = \frac{m\omega}{12\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} b^2+c^2\\ a^2+c^2\\ a^2+b^2\end{pmatrix}}$$

11.18. $K_{AX} = \frac{ma\omega(b^2+c^2)}{12\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $K_{AY} = \frac{mb\omega(a^2+c^2)}{12\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $K_{AZ} = \frac{mc\omega(a^2+b^2)}{12\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $T = \frac{m\omega^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{12(a^2+b^2+c^2)}$.

$$T = \frac12\bar\omega^T\hat J\bar\omega = \frac{m\omega^2}{24(a^2+b^2+c^2)}\cdot\left(a^2(b^2+c^2)+b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2+b^2)\right) = \boxed{\frac{m\omega^2}{12}\cdot\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{a^2+b^2+c^2}}$$

$$T = \frac12 J_\omega\omega^2 = \frac12\boldsymbol{\omega}^\top\hat J_o\boldsymbol{\omega} = \frac12(\boldsymbol{\omega}, \hat J_o\boldsymbol{\omega}) = \frac12(Ap^2+Bq^2+Cr^2)$$

11.23. Однородная квадратная пластина массы m вращается с угловой скоростью ω вокруг диагонали AC прямоугольной рамы $ABCD$. Диагональ рамы AC проходит через центр масс пластины O и лежит в её плоскости. Рама вращается вокруг неподвижной оси AB с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Найти кинетическую энергию T пластины, если её сторона равна a, $AB = b$, $\angle BAC = \alpha$, $AO = OC$. В начальный момент плоскости пластины и рамы совпадали.

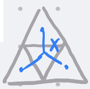
11.24. Решить задачу 11.23 для однородной треугольной пластины со сторонами a.

Дано: m, ω, Ω

a, b, α,

$T - ?$

Найдем $\hat J_0$ для Δ:

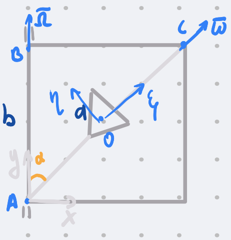


$J_{33} \sim mr^2 \sim r^4$

$J_{33}' = \frac1{16}J_{33}$ - мом. ин. мал. Δ отн всего

по Th. Г-Ш: $J_{33} = \frac{4}{16}J_{33} + \frac{3m}{4}x^2 \Rightarrow J_{33} = mx^2$

h - выс. мал $\Delta \Rightarrow x = \frac23 h = \frac23\frac{a\sqrt3}{4} = \frac{a}{2\sqrt3} \Rightarrow J_{33} = \frac{ma^2}{12}$, $J_{11} = J_{22} = \frac{ma^2}{24}$



$$T = \frac12 mV_0^2 + \frac12\bar\omega^T\hat J_0\bar\omega$$

$$\bar V_0 = \bar\Omega\times\bar{AO} \Rightarrow V_0^2 = \frac12\cdot\frac{b}{\cos\alpha}\cdot\Omega\sin\alpha = \frac12\Omega b\operatorname{tg}\alpha$$

$$\bar\omega_a = \bar\omega + \bar\Omega = \begin{pmatrix}\Omega\cos\alpha+\omega\\ \Omega\cos\alpha\cos\omega t\\ \Omega\sin\alpha\sin\omega t\end{pmatrix}$$

$$T_{вр} = \frac{ma^2}{2\cdot 24}\left(\Omega^2\cos^2\alpha + 2\omega\Omega\cos\alpha + \omega^2 + \Omega^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t + 2\Omega^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t\right) =$$

$$= \frac{ma^2}{48}\left(\omega^2 + 2\omega\Omega\cos\alpha + \Omega^2(1+\sin^2\alpha\sin^2\omega t)\right)$$

$T = \frac{1}{2}J_\omega\omega^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\top \hat{J}_o\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \hat{J}_o\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$

11.24. $T = \frac{mb^2}{8}\Omega^2\mathrm{tg}^2\alpha + \frac{ma^2}{48}\left[\omega^2 + 2\omega\Omega\cos\alpha + \Omega^2\left(1+\sin^2\alpha\sin^2\omega t\right)\right]$.

$$\boxed{T = \frac{1}{8}mb^2\Omega^2\mathrm{tg}^2\alpha + \frac{ma^2}{48}\left(\omega^2 + 2\omega\Omega\cos\alpha + \Omega^2(1+\sin^2\alpha\sin^2\omega t)\right)}$$

11.32. Показать, что для твёрдого тела с неподвижной точкой кинетическая энергия сохраняется в том и только в том случае, когда во всё время движения вектор момента импульса $\mathbf{K}_O$ и вектор углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ ортогональны.

Дано: Неподв. т.
Д-ть: $T = const \Leftrightarrow \bar{K}_0 \perp \bar{\mathcal{E}}$

В неподв. базисе: $\bar{K}_0 = \hat{J}\bar{\omega}$, но $J \neq const \Rightarrow$

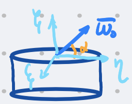
В баз. гл. осей: $\bar{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, $\bar{K}_0 = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}$ $\quad \dot{\bar{K}}_0 = \frac{d'\bar{K}_0}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{K}_0 \quad \bar{\mathcal{E}} = \dot{\bar{\omega}} = \frac{d'\bar{\omega}}{dt}$

равны

$$T = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\bar{K}_0 \Rightarrow 2\dot{T} = \dot{\bar{\omega}}\cdot\bar{K}_0 + \bar{\omega}\cdot\dot{\bar{K}}_0 = \bar{\mathcal{E}}\cdot\bar{K}_0 + \bar{\omega}\cdot\frac{d'\bar{K}_0}{dt} + \underbrace{\bar{\omega}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{K}_0)}_{0} = 2\bar{\mathcal{E}}\cdot\bar{K}_0$$

$$T = const \Leftrightarrow \bar{K}_0 \perp \bar{\mathcal{E}}$$

11.61. Однородному круговому цилиндру (высота h, радиус основания R), который может двигаться вокруг своего неподвижного центра масс, сообщается вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ вокруг оси, образующей угол α с плоскостью основания цилиндра. Определить движение цилиндра.



11.61. Регулярная прецессия с параметрами:
$\dot{\psi} = \omega_0\sqrt{1 + \frac{36R^4\mathrm{tg}^2\alpha}{\left(h^2+3R^2\right)^2}}\cos\alpha$, $\dot{\varphi} = \frac{h^2 - 3R^2}{h^2+3R^2}\omega_0\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{6R^2\mathrm{tg}\,\alpha}{h^2+3R^2}$.

Дано: $h, R, \bar{\omega}, \alpha$
движ-?

Случай Эйлера, $A = B = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2$, $C = \frac{1}{2}mR^2$

$$\cos\theta = \frac{Cr_0}{K_0}$$
$$\dot{\psi} = \frac{K_0}{A}$$
$$\dot{\varphi} = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right)$$

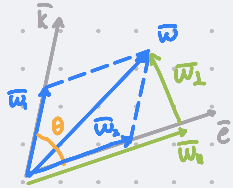
$$\bar{K} = \hat{J}\bar{\omega} = \mathrm{diag}(A,A,C)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\omega\cos\alpha \\ C\omega\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\dot{\psi} = \frac{K}{A} = \frac{\sqrt{A^2\omega^2\cos^2\alpha + C^2\omega^2\sin^2\alpha}}{A} = \omega\cos\alpha\sqrt{1 + \frac{C^2}{A^2}\mathrm{tg}^2\alpha} = \boxed{\omega\cos\alpha\sqrt{1 + \frac{36R^4\mathrm{tg}^2\alpha}{(h^2+3R^2)^2}}}$$

$$\dot{\varphi} = r\cdot\frac{A-C}{A} = \omega\sin\alpha\cdot\frac{\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 - \frac{1}{2}mR^2}{\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2} = \boxed{\omega\sin\alpha\cdot\frac{h^2 - 3R^2}{h^2+3R^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{Cr}{K} = \frac{C\omega\sin\alpha}{\sqrt{A^2\omega^2\cos^2\alpha + C^2\omega^2\sin^2\alpha}}, \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{A\omega\cos\alpha}{C\omega\sin\alpha} = \boxed{\frac{6R^2\mathrm{tg}\,\alpha}{h^2+3R^2}}$$

11.75. Симметричное твёрдое тело $(A=B\neq C)$ с неподвижной точкой O совершает регулярную прецессию. Показать, что вектор момента импульса определяется выражением $\mathbf{K}_O=\left[C+(C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right]\boldsymbol{\omega}_1+A\boldsymbol{\omega}_2$, где $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ – векторы угловых скоростей собственного вращения и прецессии соответственно, а θ – угол между ними. Используя это соотношение, получить выражение для момента импульса $\mathbf{K}_O$ в случае движения симметричного твёрдого тела по инерции.



В гл. осях: $\bar K=\hat J\bar\omega$, $\hat J=\begin{pmatrix}A & & \\ & A & \\ & & C\end{pmatrix}$

$\bar\omega=\bar\omega_1+\bar\omega_2=\bar\omega_\parallel+\bar\omega_\perp$, где $\bar\omega_\parallel$ – по оси динамич. симметрии, $\bar\omega_\perp$ – в пл. дин. сим.

$$\bar\omega=\bar\omega_2+\bar e\omega_1\cos\theta-\bar e\omega_1\cos\theta+\bar\omega_1$$

$$\bar K=C\left(\bar\omega_2+\bar\omega_2\frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\theta\right)+A\left(\bar\omega_1-\bar\omega_2\frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\theta\right)=\left(C+(C-A)\frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\theta\right)\bar\omega_2+A\bar\omega_1$$

11.91. Оси $O\xi\eta\zeta$ являются главными осями инерции твёрдого тела. Моменты инерции тела относительно этих осей равны A,B,C. Найти центробежные моменты инерции для системы осей $Oxyz$, повёрнутых вокруг оси $O\zeta$ на угол α.

11.91. $J_{xy}=(A-B)\sin\alpha\cos\alpha,\quad J_{yz}=0,\quad J_{zx}=0$.

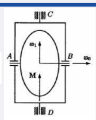
$$S=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \hat J=\mathrm{diag}(A,B,C)$$

$$\hat J'=S^T\hat J S=\begin{pmatrix}c & -s & 0\\ s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A & 0 & 0\\ 0 & B & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c & s & 0\\ -s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Ac & -sB & 0\\ As & cB & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c & s & 0\\ -s & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\hat J'=\begin{pmatrix}Ac^2+s^2B & Asc-Bsc & 0\\ Asc-Bsc & As^2+Bc^2 & 0\\ 0 & 0 & C\end{pmatrix}$$

$J_{xy}=(A-B)\sin\alpha\cos\alpha,\ J_{yz}=0,\ J_{zx}=0$

11.113. Велосипедное колесо радиуса r и массы m, равномерно распределённой по ободу, установлено в раме. Колесо вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ вокруг своей оси AB. Рама вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ вокруг оси CD, перпендикулярной оси AB. Определить динамические реакции в подшипниках C и D рамы, если расстояние $CD=l$.

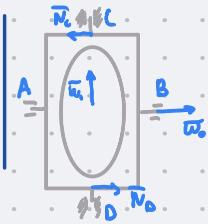


К задаче 11.113

$\mathrm{M}_C=(\dot\psi_0\times\dot\varphi_0)\left(C+(C-A)\frac{\dot\psi_0}{\dot\varphi_0}\cos\theta_0\right)$

11.113. $F_C=F_D=\frac{mr^2}{l}\omega_0\omega_1$.

Дано:
$r, m, \bar\omega_0, \bar\omega_1, \ell$
N_C, N_D – ?



$$M_D=\ell N_D=(\bar\omega_1\times\bar\omega_0)\left(C+(C-A)\frac{\omega_1}{\omega_0}\cos\theta\right)=\omega_1\cdot\omega_0\cdot C=mr^2\omega_0\omega_1$$

$$m w_c=R\Rightarrow N_D=-N_C=\frac{mr^2}{\ell}\omega_0\omega_1$$

11.132. Симметричное твёрдое тело с неподвижной точкой O, для которой главные моменты инерции равны $A=B\neq C$, движется в однородном поле тяжести. Масса тела равна m, а его центр тяжести лежит на оси динамической симметрии на расстоянии l от неподвижной точки (случай Лагранжа). В начальный момент углы Эйлера и их первые производные по времени равны

1. $\psi(0)=0,\ \varphi(0)=0,\ \theta(0)=\frac{\pi}{2}$,

$\dot\psi(0)=2\sqrt{\frac{mgl}{A}},\ \dot\theta(0)=0\ \dot\varphi(0)=\frac{\sqrt{Amgl}}{C}$;

Угол нутации θ отсчитывается от оси, направленной вертикально вверх. В каких пределах будет изменяться угол θ в последующем движении тела? Изобразить след оси симметрии тела на сфере с центром в неподвижной точке.

Добавить вывод

$A\dot\psi\sin^2\theta+H\cos\theta=K$.

$H=Cr=C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)$.

$A(\dot\theta^2+\dot\psi^2\sin^2\theta)+2mgL\cos\theta=2E$.

$$K = A\dot\psi\sin^2\theta + H\cos\theta \overset{t=0}{=} \sqrt{4Amgl}, \quad \dot\psi = \frac{K-Hu}{A(1-u^2)}$$

$$H = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) \overset{t=0}{=} \sqrt{Amgl}$$

$$u = \cos\theta, \quad \dot u = -\dot\theta\sin\theta \Rightarrow \dot\theta = -\frac{\dot u}{\sin\theta} \qquad 2E = A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta) + 2mgl\cos\theta \overset{t=0}{=} 4mgl$$

$$A\left(\frac{\dot u^2}{1-u^2} + \frac{(K-Hu)^2}{A^2(1-u^2)}\right) + 2(mglu - E) = 0 \ \backslash \cdot A(1-u^2)$$

$$A^2\dot u^2 + (K-Hu)^2 + 2A(1-u^2)(mglu-E) = 0$$

$$A^2\dot u^2 + mglA(2-u)^2 + 2Amgl(1-u^2)(u-2) = 0$$

$$f(u) = (2-u)^2 - 2(1-u^2)(2-u) \le 0$$

$$(2-u)(2-u-2-2u^2) \le 0 \qquad u(2-u)(1-2u) \ge 0$$

На отр $[-1,1]$ только $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\dot\psi = \frac{K-Hu}{A(1-u^2)} = \frac{\sqrt{Amgl}}{A} \cdot \frac{2-u}{1-u^2} > 0, \text{ при } \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$

11.132. 1) $\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\dot\psi > 0$;

Т6 (случай Горячева - Чаплыгина). Твердое тело массы m движется в однородном поле тяжести. Главные моменты инерции для неподвижной точки O в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ равны $A = B = 4C$, а центр масс тела C лежит на оси ξ_1 на расстоянии l от неподвижной точки. В начальный момент времени проекция кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ на вертикаль равна нулю: $\boldsymbol{K}_O \cdot \gamma|_{t=0} = 0$, где $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$ – орт вертикали. Показать, что уравнения Эйлера допускают интеграл

$$Cr(p^2+q^2) - mglp\gamma_3 = \text{const}.$$

$$E = T' + \Pi = \frac{1}{2}A(p^2+q^2) + mgL\cos\theta = \text{const}.$$

Подставляя выражение (5.21) в уравнение (5.20), получим следующие уравнения, называемые *динамическими уравнениями Эйлера*:

$$\mathbf{J}_O\dot{\boldsymbol\omega} + \boldsymbol\omega \times \mathbf{J}_O\boldsymbol\omega = \mathbf{M}_O^{\text{ex}}. \qquad (5.22)$$

Дано: $\hat J = \text{diag}(4C, 4C, C)$

$K(0) = 0$

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$

Д-ть: $Cr(p^2+q^2) - mglp\gamma_3 = \text{const}$

$$J_0\dot{\bar\omega} + \bar\omega \times \bar K_0 = \bar M$$

угловой скорости тела, если моменты инерции тела относительно главных осей $Oxyz$ равны A, B, C.

Решение. Закон изменения кинетического момента относительно неподвижной точки принимает следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}_0$$

так как $\mathbf{M}_0 = \mathbf{const}$, то кинетический момент следующим образом зависит от времени $\mathbf{K} = \mathbf{M}_0 t + \mathbf{K}_0$ ($\mathbf{K}_0$ - начальный кинетический момент). Поскольку в начальный момент тело покоилось, то $\mathbf{K}_0 = 0$.

Пусть тело вращается с угловой скоростью $\boldsymbol\omega = (p, q, r)^\top$, а его тензор инерции относительно неподвижной точки $\hat J$.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix} = \hat J\boldsymbol\omega = \mathbf{M}_0 t \Rightarrow \mathbf{M}_0 = \frac{\hat J\boldsymbol\omega}{t} \qquad (5)$$

Движение твердого тела с неподвижной точкой описывается динамическими уравнениями Эйлера

$$\begin{pmatrix} A\dot p \\ B\dot q \\ C\dot r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0^\xi \\ M_0^\eta \\ M_0^\zeta \end{pmatrix}$$

В данной задаче будет удобнее запись в виде выражения для абсолютной производной.

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{\tilde d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol\omega \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_0 \Leftrightarrow \hat J\dot{\boldsymbol\omega} + [\boldsymbol\omega \times \hat J\boldsymbol\omega] = \mathbf{M}_0 \qquad (6)$$

сделаем следующую замену:

$$\boldsymbol\omega(t) = g(t)\boldsymbol\Omega(\tau)$$

тогда

$$\dot{\boldsymbol\omega} = \dot g(t)\boldsymbol\Omega(\tau) + g(t)\dot{\boldsymbol\Omega}(\tau)\dot\tau$$

подставим полученное выражение в (6)

$$\hat J\dot g(t)\boldsymbol\Omega(\tau) + \hat J g(t)\dot{\boldsymbol\Omega}(\tau)\dot\tau + [g(t)\boldsymbol\Omega(\tau) \times \hat J g(t)\boldsymbol\Omega(\tau)] = \mathbf{M}_0$$

$$\hat J\dot{\boldsymbol\Omega}(\tau)g(t)\dot\tau + g^2(t)[\boldsymbol\Omega(\tau) \times \hat J\boldsymbol\Omega(\tau)] = \mathbf{M}_0 - \hat J\dot g(t)\boldsymbol\Omega(\tau) \overset{(5)}{=} \hat J\frac{\boldsymbol\omega}{t} - \dot g(t)\hat J\boldsymbol\Omega(\tau) \qquad (7)$$

Пусть $g(t) = t, \tau = t^2/2$, тогда $\boldsymbol\omega(t) = t\boldsymbol\Omega(\tau), \dot g(t) = 1$ и (7) примет следующий вид

$$\hat J\dot{\boldsymbol\Omega}(\tau) + [\boldsymbol\Omega \times \hat J\boldsymbol\Omega(\tau)] = 0$$

Получили уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой для случая Эйлера (правая часть равна нулю), которые имеют решение. Начальные условия для решения этих уравнений следующие:

так как

Углова[…] ции записывается в виде $\boldsymbol\omega = p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2 + r\mathbf{e}_3$, а кинетический момент для динамически симметричного тела выражается формулой

$$\mathbf{K}_O = Ap\mathbf{e}_1 + Aq\mathbf{e}_2 + Cr\mathbf{e}_3 = A\boldsymbol\omega + (C-A)r\mathbf{e}_3. \qquad (5.25)$$

Выражая из этой формулы угловую скорость тела

$$\boldsymbol\omega = \frac{\mathbf{K}_O}{A} + \frac{A-C}{A}r\mathbf{e}_3, \qquad (5.26)$$

получим на основании формулы Эйлера $\dot{\mathbf{e}}_3 = \boldsymbol\omega \times \mathbf{e}_3$ следующее уравнение:

$$\dot{\mathbf{e}}_3 = \frac{\mathbf{K}_O \times \mathbf{e}_3}{A}. \qquad (5.27)$$

В качестве второго уравнения возьмем теорему об изменении кинетического момента $\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O$.

В итоге получим систему из двух векторных уравнений:

В рассматриваемой задаче момент внешних сил выражается формулой $\mathbf{M}_O = mgL\mathbf{i}\times\mathbf{e}$, где $\mathbf{i}$ – единичный вектор восходящей вертикали, а уравнения (5.28) принимают вид

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{K}_O \times \mathbf{e}}{A}, \quad \dot{\mathbf{K}}_O = mgL\mathbf{i}\times\mathbf{e}. \tag{5.38}$$

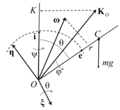


Рис. 5.10

Обозначим через $K = \mathbf{K}_O \cdot \mathbf{i}$ проекцию кинетического момента на вертикаль. Тогда из второго уравнения (5.38) получим

$$\dot{K} = \dot{\mathbf{K}}_O \cdot \mathbf{i} = mgL(\mathbf{i}\times\mathbf{e})\cdot\mathbf{i} = 0 \;\Rightarrow\; K = \text{const}. \tag{5.39}$$

Проекцию кинетического момента на ось симметрии обозначим через H. Она выражается формулой $H = \mathbf{e}\cdot\mathbf{K}_O = Cr$, а ее производная по времени, вычисленная в силу уравнений (5.38), равна нулю:

$$\dot{H} = \dot{\mathbf{e}}\cdot\mathbf{K}_O + \mathbf{e}\cdot\dot{\mathbf{K}}_O = 0 \;\Rightarrow\; H = Cr = \text{const}. \tag{5.40}$$

В рассматриваемом случае Лагранжа сохраняется также полная энергия волчка, поскольку сила тяжести консервативна, а реакция опоры приложена в неподвижной точке. Учитывая закон сохранения (5.40), интеграл энергии можно записать в виде

$$E = T' + \Pi = \frac{1}{2}A(p^2+q^2) + mgL\cos\theta = \text{const}. \tag{5.41}$$

Здесь $T' = T - Cr^2/2$, а p и q – проекции угловой скорости волчка на плоскость динамической симметрии.

Значения постоянных K, H и E в уравнениях (5.39) – (5.41) определяются начальными условиями движения.

Покажем, что первые интегралы (5.39) – (5.41) позволяют получить аналитическое решение задачи о движении волчка Лагранжа в конечной форме.

Зададим положение волчка углами Эйлера (рис. 5.10), где ψ – угол поворота вокруг вертикали (угол прецессии), θ – угол пово-

---

12.3. Определить число степеней свободы системы, состоящей из двух волчков, установленных один на другом, как показано на рисунке. Точка опоры нижнего волчка неподвижна.

К задаче 12.3

Нижн. волчок: $A \in SO(3)$ - матр. опр. ориент. $\xi_1\eta_1\zeta_1$ отн. Xyz: $A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3)$

Множество таких матр задается 6-ю ур-ми: $\begin{cases} |\bar{a}_1| = 1 \\ |\bar{a}_2| = 1 \\ \bar{a}_1\cdot\bar{a}_2 = 0 \\ \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \bar{a}_3 \end{cases}$ - 3 скал. ур-я

Верхний волчок: $B \in SO(3)$ - матр. опр ориент. $\xi_2\eta_2\zeta_2$ отн $\xi_1\eta_1\zeta_1$

аналогично м. A получаем 6 ур-ний.

Число ст. св = разм. конф. многообр $\boxed{n = \underbrace{18}_{\text{разм. пр-ва}} - \underbrace{12}_{\text{число ур.}} = 6}$

Числом степеней свободы механической системы называется разность между размерностью S вектора $\mathbf{R}$, задающего положение системы без связей, и числом m *независимых* связей, наложенных на систему:

$$n = S - m. \tag{6.13}$$

12.3. Шесть.

12.7. Свободная материальная точка движется под действием силы $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z$. Определяя положение точки

б) сферическими $(x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta)$, координатами, найти соответствующие обобщённые силы.

$$Q_i = \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i}, \quad i = \{r, \theta, \varphi\}$$

$$Q_k = \sum_j \mathbf{F}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}; \quad k = 1, \ldots, n.$$

$$Q_r = F_x \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$Q_\theta = F_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} =$$

$$Q_\varphi = F_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

б) $Q_r = F_x \sin\theta\cos\varphi + F_y \sin\theta\sin\varphi + F_z \cos\theta,$

$Q_\theta = F_x r\cos\theta\cos\varphi + F_y r\cos\theta\sin\varphi - F_z r\sin\theta,$

$Q_z = -F_x r\sin\theta\sin\varphi + F_y r\sin\theta\cos\varphi;$

12.11. Материальная точка массы m движется в плоскости Oxy под действием силового поля с потенциальной энергией $\Pi = \Pi(x, y)$. Найти лагранжиан точки в координатах q_1 и q_2, связанных с декартовыми координатами равенствами $x = \frac{q_1 - q_2}{2}$, $y = \sqrt{q_1 q_2}$.

Дано: m, $\Pi = \Pi(x,y)$, $x = \frac{q_1 - q_2}{2}$, $y = \sqrt{q_1 q_2}$

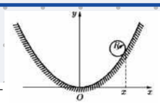
$$\bar{r} = \left(\frac{q_1 - q_2}{2}, \sqrt{q_1 q_2}\right)^T \quad \dot{\bar{r}} = -\frac{1}{2}\left(\dot{q}_2 - \dot{q}_1, \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\dot{q}_1 + \sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\cdot\dot{q}_2\right)^T$$

$$(\dot{\bar{r}})^2 = \frac{1}{4}\left(\dot{q}_2^2 - \cancel{2\dot{q}_2\dot{q}_1} + \dot{q}_1^2 + \frac{q_2}{q_1}\dot{q}_1^2 + \cancel{2\dot{q}_2\dot{q}_1} + \frac{q_1}{q_2}\dot{q}_2^2\right)$$

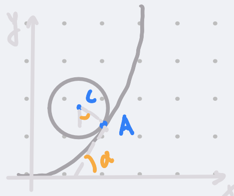
$$\mathcal{L} = T - \Pi = \frac{1}{2}m(\dot{\bar{r}})^2 - \Pi(r_1, r_2) = \frac{m}{8}\left[\dot{q}_1^2\left(\frac{q_2}{q_1}+1\right) + \dot{q}_2^2\left(\frac{q_1}{q_2}+1\right)\right] - \Pi\left(\frac{q_1 - q_2}{2}, \sqrt{q_1 q_2}\right)$$

12.11. $L = \frac{m}{8}\left[\dot{q}_1^2\left(\frac{q_2}{q_1}+1\right) + \dot{q}_2^2\left(\frac{q_1}{q_2}+1\right)\right] - \Pi\left[\frac{q_1 - q_2}{2}, \sqrt{q_1 q_2}\right]$.

12.38. Однородный диск радиуса R и массы m может катиться без проскальзывания по параболе $2y = ax^2$. Ось Oy вертикальна, $Ra \le 1$. Определяя положение диска координатой x точки касания, составить функцию Лагранжа.



К задаче 12.38



Дано: R, m, $2y = ax^2$, $Ra \le 1$; $\mathcal{L}$ - ?

$$A(x_A, y_A) = A\left(x, \frac{1}{2}ax^2\right)$$

$$C(x_C, y_C) = C(x_A - R\sin\alpha, y_A + R\cos\alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = y'_x = ax \Rightarrow \sin\alpha = \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}$$

Без проск $\Rightarrow \omega R = V_c \Rightarrow T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega^2 + \frac{1}{2}mV_c^2 = \frac{3}{4}mV_c^2$

$$\dot{x}_c = \dot{x} - \frac{Ra}{1+a^2x^2}\left[\dot{x}(1+a^2x^2)^{1/2} - a^2x^2\cdot\dot{x}(1+a^2x^2)^{-1/2}\right] = \dot{x} - \frac{Ra\dot{x}}{(1+a^2x^2)^{3/2}}$$

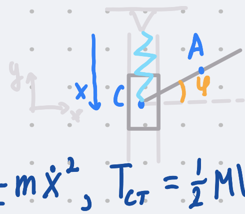
$$\dot{y}_c = ax\dot{x} - \frac{Ra^2x\dot{x}}{(1+a^2x^2)^{3/2}} = ax\dot{x}_c$$

$$\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 = \dot{x}_c^2(1+a^2x^2) = \dot{x}^2\left(1 - \frac{Ra}{(1+a^2x^2)^{3/2}}\right)^2\cdot(1+a^2x^2)$$

$$\mathcal{L} = T - \Pi = \frac{3}{4}mV_c^2 - mgy_c = \frac{3}{4}m\dot{x}^2\left(\sqrt{1+a^2x^2} - \frac{Ra}{1+a^2x^2}\right)^2 - mg\left(\frac{1}{2}ax^2 + \frac{R}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right)$$

12.38. $L = \frac{3}{4}m\dot{x}^2\left(\sqrt{1+a^2x^2} - \frac{Ra}{1+a^2x^2}\right)^2 - mg\left(\frac{1}{2}ax^2 + \frac{R}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right)$.

12.39. Груз массы m, подвешенный на пружине жёсткости c, может двигаться без трения по вертикальным направляющим. К центру масс груза шарнирно прикреплён своим концом однородный стержень массы M и длины $2l$, который может двигаться в неизменной вертикальной плоскости. Составить уравнения Лагранжа.



Дано: m, c, $M, 2l$; ур-я Лагранжа?

Введем обобщ. коорд. $\bar{q} = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}$

$$T = T_{гр} + T_{ст}, \quad T_{гр} = \frac{1}{2}mV_c^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad T_{ст} = \frac{1}{2}MV_A^2 + \frac{1}{2}J_A\omega^2$$

Свяжем с подв. грузом Oxy с началом в т. C

$$\overline{V}_A^a = \overline{V}_A^e + \overline{V}_A^r = \begin{pmatrix}\dot x\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}l\cos\varphi\\l\sin\varphi\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi\\\dot\varphi l\cos\varphi\\0\end{pmatrix}$$

$$T_{ст} = \frac{1}{2}MV_A^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot M\cdot 4l^2\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}M\left((\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi)^2 + (\dot\varphi l\cos\varphi)^2\right) + \frac{1}{6}\cdot M l^2\dot\varphi^2$$

$$\Pi = -mgx - Mg(x - l\sin\varphi) + \frac{1}{2}cx^2$$

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{1}{2}M\left((\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi)^2 + (\dot\varphi l\cos\varphi)^2\right) + \frac{1}{6}\cdot M l^2\dot\varphi^2 + mgx + Mg(x - l\sin\varphi) - \frac{1}{2}cx^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x + M(\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi) \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = mg + Mg - cx \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = 0$$

С помощью этой функции уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf q}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf q} = 0\,. \qquad (6.44)$$

$$\boxed{(m+M)\ddot x - Ml(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi) + cx = (m+M)g}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = -M(\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi)l\sin\varphi + M\dot\varphi l^2\cos^2\varphi + \frac{1}{3}Ml^2\dot\varphi \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = M\left(-\dot\varphi l\cos\varphi(\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi) - \dot\varphi^2 l^2\cos\varphi\sin\varphi\right) - Mgl\cos\varphi$$

$$-\ddot x\sin\varphi - \cancel{\dot x\dot\varphi\cos\varphi} + \ddot\varphi l\sin^2\varphi + \cancel{2\dot\varphi^2 l\sin\varphi\cos\varphi} + \ddot\varphi l\cos^2\varphi - \cancel{2\dot\varphi^2 l\sin\varphi\cos\varphi} + \frac{1}{3}l\ddot\varphi +$$

$$+\cancel{\dot x\dot\varphi\cos\varphi} - \cancel{\dot\varphi^2 l\cos\varphi\sin\varphi} + \cancel{\dot\varphi^2 l\cos\varphi\sin\varphi} + g\cos\varphi = 0$$

12.39. $(m+M)\ddot x - Ml\left(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi\right) + cx = (m+M)g$,
$4l\ddot\varphi - 3\ddot x\sin\varphi + 3g\sin\varphi = 0$, где x – смещение груза из положения равновесия, в котором пружина недеформирована, φ – угол поворота стержня.

$$\boxed{4l\ddot\varphi - 3\ddot x\sin\varphi + 3g\underline{\cos\varphi} = 0}$$