3. $y'' + 3y' + 2y = 0.$

1. Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

надо составить характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (2)$$

и найти все его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения (1) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_i e^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня λ_i уравнения (2) и слагаемых вида

$$(C_{m+1} + C_{m+2}x + C_{m+3}x^2 + \ldots + C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x} \qquad (3)$$

для каждого кратного корня λ уравнения (2), где k — кратность корня. Все C_i — произвольные постоянные. Коэффициенты уравнения (1) и корни λ здесь могут быть вещественными или комплексными.

Хар. ур-е: $\lambda^2+3\lambda+2=0$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$

$$y = C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$$

3. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}.$

---

7. $y'' = 6y' + 18y = 0.$

Если же все коэффициенты уравнения (1) вещественные, то решение можно написать в вещественной форме и в случае комплексных корней λ. Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ в формулу общего решения включаются слагаемые

$$C_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x + C_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемые

$$P_{k-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

если каждый из корней $\alpha+\beta i$ и $\alpha-\beta i$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} — многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену в (3), их коэффициенты — произвольные постоянные.

Хар. ур-е: $\lambda^2-6\lambda+18=0$

$D=36-4\cdot18=-36 \quad \lambda_{1,2}=3\pm3i$

$$y=e^{3x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$$

7. $y = e^{3x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$

---

12. $y'' - 6y' + 9y = 0.$

Хар. ур-е: $\lambda^2-6\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=3 \Rightarrow y=e^{3x}(C_1+C_2x)$

12. $y = e^{3x}(C_1x + C_2).$

---

23. $y^{IV} - y''' + 2y' = 0.$

Хар. ур-е: $\lambda^4-\lambda^3+2\lambda=0$; $\lambda_1=0$, $\lambda^3-\lambda^2+2=0$; $\lambda^3+\lambda^2-2\lambda^2+2=0$

$\lambda^2(\lambda+1)-2(\lambda^2-1)=0 \Rightarrow \lambda_2=-1$, $\lambda^2-2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_{3,4}=1\pm i$

$y=C_1+C_2e^{-x}+e^x(C_3\cos x+C_4\sin x)$

23. $y = C_1e^{-x} + C_2 + e^x(C_3\cos x + C_4\sin x).$

---

31. $y^{IV} + 6y''' + 12y'' + 8y' = 0.$

Хар. ур.: $\lambda^4+6\lambda^3+12\lambda^2+8\lambda=0$; $\lambda(\lambda^3+6\lambda^2+12\lambda+8)=0$; $\lambda(\lambda+2)^3=0$

$$y=C_1+e^{-2x}((C_2+x(C_3+x^2C_4)$$

31. $y = C_1 + e^{-2x}(C_2x^2 + C_3x + C_4).$

---

35. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$

Хар. ур.: $\lambda^4+8\lambda^2+16=0$; $(\lambda^2+4)^2=0 \Rightarrow 1 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-2i$, $\lambda_{3,4}=2i$

$$y=(C_1+C_2x)\cos2x+(C_3x+C_4)\sin2x$$

сразу соед. шаг

35. $y = (C_1x + C_2)\cos 2x + (C_3x + C_4)\sin 2x.$

---

47. $y'' + 4y = 4xe^{-2x} - \sin 2x.$

2. Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функций $b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для уравнений с правой частью $P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$, частное решение имеет вид

$$y_1 = x^s Q_m(x)e^{\gamma x}, \qquad (4)$$

где $Q_m(x)$ — многочлен той же степени m. Число $s = 0$, если γ — не корень характеристического уравнения (2), а если γ — корень, то s равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо решение (4) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Если в правую часть уравнения входят синус и косинус, то их можно выразить через показательную функцию по формулам Эйлера

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \qquad (5)$$

и свести задачу к уже рассмотренному случаю.

Если же коэффициенты левой части уравнения вещественны, то можно обойтись без перехода к комплексным функциям (5). Для уравнения с правой частью

$$e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x) \qquad (6)$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^s e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x), \qquad (7)$$

где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень характеристического уравнения, и s равно кратности корня $\alpha + \beta i$ в противном случае, а R_m и T_m — многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов P и Q. Чтобы найти коэффициенты многочленов R_m и T_m, надо подставить решение (7) в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Еще один метод отыскания частного решения уравнения с вещественными коэффициентами и правой частью вида (6) состоит в следующем. Сначала решают уравнение с правой частью $P(x)e^{(\alpha+\beta i)x}$. Вещественная часть этого решения будет решением уравнения с правой частью $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, а мнимая — решением уравнения с правой частью $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функций вида $P(x)e^{\gamma x}$ и вида (6), то частное решение отыскивается по следующему правилу.

Частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + \ldots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

П р и м е р. Решить уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x. \qquad (8)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$ имеет корень $\lambda = 3$ кратности 2 и корень $\lambda = 0$ кратности 1. Поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = (C_1 + C_2x)e^{3x} + C_3$.

Правая часть (8) состоит из двух слагаемых вида (6); для первого $\gamma = \alpha + \beta i = 3$, а для второго $\alpha + \beta i = 3 + 2i$. Так как эти числа различны, то надо искать отдельно частные решения уравнений

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}, \qquad (9)$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x}\cos 2x. \qquad (10)$$

Число $\gamma = 3$ является корнем кратности $s = 2$, поэтому частное решение уравнения (9) согласно (4) имеет вид $y_1 = x^2(ax + b)e^{3x}$. Подставив $y = y_1$ в (9), найдем $a = 1/18$, $b = -1/18$.

Далее, число $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение уравнения (10) согласно (7) имеет вид $y_2 = e^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x)$. Подставив $y = y_2$ в (10), найдем $c = -3/52$, $d = -1/26$.

Общее решение уравнения (8) равно $y = y_0 + y_1 + y_2$, где y_0, y_1, y_2 уже найдены.

Однород. ур. (ОУ)

Хар. ур.: $\lambda^2+4=0$ $\lambda_{1,2}=\pm 2i \Rightarrow y_0 = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$ общее реш. одн. ур. (ОРОУ)

Неоднор. ур. (НУ)

1) $y''+4y=4xe^{-2x}$, $y_1 = x^s Q_m(x)e^{\gamma x}$ $\gamma=-2,\ s=0 \Rightarrow y_1=(ax+b)e^{-2x}$

подст y_1 и сразу поделим на e^{-2x}: $-2a-2a+4ax+4b+4ax+4b=4x$

$y'=ae^{-2x}-2(ax+b)e^{-2x}$ $y''=-2a-2y'$

$\begin{cases}-4a+8b=0\\ 8a=4\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b=\frac{1}{4}\\ a=\frac{1}{2}\end{matrix} \Rightarrow y_1=\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}$

2) $y''+4y=-\sin 2x$, $y_2=x^s e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$

$\alpha=0,\ \beta=2,\ s=1,\ m=0 \Rightarrow y_2 = ax\cos 2x + bx\sin 2x$

y_1 уже можно подст, но упростим!

y'' - нечет

пр. часть нечет, в ст. произв. в лев. части чет $\Rightarrow$ ищем $y_2=ax\cos 2x$ - нечет

$y_2'=a\cos 2x-2ax\sin 2x$, $y_2''=-2a\sin 2x-2a\sin 2x-4ax\cos 2x$

$-4a\sin 2x-4ax\cos 2x+4ax\cos 2x=-\sin 2x \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

$y_2=\frac{1}{4}x\cos 2x$

47. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}+\frac{1}{4}x\cos 2x.$

$$y=y_0+y_1+y_2=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x+\frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}+\frac{1}{4}x\cos 2x$$

---

56. $y''+4y'+4y=2e^{-2x}$.

ОРОУ: $\lambda^2+4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-2 \Rightarrow y_0=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

ЧРНУ: $y_1=x^s Q_m(x)e^{\gamma x}$, $\gamma=-2,\ s=1 \Rightarrow y_1=ax^2e^{-2x}$

$y_1'=2axe^{-2x}-2ax^2e^{-2x}$ $y_1''=2ae^{-2x}-4axe^{-2x}-2y_1'$

Сразу дел. на e^{-2x}: $2a-4ax+4ax+4ax^2-4ax^2=2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y_1=x^2e^{-2x}$

$$\boxed{y=(C_1+C_2x+x^2)e^{-2x}}$$

56. $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x) + x^2e^{-2x}$.

---

107. $y''' - 2y'' + 2y' = 20\sin^2\frac{x}{2}$.

ОРОУ: $\lambda^3-2\lambda^2+2\lambda=0$ $\lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}=1\pm i \Rightarrow y_0=C_1+(C_2\sin x+C_3\cos x)e^x$

Пр. часть: $20\sin^2\frac{x}{2}=10-10\cos x$

1) $y'''-2y''+2y'=10$, $m=0, \gamma=0, S=1 \Rightarrow y_1=ax \Rightarrow a=5 \Rightarrow y_1=5x$

2) $y'''-2y''+2y'=-10\cos x$, $\alpha=0, \beta=1, S=0, m=0 \Rightarrow y_2=a\cos x+b\sin x$

$\cos x: -b+2a+2b=-10$ $2a+b=-10$ $a=-4$
$\sin x: a+2b-2a=0$ $2b-a=0$ $b=-2$ $\Rightarrow y_2=-4\cos x-2\sin x$

$$\boxed{y=C_1+(C_2\sin x+C_3\cos x)e^x+5x-4\cos x-2\sin x}$$

107. $y = C_1 + e^x(C_2\cos x + C_3\sin x) + 5x - 4\cos x - 2\sin x$.

---

131. $y^{IV} - y'' - 2y = 12\sin 3x\cos 2x - 6(e^{-2x} + \sin 5x)$.

ОРОУ: $\lambda^4-\lambda^2-2=0$ $(\lambda^2+1)(\lambda^2-2)=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i$, $\lambda_{3,4}=\pm\sqrt{2}$

$y_0=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3e^{-x\sqrt{2}}+C_4e^{x\sqrt{2}}$

$12\sin 3x\cos 2x = 12\cdot\frac{1}{2}(\sin(3x+2x)+\sin(3x-2x)) = 6\sin 5x+6\sin x \Rightarrow$

Пр. часть: $6\sin x-6e^{-2x}$

ЧРНУ: 1) $y^{IV}-y''-2y=6\sin x$;

в лев. ч. чет. пр, пр. ч. неч., $\alpha=0, \beta=1, S=1, m=0 \Rightarrow y_1=ax\cos x$

$y_1'=a\cos x-ax\sin x$ $y_1''=-a\sin x-a\sin x-ax\cos x$
$y_1'''=-2a\cos x-y_1'$ $y_1^{IV}=2a\sin x-y_1''$

$\sin x: 2a+4a=6$
$\cos x: 2ax-2ax=0$ $\Rightarrow a=1$ $y_1=x\cos x$

2) $y^{IV}-y''-2y=-6e^{-2x}$; $\gamma=2,\ s=0 \Rightarrow y_2=ae^{-2x}$

$e^{-2x}:\ 16a-4a-2a=-6 \quad a=-\frac{3}{5} \quad y_2=-\frac{3}{5}e^{-2x}$

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3e^{-x\sqrt{2}}+C_4e^{x\sqrt{2}}-\frac{3}{5}e^{-2x}+x\cos x$$

131. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3e^{-x\sqrt{2}}+C_4e^{x\sqrt{2}}+x\cos x-\frac{3}{5}\,e^{-2x}.$

---

153. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^x}.$

3. Линейное неоднородное уравнение

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(x) \tag{11}$$

с любой правой частью $f(x)$ решается методом вариации постоянных. Пусть найдено общее решение $y=C_1y_1+\ldots+C_ny_n$ линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогда решение уравнения (11) ищется в виде

$$y=C_1(x)y_1+\ldots+C_n(x)y_n.$$

Функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{gathered}C_1'y_1+\ldots+C_n'y_n=0\\ C_1'y_1'+\ldots+C_n'y_n'=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_1'y_1^{(n-2)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-2)}=0\\ a_0(C_1'y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'y_n^{(n-1)})=f(x).\end{gathered}$$

ОРОУ: $\lambda^2-3\lambda+2=0 \quad \lambda_1=1,\ \lambda_2=2$

$y_0=C_1e^x+C_2^{2x}$

ОРНУ: $y=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{2x}$

$$\begin{cases}C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^{2x}=0\\ C_1'(x)e^x+2C_2'(x)e^{2x}=\dfrac{1}{1+e^x}\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}C_1'(x)=-\dfrac{1}{e^x}\dfrac{1}{1+e^x}\\ C_2'(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}\dfrac{1}{1+e^x}\end{array}$$

$$C_1(x)=-\int\frac{dx}{e^x(e^x+1)}=\begin{Bmatrix}e^x=u\\ e^xdx=du\end{Bmatrix}=-\int\frac{du}{u^3+u^2}=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u+1}\right)du=-\ln(e^x+1)+x+e^{-x}+C$$

$\dfrac{1}{u^2(u+1)}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{B}{u^2}+\dfrac{C}{u+1}$ $\quad (Au+B)(u+1)+Cu^2=1 \quad Au^2+Au+Bu+B+Cu^2=1$

$B=1 \quad A=-1 \quad C=+1$

$$C_2(x)=\int\frac{dx}{e^{2x}(e^x+1)}=\begin{Bmatrix}e^x=u\\ e^xdx=du\end{Bmatrix}=\int\frac{du}{u^4+u^3}=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u+1}\right)du=x+e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}-\ln(1+e^x)+C$$

$\dfrac{1}{u^3(u+1)}=\dfrac{A}{u}+\dfrac{B}{u^2}+\dfrac{C}{u^3}+\dfrac{D}{u+1}\Rightarrow u^3A+u^2A+u^2B+uB+Cu+C+Du^3=1$

$A=1 \quad B=-1 \quad C=1 \quad D=-1$

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(e^x+e^{2x})[x-\ln(1+e^x)]+e^x+\frac{1}{2}$$

153. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(e^x+e^{2x})[x-\ln(1+e^x)]+e^x+\frac{1}{2}.$

В задачах **589—600** решить уравнения Эйлера

4. Уравнение Эйлера

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x) \tag{12}$$

сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x=e^t$ при $x>0$ (или $x=-e^t$ при $x<0$). Для полученного уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)+\ldots+a_{n-2}\lambda(\lambda-1)+a_{n-1}\lambda+a_n=0.$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^ky^{(k)}$ в (12) заменяется на произведение k убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-k+1)$.

Пример. Решить уравнение

$$x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3.$$

Сразу пишем характеристическое уравнение и решаем его:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-\lambda(\lambda-1)+2\lambda-2=0, \tag{14}$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)=0,\ \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2.$$

При таких λ общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид (согласно п. 1)

$$y_0=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{2t}.$$

Чтобы решить неоднородное уравнение (13), сначала раскроем скобки в (14): $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$. По этому характеристическому уравнению составляем левую часть дифференциального уравнения, а правую часть получаем из правой части (13) заменой $x=e^t$:

$$y_t'''-4y_t''+5y_t'-2y=e^{3t}.$$

Так как число 3 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $y_1=ae^{3t}$. Подставляя в уравнение, находим $a=1/4$.

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y=y_0+y_1=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}=$$

$$=(C_1+C_2\ln x)x+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3 \quad (x>0).$$

При $x<0$ получается аналогичная формула, но с $\ln|x|$ вместо $\ln x$.

593. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3.$

$x = e^t$

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t}y'_t$

$y''_x = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$

$e^{2t} \cdot e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t) - e^t \cdot e^{-t}y'_t + y = 8e^{3t}$

$y''_t - 2y'_t + y = 8e^{3t}$

ОРОУ: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow y_0 = (C_1 + C_2 t)e^t$

ЧРНУ: $y_1 = ae^{3t} \Rightarrow e^{3t}: 9a - 6a + a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y_1 = 2e^{3t}$

$y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3$

593. $y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3.$

---

598. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x.$

т.к. $\ln x \Rightarrow x > 0$

$x = e^t$

$y'_x = e^{-t}y'_t$

$y''_x = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$

$y''_{tt} - y'_t - 2y = \sin x$

ОРОУ: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_0 = C_1e^{-t} + C_2^{2t}$

ЧРНУ: $y_1 = a\cos t + b\sin t \Rightarrow \cos t: -a - b - 2a = 0 \quad a = 0{,}1$

$\sin t: -b + a - 2b = 1 \quad b = -0{,}3$

$\Rightarrow y = 0{,}1\cos t - 0{,}3\sin t$

$y = C_1x^{-1} + C_2x^2 + 0{,}1\cos\ln x - 0{,}3\sin\ln x$

598. $y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + 0{,}1\cos\ln x - 0{,}3\sin\ln x.$

610*. $x^2y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}.$

т.к. $\ln x \Rightarrow x > 0$

$x = e^t$

$y'_x = e^{-t}y'_t$

$y''_x = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$

$\Rightarrow y''_{tt} - y'_t - y'_t + y = \frac{t}{e^t} + \frac{e^t}{t} \Rightarrow \boxed{y''_{tt} - 2y'_t + y} = t \cdot e^{-2t} + \frac{1}{t}$

Заметим, что $(y \cdot e^{-t})''_{tt} = \boxed{y''_{tt} - 2y'_t + y}$

$(y \cdot e^{-t})''_{tt} = (y'_t e^{-t} - y e^{-t})'_t = y''_{tt} e^{-t} - y'_t e^{-t} - y'_t e^{-t} + y e^{-t} = e^{-t}(y''_{tt} - 2y'_t + y)$

$(y \cdot e^{-t})''_{tt} = t \cdot e^{-2t} + \frac{1}{t}$

$$(y\cdot e^{-t})'_t = \int t\cdot e^{-2t}dt + \int \frac{1}{t}dt = -\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \ln|t| + C$$

$u = t \quad u' = 1$

$v' = e^{-2t} \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2t} \quad \int e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C \quad \int \ln|t|dt = t\ln|t| - t + C$

$$y\cdot e^{-t} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right) + \frac{1}{8}e^{-2t} + t\ln t - t + C_1 t + C_2$$

$$y = \frac{1}{4}(t+1)e^{-t} + e^{t}\left[t(\ln t - 1 + C_1) + C_2\right]$$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}(\ln x + 1)\frac{1}{x} + x\left[\ln x(\ln|\ln x| + C_1) + C_2\right]}$$

610. $y = x[C_1 + (C_2 + \ln|\ln x|)\ln x] + \frac{1+\ln x}{4x}$

В задачах **613—618** построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

613. $y_1 = x^2 e^x$.

Более низкого порядка нельзя

$$\lambda = 1,\ s = 3 \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{y''' - 3y'' + 3y' - y = 0}$$

613. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

---

615. $y_1 = x\sin x$.

Более низкого порядка нельзя

$$\lambda = \pm i,\ s = 1 \Rightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{y^{IV} + 2y'' + y = 0}$$

615. $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0$.

---

617. $y_1 = xe^x$, $y_2 = e^{-x}$.

Более низкого порядка нельзя

617. $y''' - y'' - y' + y = 0$.

1) $\lambda = 1,\ s = 2$

2) $\lambda = -1,\ s = 1$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y''' - y'' - y' + y = 0}$$

---

1. Решить уравнение $y'' - ay' + 2y = e^x \cos x$, где $a \in \mathbb{R}$ – действительный параметр.

ОРОУ: $\lambda^2 - a\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 8}}{2}$

$a^2 > 8$: $\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2-8}}{2} \Rightarrow \boxed{y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$

$a^2 = 8$: $\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{y_0 = e^{\sqrt{2}x}(C_1 x + C_2)}$

$a^2 < 8$: $\lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{8-a^2}}{2} i \Rightarrow \boxed{y_0 = e^{\frac{a}{2}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{8-a^2}}{2} + C_2 \sin\frac{\sqrt{8-a^2}}{2}\right)}$

ЧРНУ: $e^x \cos x \Rightarrow \gamma = 1 \pm i$

$a^2 = 8$: γ - корень хар ур. $\Rightarrow \boxed{y_1 = xe^x(b\cos x + d\sin x)}$

$a^2 \neq 8$: $\boxed{y_1 = e^x(b\cos x + d\sin x)}$

1. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 6y, & (1) \\ \dot{y} = 8x + 9y. & (2) \end{cases}$

Пример. Решить систему $\dot{x} = y + 1$, $\dot{y} = 2e^t - x$. Исключаем y. Из первого уравнения имеем $y = \dot{x} - 1$. Подставляя во второе уравнение, получаем $\ddot{x} = 2e^t - x$. Решив это уравнение второго порядка (методами § 11), найдем $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t$. Значит, $y = \dot{x} - 1 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + e^t - 1$.

подст из (2) подст из (1)

дифф (1): $\ddot{x} = -5\dot{x} - 6\dot{y} = -5\dot{x} - 48x - 9\cdot(6y) = -5\dot{x} - 48x + 9\dot{x} + 45x$

$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0; \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 3$

$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \xrightarrow{\text{в (1)}} C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} = -5C_1 e^t - 5C_2 e^{3t} - 6y$

$y = -C_1 e^t - \frac{4}{3} C_2 e^{3t}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} C_1 e^{3t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} C_2 e^t$$

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Решить систему $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = 5x + 2y$.

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 + 2i$ находим собственный вектор (a, b):

$$\begin{cases} (1-2i)a - b = 0, \\ 5a - (1+2i)b = 0. \end{cases}$$

Можно взять $a = 1$, $b = 1 - 2i$. Имеем частное решение $x = e^{(3+2i)t}$, $y = (1-2i)e^{(3+2i)t}$.

Так как данная система с вещественными коэффициентами, то решение, соответствующее корню $\lambda = 3 - 2i$, можно не искать, оно будет комплексно сопряженным с найденным решением. Чтобы получить два вещественных решения, надо взять вещественную и мнимую части найденного комплексного решения. Так как $e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + i \sin 2t)$, то

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{Re} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \cos 2t, \\ y_1 = \operatorname{Re}(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3y}(\cos 2t + 2\sin 2t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \operatorname{Im} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \sin 2t, \\ y_2 = \operatorname{Im}(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t). \end{cases}$$

Общее решение выражается через два найденных линейно независимых решения:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{3t} \cos 2t + C_2 e^{3t} \sin 2t,$$
$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t) + C_2 e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t).$$

5. $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y, \\ \dot{y} = 10x + 7y. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -4 \\ 10 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 35 + 40 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0; \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i: \begin{cases} -(6+2i)\alpha_1 - 4\beta_1 = 0 \\ 10\alpha_1 + (6-2i)\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = -\frac{3+i}{2}\alpha_1 \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \left[C_1 \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ 3\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ 3\sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{cases} x = 2\,C\,e^t \sin(2\,t) + 2\,C_1\,e^t \cos(2\,t) \\ y = C_1\,e^t \sin(2\,t) - 3\,C\,e^t \sin(2\,t) - 3\,C_1\,e^t \cos(2\,t) - C\,e^t \cos(2\,t) \end{cases}$$

5. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ 2\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -\cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix}$.

---

12. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$

$\ddot{x} = -5\dot{x} + 4\dot{y} = -5\dot{x} - 4x - \dot{x} - 5x \Rightarrow \ddot{x} + 6\dot{x} + 9 = 0$

$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3 \Rightarrow x = e^{-3t}(C_1 + C_2 t)$

$4y = e^{-3t}(-3C_1 - 3C_2 x + C_2 + 5C_1 + 5C_2 x) = e^{-3t}(2C_1 + C_2 + 2C_2 t)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

12. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$.

2. Для решения системы (где $\dot{x}$ означает $\frac{dx}{dt}$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{1}$$

или, в векторной записи, $\dot{x} = Ax$, где x — вектор, A — матрица:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

надо найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Каждому простому корню λ_i характеристического уравнения соответствует решение $C_i v^i e^{\lambda_i t}$, где C_i — произвольная постоянная, v^i — собственный вектор матрицы A, соответствующий этому λ_i.

Пример 2. Найти общее решение линейной системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - z, \\ \dot{y} = -2x + 3y - z, \\ \dot{z} = 4x + 5z. \end{cases}$$

△ Для матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

из уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, где E — единичная матрица третьего порядка, находим собственное значение $\lambda = 3$ кратности три. Из линейной алгебраической системы уравнений $(A - \lambda E)h = 0$, где вектор $h \neq 0$ имеет три компоненты, находим два линейно независимых собственных вектора

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Из системы уравнений $(A - \lambda E)h_3 = h_2$ находим присоединенный вектор h_3 к вектору h_2:

$$h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right],$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. ▲

23. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - z, \\ \dot{y} = 9x - 6y + 3z, \\ \dot{z} = 20x - 20y + 10z. \end{cases}$

$\lambda^2 - 4\lambda \qquad +18\lambda - 60$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 9 & -6-\lambda & 3 \\ 20 & -20 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(6+\lambda)(\lambda-10)+60] - 2[9(10-\lambda)-60] +$$

$$+180 - (6+\lambda)\cdot 20 = \lambda^2 - 4\lambda - \lambda^3 + 4\lambda^2 + 18\lambda - \cancel{60} + \cancel{180} - \cancel{120} - 20\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$$

$$= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-2) = 0 \qquad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$$

$$\lambda_1 = 0: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & -6 & 3 \\ 20 & -20 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 9 & -8 & 3 \\ 20 & -20 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & -8 & 3 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3: \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 9 & -9 & 3 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & z & y \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

23. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

31. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$

му λ_i.

Если для кратного корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов $v^1, \ldots, v^k$, какова его кратность, то ему соответствует решение $C_1 v^1 e^{\lambda t} + \ldots + C_k v^k e^{\lambda t}$.

$$\det(A-\lambda E)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-4\right] - 2\left[2(1-\lambda)-4\right] + 2\left[4-2(1-\lambda)\right] =$$

$$= (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) + 8(\lambda+1) = 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 4 + 4\lambda + 8\lambda + 8 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 =$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda^2 + 9\lambda + 5 = (\lambda+1)\cdot(-\lambda^2) + 4(\lambda+1)\left(\lambda+\frac{5}{4}\right) = -(\lambda+1)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) =$$

$$= -(\lambda+1)^2(\lambda-5) = 0; \quad \lambda_{1,2} = -1, \ \lambda_3 = 5$$

$$\lambda_{1,2} = -1: \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ m = k = 2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5: \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

31. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Решить систему $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = 5x + 2y$.

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 + 2i$ находим собственный вектор (a, b):

$$\begin{cases} (1-2i)a - b = 0, \\ 5a - (1+2i)b = 0. \end{cases}$$

Можно взять $a = 1$, $b = 1 - 2i$. Имеем частное решение $x = e^{(3+2i)t}$, $y = (1-2i)e^{(3+2i)t}$.

Так как данная система с вещественными коэффициентами, то решение, соответствующее корню $\lambda = 3 - 2i$, можно не искать, оно будет комплексно сопряженным с найденным решением. Чтобы получить два вещественных решения, надо взять вещественную и мнимую части найденного комплексного решения. Так как $e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + i \sin 2t)$, то

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{Re} e^{(3+2i)t} = e^{3t}\cos 2t, \\ y_1 = \operatorname{Re}(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3y}(\cos 2t + 2\sin 2t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \operatorname{Im} e^{(3+2i)t} = e^{3t}\sin 2t, \\ y_2 = \operatorname{Im}(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t). \end{cases}$$

Общее решение выражается через два найденных линейно независимых решения:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{3t}\cos 2t + C_2 e^{3t}\sin 2t,$$

$$\ldots {}_2\, e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t).$$

46. $\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y + z, \\ \dot{y} = 7x - 3y + z, \\ \dot{z} = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$

$\lambda^2 + \lambda - 6$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 1 \\ 7 & -3-\lambda & 1 \\ 4 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\left[(\lambda+3)(\lambda-2)+2\right] + 4\left[7(2-\lambda)-4\right] - 14 + 4(3+\lambda) =$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2+\lambda-4) + 4(10-7\lambda) - 2 + 4\lambda = 7\lambda^2 + 7\lambda - 28 - \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 40 -$$

$$- 28\lambda - 2 + 4\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 13\lambda + 10 = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda^2 - 8\lambda - 5\lambda + 10 =$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2 - 4\lambda + 5) = 0; \quad \lambda_1 = 2, \ \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1=2:\ \begin{pmatrix}5&-4&1\\7&-5&1\\4&-2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1&0\\7&-5&1\\2&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-2&1&0\\-3&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow h_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=2+i:\ \begin{cases}(5-i)\alpha_2-4\beta_2+\gamma_2=0\\7\alpha_2-(5+i)\beta_2+\gamma_2=0\\4\alpha_2-2\beta_2-i\gamma_2=0\end{cases}\quad -(2+i)\alpha_2+(1+i)\beta_2=0\Rightarrow\begin{cases}\beta_2=\dfrac{2+i}{1+i}\alpha_2\\[2mm]\gamma_2=\dfrac{2}{1+i}\alpha_2\end{cases}$$

$$h_2=\begin{pmatrix}1+i\\2+i\\2\end{pmatrix};$$

46. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\2\cos t-\sin t\\2\cos t\end{pmatrix}+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\\cos t+2\sin t\\2\sin t\end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{2t}\left[C_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\2\cos t-\sin t\\2\cos t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\\cos t+2\sin t\\2\sin t\end{pmatrix}\right]$$

Каждому простому корню λ_i характеристического уравнения соответствует решение $C_i v^i e^{\lambda_i t}$, где C_i — произвольная постоянная, v^i — собственный вектор матрицы A, соответствующий этому λ_i.

Если для кратного корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов $v^1,\ \ldots,\ v^k$, какова его кратность, то ему соответствует решение $C_1v^1e^{\lambda t}+\ldots+C_kv^ke^{\lambda t}$.

Если для корня λ кратности k имеется только m линейно независимых собственных векторов, и $m<k$, то решение, соответствующее этому λ, можно искать в виде произведения многочлена степени $k-m$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде[1]

$$\begin{cases}x_1=(a+bt+\ldots+dt^{k-m})\,e^{\lambda t},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_n=(p+qt+\ldots+st^{k-m})\,e^{\lambda t}.\end{cases}\tag{3}$$

Чтобы найти коэффициенты $a,\ b,\ \ldots,\ s$, надо подставить решение (3) в систему (1). Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $a,\ b,\ \ldots,\ s$. Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты $a,\ b,\ \ldots,\ s$ должны зависеть от k произвольных постоянных, где k — кратность корня λ.

Найдя для каждого λ решения указанного вида и сложив их, получим общее решение системы (1).

Пример. Решить систему

$$\dot x=2x+y+z,\ \dot y=-2x-z,\ \dot z=2x+y+2z.\tag{4}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\-2&-\lambda&-1\\2&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0,\tag{5}$$

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0,\quad\lambda_1=2,\quad\lambda_2=\lambda_3=1.$$

Для простого корня $\lambda_1=2$ находим собственный вектор $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, решая систему

$$\begin{cases}\beta+\gamma=0,\\-2\alpha-2\beta-\gamma=0,\\2\alpha+\beta=0\end{cases}\tag{6}$$

[1] В случае $k\leqslant 3$ число $k-m$ нельзя уменьшить, а в случае $k\geqslant 4$ иногда можно, если известна жорданова форма матрицы A.

(коэффициенты этой системы равны элементам детерминанта (5) при $\lambda=2$). Из (6) находим $2\alpha=-\beta=\gamma$. Значит, вектор $(1,\ -2,\ 2)$ — собственный, и

$$x=e^{2t},\quad y=-2e^{2t},\quad z=2e^{2t}\tag{7}$$

— частное решение системы (4).

Для кратного корня $\lambda=1$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. При $\lambda=1$ из (5) получаем матрицу

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-1\\2&1&1\end{pmatrix}.$$

Ее порядок $n=3$, ранг $r=2$. Число линейно независимых собственных векторов равно $m=n-r=1$. Корень $\lambda=1$ имеет кратность $k=2$. Так как $k>m$, то решение надо искать в виде произведения многочлена степени $k-m=1$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$x=(a+bt)e^t,\quad y=(c+dt)e^t,\quad z=(f+gt)e^t.\tag{8}$$

Чтобы найти коэффициенты $a,\ b,\ \ldots$, подставляем (8) в систему (4) и приравниваем коэффициенты при подобных членах. Получаем систему

$$\begin{aligned}b+d+g=0,&\quad b=a+c+f,\\-2b-d-g=0,&\quad d=-2a-c-f,\\2b+d+g=0,&\quad g=2a+c+f.\end{aligned}\tag{9}$$

Найдем общее решение этой системы. Из двух левых уравнений имеем $b=0$, $g=-d$. Подставляя это в остальные уравнения, получаем

$$0=a+c+f,\quad d=-2a-c-f\tag{10}$$

(остальные уравнения будут следствиями написанных). Решаем систему (10), например, относительно a и f:

$$a=-d,\quad f=d-c.$$

Таким образом, все неизвестные выражены через c и d. Положив $c=C_1$, $d=C_2$, имеем $a=-C_2$, $b=0$, $f=C_2-C_1$, $g=-C_2$. Общее решение системы (9) найдено.

Подставив найденные значения $a,\ b,\ \ldots$ в (8) и прибавив частное решение (7), умноженное на C_3, получим общее решение системы (4):

$$x=-C_2e^t+C_3e^{2t},\quad y=(C_1+C_2t)\,e^t-2C_3e^{2t},$$
$$z=(C_2-C_1-C_2t)\,e^t+2C_3e^{2t}.$$

---

68. $\begin{cases}\dot x=-2x+y-z,\\\dot y=-6x-4y+3z,\\\dot z=-2x+2y-3z.\end{cases}$ (1)

$\lambda^2+7\lambda+6$ $\qquad$ $6\lambda+24$ $\qquad$ $-2\lambda-20$

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&-1\\-6&-4-\lambda&3\\-2&2&-3-\lambda\end{vmatrix}=-(2+\lambda)[\lambda^2+7\lambda+12-6]-[18+6\lambda+6]-[-12-8-2\lambda]=$$

$$=-2\lambda^2-14\lambda-12-\lambda^3-7\lambda^2-6\lambda-6\lambda-24+2\lambda+20=-(\lambda^3+9\lambda^2+24\lambda+16)=$$

$$=-(\lambda^3+\lambda^2+8\lambda^2+8\lambda+16\lambda+16)=-(\lambda+1)\cdot(\lambda+4)^2=0;\ \lambda_1=-1,\ \lambda_{2,3}=-4$$

$$\lambda_1=-1:\ \begin{pmatrix}-1&1&-1\\-6&-3&3\\-2&2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow h_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_{2,3}=-4:\begin{pmatrix}2&1&-1\\-6&0&3\\-2&2&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&-1\\-2&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$k-m=1 \Rightarrow$ ищем реш. в виде $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}at+b\\ct+d\\et+f\end{pmatrix}e^{-4t}$

Подст в (1) и приравн коэф.:

$$\begin{cases}-4a=-2a+c-e\\ \cancel{-4c}=-6a-\cancel{4c}+3e\\ -4e=-2a+2c-3e\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=C_2\\ e=2a=2C_3\\ c=0\end{matrix}\qquad \begin{cases}a-4b=-2b+d-f\\ \cancel{c}-\cancel{4d}=-6b-\cancel{4d}+3f\\ e-4f=-2b+2d-3f\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}b=C_3\\ f=2b=2C_3\\ a=d=C_2\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_2t+C_3\\0+C_2\\2C_2t+2C_3\end{pmatrix}e^{-4t}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+C_2e^{-4t}\left[t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$$

68. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-4t}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+C_3e^{-4t}\left[t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right].$

Пример 2. Найти общее решение линейной системы уравнений
$$\begin{cases}\dot x=x-z,\\ \dot y=-2x+3y-z,\\ \dot z=4x+5z.\end{cases}$$
△ Для матрицы системы
$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&3&-1\\4&0&5\end{pmatrix}$$
из уравнения $\det(A-\lambda E)=0$, где E — единичная матрица третьего порядка, находим собственное значение $\lambda=3$ кратности три. Из линейной алгебраической системы уравнений $(A-\lambda E)h=0$, где вектор $h\neq 0$ имеет три компоненты, находим два линейно независимых собственных вектора
$$h_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\quad h_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$
Из системы уравнений $(A-\lambda E)h_3=h_2$ находим присоединенный вектор h_3 к вектору h_2:
$$h_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$
Следовательно, искомое общее решение имеет вид
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+C_3e^{3t}\left[t\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right],$$
где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. ▲

79. $\begin{cases}\dot x=4x-y+z,\\ \dot y=-2x+3y-z,\\ \dot z=-5x+4y-z.\end{cases}$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda&-1&1\\-2&3-\lambda&-1\\-5&4&-1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\lambda-3+4)+(2+2\lambda-5)+(-8+15-5\lambda)=$$
$$=4\lambda^2-8\lambda+4-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda+2\lambda-3-5\lambda+7=-(\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8)=-(\lambda-2)^3=0;\ \lambda_{1,2,3}=2$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&1\\-2&1&-1\\-5&4&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&0&0\\0&3&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&1\\0&1&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&0&1\\0&3&-1\end{pmatrix}\Rightarrow h_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

присоед. к h_1: $\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\-2&1&-1&1\\-5&4&-3&3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\1&1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&1&-1\\3&3&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&1&-1\\0&3&-1&1\end{array}\right);\ \begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\1\end{pmatrix}C\Rightarrow h_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ $C=2$

присоед. к h_2: $\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\-2&1&-1&1\\-5&4&-3&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&1&-1\\1&1&0&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&1&-2\\3&3&0&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&1&-2\\0&3&-1&-1\end{array}\right)\ \begin{pmatrix}-2/3\\-1/3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1/3\\1/3\\1\end{pmatrix}C\Rightarrow h_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $C=1$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=e^{2t}\left(C_1\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+C_2\left[t\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right]+C_3\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]\right)$$

79. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\left[t\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\right]+$
$+C_3e^{2t}\left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right].$

88. $\begin{cases} \dot{x} = 9x - 6y - 2z, \\ \dot{y} = 18x - 12y - 3z, \\ \dot{z} = 18x - 9y - 6z. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -6 & -2 \\ 18 & -12-\lambda & -3 \\ 18 & -9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)\left[\lambda^2+18\lambda+72-27\right]+6\left[-18\cdot 6-18\cdot\lambda+3\cdot 18\right]-2\left[-18\cdot 9+(12+\lambda)\cdot 18\right]=$$

$$= 9\lambda^2+9\cdot 18\lambda+45\cdot 9-\lambda^3-18\lambda^2-45\lambda-6\cdot 18\lambda+6\cdot 18-36\lambda=$$

$$= -(\lambda^3+9\lambda^2+27\lambda+27) = -(\lambda+3)^3 = 0;\quad \lambda_{1,2,3}=-3$$

$$\lambda_{1,2,3}=-3:\ \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} m=2 \\ k=3 \end{matrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle\quad h_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},\ h_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(В общ. случ. рассм. лк $\langle h_1, h_2\rangle$)

Т.к. 2-я и 3-я строки $A+3E$ одинаковы, рассм. $h_3^2 = h_3^3 \Rightarrow$

присоед. к h_2:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & -2 & 2 \\ 18 & -9 & -3 & 3 \\ 18 & -9 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow h_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{-3t}\left(C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3\left[t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]\right)$$

88. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 e^{-3t}\left[t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right].$

---

6. Частное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n \tag{13}$$

можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций $b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$. Это делается по тем же правилам, что для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, см. п. 2 § 11, со следующим изменением. Если $f_i(t) = P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, где $P_{m_i}(t)$ — многочлен степени m_i, то частное решение системы (13) ищется не в виде $t^s Q_m(t)\,e^{\gamma t}$, а в виде

$$x_i = Q^i_{m+s}(t)\,e^{\gamma t}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

где $Q^i_{m+s}(t)$ — многочлены степени $m+s$ с неизвестными коэффициентами, $m = \max m_i$, $s = 0$, если γ — не корень характеристического уравнения (2), а если γ — корень, то s можно взять равным кратности этого корня (или, точнее, s на 1 больше наибольшей из степеней многочленов, на которые умножается $e^{\gamma t}$ в общем решении однородной системы). Неизвестные коэффициенты многочленов определяются путем подстановки выражений (14) в данную систему (13) и сравнения коэффициентов подобных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда $f_i(t)$ содержат $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$, а число $\gamma = \alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^{3t}(t + \sin t), \\ \dot{y} = x + 2y + t\,e^{3t}\cos t. \end{cases} \tag{15}$$

Сначала для однородной системы $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = x + 2y$ находим корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ и как в п. 2 отыскиваем общее решение

$$x_0 = (C_1 t + C_2)\,e^{3t}, \quad y_0 = (C_1 t + C_2 - C_1)\,e^{3t}.$$

В системе (15) для функций $t\,e^{3t}$, $e^{3t}\sin t$, $t\,e^{3t}\cos t$ числа $\alpha + \beta i$ соответственно равны 3, $3+i$, $3+i$. Поэтому надо отдельно найти частные решения систем

$$\dot{x} = 4x - y + t\,e^{3t}, \qquad \dot{y} = x + 2y, \tag{16}$$

$$\dot{x} = 4x - y + e^{3t}\sin t, \quad \dot{y} = x + 2y + t\,e^{3t}\cos t. \tag{17}$$

Для системы (16) $\alpha + \beta i = 3 = \lambda_1 = \lambda_2$, $s = 2$, $m = 1$. Согласно (14), частное решение можно искать в виде

$$x_1 = (at^3 + bt^2 + ct + d)\,e^{3t}, \quad y_1 = (ft^3 + gt^2 + ht + j)\,e^{3t}.$$

Для системы (17) $\alpha + \beta i = 3 + i \neq \lambda_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$. Частное решение имеет вид

$$x_2 = (kt + l)\,e^{3t}\sin t + (mt + n)\,e^{3t}\cos t,$$

$$y_2 = (pt + q)\,e^{3t}\sin t + (rt + s)\,e^{3t}\cos t.$$

Отыскав значения коэффициентов $a, b, \ldots$, общее решение системы (15) напишем в виде

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad y = y_0 + y_1 + y_2.$$

154. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^t, \\ \dot{y} = 5x - y - (2t+6)e^t. \end{cases}$

ОСДУ: $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 10 = \lambda^2 + 9,\quad \lambda_{1,2} = \pm 3i$

$\lambda_1 = 3i:\ \begin{cases} (1-3i)\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \\ 5\alpha_1 - (1+3i)\beta_1 = 0 \end{cases}\quad \alpha_1 = \dfrac{2}{1-3i}\beta_1 \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_0 = 2C_1\cos 3t + 2C_2\sin 3t \\ y_0 = C_1(\cos 3t + 3\sin 3t) + C_2(\sin 3t - 3\cos 3t) \end{cases}$$

для сист $\lambda = 1, s=0, m=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (at+b)e^t \\ y_1 = (ct+d)e^t \end{cases}$ подст в сист. и приравн коэф.

$$\begin{cases} a = a - 2c - 2 \\ c = 5a - c - 2 \\ a+b = b - 2d \\ c+d = 5b - d - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-1 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^t \\ y_1 = -te^t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$$

154. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2\sin 3t \\ \sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$.

---

159. $\begin{cases} \dot x = -3x - 4y + 4z + \sin t + \cos t, \\ \dot y = 3x + 4y - 5z - \sin t - \cos t, \\ \dot z = x + y - 2z, \end{cases}$

ОСДУ: $\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 & 4 \\ 3 & 4-\lambda & -5 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 4 + 4\lambda - 3 - 5\lambda + 2\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^3 = (\lambda+1)(1-\lambda^2) = 0; \ \lambda_{1,2} = -1, \ \lambda_3 = 1$

по 3стр

$$\lambda_{1,2} = -1: \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 3 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{присоед. к } h_2: \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1: \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ЧРНСУ: $\lambda = 0, \ s=0, \ m=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a\sin t + b\cos t \\ y_1 = c\sin t + d\cos t \\ z = e\sin t + f\cos t \end{cases} \Rightarrow$ заметим, что $\begin{cases} -\dot x - z = \dot y \\ z = 0 \end{cases}$ подх $\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t}C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{-t}\left[t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

159. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1e^t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{-t}\left[t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] +$
$+\begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Пример 4. Методом вариации постоянных решить систему уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y + \dfrac{1}{2\sin t}. \end{cases}$$
△ Линейную однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$ решаем методом исключения. Ее решение имеет вид
$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = \frac{1}{2}[(C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t], \end{cases}$$
где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение заданной линейной неоднородной системы уравнений ищем в виде
$$\begin{cases} x = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t, \\ y = \frac{1}{2}[(C_1(t) - C_2(t))\cos t + (C_1(t) + C_2(t))\sin t], \end{cases}$$
где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, которые находятся подстановкой x и y в заданную систему уравнений. Подстановка x и y в заданную систему уравнений дает следующую линейную алгебраическую систему для $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$:
$$\begin{cases} \dot{C}_1(t)\cos t + \dot{C}_2(t)\sin t = 0, \\ \dot{C}_1(t)\sin t - \dot{C}_2(t)\cos t = \dfrac{1}{\sin t}, \end{cases}$$
Отсюда находим $\dot{C}_1(t) = 1$, $\dot{C}_2(t) = -\operatorname{ctg} t$ и, значит, $C_1(t) = t + C_1$, $C_2(t) = -\ln|\sin t| + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя найденные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$, получим общее решение заданной системы уравнений
$$x = C_1\cos t + C_2 \sin t + t\cos t - \sin t \ln|\sin t|,$$
$$y = \frac{1}{2}[(C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + (t + \ln|\sin t|)\cos t + (t - \ln|\sin t|)\sin t].$$
▲

183. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - \dfrac{1}{1+e^{-t}}, \\ \dot{y} = -3x - 2y - \dfrac{1}{1+e^{-t}}. \end{cases}$

ОЛДУ: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 + 6 = \lambda(\lambda - 1) = 0; \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$

$x_0 = C_1 + C_2 e^t \Rightarrow y_0 = -C_2 e^t - \frac{3}{2}C_1$

ищем реш. в виде $\begin{cases} x = C_2(t)e^t + C_1(t) \\ y = -C_2(t)e^t - \frac{3}{2}C_1(t) \end{cases}$, подст в сист

$C_1'(t) + C_2'(t)e^t + \cancel{C_2(t)e^t} = \cancel{3C_1(t)} + \cancel{3C_2(t)e^t} - \cancel{2C_2(t)e^t} - \cancel{3C_1(t)} - \dfrac{1}{1+e^{-t}}$

$-\frac{3}{2}C_1'(t) - C_2'(t)\cdot e^t - \cancel{C_2(t)e^t} = -\cancel{3C_1(t)} - \cancel{3C_2(t)e^t} + \cancel{2C_2(t)e^t} + \cancel{3C_1(t)} - \dfrac{1}{1+e^{-t}}$

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t)e^t = -\dfrac{1}{1+e^{-t}} \\ -3C_1'(t) - 2C_2'(t)e^t = -\dfrac{2}{1+e^{-t}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(t) = \dfrac{4}{1+e^{-t}} \\ C_2'(t) = -\dfrac{5e^{-t}}{1+e^{-t}} \end{cases}$$

$C_1(t) = \int \dfrac{4}{1+e^{-t}}dt = 4\int \dfrac{d(1+e^t)}{1+e^t} = 4\ln(e^t+1) + \tilde{C}_1$

$C_2(t) = -5\int \dfrac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt = 5\int \dfrac{d(1+e^{-t})}{1+e^{-t}} = 5\ln(e^{-t}+1) + \tilde{C}_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\ln(1+e^t) + 5e^t\ln(e^{-t}+1) \\ -6\ln(1+e^t) - 5e^t\ln(e^{-t}+1) \end{pmatrix}$$

183. $x = -2C_1 - C_2e^t + 4\ln(1+e^t) + 5e^t\ln(1+e^{-t})$,
$y = 3C_1 + C_2e^t - 6\ln(1+e^t) - 5e^t\ln(1+e^{-t})$.

824.* $\begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} - 2x - 2\dot{y} - y = 0, \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0. \end{cases}$

Попробуем найти решение $e^{\lambda t}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \lambda^2+4\lambda-2 & -2\lambda-1 \\ \lambda^2-4\lambda & -\lambda^2+2\lambda+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

Чтобы реш. не было трив. $\det A = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+4\lambda-2 & -2\lambda-1 \\ \lambda^2-4\lambda & -\lambda^2+2\lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda^2+4\lambda-2)(-\lambda^2+2\lambda+2)+(2\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda) =$$

$$= -\lambda^4 + \cancel{2\lambda^3} + 2\lambda^2 - \cancel{4\lambda^3} + \cancel{8\lambda^2} + \cancel{8\lambda} + \lambda^2 - \cancel{4\lambda} - 4 + \cancel{2\lambda^3} - \cancel{8\lambda^2} + \lambda^2 - 4\lambda = -\lambda^4+5\lambda^2-4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1 \quad \lambda_{3,4} = \pm 2$$

Подст λ в $(*)$:

$\lambda=1$: $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda=-1$: $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\lambda=2$: $\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\lambda=-2$: $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_4 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

824. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3e^{2t} + C_4e^{-2t}$,
$y = C_1e^t + 5C_2e^{-t} + 2C_3e^{2t} + 2C_4e^{-2t}$.

Пример 3. С помощью матричной экспоненты решить следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot x = x + y, \\ \dot y = -x + 3y, \quad x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

△ Для матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ находим собственное значение $\lambda = 2$ кратности два. Ему соответствуют собственный вектор $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и присоединенный вектор $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В базисе из векторов h_1, h_2

матрица A принимает нормальную жорданову форму $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Из определения матричной экспоненты находим, что

$$e^{tJ} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если через H обозначить матрицу, у которой первый столбец h_1 и второй столбец h_2, то

$$e^{tA} = He^{tJ}H^{-1} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Определяя C_1 и C_2 из начальных условий, находим решение задачи Коши: $x = y = e^{2t}$. ▲

8. Показательной функцией e^A матрицы A называется сумма ряда

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots, \qquad (18)$$

где E — единичная матрица. Ряд сходится для любой матрицы A.

Свойства e^A:

а) если $A = CMC^{-1}$, то $e^A = C\,e^M\,C^{-1}$;

б) если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$;

в) матрица $X(t) = e^{tA}$ удовлетворяет уравнению $\frac{dX}{dt} = AX$; $X(0) = E$.

Методы отыскания e^A:

1) Путем решения системы дифференциальных уравнений. В силу свойства в) i-й столбец матрицы e^{tA} есть решение системы уравнений (в векторной записи) $\dot x = Ax$ с начальными условиями $x_i(0) = 1$, $x_k(0) = 0$ при $k \neq i$ (x_i — i-я координата вектора x).

С помощью матричной экспоненты решить задачу Коши для линейных однородных систем уравнений с начальными условиями $x(0)=C_1$, $y(0)=C_2$ (117–131):

С. 11: 117; 124; <u>128</u> (для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0)=y(0)=2$).

117. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0; \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3$$

$$e^{tA} = B\cdot e^t + C\cdot e^{3t}$$
$$Ae^{tA} = Be^t + 3Ce^t$$

при $t=0$: $\begin{cases} E = B + C \\ A = B + 3C \end{cases} \Rightarrow \quad C = \dfrac{A-E}{2}, \quad B = \dfrac{3E-A}{2}$

$$C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

117. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^t + e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

---

124. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 = 0; \quad \lambda_{1,2} = 3$$

$$e^{tA} = Be^{3t} + Cte^{3t} \qquad \text{при } t=0\text{: } E = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ae^{tA} = 3Be^{3t} + Ce^{3t} + 3tCe^{3t} \qquad C = A - 3B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

124. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1-t & t \\ t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

---

128. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0; \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$$

$$e^{tA} = (B+iC)e^{2t}(\cos 3t + i\sin 3t) + (B-iC)e^{2t}(\cos 3t - i\sin 3t) = e^{2t}(2B\cos 3t - 2C\sin 3t)$$

$$Ae^{tA} = e^{2t}(4B\cos 3t - 4C\sin 3t) + e^{2t}(-6B\sin 3t - 6C\cos 3t)$$

при $t=0$: $E = 2B$, $2C = \dfrac{4B-A}{3} = \dfrac{2E-A}{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

128. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$

2. Решить задачу Коши: $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, и $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ — заданные число и столбец, $\bar{x}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))^T$ — искомая вектор-функция.

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -a \\ 0 & -\lambda & a \\ a & a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + a^2\lambda - a^2\lambda = -\lambda^3 = 0; \quad \lambda_{1,2,3} = 0$$

$$e^{tA} = B + Ct + Dt^2 \qquad \text{при } t=0:\ E = B$$
$$Ae^{tA} = 2Dt + C \qquad C = A$$
$$A^2 e^{tA} = 2D \qquad D = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -a^2 & -a^2 & 0 \\ a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}a^2t^2 & -\frac{1}{2}a^2t^2 & -at \\ \frac{1}{2}a^2t^2 & 1+\frac{1}{2}a^2t^2 & at \\ at & at & 1 \end{pmatrix}\bar{X}_0$$

3. а) Записать (в векторном виде) общее решение системы $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, если матрица A в базисе $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}, \overline{h_4}, \overline{h_5}$ имеет вид $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) Найти матрицу $e^{A'}$.

а) $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_5$ - жорд. базис $\Rightarrow \bar{X} = S e^{A't} S^{-1} \cdot \bar{C}$, где $S = (h_1^{\uparrow} \dots h_5^{\uparrow})$, $\bar{C} = (C_1, \dots, C_5)^T$ - const

б) $$e^{A'} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

4.* Доказать формулу: $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

$$\det e^A = \det(Se^BS^{-1}) = \det(e^B) = \prod_i e^{\lambda_i} = e^{\sum_i \lambda_i} = e^{\operatorname{tr} A}$$

Пример 5. Операционным методом решить задачу Коши
$$y'' - 4y' + 3y = 2(e^t + e^{3t}), \quad t \geqslant 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

$\triangle$ Будем считать, что при $t < 0$ $y(t) \equiv 0$ и правая часть уравнения — тождественный нуль. Тогда так продолженные на всю числовую ось $t \in (-\infty, +\infty)$ решение и правая часть уравнения являются оригиналами. Если $y(t) \risingdotseq Y(p)$, то в силу свойств преобразования Лапласа и начальных условий $y'(t) \risingdotseq pY(p)+1$, $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p)+p-1$. Продолженная нулем при $t < 0$ правая часть уравнения имеет своим преобразованием Лапласа функцию $2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right)$. Переходя в исходном уравнении к преобразованию Лапласа, т. е. умножая его на e^{-pt} и интегрируя по t от нуля до бесконечности, получаем алгебраическое уравнение для нахождения $Y(p)$:
$$p^2Y(p) + p - 1 - 4[pY(p) + 1] + 3Y(p) = 2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right).$$

Если считать комплексный параметр p таким, что $\operatorname{Re} p > 3$, то из алгебраического уравнения находим
$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-3)}\left[\frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3} - p + 5\right].$$
Разложим правую часть на простые дроби:
$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{(p-3)^2}.$$
Приравнивая выражения для $Y(p)$, находим
$$A = -2, \quad B = -1, \quad C = 1, \quad D = 1.$$
Переходя к оригиналам, получаем искомое решение
$$y(t) = (t+1)e^{3t} - (t+2)e^t.$$
▲

Функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$ называется оригиналом, если выполнено:

1. $f(t) \equiv 0$, $t < 0$;
2. функция f непрерывна на любом $[a, b] \subset [0, +\infty)$ кроме конечного числа точек разрыва первого рода;
3. $\exists M > 0$, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$: $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, $\forall t \geq 0$.

1) $t^k e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}$;

2) $\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$;

3) $\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$;

4) $t\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$;

5) $t\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$.

$y(t) \risingdotseq F(p)$

$y'(t) \risingdotseq pF(p) - y(0)$

$y''(t) \risingdotseq py'(t) - y'(0)$

Операционным методом решить при $t \geqslant 0$ задачу Коши (172–183):

172. $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$$p^2F - 1 - 3pF + 2F = \frac{1}{p+1}; \quad F(p^2 - 3p + 2) = \frac{1}{p+1} + 1 \Rightarrow$$

172. $y = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{4}{3}e^{2t}$.

$$F = \frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p-2)} = \frac{A}{p+1} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2} \Rightarrow \begin{array}{l} p=-1:\ A = \frac{1}{6} \\ p=1:\ B = -\frac{3}{2} \\ p=2:\ C = \frac{4}{3} \end{array} \Rightarrow y = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{4}{3}e^{2t}$$

домн. и подст

182. $y'' + 4y = 4(\cos 2t + \sin 2t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$$p^2F - 1 + 4F = \frac{4p}{p^2+4} + \frac{8}{p^2+4} \Rightarrow F = \frac{4p}{(p^2+4)^2} + \frac{8}{(p^2+4)^2} + \frac{1}{p^2+4}$$

$$\frac{8}{(p^2+4)^2} + \frac{1}{p^2+4} = \frac{-p^2+4+4+p^2}{(p^2+4)^2} + \frac{1}{p^2+4} = -\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} + \frac{2}{p^2+4}$$

$$y = t\sin 2t - t\cos 2t + \sin 2t$$

182. $y = (1+t)\sin 2t - t\cos 2t$.

Решить операционным методом задачу Коши при $t \geqslant 0$ (187–197):

189. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y + e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2$.

$$x(t) = F(p),\ y(t) = G(p)$$

$$\begin{cases} pF - 1 = F + G + \frac{1}{p-2} \\ pG - 2 = -2F + 4G + \frac{1}{p-2} \end{cases} \quad \begin{cases} G = (p-1)F - 1 - \frac{1}{p-2} \\ (p-4)(p-1)F - (p-4) - \frac{p-4}{p-2} - 2 = -2F + \frac{1}{p-2} \end{cases}$$

$$F(p-2)(p-3) = p-2 + \frac{p-3}{p-2}$$

$$F = \frac{1}{p-3} + \frac{1}{(p-2)^2}, \quad G = \frac{\overset{p-3+2}{p-1}}{p-3} + \frac{\overset{p-2+1}{p-1}}{(p-2)^2} - 1 - \frac{1}{p+2} = \frac{2}{p-3} + \frac{1}{(p-2)^2}$$

$$\begin{cases} x = e^{3t} + te^{2t} \\ y = 2e^{3t} + te^{2t} \end{cases}$$

189. $x = e^{3t} + te^{2t}$, $y = 2e^{3t} + te^{2t}$.

194. $\begin{cases}\dot{x} = 4x + 5y + 4, \\ \dot{y} = -4x - 4y + 4t,\end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 3.$

$X(t) = F(p), \quad y(t) = G(p)$

$$\begin{cases} pF = 4F + 5G + \frac{4}{p} \\ pG - 3 = -4F - 4G + \frac{4}{p^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{1}{5}\left[F(p-4) - \frac{4}{p}\right] \\ \frac{p+4}{5}\left[F(p-4) - \frac{4}{p}\right] - 3 = -4F + \frac{4}{p^2} \end{cases}$$

$$F(p^2+4) = 4\frac{p+4}{p} + 15 + \frac{20}{p^2}$$

$$F = 4\frac{p+4}{p(p^2+4)} + \frac{15}{p^2+4} + \frac{20}{p^2(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+4}$$

$A = 4 \quad C = -4$

$B = 5 \quad D = -14$

$$F = \frac{4}{p} + \frac{5}{p^2} - 4\frac{p}{p^2+4} + 7\frac{2}{p^2+4}$$

$$G = -\frac{3}{p} - \frac{4}{p^2} + \frac{6p}{p^2+4} - 4\frac{2}{p^2+4}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 4 + 5t - 4\cos 2t + 7\sin 2t \\ y &= -3 - 4t + 6\cos 2t - 4\sin 2t \end{aligned}}$$

194. $x = 4 + 5t - 4\cos 2t + 7\sin 2t,\ y = 6\cos 2t - 4\sin 2t - 3 - 4t.$