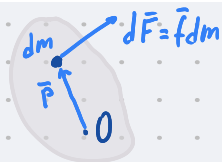


14.10. Используя принцип виртуальных перемещений, доказать, что равенство нулю главного вектора  $\mathbf{R}$  и главного момента  $\mathbf{M}_O$  сил, действующих на твердое тело, является необходимым и достаточным условием равновесия свободного твердого тела.



**Теорема 7.1 (принцип виртуальных перемещений).** Для того чтобы положение  $\mathbf{R}^1$  голономной системы с идеальными связями было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении работа активных сил на любом виртуальном перемещении системы была равна нулю:

$$\delta A = \sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad \forall \delta \mathbf{R} \in (7.5), \quad (7.9)$$

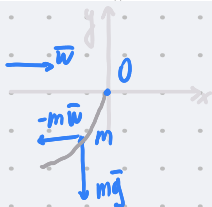
$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{\mathbf{r}} \quad | \cdot dt \Rightarrow \delta \bar{\mathbf{r}} = \delta \bar{\mathbf{v}}_0 + d\bar{\varphi} \times \bar{\mathbf{r}}$$

Если трактовать  $\bar{\mathbf{v}}_0$  и  $\bar{\omega}$  как вект.

$$\delta A = \int \bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \bar{\mathbf{r}} dm = \int [\bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\mathbf{f}} \cdot (d\bar{\varphi} \times \bar{\mathbf{r}})] dm = \bar{\mathbf{R}} \cdot \delta \bar{\mathbf{v}}_0 + \int d\bar{\varphi} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{f}}) dm = \bar{\mathbf{R}} \cdot \delta \bar{\mathbf{v}}_0 + \bar{\mathbf{M}}_O \cdot d\bar{\varphi}$$

$$\bar{\mathbf{r}}^0 \text{ на равн} \Leftrightarrow \forall \delta \bar{\mathbf{v}}_0, d\bar{\varphi} \Rightarrow \delta A = 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{R}} = 0, \bar{\mathbf{M}}_O = 0$$

14.20. Точка подвеса однородной нити движется с постоянным ускорением  $\bar{\mathbf{w}}$  вдоль горизонтальной оси  $Ox$ . Найти форму нити в положении её относительного равновесия в системе координат  $Oxy$ , движущейся поступательно с точкой подвеса  $O$ .



Выберем произв точку на нити с массой m

14.20. Прямая линия  $y = x \tan \alpha$ , где  $\tan \alpha = \frac{g}{w}$ .

14.29. Материальная точка может двигаться без трения по поверхности  $f(x, y, z) = 0$  в силовом поле

$$\{F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)\}.$$

Показать, что решение относительно  $x, y, z, \lambda$  системы уравнений

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

определяет положение равновесия точки и обратно, любому положению равновесия соответствует решение этой системы.

$$\text{ПВП: } \delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0$$

Пусть виртуальное перемещение колеса задается величинами  $\delta x, \delta y, \delta z$ . Продифференцировав уравнения, задающие форму прута, получим, что на виртуальном перемещении должны выполняться условия

$$\psi = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

$$\text{укажем на связи: } \chi = \delta A + \lambda \psi \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \chi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

**14.40.** Маятник составлен из  $n$  одинаковых стержней массы  $m$  и длины  $L$  каждый, последовательно соединенных друг с другом шарнирами ( $n$ -звенный маятник). Маятник может совершать движение в вертикальной плоскости, которая вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикали, проходящей через точку  $A$  закрепления конца первого стержня. Составить уравнения, определяющие положения относительно равновесия системы.

К задачам 14.39, 14.40

**Теорема 7.2.** Для того чтобы положения  $q^k$  были положениями равновесия стационарной системы, необходимо и достаточно, чтобы в этих положениях все обобщенные силы были равны нулю:

$$Q_k(q^k) - \sum_i \left( m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.15)$$

Если механическая система является консервативной, то обобщенные силы выражаются через потенциалы энергии системы. Под формулами

$$Q_k(q) = - \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q_k} \Rightarrow Q_k(q) = - \frac{\partial \Pi(q)}{\partial q_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.16)$$

В этом случае условия равновесия (7.15) принимают вид:

$$\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.17)$$

т.е. положениями равновесия консервативной системы являются стационарные значения потенциальной энергии.

$$S_i = \sin \varphi_i$$

$$C_i = \cos \varphi_i$$

$$t_i = t g \varphi_i$$

$$\Pi = -mgL \left[ \frac{1}{2} C_1 + \left. \begin{matrix} + C_1 + \frac{1}{2} C_2 + \\ + \dots + \\ + C_1 + \dots + \frac{1}{2} C_n \end{matrix} \right\}_{n-1} \right] \Rightarrow$$

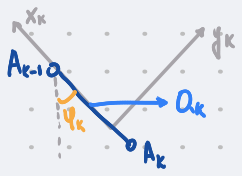
$$\Pi = -mgL \left[ (n-1 + \frac{1}{2}) C_1 + (n-2 + \frac{1}{2}) C_2 + \dots + \frac{1}{2} C_n \right]$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} = mgL (n-k + \frac{1}{2}) S_k$$

$$Q^{op} = Q^{op} + Q^{op} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q}; \quad V = T^{opm} - T$$

$$T_k^r = \frac{1}{2} m (V_k^r)^2 + \frac{1}{2} \hat{J}_{O_k} \dot{\varphi}_k^2$$

$$T_k^a = \frac{1}{2} m [(V_k^r)^2 + (V_k^e)^2] + \frac{1}{2} \hat{\Omega}^T \hat{J} \hat{\Omega}$$



$$\Omega = \bar{\omega} + \dot{\varphi}_k = \begin{bmatrix} -\omega \cos \varphi_k \\ \omega \sin \varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{bmatrix}, \quad \hat{J} = \text{diag}(0, \frac{m l^2}{12}, \frac{m l^2}{12})$$

6 ст. осей

$$V_k = -\frac{1}{2} m (V_k^e)^2 - \frac{1}{2} \frac{m l^2}{12} \omega^2 \sin^2 \varphi_k$$

$$V = \left[ \frac{1}{2} S_1^2 + \frac{1}{12} S_1^2 + \left( S_1 + \frac{1}{2} S_2 \right)^2 + \frac{1}{12} S_2^2 + \dots + \left( S_1 + \dots + \frac{1}{2} S_n \right)^2 + \frac{1}{12} S_n^2 \right] \cdot \left( -\frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = \left[ (S_1 + \dots + \frac{1}{2} S_k) + \frac{1}{6} S_k + \left. \begin{matrix} + 2(S_1 + \dots + S_k + \frac{1}{2} S_{k+1}) + \\ \dots \\ + 2(S_1 + \dots + \frac{1}{2} S_n) \end{matrix} \right\}_{n-k} \right] \cdot \left( -\frac{1}{2} m l^2 \omega^2 C_k \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = \left[ (n-k + \frac{1}{2}) S_1 + \dots + (n-k + \frac{1}{2}) S_{k-1} + \overbrace{(n-k + \frac{1}{4}) S_k}^A + \frac{1}{12} S_k + \dots + (n-(k+1) + \frac{1}{2}) S_{k+1} + \dots + \frac{1}{2} S_n \right] \cdot (-m l^2 \omega^2 C_k)$$

$$A = (n-k + \frac{1}{2}) S_k - \frac{1}{4} S_k + \frac{1}{12} S_k = (n-k + \frac{1}{2}) S_k - \frac{1}{6} S_k$$

$$\frac{\partial V}{\partial y_k} = \left[ \sum_{i=1}^k (n-k+\frac{1}{2}) S_i + \sum_{i=k+1}^n (n-i+\frac{1}{2}) S_i - \frac{1}{6} S_k \right] (-m l^4 \omega^2 L_k)$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial y_k} - \frac{\partial V}{\partial y_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

$$m l^4 \omega^2 L_k \cdot \left[ \sum_{i=1}^k (n-k+\frac{1}{2}) S_i + \sum_{i=k+1}^n (n-i+\frac{1}{2}) S_i - \frac{1}{6} S_k \right] = m g l^4 (n-k+\frac{1}{2}) S_k$$

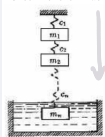
$$\frac{1}{g} \omega^2 L_k \cdot \left[ \sum_{i=1}^k (n-k+\frac{1}{2}) S_i + \sum_{i=k+1}^n (n-i+\frac{1}{2}) S_i - \frac{1}{6} S_k \right] = (n-k+\frac{1}{2}) t_k$$

Сходится с ответом

$$\sum_{i=1}^n (n-i+\frac{1}{2}) S_i - \sum_{i=1}^k (k-i) S_i = \sum_{i=1}^k (1) + \sum_{i=k+1}^n (1) - \sum_{i=1}^k (2) = \sum_{i=1}^k (n-k+\frac{1}{2}) S_i + \sum_{i=k+1}^n (n-i+\frac{1}{2}) S_i$$

$$14.40. \quad \frac{\omega^2 L}{g} \left[ \sum_{i=1}^n \left( n-i+\frac{1}{2} \right) \sin \varphi_i - \frac{1}{6} \sin \varphi_1 - \sum_{i=1}^k (k-i) \sin \varphi_i \right] = \\ = \left( n-k+\frac{1}{2} \right) \sin \varphi_1 \quad (k = \overline{1, n}).$$

17.8. Система состоит из  $n$  грузов, которые последовательно связаны между собой и с неподвижной опорой пружинами жесткости  $c_i$  и могут перемещаться по вертикали. На последний груз  $m_n$  действует сила вязкого трения  $F = -\beta \dot{y}$ ,  $\beta > 0$ . Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.



К задаче 17.8

I способ

$$m_i \ddot{y}_i + \beta \dot{y}_i \delta_{in} - c_{i+1} (y_{i+1} - y_i) + c_i (y_i - y_{i-1}) = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix}$$

$$(*) \quad A \ddot{X} + B \dot{X} + CX = 0$$

**Теорема.** Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , производная которой  $\dot{V}$  в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с  $V$ , то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

$$V(X, \dot{X}) = \underbrace{\frac{1}{2} \dot{X}^T A \dot{X}}_{\Gamma} + \underbrace{\frac{1}{2} X^T C X}_{\Pi} > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{X}^T A \ddot{X} + X^T C \dot{X} \stackrel{(*)}{=} \\ &= \dot{X}^T (-B \dot{X} - C X) + X^T C \dot{X} = -\dot{X}^T B \dot{X} = -\beta \dot{y}_n^2 < 0 \Rightarrow \text{п.р. ас. уст} \end{aligned}$$

## I способ

$$V = E = T + \Pi, \quad \dot{V} = N_F, \quad F = -\beta \dot{X}_n, \quad N_F = F \dot{X} = -\beta \dot{X}_n^2$$

$$\dot{V} = -\beta \dot{X}_n^2 \Rightarrow M \{ \dot{X}_n = 0 \}$$

г-нам, что не существует таких функций, при которых функции  $m_n$  покоятся.

Из того, что функции покоятся  $\Rightarrow C_n$  имеет постоянную функцию  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  функции  $m_{n-1}$  покоятся  $\Rightarrow \dots \Rightarrow$  система покоится  $\Rightarrow$  п.р. ас. уст

Th 5-k

**Теорема Барбашина-Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости.** Если в некоторой окрестности положения равновесия  $\vec{X} = \vec{0}$  существует функция Ляпунова  $V(\vec{X})$  такая, что

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i \begin{cases} = 0, & \vec{X} \in M \\ < 0, & \vec{X} \notin M \end{cases}$$

где  $M$  — некоторое множество, выбранное так, что единственной целой траекторией исследуемой автономной системы, лежащей в  $M$ , является  $\vec{X} \equiv \vec{0}$ , то

а) если  $V(\vec{X})$  имеет минимум в положении равновесия  $\vec{X} = \vec{0}$ , то это положение равновесия асимптотически устойчиво;

б) если  $V(\vec{X})$  знакоопределена в окрестности  $\vec{X} = \vec{0}$ , то положение равновесия  $\vec{X} = \vec{0}$  неустойчиво.

Исследуйте на устойчивость нулевое решение с помощью прямого метода Ляпунова:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^3 + xy^3, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - x^4. \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{4} (X^4 + y^4) > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= X^3 \dot{X} + y^3 \dot{y} = X^3 (-X^3 - y^3 + xy^3) + y^3 (X^3 - y^3 - x^4) = \\ &= -X^6 - X^3 y^3 + X^4 y^3 + y^3 X^3 - y^6 - X^4 y^3 = -X^6 - y^6 < 0 \Rightarrow \text{П.Р. ас. уст.} \end{aligned}$$

## I способ

**Теорема (Четаева о неустойчивости).** Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  такая, что в силу уравнений любой окрестности (1) существует область  $V > 0$  и во всех точках области  $V > 0$  производная  $\dot{V}$  в силу этих уравнений принимает положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.

$$V = xy > 0 \text{ при } \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}y + x\dot{y} = xy + y^2 + x^2y + \text{Th. Четаева} \\ &+ x^2 - xy - xy^2 \sim x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow \text{П.Р. Не уст} \end{aligned}$$

Г2.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + x^3, \\ \dot{y} = x - y - y^3. \end{cases}$$

## II способ

$$\text{система лнн. пригл. } \begin{cases} \dot{X} = X + y \\ \dot{y} = X - y \end{cases}$$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \text{П.Р. Не уст}$$

Th. Ляпунова об уст по л.г.

**Теорема.** Если все корни характеристического уравнения (3) имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от начальных условий (1). Если же среди корней характеристического уравнения есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво — такое независимое от начальных условий (1).

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$$

Примечание к задаче ТЗ

Функцию Ляпунова искать в виде  $V = (ax + by)^2 + cx^4$ .

$$V = (ax + by)^2 + cx^4 > 0 \quad \text{при } c > 0$$

$$\dot{V} = 2(ax + by)(a\dot{x} + b\dot{y}) + 4cx^3\dot{x} =$$

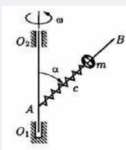
$$= 2(ax + by)(ay - 3ax - ax^3 + 6bx - 2by) + 4cx^3(y - 3x - x^3)$$

$$\text{При } a = 2b \quad \dot{V} = -4(2x + y)b^2x^3 + 4cx^3(y - 3x - x^3) =$$

$$= -8b^2x^4 - 4b^2x^3y + 4cx^3y - 12cx^4 - 4cx^6 = 4((-b^2)x^3y - (2b^2 + 3c)x^4 - cx^6)$$

$$\text{При } \begin{cases} a = 2b \\ c = b^2 \end{cases} \quad \dot{V} = -20cx^4 - 4cx^6 < 0 \Rightarrow \text{п.р. ас. уст}$$

15.2. Стержень  $AB$ , образующий угол  $\alpha$  с вертикалью, вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг вертикальной оси  $O_1O_2$ , проходящей через его конец  $A$ . По стержню может двигаться без трения колечко массы  $m$ , соединенное с точкой  $A$  пружиной жесткости  $c$ . Длина пружины в недеформированном состоянии равна  $l_0$ . Найти положения относительно равновесия колечка и исследовать их устойчивость.

 $\alpha = \text{const}$ 

$$\Pi = mgl \cos \alpha - \frac{1}{2} m \omega^2 l^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} c (l - l_0)^2 \quad (1)$$

$$\Pi_l = c(l - l_0) + mg \cos \alpha - m \omega^2 l \sin^2 \alpha = 0 \quad (2)$$

$$1) \text{ при } c \neq m \omega^2 \sin^2 \alpha \quad l = \frac{c l_0 - mg \cos \alpha}{c - m \omega^2 \sin^2 \alpha} - \text{п.р.}$$

Теорема. Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

$$\Pi_{ll} = c - m \omega^2 \sin^2 \alpha$$

$$\bullet \Pi_{ll} > 0 \text{ при } c > m \omega^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \text{уст}$$

$$\bullet \Pi_{ll} < 0 \text{ при } c < m \omega^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \text{неуст}$$

Т. Ляпунова

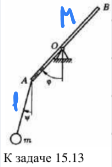
$$2) \text{ при } c = m \omega^2 \sin^2 \alpha$$

$$\Pi = \text{const} \Rightarrow l - \text{любой} - \text{неуст п.р. по опр}$$

Теорема 1. Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это известно уже по члену второго порядка в разложении функции  $\Pi$  в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассмотрения членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

15.2. Положение равновесия  $l = \frac{c l_0 - mg \cos \alpha}{c - m \omega^2 \sin^2 \alpha}$  устойчиво при  $c > m \omega^2 \sin^2 \alpha$  и неустойчиво при  $c < m \omega^2 \sin^2 \alpha$ . При  $l_0 c = mg \cos \alpha$  любое положение колечка является положением равновесия.

15.13. Груз массы  $m$  подвешен на невесомой нерастяжимой нити длины  $l$  к точке  $A$  однородного стержня массы  $M$ , который может вращаться вокруг своей неподвижной точки  $O$  ( $AO = l_1$ ,  $OB = l_2$ ). Движение происходит в вертикальной плоскости. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.



К задаче 15.13

$$\Pi = Mg \frac{l_2 - l_1}{2} \cos \psi - mg(l \cos \psi + l_1 \cos \psi)$$

$$\Pi_\psi = -\frac{1}{2} Mg(l_2 - l_1) \sin \psi + mg l_1 \sin \psi \Rightarrow \psi_1 = 0, \psi_2 = \pi$$

$$\Pi_\psi = mg l_1 \sin \psi = 0 \Rightarrow \psi_{1,2} = 0$$

$$\Pi_{\psi\psi} = -\frac{1}{2} Mg(l_2 - l_1) \cos \psi + mg l_1 \cos \psi$$

$$\Pi_{\psi\psi} = mg l_1 \cos \psi > 0 \text{ при } \psi = \psi_{1,2}$$

$$C = \begin{bmatrix} \Pi_{\psi\psi} & 0 \\ 0 & \Pi_{\psi\psi} \end{bmatrix} \text{ Sign } \Delta_2 = \text{Sign } \Delta_1 = \Pi_{\psi\psi}$$

$$\Pi_{\psi\psi} = \frac{1}{2} g \left[ \frac{M}{l_1} (l_2 - l_1) \pm 2m l_1 \right]$$

$$C_1 > 0, C_2 \geq 0 \text{ при } 2ml_1 > M(l_2 - l_1)$$

Тк. Л-Д

П.Р.  $\psi_1, \psi_2$  уст

Тк. Ляпунова

П.Р.  $\psi_2, \psi_2$  неуст

**Теорема.** Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

**Теорема 1.** Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это является уже по членам второго порядка в разложении функции  $\Pi$  в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассмотрения членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

$$C_1 \geq 0, C_2 > 0 \text{ при } 2ml_1 < M(l_2 - l_1)$$

Тк. Л-Д

П.Р.  $\psi_1, \psi_2$  уст

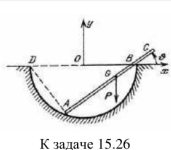
Тк. Ляпунова

П.Р.  $\psi_1, \psi_1$  неуст

При  $2ml_1 = M(l_2 - l_1)$   $\Pi$  не зависит от  $\psi \Rightarrow \psi_3 = 0$  по опр  $\psi_3$  - любое неуст П.Р.

15.13. При  $2ml_1 > M(l_2 - l_1)$  положение равновесия  $\varphi_1 = 0, \psi_1 = 0$  устойчиво, а положение равновесия  $\varphi_2 = \pi, \psi_2 = 0$  неустойчиво, и, наоборот, при  $2ml_1 < M(l_2 - l_1)$  положение равновесия  $\varphi_1 = 0, \psi_1 = 0$  неустойчиво, а положение равновесия  $\varphi_2 = \pi, \psi_2 = 0$  устойчиво. В случае  $2ml_1 = M(l_2 - l_1)$  имеет место континуум неустойчивых положений равновесия  $\varphi_3$  - любое,  $\psi_3 = 0$ .

15.26. Тяжёлый однородный стержень длины  $l$  и массы  $m$ , опираясь на край полусферической чаши радиуса  $r$ , нижним концом может скользить по её внутренней гладкой поверхности. Геометрические параметры удовлетворяют условию  $r < l < 2r$ . Определить значение угла наклона  $\theta$  стержня к линии горизонта в положении равновесия. Исследовать устойчивость положения равновесия.



К задаче 15.26

$$GB = AB - AG = 2r \cos \theta - \frac{l}{2}$$

$$\Pi = -mg \left( 2r \cos \theta - \frac{l}{2} \right) \sin \theta \sim \left( -4 \cos \theta + \frac{l}{r} \right) \sin \theta$$

$$\Pi_\theta = -4 \cos 2\theta + \frac{l}{r} \cos \theta = -8 \cos^2 \theta + 4 + \frac{l}{r} \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{l}{r} \pm \frac{1}{16} \sqrt{\frac{l^2}{r^2} + 128}$$

$$\Pi_{\theta\theta} = 8 \sin 2\theta - \frac{l}{r} \sin \theta = \sin \theta \left( 16 \cos \theta - \frac{l}{r} \right)$$

$$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \Pi_{\theta\theta} > 0 \text{ при } \cos \theta > \frac{1}{16} \cdot \frac{l}{r}$$

$$\theta_1 = \arccos \left( \frac{1}{16} \cdot \frac{l}{r} + \frac{1}{16} \sqrt{\frac{l^2}{r^2} + 128} \right) - \text{уст. п.р.}$$

$$\theta_2 = \arccos \left( \frac{1}{16} \cdot \frac{l}{r} - \frac{1}{16} \sqrt{\frac{l^2}{r^2} + 128} \right) - \text{неуст. п.р.}$$

Теорема. Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Теорема 1. Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это является уже по крайней мере вторым порядком в разложении функции  $\Pi$  в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассмотрения членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

15.26.  $\varphi \approx \arccos 0.92$ , устойчиво. ???

Т4. Материальная точка находится в однородном поле тяжести на гладкой поверхности, определяемой уравнением (ось  $Oz$  направлена вертикально вверх):

$$z = \sin(x+y) - \cos y.$$

Найдите все положения равновесия материальной точки и исследуйте их устойчивость.

$$\Pi = mgz \sim z = \sin(x+y) - \cos y$$

$$\begin{aligned} \Pi_x = \cos(x+y) &= 0 \Rightarrow x+y = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \Pi_y = \cos(x+y) + \sin y &= 0 \Rightarrow y = \pi k \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi m \\ y = \pi n \end{cases} - \text{п.р.}$$

$$\left( \begin{bmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{xy} \\ \Pi_{xy} & \Pi_{yy} \end{bmatrix} \right) \begin{aligned} &1 - \sin(x+y) > 0 \\ &\sin^2(x+y) - \sin(x+y) \cos y - \sin^2(x+y) > 0 \Rightarrow \sin(x+y) < 0 \\ &\cos y > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ y &= 2\pi k \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k) \\ y = 2\pi k \end{cases} \text{уст. п.р.} \quad \text{т.л. Л-Д}$$

$$2) \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k) \\ y = 2\pi k \end{cases} \text{неуст. п.р.} \quad \text{т.л. Ляпунова}$$

