Неделя 7

7. **Функция Гамильтона и канонические уравнения**
19.12, 19.21, 19.23 *(найти решение в квадратурах)*, 19.47, 19.51

№ 19.12

В задачах 19.12–19.16 найти функцию Лагранжа механической системы, динамика которой задана функцией Гамильтона.

19.12. $H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + \frac{a}{4}\left(q_1 - q_2\right)^2 + \frac{b}{4}\left(q_1 + q_2\right)^2$.

Для механических систем $\mathcal{H}$ выражается более простой формулой

$$\mathcal{H} = \hat{\mathcal{L}}_2 - \mathcal{L}_0$$

Теория из семинара 7 (23 минута)

Крышкой ($\hat{q}$) обозначаем величину (q), выраженную через новые переменные (p вместо q)

Опр. (Гамильтониан).

Гамильтониан или **функция Гамильтона** ($\mathcal{H}$) — потенциал обратного преобразования (от p к $\dot{q}$)

$$\mathcal{H} = \sum \hat{\dot{q}}_i p_i - \hat{\mathcal{L}}, \text{ где } \hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(q, \hat{\dot{q}}, t)$$

Вывод из Теорема (Донкина)

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \sum \hat{p}_i \dot{q}_i - \hat{\mathcal{H}} \quad (19.2.1)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} p^T \tilde{A} p + \tilde{b}^T p + \tilde{c} \Rightarrow \mathcal{L} = \hat{\mathcal{H}}_2 - \mathcal{H}_0 \quad (19.2.2)$$

(аналогично выводу $\boxed{\mathcal{H} = \hat{\mathcal{L}}_2 - \mathcal{L}_0}$)

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \cancel{\dot{p}_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}} \end{cases} \text{ – уравнения Гамильтона}$$

$$\Rightarrow \dot{q} = \tilde{A} p + b \Rightarrow \hat{p} = \tilde{A}^{-1}(\dot{q} - \tilde{b})$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q} - \tilde{b})^T \tilde{A}^{-1} (\dot{q} - \tilde{b}) - \mathcal{H}_0 \quad (19.2.3)$$

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)}_{\mathcal{H}_2} + \underbrace{\frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 + \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2}_{\mathcal{H}_0} \quad \text{(см. 19.2.1)}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ просто коэфы при $\frac{1}{2} p_1^2$ и $\frac{1}{2} p_2^2$, $\Rightarrow \tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

19.2.3 $\rightarrow$ $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 - \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2$$

19.12. $L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{a}{4}\left(q_1 - q_2\right)^2 - \frac{b}{4}\left(q_1 + q_2\right)^2$.

19.21. При отсутствии силового поля уравнения динамики релятивистской частицы, масса покоя которой равна m_0, определяются функцией Лагранжа $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}$, где c – скорость света, x, y, z – декартовы координаты. Составить канонические уравнения и найти закон движения частицы.

Система не механическая $\Rightarrow$ ищем по опр. $\boxed{\mathcal{H} = \sum \hat{\dot{q}}_i p_i - \hat{\mathcal{L}}}$.

$$\boxed{p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}} \Rightarrow p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}{c^2}}} \quad (19.21.1)$$

$\mathcal{H} = \sum p_i \hat{\dot{x}}_i - \hat{\mathcal{L}}$, нужно найти $\hat{\dot{x}}_i$ (выразить $\dot{x}_i$ через p_i)

$\dot X_1^2, \dot X_2^2, \dot X_3^2$ входят симм. в (19.21.1) => ищем $\hat{\dot X}_i = f(p)\,p_i$, где $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$

Подст. в (19.21.1): $p_i = \dfrac{m f p_i}{\sqrt{1 - \frac{p^2 f^2}{c^2}}}$ =>

$$c^2 - p^2 f^2 = m^2 c^2 f^2 \Rightarrow f = \frac{c}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$\hat{\dot X}_i = f p_i = \frac{c\, p_i}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$\hat{\mathcal L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{f^2 p^2}{c^2}} = -mc\sqrt{1 - \frac{p^2}{p^2 + m^2c^2}} = -\frac{m^2 c^3}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$\mathcal H = \sum p_i \hat{\dot x}_i - \hat{\mathcal L} = \frac{c\,p^2}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}} + \frac{m^2c^3}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

$\mathcal H$ - явно не зависит от x_i => x_1, x_2, x_3 - цикл. коорд

Опр. (Циклические координаты).

Координата q_i называется циклической, если она не входит в $\mathcal L \Rightarrow \frac{\partial \mathcal L}{\partial q_i} = 0$, $\frac{\partial \mathcal L}{\partial \dot q_i} = const$

Напомним, что

$$\frac{\partial \mathcal H}{\partial q_j} = -\frac{\partial \hat{\mathcal L}}{\partial q_j}$$

Следовательно q_i циклическая в обоих описаниях (Лагранжевом и Гамильтоновом)

$$\dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \Rightarrow \boxed{p_i = p_i^0 = const}$$

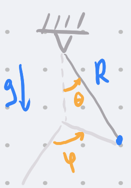
$$\begin{cases} \dot q_i = \frac{\partial \mathcal H}{\partial p_i} \\ \dot p_i = -\frac{\partial \mathcal H}{\partial q_i} \end{cases} \text{ — уравнения Гамильтона}$$

$$\dot x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{2c^2 p_i}{2\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}} = \frac{c^2}{\mathcal H} p_i, \quad p_i = p_i^0 = const \Rightarrow \boxed{x_i = x_i^0 + \frac{c^2}{\mathcal H} p_i^0 t}$$

ур-е движения: $\boxed{\bar x = \bar x^0 + \dfrac{c^2 \bar p^0}{H} t}$

19.23. Составить канонические уравнения движения материальной точки массы m, движущейся по гладкой сфере радиуса R в однородном поле тяжести (сферический маятник).

19.23 *(найти решение в квадратурах)*



$$T = \frac{1}{2} m r^2 (\dot\theta^2 + \sin^2\theta\, \dot\varphi^2), \quad \Pi = -mgr\cos\theta$$

Система консервативна => $\mathcal H = \hat T + \Pi$

$$\mathcal H = \underbrace{\frac{1}{2} p^T A^{-1} p}_{\hat T} + \Pi(q)$$

$$A = \begin{bmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & mr^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{mr^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\psi^2}{2mr^2\sin^2\theta} - mgr\cos\theta$$

19.23. $H = \dfrac{1}{2mR^2}\left(p_\theta^{\,2} + \dfrac{p_\varphi^{\,2}}{\sin^2\theta}\right) + mgR\cos\theta$.

$\begin{cases} \dot q_i = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot p_i = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases}$ – уравнения Гамильтона

$$\begin{cases} (1)\ \dot\theta = \dfrac{p_\theta}{mr^2}; \quad \dot\psi = \dfrac{p_\psi}{mr^2\sin^2\theta}\ (3) \\ (2)\ \dot p_\theta = \dfrac{p_\psi^2}{mr^2\sin^3\theta}\cos\theta - mgr\sin\theta; \quad \dot p_\psi = 0 \end{cases}$$

(ψ цикл. коорд.)

$\dot p_\psi = 0 \Rightarrow \boxed{p_\psi = p_\psi^0 = const}$

$\mathcal{H}$ не зависит явно от $t \Rightarrow \mathcal{H} = h = const$

из $\mathcal{H}$ выразим $p_\theta = p_\theta(\theta, const)$ и подст в $\dot\theta$ (1):

$$(4)\quad p_\theta = \sqrt{2mr^2(h + mgr\cos\theta) - \frac{p_\psi^2}{\sin^2\theta}}$$

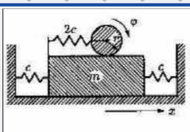
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta(\theta)}{mr^2} \Rightarrow \boxed{t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{mr^2}{p_\theta(\theta)}\,d\theta \Rightarrow \text{получили } \theta(t)}$$

$$\theta(t),\ p_\psi^0 \to (3):\quad \boxed{\psi(t) - \psi_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{p_\psi^0}{mr^2\sin\theta(t)}\,dt}$$

$$\theta(t) \to (4):\quad \boxed{p_\theta(t) = p_\theta(\theta(t))}$$

19.47. Составить канонические уравнения Гамильтона для системы, описанной в задаче 16.40.

16.40. Доска массы m, которая может скользить по гладкой горизонтальной направляющей, связана с неподвижными стенками двумя одинаковыми пружинами жесткости c каждая. По доске катится без проскальзывания диск массы $\frac{m}{2}$ и радиуса r, центр которого соединён с доской пружиной жесткости $2c$, как показано на рисунке. Найти малые колебания системы.



К задаче 16.40

$$\Pi = \underbrace{\frac12 c x^2 \cdot 2}_{\text{доска}} + \underbrace{\frac12 \cdot 2c\cdot(r\varphi)^2}_{\text{диск}} = cx^2 + cr^2\varphi^2$$

(*) кажется в ответах использовали мом. ин. кольца, а не диска

$$T = \underbrace{\frac12 m\dot x^2}_{\text{доска}} + \underbrace{\frac12\cdot\frac12\cdot\overset{(*)}{\frac{m}{2}}\cdot r^2\cdot\dot\varphi^2}_{\text{диск отн}} + \underbrace{\frac12\cdot\frac{m}{2}\cdot(\dot x + r\dot\varphi)^2}_{\text{диск п. м.}} = \frac34 m\dot x^2 + \frac38 mr^2\dot\varphi^2 + \frac12 mr\dot\varphi\dot x$$

$\mathcal{H} = \underbrace{\frac12 p^T A^{-1} p}_{\hat T} + \Pi(q)$ система конс $\Rightarrow \mathcal{H} = \hat T + \Pi$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & \frac{1}{2}mr \\ \frac{1}{2}mr & \frac{3}{4}mr^2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{16}{7m^2r^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{4}mr^2 & -\frac{1}{2}mr \\ -\frac{1}{2}mr & \frac{3}{2}m \end{bmatrix} = \frac{4}{7mr^2} \begin{bmatrix} 3r^2 & -4r \\ -4r & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H} = \frac{2}{7mr^2}\left[3r^2p_x^2 - 4rp_x p_\varphi + 6p_\varphi^2\right] + cx^2 + cr^2\varphi^2$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases} \text{— уравнения Гамильтона}$$

:

$$\dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} = \frac{2}{7mr}\cdot(6rp_x - 4p_\varphi) \qquad \dot{p}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = -2cx$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\varphi} = \frac{2}{7mr^2}(12p_\varphi - 4rp_x) \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -2cr^2\varphi$$

Не сход.

19.47. $\dot{x} = \dfrac{4rp_x - 2p_\varphi}{5mr}, \quad \dot{p}_x = -2cx, \quad \dot{\varphi} = \dfrac{6p_\varphi - 2rp_x}{5mr^2}, \quad \dot{p}_\varphi = -2r^2\varphi.$

19.51. В состоянии равновесия (q^*, p^*) функция Гамильтона $H(q,p)$ имеет строгий минимум по всем переменным. Доказать, что это состояние устойчиво по Ляпунову.

$\exists\ \mathcal{H} = \mathcal{H}(q,p)$,

(q^0, p^0) – п.р: $H(q^0, p^0)$ – стр. лок мин $\Rightarrow (q^0, p^0)$ – уст по Ляпунову

$\square$ 1. Без огр общн-ти $H(q^0, p^0) = 0$ (опр. с точн. до конст)

или можно $\Delta V = \mathcal{H}(q,p) - \mathcal{H}(q^*, p^*)$

2. $\mathcal{H}(q^0, p^0) = 0$;

$\mathcal{H}(q,p) \geqslant 0$ в $\mathring{U}_\varepsilon(q^0, p^0)$ $\Rightarrow \mathcal{H}$ – полож. опр в $\mathring{U}_\varepsilon(q^0, p^0)$

3. $\mathcal{H}$ – первый интеграл: $\cancel{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}} + \cancel{\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}} = 0$

Критерий первого интеграла для Гамильтоновых систем имеет вид:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \underbrace{\sum\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)}_{\{H,G\}} = 0, \text{ где } \{H,G\} \text{ — скобка Пуассона}$$

$\dot{\mathcal{H}}(q,p) = 0 \Rightarrow$ п.р. (q^0, p^0) – уст.

Th. Ляпунова

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений является или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво.*

Неделя 8

8. Первые интегралы. Скобки Пуассона
20.2, 20.14, 20.24, 20.34, 20.36

№ 20.2

В задачах 20.2 – 20.13 для заданных функций $\varphi(q,p)$ и $\psi(q,p)$ вычислить скобки Пуассона.

20.2. $\varphi = q^2 + p^2, \quad \psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{p}{q}\right)$.

Опр. (Скобка Пуассона).

Сокращенная запись для $\sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} \right)$

Обозначается $\{H, G\}$

Можно представить в виде дифференциального оператора $\{H, G\} = U_H G$

$$U_H = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\{\varphi, \psi\} = \frac{\partial \varphi}{\partial p}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 2q; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 2p;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{1}{1+(p/q)^2}\cdot\left(-\frac{p}{q^2}\right) = -\frac{p}{p^2+q^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{1+(p/q)^2}\cdot\frac{1}{q} = \frac{q}{p^2+q^2}$$

$$\{\varphi, \psi\} = -2p\cdot\frac{q^2}{p^2+q^2} - 2q\cdot\frac{q}{p^2+q^2} = -2$$

$\{\ldots\} = -\{\ldots\}$

в лекциях   в задачнике

20.2. $(\varphi, \psi) = \frac{2}{1+(p/q)^2} + \frac{2p}{1+(p/q)^2}\frac{p}{q^2} = 2.$

20.14. С помощью скобок Пуассона записать канонические уравнения Гамильтона.

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases} \text{ — уравнения Гамильтона}$$

Опр. (Скобка Пуассона).

Сокращенная запись для $\sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i} \right)$

Обозначается $\{H, G\}$

Можно представить в виде дифференциального оператора $\{H, G\} = U_H G$

$$U_H = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\{H, F\} = \sum \boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i}}\frac{\partial F}{\partial q_i} + \left(\boxed{-\frac{\partial H}{\partial q_i}}\right)\cdot\frac{\partial F}{\partial p_i} \Rightarrow \begin{aligned} \{H, q_i\} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\ \{H, p_i\} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \end{aligned}$$

хотим выразить

20.14. $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = (q_i, H), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = (p_i, H).$

ответ с „-" (как в пред. задаче)

№ 20.24

20.24. Показать, что для системы с гамильтонианом $H = H\left[\varphi_1(q_1, p_1), \ldots, \varphi_n(q_n, p_n), t\right]$ функции $\varphi_k(q_k, p_k) = \alpha_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ являются первыми интегралами. Считая, что первые интегралы разрешимы относительно импульсов $p_i = \psi_i(q_i, \alpha_i)$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ найти движение системы в квадратурах.

Из лекции 8:

2. Отделимая комбинация

Случай, когда $\mathcal{H} = \mathcal{H}[\phi_1(q_1, p_1), q_{i>1}, p_{i>1}, t]$

ϕ_1 - |Первый интеграл:

$$\cancelto{0}{\frac{\partial \phi_1}{\partial t}} + \{\mathcal{H}, \phi_1\} = \frac{\partial H}{\partial \phi_1}\,\cancelto{0}{\left[\frac{\partial \phi_1}{\partial p_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1}\frac{\partial \phi_1}{\partial p_1}\right]}$$

$$\phi_1(q_1, p_1) = const = \phi_1^0$$

Тогда из |уравнений Гамильтона:

$$\begin{cases} q_i \dot{>} 1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}[\phi_1^0, q_{i>1}, p_{i>1}, t] \\ p_i \dot{>} 1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}[\phi_1^0, q_{i>1}, p_{i>1}, t] \end{cases}$$

Получили понижение порядка на две единицы

Допустим, что $q_{i>1}(t), p_{i>1}(t)$ - решения |этой системы

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_1}[\overset{const}{\phi_1(q_1, p_1)}, q_{i>1}(t), p_{i>1}(t), t]\,\frac{\partial \phi_1(q_1,p_1)}{\partial p_1} \\ \dot{p}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_1}[\phi_1(q_1, p_1), q_{i>1}(t), p_{i>1}(t), t]\,\frac{\partial \phi_1(q_1,p_1)}{\partial q_1} \end{cases}$$

$$\phi_1(q_1, p_1) = \phi_1^0 \Rightarrow p_1 = f(q_1, \phi_1^0)$$

Подставляя ^... в $\dot{q}_1$ получим уравнение с разделяющимися переменными
Подставив полученный q_1 в ^... получим p_1

вставить доделанный конспект

20.24. Показать, что для системы с гамильтонианом $H = H\left[\varphi_1(q_1, p_1), \ldots, \varphi_n(q_n, p_n), t\right]$ функции $\varphi_k(q_k, p_k) = \alpha_k$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$ являются первыми интегралами. Считая, что первые интегралы разрешимы относительно импульсов $p_i = \psi_i(q_i, \alpha_i)$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$ найти движение системы в квадратурах.

Опр. (Первый интеграл).

Пусть есть система ДУ $\dot{x} = F(t, x)$, тогда $G(t, x)$ — первый интеграл $\Leftrightarrow$ $G(t, x(x_0, t_0, t)) = \text{const} \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial t} + \sum \frac{\partial G}{\partial x_i} F_i = 0$ — критерий первого интеграла

В Гамильтоновых системах первый интеграл в общем случае:

$$G = G(t, q, p)$$

Критерий первого интеграла для Гамильтоновых систем имеет вид:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \underbrace{\sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right)}_{\{H, G\}} = 0, \text{ где } \{H, G\} \text{ — скобка Пуассона}$$

1) $\exists\, \mathcal{H} = \mathcal{H}[\varphi_k(q_k, p_k), t]$, $\Rightarrow \varphi_k$ - п.и.

$\varphi_k(q_k, p_k) = \alpha_k \quad (k = \overline{1,n})$

$\square$ кр. п.и.: $\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \{\mathcal{H}, \varphi_k\} = 0$, $\quad \{\mathcal{H}, \varphi_k\} = \sum \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i}$

0, т.к. $\varphi_k(q_k, p_k)$

$$\varphi_k = \varphi_k(q_k, p_k) \Rightarrow \sum \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k} \Rightarrow \sum \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k}$$

для p аналогично

Тогда $\{\mathcal{H}, \varphi_k\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_k} \cdot \cancelto{0}{\left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k}\right]} = 0 \Rightarrow \varphi_k(q_k, p_k) = \alpha_k = const$ $\blacksquare$

2) $\exists\, p_k = \psi_k(q_k, \alpha_k)$, найти реш в квадратурах

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases} \text{ — уравнения Гамильтона}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}[\alpha_k, t] \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}[\alpha_k, t] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k} \quad (1) \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k} \end{cases}$$

$P_k = \psi_k(q_k, \alpha_k)$ в (1) $\Rightarrow \dot{q}_k = Q_k(q_k, \alpha_k, t) \Rightarrow$

$$\int \frac{dq_k}{Q_k(q_k, \alpha_k, t)} = t + C \text{ — нашли } q_k(t)$$

$$P_k(t) = \psi_k(q_k(t), \alpha_k)$$

20.34. Система дифференциальных уравнений $\dot{q}_i = A_i(q,p,t)$, $\dot{p}_i = B_i(q,p,t)$ $(i = \overline{1,n})$ имеет в некоторой области $2n$ независимых первых интегралов $W_k(q,p,t) = \text{const}$ $(k = \overline{1,2n})$. Доказать, что эта система является гамильтоновой тогда и только тогда, когда скобки Пуассона любой пары первых интегралов также являются первым интегралом: $(W_i, W_j) = \text{const}$.

сист. ДУ (1) $\begin{cases} \dot{q}_i = A_i(q,P,t) \\ \dot{P}_i = B_i(q,P,t) \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$ имеет п.и. $\begin{cases} W_k(q,P,t) = \text{const} \\ k = \overline{1,2n} \end{cases}$

(1) - Гамильтонова $\Leftrightarrow \{W_i, W_j\} = \text{const} \quad \forall i,j$

$\square$ $\Leftarrow$ Хотим д-ть, что $\exists \mathcal{H}$: $A_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}$, $B_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}$

для этого нужно проверить равенство смеш. произв.

W^k - П.И $\Leftrightarrow \sum_i \underbrace{W^k_{\partial q_i}}_{\frac{\partial W^k}{\partial q_i}} A^i + W^k_{\partial P_i} B^i + W^k_{\partial t} = 0$ (1)

Рассм. F и G - п.и.; $\{F, G\} = \sum_k F_{\partial q_k} G_{\partial P_k} - F_{\partial P_k} G_{\partial q_k}$

по усл. $\{F, G\}$ - п.и.: $\frac{d}{dt}\{F,G\} = \sum \{F,G\}_{\partial q_i} A^i + \{F,G\}_{\partial P_i} B^i + \{F,G\}_{\partial t} = 0$

$\{F,G\}_{\partial t} = \{F_{\partial t}, G\} + \{F, G_{\partial t}\}$;

из (1): $F_{\partial t} = -\sum_i (F_{\partial q_i} A^i + F_{\partial P_i} B^i) \Rightarrow \{F_{\partial t}, G\} = -\sum_i \{F_{\partial q_i} A^i, G\} - \sum_i \{F_{\partial P_i} B^i, G\}$

$\frac{d}{dt}\{F,G\} = \sum_i \{F_{\partial q_i}, G\} A^i - \{F_{\partial q_i} A^i, G\} + \{F, G_{\partial q_i}\} A^i - \{F, G_{\partial q_i} A^i\} + (q_i \to P_i, A^i \to B^i) = 0$

$$\{F_{q_i} A^i, G\} = \{F_{q_i}, G\} A^i + \{A^i, G\} F_{q_i}$$ (пров. подстановкой) $\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\{F, G\} = -\sum_i \{A^i, G\} F_{q_i} + \{F, A^i\} G_{q_i} + \{B^i, G\} F_{p_i} + \{F, B^i\} G_{p_i}$$

$$\sum_i \{A^i, G\} F_{q_i} + \{F, A^i\} G_{q_i} = \sum_{i,k}^{n} A^i_{p_k} G_{q_k} F_{q_i} - A^i_{q_k} G_{p_k} F_{q_i} +$$

$$+ F_{p_k} A^i_{q_k} G_{q_i} - F_{q_k} A^i_{p_k} G_{q_i} = \sum_{i,k}^{n} G_{q_k} F_{q_i} (A^i_{p_k} - A^k_{p_i}) + A^i_{q_k}(F_{p_k} G_{q_i} - F_{q_i} G_{p_k})$$

аналогично $\sum_i \{B^i, G\} F_{p_i} + \{F, B^i\} G_{p_i} = \sum_{i,k} G_{p_k} F_{p_i} (B^i_{q_k} - B^k_{q_i}) + B^k_{p_i}(F_{p_k} G_{q_i} - F_{q_i} G_{p_k})$

$$\frac{d}{dt}\{F, G\} = \sum_{i,k} (A^i_{q_k} + B^k_{p_i})(F_{p_k} G_{q_i} - F_{q_i} G_{p_k}) + G_{q_k} F_{q_i} (A^i_{p_k} - A^k_{p_i}) + G_{p_k} F_{p_i} (B^i_{q_k} - B^k_{q_i}) = 0$$

F и G любые из лин. нез. п.и. $\Rightarrow A^i_{q_k} = -B^k_{p_i},\ A^i_{p_k} = A^k_{p_i},\ B^i_{q_k} = B^k_{q_i} \Rightarrow$

$$\exists \mathcal{H}: A^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i},\ B^i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k \partial p_i} = -\left(-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_k}\right),\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k \partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i \partial p_k},\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k \partial p_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i \partial q_k} \Rightarrow$$

$\exists \mathcal{H}: A^i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i},\ B^i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \Rightarrow$ сист. гамильтонова

$\Rightarrow$ д-во следует из Th. Якоби-Пуассона (было на лекции)

□ F, G - п.и. $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \{\mathcal{H}, F\} = 0,\ \frac{\partial G}{\partial t} + \{\mathcal{H}, G\} = 0$

д-ть, что $\frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} + \{\mathcal{H}, \{F, G\}\} = 0$ (2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} = -\{\{\mathcal{H}, F\}, G\} - \{F, \{\mathcal{H}, G\}\} =$$

$$= \{G, \{\mathcal{H}, F\}\} + \{F, \{G, \mathcal{H}\}\}$$

подст. в (2): $\{G, \{\mathcal{H}, F\}\} + \{F, \{G, \mathcal{H}\}\} + \{\mathcal{H}, \{F, G\}\} = 0$

получили тожд. Пуассона ■

Теорема (Якоби-Пуассона).

F, G — первые интегралы системы с гамильтонианом $\mathcal{H} \Rightarrow \{F, G\}$ тоже первый интеграл системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$

Доказательство

□
Критерий первого интеграла:

$$F, G\text{—первые интегралы} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = 0; \frac{\partial G}{\partial t} + \{H, G\} = 0 \quad (1.1)$$

Требуется доказать, что

$$\frac{\partial \{F, G\}}{\partial t} + \{\mathcal{H}, \{F, G\}\} = 0 \quad (1.2)$$

Применяем правило Лейбница

$$\frac{\partial \{F, G\}}{\partial t} = \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} = 0 \quad (1.3)$$

(1.1) → (1.3):

$$\frac{\partial \{F, G\}}{\partial t} = \{G, \{\mathcal{H}, F\}\} + \{F, \{G, \mathcal{H}\}\} \quad (1.4)$$

(1.4) → (1.2):

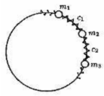
$$\{G, \{H, F\}\} + \{F, \{G, H\}\} + \{\mathcal{H}, \{F, G\}\} = 0$$

Получили тождество Пуассона

■

4. **Тождество Пуассона** $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$

20.36. Система состоит из n точечных масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, которые могут перемещаться по гладкому кольцу. Массы последовательно соединены пружинами (последняя масса соединена с первой). Определяя положение каждой массы её смещением $q_i = r\varphi_i$ по дуге кольца из положения равновесия, подобрать преобразование $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q, \alpha)$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$, не меняющее лагранжиан системы. Показать, что в силу теоремы Нётер система имеет первый интеграл $\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{q}_i = \text{const}$.



К задаче 20.36

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i r^2 \dot{\varphi}_i^2$$

$$\Pi = \sum \frac{1}{2} c (q_i - q_{i+1})^2 = \sum \frac{1}{2} c r^2 (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2 \qquad \varphi_{n+1} \equiv \varphi_1$$

$$\mathcal{L} = T - \Pi$$

1) Найдем $q_i' = Q(q, \alpha)$ такое, что $\mathcal{L}(q') = \mathcal{L}(q)$:

для m_i: $T_i \sim \dot{\varphi}_i^2$, $\Pi_i \sim (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi_i' = \varphi_i + \alpha}$

2)

Теорема (Теорема Нётер).

Если $\exists$ |группа Ли с ядром $\begin{cases} q' = q + \tau\eta(q, t) \\ t' = t + \tau\xi(q, t) \end{cases}$, для которой |действие по Гамильтону $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt = inv$, то у системы есть первый интеграл

$$\sum p_i \eta_i - \xi \mathcal{H} = const$$

(см. |\$p_i\$ и |\$\mathcal{H}\$)

- [ ] Добавить доказательство

Опр. (Ядро группы).

Ядром группы называются первые два слагаемых при линейном приближении $Q(q, \mu)$ в окрестности $\mu = 0$

$$q' = Q(q, \mu) \approx q + \frac{\partial Q}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0} \mu = \underbrace{q + \mu\eta(q)}_{\text{ядро группы}}, \text{ где } \eta(q) = \frac{\partial Q}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0}$$

Время не преобразовывали $\Rightarrow S = inv$

в силу Th. Нётер

$$\sum p_i \eta_i - \cancel{\xi} \mathcal{H} = const, \text{ т.е. } \sum p_i = const$$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}_i}\left[\sum \frac{1}{2} m_j r^2 \dot{\varphi}_j^2 - \frac{1}{2} c (\varphi_j - \varphi_{j+1})^2\right] = \boxed{\sum m_j r^2 \dot{\varphi}_j^2}$$

Неделя 9

9. **Принцип Гамильтона**
21.10, 21.13, 21.23, 21.32

21.10. Свободная релятивистская частица имеет лагранжиан $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}$, где c – скорость света, а x, y, z – декартовы координаты частицы. Показать, что в расширенном координатном пространстве (x, y, z, t) частицы через любые две точки (x_0, y_0, z_0, t_0) и (x_1, y_1, z_1, t_1) $(t_0 \neq t_1)$ проходит прямой путь и при том только один.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad x \text{ - цикл.} \Rightarrow p_x = const \Rightarrow \dot{x} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = const$$

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad q(t) = q_0 + V(t - t_0), \text{ пр. путь, ед. реш.}$$

Опр. (Прямой и окольные пути).

$q(t, 0)$ - решение краевой задачи, **прямой путь** $(\alpha = 0)$
$q(t, \alpha)$ - траектория вблизи $q(t, 0)$, **окольный путь** $(\alpha \neq 0)$

21.13. Одномерный гармонический осциллятор $L=\frac{1}{2}\left(\dot{q}^2-\omega^2 q^2\right)$ начинает движение из состояния $q(0)=q_0$, $\dot{q}(0)=0$. Вычислить значение W действия по Гамильтону на этом прямом пути за время $\omega t_1=\sqrt{10}>\pi$. За то же время вычислить значение действия на окольных путях вида $q_{ок}=q_{пр}+\delta q$, $\delta q=\alpha t(t_1-t)$. На плоскости (q,t) изобразить прямой путь и семейство окольных путей. Показать, что существуют значения параметра α, для которых а) $W_{ок}>W_{пр}$; б) $W_{ок}=W_{пр}$; в) $W_{ок}<W_{пр}$.

Опр. (Действие по Гамильтону).

Действием по Гамильтону называется функционал S:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(q,\dot{q},t)dt$$

Ставит каждой траектории $q(t)$ в соответствии некоторое число

$$\ddot{q}+w^2 q=0$$

$$q(t)=A\cos wt+B\sin wt$$

$$q(0)=q_0,\ \dot{q}(0)=0\ \Rightarrow q_{пр}=q_0\cos wt$$

$$L_{пр}=\frac{1}{2}(\dot{q}^2-w^2q^2)=\frac{1}{2}q_0^2w^2(\sin^2 wt-\cos^2 wt)$$

$$L_{пр}=-\frac{1}{2}q_0^2w^2\cos 2wt$$

1) $$S_{пр}=\int_0^{t_1}L_{пр}dt=-\frac{1}{2}q_0^2w^2\int_0^{t_1}\cos 2wt\,dt=\boxed{-\frac{1}{4}wq_0^2\sin 2wt_1}$$

2) $$q_{ок}=q_{пр}+\delta q,\quad \delta q=\alpha t(t_1-t),\quad q_{ок}(0)=q_{пр}(0),\quad q_{ок}(t_1)=q_{пр}(t_1)$$

$$S_{ок}=\int_0^{t_1}L_{ок}\,dt=\int_0^{t_1}\frac{1}{2}\left[(\dot{q}_{пр}+\delta\dot{q})^2-w^2(q_{пр}+\delta q)^2\right]=S_{пр}+\underbrace{\delta S}_{0}+S_2$$

Посчитаем вариацию действия по Гамильтону

$$\delta S=L_2dt_2-L_1dt_1+\int_{t_1}^{t_2}\sum\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt$$

Теорема (Принцип Гамильтона (наименьшего действия)).

$$\delta S=0\Leftrightarrow q=q(t,0)-\text{прямой путь}$$

Доказательство >

по пр. Гамильтона (см 8, 31 мин.)

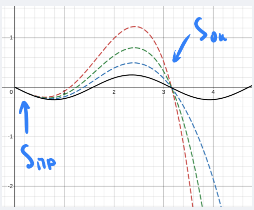
$$S_{ок}=S_{пр}+S_2=S_{пр}+\int_0^{t_1}\frac{1}{2}(\delta\dot{q}^2-w^2\delta q^2)$$

$$S_2=\frac{1}{2}\alpha^2\left[\int_0^{t_1}(t_1-2t)^2dt-w^2\int_0^{t_1}t^2(t_1-t)^2dt\right]=\frac{1}{2}\alpha^2\left(\frac{t_1^3}{3}-\frac{w^2t_1^5}{30}\right)$$

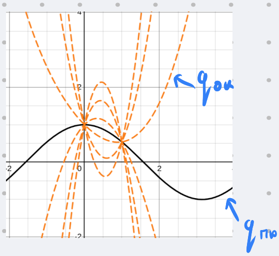
$$\boxed{S_{ок}=S_{пр}+S_2=-\frac{1}{4}wq_0^2\sin 2wt_1+\frac{1}{2}\alpha^2\left(\frac{t_1^3}{3}-\frac{w^2t_1^5}{30}\right)}$$

$$\mathrm{Sign}(S_2)=\mathrm{Sign}(10-w^2t_1^2)=\mathrm{Sign}(S_{ок}-S_{пр})\quad \text{(не зависит от } \alpha)$$

21.13. При любом значении α $W_{ок}\left(\omega t_1=\sqrt{10}\right)=W_{пр}\left(\omega t_1=\sqrt{10}\right)$ и $W_{ок}\left(\omega t_1<\sqrt{10}\right)>W_{пр}\left(\omega t_1<\sqrt{10}\right)$; $W_{ок}\left(\omega t_1>\sqrt{10}\right)<W_{пр}\left(\omega t_1>\sqrt{10}\right)$.



не надо рисовать



21.23. Показать, что для системы с лагранжианом $L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^2\dot{q}_i^2+b_i^2q_i^2\right)$ $(a_i=const,\ b_i=const)$ действие по Гамильтону на прямом пути имеет глобальный минимум.

Пусть q - пр. путь

$$\Delta S = S(q+\delta q)-S(q)=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum\left[a_i^2(\dot{q}_i+\delta\dot{q}_i)^2+b_i^2(q_i+\delta q_i)^2\right]dt -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum\left[a_i^2\dot{q}_i^2+b_i^2q_i^2\right]dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\sum\left[a_i^2\delta\dot{q}_i^2+b_i^2\delta q_i^2\right]dt>0 \Rightarrow \min$$

лин ч.а. по $\delta q, \delta\dot{q}$ уходят (пред задача)

21.32. Для материальной точки, движущейся по инерции, действие по Гамильтону имеет вид $W=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\dot{x}^2}{2}dt$. Найти такие значения параметров $\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2$ на трёхпараметрическом семействе кривых $x=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2/2$, проходящих через две заданные точки $(x_0,t_0=0)$ и $(x_1,t_1>0)$, чтобы $W(\tilde{\alpha}_0,\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2)\le W(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)$ (прямой метод отыскания прямых путей на заданном классе функций).

$$x=\alpha_0+\alpha_1 t+\frac{1}{2}\alpha_2t^2 \Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha}_0=x_0},\quad \alpha_1=\frac{\overbrace{x_1-x_0}^{\Delta x}}{t_1}-\frac{1}{2}\alpha_2t_1$$

$$\dot{x}=\alpha_1+\alpha_2t \Rightarrow S=\int_0^{t_1}\frac{\dot{x}^2}{2}dt=\int_0^{t_1}\frac{(\alpha_1+\alpha_2t)^2}{2}dt=\frac{1}{2}\alpha_1^2t_1+\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2t_1^2+\frac{1}{6}\alpha_2^2t_1^3$$

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{t_1}-\frac{1}{2}\alpha_2t_1\right)^2t_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{t_1}-\frac{1}{2}\alpha_2t_1\right)\alpha_2t_1^2+\frac{1}{6}\alpha_2^2t_1^3=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta x^2}{t_1}-\cancel{\alpha_2\Delta x t_1}+\frac{1}{4}\alpha_2^2t_1^3+\cancel{\alpha_2\Delta x t_1}-\frac{1}{2}\alpha_2^2t_1^3+\frac{1}{3}\alpha_2^2t_1^3\right]=\frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{t_1}+\frac{1}{24}\alpha_2^2t_1^3$$

$$S\ \min \text{ при } \alpha_2=0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha}_0=x_0,\ \tilde{\alpha}_1=\frac{x_1-x_0}{t_1},\ \tilde{\alpha}_2=0}$$

21.32. $\alpha_0=x_0,\quad \alpha_1=\frac{x_1-x_0}{t_1},\quad \alpha_2=0.$

Неделя 10

10. **Интегральные инварианты**
22.6, 22.20, 22.29, 22.31

Выяснить, какие из криволинейных интегралов в задачах 22.3-22.8 являются универсальными интегральными инвариантами. Как связаны эти интегралы с универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре?

22.6. $I = \oint \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\alpha_i p_i + \varphi_i(q_i) \right) \delta q_i + \left(\beta_i q_i + \psi_i(p_i) \right) \delta p_i \right]$

Теорема (Теорема Ли Хуачжуна).

Для произвольной гамильтоновой системы

$$J = \oint_{\overline{C}} \sum \left(A_i(\vec{q}, \vec{p}, t) \delta q_i + B_i(\vec{q}, \vec{p}, t) \delta p_i \right) = inv \Leftrightarrow \exists c = const \neq 0 : I = c\, J_P$$

Опр. (Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре).
Для изохронных ($t = const$) согласованных контуров $\overline{C}\{q(\alpha), p(\alpha)\}$:

$$J_P = \oint_{\overline{C}} \sum p_i dq_i = inv$$

Замечание
Для обозначения изохронности также используют обозначение δ вместо d

$$J_P = \oint \sum p_i \delta q_i$$

по Th. Ли Хуачжуна

$J = inv \Leftrightarrow J = cJ_p \Leftrightarrow J - cJ_p = 0$

$$I = J - cJ_p = \oint \sum \Big[\underbrace{\left((\alpha_i - c) p_i + \varphi_i(q_i) \right)}_{\frac{\partial F}{\partial q_i}} \delta q_i + \underbrace{\left(\beta_i q_i + \psi_i(p_i) \right)}_{\frac{\partial F}{\partial p_i}} \delta p_i \Big]$$

контур произв. $\Rightarrow I = 0 \Leftrightarrow$ под знаком инт. полн. диф

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial \varphi_i(q_i)}{\partial q_j} = 0 = \frac{\partial \psi_j(p_j)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_j} = \beta_i \cdot \delta_{ij} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial q_i} = (\alpha_i - c)\delta_{ij} \Rightarrow c = \alpha_i - \beta_i$$

22.6. $I = \oint \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) p_i \delta q_i$.

Если $\forall i \hookrightarrow \alpha_i - \beta_i = c = const$ $J = \oint \sum (\alpha_i - \beta_i) p_i \delta q_i$, иначе не инт. инв.

22.20. Показать, что интегралы

$$I_1 = \int_{G_{2n}} \cdots \int \varphi_1(q_1, p_1) dq_1, dq_2, dq_3, dp_1, dp_2, dp_3 ,$$

$$I_2 = \int_{G_{2n}} \cdots \int \varphi_2(\alpha, q_2, p_2) dq_1, dq_2, dq_3, dp_1, dp_2, dp_3 ,$$

$$I_3 = \int_{G_{2n}} \cdots \int \varphi_3(\beta, q_3, p_3) dq_1, dq_2, dq_3, dp_1, dp_2, dp_3 ,$$

где α и β – произвольные постоянные, являются интегральными инвариантами канонической системы с гамильтонианом $H = \varphi_3 \{ \varphi_2 [\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2], q_3, p_3 \}$.

В лекции 9 (13 мин) упоминалось без д-ва, что

для $H = \varphi_3(\varphi_2(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2), q_3, p_3)$ $\varphi_k = \varphi_k(\varphi_{k-1}, q_k, p_k)$ – п.и.

$$\{\varphi_k, H\} = \sum \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial \varphi_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} = 0$$

Критерий первого интеграла для Гамильтоновых систем имеет вид:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \underbrace{\sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right)}_{\{H, G\}} = 0, \text{ где } \{H, G\} \text{ — скобка Пуассона}$$

семинар 9 (1:11)

$$I_k = \int_{G_t} \cdots \int \varphi_k(\varphi_{k-1}, q_k, p_k) dq_1 dq_2 dq_3 dp_1 dp_2 dp_3 =$$

$$= \int_{G_0} \cdots \int \tilde{\varphi}_k(\tilde{\varphi}_{k-1}, q_k^0, p_k^0) \left| \frac{\partial(q_k, p_k)}{\partial(q_k^0, p_k^0)} \right| dq_1^0 dq_2^0 dq_3^0 dp_1^0 dp_2^0 dp_3^0$$

φ_k – п.и. $\Rightarrow \tilde{\varphi}_k = \varphi_k$

$V = const \Rightarrow \left| \frac{\partial(q_k, p_k)}{\partial(q_k^0, p_k^0)} \right| = 1$ $\Rightarrow \int_{G_t} \cdots \int = \int_{G_0} \cdots \int = inv$

Теорема (Сохранение V для гамильтоновых систем).

Для гамильтоновых систем фазовый объем V сохраняется

Доказательство ›

22.29. Найти необходимые и достаточные условия сохранения фазового объёма в пространстве $(x_1, \dots, x_n)$ для стационарной линейной динамической системы $\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \quad (i = \overline{1,n})$.

22.29. $trA = 0$

Теорема (Лиувилля о сохранении фазового объема).

$$V = const \Leftrightarrow \operatorname{div} F(x,t) = 0$$

Доказательство >

$$\dot{X} = AX \text{ по Th. Лиувилля } V = const \Leftrightarrow \operatorname{div} AX = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_k a_{ik} x_k\Big) = trA$$

22.31. Груз массы m движется по прямой Ox под действием упругой силы $-cx$ и силы сопротивления $-\beta\dot{x}$. На плоскости $(x, \dot{x})$ выбирается область G_0 площади S_0. Совокупность движений груза с начальными условиями в G_0 переводит G_0 в G_t. Найти площадь S_t области G_t.

22.31. $S_t = \exp(-\beta t/m) S_0$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{c}{m}x - \frac{\beta}{m}v \end{cases} \Rightarrow F(x,v) = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{c}{m}x - \frac{\beta}{m}v \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{div} F = -\frac{\beta}{m} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \int_G \operatorname{div} F\, dx\, dv = -\frac{\beta}{m} S \Rightarrow \int_{S_0}^{S_t} \frac{dS}{S} = -\frac{\beta}{m}\int_0^t dt \Rightarrow S_t = \exp(-\beta t/m) S_0$$

$$\dot{V}_t = \int_{G_t} \dots \int \operatorname{div} F(x_t, t)\, dx_1 \dots dx_n$$

Неделя 11

11. **Канонические преобразования**
23.7, 23.20, 23.29, 23.48, 23.71, 23.97

№23.7

Для канонических преобразований в задачах 23.4–23.9 найти валентности c и производящие функции $F(q,p,t)$.

23.7. $\tilde{q} = -q \operatorname{ctg} p, \quad \tilde{p} = 2\ln\cos p$

(Семинар 10, 40 мин)

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

Преоб. канон. $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln\cos p \cdot (-\operatorname{ctg} p) - cp = -\frac{\partial F}{\partial q} \\ 2\ln\cos p \cdot \left(q \cdot \frac{1}{\sin^2 p}\right) = -\frac{\partial F}{\partial p} \end{cases}$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} = 2\frac{1}{\cos p} \cdot (-\sin p) \cdot \operatorname{ctg} p - 2\ln\cos p \cdot \frac{1}{\sin^2 p} + c$$

(над первым слагаемым: $= -2$)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} = -2\ln\cos p \cdot \frac{1}{\sin^2 p}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} \Rightarrow c = 2$$

Найдем F: $F(q,p,t) = \int \frac{\partial F}{\partial p} dp + f(q,t) \quad (1)$

$$\int \frac{\partial F}{\partial p} dp = -2q \int \frac{\ln\cos p}{\sin^2 p} dp = 2q[\operatorname{ctg} p \cdot \ln\cos p + p]$$

$u = \ln\cos p \quad du = -\operatorname{tg} p \cdot dp$

$dv = \frac{dp}{\sin^2 p} \quad v = -\operatorname{ctg} p$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 2\ln\cos p\cdot ctg\, p + 2p \overset{(1)}{=} 2[ctg\, p\cdot \ln\cos p + p] + f'_q(q,t) \Rightarrow$$

$$f'_q(q,t) = 0 \Rightarrow f_q(q,t) = 0$$ добавление $g=g(t)$ или const не существенно

$$\boxed{F(q,p,t) = 2q[ctg\, p\cdot \ln\cos p + p]}$$

23.7. $c=2, \quad F(q,p,t) = 2q\left[p + \ln(\cos p)\cdot \operatorname{ctg} p\right]$

№ 23.20

Приведённые в задачах 23.20–23.24 выражения $x_i = x_i(q,t)\ (i=1,2,3)$ определяют переход от декартовых к обобщенным координатам. Используя результат задачи 23.18, найти соответствующие этому переходу формулы преобразования обобщенных импульсов $p_{xi} = p_{xi}(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3,t)$.

23.20. $x_1 = \rho\cos\varphi,\ x_2 = \rho\sin\varphi,\ x_3 = z.$

23.18. В механической системе с лагранжианом $L(q,\dot q,t)$ при помощи неособенного преобразования $\tilde q_i = \tilde q_i(q,t)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ совершается переход от обобщённых координат q к обобщённым координатам $\tilde q$. Найти соответствующий этому переходу закон преобразования обобщённых импульсов $\tilde p_i = \tilde p_i(q,p,t)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ и доказать каноничность преобразования $\tilde q_i = \tilde q_i(q,t)$, $\tilde p_i = \tilde p_i(q,p,t)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$. Найти валентность c и производящую функцию $F(q,p,t)$ этого преобразования.

23.18. $\tilde p_i = \sum_{i=1}^{n} p_j \frac{\partial q_j}{\partial \tilde q_i} \quad \left(i=\overline{1,n}\right),\ c=1, \quad F=0.$

j

$$\tilde p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde q}_i} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_j}\cdot\frac{\partial \dot q_j}{\partial \dot{\tilde q}_i}$$

$$\tilde q_i = \tilde q_i(q,t) \Rightarrow \dot{\tilde q}_i = \sum_j \frac{\partial \tilde q_i}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial \tilde q_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\tilde q}_i}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial \tilde q_i}{\partial q_i}$$

$$\boxed{\tilde p_i = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial \tilde q_i}}$$

23.20. $x_1 = \rho\cos\varphi,\ x_2 = \rho\sin\varphi,\ x_3 = z.$

из 23.18 $\quad \tilde p_i = \sum_j p_j \frac{\partial q_j}{\partial \tilde q_i}$

$\rho = \sqrt{x_1^2+x_2^2} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} \quad \cos\varphi = \frac{x_1}{\rho} \quad \sin\varphi = \frac{x_2}{\rho}$

$$p_\rho = \sum_i p_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \rho} = p_{x_1}\cos\varphi + p_{x_2}\sin\varphi = \boxed{\frac{p_{x_1}x_1 + p_{x_2}x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}}$$

$$p_\varphi = \sum_i p_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \varphi} = -p_{x_1}\cdot\rho\cdot\sin\varphi + p_{x_2}\cdot\rho\cdot\cos\varphi = \boxed{-p_{x_1}\cdot x_2 + p_{x_2}x_1}$$

$$p_z = \sum_i p_{x_i}\frac{\partial x_i}{\partial z} = \boxed{p_{x_3}}$$

23.20. $p_\rho = \frac{p_{x1}x_1 + p_{x2}x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \quad p_\varphi = -p_{x1}x_2 + p_{x2}x_1, \quad p_z = p_{x3};$

$p_{x1} = p_\rho\cos\varphi - p_\varphi\frac{\sin\varphi}{\rho}, \quad p_{x2} = p_\rho\sin\varphi + p_\varphi\frac{\cos\varphi}{\rho}, \quad p_{x3} = p_z.$

$$p_{x_i} = p_\rho\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + p_\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + p_z\frac{\partial z}{\partial x_i} \Rightarrow$$

$$p_{x_1} = p_\rho\cdot\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + p_\varphi\left(-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right) + 0 = \boxed{p_\rho\cos\varphi - p_\varphi\frac{\sin\varphi}{\rho}}$$

$$p_{x_2} = p_\rho\cdot\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} + p_\varphi\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right) + 0 = \boxed{p_\rho\sin\varphi + p_\varphi\frac{\cos\varphi}{\rho}}$$

$$p_{x_3} = \boxed{p_z}$$

23.29. Задано каноническое преобразование $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q,p,t)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q,p,t)$ $(i = 1,n)$. Каким условиям должны удовлетворять функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ для того, чтобы преобразование $q^*_i = f_1(t)\tilde{q}_i(q,p,t)$, $p^*_i = f_2(t)\tilde{p}_i(q,p,t)$ было каноническим?

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\tilde{q}_i, \tilde{P}_i \text{ - канон.} \Rightarrow \begin{cases} \sum \tilde{P}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} = CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum \tilde{P}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\sum_j P^*_j \frac{\partial q^*_j}{\partial q_i} = f_1(t)\cdot f_2(t) \sum \tilde{P}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} = f_1(t)\cdot f_2(t)\left(CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i}\right)$$

$$\sum_j P^*_j \frac{\partial q^*_j}{\partial P_i} = f_1(t)\cdot f_2(t) \sum \tilde{P}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} = f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot\left(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)$$

$$q^*, p^* \text{ - канон} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(t)\cdot f_2(t)\left(CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i}\right) = C^* P_i - \frac{\partial F^*}{\partial q_i} \\ f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot\left(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\right) = -\frac{\partial F^*}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial p_i \partial q_i} = C^* - f_1(t)\cdot f_2(t)\left(C - \frac{\partial F}{\partial p_i \partial q_i}\right)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial q_i \partial p_i} = f_1(t) f_2(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial q_i \partial p_i}$$

$$C^* = f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot C = \text{const} \Rightarrow \boxed{f_1(t)\cdot f_2(t) = \text{const}}$$

23.29. $f_1(t) f_2(t) = \text{const}$

23.48. Найти движение осциллятора с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2\right)$. Показать, что закон движения системы $q_i = q_i(q_0, p_0, t)$, $p_i = p_i(q_0, p_0, t)$ $(i = \overline{1,n})$ можно рассматривать, как унивалентное каноническое преобразование начальных данных. Найти производящую функцию этого преобразования и гамильтониан $H_0(q_0, p_0)$.

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_i = q^\circ_i \cos\omega_i t + \frac{P^\circ_i}{\omega_i}\sin\omega_i t \\ P_i = \dot{q}_i = -q^\circ_i \omega_i \sin\omega_i t + P^\circ_i \cos\omega_i t \end{cases}$$

$$\text{канон} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum P_j \frac{\partial q_j}{\partial q^\circ_i} = P_i \cos\omega_i t = CP^\circ_i - \frac{\partial F}{\partial q^\circ_i} \\ \sum P_j \frac{\partial q_j}{\partial P^\circ_i} = \frac{P_i}{\omega_i}\sin\omega_i t = -\frac{\partial F}{\partial P^\circ_i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial P^\circ_i \partial q^\circ_i} = -\cos^2\omega_i t + C = \sin^2\omega_i t = \frac{\partial F}{\partial q^\circ_i \partial P^\circ_i} \Rightarrow \boxed{C = 1 \text{ (унивалентное)}}$$

$$F = \int \sum \frac{\partial F}{\partial P^\circ_i} dP^\circ_i + f(q^\circ, t) = \sum\left[P^\circ_i q^\circ_i \sin^2\omega_i t - \frac{P^{\circ 2}_i}{2\omega_i}\sin\omega_i t \cdot \cos\omega_i t\right] + f(q^\circ, t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i^\circ} = q_i^\circ w_i \sin w_i t \cdot \cos w_i t - P_i^\circ \cancel{\cos^2 w_i t} + \cancel{P_i^\circ} = P_i^\circ \cancel{\sin^2 w_i t} + f'_{q_i^\circ}$$

$$f = \sum \frac{1}{2} q_i^{\circ 2} w_i \sin w_i t \cos w_i t$$

23.48. $F = pq\sin^2\omega t + \frac{p^2 - q^2\omega^2}{2\omega}\cos\omega t\sin\omega t, \quad H_0 = 0.$

$$F = \sum_i P_i^\circ q_i^\circ \sin^2 w_i t - \frac{P_i^{\circ 2} - q_i^{\circ 2} w_i^2}{2 w_i} \cos w_i t \sin w_i t$$

$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial t}$ $\Rightarrow$ $H_0 = H - \frac{\partial F}{\partial t} - \sum P_i \frac{\partial q_i}{\partial t}$

$(c=1)$

$$\sum P_i \frac{\partial q_i}{\partial t} = \sum P_i^2; \quad H = \frac{1}{2}\sum P_i^2 + w_i^2 q_i^2$$

$$H_0 = -\frac{1}{2}\sum P_i^2 + \frac{1}{2}\sum w_i^2 q_i^2 - \frac{\partial F}{\partial t} \Rightarrow H_0 = 0$$

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = -\sum P_i^\circ q_i^\circ w_i \sin 2 w_i t - \frac{P_i^{\circ 2} - q_i^{\circ 2} w_i^2}{2} \cos 2 w_i t$$

$$-\frac{1}{2} P_i^2 = -\frac{1}{2} q_i^{\circ 2} w_i^2 \sin^2 w_i t + \frac{1}{2} P_i^\circ q_i^\circ w_i \sin 2 w_i t - \frac{1}{2} P_i^{\circ 2} \cos^2 w_i t$$

$$\frac{1}{2} w_i^2 q_i^2 = \frac{1}{2} w_i^2 q_i^{\circ 2} \cos^2 w_i t + \frac{1}{2} P_i^\circ q_i^\circ w_i \sin 2 w_i t + \frac{1}{2} P_i^{\circ 2} \sin^2 w_i t$$

23.71. При каких значениях $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ $(i = \overline{1,n})$ преобразование $\tilde{q}_i = q_i^{\alpha_i} p_i^{\beta_i}$, $\tilde{p}_i = q_i^{\gamma_i} p_i^{\delta_i}$ является каноническим?

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial q_i} = c p_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial p_i} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum q_i^{\gamma_i} P_i^{\delta_i} \cdot \alpha_i q_i^{\alpha_i - 1} P_i^{\beta_i} = c P_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum q_i^{\gamma_i} P_i^{\delta_i} \beta_i q_i^{\alpha_i} P_i^{\beta_i - 1} = -\frac{\partial F}{\partial P_i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial P_i \partial q_i} = -\alpha_i q_i^{\gamma_i + \alpha_i - 1} \cdot (\delta_i + \beta_i) P_i^{\delta_i + \beta_i - 1} + c$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i \partial P_i} = -(\alpha_i + \gamma_i)\beta_i q^{\gamma_i + \alpha_i - 1} \cdot P_i^{\delta_i + \beta_i - 1}$$

23.71. $\gamma_i + \alpha_i = 1, \quad \delta_i + \beta_i = 1, \quad c = \alpha_i - \beta_i = \delta_i - \gamma_i$

$$\frac{\partial F}{\partial P_i \partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i \partial P_i}, \quad c = \text{const} \Rightarrow \gamma_i + \alpha_i = 1; \ \delta_i + \beta_i = 1 \Rightarrow$$

$$c = \alpha_i(\delta_i + \beta_i) - \beta_i(\alpha_i + \gamma_i) = \alpha_i - \beta_i = (1 - \gamma_i) - (1 - \delta_i) = \delta_i - \gamma_i$$

Используя критерий каноничности преобразования в $(q,\tilde{q})$-описании, выяснить, какие из преобразований в задачах 23.85–23.105 являются каноническими (величины $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,a,b,\omega_i,\alpha_i,\beta_i$ – постоянные). Для канонических преобразований найти валентность c и производящую функцию $S(q,\tilde{q},t)$.

23.97. $\tilde{q}_i = \sqrt[\alpha_i]{\gamma p_i q_i^{(1-\alpha_i)}}, \quad \tilde{p}_i = -\sqrt[\alpha_i]{(\gamma p_i)^{(\alpha_i-1)} q_i^{(2\alpha_i-1)}} \quad (i=\overline{1,n})$.

Семинар 10 (1:00)

$$\begin{cases} \tilde{p}_i = -\dfrac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} \\ cp_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i} \end{cases}$$

Нез. пер. $(q,\tilde{q}) \Rightarrow$ выразим $\tilde{p}_i$ и p_i через $(q_i,\tilde{q}_i)$

$$\tilde{q}_i^{\alpha_i} = \gamma p_i q_i^{(1-\alpha)} \Rightarrow p_i = \frac{1}{\gamma}\tilde{q}_i^{\alpha_i} \cdot q_i^{\alpha_i-1}$$

$$\tilde{p}_i = -\sqrt[\alpha_i]{\left(\tilde{q}_i^{\alpha_i} \cdot q_i^{\alpha_i-1}\right)^{\alpha_i-1} q_i^{2\alpha_i-1}} = -\sqrt[\alpha_i]{\tilde{q}_i^{\alpha_i^2-\alpha_i} \cdot q_i^{\alpha_i^2}} = -\tilde{q}_i^{\alpha_i-1} \cdot q_i^{\alpha_i}$$

$$\text{канон} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{p}_i = -\dfrac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i} \\ cp_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i \partial \tilde{q}_i} = \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial q_i} = \alpha_i q_i^{(\alpha_i-1)} \tilde{q}_i^{(\alpha_i-1)} \qquad \Rightarrow \boxed{c=\gamma}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i \partial q_i} = c \cdot \frac{\partial p_i}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{c}{\gamma}\alpha_i \tilde{q}_i^{(\alpha-1)} q_i^{(\alpha_i-1)}$$

угадаем S: $\boxed{S = \sum \frac{1}{\alpha_i}(q_i \cdot \tilde{q}_i)^{\alpha_i}}$

23.97. $c=\gamma, \quad S(q,\tilde{q},t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_i}(q_i\tilde{q}_i)^{\alpha_i}$

Неделя 12

12. **Уравнение Гамильтона–Якоби**
24.9, 24.18, 24.43, 24.66, 24.87

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) = 0$$

ур-е Гамильтона-Якоби

$$cp_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Будем искать производящую функцию уравнения Гамильтона-Якоби в виде полного интеграла. Решение $S = S(\vec{q},\vec{\alpha},t)$ — **полный интеграл** уравнения Гамильтона-Якоби, если

1. S удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби
2. $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \alpha_j}\right) \neq 0$

Одинм из методов нахождения производящей функции в виде полного интеграла является **метод разделения переменных**. Для этого полный интеграл ищут в виде

$$S = S_0(t,\vec{\alpha}) + S_1(\vec{q_1},\vec{\alpha}) + \ldots + S_n(\vec{q_n},\vec{\alpha})$$

24.9. Материальная точка массы m движется в центральном поле с потенциальной энергией $\Pi(r) = -\frac{\mu_1}{r} + \frac{\mu_2}{r^2}$. Используя сферические координаты r,θ,φ, составить уравнение Гамильтона–Якоби, построить его полный интеграл и получить из него уравнение траектории точки в плоскости меридиана ($\varphi = \text{const}$, $\alpha_\varphi = 0$).

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\psi^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\cos^2\psi} + \Pi(r)$$

т.к. $\varphi = \text{const} = 0$; $\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\psi}{2mr} + \Pi(r) = h = \text{const}$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \psi}\right)^2\right]+\Pi(r)=0$$

Полный интеграл ищем в виде

$$S=S_0(t,\alpha)+S_r(r,\alpha)+S_\psi(\psi,\alpha)$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_\psi}{\partial \psi}\right)^2\right]+\Pi(r)=0$$

Уравнение распалось на слагаемые, каждое из которых зависит от своих переменных. Но так как уравнение должно тождественно выполнятся, то получаем, что все слагаемые есть константы:

$$\left(\frac{\partial S_\psi}{\partial \psi}\right)^2=\alpha_\psi \Rightarrow S_\psi=\sqrt{\alpha_\psi}\cdot\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_\psi}{r^2}\right]+\Pi(r)=h \quad \Rightarrow S_r=\int\sqrt{2m(h-\Pi(r))-\frac{\alpha_\psi}{r^2}}\,dr$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}+h=0 \Rightarrow S_0=-ht$$

$$S=-ht+\int\sqrt{2m\left(h+\frac{\mu_1}{r}-\frac{\mu_2}{r^2}\right)-\frac{\alpha_\psi}{r^2}}\,dr+\sqrt{\alpha_\psi}\cdot\psi$$

$$-\beta=\frac{\partial S}{\partial \alpha}$$

$$\beta_h=\frac{\partial S}{\partial h}=-t+\int\frac{m\,dr}{\sqrt{2m\left(h+\frac{\mu_1}{r}-\frac{\mu_2}{r^2}\right)-\frac{\alpha_\psi}{r^2}}} \Rightarrow r=r(\alpha,\beta,t)$$

$$\beta_\psi=\underbrace{\int\frac{dr}{2r^2\sqrt{2m\left(h+\frac{\mu_1}{r}-\frac{\mu_2}{r^2}\right)-\frac{\alpha_\psi}{r^2}}}}_{I}-\frac{\psi}{2\sqrt{\alpha_\psi}}$$

для нахождения траектории посчитаем β_ψ:

$$I=\int\frac{dr}{2r\sqrt{2mh\,r^2+2m\mu_1 r-2m\mu_2-\alpha_\psi}}$$

24.9. $S=-ht+\int\sqrt{2m\left(h+\frac{\mu_1}{r}-\frac{\mu_2}{r^2}\right)-\frac{\alpha_\theta}{r^2}}\,dr+\sqrt{\alpha_\theta}\,\theta$. Траектория определяется квадратурой

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\theta}=-\beta_\theta \quad\to\quad\to\quad \frac{\theta}{2\sqrt{\alpha_\theta}}-\int\frac{dr}{2r^2\sqrt{2mh+\frac{2m\mu_1}{r}-\frac{\alpha_\theta+2m\mu_2}{r^2}}}=-\beta_\theta.$$

Вводя обозначения

знаменатель: $\sqrt{\alpha_\psi+2m\mu_2}\cdot 2r\cdot\sqrt{\frac{2mh}{\alpha_\psi+2m\mu_2}\cdot r^2+2\underbrace{\frac{m\mu_1}{\alpha_\psi+2m\mu_2}r}_{r/p}-1}$

обозн. $\frac{1}{p}=\frac{m\mu_1}{\alpha_\psi+2m\mu_2}$, тогда $\frac{2mh}{\alpha_\psi+2m\mu_2}\cdot r^2=\underbrace{2mh\cdot\frac{\alpha_\psi+2m\mu_2}{(m\mu_1)^2}}_{e^2-1}\cdot\left(\frac{r}{p}\right)^2$

обозн. $e^2 = \boxed{2mh \cdot \dfrac{\alpha_\psi + 2m\mu_2}{(m\mu_1)^2}} + 1 \Rightarrow$

$$e=\sqrt{1+2mh\frac{(\alpha_\theta+2m\mu_2)}{(m\mu_1)^2}},\quad \frac{1}{p}=\frac{m\mu_1}{\alpha_\theta+2m\mu_2},\quad \omega=\sqrt{1+\frac{2m\mu_2}{\alpha_\theta}},$$

$\theta_0 = 2\omega\sqrt{\alpha_\theta}\beta_\theta$, получаем

$$\frac{\theta}{2\sqrt{\alpha_\theta}}-$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\theta}\sqrt{1+\frac{2m\mu_2}{\alpha_\theta}}}\int\frac{dr}{r\sqrt{2mh\frac{(\alpha_\theta+2m\mu_2)}{(m\mu_1)^2}\left(\frac{m\mu_1 r}{\alpha_\theta+2m\mu_2}\right)^2+2\frac{m\mu_1 r}{\alpha_\theta+2m\mu_2}-1}}=$$

$$=-\beta_\theta \to \quad \omega\theta+\theta_0=\int\frac{dr}{r\sqrt{(e^2-1)\left(\frac{r}{p}\right)^2+2\left(\frac{r}{p}\right)-1}}=\int\frac{dr}{r\sqrt{e^2\left(\frac{r}{p}\right)^2-\left(\frac{r}{p}-1\right)^2}}=$$

$$=-\int\frac{d\left(\frac{p}{r}-1\right)}{e\sqrt{1-\frac{1}{e^2}\left(\frac{p}{r}-1\right)^2}}=\arccos\frac{\frac{p}{r}-1}{e} \quad\to\quad r=\frac{p}{1+e\cos(\omega\theta+\theta_0)}.$$

Имеем замкнутые траектории при $e=0$, либо $e<1$ и ω рационально. Траектории разомкнуты при $e\geq 1$ либо $e<1$ и ω иррационально. При $\mu_2=0$ имеем обычное коническое сечение.

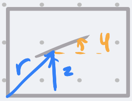
под корнем $(e^2-1)\left(\frac{r}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{p}\right) - 1 = e^2\left(\frac{r}{p}\right)^2 - \left(\frac{r}{p}-1\right)^2$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_\psi + 2m\mu_2}} \int \frac{dr}{r\sqrt{e^2\left(\frac{r}{p}\right)^2 - \left(\frac{r}{p}-1\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\alpha_\psi}\underbrace{\sqrt{1+\frac{2m\mu_2}{\alpha_\psi}}}_{\omega}} \int \frac{d\left(\frac{p}{r}-1\right)}{e\sqrt{1-\frac{1}{e^2}\left(\frac{p}{r}-1\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_\psi}\cdot\omega} \cdot \arccos\frac{\frac{p}{r}-1}{e}$$

$$\arccos\frac{\frac{p}{r}-1}{e} = \overbrace{2\omega\sqrt{\alpha_\psi}\beta_\psi}^{\psi_0} + \omega\psi = \psi_0 + \omega\psi \Rightarrow \boxed{r = \frac{p}{1+e\cdot\cos(\omega\psi+\psi_0)}}$$

24.18. Однородный стержень массы m и длины l движется по гладкой вертикальной плоскости $O\xi\eta$. Плоскость вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси $O\eta$. Используя метод Якоби, записать уравнения относительного движения стержня в квадратурах.



$$T = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + \dot z^2) + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}(\dot\psi^2 + \omega^2\sin^2\theta) \qquad \Pi(z,r) = mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

$$H = \hat T + \Pi = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{6}{ml^2}p_\psi^2 + \frac{ml^2}{24}\omega^2\sin^2\theta + mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{6}{ml^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \psi}\right)^2 + f(z,r,\theta) = 0$$

Полный интеграл ищем в виде

$$S = S_0(t,\alpha) + S_r(r,\alpha) + S_z(z,\alpha) + S_\psi(\psi,\alpha)$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial S_z}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{6}{ml^2}\left(\frac{\partial S_\psi}{\partial \psi}\right)^2 + \frac{ml^2}{24}\omega^2\sin^2\psi + mgz - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = 0$$

Уравнение распалось на слагаемые, каждое из которых зависит от своих переменных. Но так как уравнение должно тождественно выполнятся, то получаем, что все слагаемые есть константы:

$$\frac{\partial S_\psi}{\partial \psi} = \sqrt{\alpha_\psi} \Rightarrow S_\psi = \sqrt{\alpha_\psi}\cdot\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_z}{\partial z}\right)^2 + mgz = \alpha_z \Rightarrow S_z = \int\sqrt{2m\cdot(\alpha_z - mgz)}\,dz$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \alpha_r \Rightarrow S_r = \int \sqrt{2m\cdot\left(\alpha_r + \frac{1}{2}mr^2\omega^2\right)}\,dr$$

$$\frac{6}{ml^2}\left(\frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{ml^2}{24}\omega^2\sin^2\varphi = \alpha_\varphi \Rightarrow S_\varphi = \int \sqrt{\frac{ml^2}{6}\left(\alpha_\varphi + \frac{ml^2}{24}\omega^2\sin^2\varphi\right)}\,d\varphi$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha_r + \alpha_\varphi + \alpha_z = 0 \Rightarrow S_0 = -\alpha_r t - \alpha_\varphi t - \alpha_z t$$

$$S = -\alpha_r t + \int \sqrt{2m\cdot\left(\alpha_r + \frac{1}{2}mr^2\omega^2\right)}\,dr - \alpha_\varphi t + \int \sqrt{\frac{ml^2}{6}\left(\alpha_\varphi + \frac{ml^2}{24}\omega^2\sin^2\varphi\right)}\,d\varphi -$$
$$-\alpha_z t + \int \sqrt{2m\cdot(\alpha_z - mgz)}\,dz$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_r} = -t + \int \frac{2m\,dr}{2\sqrt{2m\alpha_r + m^2r^2\omega^2}} = \beta_r \Rightarrow \boxed{\int \frac{\sqrt{m}\,dr}{\sqrt{2\alpha_r + mr^2\omega^2}} = \beta_r + t}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi} = -t + \int \frac{\frac{ml^2}{6}\,d\varphi}{2\cdot\sqrt{\frac{ml^2}{144}}\left(24\alpha_\varphi + ml^2\omega^2\sin^2\theta\right)} \Rightarrow \boxed{\int \frac{\sqrt{ml^2}\,d\varphi}{\sqrt{24\alpha_\varphi + ml^2\omega^2\sin^2\theta}} = \beta_\varphi + t}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_z} = -t + \int \frac{2m\,dz}{2\sqrt{2m\cdot(\alpha_z - mgz)}} \Rightarrow \boxed{\int \frac{\sqrt{m}\,dz}{\sqrt{2\cdot(\alpha_z - mgz)}} = \beta_z + t}$$

24.18. $\int \frac{\sqrt{m}\,dr}{\sqrt{2\alpha_r + mr^2\omega^2}} = \beta_r + t,$

$\int \frac{\sqrt{m}\,dz}{\sqrt{2(\alpha_z - mgz)}} = \beta_z + t,\quad \int \frac{\sqrt{ml^2}\,d\theta}{\sqrt{24\alpha_\theta + ml^2\omega^2\sin^2\theta}} = \beta_\theta + t.$

В задачах 24.36–24.47 система задаётся своим гамильтонианом. Используя метод Якоби, составить в квадратурах уравнения, определяющие закон движения системы.

24.43. $H = \frac{p_1^2}{q_1^2} + \frac{1}{q_1^2}\left(\frac{p_2^2}{q_2^2} + \frac{p_3^2}{q_2^2 q_3^2}\right)$

Аналогично пред. задачам

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{(\partial S_1/\partial q_1)^2}{q_1^2} + \frac{1}{q_1^2 q_2^2}\left((\partial S_2/\partial q_2)^2 + \frac{(\partial S_3/\partial q_3)^2}{q_3^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha_1 = 0 \Rightarrow S_0 = -\alpha_1 t$$

$$\frac{(\partial S_3/\partial q_3)^2}{q_3^2} = \alpha_3 \Rightarrow S_3 = \int \sqrt{\alpha_3}\, q_3\, dq_3 = \frac{1}{2} q_3^2 \sqrt{\alpha_3}$$

$$\frac{1}{q_2^2}\left((\partial S_2/\partial q_2)^2+\alpha_3\right)=\alpha_2 \Rightarrow S_2=\int\sqrt{\alpha_2 q_2^2-\alpha_3}\,dq_2$$

$$\frac{1}{q_1^2}\left[(\partial S_1/\partial q_1)^2+\alpha_2\right]=\alpha_1 \Rightarrow S_1=\int\sqrt{\alpha_1 q_1^2-\alpha_2}\,dq_1$$

$$S=-\alpha_1 t+\int\sqrt{\alpha_1 q_1^2-\alpha_2}\,dq_1+\int\sqrt{\alpha_2 q_2^2-\alpha_3}\,dq_2+\frac{1}{2}q_3^2\sqrt{\alpha_3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=-t+\int\frac{q_1^2\,dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 q_1^2-\alpha_2}}=\beta_1 \Rightarrow \int\frac{q_1^2\,dq_1}{\sqrt{\alpha_1 q_1^2-\alpha_2}}=2(\beta_1+t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=-\int\frac{dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 q_1^2-\alpha_2}}+\int\frac{q_2^2\,dq_2}{2\sqrt{\alpha_2 q_2^2-\alpha_3}}=\beta_2$$

24.43. $\int\frac{q_1^2 dq_1}{\sqrt{\alpha_1 q_1^2-\alpha_2}}=2(\beta_1+t)$,

$\int\frac{dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 q_1^2-\alpha_2}}-\int\frac{q_2^2 dq_2}{2\sqrt{\alpha_2 q_2^2-\alpha_3}}=\beta_2$, $\int\frac{dq_2}{2\sqrt{\alpha_2 q_2^2-\alpha_3}}-\frac{q_3^2}{4\sqrt{\alpha_3}}=\beta_3$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_3}=-\int\frac{dq_2}{2\sqrt{\alpha_2 q_2^2-\alpha_3}}+\frac{q_3^2}{4\sqrt{\alpha_3}}=\beta_3$$

24.66. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для системы с гамильтонианом

$$H=H\left[\psi_1(q_1,p_1),\dots,\psi_n(q_n,p_n),t\right],$$

где функции $\psi_i(q_i,p_i)=\alpha_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ разрешимы относительно импульсов $p_i=p_i(q_i,\alpha_i)$.

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left[\psi\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}\right),t\right]=0$$

$$\psi_i(q_i,p_i)=\alpha_i \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t}+H(\alpha,t)=0$$

Ищем S в виде $S=S_0(t,\alpha)+\sum S_i(q_i,\alpha)$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t}=-H(\alpha,t) \Rightarrow S_0=-\int H(\alpha,t)\,dt$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial q_i}=p_i=p_i(q_i,\alpha_i) \Rightarrow S_i=\int p_i(q_i,\alpha_i)\,dq_i$$

$$S=-\int H(\alpha,t)\,dt+\sum\int p_i(q_i,\alpha_i)\,dq_i$$

24.66. $S=-\int H(\alpha_1,\dots,\alpha_n,t)\,dt+\sum_{i=1}^{n}\int p_i(q_i,\alpha_i)\,dq_i$

В задачах 24.84 – 24.89 по заданному полному интегралу уравнения Гамильтона–Якоби найти гамильтониан системы.

24.87.

$S = -\alpha_1 \int f(t)dt + \int \sqrt{\alpha_n f_n(q_n)}dq_n + \sum_{i=1}^{n-1} \int \sqrt{(\alpha_i - \alpha_{i+1}) f_i(q_i)}dq_i.$

из S

ур-е Г-Я: $\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(q, p, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H} = -\alpha_1 f(t)$

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \Rightarrow \begin{cases} p_{i<n} = \sqrt{(\alpha_i - \alpha_{i+1}) f_i(q)} \\ p_n = \sqrt{\alpha_n f_n(q)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) = \frac{p_{i<n}^2}{f_i(q)} \\ \alpha_n = \frac{p_n^2}{f_n(q)} \end{cases}$$

$$\alpha_{n-1} = \alpha_n + \frac{p_{n-1}^2}{f_{n-1}(q)} = \frac{p_n^2}{f_n(q)} + \frac{p_{n-1}^2}{f_{n-1}(q)} \Rightarrow \alpha_1 = \sum \frac{p_i^2}{f_i(q)} \Rightarrow \boxed{H = f(t) \sum \frac{p_i^2}{f_i(q)}}$$

24.87. $H = f(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{f_i(q_i)}$