

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Теория поля

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: ФРКТ

кафедра: теоретической физики им Л.Д. Ландау

курс: 3

семестр: 5

лекции – 30 часов

Экзамен – 5 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа
– 45 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц.
С. В. Фомичев

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики им. Л.Д. Ландау
24 мая 2025 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н.

Э. Т. Ахмедов

ТЕОРИЯ ПОЛЯ И МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. **Принцип относительности.** Однородность пространства и однородность времени, изотропия пространства, инерциальные системы отсчёта. Ньютонова механика и принцип относительности Галилея. Потенциальность сил и дальное действие. Постоянство скорости света. Несовместимость конечности скорости распространения взаимодействий с принципом относительности Галилея. Принцип относительности Эйнштейна. Изменение представлений о свойствах пространства и времени в результате опытов со светом. Преобразования Лоренца, их вывод и следствия из них. Относительность одновременности и промежутков времени. Мысленные опыты по измерению длин, промежутков времени и синхронизации часов. Сокращение длин, замедление времени и собственное время. Релятивистское сложение скоростей и преобразование направлений. Эффект прожектора. Аберрация света.
2. **Четырёхмерное псевдоевклидово пространство Минковского.** Декартовы координаты. Мировая точка (событие) и мировая линия. Интервалы между событиями как мера расстояния в пространстве Минковского. Пространственноподобные, времениподобные и нулевые интервалы. Световой конус. Принцип причинности. Инвариантность интервала и геометрическая интерпретация преобразований Лоренца. Аффинные преобразования. Понятие 4-вектора. Скалярное произведение. Метрика четырёхмерного пространства. Контра- и ковариантное представление. 4-градиент и 4-дивергенция. 4-векторы скорости и ускорения. Ковариантность физических законов относительно преобразования Лоренца как переформулировка принципа относительности. Векторы и тензоры в трёхмерном пространстве.
3. **Описание движения свободной релятивистской точечной частицы.** Понятие точечной элементарной частицы, её 4-координата и мировая линия. Ковариантная формулировка принципа наименьшего действия в пространстве Минковского, функция Лагранжа свободной частицы. Принцип соответствия. Энергия, импульс и гамильтониан свободной релятивистской частицы. 4-вектор импульса. Частицы с нулевой массой. Ультрарелятивистское движение. Закон сохранения 4-импульса замкнутой системы как следствие однородности пространства-времени. Лабораторная система и система центра масс. Применение закона сохра-

нения 4-импульса для описания упругих столкновений частиц. Эффективная масса системы. Неупругие столкновения и распады с образованием новых частиц. Дефект массы для составных систем. Порог реакции. Волновой 4-вектор. Эффект Доплера.

4. **Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем.** Понятия заряда точечной элементарной частицы и электромагнитного поля. 4-вектор потенциал электромагнитного поля. Действие и лагранжиан для точечной частицы во внешнем векторном поле. Энергия, обобщенный и кинематический импульсы. Уравнение Лагранжа и сила Лоренца. Функция Гамильтона. Градиентная (калибровочная) инвариантность. Ковариантный вывод уравнения движения заряженной частицы в четырехмерном виде. 4-вектор силы.
5. **Тензор электромагнитного поля.** Понятие тензора. 4-тензоры и их свойства. Абсолютно антисимметричный и метрический тензоры. Инвариантность 4-объема. Электрическое и магнитное поля как компоненты антисимметричного 4-тензора электромагнитного поля. Преобразование Лоренца для потенциалов (φ , \mathbf{A}) и напряженностей (\mathbf{E} , \mathbf{H}) из одной системы отсчета в другую. Инварианты поля и их следствия. Дуальный тензор поля.
6. **Движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.** Движение заряженной частицы в постоянных однородных электрическом и магнитном полях. Дрейф в скрещенных полях. Средняя сила и средний момент силы для системы частиц во внешних слабонеоднородных электрическом и магнитном полях. Электрический и магнитный дипольные моменты. Энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле. Гиромагнитное отношение. Прецессия магнитного момента во внешнем поле и теорема Лармора. Адиабатический инвариант и движение заряженной частицы в слабопеременном магнитном поле. Движение ведущего центра орбиты и поперечный дрейф заряженной частицы в слабонеоднородном магнитном поле. Магнитные зеркала и примеры осуществления их в природе и технике.
7. **Уравнения электромагнитного поля.** Уравнения Максвелла как обобщение опытных фактов и их вывод из первых принципов. Первая пара уравнений Максвелла. Распределенные заряды. Переход от точечных зарядов к распределенной системе зарядов и токов при помощи δ -функции. Плотности заряда и тока системы точечных частиц. Закон сохранения электрического заряда

и уравнение непрерывности. 4-вектор плотности тока. Функционал действия и плотность функции Лагранжа для электромагнитного поля. Получение второй пары уравнений Максвелла из вариационного принципа. Уравнения Максвелла в трехмерной и четырехмерной формах. Единственность решений уравнений Максвелла. Свойства симметрии уравнений Максвелла.

8. **Энергия и импульс электромагнитного поля. Уравнения для потенциалов.** Плотность энергии поля и вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга). Баланс энергии системы заряженных частиц и электромагнитного поля. Плотность импульса поля, тензор плотности потока импульса и тензор напряжений Максвелла. Баланс импульса системы заряженных частиц и электромагнитного поля. Плотность силы Лоренца. 4-тензор энергии-импульса. Калибровочная инвариантность уравнений электродинамики. Уравнения для потенциалов. Вид уравнений для 4-потенциалов в кулоновской калибровке и в калибровке Лоренца. Оператор Д'Аламбера. Основные уравнения электро- и магнитостатики. Электростатический потенциал точечного заряда.
9. **Электро- и магнитостатика.** Уравнение Пуассона и его решение. Функция Грина уравнения Пуассона. Электрическое поле системы неподвижных зарядов на больших расстояниях. Мультипольное разложение потенциалов. Электрический квадрупольный момент. Энергия электростатического взаимодействия и устранение самодействия точечных частиц. Выражение энергии системы зарядов во внешнем слабонеоднородном электрическом поле через мультипольные моменты. Решение уравнения Пуассона для векторного потенциала стационарной системы токов. Закон Био-Савара. Магнитное поле усредненного по времени стационарного движения зарядов на больших расстояниях.
10. **Свободное поле. Неоднородные волновые уравнения.** Однородные волновые уравнения для потенциалов свободного электромагнитного поля в пустом пространстве и их решения. Плоские монохроматические электромагнитные волны и их поляризация. Линейная, круговая и эллиптическая поляризации. Усреднение по времени и по поляризации. Решение неоднородных волновых уравнений с помощью функции Грина. Функция Грина в фурье-представлении по времени. Функция Грина волнового уравнения и принцип причинности. Определение запаздывающей функции Грина.

11. **Запаздывающие потенциалы. Излучение в дипольном приближении.** Запаздывающая и опережающая функции Грина волнового уравнения. Запаздывающие потенциалы. Дипольное приближение, его физический смысл и критерии применимости. Потенциалы поля излучения в дипольном приближении. Поля \mathbf{E} и \mathbf{H} в волновой и квазистационарной зонах. Интенсивность излучения в дипольном приближении. Угловое и спектральное распределения дипольного излучения и его поляризация.
12. **Излучение движущихся зарядов вне дипольного приближения.** Поле в волновой зоне колеблющихся магнитного диполя и электрического квадруполь. Интенсивность излучения магнитного диполя и электрического квадруполь. Излучение релятивистски-движущихся частиц. Потенциалы Лиенара-Вихерта. Формула Лармора. Синхротронное излучение и его полная интенсивность. Оценка длины формирования, углового и спектрального распределения синхротронного излучения в ультрарелятивистском случае.
13. **Реакция излучения и рассеяние электромагнитных волн.** Сила радиационного трения. Затухание, вызываемое излучением. Естественная (классическая) ширина спектральной линии. Пределы применимости классической электродинамики на малых расстояниях и в сильных полях. Постановка задачи о рассеянии. Дифференциальное и полное сечение рассеяния монохроматической волны на заряде. Рассеяние света на свободном электроны. Томсоновское сечение рассеяния и классический радиус электрона. Поляризация рассеянного света. Рассеяние электромагнитных волн на связанном электроны как на осцилляторе с затуханием. Резонансное рассеяние.

Список литературы

Основная

1. Ландау Л. Д. Теоретическая физика : в 10 т. Т. 2 : Теория поля : учеб. пособие для вузов / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц ; под. ред. Л. П. Питаевского. 9-е изд., стереотип. - М. : Физматлит, 2016.
2. Белоусов Ю. М. Задачи по теоретической физике : учебное пособие / Ю. М. Белоусов, С. Н. Бурмистров, А. И. Тернов. - 2-е изд. - Долгопрудный: Интеллект, 2022.
3. Батыгин В. В. Сборник задач по электродинамике : учеб. пособие для вузов / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин ; под ред. М. М. Бредова. - 3-е изд., испр. - М. : Регулярная и хаотическая динамика, 2002.

Дополнительная

1. Фомичев С. В. Лекции по теории поля : Теория относительности и релятивистская механика, микроскопическая электродинамика и элементы макроскопической электродинамики / С. В. Фомичев. - Москва: МЦНМО, 2024.
2. Батыгин В. В. Современная электродинамика. [В 2 ч.]. Ч. 1 : Микроскопическая теория : учеб. пособие для вузов / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. - М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003.
3. Бредов М. М. Классическая электродинамика : учебное пособие / М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин/ - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2022.
4. Алексеев А. И. Сборник задач по классической электродинамике : учебное пособие / А. И. Алексеев. - 2-е изд., стереотип. - Санкт-Петербург: Лань, 2022.
5. Белоусов Ю. М. Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику : [учеб. пособие для вузов] / Ю. М. Белоусов, В. П. Кузнецов, В. П. Смилга/ - 2-е изд. - Долгопрудный : Интеллект, 2014.

6. ФОРМУЛЬНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

I. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ

1. Тензорные обозначения и векторный анализ

Правило Эйнштейна: по дважды повторяющимся индексам производится суммирование.

$\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, абсолютно симметричный тензор второго ранга.

$e_{\alpha\beta\gamma}$ — абсолютно антисимметричный трехмерный тензор третьего ранга:

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\beta\gamma\alpha}, \quad e_{123} = e_{xyz} = 1,$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\rho} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma}a_\alpha b_\beta, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

Усреднение по единичному радиус-вектору $\mathbf{n} \equiv \mathbf{r}/r$:

$$\overline{n_\alpha} = 0; \quad \overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}; \quad \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma} = 0;$$

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}).$$

Векторный оператор дифференцирования:

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \equiv \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$\Delta = (\nabla \cdot \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}, \quad \text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha},$$

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv (\nabla \cdot \mathbf{a}) = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad \text{rot } \mathbf{a} \equiv [\nabla \times \mathbf{a}] = \mathbf{e}_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\beta},$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \equiv a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} = a_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}, \quad \text{div } [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b},$$

$$\text{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \text{ div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a},$$

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = [\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a},$$

$$\operatorname{rot} f \mathbf{a} = [\operatorname{grad} f \times \mathbf{a}] + f \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad \operatorname{div} f \mathbf{a} = (\operatorname{grad} f \cdot \mathbf{a}) + f \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

Формулы для величин, содержащих радиус-вектор и его модуль
 $r \equiv |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\nabla r = \mathbf{r}/r \equiv \mathbf{n}; \quad \nabla f(r) = df/dr \cdot \mathbf{n}; \quad \operatorname{div} \mathbf{r} = 3; \quad \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0;$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a}; \quad \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}; \quad \operatorname{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{r}] = 2\mathbf{a} \quad (\mathbf{a} = \text{const}).$$

Лапласиан от сферически-симметричной функции:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}.$$

Теоремы Гаусса и Стокса:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} = \oint_S (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}); \quad \oint_L (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}) = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}).$$

Разложение в ряд Тейлора

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \dots = e^{(\mathbf{a} \cdot \nabla)} \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

2. Преобразование Фурье

(разложение по плоским волнам)

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} dt,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \frac{d^3\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4}.$$

3. Разложение плоской волны и кулоновского потенциала по полиномам Лежандра

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta),$$

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (R > r).$$

Здесь $P_l(x)$ — полиномы Лежандра, $j_l(z)$ — сферические функции Бесселя:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z).$$

Ортогональность полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \delta_{ll'} \frac{2}{(2l+1)}, \quad P_l(1) = 1.$$

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

4. Формула Сохотского. Дельта-функция

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{x - i\delta} = \mathcal{P} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x).$$

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b, \\ 0, & x_0 < a, x_0 > b; \end{cases}$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}, \quad \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x),$$

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n), \quad (f(x_n) = 0).$$

5. Функции Грина

Уравнение Пуассона:

$$\Delta G(\mathbf{r}) = -4\pi \delta(\mathbf{r}), \quad G(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}.$$

Уравнение Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2) G(\mathbf{r}) = -4\pi \delta(\mathbf{r}), \quad G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Волновое уравнение:

$$\square G(\mathbf{r}, t) \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) G(\mathbf{r}, t) = 4\pi \delta(\mathbf{r}) \delta(t),$$

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta(t - r/c)}{r}.$$

II. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Четырехмерные векторы и тензоры

4-вектор контравариантный $A^i \equiv (A^0, \mathbf{A}) \equiv (A^0, A^\alpha)$,

4-вектор ковариантный $A_i \equiv (A^0, -\mathbf{A}) \equiv (A^0, -A^\alpha)$.

Скалярное произведение 4-векторов

$$A^i B_i = A^0 B^0 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A^0 B^0 - A^\alpha B^\alpha.$$

4-радиус-вектор $x^i = (ct, \mathbf{r})$. Интервал $s = \sqrt{x^i x_i}$,
 $s^2 = (ct)^2 - \mathbf{r}^2$, $ds^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2$, $ds \equiv cd\tau = cdt\sqrt{1 - (v/c)^2}$.

Преобразование Лоренца (скорость направлена параллельно оси x , а также $\beta = v/c = \text{th } \psi$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} = \text{ch } \psi$, $\beta\gamma = \text{sh } \psi$):

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}, \quad A'^i = \alpha^i_k A^k,$$

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix}, \quad A^i = \alpha_k^i A'^k,$$

$$\begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad A'_i = \alpha_i^k A_k,$$

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix}, \quad A_i = \alpha^k_i A'_k.$$

Интервал и метрика: $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$,

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{ik}, \quad g_i^k \equiv \delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha^i{}_k \alpha_l{}^k = \delta_l^i, \quad \alpha_i{}^k \alpha_l{}^i = \delta_l^k, \quad A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k.$$

2. Кинематика релятивистской частицы

Действие и лагранжиан для свободной частицы:

$$S = -mc \int_1^2 ds = \int_1^2 L dt \Rightarrow L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

4-скорость частицы:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right), \quad u^i u_i = 1.$$

4-импульс:

$$p^i = mc u^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right), \quad \mathbf{p} = \frac{\mathcal{E} \mathbf{v}}{c^2}, \quad p^i p_i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2,$$

m — масса, \mathcal{E} — энергия, \mathbf{p} — импульс частицы. $\mathcal{E}_0 = mc^2$.

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{p}).$$

Эффективная масса системы N релятивистских частиц соответствует их квадрату энергии в системе ц.м.:

$$s \equiv m_{\text{эф}}^2 = (p_{1i} + p_{2i} + \dots + p_{Ni})(p_1^i + p_2^i + \dots + p_N^i)/c^2.$$

Для встречных пучков (2 частицы, $c = 1$)

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|); \quad s \simeq 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (\text{у.-р. предел}).$$

Для фиксированной мишени (частица 2 покоится, $c = 1$)

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2\varepsilon_1 m_2; \quad s \simeq 2\varepsilon_1 m_2 \quad (\text{у.-р. предел}).$$

3. Электромагнитное поле и взаимодействие с частицами

Действие и лагранжиан для частиц в электромагнитном поле:

$$S = - \int_1^2 \left(-mc ds - \frac{e}{c} A_i dx^i \right) = \int_1^2 L dt,$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - e\varphi + \frac{e}{c}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}).$$

4-потенциал $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, где φ — скалярный, а \mathbf{A} — векторный потенциалы, электрическое и магнитное поля

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Калибровочные преобразование и инвариантность:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \text{grad } f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}; \quad A'_i = A_i - \frac{\partial f}{\partial x^i} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H}, \quad \text{и} \quad F'_{ik} = F_{ik}. \end{aligned}$$

Тензор электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} F_{ik} &= \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \nabla^i; \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \equiv \nabla_i. \\ F_{ik} &= \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & -e_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma \end{pmatrix}, \\ F^{ik} &= \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & -e_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Дуальный тензор:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{ik} &= \frac{1}{2} e_{iklm} F^{lm}, \quad e^{0123} = -e_{0123} = 1. \\ \tilde{F}_{ik} &= \begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & E_z & -E_y \\ -H_y & -E_z & 0 & E_x \\ -H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ -\mathbf{H} & e_{\alpha\beta\gamma} E_\gamma \end{pmatrix}, \\ \tilde{F}^{ik} &= \begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{H} \\ \mathbf{H} & e_{\alpha\beta\gamma} E_\gamma \end{pmatrix}. \\ \tilde{F}_{ik}(\mathbf{E}, \mathbf{H}) &\Rightarrow F^{ik}(\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{H}, \mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}). \end{aligned}$$

Преобразование Лоренца для полей:

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{H}] \right),$$

$$H'_{\parallel} = H_{\parallel}, \quad \mathbf{H}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{H}_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{E}] \right).$$

Инварианты электромагнитного поля — 4-скаляры:

$$F^{ik} F_{ik} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2), \quad F^{ik} \tilde{F}_{ik} = -4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}).$$

Уравнения движения заряженной частицы:

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = e(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}).$$

Радиус орбиты и угловая частота обращения в магнитном поле:

$$R = \frac{cp_{\perp}}{eH}; \quad \omega = \frac{eHc}{\mathcal{E}} \xrightarrow{v \ll c} \frac{eH}{mc}.$$

Адиабатический инвариант: $p_{\perp}^2/H = \text{const}$.

4. Уравнения электромагнитного поля

Действие для электромагнитного поля, взаимодействующего с частицами:

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int_{ct_A}^{ct_B} \iiint_{-\infty}^{\infty} d^4x F^{ik} F_{ik} - \frac{1}{c^2} \int_{ct_A}^{ct_B} \iiint_{-\infty}^{\infty} d^4x A_i j^i.$$

Уравнения Максвелла:

Первая пара

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} = 0.$$

Вторая пара

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j};$$

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i, \quad j^i = (c\rho, \mathbf{j}).$$

Микроскопические плотности заряда и тока

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t));$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \delta(\mathbf{r}) = \iiint e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

5. Постоянное электромагнитное поле

Электростатические и магнитостатические поля и потенциалы:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \\ \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \end{aligned}$$

Электрический (\mathbf{d}) и магнитный (\mathbf{m}) дипольные моменты системы зарядов:

$$\mathbf{d} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a, \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2c} \sum_a e_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a].$$

Для нерелятивистской частицы: $\mathbf{m} = g\mathbf{M}$ (\mathbf{M} — момент импульса, g — гиромагнитное отношение). В классике $g = e/(2mc)$.

Тензор квадрупольного момента

$$D_{\alpha\beta} = \sum_a e_a (3x_{a\alpha}x_{a\beta} - (\mathbf{r}_a)^2 \delta_{\alpha\beta}).$$

Мультипольное разложение электрического потенциала и электрического поля

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e}{r} + \frac{(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})}{r^2} + \frac{D_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta}{2r^3} + \dots; \\ \mathbf{E} &= -\nabla \varphi = \frac{e}{r^2} \mathbf{n} + \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3} + \dots \end{aligned}$$

Поле магнитного диполя

$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{[\bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{n}]}{r^3}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \frac{3(\bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \bar{\mathbf{m}}}{r^3}.$$

Система зарядов во внешнем электрическом поле

$$U_e = e\varphi - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} D_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{F}_e = (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad \mathbf{K}_e = [\mathbf{d} \times \mathbf{E}].$$

Энергия магнитного диполя, сила и момент сил, действующих на него во внешнем магнитном поле:

$$\bar{U}_m = -(\bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{H}), \quad \bar{\mathbf{F}}_m = (\bar{\mathbf{m}} \cdot \nabla) \mathbf{H}, \quad \bar{\mathbf{K}}_m = [\bar{\mathbf{m}} \times \mathbf{H}].$$

Угловая скорость прецессии магнитного диполя: $\boldsymbol{\Omega} = -g\mathbf{H}$.

6. Волновые уравнения и их решения

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi \equiv \square \varphi = 4\pi\rho, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} \equiv \square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad \nabla^i \nabla_i = \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Запаздывающие потенциалы:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}';$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'.$$

Потенциалы Лиенара—Вихерта:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{v}}{cR \left(1 - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}{c}\right)} \Bigg|_{t'}, \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{R \left(1 - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}{c}\right)} \Bigg|_{t'}.$$

$$\mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t'), \quad \mathbf{n}(t') = \mathbf{R}(t')/R(t'), \quad t = t' + R(t')/c.$$

Электромагнитное поле релятивистски-движущейся частицы:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\{c[\mathbf{w} \times \mathbf{n}] + [\mathbf{n} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{w}] \times \mathbf{n}]\}}{c^3 R \left(1 - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}{c}\right)^3} + \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) [\mathbf{v} \times \mathbf{n}]}{c R^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}{c}\right)^3} \Bigg|_{t'},$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c}) \times \mathbf{w}]]}{c^2 R \left(1 - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}{c}\right)^3} + \frac{e \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}}{c})}{R^2 \left(1 - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}{c}\right)^3} \Bigg|_{t'}.$$

7. Энергия и импульс электромагнитного поля

Плотность W и поток \mathbf{S} энергии электромагнитного поля

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \quad W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

Плотность \mathbf{g} и тензор плотности потока $T_{\alpha\beta} \equiv -\sigma_{\alpha\beta}$ импульса электромагнитного поля ($\sigma_{\alpha\beta}$ – тензор напряжений Максвелла)

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0,$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{\mathbf{S}}{c^2}, \quad T_{\alpha\beta} = W\delta_{\alpha\beta} - \frac{E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta}{4\pi}.$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} - F^{il} F^k_l \right);$$

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & \mathbf{S}/c \\ \mathbf{S}/c & -\sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Баланс энергии-импульса электромагнитного поля и частиц

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} F^{ik} j_k = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} + (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_\alpha = 0.$$

8. Плоская монохроматическая волна

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)} \right\}, \quad \mathbf{E} = [\mathbf{H} \times \mathbf{n}],$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}], \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Вектор поляризации

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|} = e_1 \mathbf{e}^{(1)} + e_2 \mathbf{e}^{(2)}, \quad \left((\mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{e}^{(2)*}) = 0, \quad (\mathbf{e}^{(1,2)} \cdot \mathbf{n}) = 0 \right).$$

Линейный базис

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(x)}, \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(y)}, (\mathbf{n} \parallel z),$$

циркулярный базис

$$\mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{e}^{(x)} + i\mathbf{e}^{(y)} \right), \mathbf{e}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathbf{e}^{(x)} - i\mathbf{e}^{(y)} \right).$$

Усреднение по времени

$$\overline{(\operatorname{Re}\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}\} \cdot \operatorname{Re}\{\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}\})} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{B}_0^*).$$

Усреднение по поляризации: $\overline{e_\alpha e_\beta^*} = (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) / 2$.

9. Излучение и рассеяние электромагнитных волн

Интенсивность мультипольного излучения

$$\frac{dI_d}{d\Omega} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3}, \quad I_d = \int \frac{dI_d}{d\Omega} d\Omega = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2;$$

$$I_m = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{m}}^2; \quad I_q = \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\beta}.$$

Полная интенсивность излучения релятивистской частицы

$$I = \frac{2e^2\gamma^6}{3c^3} \left\{ \mathbf{w}^2 - \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{w}]^2}{c^2} \right\}.$$

Сила радиационного трения

$$\mathbf{F}_{fr} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}.$$

Сечение рассеяния

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2; \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}; \quad \sigma = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

План семинаров

1. Преобразования Лоренца.
2. Тензорная математика.

3. Релятивистская кинематика.
4. Движение релятивистской частицы в скрещенных полях.
5. Адиабатический инвариант.
6. Движение и дрейф в слабонеоднородном магнитном поле.
7. Прием первого задания.
8. Уравнение Пуассона в электростатике.
9. Квадрупольный момент.
10. Поле гармонически колеблющегося диполя.
11. Излучение при столкновениях.
12. Синхротронное излучение.
13. Рассеяние света осциллятором.
14. Прием второго задания.
15. Прием заданий.

ЗАДАНИЕ

ТЕОРИЯ ПОЛЯ И МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1-е задание

1. Начало координат системы K' движется со скоростью $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ относительно системы K , а оси координат составляют со скоростью \mathbf{V} те же самые углы, что и оси системы K . Записать матрицу преобразований Лоренца от системы K к системе K' (а также обратного преобразования). Определить положение осей (x', y') в системе K в момент времени $t = 0$ по часам системы K .

Указание: представить радиус-вектор в виде суммы параллельного и перпендикулярного скорости \mathbf{V} векторов: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$, где $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}/V^2$, $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V})\mathbf{V}/V^2$.

2. * Пусть произведено два последовательных преобразования Лоренца вдоль оси y и вдоль оси x со скоростью v . Используя систему компьютерной символьной алгебры, подобрать скорости v_1 и v_2 последовательных преобразований Лоренца вдоль оси y и вдоль оси x , которые приведут систему в неподвижное положение относительно начального состояния. Как будет выглядеть матрица суперпозиции всех четырех преобразований? Как будет зависеть угол поворота от начальной скорости v ?
3. Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ. Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью?
4. Доказать, что трехмерные тензоры $\delta_{\alpha\beta}$ и $e_{\alpha\beta\gamma}$ являются инвариантными тензорами. Вычислить свертки
 - а) $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\mu\alpha}$;
 - б) $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma}$, $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma}$, $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma}$;
 покоординатно проверить, что $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ эквивалентно $c_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma$.
5. Раскрыть в тензорных обозначениях выражения: $\text{rot rot } \mathbf{A}$, $\text{rot} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\text{rot}(f\mathbf{A})$, $\text{div}(f\mathbf{A})$, $\text{div} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.
 Вычислить: а) $\text{rot}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$, $\text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{a} — постоянные векторы; б) $\text{grad } r$, $\text{div } \mathbf{r}$, $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{r}$, $\text{grad } f(r)$, $\text{rot } \mathbf{a}(r)$, $\text{div } \mathbf{a}(r)$, $(r \equiv |\mathbf{r}|)$.
6. Для получения γ -квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $\mathcal{E} = 200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon = 2$ эВ. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния.
7. В ускорителе на встречных пучках идет реакция

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-.$$

Зная энергию \mathcal{E}^+ и \mathcal{E}^- каждого из пучков e^+ и e^- соответственно, найти энергию и импульсы μ^+ и μ^- . Каков энергетический порог этой реакции? Найти пороговое условие в общем случае $\mathcal{E}^+ \neq \mathcal{E}^-$. Сравнить порог реакции в частном случае $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^-$ с порогом в случае, когда ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.

8. Для нейтрино, образующихся при распаде π -мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π -мезона ≈ 140 МэВ, масса μ -мезона ≈ 105 МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя π -мезона распад $\pi \rightarrow \mu + \nu$ происходит изотропно. Построить график углового распределения, соответствующий параметрам задачи.
9. * Плоское зеркало движется со скоростью V в направлении своей нормали. На зеркало падает монохроматическая волна под углом θ к нормали. Определить направление и частоту отраженной волны, считая, что для покоящегося зеркала справедлив обычный закон отражения.
10. Показать, что однородное магнитное поле \mathbf{H} , направленное по оси z , может быть описано векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = \{0, Hx, 0\}.$$

Градиентным преобразованием перейти к потенциалу $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}, \mathbf{r}]$.

11. Прямыми вычислениями доказать, что векторный потенциал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = - \int_0^1 \xi d\xi [\mathbf{r}, \mathbf{H}(\xi \mathbf{r})]$$

соответствует магнитному полю $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$ (при условии $\text{div } \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$).

12. Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в перпендикулярных однородных и постоянных электрическом и магнитном полях \mathbf{E} и \mathbf{H} . В случае $|\mathbf{E}| < |\mathbf{H}|$ определить скорость дрейфа. Используя графический редактор, построить графики траекторий движения $\mathbf{r}(t)$ частицы в случаях $E = H/2$, $E = H$ и $E = 2H$ при условии, что в начале движения частица покоилась в начале координат.
13. а) Частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Определить изменение энергии частицы за один оборот, если магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля). Доказать, что величина p_{\perp}^2/H остается постоянной

(т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2 . Получить формулу для адиабатического инварианта в случае, когда импульс частицы направлен произвольно.

- б) * Получить уравнения движения для скорости заряженной частицы в линейно меняющемся со временем (при $t > 0$) однородном магнитном поле $H(t) = H_0(1 + \omega_0 \eta t)$, где ω_0 – частота вращения частицы при начальном значении поля H_0 и энергии частицы \mathcal{E}_0 , а η – безразмерный параметр. Численно решив уравнения, построить траекторию движения, исследовать изменение радиуса кривизны траектории и проверить сохранение адиабатического инварианта при разной скорости изменения магнитного поля со временем.
14. Магнитное поле, направленное по оси z вдоль этой оси, убывает с постоянным градиентом $\partial H_z / \partial z = -h = \text{const}$. Может ли поле во всем пространстве оставаться параллельным оси z ? Найти радиальные компоненты поля вне оси z . Представить картину силовых линий.
15. Получить формулу $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu} \cdot \nabla) \mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь (компактную систему стационарно движущихся заряженных частиц) в неоднородном постоянном магнитном поле.
16. Найти уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы в неоднородном постоянном магнитном поле и скорость поперечного дрейфа. (Поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты.)
17. * На больших расстояниях магнитное поле Земли представляет собой поле магнитного диполя $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - r^2 \mathbf{m}\} / r^5$ с магнитным моментом

$$\mathbf{m} = 8.1 \cdot 10^{25} \text{ Гс} \cdot \text{см}^3.$$

а) Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии. б) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол α с плоскостью экватора, определить максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей. Найти угол α , при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной

плоскости, значительно больше радиуса Земли. в) Используя результаты предыдущей задачи 16, найти период дрейфа вокруг Земли протона с энергией 1 КэВ, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30 000 км от Земли.

2-е задание

18. Определить потенциальную энергию взаимодействия двух диполей с моментами \mathbf{d}_1 и \mathbf{d}_2 .
19. Заряд электрона распределен в основном состоянии атома водорода с плотностью электронного облака

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где e — заряд электрона и $a \sim 10^{-8}$ см — боровский радиус. Найти энергию взаимодействия электронного облака с ядром:

- а) считая ядро точечным зарядом;
 - б) считая ядро сферически-симметричным заряженным шаром радиуса $r_0 \sim 10^{-13}$ см с плотностью заряда $\rho_{\text{ядра}}(r)$. Получить ответ для частного случая равномерно заряженного шара.
20. Найти тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида с зарядом Q и полуосями a , b и c относительно его центра. Найти электрическое поле на больших расстояниях, а также энергию взаимодействия этого эллипсоида с диполем \mathbf{d} , расположенным в точке с радиусом-вектором \mathbf{r} на большом расстоянии от эллипсоида (с учетом диполь-квадрупольного члена).
 21. Вычислить средние значения произведений компонент единичных векторов:

$$\langle n_\alpha \rangle, \quad \langle n_\alpha n_\beta \rangle, \quad \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma \rangle, \quad \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu \rangle, \quad \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu n_\nu \rangle.$$

Усреднение ведется по единичной сфере $n_\alpha n_\alpha = 1$.

22. Определить электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях, много больших размеров диполя (но необязательно больших длины волны). Исходя из полученного общего результата, рассмотреть предельные случаи волновой и квазистатической зон.

23. * Гармонически колеблющийся диполь помещен на высоте L над идеально проводящей металлической плоскостью. Найти угловое распределение интенсивности излучения диполя в зависимости от углов наблюдения (θ и φ) и угла между диполем и нормалью к плоскости α . Исследовать предельные случаи $L \ll \lambda$ и $L \gg \lambda$.
24. Два одноименных заряда ($e_1, m_1; e_2, m_2$; $e_1 e_2 > 0$) испытывают лобовое столкновение. Определить излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Отдельно рассмотреть случай $e_1/m_1 = e_2/m_2$ (квадрупольное излучение).
25. * Электрон рассеивается на атоме водорода, который можно представить как точечный заряд $|e|$ в центре атома, окруженный электронным облаком с плотностью заряда $\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, где $e = -|e|$ — заряд электрона и $a \sim 10^{-8}$ см — боровский радиус. Найти энергию его дипольного излучения за все время пролета как функцию скорости электрона V на бесконечности и прицельного параметра R . Результат представить в графической форме.
26. Два противоположных заряда ($e_1, m_1; e_2, m_2$; $e_1 e_2 < 0$) обращаются один вокруг другого по круговой орбите радиуса R . Определить энергию, теряемую на излучение за один оборот. Найти зависимость расстояния между зарядами от времени.
27. * Равномерно заряженный эллипсоид с полуосями a , b и c вращается с угловой скоростью ω вокруг одной из главных осей. Найти интенсивность излучения.
28. Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле H за один оборот, а также закон изменения энергии электрона и радиуса его орбиты со временем за счет потерь на излучение.
29. Найти мощность синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце — $5 \cdot 10^{12}$. Оценить характерную длину волны излучения.
30. Релятивистский электрон пролетает со скоростью V через плоский конденсатор, к которому приложено переменное электрическое поле с частотой ω_0 . Найти частоту излучения электрона в зависимости от угла θ между наблюдателем и направлением движения электронного пучка.

31. а) В момент времени $t = 0$ покоящийся заряд начинает движение под действием линейно поляризованной монохроматической электромагнитной волны. Определить изменение скорости заряда со временем и среднюю скорость заряда вдоль направления распространения волны. Реакцию излучения не учитывать.
- б) * Показать, что учет силы радиационного трения приводит к дополнительной средней силе, действующей на частицу в поле электромагнитной волны, и определить с учетом этого закон изменения со временем средней скорости частицы вдоль направления распространения волны. Построить график скорости.
32. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния естественного света с частотой ω (а также линейно поляризованного света) осциллятором с затуханием.
33. * Найти сечение рассеяния линейно поляризованного света на идеально проводящем металлическом шаре радиуса R в пределе $R \ll \lambda$.

1-я контрольная и сдача 1-го задания:

20.10 — 25.10.2025 г.

2-я контрольная и сдача 2-го задания:

15.12 — 20.12.2025 г.