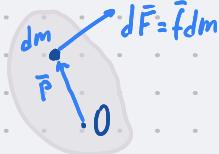


14.10. Используя принцип виртуальных перемещений, доказать, что равенство нулю главного вектора \bar{R} и главного момента \bar{M}_o сил, действующих на твердое тело, является необходимым и достаточным условием равновесия свободного твердого тела.



Теорема 7.1 (принцип виртуальных перемещений). Для того чтобы положение R^0 гомономной системы с идеальными связями было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении работа активных сил на любом виртуальном перемещении системы была равна нулю:

$$\delta A = \sum F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad \forall \delta R \in (7.5). \quad (7.9)$$

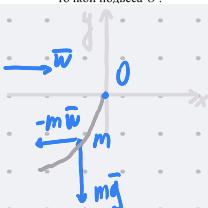
$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{w} \times \bar{p} / \cdot dt \Rightarrow \delta \bar{r} = \delta \bar{r}_0 + d\bar{q} \times \bar{p}$$

Если трактовать \bar{V}_0 и \bar{w} как ворт.

$$\delta A = \int \bar{f} \cdot \delta \bar{r} dm = \int [\bar{f} \cdot \delta \bar{r}_0 + \bar{f} \cdot (d\bar{q} \times \bar{p})] dm = \bar{R} \cdot \delta \bar{r}_0 + \int d\bar{q} \cdot (\bar{p} \times \bar{f}) dm = \bar{R} \cdot \delta \bar{r}_0 + \bar{M}_o \cdot d\bar{q}$$

$$\bar{R}^0 \text{ при } \delta A = 0 \Leftrightarrow \bar{R} \delta \bar{r}_0, d\bar{q} \Rightarrow \delta A = 0 \Rightarrow \bar{R} = 0, \bar{M}_o = 0$$

14.20. Точка подвеса однородной нити движется с постоянным ускорением w вдоль горизонтальной оси Ox . Найти форму нити в положении её относительного равновесия в системе координат Oxy , движущейся поступательно с точкой подвеса O .



Выберем правило точки на криви с массой m

14.20. Прямая линия $y = x \operatorname{tg} \alpha$, где $\operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{w}$.

14.29. Материальная точка может двигаться без трения по поверхности $f(x, y, z) = 0$ в силовом поле $\{F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)\}$.

Показать, что решение относительно x, y, z, λ системы уравнений

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

определяет положение равновесия точки и обратно, любому положению равновесия соответствует решение этой системы.

ПВП: $\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0$

Пусть виртуальное перемещение колечка задается величинами $\delta x, \delta y, \delta z$. Продифференцировав уравнения, задающие форму прута, получим, что на виртуальном перемещении должны выполняться условия

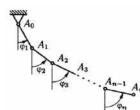
$$Y = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial z} = 0 \\ f = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

учтем эти соотн: $Y = \delta A + \lambda Y \Rightarrow$

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad f(x, y, z) = 0$$

14.40. Маятник составлен из n одинаковых стержней массы m и длины L , каждый, последовательно соединенных друг с другом шарнирами (n -звенный маятник). Маятник может совершать движение в вертикальной плоскости, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через точку A_0 , закрепления конца первого стержня. Составить уравнения, определяющие положения относительного равновесия системы.



К задачам 14.39, 14.40

$$\begin{aligned} S_i &= \sin \psi_i \\ C_i &= \cos \psi_i \\ t_i &= \tan \psi_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi &= -mgf \left[\frac{1}{2} C_1 + \right. \\ &\quad \left. + C_1 + \frac{1}{2} C_2 + \dots + C_1 + \dots + \frac{1}{2} C_n \right] \Rightarrow \Pi = -mgf \left[\left(n-1 + \frac{1}{2} \right) C_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(n-2 + \frac{1}{2} \right) C_2 + \dots + \frac{1}{2} C_n \right] \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \psi_k} = mgf \left(n-k + \frac{1}{2} \right) S_k \end{aligned}$$

$$Q^{un} = Q^{rep} + Q^{atp} = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial V}{\partial q}; \quad V = T^{unn} - T$$

$$T_k^r = \frac{1}{2} m (V_k^r)^2 + \frac{1}{2} \hat{J} \dot{\psi}_k^2$$

$$T_k^a = \frac{1}{2} m \left[(V_k^r)^2 + (V_k^e)^2 \right] + \frac{1}{2} \bar{\Omega}^T \hat{J} \bar{\Omega}$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega} + \dot{\bar{\psi}}_k = \begin{bmatrix} -\omega \cos \psi_k \\ \omega \sin \psi_k \\ \dot{\psi}_k \end{bmatrix}, \quad \hat{J} = \text{diag}(0, \frac{mL^2}{12}, \frac{mL^2}{12})$$

$$V_k = -\frac{1}{2} m (V_k^e)^2 - \frac{1}{2} \frac{mL^2}{12} \omega^2 \sin^2 \psi_k$$

$$\begin{aligned} V &= \left[\frac{1}{2} S_1^2 + \frac{1}{12} S_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + (S_1 + \frac{1}{2} S_2)^2 + \frac{1}{12} S_2^2 + \right. \\ &\quad \left. + \dots + (S_1 + \dots + \frac{1}{2} S_n)^2 + \frac{1}{12} S_n^2 \right] \cdot (-\frac{1}{2} m L^2 \omega^2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \psi_k} &= \left[\left(n-k + \frac{1}{2} \right) S_1 + \dots + \left(n-k + \frac{1}{2} \right) S_{k-1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(n-k + \frac{1}{4} \right) S_k + \frac{1}{12} S_k \right] + \\ &\quad + \left[\left(n-(k+1) + \frac{1}{2} \right) S_{k+1} + \dots + \frac{1}{2} S_n \right] \left(-m L^2 \omega^2 \right) \end{aligned}$$

$$A = \left(n-k + \frac{1}{2} \right) S_k - \frac{1}{4} S_k + \frac{1}{12} S_k = \left(n-k + \frac{1}{2} \right) S_k - \frac{1}{6} S_k$$

Теорема 7.2. Для того чтобы положение \mathbf{q}^* было положением равновесия стационарной гамильтоновой системы, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении все обобщенные силы были равны нулю:

$$Q_i(\mathbf{q}^*) = \left(\sum_j F_j \frac{\partial \mathbf{q}_j}{\partial q_i} \right)_{\mathbf{q}^*} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.15)$$

Если механическая система является консервативной, то обобщенные силы выражаются через потенциальную энергию системы

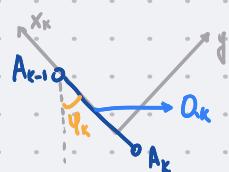
При формулировке

$$Q_i(\mathbf{q}) - \frac{\partial H(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}_i} = Q_i(\mathbf{q}) - \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}_i}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.16)$$

В этом случае условие равновесия (7.15) принимает вид:

$$\frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{\mathbf{q}^*} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (7.17)$$

т.е. положение равновесия консервативной системы соответствует стационарным точкам потенциальной энергии.



$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \psi_k} &= \left[(S_1 + \dots + \frac{1}{2} S_k) + \frac{1}{6} S_k + \right. \\ &\quad \left. + 2(S_1 + \dots + S_k + \frac{1}{2} S_{k+1}) + \right. \\ &\quad \left. + 2(S_1 + \dots + \frac{1}{2} S_n) \right] \cdot \left(-\frac{1}{2} m L^2 \omega^2 \right) \end{aligned}$$

A

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = \left[\sum_{i=1}^k \left(n - k + \frac{1}{2} \right) s_i + \sum_{i=k+1}^n \left(n - i + \frac{1}{2} \right) s_i - \frac{1}{6} s_n \right] (-m t^2 w^2 c_n)$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0, \quad k=1, n$$

$$m t^2 w^2 c_n \cdot \left[\sum_{i=1}^k \left(n - k + \frac{1}{2} \right) s_i + \sum_{i=k+1}^n \left(n - i + \frac{1}{2} \right) s_i - \frac{1}{6} s_n \right] = m g \dot{\varphi} \left(n - k + \frac{1}{2} \right) s_k$$

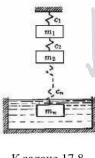
$$\frac{t}{g} w^2 c_n \cdot \left[\sum_{i=1}^k \left(n - k + \frac{1}{2} \right) s_i + \sum_{i=k+1}^n \left(n - i + \frac{1}{2} \right) s_i - \frac{1}{6} s_n \right] = \left(n - k + \frac{1}{2} \right) t_k$$

Сходится с ответом

$$\sum_{i=1}^n \left(n - i + \frac{1}{2} \right) s_i - \sum_{i=1}^k (k - i) s_i = \sum_{i=1}^k (1) + \sum_{i=k+1}^n (1) - \sum_{i=1}^k (2) = \sum_{i=1}^k \left(n - k + \frac{1}{2} \right) s_i + \sum_{i=k+1}^n \left(n - i + \frac{1}{2} \right) s_i$$

$$14.40. \frac{\omega^2 L}{g} \left[\sum_{i=1}^n \left(n - i + \frac{1}{2} \right) \sin \varphi_i - \frac{1}{6} \sin \varphi_1 - \sum_{i=1}^k (k - i) \sin \varphi_i \right] = \\ = \left(n - k + \frac{1}{2} \right) \lg \varphi_1 \quad (k=1, n).$$

- 17.8. Система состоит из n грузов, которые последовательно связаны между собой и с неподвижной опорой пружинами жесткости c_i и могут перемещаться по вертикали. На последний груз m_n действует сила вязкого трения $F = -\beta \dot{y}_n$, $\beta > 0$. Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.



К задаче 17.8

I способ

$$m_i \ddot{y}_i + \beta \dot{y}_i \delta_{in} - c_{i+1}(y_{i+1} - y_i) + c_i(y_i - y_{i-1}) = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix}$$

$$(*) \quad A \ddot{X} + B \dot{X} + CX = 0$$

Теорема. Если дифференциальные уравнения количественного движения таковы, что существует законопредetermined функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$, производная которой \dot{V} в силу этих уравнений есть законопредetermined функция противоположного знака с V , то невольнущее движение асимптотически устойчиво.

$$V(X, \dot{X}) = \frac{1}{2} \dot{X}^T A \dot{X} + \frac{1}{2} X^T C X > 0$$

$$\dot{V} = \dot{X}^T A \ddot{X} + X^T C \dot{X} =$$

$$= \dot{X}^T (-B \dot{X} - (X)) + X^T C \dot{X} = -\dot{X}^T B \dot{X} = -\beta \dot{y}_n^2 < 0 \Rightarrow \text{п.р. ас. уст}$$

\uparrow
Th. Ляпунова об ас.уст.

I способ

$$V = E = T + \Pi, \dot{V} = N_F, F = -\beta \dot{x}_n, N_F = F \dot{x} = -\beta \dot{x}_n^2$$

$$\dot{V} = -\beta \dot{x}_n^2 \Rightarrow M \{ \dot{x}_n = 0 \}$$

з-зак, что не существует таких общ. слст при которых член m_n поконится.
из того, что член поконится $\Rightarrow c_n$ имеет пост. движение \Rightarrow

\Rightarrow член m_{n-1} поконится $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ слст поконится \Rightarrow п.р. ас. уст

Th 5-k

Теорема Барбашина-Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости: если в некоторой окрестности нулевого равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ существует функция Ляпунова $V(\vec{x})$ такая, что

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i < 0, \vec{x} \in M$$

а) если $V(\vec{x})$ имеет минимум в положении равновесия $\vec{x} = \vec{0}$, то это положение равновесия асимптотически устойчиво;

б) если $V(\vec{x})$ законопредetermined в окрестности $\vec{x} = \vec{0}$, то положение равновесия $\vec{x} = \vec{0}$ неустойчиво.

Исследуйте на устойчивость нулевое решение с помощью прямого метода Ляпунова:

Th.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^3 + xy^3, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - x^4. \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{4} (x^4 + y^4) > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^3 \dot{x} + y^3 \dot{y} = x^3(-x^3 - y^3 + xy^3) + y^3(x^3 - y^3 - x^4) = \\ &= -x^6 - x^3 y^3 + x^4 y^3 + y^3 x^3 - y^6 - x^4 y^3 = -x^6 - y^6 < 0 \Rightarrow \text{П.Р. ас. уст.} \end{aligned}$$

I способ

Теорема (Четвертая о неустойчивости). Если дифференциальное уравнение количественного движения таково, что существует функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ такая, что в сколь угодно малой окрестности (1) существует область $V > 0$ и во всех точках области $V > 0$ производная \dot{V} в силу этих уравнений принимает положительные значения, то невольнущее движение неустойчиво.

$$V = xy > 0 \text{ при } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}y + x\dot{y} = xy + y^2 + x^3y + \\ &+ x^2 - xy - xy^3 \sim x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow \text{П.Р. Не уст} \end{aligned}$$

T2.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + x^3, \\ \dot{y} = x - y - y^3. \end{cases}$$

II способ

Теорема. Если все корни характеристического уравнения (3) имеют отрицательные вещественные части, то нулевое равновесие является асимптотически устойчивым независимо от нелинейных членов в (1). Если же среди корней характеристического уравнения есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то невольнущее движение неустойчиво — тоже независимо от нелинейных членов в (1).

система лин. прибл: $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \text{П.Р. Не уст}$$

Th. Ляпунова об уст по л.т.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$$

Примечание к задаче Т3

Функцию Ляпунова искать в виде $V = (ax + by)^2 + cx^4$.

$$V = (ax + by)^2 + cx^4 > 0 \text{ при } c > 0$$

$$\dot{V} = 2(ax + by)(a\dot{x} + b\dot{y}) + 4(x^3)\dot{x} =$$

$$-ax^3 - 3(a-2b)x + (a-2b)y$$

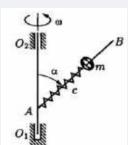
$$= 2(ax + by)(ay - 3ax - ax^3 + 6bx - 2by) + 4(x^3)(y - 3x - x^3)$$

$$\text{При } a = 2b \quad \dot{V} = -4(2x + y)b^2x^3 + 4(x^3)(y - 3x - x^3) =$$

$$= -8b^2x^4 - 4b^2x^3y + 4(x^3)y - 12(x^4) - 4(x^6) = 4((-b^2)x^3y - 4(2b^2 + 3c)x^4 - 4(x^6))$$

$$\text{При } \begin{cases} a = 2b \\ c = b^2 \end{cases} \quad \dot{V} = -20cx^4 - 4cx^6 < 0 \Rightarrow \text{н.р. ас. уст} \quad \text{Th. Ляпунова об ас.уст.}$$

15.2. Стержень AB , образующий угол α с вертикалью, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси O_2O_3 , проходящей через его конец A . По стержню может двигаться без трения колечко массы m , соединенное с точкой B пружиной жесткости c . Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0 . Найти положения относительного равновесия колечка и исследовать их устойчивость.



$$\alpha = \text{const}$$

$$\Pi = mgf \cos \alpha - \frac{1}{2} mw^2 f^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} C(f - f_0)^2 \quad (1)$$

$$\Pi_f = C(f - f_0) + mg \cos \alpha - mw^2 f \sin^2 \alpha = 0 \quad (2)$$

$$1) \text{ при } C \neq mw^2 \sin^2 \alpha \quad f = \frac{Cf_0 - mg \cos \alpha}{C - mw^2 \sin^2 \alpha} \quad \text{н.р.}$$

Теорема: Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

$$\Pi_{fr} = C - mw^2 \sin^2 \alpha \quad \begin{aligned} \bullet \Pi_{fr} > 0 \text{ при } C > mw^2 \sin^2 \alpha &\Rightarrow \text{уст} \\ \bullet \Pi_{fr} < 0 \text{ при } C < mw^2 \sin^2 \alpha &\Rightarrow \text{неуст} \end{aligned}$$

Th. Ляпунова о неуст.

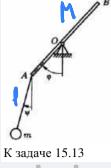
$$2) \text{ при } C = mw^2 \sin^2 \alpha$$

$$\Pi = \text{const} \Rightarrow f - \text{любой} - \text{неуст н.р. по опр}$$

Теорема 1: Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это является уже по членам второго порядка в разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

15.2. Положение равновесия $f = \frac{cl_0 - mg \cos \alpha}{c - mw^2 \sin^2 \alpha}$ устойчиво при $C > mw^2 \sin^2 \alpha$ и неустойчиво при $C < mw^2 \sin^2 \alpha$. При $l_0 c = mg \cos \alpha = l_0 mw^2 \sin^2 \alpha$ любое положение колечка является положением равновесия.

15.13. Груз массы m подвешен на невесомой нерастяжимой линии ℓ к точке A однородной стержня массы M , который может вращаться вокруг своей неподвижной точки O ($AO = l_1$, $OB = l_2$). Движение происходит в вертикальной плоскости. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.



К задаче 15.13

$$\Pi = Mg \frac{l_2 - l_1}{2} \cos\psi - mg(l \cos\psi + l_1 \cos\psi)$$

$$\Pi_{\psi} = -\frac{1}{2} Mg(l_2 - l_1) \sin\psi + mg l_1 \sin\psi \Rightarrow \psi_1 = 0, \psi_2 = \pi$$

$$\Pi_{\psi\psi} = mg l \sin\psi = 0 \Rightarrow \psi_{1,2} = 0$$

$$\Pi_{\psi\psi} = -\frac{1}{2} Mg(l_2 - l_1) \cos\psi + mg l_1 \cos\psi$$

$$\Pi_{\psi\psi} = mg l \cos\psi > 0 \text{ при } \psi = \psi_{1,2}$$

$$C = \begin{bmatrix} \Pi_{\psi\psi} & 0 \\ 0 & \Pi_{\psi\psi} \end{bmatrix} \quad \text{Sign } \Delta_2 = \text{Sign } \Delta_1 = \Pi_{\psi\psi}$$

$$\Pi_{\psi\psi} = \frac{1}{2} g \left[\frac{\psi_1}{l_1} M(l_2 - l_1) \pm 2ml_1 \right]$$

$$C_1 > 0, C_2 \geq 0 \text{ при } 2ml_1 > M(l_2 - l_1)$$

Th. 1-D

\rightarrow П.Р. ψ_1, ψ_2 уст

\rightarrow П.Р. ψ_2, ψ_2 неуст

Ляпунова о неуст.

$$C_1 \geq 0, C_2 > 0 \text{ при } 2ml_1 < M(l_2 - l_1)$$

Th. 1-D

\rightarrow П.Р. ψ_1, ψ_2 уст

\rightarrow П.Р. ψ_1, ψ_1 неуст

Ляпунова оптим.

При $2ml_1 = M(l_2 - l_1)$ Π не зависит от $\psi \Rightarrow$

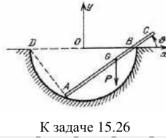
ψ_3 - любое
 $\psi_3 = 0$ неуст П.Р.
по опр

Теорема. Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Теорема 1. Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это является ровно по членам второго порядка в разложении функции Π в ради окрестности положения равновесия без необходимости рассматривать члены высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

15.13. При $2ml_1 > M(l_2 - l_1)$ положение равновесия $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0$ устойчиво, а положение равновесия $\psi_2 = \pi, \psi_1 = 0$ неустойчиво, и, наоборот, при $2ml_1 < M(l_2 - l_1)$ положение равновесия $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0$ неустойчиво, а положение равновесия $\psi_2 = \pi, \psi_1 = 0$ устойчиво. В случае $2ml_1 = M(l_2 - l_1)$ имеет место континуум неустойчивых положений равновесия ψ_3 - любое, $\psi_3 = 0$.

15.26. Тяжёлый однородный стержень длины l и массы m , опираясь на край полусферической чаши радиуса r , никаким концом может склоняться по сё внутренней гладкой поверхности. Геометрические параметры удовлетворяют условию $r < l < 2r$. Определить значение угла наклона θ стержня к линии горизонта в положении равновесия. Исследовать устойчивость положения равновесия.



К задаче 15.26

$$GB = AB - AG = 2r \cos \theta - \frac{\ell}{2}$$

$$\Pi = -mg(2r \cos \theta - \frac{\ell}{2}) \sin \theta \sim (-4 \cos \theta + \frac{\ell}{r}) \sin \theta$$

$$\Pi_\theta = -4 \cos 2\theta + \frac{\ell}{r} \cos \theta = -8 \cos^2 \theta + 4 + \frac{\ell}{r} \cos \theta = 0$$

$$\cos \theta_1, \cos \theta_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{\ell}{r} \pm \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\ell^2}{r^2} + 128}$$

$$\Pi_{\text{ЧЧ}} = 8 \sin 2\theta - \frac{\ell}{r} \sin \theta = \sin \theta (16 \cos \theta - \frac{\ell}{r})$$

$$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \Pi_{\text{ЧЧ}} > 0 \text{ при } \cos \theta > \frac{1}{16} \cdot \frac{\ell}{r}$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{16} \cdot \frac{\ell}{r} + \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\ell^2}{r^2} + 128}\right) - \text{уст. П.Р.}$$

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{1}{16} \cdot \frac{\ell}{r} - \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\ell^2}{r^2} + 128}\right) - \text{Нест. П.Р.}$$

Th. Напукова о неуст.

Теорема. Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.

Теорема 1. Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это удастся уже по членам второго порядка в разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассмотрения членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

15.26. $\phi \approx \arccos 0.92$, устойчиво. ???

T4. Материальная точка находится в однородном поле тяжести на гладкой поверхности, определяемом уравнением (ось Oz направлена вертикально вверх):

$$z = \sin(x+y) - \cos y.$$

Найдите все положения равновесия материальной точки и исследуйте их устойчивость.

$$\begin{aligned} \Pi_x &= \cos(x+y) = 0 \Rightarrow x+y = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ \Pi_y &= \cos(x+y) + \sin y = 0 \Rightarrow y = \pi k \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n \\ y = \pi k \end{cases} - \text{П.Р.}$$

$$\begin{aligned} (\begin{bmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{xy} \\ \Pi_{xy} & \Pi_{yy} \end{bmatrix} \mid -\sin(x+y) > 0) - \sin^2(x+y) - \sin(x+y) \cos y - \sin^2(x+y) &> 0 \Rightarrow \sin(x+y) < 0 \\ \cos y > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ y &= 2\pi k \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k) \\ y = 2\pi k \end{cases} \text{уст. П.Р.} \quad \text{Th. Н-Д}$$

$$2) \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k) \\ y = \pi k \end{cases} \text{Нест. П.Р.}$$

Th. Напукова о неуст

Теорема 1. Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это удастся уже по членам второго порядка в разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассмотрения членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.

16.6. Показать, что амплитудные векторы u_j и u_k , соответствующие различным собственным частотам малых колебаний консервативной системы, линейно независимы.

$$U_j^T A U_k = 0 \quad (j \neq k)$$

доказ.

При пренебрежении исходением решения (19) можно построить следующим образом. Ищем решение системы (19) в виде

$$\eta = \sin(\omega t + \alpha)$$

Подставив это выражение для η в уравнение (19) и оперативно заменив на $\sin(\omega t + \alpha)$, получим уравнение для амплитудного вектора u

$$(C - \lambda A)u = 0 \quad (\lambda = \omega^2)$$
 (21)

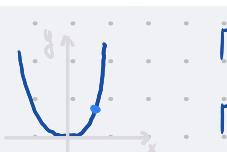
$$\begin{aligned} C U_k &= \mu_k A U_k / U_j^T \quad \Theta \\ C U_j &= \mu_j A U_j / U_k^T \quad \Rightarrow (\mu_k - \mu_j) U_j^T A U_k = \mu_k \neq \mu_j \quad \Rightarrow U_j^T A U_k = 0 \end{aligned}$$

U_k и U_j НН ($j \neq k$):

от противного $\exists j_i \neq 0$:

$$\sum j_i u_i = 0 / U_j^T A \Rightarrow U_k \perp U_j \Rightarrow j_i U_j^T A U_i = 0 \Rightarrow j_i = 0 \text{ противоречие}$$

16.17. Тяжёлое колечко массы m может скользить по гладкой проволочной параболе $2l y = x^2$ (ось Oy направлена вертикально вверх). Показать, что период малых колебаний колечка вблизи положения равновесия совпадает с периодом математического маятника длины l .



$$\Pi = mg y = \frac{1}{2} mg \frac{x^2}{l}$$

$$\Pi_x = mg \frac{x}{l} = 0 \Rightarrow x = 0 - \text{п.р.}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right)$$

$$A = [m] \quad (= \left[\frac{mg}{l} \right]) \quad \left(\frac{mg}{l} - m \omega^2 \right) u = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \omega_{mn} \Rightarrow T = T_{mn}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$$

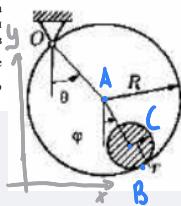
$$c_{ik} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_k} \right)_0$$

мат маятник

16.30. Точка подвеса математического маятника массы m и длины l расположена между двуми вертикальными стенками. Расстояния L_1 и L_2 между точкой подвеса маятника и стенками удовлетворяют неравенству $L_1 + L_2 \ll l$. Считая удары массы о стены абсолютно упругими, найти такое значение $\phi(0)$, чтобы частота колебаний равнялась $\frac{l}{L_1 + L_2} \sqrt{\frac{g}{l}}$, если $\phi(0) = 0$



16.51. По внутренней поверхности полого цилиндра радиуса R и массы m , который может свободно кататься вокруг горизонтальной образующей O , катится без проскальзывания однородный цилиндр радиуса $r = \frac{R}{4}$ и той же массы. Найти малые колебания системы вблизи устойчивого положения равновесия.



$$\Pi = -mg(R\cos\theta + R\cos\theta + (R-r)\cos\varphi) \sim \frac{1}{2}mg(2R\dot{\theta}^2 + (R-r)\dot{\varphi}^2) \Rightarrow \theta = \varphi = 0 - \text{п.р.}$$

$$R=4r \Rightarrow \Pi = \frac{1}{2}mg r (8\dot{\theta}^2 + 3\dot{\varphi}^2)$$

Найдем w :

$$\vec{V}_B = \dot{\theta} \times \vec{OB} = \dot{\theta} \times \vec{OA} + \dot{\varphi} \times \vec{AC} + \vec{\omega} \times \vec{CB}, \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB} \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{CB} = \dot{\theta} \times \vec{AB} - \dot{\varphi} \times \vec{AC}$$

$$wr = R\dot{\theta} - (R-r)\dot{\varphi}, R=4r \Rightarrow w = 4\dot{\theta} - 3\dot{\varphi}$$

Т.к. нам необходимо Т & п.р.: $V_C = |\dot{\theta}R + \dot{\varphi}(R-r)| - 6$ п.р.

$$\begin{aligned} T &= mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R\dot{\theta} + (R-r)\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2w^2 = \\ &= \frac{1}{2}mr^2 \left[32\dot{\theta}^2 + 16\dot{\theta}^2 + 24\dot{\theta}\dot{\varphi} + 9\dot{\varphi}^2 + 8\dot{\theta}^2 - 12\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{9}{2}\dot{\varphi}^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2}mr^2 \left[56\dot{\theta}^2 + 12\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{27}{2}\dot{\varphi}^2 \right] \end{aligned}$$

$$(C = mgr \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A = mr^2 \begin{bmatrix} 56 & 6 \\ 6 & 27/2 \end{bmatrix} \quad |(C - \lambda A)| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 8g - 56\lambda r & -6\lambda r \\ -6\lambda r & 3g - \frac{27}{2}\lambda r \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} \frac{4}{3}g - \frac{16}{3}\lambda r & -\lambda r \\ -6\lambda r & 3g - \frac{27}{2}\lambda r \end{vmatrix} = 12 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2}{3}g - \frac{14}{3}\lambda r & -\lambda r \\ -3\lambda r & 3g - \frac{27}{2}\lambda r \end{vmatrix} = 0$$

$$2g - 9g\lambda r - 14g\lambda r + 63\lambda^2 r^2 - 3\lambda^2 r^2 = 0 \Rightarrow 60\lambda^2 r^2 - 23\lambda gr + 2g^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{23gr \pm gr\sqrt{23^2 - 4 \cdot 60 \cdot 2}}{2 \cdot 60r^2} = \frac{23g \pm 7g}{2 \cdot 60r} \quad \lambda_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{g}{r} \quad \lambda_2 = \frac{2}{15} \cdot \frac{g}{r}$$

$$\lambda_1: ((C - \lambda_1 A)U = 0, \text{ because m.r. } S_6 \cdot \frac{3}{15})$$

$$\begin{bmatrix} 8-14 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3-\frac{27}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2: ((C - \lambda_2 A)U = 0, \text{ because m.r. } S_6 \cdot \frac{3}{15}, \text{ determinant is } 15)$$

$$\begin{bmatrix} 120-112 & -12 \\ -12 & 45-27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

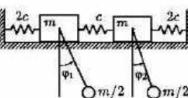
$$\begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \left(C_{11} \cos(\omega_1 t) + C_{12} \sin(\omega_1 t) \right) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \left(C_{21} \cos(\omega_2 t) + C_{22} \sin(\omega_2 t) \right)$$

$$16.51. \begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \left[\theta_{10} \cos \left(\sqrt{\frac{2g}{15r}}t \right) + \dot{\theta}_{10} \sqrt{\frac{15r}{2g}} \sin \left(\sqrt{\frac{2g}{15r}}t \right) \right] +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \left[\theta_{20} \cos \left(\sqrt{\frac{g}{4r}}t \right) + \dot{\theta}_{20} \sqrt{\frac{4r}{g}} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{4r}}t \right) \right], \quad \theta_{10}, \dot{\theta}_{10}, \theta_{20}, \dot{\theta}_{20} -$$

initial values of main coordinates $\theta_1 = \frac{4\theta + \varphi}{13}, \quad \theta_2 = \frac{\theta - 3\varphi}{13}$.

16.70. Два груза массы m каждый, соединенные между собой пружиной жесткости c , а с неподвижными стенками пружинами жесткости $2c$ каждая, могут скользить по гладкой горизонтальной направляющей. К каждому грузу подвешен математический маятник массы $\frac{m}{2}$ и длины l . Используя симметрию системы, найти её малые колебания. При вычислениях положить $2cl = mg$.



К задаче 16.70

6 силу имм. част:



1)

6 противофазе

6 фазе

$$1) \Pi = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2(x^2 + \frac{m}{2}g\ell(1 - \cos\varphi)) \sim 2(x^2 + \frac{1}{4}mg\ell\varphi^2) \Rightarrow x=0, \varphi=0 - \text{н.р.}$$

$$6 \text{ н.р. } V_B = \dot{x} + \dot{\varphi}\ell \Rightarrow$$

$$6 \text{ н.р. } T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2}(\dot{x} + \dot{\varphi}\ell)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}\dot{x}^2 + \ell\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$A = m \begin{bmatrix} 3/2 & \ell/2 \\ \ell/2 & \ell^2/2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} mg & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mg\ell \end{bmatrix}, 2\ell = mg \Rightarrow C = m \begin{bmatrix} \frac{g}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}g\ell \end{bmatrix}$$

$$|C - \lambda A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{2g}{\ell} - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda\ell \\ -\frac{1}{2}\lambda\ell & \frac{1}{2}g\ell - \lambda\frac{\ell^2}{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{2g}{\ell} - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda\ell \\ -\lambda\ell & g\ell - \lambda\ell^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2g^2 - 2\lambda g\ell - \frac{3}{2}\lambda g\ell + \frac{3}{2}\lambda^2\ell^2 - \frac{1}{4}\lambda^2\ell^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2\ell^2 - \frac{7}{2}\lambda g\ell + 2g^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4g^2}}{4\ell} \frac{g}{\ell}$$

$$\lambda_{1,2}; ((-\lambda_{1,2}A)U_{1,2}) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \pm 3\sqrt{7} \cdot \frac{g}{\ell} & 7 \pm \sqrt{7} \cdot g \\ 7 \pm \sqrt{7} \cdot g & 3 \pm \sqrt{7} \cdot g\ell \end{bmatrix} \Rightarrow U_{1,2} = \begin{bmatrix} (3 \pm \sqrt{7})\ell \\ -7 \mp \sqrt{7} \end{bmatrix}$$

Поставим λ
и на $-\frac{g}{\ell}$

$$2) \quad C = \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & mge \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \frac{g}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}g\ell \end{bmatrix}, A - u_0 \text{ п.1} \Rightarrow |C - \lambda A| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{\ell} - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda\ell \\ -\lambda\ell & g\ell - \lambda\ell^2 \end{vmatrix} = \lambda^2\ell^2 - \frac{5}{2}\lambda g\ell + 2g^2 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{\ell}, \lambda_4 = 2 \cdot \frac{g}{\ell}$$

$$\lambda_3: \begin{bmatrix} \frac{1}{4}g & -\frac{1}{4}g \\ -\frac{1}{4}g & \frac{1}{4}g \end{bmatrix} \Rightarrow U_3 = \begin{bmatrix} g \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{bmatrix} -2\frac{g}{\rho} & -g \\ -g & -\frac{1}{2}g \end{bmatrix} \quad U_4 = \begin{bmatrix} g \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \dot{\varphi}_1 \\ X_2 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + \sqrt{17} & 3 - \sqrt{17} & 1 & 1 \\ -7 + \sqrt{17} & -7 - \sqrt{17} & 1 & -2 \\ -3 + \sqrt{17} & -3 - \sqrt{17} & 1 & 1 \\ 7 + \sqrt{17} & 7 - \sqrt{17} & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \cos(\omega_1 t + \psi_1) \\ C_2 \cos(\omega_2 t + \psi_2) \\ C_3 \cos(\omega_3 t + \psi_3) \\ C_4 \cos(\omega_4 t + \psi_4) \end{bmatrix}$$

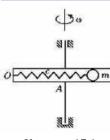
$X_1 = -X_2$ $X_1 = X_2$
 $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$ $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2$

16.70.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{57}-7 & \sqrt{57}+7 \\ 1 & -2 & 11-\sqrt{57} & -11-\sqrt{57} \\ 1 & 1 & -\sqrt{57}+7 & -\sqrt{57}-7 \\ 1 & -2 & -11+\sqrt{57} & 11+\sqrt{57} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{10} \cos(\omega_1 t) + (\dot{\theta}_{10}/\omega_1) \sin(\omega_1 t) \\ \theta_{20} \cos(\omega_2 t) + (\dot{\theta}_{20}/\omega_2) \sin(\omega_2 t) \\ \theta_{30} \cos(\omega_3 t) + (\dot{\theta}_{30}/\omega_3) \sin(\omega_3 t) \\ \theta_{40} \cos(\omega_4 t) + (\dot{\theta}_{40}/\omega_4) \sin(\omega_4 t) \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = \frac{g}{2l}, \quad \omega_2^2 = \frac{2g}{l}, \quad \omega_3^2 = \frac{(11-\sqrt{57})g}{4}, \quad \omega_4^2 = \frac{(11+\sqrt{57})g}{4}, \quad \text{где } l = \frac{L}{4} -$$

17.1. Внутри горизонтальной шероховатой трубы (см. рисунок), вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, пересекающей ось трубы, может перемещаться шарик массы m , соединённый с концом трубы O пружиной жесткости c . При недеформированной пружине центр шарика находится на оси вращения. Пренебрегая действием силы тяжести, найти условия, при которых положение относительного равновесия шарика будет асимптотически устойчиво.



К задаче 17.1

Т.К. шероховатая, действует $\Omega = -\beta \dot{x}, \beta > 0$

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} - m\omega^2 x + cx = 0$$

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = m\lambda^2 + \beta\lambda + C - m\omega^2$$

Найдж. усл: $C - m\omega^2 > 0$

КР. Р-Г: $\begin{bmatrix} B & C - m\omega^2 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad \beta > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ас. усл при } C - m\omega^2 > 0$

17.1. $c - m\omega^2 > 0$.

17.26. Цилиндр, заполненный жидкостью вязкостью β (см. рисунок), может скользить без трения по горизонтальной направляющей. В цилиндре находится поршень, который может перемещаться относительно цилиндра. Масса цилиндра с жидкостью и масса поршня соответственно равны M и m . Цилиндр и поршень соединены с неподвижными стенками пружинами жесткости K . Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.



К задаче 17.26

$$M\ddot{x} + \beta(\dot{x} - \dot{y}) + Kx = 0$$

$$m\ddot{y} + \beta(\dot{y} - \dot{x}) + Ky = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \beta & -\beta \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} M\lambda^2 + \beta\lambda + K & -\beta \\ -\beta & m\lambda^2 + \beta\lambda + K \end{vmatrix} = Mm\lambda^4 + M\beta\lambda^3 + MK\lambda^2 + m\beta\lambda^3 + \beta^2\lambda^2 + \beta K\lambda + KM\lambda^2 + K\beta\lambda + K^2 - \beta^2\lambda^2 =$$

$$= Mm\lambda^4 + (M+m)\beta\lambda^3 + (M+m)K\lambda^2 + 2K\beta\lambda + K^2$$

Исобщ. умл. $\text{Sign } a_0 = \dots = \text{Sign } a_n > 0$ выполняется

$$\begin{bmatrix} 2K\beta & K^2 & 0 & 0 \\ (M+m)\beta & (M+m)K & 2K\beta & K^2 \\ 0 & Mm & (M+m)\beta & (M+m)K \\ 0 & 0 & 0 & MM \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2K\beta > 0$$

$$\Delta_3 = 2K\beta [(M+m)^2 K\beta - 2MmK\beta] - K^2 (M+m)^2 \beta^2 = K^2 \beta^2 [(M+m)^2 - 2Mm] = K^2 \beta^2 (M^2 + m^2) > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{aligned} \Rightarrow \text{П.Р. ас. уст.}$$

kp. P-G § 6 п. A-III

17.30. Динамика склерономной системы описывается уравнениями $A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$, где матрицы A и C положительно определены, а симметричная матрица B соответствует законопоставленной квадратичной форме. Доказать, что равновесие системы $q = 0$ асимптотически устойчиво в том и только в том случае, если $U_i B U_s \neq 0$, $s = 1, n$, где U_1, U_2, \dots, U_n — амплитудные векторы консервативной системы $A\ddot{q} + Cq = 0$.

$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$, $A, C > 0$, B -сумм., знакопост.

$g - \text{Th}: q = 0 \text{ ас. уст} \Leftrightarrow BU_s \neq 0$

g-60: $\exists q = U\theta: U^T A U = E$, $U^T C U = \Lambda$ — диаг.

$$U^T / AU\ddot{\theta} + BU\dot{\theta} + (U\theta = 0) \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta} + B'\dot{\theta} + \Lambda\theta = 0$$

$$q = he^{\lambda t}$$

$$(\lambda^2 + B'\lambda + \Lambda)h = 0$$

$$(h^1 - ih^2)B(h^1 + ih^2)$$

$$\bar{h}B'h =$$

$$h'Bh^1 + h^2Bh^2$$

Заметим, что, в силу свойств симметрии матриц A и K и косой симметрии матрицы Γ , имеем

$$\begin{aligned} \bar{h}Ah = h^1A\bar{h}^1 + h^2A\bar{h}^2, Ah^2 = a \quad (h = h^1 + ih^2), \\ \bar{h}Kh = h^1K\bar{h}^1 + h^2K\bar{h}^2 = k, \\ \bar{h}\Gamma h = 2ih^1\Gamma h^1 = 2ig, \end{aligned}$$

где a, k, g — вещественные числа, причем $a > 0$, $g > 0$.
Из найденного квадратного уравнения выводим

$$\lambda = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 + ak}}{a}.$$

откуда и следует вещественность λ .

Корень λ находится из характеристического уравнения

$$\det(-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K) = 0,$$

17.30. Динамика склерономной системы описывается уравнениями $A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$, где матрицы A и C положительно определены, а симметричная матрица B соответствует законопоставленной квадратичной форме. Доказать, что равновесие системы $q = 0$ асимптотически устойчиво в том и только в том случае, если $U_i B U_s \neq 0$, $s = 1, n$, где U_1, U_2, \dots, U_n — амплитудные векторы консервативной системы $A\ddot{q} + Cq = 0$.

17.30. Движение склерономной системы в линейном приближении описывается уравнениями $A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$, где матрицы A и C положительно определены, а симметрическая матрица B отвечает законопоставленной квадратичной форме. Доказать, что равновесие системы $q = 0$ асимптотически устойчиво в том и только в том случае, если $U_i B U_s \neq 0$, $s = 1, n$, где U_1, U_2, \dots, U_n — совокупность амплитудных векторов, определяющих малые колебания консервативной системы $A\ddot{q} + Cq = 0$.

2018

2002

18.3. Точка подвеса математического маятника длины l движется по горизонтальной прямой по закону $s = \frac{1}{2}at^2 + A\sin(\omega t)$. Найти движение маятника в системе отсчёта, движущейся по закону $s = \frac{1}{2}at^2$. Исследовать случай резонанса.

ОТСЧИТЫВАЕМ ЧАСТИЧНО П.Р.

$$\text{Всегда } \bar{g}' = \bar{g} + \bar{a}, \quad g' = \sqrt{g^2 + a^2}$$

$$\Pi = mg' \ell (1 - \cos \psi) \approx \frac{1}{2} mg_0^2 \ell \psi^2 \quad T_{\text{орн}} = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\psi}^2$$

$$m \ell^2 \ddot{\psi} + mg_0^2 \psi = m \ell A \omega^2 \sin \omega t$$

$$\ddot{\psi} + \frac{g'}{\ell} \psi = \frac{A}{\ell} \omega^2 \sin \omega t$$

$$\text{ОУ: } \ddot{\psi} + \frac{g'}{\ell} \psi = 0 \Rightarrow \psi_{\text{общ}} = C_1 \cos(\omega_0 t + \psi_0), \quad \omega_0^2 = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{\ell}$$

$$D = -\omega_0^2 \cdot \frac{1}{2} m \ell^2 + \frac{1}{2} mg_0^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 (\omega_0^2 - \omega^2) \sim \omega_0^2 - \omega^2$$

$$W = \frac{1}{D} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \psi = \arg W = 0$$

$$\psi_{\text{част}} = \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \cdot \frac{A}{\ell} \omega^2 \sin \omega t \Rightarrow \psi = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{\omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \cdot \frac{A}{\ell} \sin \omega t$$

$$\psi(0) = \psi_0 : \quad C_1 = \psi_0.$$

$$\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0 : \quad C_2 = \frac{\dot{\psi}_0}{\omega_0} - \frac{\omega^3}{\omega_0 |\omega_0^2 - \omega^2|} \cdot \frac{A}{\ell}$$

$$\psi = \psi_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{\psi}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{\omega^3}{\omega_0 |\omega_0^2 - \omega^2|} \cdot \frac{A}{\ell} \sin \omega t + \frac{\omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \cdot \frac{A}{\ell} \sin \omega t$$

$$\psi = \psi_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{\psi}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{\omega^2}{\omega_0 |\omega_0^2 - \omega^2|} \cdot \frac{A}{\ell} (\omega_0 \sin \omega t - \omega \sin \omega_0 t) \quad ?$$

$$\text{Резонанс: } \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\omega^2}{\omega_0 |\omega_0^2 - \omega^2|} (\omega_0 \sin \omega t - \omega \sin \omega_0 t) =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} -\frac{\omega^3}{2\omega_0 \omega} \cdot (\omega_0 t \cos \omega_0 t - \omega \sin \omega_0 t) = \frac{1}{2} (\omega_0 \sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t)$$

$$\text{При } \omega \rightarrow \omega_0 : \quad \psi = \psi_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{\psi}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{A}{2\ell} (\omega_0 \sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t) \quad ?$$



18.3. $\psi = -\arctg \frac{a}{g} + \left(\phi_0 + \arctg \frac{a}{g} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\phi}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{g \Delta \omega^2}{l \omega_0^2} \left[\frac{\phi_0 \sin(\omega_0 t) - \omega \sin(\omega_0 t)}{\omega_0 (\omega_0^2 - \omega^2)} \right], \text{ где}$

$$\omega_0^2 = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l} = \frac{g}{l} \sqrt{1 + \frac{a^2}{g^2}}, \quad \frac{\Delta \omega^2}{\omega_0^2} = \frac{a \Delta \omega^2}{g^2 + a^2} \ll 1, \quad \omega \neq \omega_0.$$

При $\omega = \omega_0$, и малых ℓ

$$\psi = -\arctg \frac{a}{g} + \left(\phi_0 + \arctg \frac{a}{g} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\phi}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{g}{l \omega_0^2} \left[\frac{A}{2} [\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t \cos(\omega_0 t)] \right].$$

18.25. Массы m_1 и m_2 , последовательно подвешенные на неесомых пружинах жесткости c_1 и c_2 , могут двигаться по вертикали. К массе m_1 приложена вертикальная сила $F(t) = \alpha \sin(pt)$. При заданных c_1 , m_1 и p найти начальные условия системы и значения параметров c_1 и m_2 , при которых амплитуда вынужденных колебаний массы m_1 равна нулю (упругий колебаний без трения).



18.26. Решить предыдущую задачу, считая, что на массу m_1 действует также сила сопротивления $F = -\beta v_1$.

К задаче 18.25

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad \Pi = \frac{1}{2}c_1x_1^2 + \frac{1}{2}c_2(x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)x_1^2 - c_2x_1x_2 + \frac{1}{2}c_2x_2^2$$

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$D = -p^2 A + p B + C = \begin{bmatrix} -p^2 m_1 - \beta p + c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & -w^2 m_2 + c_2 \end{bmatrix}$$

$$W = D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot \begin{bmatrix} c_2 - p^2 m_2 & c_2 \\ c_2 & c_1 + c_2 - p^2 m_2 - \beta p \end{bmatrix}$$

Рассчитываем элемент $W_{11} = \frac{c_2 - p^2 m_2}{\det D}$

Пусть $p_0 = \sqrt{\frac{c_1}{m_2}}$, $\det D(p_0) = \begin{vmatrix} -p_0^2 m_1 - \beta p_0 + c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & 0 \end{vmatrix} = -c_2^2 \neq 0$,

а $W_{11}(p_0) = 0$ — антирезонанс (чтож m_1 покачается)

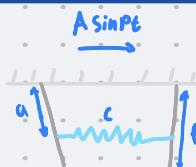
$$c_2 - p^2 m_2 = 0$$

18.25. $c_2 - m_2 p^2 = 0$

18.26. $c_2 - m_2 p^2 = 0$

18.37. Два одинаковых однородных стержня длины l и массы m каждый подвешены своими концами к горизонтальной опоре. Стержни соединены пружиной жесткости c . Расстояние между точкой подвеса и точкой крепления пружины для каждого стержня равно a , длина пружины в ненапряженном состоянии равна расстоянию между точками подвеса стержней. Опора совершает горизонтальные колебания по закону $A \sin pt$. Считая углы отклонения стержней от вертикали малыми, найти движение системы.

18.38. При каких частотах p возможен резонанс в системе, описанной в предыдущей задаче?



Упр. 1) Конс: $A \ddot{\theta} + C \dot{\theta} = Q$ замена $\dot{\theta} = V \theta$

$$U^T / A V \ddot{\theta} + C V \dot{\theta} = Q; \quad U^T A U = E, \quad U^T C U = \Lambda = \text{diag}\{w_i^2\}$$

$$\ddot{\theta} + \Lambda \theta = U^T Q - \text{Необх. найти на какие осцил. сила привед.}$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m p^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \Rightarrow A = \frac{1}{3} m p^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

из собр. уравн.: $U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
в фазе в противофазе

$$\text{ЧУИТЬ ВАЛЯ НОРМИРОВКА: } U = \sqrt{\frac{3}{m\omega^2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = Q_2 = m \rho A P^2 \sin p t \Rightarrow Q = Q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U^T Q \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{предиз. только на } U.$$

$$\text{для случая 6 фазе: } \Pi_i = \frac{1}{2} mg \rho (1 - \cos \varphi) \approx \frac{1}{4} mg \rho \dot{\varphi}^2 \quad T_i = \frac{1}{6} m \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{1}{3} m \rho \ddot{\varphi}_i + \frac{1}{2} mg \rho = 0 \Rightarrow \omega_i = \sqrt{\frac{3g}{2\rho}} \quad \text{при } \rho = \sqrt{\frac{3g}{2\rho}} - \text{резонанс}$$

18.43. Для каждой координаты от указанного внешнего воздействия найти и построить графически на комплексной плоскости амплитудно-фазовую характеристику системы, заданной уравнениями динамики:

д) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x + y = A \sin(\omega t), \quad \ddot{y} + \dot{y} + y - x = 0;$

$$\text{а) } W_{11} = \frac{(1 - \omega^2 + i\omega)(\omega^4 - 4\omega^2 + 2) + i\omega(3\omega^2 - 3)}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)^2 + (3\omega^2 + 3\omega)^2},$$

$$W_{12} = \frac{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2) + i\omega(3\omega^2 - 3)}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)^2 + (3\omega^2 + 3\omega)^2},$$

$$A = E \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = -\omega^2 A + i\omega B + C = \begin{bmatrix} -\omega^2 + 2i\omega + 1 & 1 \\ -1 & -\omega^2 + i\omega + 1 \end{bmatrix}$$

$$W = D^{-1} = \frac{1}{\det D} \begin{bmatrix} -\omega^2 + i\omega + 1 & 1 \\ -1 & -\omega^2 + i\omega + 1 \end{bmatrix}$$

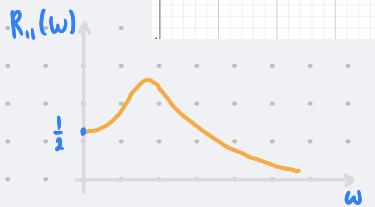
$$\det D = (-\omega^2 + 2i\omega + 1)(-\omega^2 + i\omega + 1) + 1 = \omega^4 - i\omega^3 - \omega^2 - 2i\omega^3 + 2\omega^2 + 2i\omega - \omega^2 + i\omega + 1 + 1 = \omega^4 - 3i\omega^3 - 4\omega^2 + 3i\omega + 2$$

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot e^{i\omega t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{bmatrix} \cdot e^{i\omega t}$$

$$W_{11} = \frac{-\omega^2 + i\omega + 1}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2) + i(3\omega - 3\omega^3)} = \frac{(-\omega^2 + i\omega + 1)[(\omega^4 - 4\omega^2 + 2) + i(3\omega^2 - 3\omega)]}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)^2 + (3\omega - 3\omega^3)^2} =$$

$$= \frac{(-\omega^6 + 2\omega^4 + 3\omega^2 + 2) + i(-2\omega^5 + 2\omega^3 - \omega)}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)^2 + (3\omega - 3\omega^3)^2}$$

$$R_{11}(w) = \frac{\sqrt{(-\omega^6 + 2\omega^4 + 3\omega^2 + 2)^2 + (2\omega^5 - 2\omega^3 + \omega)^2}}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)^2 + (3\omega - 3\omega^3)^2}$$

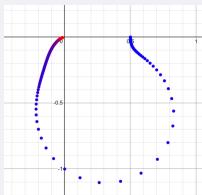
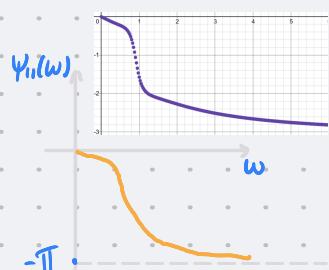


$$18.37. \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} D \sin(p t),$$

где $\omega_1^2 = \frac{3g}{2l}$, $\omega_2^2 = \frac{3g}{2l} + \frac{ca^2}{ml^2}$, $D = \frac{3Ap^2}{(3g - 2l)^2}$.

$$18.38. \quad p = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$$

$$\Psi_{11} = \arg [(-w^6 + 2w^4 + 3w^2 + 2) + i(-2w^5 + 2w^3 - w)]$$



$$W_{21} = -\frac{(w^4 - 4w^2 + 2) + i(3w^3 - 3w)}{(w^4 - 4w^2 + 2)^2 + (3w^3 - 3w)^2}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{(w^4 - 4w^2 + 2)^2 + (3w^3 - 3w)^2}}$$

$$\Psi_{21} = -\arg [(w^4 - 4w^2 + 2) + i(3w^3 - 3w)]$$

