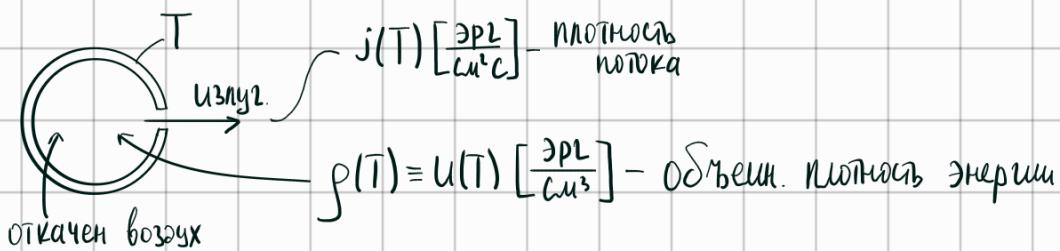
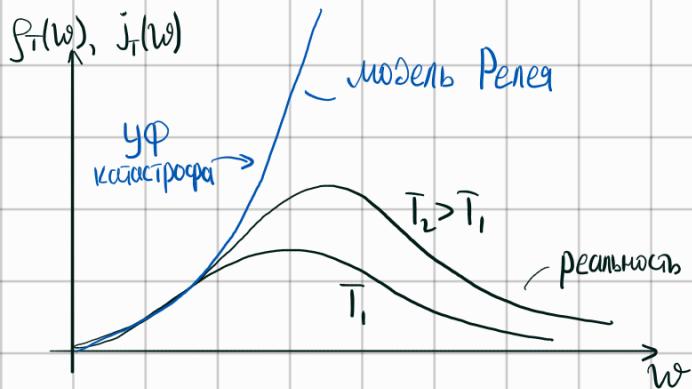


Неделя 2

Теория. Источники излучения черного тела



Также можно изучать излучение на разных частотах



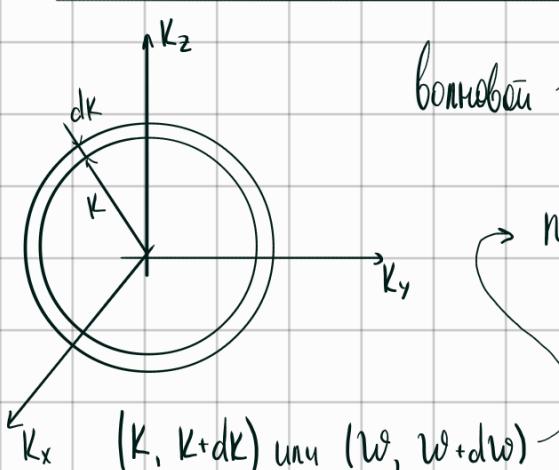
$$j(T) = \sigma T^4,$$

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{ЭРЛ}}{\text{см}^2 \text{К}^4}$$

Число ударов молекул об стенку (термал): $Z \left[\frac{\text{мл}}{\text{см}^2 \text{с}} \right] = \frac{1}{4} n \bar{v} \xrightarrow{\text{аналог}} j \left[\frac{\text{ЭРЛ}}{\text{см}^2 \text{с}} \right] = \frac{1}{4} \rho c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho(T) = \frac{4}{C} j = \frac{4\sigma}{C} T^4$$

$$\text{Для однон. газа: } P = \frac{2}{3} n \langle \frac{mv^2}{2} \rangle \Rightarrow P = \frac{1}{3} \rho(T)$$



волновой вектор: $K = \frac{w}{c}$, расц. K -нр-60:

объем б
(K -нр-60)

$$\frac{V \cdot dK}{(2\pi)^3}$$

$$f(w)dw = \frac{dN(w)}{\hbar w} \cdot \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{e^{\frac{h w}{kT}} - 1}$$

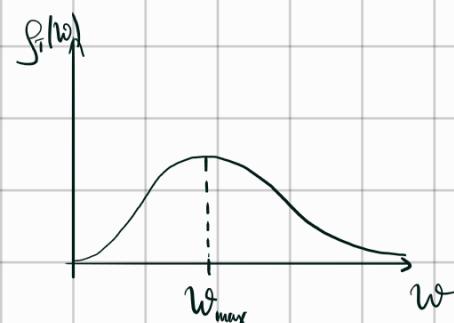
кванты энергии
сколько кван.
вероятность занять место

$$dV_K = 4\pi K^2 dK \Rightarrow dN(w) = V \frac{w^2 dw}{\pi^2 c^3}, \quad f_T(w) = \frac{\hbar w^3}{\pi^2 c^3 (e^{\frac{h w}{kT}} - 1)}$$

① Низкие частоты: $\hbar w \ll kT$: $f_T(w) = \frac{kT}{\pi^2 c^3} w^2$

② Высокие частоты: $\hbar\omega \gg \kappa_b T$: $f_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$

$$f(T) = \int_0^\infty f_T(\omega) d\omega = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15 \pi^3 c^3} = a T^4, \quad J(T) = \frac{C}{4} a T^4 = \sigma T^4$$

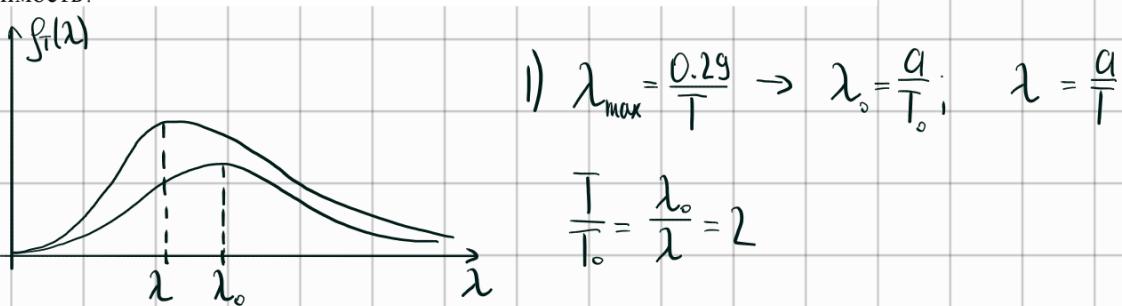


$$\omega_{max} = 2.8 \frac{kT}{\hbar}, \quad \lambda_{max} = \frac{0.29}{T}, \quad \text{но } \omega_{max} \neq \frac{2\pi c}{\lambda_{max}}$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2}$$

X	8 – 14 сен.	Законы излучения АЧТ	0-2-1, 0-2-2	11.26, 11.38, 11.50	11.44, Т.4, Т5
---	-------------	----------------------	-----------------	------------------------	-------------------

0-2-1. Вследствие повышения температуры положение максимума спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела переместилось с 2 мкм на 1 мкм. Во сколько раз изменилась его интегральная энергетическая светимость?



$$2) \frac{J}{J_0} = \frac{6T^4}{6T_0^4} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 = 16$$

0-2-2. Оценить давление теплового излучения во внутренней области Солнца, где температура равна $T=1,3 \cdot 10^7$ К.

$$1) P = \frac{1}{3} f(T) = \frac{1}{3} \frac{4\sigma}{c} T^4 = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-5}}{3 \cdot 10^{10}} \cdot (1.3 \cdot 10^7)^4 \approx 7.2 \cdot 10^{13} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^2} = 7.2 \cdot 10^{12} \text{ Па}$$

11.26. Оценить температуру Солнца, исходя из его видимого углового размера $\alpha_C = 0,01$ рад и температуры земной поверхности ($T_3 \approx 300$ К).

1) Упр-е теплового баланса:

$$\Phi_c \frac{R_c}{4\pi} = \Phi_3$$



$$L_c = \frac{2R_c}{L} \Rightarrow \frac{L_c}{2} = \frac{R_c}{L}$$

$$\sqrt{T_c^4 + 4\pi R_c^2 \cdot \frac{\pi R_c^2}{L^2 \cdot 4\pi}} = \sqrt{T_3^4 + 4\pi R_c^2} \Rightarrow T_c^4 \cdot \left(\frac{R_c}{L}\right)^2 = 4T_3^4 \Rightarrow T_c^4 = 16 L_c^{-2} T_3^4 \Rightarrow T_c = 2 L_c^{-\frac{1}{2}} T_3 = 6000 \text{ K}$$

$$11.26. T_C = 2T_3 \alpha_C^{-1/2} \approx 6000 \text{ K.}$$

11.38. Напряжение в сети возросло на 5%. На сколько процентов увеличится освещенность, создаваемая вакуумной лампой накаливания с температурой нити 1500 К на длине волны 500 нм? Нить считать абсолютно черным телом. Рассмотреть случаи, когда сопротивление нити $R = \text{const}$ и когда $R = R(T) = R_0 + \alpha(T - T_0)$.

$$1) \sigma T^4 \cdot S = N = \frac{V^2}{R} \Rightarrow RT^4 \propto V^2$$

$$2) R = \text{const} \Rightarrow T^4 \propto V^2 \Rightarrow 4 \frac{\Delta T}{T} - 2 \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta V}{V} = 2.5\%$$

$$R \propto T \Rightarrow T^5 \propto V^2 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{5} \frac{\Delta V}{V} = 2\%$$

$$3) h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^10}{5 \cdot 10^{-5} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \approx 2.5 \text{ эВ}$$

$$kT = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 1500 \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 0.13 \text{ эВ} \ll h\nu - \text{область высоких частот} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_T(\nu) = \frac{h\nu^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

основной
фактор

$$\Rightarrow f_T(\nu) \propto e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

$$\ln f_T(\nu) \propto -\frac{h\nu}{kT}$$

$$4) \frac{\Delta f}{f} = \frac{h\nu}{kT^2} \Delta T,$$

$$R = \text{const}: \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2} \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2} \frac{h\nu}{kT} \frac{\Delta V}{V} \approx 48\%$$

$$R \propto T: \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{5} \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{2}{5} \frac{h\nu}{kT} \frac{\Delta V}{V} \approx 38\%$$

11.38. $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta j}{j} \approx \frac{2}{5} \frac{h\nu}{k_B T} \frac{\Delta V}{V} \approx 0.38$ (38%) — с учетом зависимости сопротивления нити от температуры, $\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{1}{2} \frac{h\nu}{k_B T} \frac{\Delta V}{V} \approx 0.48$ (48%) — без учета этой зависимости.

11.50* Определить температуру абсолютно черного тела, спектральная яркость излучения которого равна яркости лазерного излучения с энергией в импульсе $E = 1$ Дж. Считать, что расходимость лазерного пучка определяется только дифракцией на выходном отверстии, а немонохроматичность — длительностью импульса.

$$1) \sum_{\text{спектр}} \sim K_B T_{\text{спктр}} \Rightarrow T_{\text{спктр}} \frac{\sum_{\text{спектр}}}{K_B} \sim 10^{23} \text{ К} - \text{дофига} \Rightarrow K_B T_{\text{спктр}} \gg h\nu$$

$$2) j_T(\nu) = \frac{C}{4} f_T(\nu) = \frac{C}{4} \frac{kT}{\pi^2 c^3} \nu^2 = \frac{kT}{4\pi^2 c^3} \nu^2$$

$$\nu = \frac{C}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow j_T(\nu) = \frac{kT}{4\pi^2 c^3} \frac{4\pi^2 C^2}{\lambda^2} = \frac{kT}{\lambda^2}$$

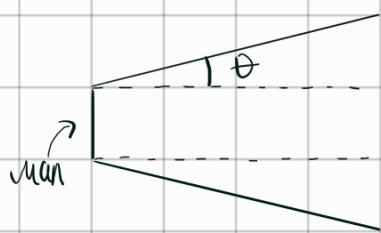
3) Из оптики: Ланберговский излучатель \Rightarrow

$$\Rightarrow j_{\text{r}}(\omega) = \frac{\epsilon}{\pi} B \Rightarrow B(\omega) = \frac{k T_{\text{r}}}{\pi \lambda^2}$$

4) Теперь рассмотрим лазер:

$$j_n = \frac{\epsilon}{S T}, \quad S = \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow j_n = \frac{4 \epsilon}{\pi D^2 T}$$

5) Упростим распределение эмиссии в кружке пучка лазера. $\theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{D} \sim \frac{\lambda}{D}$



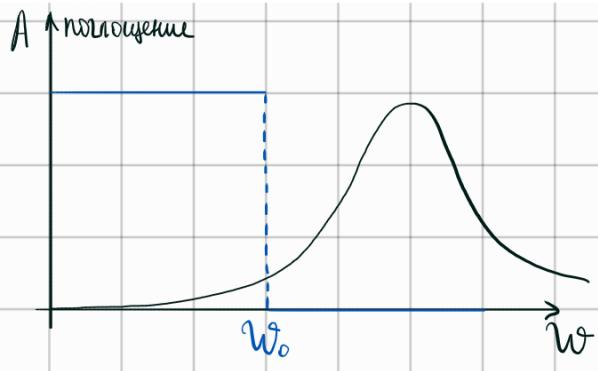
$$\Delta \Omega = 2\pi (1 - \cos \theta) \approx \pi \theta^2 \approx \pi \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2$$

$$B = \frac{d\Phi}{d\Omega dS \cos \theta} - \text{зритель}$$

$$B_w^{\text{рас}} = \frac{j}{d\Omega d\omega} = \frac{(\epsilon / S T)}{\pi (\lambda/D)^2 \cdot (2\pi/\lambda)} = \frac{2\epsilon}{\pi^3 \lambda^2}$$

$$6) B_w^{\text{рас}} = B_w^{\text{тепл}} \Rightarrow \frac{k T}{\pi \lambda^2} = \frac{2\epsilon}{\pi^3 \lambda^2} \Rightarrow T_{\text{эф}} = \frac{2\epsilon}{\pi^2 K} \approx \frac{2 \cdot 1}{9 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}} \approx 1.47 \cdot 10^{22}$$

11.44. Поверхность некоторого тела приготовлена таким образом, что коэффициент поглощения электромагнитного излучения $A = 1$ для частот $\omega \leq \omega_0$ и $A = 0$ при $\omega > \omega_0$. Это тело помещено в вакуум и в отсутствие других источников излучения нагревается за счет внутреннего источника энергии до температуры T . Определить эту температуру, если известно, что для такого же тела с абсолютно черной поверхностью в тех же условиях равновесная температура $T^* = 300$ К. Границчная частота соответствует температуре $\theta = \hbar \omega_0 / k_B = 300$ К.



1) Рассл. абсолютное тепло.

$$\sigma T^*{}^4 S = N - \text{мощность внутр. исх.}$$

$$W_{\text{max}}^{\text{акт}} = 2.8 \frac{k T^*}{\hbar} = 2.8 \omega_0$$

2) Рассл. зажигое тепло: $W_{\text{max}} > W_{\text{max}}^{\text{акт}}$ - ослабл. Тк. меньше рассеяние \Rightarrow

$$W_{\text{max}} > 2.8 \omega_0 \quad \Rightarrow$$

3) \Rightarrow из графика видно, что излучают только низкие частоты

$$f_1(\omega) = \frac{K\bar{T}}{\pi^2 C^3} \omega^2; \quad j_1(\omega) = \frac{C}{4} \frac{K\bar{T}}{\pi^2 C^3} \omega^2$$

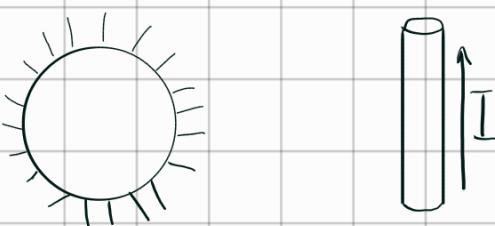
$$j_{\text{вых}} = \frac{K\bar{T}}{4\pi^2 C^2} \int_0^{\omega_0} \omega^2 d\omega = \frac{K\bar{T} \omega_0^3}{12\pi^2 C^2}$$

$$4) \quad \frac{K\bar{T}}{12\pi^2 C^3} \omega_0^3 S = N = 6\bar{T}^4 S, \quad G = \frac{\pi^2 K^4}{60\hbar^3 C^2}$$

$$\frac{K\bar{T}}{12\pi^2 C^3} \omega_0^3 = \frac{\pi^2 K^4}{60\hbar^3 C^2} T^4 \Rightarrow \bar{T} = \frac{\pi^4 K^3 T^4}{5 \hbar^3 \omega_0^3} = \frac{\pi^4}{5} \frac{T^4}{\theta^3} = \frac{3.14^4}{5} \cdot \frac{300^4}{300^3} \approx 5840 \text{ K}$$

$$11.44. \quad T = \frac{\pi^4}{5} \frac{k_B^3 T^{*4}}{\hbar^3 \omega_0^3} = \frac{\pi^4}{5} \frac{T^{*4}}{\theta^3} \approx 5840 \text{ K.}$$

T.4. Нитинол (сплав никеля и титана) обладает эффектом "памяти формы": он восстанавливает ее при нагреве выше температуры $t=130 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Проволока из нитинола, подогреваемая пропускаемым через неё током, используется в качестве привода для раскрытия антенн космических аппаратов. Насколько различаются токи через проволоку, необходимые для запуска такого привода у искусственного спутника Земли, находящегося на теневой и солнечной сторонах геостационарной орбиты? Температуру проволоки считать однородной по объему, сопротивление — не зависящим от температуры. Солнечная постоянная равна $J=1.4 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$. Диаметр проволоки $d = 1.5 \text{ мм}$ удельное сопротивление $\rho = 0.8 \cdot 10^{-6} \text{ Ом м}$, коэффициент серости $\epsilon = 0.66$. Считать, что на солнечной стороне орбиты проволока находится на освещённой стороне спутника. Тепловым излучением Земли на геостационарной орбите и тепловым излучением корпуса спутника можно пренебречь



Все эти формулы на сине (поглощенные)

$$1) \quad N_c = J \cdot d \cdot \epsilon$$

$$N_{\text{тока}} = I \frac{S}{\pi d^2 / 4}$$

$$N_{\text{отдал}} = 6 t^4 \cdot \pi d \cdot \epsilon$$

$$2) \quad N = N_{\text{отдал}} \Rightarrow I^2 \frac{S}{\pi d^2 / 4} = 6 t^4 \pi d \cdot \epsilon \Rightarrow I_o = \frac{1}{2} \pi d I^2 \sqrt{\frac{8 \epsilon d}{S}} \approx 3.2 \text{ A}$$

$$3) \quad N_c + N_{\text{тока}} = N_{\text{отдал}} \Rightarrow I^2 \frac{S}{\pi d^2 / 4} + J d \epsilon = 6 t^4 \pi d \epsilon$$

$$I^2 = \frac{1}{4} \frac{\pi d^2}{S} \left(6 t^4 \pi d \epsilon - J d \epsilon \right) = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 d^3 6 t^4 \epsilon}{S} \left(1 - \frac{J}{\pi \epsilon d^2 t^4} \right) = I_o^2 \left(1 - \frac{J}{\pi \epsilon d^2 t^4} \right)$$

$$\Delta I = I_o \left(1 - \sqrt{1 - \frac{J}{\pi \epsilon d^2 t^4}} \right) = 0.52 \text{ A}$$

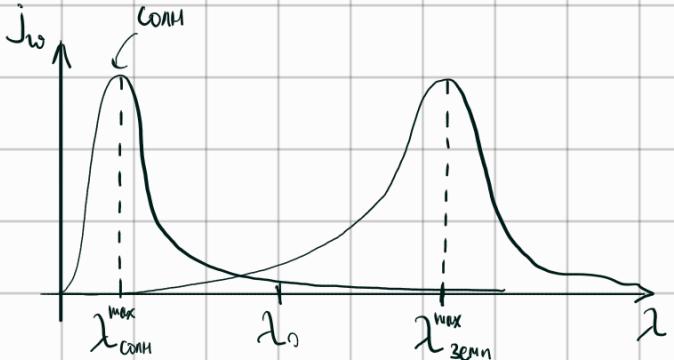
$$\text{Ответ: } \Delta I = I_o \left(1 - \sqrt{1 - \frac{J}{\pi \epsilon d^2 t^4}} \right) = 0.52 \text{ A, где } I_o = 0.5 \pi d t^2 \sqrt{\frac{\epsilon \sigma d}{\rho}} = 3.2 \text{ A.}$$

T.5. Средняя температура поверхности Земли составляет 15°C . В результате природных процессов или влияния промышленных выбросов прозрачность атмосферы может измениться. Оценить, как изменится равновесная температура земной поверхности если прозрачность атмосферы уменьшится на 5% для излучения: а) с длиной волны меньше $\lambda_0 = 20000 \text{ \AA}$; б) с длиной волны более $\lambda_0 = 20000 \text{ \AA}$. Под прозрачностью понимается доля излучения, преодолевающая расстояние от верхних слоёв атмосферы до поверхности. Считать для оценки, что прозрачность атмосферы постоянна для $\lambda > \lambda_0$ и $\lambda < \lambda_0$

$$1) j_{\text{солн}} \cdot \pi R^2 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 \Rightarrow j_{\text{солн}} = 4\sigma T^4$$

$$2) \lambda_{\text{земн}}^{\max} = \frac{0.29}{T} \text{ см} = \frac{0.29}{290} \text{ см} = 100000 \text{ \AA}$$

$$\lambda_{\text{солн}}^{\max} = \frac{0.29}{T_{\text{солн}}} \text{ см} = \text{Очень мало \AA}$$



3) Теперь уменьшаю прозрачность:

$$a) \lambda > \lambda_0 \Rightarrow j_{\text{солн}} = 0.95 \cdot 4\sigma T_1^4 \Rightarrow 0.95 \cdot 4\sigma T_1^4 = 4\sigma T^4 \Rightarrow T^4 = (1-0.05)T_1^4$$

$$\Delta T \approx \sqrt[4]{0.05} T \approx 4^{\circ}\text{C} \quad - \text{ потепление}$$

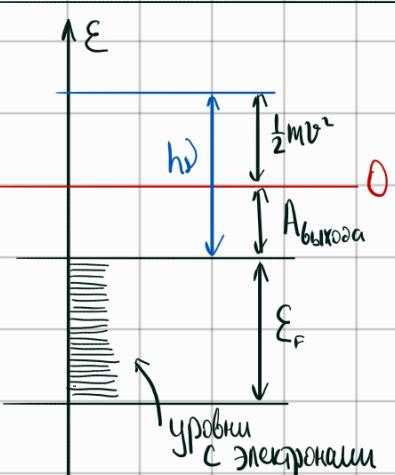
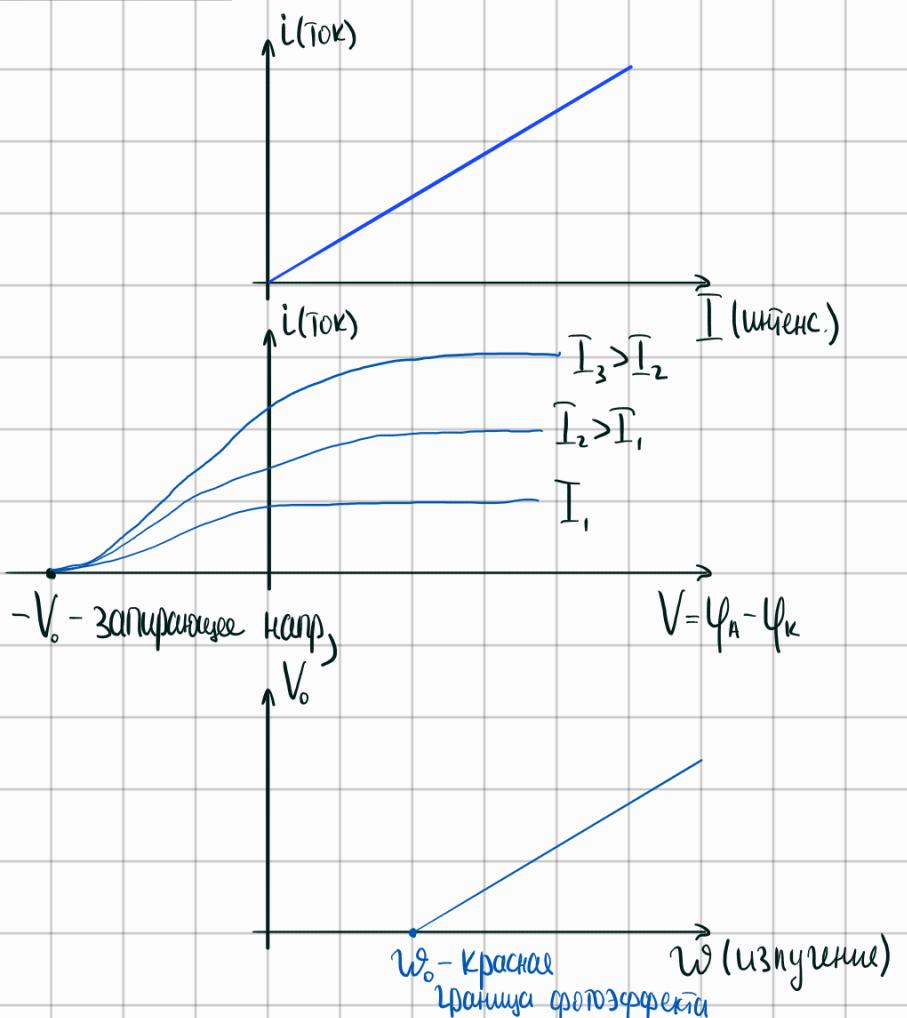
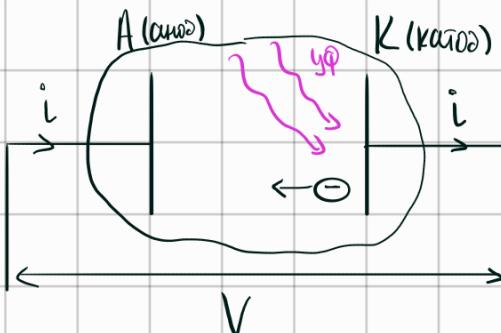
$$b) \lambda < \lambda_0 \Rightarrow 0.95 j_{\text{солн}} = 4\sigma T_2^4 \Rightarrow \text{аналог} \Rightarrow \Delta T = 4^{\circ}\text{C} \quad \text{ожаждание}$$

Ответ: случай а): «ядерная осень», температура понизится на 4°C ;

случай б): «глобальное потепление», температура повысится на 4°C

Неделя 1

Теория. Фотоэфект. Эффект Комптона



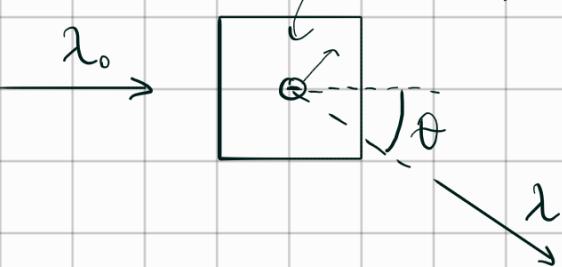
$$h\nu = \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = A + \frac{1}{2}mv^2; \quad hD_0 = A$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \hbar(\omega - \omega_0) = e(V_0 + V_c) \quad \begin{array}{l} \text{Компактное напр.} \\ \text{для катодного излучения} \end{array}$$

↑
предделъ $\varphi_A - \varphi_K$

Эффект Комптона

рассеяние на электронах



$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda_e (1 - \cos\varphi) = 2\pi \chi_e (1 - \cos\varphi)$$

$$\Lambda_e = 2.426 \cdot 10^{-10} \text{ cm} = \frac{\hbar}{m_e c}$$

$$\chi_e = 3.86 \cdot 10^{-11} \text{ cm} = \frac{\hbar}{m_e c}$$

1	1 - 7 сен.	Фотоэффект. Эффект Комптона.	0-1-1 0-1-2	1.7, T1, T2, ?	1.35, 1.48, T3,
---	------------	------------------------------	--------------------------------------	------------------------------	-------------------------------

0-1-1. В опытах П. Н. Лебедева, доказавшего существование светового давления, падающий световой поток составлял $S = 6 \text{ Вт/см}^2$. Вычислить давление, которое испытывали зачернённые и зеркальные лепестки его измерительной установки.

1) Посчитаем кол-во фотонов в сек на см²:

$$\hbar\omega \cdot N = S \Rightarrow N = \frac{S}{\hbar\omega}, \quad N = \frac{dN}{dS d\Omega}, \quad N - \text{кол-во}$$

2)



$$P_{\text{чёрн}} = \frac{\hbar\omega}{C}$$

$P_{\text{зерк}} = 2P_{\text{чёрн}}$ - ораб из механики

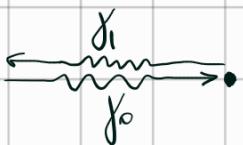
$$3) P_{\text{чёрн}} = N \cdot P_{\text{чёрн}} = \frac{S}{C} = \frac{6 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Па} = 200 \text{ мкПа}$$

$$P_{\text{зерк}} = \frac{2S}{C} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Па} = 400 \text{ мкПа}$$

0-1-2. Монохроматическое гамма-излучение рассеивается на покоящихся электронах. Найти частоту излучения, рассеиваемого назад, если энергия налетающего фотона равна энергии покоя электрона.

$$1) \Delta\lambda = \Lambda(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{w}{2\pi} \lambda = C$$



$$\theta = \pi \Rightarrow \Delta\lambda = 2\Lambda = \frac{4\pi\hbar}{mc}$$

$$2) \hbar\omega = mc^2 = \hbar \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} = \Lambda$$

$$3) \text{Итог, } \lambda_{\text{рас}} = \lambda + \Delta\lambda = 3\Lambda$$

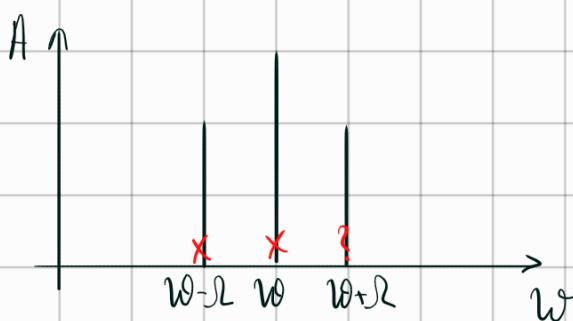
$$\lambda_{\text{рас}} = \frac{C}{3\Lambda} = \frac{mc^2}{6\pi\hbar} = \frac{mc^2}{3h} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{3 \cdot 6.6 \cdot 10^{-34}} \approx 4.1 \cdot 10^{19} \text{ Гц}$$

1.7. Электромагнитная волна с круговой частотой $\omega = 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ промодулирована по амплитуде синусоидой с круговой частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$. Найти энергию \mathcal{E} фотоэлектронов, выбиваемых этой волной из атомов водорода с энергией ионизации $E_i = 13,6 \text{ эВ}$.

Чтобы выбить электрон: $\hbar\omega > E_i$

1) До модуляции: $\hbar\omega = 6.6 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \cdot \text{с} \cdot 2 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1} = 13.2 \text{ эВ} < 13.6 \text{ эВ}$ — не выбьет

2) После модуляции: $\hbar(\omega + \Omega) = 6.6 \cdot 10^{-16} \cdot 2.2 \cdot 10^{16} \text{ эВ} = 14.52 \text{ эВ}$ — выбьет



$$\sum = \hbar(\omega + \Omega) - E_i = 0.92 \text{ эВ}$$

T.1. Детектор нейтрино SUPERKAMIOKANDE (Япония) используется для детектирования нейтрино с энергией выше 3.5 МэВ. При взаимодействии нейтрино с водой, наполняющей детектор, выбиваются энергичные электроны, которые производят обнаруживаемое датчиками черенковское излучение. Определить максимальный угол (по отношению к направлению движения исходного нейтрино), под которым движутся производящее черенковское излучение электроны отдачи при энергии нейтрино, равной порогу детектирования. Показатель преломления воды $n = 1.333$, нейтрино считать безмассовыми частицами.

Ответ: $\theta_{\max} \approx 59^\circ$

1) Границное условие черенковского свечения:

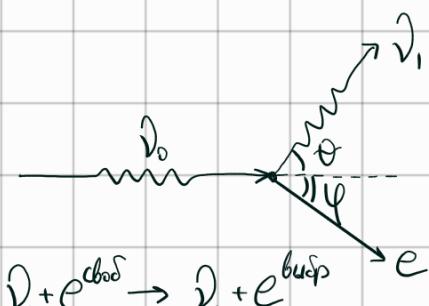
$$V = \frac{c}{n}$$

$$2) E_e = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_e^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - 1/n^2}} \approx 1.51 mc^2$$

$$3) E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$P_e = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m^2 c^4} = \sqrt{1.51^2 - 1} mc \approx 1.13 mc$$

$$4) ЗСД: E_0 + m_e c^2 = E_i + E_e$$



$$(E_i = p_i c, \text{ т.к. } m_i = 0)$$

$$\text{ЗСИ: } P_0 = p_i \cos \theta + p_e \cos \varphi \quad | \cdot c \Rightarrow E_0 = E_i \cos \theta + p_e c \cos \varphi$$

$$p_i \sin \theta = p_e \sin \psi \Rightarrow E_i \sin \theta = p_e c \sin \psi$$

5) $\begin{cases} E_0 + m_e c^2 = E_i + E_e \\ E_0 = E_i \cos \theta + p_e c \cos \psi \\ E_i \sin \theta = p_e c \sin \psi \end{cases}$

$E_0 = 3.5 \text{ MeV}$ $E_i, \theta, \psi - ?$
 $p_e c = 1.13 m_e c^2 \approx 0.574 \text{ MeV}$
 $E_e = 1.51 m_e c^2 = 1.51 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot \frac{6.2 \cdot 10^{18}}{\text{eV}} \approx 0.767 \text{ MeV}$

Math: $(E_0 - p_e c \cos \psi)^2 = (E_i \cos \theta)^2 \Rightarrow E_0^2 - 2p_e c E_0 \cos \psi + p_e^2 c^2 \cos^2 \psi = E_i^2 \cos^2 \theta \Rightarrow p_e^2 c^2 \sin^2 \psi = E_i^2 \sin^2 \theta$

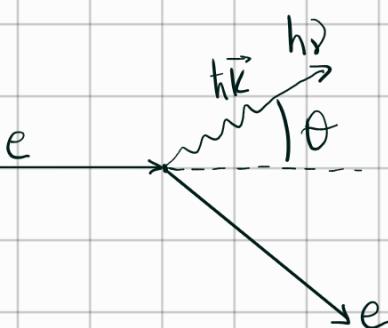
$$\Rightarrow E_0^2 - 2p_e c E_0 \cos \psi + p_e^2 c^2 = E_i^2 = (E_0 + m_e c^2 - E_e)^2$$

$$\cos \psi = \frac{E_0^2 + p_e^2 c^2 - (E_0 + m_e c^2 - E_e)^2}{2p_e c E_0} = \frac{3.5^2 + 0.574^2 - (3.5 + 0.5 - 0.767)^2}{2 \cdot 0.574 \cdot 3.5} = 0.53$$

$\psi \approx 58^\circ$

T.2. Покажите, что электрон, движущийся в среде с показателем преломления $n > 1$ со скоростью $V > c/n$, способен излучать фотоны (излучение Вавилова—Черенкова). Найдите энергию фотона $\varepsilon(\theta)$ в зависимости от направления излучения θ относительно исходного направления движения электрона. Каково максимально возможное значение θ_{\max} ? Энергию фотона считать малой по сравнению с энергией покоя.

Ответ: $\varepsilon = \frac{mc^2}{n^2} \left(\cos \theta - \frac{c}{nV} \right)$, $\theta_{\max} = \arccos \frac{c}{nV}$



1) ЗСД: $E_0 = E_i + \hbar \omega$
2) ЗСУ: $\vec{p}_0 = \vec{p}_i + \hbar \vec{k}$, $|k| = \frac{\omega}{v_{cp}} = \frac{n\omega}{c}$
3) $E_0^2 = p_0^2 c^2 + m_e^2 c^4$ $\Rightarrow (p_0^2 - p_i^2) c^2 = E_0^2 - E_i^2$
 $E_i^2 = p_i^2 c^2 + m_e^2 c^4$

4) Math: $p_0^2 - 2 \hbar k \vec{p}_0 + \hbar^2 k^2 = p_i^2$ $(\vec{k}, \vec{p}_0) = k \cdot p_0 \cdot \cos \theta$

$$p_0^2 - p_i^2 = \frac{E_0^2 - E_i^2}{c^2} = 2 \hbar k p_0 \cos \theta - \hbar^2 k^2$$

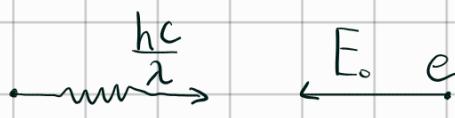
$$E_0^2 - (E_0 - \hbar \omega)^2 = c^2 (p_0^2 - p_i^2) \rightarrow \hbar \omega (2E_0 - \hbar \omega) = c^2 (2 \hbar k p_0 \cos \theta - \hbar^2 k^2)$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{\hbar\omega}{c^2}(2E_0 - \hbar\omega) + \hbar^2 k^2}{2\hbar k p_0} = \frac{2E_0 - \hbar\omega + \hbar^2 n^2 \omega}{2n c p_0} = \frac{E_0}{n c p_0} \left(1 - \frac{\hbar\omega(n^2 - 1)}{2E_0}\right)$$

5) $E_0 = \gamma M C^2$ | $\Rightarrow \cos\theta_{\max} = \frac{\gamma M C^2}{n c \gamma M v} = \frac{C}{n v}$

6) ?

1.35. Фотон от рубинового лазера ($\lambda = 0,6943$ мкм) испытывает лобовое соударение с электроном, имеющим кинетическую энергию $T = 500$ МэВ. Оценить энергию \mathcal{E}_γ фотона, образующегося в результате «обратного комптон-эффекта» (т. е. при 180° -рассеянии фотона на движущемся электроне). См. также задачу 4.51.



1) Чтобы применить формулу $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda_e(1 - \cos\varphi)$,
нужен немодифицированный электрон \Rightarrow

\Rightarrow переход от CO к e:

2) Эффект Доплера ($T = 500$ МэВ $\Rightarrow m_e c^2 \approx \frac{1}{2}$ МэВ — очень близко)

$$w' = w_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{или} \quad \lambda' = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad -\text{T.K. набегающему}$$

$$3) \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{mc^2} \approx \frac{T}{mc^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{T}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{T}\right)^2 \approx 0.9999\dots$$

$$\lambda' = \lambda_0 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_0 \left[\frac{\frac{1}{2}\lambda^2}{2 - \frac{1}{2}\lambda^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\lambda_0 \left[1 - \frac{1}{4}\lambda^2\right]^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}\lambda_0 = \lambda_0 \frac{mc^2}{2T} \approx \frac{1}{2000}\lambda_0$$

4) $\lambda' \sim 0.1$ нм

$\Lambda_e \sim 1$ нм $\ll \lambda'$

$$\Delta\lambda = \Lambda_e(1 - \cos\varphi) = 2\Lambda_e \Rightarrow \tilde{\lambda}' = \lambda' + 2\Lambda_e \approx \lambda'$$

5) Возвращаемся в АСО, но теперь не на встречу, зная формула такого же

$$\tilde{\lambda} = \lambda \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \left(\frac{mc^2}{2T}\right)^2 \lambda_0$$

6) $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} \left(\frac{2T}{mc^2}\right)^2 \approx 6.85$ МэВ

1.35. При условии $T \gg \hbar\omega_0$ ответ имеет вид

$$\mathcal{E}_\gamma \approx \hbar\omega_0 \frac{2T}{\left(\frac{(m_e c^2)^2}{2T} + 2\hbar\omega_0\right)}$$

(кинетическая энергия электрона $T \gg m_e c^2$, поэтому полная его энергия $\mathcal{E}_0 \approx T$). Здесь возможны два случая:

1) $\hbar\omega_0 \ll m_e c^2 \frac{2T}{T}$. Тогда $\mathcal{E}_\gamma \approx \hbar\omega_0 \left(\frac{2T}{m_e c^2}\right)^2 \approx 6.85$ МэВ (этот случай и реализуется в задаче);

2) $\hbar\omega_0 \gg m_e c^2 \frac{2T}{T}$. Тогда $\mathcal{E}_\gamma = \hbar\omega \approx T$. В задаче этот случай не выполняется.

Задачу можно также решить, рассмотрев два последовательных перехода: в систему покоя электрона и обратно в лабораторную систему. Оба раза частота γ -кванта будет меняться за счет эффекта Доплера.

1.48. Возбужденное ядро с энергией возбуждения $\Delta E = 1 \text{ МэВ}$ с $A = 100$ движется с кинетической энергией $T = 100 \text{ эВ}$ и испускает гамма-квант. Под каким углом к направлению движения ядра сдвиг γ -кванта по энергии будет равен нулю?

0) Сдвиг γ -кванта $= 0 \Leftrightarrow E_\gamma = \Delta E$

1) Переидем в CO ядра:



- Эффект Доппера: $\nu_1 = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$

- БД: $\Delta E = \frac{p^2}{2M_{\text{ядр}}} + h\nu_1 \Rightarrow \frac{(h\nu_1)^2}{2Mc^2} + h\nu_1 - \Delta E = 0$

- БДИ: $\frac{h\nu_1}{c} = p \Rightarrow h\nu_1 = \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}}\right) Mc^2$

$$h\nu_1 = Mc^2 \left(-1 + \left(1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \approx \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2Mc^2} = \Delta E \left[1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right]$$

$$\nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \Rightarrow \nu_1 = \nu_0 \left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right) \Rightarrow \frac{v}{c} \cos \theta = \frac{\Delta E}{2Mc^2}$$

$$\cos \theta = \frac{\Delta E}{2Mv \cdot c}$$

2) $v = \sqrt{\frac{2T}{M}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\Delta E}{2\sqrt{2T M c^2}} = \frac{1 M_e B}{2\sqrt{2 \cdot 100 eV \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{19} \cdot 1.6 \cdot 10^{-27} eV \cdot c^2}} = 0.115$

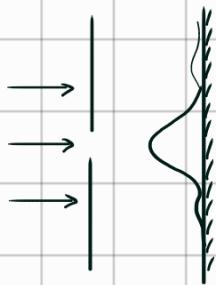
$$M = A \cdot m_p = 100 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1.67 \cdot 10^{-25} \text{ кг} = 1.67 \cdot 10^{-22} \text{ уп}$$

$$\theta = 83.3^\circ$$

1.48. $\cos \theta = \frac{\Delta E}{2\sqrt{2T m_{\text{яд}} c^2}} = 0.116, \theta = 83.3^\circ$; где $m_{\text{яд}} c^2 = A \cdot 931.5 \text{ МэВ}$.

Неделя 3

Волны де Броиля



Идея: любая частица может быть волной

$$E = \hbar\omega \rightarrow \omega = \frac{E}{\hbar}; \quad p = \frac{\epsilon}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

Для частицы с ϵ, \vec{p} : $\psi(x, t) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$ волновая ф-ция

$|\psi|^2 = |\psi|_{x,t}^2$ — плотность вероятности обнаружить частицу

Соотношение неопределенностей

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar$$

в форме Вейля

$$\frac{\Delta x^2 \Delta p^2}{\Delta E \Delta t} \approx \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar$$

Чем точнее измеряли одни характеристики частицы, тем менее точно можно измерить другие

3	15 – 21 сен.	Волны де Броиля. Соотношение неопределенностей.	0-3-1, 0-3-2	2.12, 2.15, 2.26,	2.30, 2.38, 2.44
---	--------------	---	-----------------	----------------------	---------------------

0-3-1. Определить кинетическую энергию электрона, при которой его дебориевская и комптоновская длины волн равны между собой.

$$1) \quad p = \frac{\hbar}{\lambda} \xrightarrow[\text{для частицы}]{\text{для фотона}} p = \frac{\hbar}{\lambda_{\text{г.д.}}} \rightarrow \lambda_{\text{г.д.}} = \frac{\hbar}{p}$$

$$2) \quad \Delta \lambda = \lambda - \lambda' = \frac{\hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta), \quad \Delta = \frac{\hbar}{m_e c}$$

$$3) \quad \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{m_e c} \Rightarrow p = m_e c$$

$$4) \quad E^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4 \Rightarrow E = \sqrt{p^2 + m_e^2 c^4}$$

$$E_k = E - m_e c^2 = (\sqrt{p^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2) \approx 0.4 \cdot 0.5 M_e V \approx 0.2 M_e V$$

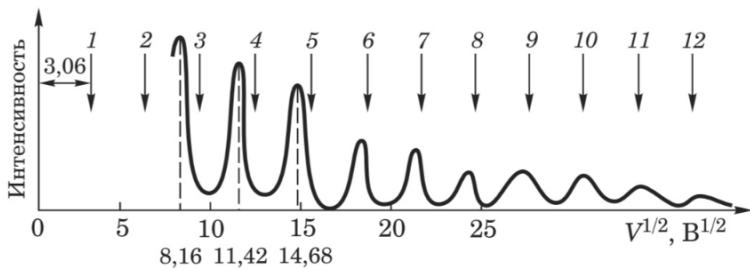
0-3-2. Исходя из соотношения неопределенностей, оцените минимальную энергию осциллятора с частотой ω .

$$1) \Delta t \sim \frac{1}{\omega}$$

$$2) \Delta E \Delta t \gtrsim \hbar \Rightarrow \Delta E_{\min} \sim \hbar \omega$$

2.12* На рис. 5 приведена кривая, полученная в опытах Дэвисона и Джермера по рассеянию электронов от монокристалла никеля, падающих под углом скольжения 80° .

По оси абсцисс отложено значение \sqrt{V} , где V — энергия электронов в вольтах, по оси ординат — относительная интенсивность рассеянных электронов. При больших порядках отражения m максимумы эквидистанты (расстояние между ними $3,06 \text{ B}^{1/2}$), а при малых эта закономерность, показанная стрелками, нарушается. Оценить немонохроматичность используемых электронов и показатель преломления никеля для волны де Броиля электронов, соответствующих 3-му, 4-му и 5-му максимумам, которые наблюдаются при \sqrt{V} , равном соответственно $8,16$, $11,42$ и $14,68 \text{ B}^{1/2}$. Найти межплоскостное расстояние d никеля.



$$1) \text{Аналогично оптике: } \Delta \lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} = \frac{\lambda}{12}$$

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad p = \frac{h}{\lambda_{\text{дБ}}} \rightarrow E = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \propto \frac{1}{\lambda^2} \rightarrow \frac{\Delta E}{E} = -2 \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \Rightarrow \left| \frac{\Delta E}{E} \right| = \frac{1}{6}$$

$$2) \text{Электрон развеялся напр. } V \Rightarrow eV = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_i = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \propto \sqrt{V}$$

$$\text{В металле: } v_i \propto \sqrt{V + V_0}, \quad \text{где } V_0 - \text{базир. потенц. металла}$$

$$\text{Аналогично оптике свободным: } n_u = n = \frac{v_i}{v_i} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}$$

$$3) \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \Rightarrow \sqrt{V} = \frac{2\pi h}{\lambda \sqrt{2me}} = \frac{12.26}{\lambda [\text{A}]} = \frac{12.26 \text{ м}}{2d \sin \varphi [\text{A}]}$$

$$4) \text{При } m > 6, V_0 \ll V: \sqrt{V} = \frac{12.26 \cdot 1}{2 \cdot d \cdot \sin(80^\circ)} \Rightarrow d = \frac{12.26}{2 \cdot 3.06 \cdot \sin(80^\circ)} \approx 2.03 \text{ \AA}$$

5) Аналитично закону Снеллиуса:

$$n = \frac{\cos\varphi}{\sin\psi}, \quad \cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\psi} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}$$

$$2d \sin\theta = m \frac{\lambda}{n} \rightarrow 2nd \sin\theta = m\lambda$$

$$2nd \cos\varphi - m\lambda \rightarrow$$

$$\rightarrow 2d\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi} = m\lambda$$

$$6) \sqrt{V'} = \frac{12.26}{2d\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}} = \frac{12.26m}{2d\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}}$$

$$\sqrt{\frac{V'}{V}} = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}}{\sin\psi} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{V}{V'}} \sin^2\psi + \cos^2\varphi$$

7) Math.	m	$\sqrt{V'}, B^{1/2}$	$\sqrt{V'}, B^{1/2}$	n
3	9.18	8.16	8.16	1.12
4	12.24	11.42	11.42	1.07
5	15.3	14.68	14.68	1.04

2.15*. Чтобы получить пучок нейтронов, обладающих заданной энергией $\mathcal{E} = 1$ эВ, используют брэгговское отражение первого порядка от кристалла LiF, для которого расстояние между плоскостями кристаллической решетки $d = 2,32 \text{ \AA}$ (рис. 7). На кристалл падает пучок нейтронов с различными энергиями. Оценить разброс нейтронов по энергиям $\Delta\mathcal{E}$ в отраженном пучке, если угловая ширина этого пучка $\Delta\varphi = 0,1^\circ$. Какую толщину кристалла D следует выбирать в этом эксперименте? Кристалл вырезан так, что отражающие плоскости параллельны поверхности кристалла.

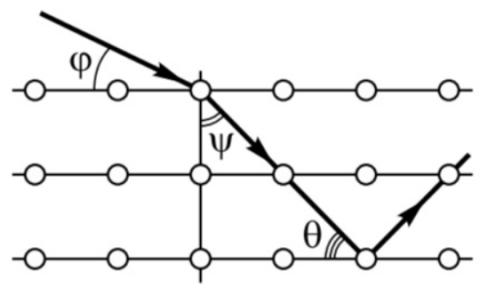
$$1) \mathcal{E} = 1 \text{ эВ}, \quad \lambda_{g,\mathcal{E}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} = \frac{6.6 \cdot 10^{-21} \text{ эВс}}{\sqrt{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-24} \text{ эВ} \cdot 1.6 \cdot 10^{-11} \text{ эВ}}} = 286 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 0.286 \text{ \AA}$$

2) Условие Брэгга-Вульфа: $2d \sin\varphi = m\lambda$

$$M=1: \quad \sin\varphi = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0.286}{2 \cdot 2.32} \approx 0.06 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi \approx \varphi \ll 1$$

$$3) \frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}; \quad \lambda \propto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \Rightarrow \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right|$$

$$\Delta\mathcal{E} = 2 \frac{\Delta\varphi}{\varphi} \mathcal{E} = 2 \cdot \frac{0.1 \cdot \frac{\pi}{180}}{0.06} \cdot 1 \text{ эВ} \approx 0.058 \text{ эВ}$$



2.12*. Решение. Для нерелятивистского электрона $\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \propto \frac{1}{\lambda^2}$. Поэтому искомую немонохроматичность электронов $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ легко оценить по числу наблюдаемых отражений $m_{\max} = 12$, откуда следует $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} \approx \frac{\lambda}{12}$. И далее $\left| \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right| = 2 \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = \frac{1}{6}$.

Вне металла скорость электрона $v_1 \propto \sqrt{V}$, внутри металла $v_2 \propto \sqrt{V_0 + V}$, где V_0 — внутренний потенциал металла. Таким образом, показатель преломления металла

$$n = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}.$$

Эквидистантное расположение максимумов интенсивности отраженных электронов наблюдается, когда внутренний потенциал металла $V_0 \ll V$. Это соответствует показателю преломления кристалла $n=1$ (для $m \geq 6$). В этом случае в соответствии с формулой Брэгга-Вульфа (135)

$$2d \sin\theta = m\lambda; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meV}}; \quad \sqrt{V} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda\sqrt{2me}}$$

где d следует подставлять в ангстремах [\AA], а результат \sqrt{V} получается в $\text{B}^{1/2}$. В нашем случае при $m=1$ $\sqrt{V}=3,06 \text{ B}^{1/2}$, и поэтому межплоскостное расстояние $d=2,32 \text{ \AA}$. Из рис. 5 и условия задачи следует, что при $m < 6$ максимумы интенсивности неэквидистанты. Это означает, что при соответствующих энергиях показатель преломления отличается от 1.

Закон преломления волн де Броиля идентичен классическому закону Снеллиуса:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\psi} = n; \quad \cos\psi = \sqrt{1 - \sin^2\psi} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}.$$

По формуле Брэгга-Вульфа $n \cdot 2d \sin\theta = m\lambda$, или $n \cdot 2d \cos\psi = m\lambda$, откуда следует

$$2d\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi} = m\lambda.$$

Обозначим через V' ускоряющий потенциал, соответствующий энергиям электронов, когда $n \neq 1$. Тогда

$$\sqrt{V'} = \frac{12.26}{\lambda[\text{\AA}]} = \frac{12.26m}{2d\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}}.$$

Из соотношения $\sqrt{\frac{V'}{V}}$ мы и определим n : $\sqrt{\frac{V}{V'}} = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}}{\sin\psi}$, откуда $n = \left(\frac{V}{V'} \sin^2\psi + \cos^2\varphi \right)^{1/2}$.

Для $m=5$: $\sqrt{V'} = 14.68 \text{ B}^{1/2}$; $\sqrt{V} = 15.3 \text{ B}^{1/2}$; $n = 1.04$.

Для $m=4$: $\sqrt{V'} = 11.42 \text{ B}^{1/2}$; $\sqrt{V} = 12.24 \text{ B}^{1/2}$; $n = 1.07$.

Для $m=3$: $\sqrt{V'} = 8.16 \text{ B}^{1/2}$; $\sqrt{V} = 9.18 \text{ B}^{1/2}$; $n = 1.12$.

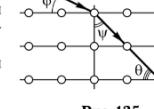


Рис. 135

2.15* $D \geq \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} = 82 \text{ \AA}$.

Решение. Согласно условию Брэгга-Вульфа первый порядок ($m=1$) отражения соответствует углу

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{2D}.$$

Длина волны, соответствующая энергии нейтрона $\mathcal{E} = 1$ эВ, равна 0.287 \AA , поэтому $\frac{\lambda}{2D} \approx 0.06$. Это означает, что $\sin\varphi \approx \varphi \approx 0.06$. Очевидно, что $\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$.

Дебройлевская длина волны $\frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} \propto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}$. Поэтому $\left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right|$, откуда

$$\Delta\mathcal{E} = 2\mathcal{E} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\mathcal{E} \frac{\Delta\varphi}{\varphi} \approx 0.057 \text{ эВ}.$$

Толщину кристалла D выберем из этих соображений, что разрешающая способность такой системы $R = mN \cdot \lambda/\Delta\lambda$, т. е. при $m=1$ и числе интерферирующих пучков, равном числу слов, $N = D/d$:

$$\frac{D}{d} \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\Delta\varphi} = \frac{\lambda}{2\Delta\varphi},$$

$$D \geq \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} \approx 82 \text{ \AA}.$$

Приведем другое решение этой задачи. Рассмотрим бесконечную решетку в направлении оси X' (рис. 136). Волновая функция всей решетки представляет собой плоскую волну $A \exp(i\frac{p_x x}{\hbar})$, где p_x — импульс решетки в направлении оси X' . При смещении всей решетки вдоль X на период d волновая функция умножается на $\exp(i\frac{p_x d}{\hbar})$ и переходит сама в себя. Отсюда $p_x d = 2\pi m\hbar$, т. е. импульс, передаваемый решетке, квантован! При упругом отражении $p_x = 2p \sin\varphi$, откуда следует $2d \sin\varphi = m \frac{\hbar}{p} = m\lambda$. Таким образом, мы получили условие Брэгга-Вульфа.

Если же решетка ограничена по x , то передаваемый по X решетке импульс приобретает неопределенность $\delta p_x > h/D$. С другой стороны, $\delta p_x = 2p \delta(\sin\varphi) = 2p \cos\varphi \Delta\varphi$. Поскольку $\cos\varphi \approx 1$, то $\delta p_x = \frac{\delta p_x}{2p} \geq \frac{h}{D \cdot 2p} \approx \frac{\lambda}{2D}$.

Таким образом, искомая толщина кристалла $D \geq \frac{\lambda}{2\Delta\varphi}$. Полагая $\Delta\varphi \approx \Delta\varphi = 0.1^\circ$, получим ответ.

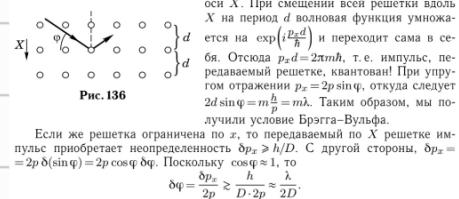


Рис. 136

4) $R = mN$ - разр. способность, $N = \frac{D}{d}$ - кон. б. слоеv

$$R = m \frac{D}{d} \geq \frac{\lambda}{\Delta \lambda} \Rightarrow D \geq \frac{\lambda}{\Delta \lambda} d = \frac{\lambda}{\Delta \varphi} d = \frac{\lambda}{2d\Delta\varphi} d = \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} \approx 82 \text{ \AA}$$

2.26. Какова должна быть кинетическая энергия T электронов (протонов) для исследования распределения заряда и ядерной материи внутри ядра с точностью $l \sim 1 \text{ фм} (10^{-13} \text{ см})$, и структур с линейными размерами $l \sim 10^{-4} \text{ фм}$, что соответствует радиусу слабого взаимодействия?

$$1) V \sim C \Rightarrow E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \Rightarrow p = \sqrt{E^2/c^2 - m^2 c^2}$$

$$2) \Delta p \Delta X \gtrsim \hbar \Rightarrow p \sim \frac{\hbar}{l} \Rightarrow \frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2 \sim \frac{\hbar^2}{l^2} \Rightarrow E^2 \sim \frac{\hbar^2 c^2}{l^2} + m^2 c^4$$

$$3) E = T + mc^2 \Rightarrow T > \sqrt{\frac{\hbar^2 c^2}{l^2} + m^2 c^4} - mc^2 = mc^2 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar}{l} \right)^2} - 1 \right], \quad \chi_v = \frac{\hbar}{mc}$$

$\ell \sim 10^{-13} \quad \ell \sim 10^{-17}$

для e: $\chi_e = 3.86 \cdot 10^{11} \text{ см}$
для p: $\chi_p = 1.32 \cdot 10^{-13} \text{ см}$

Электрон: $T \gtrsim \frac{1}{2} M_e B \cdot 400 \approx 200 \text{ МэВ} \quad T \gtrsim 2T_e B$

Протон: $T \gtrsim 950 \text{ МэВ} \cdot \left(\sqrt{1 + (1.3)^2} - 1 \right) \approx 600 \text{ МэВ} \quad T \gtrsim 950 \text{ МэВ} \cdot 19000 \approx 2 \text{ ТэВ}$

2.26. Условие разрешения объекта с характерным размером l : $\lambda_{dB} \leq l$ или $h/p \leq l$, откуда $T > mc^2 \sqrt{1 + (\Lambda/l)^2} - mc^2$, где $\Lambda = h/(mc)$ — комптоновская длина волны электрона (протона).

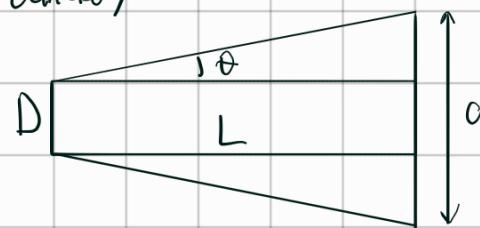
Для электрона: $T \gtrsim 1.24 \text{ ГэВ}$ ($l \sim 10^{-13} \text{ см}$) и $T \gtrsim 12.4 \text{ ТэВ}$ ($l \sim 10^{-17} \text{ см}$).

Для протона: $T \gtrsim 620 \text{ МэВ}$ ($l \sim 10^{-13} \text{ см}$) и $T \gtrsim 12.4 \text{ ТэВ}$ ($l \sim 10^{-17} \text{ см}$).

2.30. Оценить минимально достижимый диаметр d пятна, которое можно создать на детекторе пучком атомов серебра, испускаемых печью с температурой $t = 1200^\circ \text{C}$. Расстояние от выходной щели печи до детектора равно $L = 1 \text{ м}$. Расчет произвести: 1) исходя из волновой природы частиц в приближении Фраунгофера; 2) исходя из соотношения неопределенностей. Убедиться в эквивалентности обоих подходов.

1) Приближение Фраунгофера (оптика, экран далеко)

$$\theta \sim \frac{\lambda}{D} - \text{из оптики}$$



$$d = D + 2L \frac{\lambda}{D}, \quad \text{найдем } d(D)_{min}$$

$$d' = 1 - 2L \frac{\lambda}{D^2} = 0 \Rightarrow 2L \frac{\lambda}{D^2} = 1 \Rightarrow D = \sqrt{2L\lambda} \Rightarrow$$

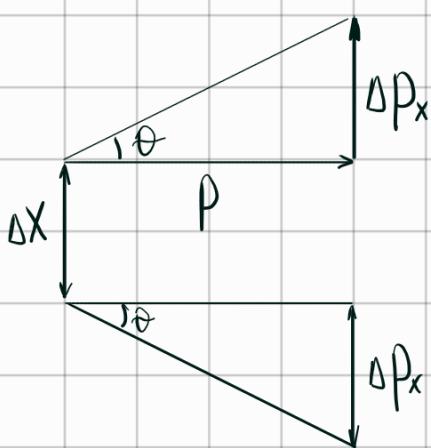
$$\Rightarrow d_{\min} = \sqrt{2L\lambda} + \frac{2L\lambda}{\sqrt{2L\lambda}} = 2\sqrt{2L\lambda}$$

$$2) \quad \lambda_{g\delta} = \frac{h}{P}; \quad \frac{3}{2}kT = \frac{P^2}{2m} \Rightarrow P = \sqrt{3mkT}$$

⁴⁷Ag 107.86

$$d_{\min} = 2\sqrt{2L\frac{h}{P}} = 2\sqrt{\frac{2Lh}{\sqrt{3mkT}}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 6.6 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{3 \cdot 108 \cdot 1.66 \cdot 10^{-24} \cdot 1.38 \cdot 10^{-16} \cdot (1200+273)}}} \approx 7 \text{ мкм}$$

3) Тензор из соотношений неопределенностей: $\Delta X \Delta p_x \sim \hbar$



$$\theta = \frac{\Delta p_x}{P}, \quad D = \Delta X \Rightarrow \theta = \frac{\hbar}{P \Delta X} = \frac{\lambda}{\Delta X}$$

$$d = \Delta X + 2L\theta = \Delta X + 2L \frac{\lambda}{\Delta X} = D + 2L \frac{\lambda}{D},$$

далее аналогично

$$2.30. \quad d \approx 2 \sqrt{\frac{2hL}{\sqrt{3mkT}}} \approx 7.5 \text{ мкм.}$$

2.38. Электрон притягивается к поверхности жидкого гелия электростатическими силами изображения, потенциальная энергия которых, как известно, равна

$$U(x) = -\frac{e^2 \epsilon - 1}{4x \epsilon + 1},$$

где x — кратчайшее расстояние от электрона до поверхности, e — заряд электрона, $\epsilon = 1.057$ — диэлектрическая проницаемость гелия (рис. 12). В то же время медленный электрон не может проникнуть внутрь гелия из-за отталкивания (так называемое отрицательное сродство гелия к электрону). Поэтому можно считать, что на поверхности ($x = 0$) потенциальная энергия испытывает бесконечный скачок и электрон оказывается в потенциальной яме (рис. 12). Пользуясь этой моделью и соотношением неопределенностей, оценить по порядку величины среднее расстояние $\langle x \rangle$ электрона от поверхности гелия в основном состоянии и энергию связи $E_{\text{св}}$ электрона вблизи поверхности гелия.

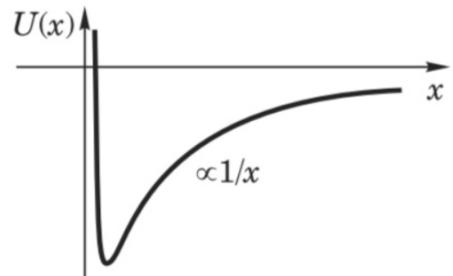


Рис. 12

$$\text{I) } E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2 \epsilon - 1}{4x \epsilon + 1} = \frac{p^2}{2m} - \frac{C}{x} = \left| px \sim \hbar \right| = \frac{\hbar^2}{2mx^2} - \frac{C}{x}$$

$$\text{Основное состояние: } \frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{2\hbar^2}{2mx^3} + \frac{C}{x^2} = 0 \Rightarrow \langle x \rangle = \frac{\hbar}{mC} = 4 \frac{\hbar^2}{me^2} \frac{\epsilon + 1}{\epsilon - 1}$$

$$x = 4 \cdot \frac{(1.054 \cdot 10^{-27})^2}{9 \cdot 10^{-31} \cdot (4.8 \cdot 10^{-19})^2} \frac{2.057}{0.057} \approx 76 \text{ \AA}$$

$$2) \text{ Из модели бора: } \frac{m\vec{v}^2}{x} = \frac{\partial U}{\partial x} = F = \frac{C}{x^2} \Rightarrow \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{C}{x} = \frac{p^2}{2m}$$

$$E_{\text{б}} = \frac{1}{2} \frac{C}{x} - \frac{C}{x} = - \frac{C}{2x} = - \frac{mc^2}{2\hbar^2} = - \frac{me^4}{32\hbar^2} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \right)^2 = - E_{\text{ион}} \cdot \frac{1}{16} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \right)^2 = - 13.6 \text{ эВ} \cdot \frac{(0.057)}{(4.2057)} \approx - 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}$$

2.38. $\langle x \rangle \approx \frac{4(\epsilon+1)}{\epsilon-1} r_1 \approx 76 \text{ \AA}$, где $r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.53 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ — радиус первой боровской орбиты в атоме водорода. Энергия связи

$$\mathcal{E}_{\text{св}} \approx - \frac{me^4}{32\hbar^2} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \right)^2 = - \mathcal{E}_{\text{ион}} \frac{1}{16} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \right)^2 \approx - 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ эВ},$$

где $\mathcal{E}_{\text{ион}} = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6 \text{ эВ}$ — энергия ионизации атома водорода.

2.44*. Действие силы на свободно движущуюся частицу массой m можно обнаружить, наблюдая изменение ее координаты во времени. Оценить в соответствии с квантово-механическими законами, какую минимальную силу, действующую по направлению движения частицы, можно обнаружить таким способом за время наблюдения τ .

$$1) \Delta X_F = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{F\tau^2}{2m}$$

2) В начальный момент нельзя точно найти $p_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta X_p = \frac{\Delta p_0 \tau}{m}$$

$$(\Delta X)^2 = (\Delta X_p)^2 + (\Delta X_0)^2 \quad - \text{ суммирование дисперсий}$$

из-за нр. $t=0$

$$3) (\Delta p_0)^2 / (\Delta X_0)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow (\Delta p_0)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4(\Delta X_0)^2} \Rightarrow (\Delta X_p)^2 \geq \frac{\hbar^2 \tau^2}{4m^2 (\Delta X_0)^2}$$

$$4) (\Delta X)^2 = \frac{\hbar^2 \tau^2}{4m^2 (\Delta X_0)^2} + (\Delta X_0)^2$$

$$\frac{d(\Delta X)}{d(\Delta X_0)} = 0 \Rightarrow \frac{\hbar^2 \tau^2}{4m^2 (\Delta X_0)^3} = 2 \Delta X_0 \Rightarrow (\Delta X_0)_{\min} = \frac{\hbar \tau}{2m}, \text{ нодставляем.}$$

$$5) (\Delta X)^2 = \frac{\hbar \tau}{2m} + \frac{\hbar \tau}{2m} = \frac{\hbar \tau}{m}$$

$$6) (\Delta X_F)^2 > (\Delta X)^2 \Rightarrow \frac{F^2 \tau^4}{4m^2} \geq \frac{\hbar^2 \tau}{m} \Rightarrow F \geq 2 \sqrt{\frac{\hbar m}{\tau^3}}$$

2.44* $\sqrt{\frac{4\hbar m}{\tau^3}}$.

Неделя 4

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)}, \quad |\psi|^2 = \psi^* \psi, \quad \int |\psi|^2 dV = 1$$

$$\langle X \rangle = \int \psi^* x \psi dV, \quad \langle \psi(x) \rangle = \int \psi^* \psi(x) \psi dV$$

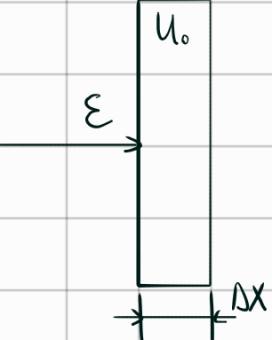
Ур-е Шредингера:

$$E \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z) \psi \quad \boxed{E \psi = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}}$$

\hat{A} - оператор, например $\hat{p}_x = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x}$, т.к. $\hat{p}_x \psi = p_x \psi$
 $\hat{E} = i \hbar \frac{\partial}{\partial t}$, т.к. $\hat{E} \psi = E \psi$

$$\hat{E} = \hat{T} + \hat{U}, \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta, \quad \hat{U} = U(x, y, z)$$

Туннелирование



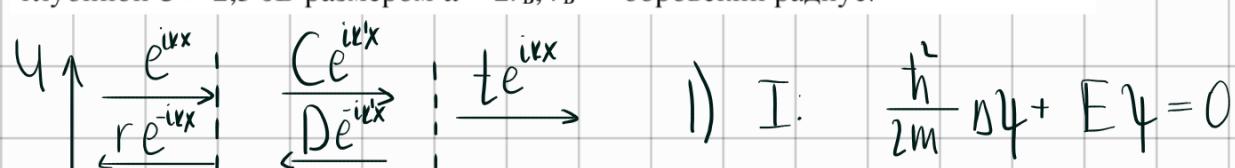
$$D = \frac{|\psi_{\text{бес}}|^2}{|\psi_{\text{бкс}}|^2} - \text{вероятность прохождения через барьер}$$

$$|\psi|^2 \propto e^{-\frac{\alpha x}{L}}, \quad \text{где } L = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - \varepsilon)}}$$

$$D \approx \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - \varepsilon)} \Delta x \right\}$$

4	22 – 28 сен.	Уравнения Шредингера. Потенциальные барьеры. Туннельный эффект	0-4-1, 0-4-2	3.35, 3.53, 3.56,	3.45, T6, T.7?
---	--------------	--	-----------------	----------------------	-------------------

0-4-1. Найти минимальную кинетическую энергию электрона, при которой он без отражения пройдёт над одномерной прямоугольной потенциальной ямой глубиной $U = 2,5$ эВ размером $a = 2r_b$, r_b — боровский радиус.



$$\text{I. I: } \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + E \psi = 0$$

$$\Delta \psi + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$$

$$\text{II. Аналогично: } K^2 = \frac{\sqrt{2m(E+U)}}{\hbar}$$

$$K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

2) $R = |r|^2$ - отраженный вол. в зеркале

$T = |t|^2$ - пропускание - II -

$T + R = 1$

Сложный куб (см. пункт 4)

$$3) \quad \begin{array}{l} \Psi_I = e^{ix} - r e^{-ix} \\ \Psi_{II} = C e^{ikx} - D e^{-ikx} \\ \Psi_{III} = t e^{ixa} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \Psi_I(a) = \Psi_{II}(a): e^{-ixa} - r e^{ixa} = C e^{-ika} - D e^{ixa} \\ \Psi'_I(a) = \Psi'_{II}(a): ik(e^{-ixa} + r e^{ixa}) = ik(C e^{-ika} + D e^{ixa}) \\ \Psi'_{II}(a) = \Psi'_{III}(a): ik'(C e^{-ika} + D e^{ixa}) = ik t e^{ixa} \end{array} \right.$$

$$2 C e^{ixa} = \left(1 + \frac{k}{k'}\right) t e^{ixa} \Rightarrow C = \frac{k+k'}{2k} e^{i(k-k')a} = \frac{k+k'}{2k} J \beta t$$

$$D = \frac{k'-k}{2k} e^{i(k+k')a} = \frac{k'-k}{2k} J \beta t$$

Пусть $e^{ixa} = \lambda$, $e^{ika} = \beta$.

$$(1) + (2): 2J^{-1} = \frac{k+k'}{k} C \beta^{-1} + \frac{k'-k}{k} D \beta$$

$$2J^{-1} = \left[\frac{(k+k')^2}{2kk'} J \beta^{-2} + \frac{(k'-k)^2}{2kk'} J \beta^2 \right] t \Rightarrow \boxed{\frac{1}{t} = 1 + \frac{U}{4\varepsilon(\varepsilon+U)} \sin^2(2ka)}$$

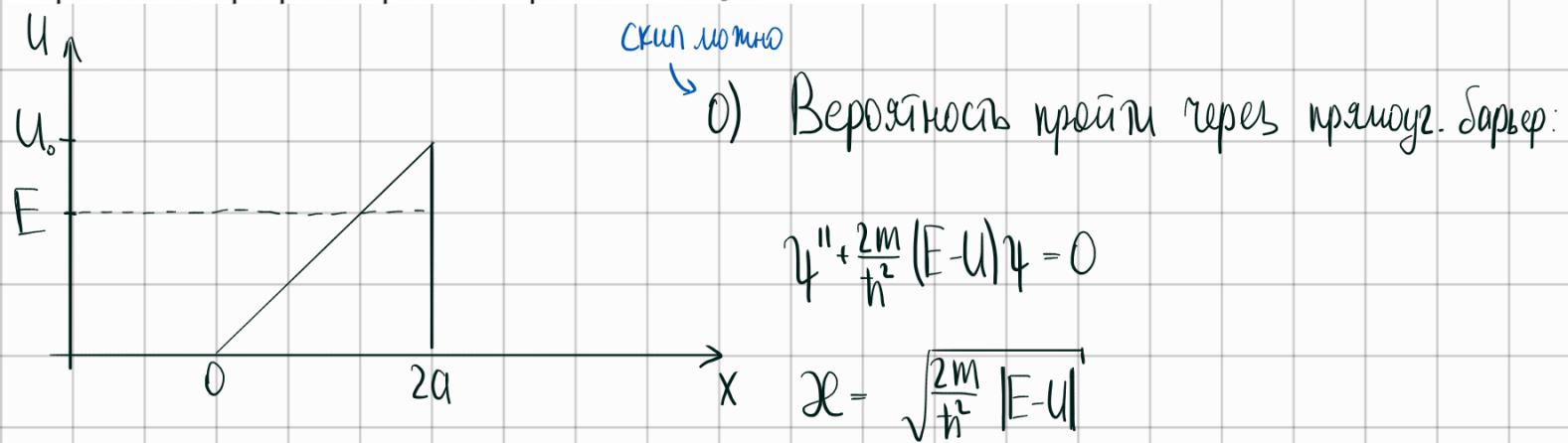
Можно сразу

4) $t = 1 \Leftrightarrow 2ka = \pi n$ - условие резонанса

$$\frac{2a}{\pi} \sqrt{2m(\varepsilon+U)} = \pi n \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{\frac{h\pi^2}{2mc^2} n^2 - U}{1} = \frac{(1.05 \cdot 10^{-27})^2 \cdot 3.14^2}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (2.53 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} - 2.5 \text{ eV} \approx 31 \text{ eV}$$

0-4-2. Потенциальный барьер представляет собой прямоугольный треугольник с катетами $2a = 2 \text{ \AA}$ и $U_0 = 5 \text{ эВ}$. Оценить вероятность туннелирования через такой барьер электрона с энергией $E = 3U_0/5$.



$$\psi = C_1 e^{-kx} + C_2 e^{kx}$$

$C_1 \ll C_2$
"отраженная волна"

$$\Rightarrow \psi \propto e^{-kx} \Rightarrow (\text{известный фронт})$$

$\Rightarrow W = W_0 e^{-2kd}$ - вероятность пройти барьер, d -ширина

1) Наш случай: разделим на треугольники

$$U(x) = U_0 \frac{x}{2a} \quad U\left(\frac{6}{5}a\right) = \frac{3}{5}U_0 = E$$

Экспоненц. затухание лишь при $E < U$

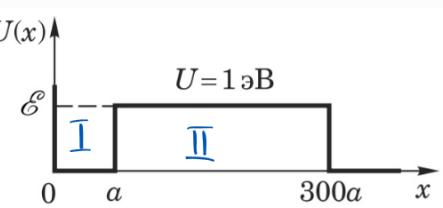
$$2) W = W_0 \exp \left\{ -2 \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{1.2a}^{2a} \sqrt{U(x) - E} dx \right\} \quad \textcircled{1}$$

$$I = \int_{1.2a}^{2a} \left(U_0 \frac{x}{2a} - E \right)^{1/2} dx = \int_{1.2a}^{2a} (dx - E)^{1/2} = \left| \frac{W}{dW} = dx - E \right| = \int_0^{U-E} W^{1/2} \frac{dW}{2} = \frac{2}{3} (U_0 - E)^{3/2}$$

$$\textcircled{1} W_0 \exp \left\{ -2 \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a}{U_0} (U_0 - E)^{3/2} \right\}, \text{ итого:}$$

$$W = \exp \left\{ -\frac{8\sqrt{2m}}{3\hbar} \frac{(U_0 - E)^{3/2}}{U_0} \right\} \approx \exp \left\{ -\frac{8 \cdot 1 \cdot 10^{-14} \sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28}}}{3 \cdot 1.054 \cdot 10^{-27}} \frac{(2 \cdot 8)^{3/2} \sqrt{1.6 \cdot 10^{-12}}}{5 \cdot 8} \right\} \approx \exp \{-0.77\} \approx 46\%$$

3.35. Электрон находится в одномерной потенциальной яме, изображенной на рисунке рис. 32. Энергия частицы равна $\mathcal{E} = 0,9999$ эВ, а высота потенциального барьера $U = 1$ эВ. Найти ширину ямы, если уровень с указанным значением энергии является первым. Оценить время жизни τ частицы в яме. Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера следует пренебречь.



$$1) \Psi''_I + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_I = 0 \Rightarrow \Psi_I = e^{ikx} + R e^{-ikx}, \quad K = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \text{но } \Psi_I(0) = 0 \Rightarrow \Psi_I = A \sin kx$$

$$\Psi''_{II} + \frac{2m}{\hbar^2} (U - E) \Psi_{II} = 0 \Rightarrow \Psi_{II} = C e^{-\alpha x} + D e^{\alpha x}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}} = \frac{1}{100} K = \frac{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 0.0001 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}}{1.054 \cdot 10^{-27}} = 5.1 \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$$

↑ отраженным пренебрегаем

2) Определим решение:

$$\Psi_I(a) = \Psi_{II}(a): \quad A \sin ka = C e^{-\alpha a} \Rightarrow \operatorname{tg} ka = -\frac{K}{\alpha}$$

$$\Psi'_I(a) = \Psi'_{II}(a): \quad K A \cos ka = -\alpha C e^{-\alpha a} \quad |a| = \frac{\operatorname{arctg}(\frac{K}{\alpha})}{K} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{E}{U-E}}\right)$$

$$a = \frac{1.054 \cdot 10^{-27}}{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}} \operatorname{arctg}(100) = 3 \text{ \AA}$$

$$3) D = \exp\{-2\alpha L\} \approx \exp\{-2 \cdot 5.1 \cdot 10^5 \cdot 299.3 \cdot 10^{-8}\} \approx 1.06 \cdot 10^{-4} = 0.0106 \%$$

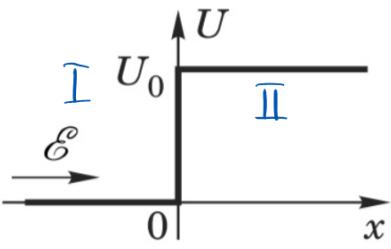
- вероятность прохождения ("прозрачность")

$$n = \frac{D}{a} = \frac{2E}{\hbar^2 m a^2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^{-8})^2} \approx 1.98 \cdot 10^{15} - \text{Число ударов об яму}$$

$$T \approx \frac{1}{nD} = \frac{1}{1.98 \cdot 10^{15} \cdot 1.06 \cdot 10^{-4}} \approx 4.7 \cdot 10^{-12} \text{ с} \quad - \text{ не симило, но порядок правильный}$$

$$3.35. \tau = \frac{1}{nD} \approx 1.2 \cdot 10^{-11} \text{ с, где } D \approx \exp(-598a\kappa) \approx 8.3 \cdot 10^{-5}, \kappa = \frac{\sqrt{2m(U-\mathcal{E})}}{\hbar} \approx 5.08 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}, a = 3 \text{ \AA}.$$

3.53. На одномерную прямоугольную потенциальную ступеньку высотой $U_0 > 0$, расположенную в точке $x = 0$, из области $x < 0$ падают микрочастицы с энергией $\mathcal{E} = U_0/4$ (рис. 37). На каком наименьшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Броиля) плотность вероятности обнаружить частицу будет максимальна и на каком — минимальна?



$$1) K_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{mU_0}}{\hbar}$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} = i\alpha = i\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{mU_0}}{\hbar} = \sqrt{3}iK_1$$

2) Можно воспользоваться формулами Френеля из оптики ($\theta = 0$)

$r = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}$	$t = \frac{2K_1}{K_1 + K_2}$	$R = r ^2$	$T = \frac{K_2}{K_1} t ^2$
-----------------------------------	------------------------------	-------------	-----------------------------

$$|r|^2 = r r^* = \frac{K_1 - i\alpha}{K_1 + i\alpha} \cdot \frac{K_1 + i\alpha}{K_1 - i\alpha} = 1 \Rightarrow \text{нормальное отражение}$$

моделирование
квантовой физики

$$r = \frac{K_1 - i\alpha}{K_1 + i\alpha} = e^{i\psi}, \quad \psi = -2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{K_1} = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\hbar}{1/\sqrt{2}} = -\frac{2\pi}{3}$$

$$3) |\Psi(x)| = e^{i\kappa x} + e^{i\psi} e^{-i\kappa x} = 2e^{i\frac{\psi}{2}} \left(\frac{e^{-\frac{i\psi}{2}} e^{i\kappa x} + e^{\frac{i\psi}{2}} e^{-i\kappa x}}{2} \right) = 2e^{i\frac{\psi}{2}} \cos(\kappa x - \frac{\psi}{2})$$

$$|\Psi(x)|^2 \propto \cos^2(\kappa x + \frac{\pi}{3})$$

$$4) X_{\max} = -\frac{\pi}{3\kappa} = -\frac{\lambda}{6} \quad (\kappa = \frac{2\pi}{\lambda})$$

$$X_{\min} = -\frac{5\pi}{6\kappa} = -\frac{5\lambda}{12}$$

3.53. $x_{\max} = -\lambda/6$, $x_{\min} = -5\lambda/12$, где λ — дебройлевская длина волны падающих микрочастиц.

3.56. Какая доля электронов с энергией $\mathcal{E} = 1$ эВ, падающих слева на прямоугольный несимметричный потенциальный барьер с параметрами $U_1 = \mathcal{E}$, $U_2 = 4U_1$ и шириной $l = 7,8 \cdot 10^{-8}$ см, сможет его преодолеть (рис. 40)?

$$1) K_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = K = \frac{\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}}{1.054 \cdot 10^{-34}} \approx 5 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}$$

$$\Psi''_{II} = 0 \Rightarrow \Psi_{II} = Ax + B$$

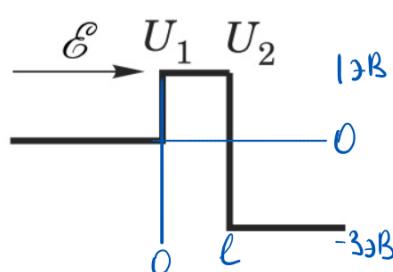


Рис. 40

$$K_2 = \frac{\sqrt{2m \cdot 4E}}{\hbar} = 2K$$

$$2) \quad \Psi_I(x) = e^{ik_1 x} + r e^{-ik_1 x} \quad \begin{cases} \Psi_I(0) = \Psi_{II}(0): & 1+r = B \\ \Psi'_I(0) = \Psi'_{II}(0): & ik_1 - rk_1 = A \end{cases}$$

$$\Psi_{II}(x) = Ax + B$$

$$\Psi_{III}(x) = t e^{ik_2 x}$$

$$\begin{cases} \Psi_{III}(l) = \Psi_{IV}(l): & Al + B = t e^{ik_2 l} \\ \Psi'_{III}(l) = \Psi'_{IV}(l): & A = i k_2 t e^{ik_2 l} \end{cases}$$

$$\text{Math: } B = t e^{ik_2 l} - Al = t e^{ik_2 l} (1 - ik_2 l)$$

$$ik_1(1-r) = ik_1 t e^{ik_2 l} \Rightarrow r = 1 - \frac{k_1}{k_2} t e^{ik_2 l}$$

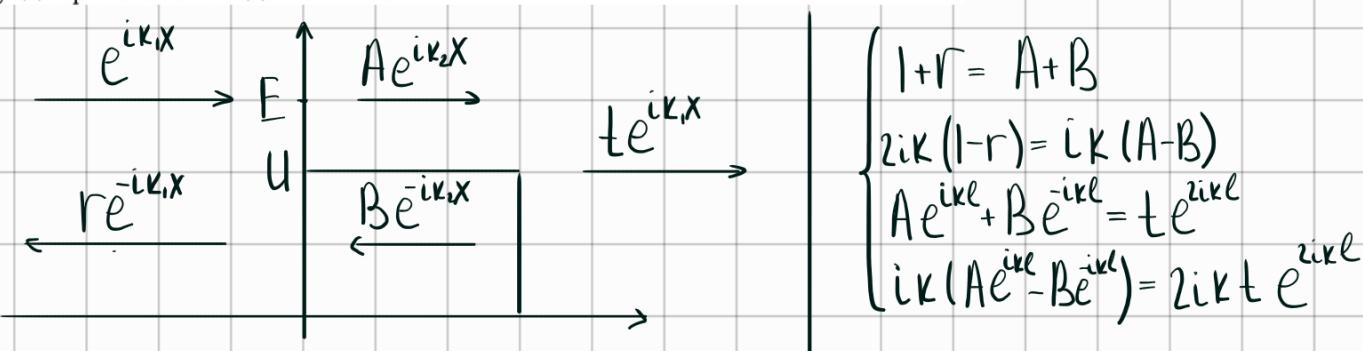
$$2 - \frac{k_1}{k_2} t e^{ik_2 l} = t e^{ik_2 l} (1 - ik_2 l) \Rightarrow t = \frac{2 e^{-ik_2 l}}{1 - ik_2 l + \frac{k_1}{k_2}}$$

$$t = \frac{2 i K e^{-ik_2 l}}{K_1 K_2 l + i (K_1 + K_2)}$$

$$T = \frac{K_2}{K_1} |t|^2 = \frac{K_2}{K_1} \frac{4 K_1 K_2}{K_1^2 K_2^2 l^2 + (K_1 + K_2)^2} = \frac{8}{9 + 4 K^2 l^2} = \frac{8}{9 + 4 (5.1 \cdot 10^7)^2 (7.8 \cdot 10^{-1})^2} \approx 0.11$$

3.56. Искомая доля равна коэффициенту прохождения барьера $D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2 + k_1^2 k_2^2 l^2} = \frac{8}{73} = 0.11$, где $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}} = 5.1 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}$; $k_2 = 2k_1$.

3.45. При прохождении нерелятивистской частицы с энергией \mathcal{E} над прямоугольным барьером высотой $U = (3/4)\mathcal{E}$ коэффициент отражения по мощности оказался равным $R = 9/25$. Определить минимально возможную ширину барьера в единицах соответствующей ему дебройлевской длины волны.



$$1) \quad K_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = 2K; \quad K_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} = K$$

$$2) \quad В общем случае \quad r \neq \sqrt{R}, \quad т.к. \quad R \in \mathbb{C}$$

В нашем случае аналог отражения от Sonee плотной среды.

Как известно, при этих сроках падающей и отр. волны равны \Rightarrow

$$\Rightarrow r \in \mathbb{R}; \quad r = \sqrt{R} = \frac{3}{5}$$

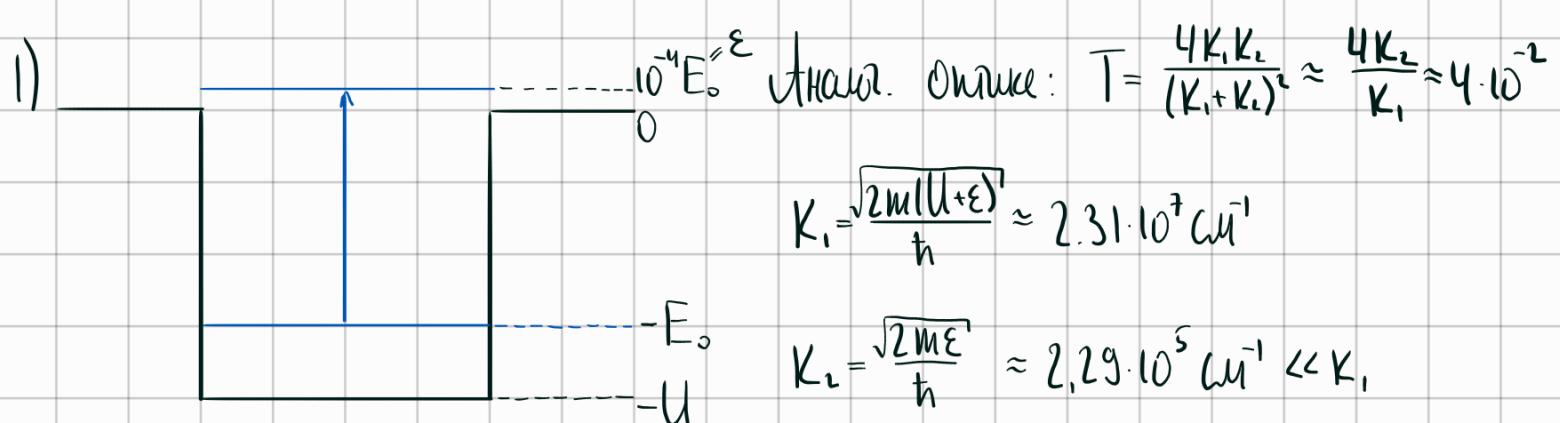
$$3) \begin{cases} 1.6 = A+B \\ 0.8 = A-B \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 1.2 \\ B &= 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.6 e^{ikl} + 0.4 e^{-ikl} &= t e^{ikl} \rightarrow 2.4 e^{ikl} = 3t e^{ikl} \rightarrow t = \frac{4}{5} e^{-ikl} \\ 1.6 e^{ikl} - 0.4 e^{-ikl} &= 2t e^{ikl} \rightarrow 1.2 e^{ikl} - 0.4 e^{-ikl} = 1.6 e^{ikl} \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{ikl} = -e^{-ikl} \\ e^{ikl} &= \pm i = e^{\frac{i\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$kl = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l_{\min} = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi\lambda}{2 \cdot 2\pi} = \frac{\lambda}{4}$$

3.45. $L_{\min} = \lambda/4$.

T.6. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $d = 1 \text{ \AA}$ в основном состоянии. Энергия ионизации электрона $E_0 = 20 \text{ эВ}$. Электрон поглощает фотон с энергией $1.0001E_0$, оценить время, которое электрон будет находиться над ямой. Процесс релаксации с испусканием фотона и возвратом в исходное состояние не рассматривать. Глубина ямы $U = 20.32 \text{ эВ}$. Сравнить уширение уровня с его энергией.

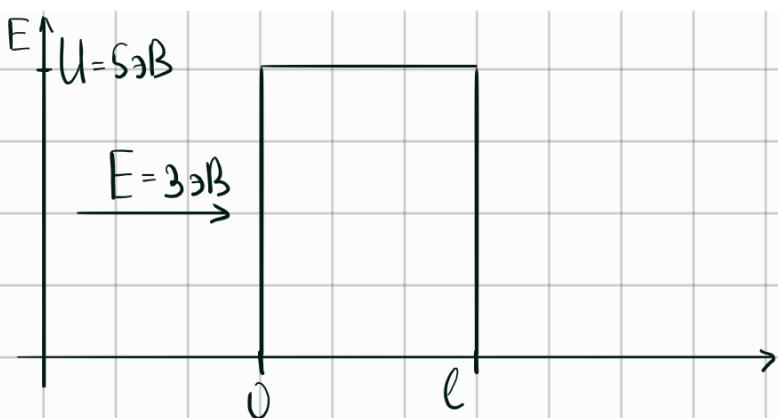


2) Частота удара: $\nu = \frac{V}{d} = \sqrt{\frac{2E}{md^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-14}}} = 2.65 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$

3) $T = \frac{1}{\nu T} = \frac{1}{2.65 \cdot 10^{15} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \approx 10^{-14} \text{ с}; \quad \delta E = \frac{\hbar}{T} \approx \frac{1.054 \cdot 10^{-4}}{10^{-14} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} = 0.066 \text{ эВ} \gg \epsilon$

Ответ: $\tau \approx 10^{-14} \text{ с}; \delta E = \hbar/\tau \approx 0.06 \text{ эВ} \gg 10^{-4} E_0 = 0.002 \text{ эВ}$

Т.7. Электрон с энергией $E = 3$ эВ проходит через прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 5$ эВ и шириной $l = 3$ Å. Определить, во сколько раз должна возрасти высота барьера, чтобы вероятность прохождения через барьер упала в 10 раз: а) при использовании приближенной формулы для проницаемости барьера; б) точной формулы для проницаемости прямоугольного барьера.



I 1) Приближение: $W = \exp(-2\chi l) = \exp(-2 \cdot 7.24 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{-8}) \approx 1.3 \cdot 10^{-2}$

$$\chi = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}}{1.054 \cdot 10^{-34}} \approx 7.24 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-1}$$

2) $\exp(-2\chi l) = 10 \exp(-2\chi^* l)$

$$\exp[-2(\chi^* - \chi)l] = \frac{1}{10} \Rightarrow \chi^* = \chi + \frac{\ln 10}{2l}$$

$$U^* = E + \left(\sqrt{U-E} + \frac{\ln 10}{2l} \cdot \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 = 3 + \left(\sqrt{1} + \frac{\ln 10 \cdot 1.054 \cdot 10^{-27}}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-1} \sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}} \cdot \sqrt{1.6 \cdot 10^{-19}}} \right) = 7.68 \text{ eV}$$

$\lambda = \frac{U^*}{U} = 1.536$

↖ не соблюдано

II Точная формула:
(учёт перегибаний от стенок барьера)

$$T = \left[1 + \frac{U^*}{4E(U-E)} \sinh^2(\chi l) \right]^{-1}$$

$$T \approx \left[1 + \frac{5^2}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot \sinh^2(3 \cdot 10^{-8} \cdot 7.24 \cdot 10^7) \right]^{-1} \approx 4.87 \cdot 10^{-2}$$

$$\left[1 + \frac{U^*}{4E(U-E)} \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{2m(U^*-E)}}{\hbar} l \right) \right]^{-1} = 4.87 \cdot 10^{-3} \xrightarrow{\text{Численно}} U^* = 7.70 \text{ eV}$$

↖ Не соблюдано

То есть приближенная формула оказалась достаточно точной

Ответ: а) в 1,54 раз ($U_x \approx 7,68$ эВ), б) в 1,70 раза ($U_x \approx 8,51$ эВ).