

Математика В 501-303

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10-16 мая)

I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 2; 12.

Ф.: 1104.

1. Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2 + 2y + 3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2 + y + z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

2. Найти все первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

a) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$; в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

С. §16: 6; 26.

- 3*. Дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x^5 = 0$ описывает колебания, период T которых зависит от начальных значений: $T = T(x(0); \dot{x}(0))$. Найти отношение $T(1, 1)/T(2, 2)$.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 1; 16; 15; 79; 84.

1. Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

- а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;
б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;
в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

- 5*. Найти поверхность, проходящую через кривую $y = x, z = 2y + y^3$ и обладающую свойством, что любая касательная плоскость пересекает ось Ох в точке с абсциссой, вдвое меньшей абсциссы точки касания.

III. Вариационное исчисление

С. §19: 12; 33; 76; 102.

С. §20.1: 7; 12; 14.

С. §20.2: 1.

С. §20.3: 7.

С. §21: 7.

6. Исследовать на экстремум при всех значениях вещественного параметра a :

а) $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - ay^2) dx, y(0) = 0, y(\pi/2) = 0$;

б)* $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - ay^2) dx, y(0) = 0$.

IV. Повторение

С. §6: 25.

С. §7: 56.

С. §8: 126.

С. §9: 31.

С. §11: 55.

С. §13: 19.

С. §17: 84.

С. §20.1: 7.

I. Первые интегралы и их использование для решений автоматических систем

сн14

№2

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия $(0, 0)$ для систем (1-11):

$$2. \begin{cases} \dot{x} = y + ax\sqrt{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = x + ay\sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

$$\text{при } a=0: \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \text{ сего}$$

при $a \neq 0$: переходим к полярным:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = r \sin \varphi + a r \cos \varphi \cdot r \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = r \cos \varphi + a r \sin \varphi \cdot r \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi}r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ar^2 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi}r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ar^2 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi}r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin 2\varphi \\ 0 & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ar^2 \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = ar^2 + r \sin 2\varphi \\ \dot{\varphi} = \cos 2\varphi \end{cases}$$

в окрестности $(0,0)$: $\begin{cases} \dot{r} \sim r \sin \varphi \\ \dot{\varphi} = \omega \varphi \end{cases}$, система не зависит от параметра

→ На система ведёт себя как сегно.

2. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a < 0$ спирали по часовой стрелке закручиваются вокруг $(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$, а при $a > 0$ они раскручиваются от $(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$.

Ось неправильный. Стабильность симметрии $\propto \sqrt{3}$.

$\sqrt{12}$

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для систем (12–21):

$$12. \begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2 - 2), \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2 - 2). \end{cases}$$

при $a=0$: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \\ \lambda_{1,2} = \pm i \end{cases} \Rightarrow$ центр

при $a \neq 0$: $\begin{cases} \dot{x} = y + ax(x^2 + y^2 - 2) \\ \dot{y} = -x + ay(x^2 + y^2 - 2) \end{cases} \Rightarrow$ центр

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} = r \dot{\varphi} \sin \varphi + a r \cos \varphi (r^2 - 2) \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} = -r \cos \varphi + a r \sin \varphi (r^2 - 2) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ar(r^2 - 2) \\ r \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ar(r^2 - 2) \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = ar(r^2 - 2) \\ \dot{\varphi} = -1 \end{cases}$$

$\dot{\varphi} = -1 \Rightarrow$ движение по часовой стрелке (не зависит от a)

Определение. Предельным циклом системы (1) называется такая замкнутая траектория (1) в области Ω , которая изолирована от всех остальных замкнутых траекторий системы (1) в области Ω .

а) устойчивый (притягивающий) предельный цикл, где траектории навиваются на предельный цикл с обеих сторон при $t \rightarrow +\infty$ (см. пример 3);

б) неустойчивый (отталкивающий) предельный цикл, где траектории — спирали удаляются от предельного цикла с обеих сторон при $t \rightarrow +\infty$;

в) полуустойчивый предельный цикл, где траектории с одной стороны навиваются на предельный цикл и удаляются от него с другой стороны при $t \rightarrow +\infty$.

$$\dot{r} = ar(r^2 - 2) \Rightarrow r=2: \dot{r}=0 \Rightarrow r=\text{const} \quad (\text{окружка траектории})$$

при $a > 0$: при $t \rightarrow +\infty$ при $r < 2, r \rightarrow 0$ при $r > 2, r \rightarrow +\infty \Rightarrow$ **устойчивый предельный цикл**

при $a < 0$: при $t \rightarrow +\infty$ при $r < 2, r \rightarrow 2$ при $r > 2, r \rightarrow 2 \Rightarrow$ **устойчивый предельный цикл**

12. $(0,0)$ — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ траекториями являются спирали с направлением движения по часовой стрелке при $t \rightarrow +\infty$. Окружность $x^2 + y^2 = 2$ — устойчивый предельный цикл при $a < 0$ и неустойчивый предельный цикл при $a > 0$.

Для того чтобы непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$, $x \in G$, была первым интегралом системы $\dot{x} = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная в силу системы $\dot{u}(x) = (\text{grad } u(x), f(x)) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ в области G .

Первые интегралы $u_1(x), \dots, u_k(x)$, $1 \leq k < n$, автономной системы называются независимыми в области $G_0 \subseteq G$, если ранг матрицы Якоби

$$\left\| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \right\|, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, n},$$

равен k для всех точек $x \in G_0$.

Реш:

1164

1164. Проверить, являются ли независимыми первые интегралы $\frac{x+y}{z+x} = C_1$, $\frac{z-y}{x+y} = C_2$ системы

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z-x}{(x+z)^2} & \frac{1}{x+z} & -\frac{x+y}{(x+z)^2} \\ \frac{y-z}{(x+y)^2} & -\frac{x+z}{(x+y)^2} & \frac{1}{x+y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z+x \\ 1 \\ x+y \end{pmatrix}^2 \sim \begin{pmatrix} z-x & z+x & -(x+y) \\ y-z & -(x+z) & x+y \end{pmatrix}$$

$$\checkmark \begin{pmatrix} z-x & z+x & -(x+yz) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg } Y = 1 < 2 \Rightarrow \text{зависимы}$$

. 1164. Зависимы.

$\sqrt{T_1}$

1. Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2 + 2y + 3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2 + y + z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

$$u = \text{первый интеграл} \Leftrightarrow \dot{u} = [-x(2xz^2 + 2y + 3z)] \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (xz^3) \frac{\partial u}{\partial y} + [z(xz^2 + y + z)] \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2xz$$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= [-x(2xz^2 + 2y + 3z)] \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (xz^3) \frac{\partial u}{\partial y} + [z(xz^2 + y + z)] \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \\ &= [-x(2xz^2 + 2y + 3z)] z^2 + xz^3 + 2(xz^2 + y + z) 2xz = 0 \\ &= xz^2 [-2xz^2 - 2y - 3z + z + 2xz^2 + 2y + 2z] = 0 \\ &Xz^2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow u = y + xz^2 = \text{первый интеграл} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{y} = (u-y)z \\ \dot{z} = z(u+z) \end{cases} \Rightarrow dy \cdot (u+z) = dz \cdot (u-y)$$

$$\frac{dy}{u-y} = \frac{dz}{u+z}$$

$$-\ln|u-y| = \ln|u+z| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{u-y} = \frac{1}{v} (u+z) \Rightarrow v = (u+z)(u-y)$$

$$v = xz^2(2+y+xz^2)$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} z^2 & 1 & 2xz \\ 2x^4 + z^3 + yz^2 & xz^2 & 3z^2x + 2xyz + 4z^3x^2 \end{pmatrix}, \text{rg } Y = 2 \Rightarrow u \text{ и } v \text{ независимы}$$

NT2

2. Найти все первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

a) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$; в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

a) $\ddot{x} + \sin x = 0 \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$

$$y dy + \sin x dx = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \cos x = C \quad \begin{array}{l} \text{первый интеграл} \\ (\text{полная энергия}) \\ \text{математика} \end{array}$$

тогда $M_k (\pi k, 0), k \in \mathbb{Z}$ — положения равновесия

при $\exists k$ M_k = центр, при чётных k

M_k = седло, при неч. k

$$\ddot{x}^2 = 2(\cos x + C)$$

при $C < -1 \Rightarrow (2\cos x + C) < 0$, что невозможно

$$\Rightarrow C \geq -1$$

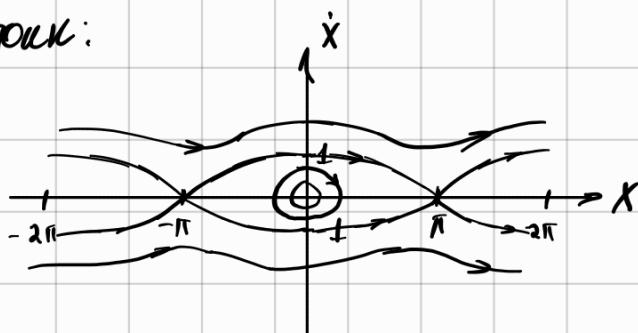
при $C \in [-1, 1] \rightarrow$ разовые траектории замкнутые

при $C = 1 \rightarrow$ две сепаратрисы

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2(\cos x + 1)} = \pm 2 \cos \frac{x}{2}$$

при $C > 1 \rightarrow$ разовые траектории не пересекают самопресек.

График:



$$\text{d}) \begin{cases} \ddot{x} - x + x^2 = 0 \\ \text{нсм} y = \dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ y = x - x^2 \end{cases}$$

$$(x^2 - x)dx + ydy = 0$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c \quad \text{неприм. нач. умножен}$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 2c}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ y = x - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} (0,0) \cup (1,0) \\ \text{анал. метод} \end{array} \quad \begin{array}{l} (b(0,0) - \text{сгнно}) \\ \text{анал. метод} \end{array}$$

при $C=0$: $y = \pm \sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x^3}$ проходит через $(0,0) \Rightarrow$ седло-точка
 (находится на оси сим.)
 $x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow$ седло-точка
 седло-точка $(0,0) \cup (\frac{3}{2}, 0)$

б) метод $(1,0)$: $C = -\frac{1}{6}$ гармоническое траектории вокруг центра

$C > 0$ неограниченное траектории

$$b) \begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ y = x^2 + y^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2 - 1)dx - 2xydy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[x^2 + y^2 - 1] = 2y \quad \text{нсм} \mu = \mu(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[-2xy] = -2y$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x^2 + y^2 - 1)] = 2y\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[-2xy\mu] = -2y\mu - 2xy \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$2y\mu = -2y\mu - 2xy \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$4y\mu = -2xy \frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow 2\mu = -x \frac{\partial \mu}{\partial x} \Rightarrow -2 \frac{\partial \mu}{x} = \frac{\partial \mu}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$$

$$d\left(x - \frac{y^2}{x} + \frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{y^2}{x} + \frac{1}{x} = C$$

интегральные кривые

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-1, 0) & (1, 0) \\ (0, -1) & (0, 1) \end{matrix}$$

$$1) \begin{cases} u = x \pm 1 \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \mp 1 \\ y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = 2(u \mp 1)v \\ \dot{v} = (u \mp 1)^2 + v^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \mp 2v \\ \dot{v} = \mp 2u \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$$

седло

бутылка

$(-1, 0) \cup (1, 0)$

$$2) \begin{cases} u = x \\ v = y \mp 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v \mp 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = 2u(v \mp 1) \\ \dot{v} = u^2 + (v \mp 1)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = \mp 2u \\ \dot{v} = \pm 2v \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mp 2 & 0 \\ 0 & \mp 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mp 2 \text{ up 2}$$

бутылка $(0, 1)$ $\lambda_{1,2} = 2$ up 2

нест. узел

бутылка $(0, -1)$ $\lambda_{1,2} = -2$ up 2

седло. седло

$$(-1, 0) \cup (1, 0) - \text{седло} \Rightarrow C = 2 \text{ up 2}$$

сепараторы

$(0, 1)$ - нестационарная точка, от которой расходятся траектории

$(0, -1)$ - стационарная точка, к ней расходятся траектории

$\mathcal{C} \circ n 16 \quad 6.26$

Найдя первый интеграл, решить системы (1-17) в указанных областях:

N_6

6. $\begin{cases} \dot{x} = x - xy, \\ \dot{y} = -x + xy, \quad (x > 0, \quad x + y > 1). \end{cases}$

$$\dot{x} + \dot{y} = (x - xy) + (-x + xy) = 0$$

$$(x + y)' = 0$$

$$\begin{aligned} x + y &= C_1 > 1 \\ y &= -x + C_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x(1 + x - C_1) \\ y = -x + C_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{x(x+1-C_1)} = dt$$

$$\frac{1}{C_1-1} \int \left[\frac{1}{x+1-C_1} - \frac{1}{x} \right] dx = t + C_2$$

$$\frac{1}{C_1-1} \left[\ln|x+1-C_1| - \ln|x| \right] = t + C_2 \Rightarrow \ln \left| \frac{x+1-C_1}{x} \right| = (t+C_2)(C_1-1) = t(C_1-1) + C_2$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1-C_1}{x} = \exp[(C_1-1)t] \cdot C_2 \Rightarrow x = \frac{(1-C_1)}{\exp[(C_1-1)t] \cdot C_2 - 1}$$

$$\Rightarrow y = C_1 - x = C_1 - \frac{(1-C_1)}{\exp[(C_1-1)t] \cdot C_2 - 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-C_1}{\exp[(C_1-1)t] \cdot C_2 - 1} \\ y = C_1 - \frac{1-C_1}{\exp[(C_1-1)t] \cdot C_2 - 1} \end{cases}$$

6. $x = \frac{C_1-1}{(C_1-1)C_2e^{(C_1-1)t} + 1}, \quad y = C_1 - \frac{C_1-1}{(C_1-1)C_2e^{(C_1-1)t} + 1}.$?

Найдя два независимых первых интеграла системы, решить системы
(18-26) в указанных областях:

№26

$$26. \begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = 2x^3 - xy - z, \\ \dot{z} = xz - 2x^4, \quad (x > 0). \end{cases}$$

$$(2x^4 - xz)dx + x^2dz = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (2x^4 - xz) = -x^3 \neq \frac{\partial}{\partial x} (x^2) = 2x \Rightarrow$$

\Rightarrow умножим на $\mu = \mu(x)$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\mu(2x^4 - xz) \right] = -x\mu \Rightarrow -x\mu = x^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2x\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu x^2 \right] = x^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2\mu x \quad -3\mu = x \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$-3 \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow (2x^4 - xz)dx + x^2dz = 0 / \frac{1}{x^3} \text{ nonn quo.}$$

$$(2x - \frac{z}{x^2})dx + \frac{dz}{x} = 0$$

$$d\left(x^2 + \frac{z}{x}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{z}{x} = C_1 \text{ первый интеграл}$$

$$\Rightarrow z = (C_1 - x^2)x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = 3x^3 - xy - C_1 x \\ \dot{z} = (C_1 - x^2)x \end{cases}$$

$$(3x^3 - xy - C_1 x)dx - x^2 dy = 0$$

$$(3x^2 - y - C_1)dx - xdy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - y - C_1) = -1$$

$\parallel \qquad \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x} (-x) = -1$$

$$\Rightarrow d(x^3 - xy - C_1 x) = 0 \Rightarrow x^3 - xy - C_1 x = C_2 \text{ nebbun
unmerpan}$$

$$y = \frac{C_2 + C_1 x - x^3}{-x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ y = \frac{C_2 + C_1 x - x^3}{-x} \\ \dot{z} = (C_1 - x^2)x \end{cases}$$

$$\dot{x} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + C_3$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{C_3 - t}$$

$$\Rightarrow y = C_2(C_3 - t) - C_1 + \frac{1}{(C_3 - t)^2}$$

$$z = \frac{C_1}{C_3 - t} - \frac{1}{(C_3 - t)^3}$$

$$26. x = \frac{1}{C_3 - t}, y = C_1(C_3 - t) + C_2 + \frac{1}{(C_3 - t)^2}, z = \frac{-C_2}{C_3 - t} - \frac{1}{(C_3 - t)^3}.$$

Ondern cobnagaem ngn $C_1 \rightarrow -C_2$
 $C_2 \rightarrow C_1$

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

C n 17:

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием (1–100):

M₄.

4. $(x^2 + z^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2(xy - xz^3) \frac{\partial u}{\partial y} + 2xz \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{y}{z} - \frac{z^2}{2}$ при $x^2 - z^2 = 2$.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + z^2 \\ \dot{y} = 2(xy - xz^3) \\ \dot{z} = 2xz \end{cases}$$

$$2(xz^3 - xy)dz + 2xzdy = 0 \quad | : 2x$$

$$(z^3 - y)dz + zdy = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(z^3 - y) &= -1 \\ \frac{\partial}{\partial z}(z) &= 1 \end{aligned} \quad * \quad \Rightarrow \text{Учтено что на } \mu = \mu(z)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} [\mu(z^3 - y)] &= -\mu \\ \frac{\partial}{\partial z} [\mu z] &= z \cdot \frac{\partial \mu}{\partial z} + \mu \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{aligned} -\mu &= z \frac{\partial \mu}{\partial z} + \mu \\ \mu &= \frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (z^3 - y)dz + zdy = 0 \quad | \cdot \frac{1}{z^2} \quad \text{нормаля}$$

$$\left(z - \frac{y}{z^2} \right)dz + \frac{1}{z}dy = 0 \Rightarrow d\left(\frac{1}{2}z^2 + \frac{y}{z}\right) = 0$$

$$\frac{z^2}{2} + \frac{y}{z} = u_1 \quad \text{первый интеграл}$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{z^2}{2} + \frac{y}{2} \\ (x+z)^0 = (x+z)^2 \Rightarrow \frac{d(x+z)}{(x+z)^2} = dt \\ (x-z)^0 = (x-z)^2 \end{cases} \quad -\frac{1}{x+z} = t + C_{2,3} \Rightarrow \frac{1}{x-z} - \frac{1}{x+z} = u_2$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x^2-z^2} = u_2 \Rightarrow u = F(u_1, u_2) = F\left(\frac{z^2}{2} + \frac{y}{2}, \frac{z}{x^2-z^2}\right)$$

Задача №16: $u = \frac{y}{z} - \frac{z^2}{2}$

$$\begin{cases} x^2 - z^2 = 2 \\ u_1 = \frac{z^2}{2} + \frac{y}{z} \\ u_2 = \frac{z}{x^2-z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = u_1 - z^2 \\ z = 2u_2 \end{cases} \Rightarrow u = u_1 - 4u_2^2$$

$$\Rightarrow u = \frac{y}{z} + \frac{z^2}{2} - \frac{4z^2}{(z^2-x^2)^2}$$

4. $u = F\left(\frac{z^2-x^2}{z}, \frac{y}{z} + \frac{z^2}{2}\right), u = \frac{y}{z} + \frac{z^2}{2} - \frac{4z^2}{(z^2-x^2)^2}.$

№16

16. $(z-x+3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x-3y)\frac{\partial u}{\partial y} - 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{4y}{z}$ при $x = 3y$.

$$\begin{cases} \dot{x} = z-x+3y \\ \dot{y} = z+x-3y \\ \dot{z} = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}+\dot{y} = 2z \\ \dot{y} = z+x-3y \\ \dot{z} = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y+z)^0 = 0 \\ \dot{y} = z+x-3y \\ \dot{z} = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = x+y+z \\ \dot{y} = z+x-3y \\ \dot{z} = -2z \end{cases}$$

$$x = u_1 - y - z \Rightarrow \begin{cases} u_1 = x+y+z \\ y = -4y+u_1 \\ \dot{z} = -2z \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-4y + u_1)dz + 2zdy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-4y + u_1) = -4$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(2z) = 2 \quad \rightarrow \text{установка на } \mu = \mu(z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\mu(-4y + u_1) \right] = -4\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu z \right] = 2z \frac{\partial \mu}{\partial z} + 2\mu \stackrel{||}{\Rightarrow} -4\mu = 2\mu + 2z \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

$$-3 \frac{d\mu}{z} = \frac{\partial \mu}{\mu}$$

$$\mu = \frac{1}{z^3}$$

$$\Rightarrow (-4y + u_1)dz + 2zdy = 0 \quad | \cdot \frac{1}{z^3} \quad \text{nonn. gogo}$$

$$\left(\frac{-4y + u_1}{z^3} \right) dz + \frac{2}{z^2} dy = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = -\frac{4y + u_1}{z^3} \Rightarrow u_2 = \frac{2y - \frac{u_1}{z^2}}{z^2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{2}{z^2} = \frac{2}{z^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{4y - u_1}{z^2}$$

$$\Rightarrow u = F(u_1, u_2) = F(x + y + z, \frac{3y - x - z}{z^2})$$

Задача 2

$$\begin{cases} u = \frac{4y}{z} \\ x = 3y \\ u_1 = x + y + z \\ u_2 = \frac{3y - x - z}{2z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{4y}{z} \\ x = 3y \\ u_1 = 4y + z \\ u_2 = \frac{4y - u_1}{2z^2} = -\frac{1}{2z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2u_2} \\ 4y = u_1 - z = u_1 + \frac{1}{2u_2} \\ \Rightarrow u = u_1 + \frac{1}{2u_2} \\ = -2u_1 u_2 - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = \frac{(x-y+z)(x+z-3y)}{z^2} - 1$$

16. $u = F[x+y+z, \frac{z^2}{x-3y+z}], u = \frac{(x+y+z)(x-3y+z)}{z^2} - 1.$

Однако обнаружим $u_2 \rightarrow -\frac{1}{2u_2}$
при замене

№5

45. $xz \operatorname{tg} z \frac{\partial u}{\partial x} + (y-x) \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \cos z - \sin z$ при $x = yz$
 $\left(0 < z < \frac{\pi}{2}\right).$

$$\begin{cases} x = xz \operatorname{tg} z \\ y = y - x \\ z = -z \end{cases}$$

$$xz \operatorname{tg} z \cdot dz + z \cdot dx = 0 \quad / \cdot \frac{1}{x^2 z} \cdot \cos z$$

$$\frac{\sin z dz}{x} + \frac{\cos z}{x^2} dx = 0$$

$$d\left(-\frac{\cos z}{x}\right) = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{\cos z}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\cos z}{u_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{\cos z}{x} \\ y = y - \frac{\cos z}{u_1} \\ z = -z \end{cases}$$

$$\left(y - \frac{\cos z}{u_1}\right) dz + z dy = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(y - \frac{\cos z}{u_1}\right) &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial z} (1) &= 1 \quad // \quad \rightarrow \text{равнение} \end{aligned}$$

$$d\left(yz - \frac{\sin z}{u_1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow u_2 = yz - \frac{\sin z}{u_1} = yz - x \operatorname{tg} z$$

$$\Rightarrow u = F(u_1, u_2) = F\left(\frac{\cos z}{x}, yz - x \operatorname{tg} z\right)$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} u = \cos z - \sin z \\ x = yz \\ u_1 = \frac{\cos z}{x} \\ u_2 = yz - x \operatorname{tg} z \end{cases} \Rightarrow u_2 = x(1 - \operatorname{tg} z) \Rightarrow u = u_1 u_2$$

$u = \frac{y^2}{x} \cos z - \sin z$

45. $u = F\left(\frac{x}{\cos z}, yz - x \operatorname{tg} z\right), u = \frac{yz}{x} \cdot \cos z - \sin z.$

$u_1 \rightarrow \frac{1}{u_1}$

№ 79

79. $2xy \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - y^2 - 2xz) \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{y}{x} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{1}{2} - y^2$ при $y^2 + xz = 1.$

$$\begin{cases} x = 2xy \\ y = 1 - y^2 - 2xz \Rightarrow 2xy dz + \frac{y}{x} dx = 0 \\ z = -y/x \end{cases} \quad 2x dz + \frac{1}{x} dx = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(2x) &= 2 \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x}\right) &= 0 \Rightarrow \text{Умн. на } \mu = \mu(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu x \right] &= 2x \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2\mu \quad \Rightarrow 2x \frac{\partial \mu}{\partial x} + 2\mu = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\mu}{x} \right] &= 0 \quad " \quad \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{2x}{x} = -2 \Rightarrow \mu = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$2x dz + \frac{1}{x} dx = 0 \quad \left| \frac{1}{x} \right. \text{ nonn. gup}$$

$$\begin{aligned} 2dz + \frac{1}{x^2} dx &= 0 \Rightarrow d\left(2z - \frac{1}{x}\right) = 0 \\ \Rightarrow u_1 &= 2z - \frac{1}{x} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2z - \frac{1}{x} \\ x = 2xy \\ y = 1 - y^2 - x\left(u_1 + \frac{1}{x}\right) \end{cases} &\Rightarrow 2xy dy + (y^2 + u_1 x) dx = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2y &= \\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + u_1 x) = 2y &= \Rightarrow \text{nonn. gup} \end{aligned}$$

$$d\left(xy^2 + \frac{4x^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow u_2 = xy^2 + \frac{4x^2}{2} = xy^2 + \frac{x^2}{2}(2z - \frac{1}{x}) \\ = xy^2 + x^2 z - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow u = f\left(2z - \frac{1}{x}, xy^2 + x^2 z - \frac{x}{2}\right)$$

Zagara konu:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} - y^2 \\ y^2 + xz = 1 \\ u_1 = 2z - \frac{1}{x} \\ u_2 = xy^2 + x^2 z - \frac{x}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{xu_1 - 1}{2} = xz \\ y^2 + xz = 1 \\ u_2 = xy^2 + x^2 z - \frac{x}{2} \\ u = \frac{1}{2} - y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2z - \frac{1}{x} \\ y^2 = \frac{3}{2} - \frac{xu_1}{2} \\ u_2 = \frac{x}{2} \\ u = \frac{xu_1}{2} - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = u_1 u_2 - 1 = \left(2z - \frac{1}{x}\right)\left(xy^2 + x^2 z - \frac{x}{2}\right) - 1$$

$$u = (2xz - 1)\left(y^2 + xz - \frac{1}{2}\right) - 1$$

$$79. u = F\left(\frac{1}{x} - 2z, xy^2 - \frac{x}{2} + x^2 z\right), u = (2xz - 1)\left(y^2 - \frac{1}{2} + xz\right).$$

$$\uparrow \\ u_1 \rightarrow -u_1$$

№ 85

$$85. (y-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial y} + 2yz^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x^2 z \text{ при } x+y=0.$$

$$\begin{cases} x = y - x \\ y = x + y \\ z = 2y^2 \end{cases} \quad (x-y)dx + (x+y)dy = 0$$

$$\frac{dx}{dy}(x+y) = 1 \quad \Rightarrow \text{nonn gaga}$$

$$\frac{dx}{dy}(x-y) = 1$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2\right) = 0 \Rightarrow x^2 + 2xy - y^2 = u,$$

$$\begin{cases} u_1 = x^2 + 2xy - y^2 \\ (x+y)' = 2y \\ z = 2y z^2 \end{cases}$$

$$2yz^2 \cdot d(x+y) - 2y dz = 0 \quad | \cdot \frac{1}{2y \cdot z^2}$$

$$d(x+y) - \frac{1}{z^2} \cdot dz = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial(x+y)}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \text{нормаль гао}$$

$$\Rightarrow d\left(x+y + \frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow u_2 = x+y + \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow u = f\left(x^2 + 2xy - y^2, x+y + \frac{1}{z}\right)$$

Задача 1:

$$\begin{cases} u = x^2 z \\ x+y=0 \\ u_1 = x^2 + 2xy - y^2 \\ u_2 = x+y + \frac{1}{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = x^2 z \\ x+y=0 \\ u_1 = -2y^2 \\ u_2 = \frac{1}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 = -\frac{u_1}{2} \\ z = \frac{1}{u_2} \\ u = -\frac{u_1}{2u_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = -\frac{1}{2} \frac{(x^2 + 2xy - y^2)}{\left(x+y+\frac{1}{z}\right)}$$

$$85. u = F\left(x^2 + 2xy - y^2, x+y + \frac{1}{z}\right), u = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{2(x+y + \frac{1}{z})}.$$

WT4

4. Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

- а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;
- б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;
- в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow 3dx - 2dy = 0$$

$$d(3x - 2y) = 0$$

$$u_1 = 3x - 2y$$

$$\Rightarrow u = f(3x - 2y)$$

$$\begin{cases} u = 10 \\ 3x - 2y = 5 \\ u_1 = 3x - 2y \end{cases} \Rightarrow u(x, y) = 10$$

$$\delta) \begin{cases} u = e^x \\ 3x - 2y = 5 \\ u_1 = 3x - 2y \end{cases} \quad u = f(u_1) = \text{const}$$

бесконечное множество $3x - 2y = 5$

представим

$$\begin{cases} (1, -1) \\ (2, \frac{1}{2}) \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = e \\ u = e^2 \\ u = \text{const} \end{cases}$$

бесконечное множество $3x - 2y = 5$

Решение Коши не существует.

$$b) \begin{cases} u = \sin y \\ x = 0 \\ u_1 = 3x - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{u_1}{2} \\ u = \sin y \end{cases} \Rightarrow u = \sin\left(-\frac{u_1}{2}\right)$$

$$u = \sin\left(\frac{2y - 3x}{2}\right)$$

Решить простейшую вариационную задачу (1–90):

III Вариационное исчисление

В пространстве непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $C[a, b]$ (k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций $C^k[a, b]$) с нормой $\|y(x)\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|$ ($\|y(x)\|_{C^k[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| + \sum_{i=1}^k \max_{x \in [a, b]} |y^{(i)}(x)|$) рассмотрим функционал $J[y(x)]$.

Например, определенный интеграл

$$J(y) = \int_a^b y(x) dx,$$

на множестве функций

$$M = \{y \in C^k[a, b] \mid y(a) = A, y(b) = B\} -$$

функционал заданный на множестве M в пространстве $C^k[a, b]$.

В пространствах $C[a, b]$ и $C^k[a, b]$ введем расстояние между 2 элементами

$$\varrho_{C[a, b]}(y_1, y_2) = \max_{x \in [a, b]} |y_1(x) - y_2(x)|,$$

$$\varrho_{C^k[a, b]}(y_1, y_2) = \max_{x \in [a, b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \sum_{i=1}^k \max_{x \in [a, b]} |y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x)|.$$

Пусть $F(x, y, p)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b] \times \mathbb{R}^2$.

$$J(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx, \quad (1)$$

на множестве $C^1[a, b]$ таких функций, что

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \quad (2)$$

Будем называть функции y , удовлетворяющие условие (2), допустимыми.

Определение 1 $\tilde{y}(x)$ дает слабый локальный минимум функционала (1) если $\exists \varepsilon > 0$ такое что $\forall y(x) \in M : \varrho_{C^1[a, b]}(\tilde{y}(x), y(x)) < \varepsilon$ выполняется неравенство $J(y) \geq J(\tilde{y})$.

Аналогично определяется слабый локальный максимум.

Определение 2 Задача отыскания слабого локального экстремума функционала (1) называется простейшей задачей вариационного исчисления.

Рассмотрим семейство функций $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, где $\eta(x) \in C^1[a, b]$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ (такие функции называются допустимым приращением/вариацией). Отметим, что любая функция данного семейства является допустимой. При фиксированных $y(x)$ и $\eta(x)$ рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha) = J(y + \alpha\eta) = \int_a^b F[x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)] dx.$$

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx.$$

Определение 3 $\frac{d}{d\alpha} J[y(x) + \alpha\eta(x)]|_{\alpha=0}$ – первая вариация функционала $J[y]$, обозначается $\delta J[y, \eta(x)]$.

$$\delta J[y, \eta(x)] = \int_a^b \left(\frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F[x, y(x), y'(x)]}{\partial y'} \eta'(x) \right) dx.$$

Теорема 1 Пусть $F(x, y, p)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b] \times \mathbb{R}^2$. Если дважды непрерывная функция $\tilde{y}(x)$ $\delta J[y, \eta(x)]$ является решением простейшей вариационной задачи, то она удовлетворяет условию Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

Определение 4 Любое решение уравнения Эйлера называется экстремальной функционала. Всякая экстремаль, которая является допустимой функцией, называется допустимой экстремальной.

$$\int_a^b \eta^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{4} \int_a^b \eta'^2(x) dx.$$

- Нран: 1) Неган рең үп-л әңгепа $\hat{y}(x, c_1, c_2)$
 2) Народжан c_1, c_2 үз нае. үчн.
 3) Проверим

Тәсімдең сияғы:

- 1) $F = f(x, y)$ мән көрсеткіштің, м.к. \hat{y} не мондем жабысқыш
бірназың
- 2) $F = P(x, y) + Q(x, y)y'$, $P, Q \in$ көрпегінде
кемпен көрсөн $Pdx + Qdy$ не иштесін айдаң
м.к. const
- 3) $f = F(x, y')$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f(x, y')}{\partial y'} = 0, \text{ м.к. } \frac{\partial f(x, y')}{\partial y'} = C$$

$$4) f = F(y, y')$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0 \quad | \cdot y' \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

$$f - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

C н 19:

y_{12}

12. $J(y) = \int_1^2 \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y \ln x}{x} \right] dx, y(1) = 0, y(2) = 1 - \ln 2.$

$$F = xy'^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y \ln x}{x}$$

$$1) \text{ Үп. әңгепа: } \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2y}{x} + \frac{2 \ln x}{x} \right) - \frac{d}{dx} (2xy') = 0$$

$$\frac{2y}{x} + \frac{2 \ln x}{x} - 2y' - 2xy'' = 0$$

$$xy'' + y' - \frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\text{Оғынап: } xy'' + y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{2-рекур } y_0 = \frac{1}{x},$$

$$\Rightarrow W[y_0, y] = C_1 \exp \left[- \int \frac{q}{p} dx \right]$$

$$\frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = C_1 \exp \left[- \int \frac{1}{x} dx \right] = C_1 \frac{1}{x} \quad | : \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{y}{x} \right)' = (xy)' = C_1 x \Rightarrow xy = C_1 x^2 + C_2$$

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

$$xy'' + y' - \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

Заменим \$u\$, имея \$y_0 = -\ln x\$ получим

$$\Rightarrow y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\hat{y} = C_1 x + C_3 \cdot \frac{1}{x} - \ln x$$

$$2) \begin{cases} y(1)=0 \\ y(2)=1-\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ 2C_1 + \frac{1}{2}C_3 - \ln 2 = 1 - \ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ 2C_1 + \frac{1}{2}C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = -\frac{2}{3} \\ C_1 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{x} \right) - \ln x \quad - \text{гомогенное компонент}$$

$$3) J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}] = \int_1^2 \left[x \left(\hat{y}' + h' \right)^2 + \frac{(\hat{y} + h)^2}{x} + \frac{2(\hat{y} + h) \ln x}{x} - x(\hat{y}')^2 - \frac{\hat{y}^2}{x} - \frac{2\hat{y} \ln x}{x} \right] dx$$

$$= \int_1^2 \left[2x\hat{y}'h' + xh'^2 + \frac{2\hat{y}h + h^2}{x} + \frac{2h \ln x}{x} \right] dx \quad (\exists)$$

$$\delta J[\hat{y}, h] = \int_a^b \left(\frac{2\hat{y}}{x} + \frac{2\ln x}{x} \right) h + (2x\hat{y}')h' \] dx = 0$$

$$\exists \int_1^2 \left[2x\hat{y}'h' + \frac{x\hat{y}h}{x} + \frac{2\ln x h}{x} \right] + \int_1^2 \left[xh'^2 + \frac{h^2}{x} \right] dx$$

$$= \int_1^2 \left[x h'^2 + \frac{h^2}{x} \right] dx$$

$$\Rightarrow J[\hat{y}-h] - J[\hat{y}] \geq 0 \Rightarrow \text{abs. min}$$

12. $\hat{y}(x) = \frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{x} \right) - \ln x$, abs. min.

N33

33. $J(y) = \int_0^{1/2} \left[\frac{(y')^2}{x^2 - 1} - \frac{2y^2}{(x^2 - 1)^2} \right] dx$, $y(0) = 1$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

$$F = \frac{y'^2}{x^2 - 1} - \frac{2y^2}{(x^2 - 1)^2}$$

1) Уп. Фурье:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \left[-\frac{4y}{(x^2 - 1)^2} \right] - \frac{d}{dx} \left[\frac{2y'}{(x^2 - 1)} \right] = 0$$

$$\frac{-4y}{(x^2 - 1)^2} - \frac{2y''(x^2 - 1) - 4y'x}{(x^2 - 1)^2} = 0$$

$$-4y - 2y''(x^2 - 1) + 4y'x = 0$$

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

замена: $y = zx \Rightarrow y' = z'x + z$

$$y'' = z''x + 2z'$$

$$(x^2 - 1)(z''x + 2z') - 2x(z'x + z) + 2zx = 0$$

$$z''(x^3 - x) + (2(x^2 - 1) - 2x^2)z' - \cancel{2xz + 2xz} = 0$$

$$z''(x^3 - x) - 2z' = 0$$

нужно $t = z'$, $t' = z''$

$$t'(x^3 - x) - 2t = 0 \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{2dx}{x^3 - x}$$

$$\frac{2}{x^3-x} = \frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2dx}{x^3-x} = \int \left[\frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right] dx$$

$$\Rightarrow \ln|t| = \ln \left| \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \right| + C_1 \Rightarrow t = \frac{x^2-1}{x^2} e^{C_1}$$

$$\Rightarrow z = \int t dx = e^{C_1} \int 1 - \frac{1}{x^2} dx = C_1 \left(x + \frac{1}{x} \right) + C_2$$

\Rightarrow

$$y = xz \Rightarrow y = C_1(x^2+1) + C_2 x$$

$$2) \begin{cases} y(0)=1 \\ y\left(\frac{1}{2}\right)=2 \\ y = C_1(x^2+1) + C_2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ \frac{5}{4}C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 2 \\ C_2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = x^2 + 1 + \frac{3}{2}x = \text{гипотетическое выражение}$$

$$3) J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}] = \int_0^{1/2} \left[\frac{(\hat{y}+h)^2}{x^2-1} - \frac{2(\hat{y}+h)^2}{(x^2-1)^2} - \frac{\hat{y}'^2}{x^2-1} + \frac{2\hat{y}'^2}{(x^2-1)^2} \right] dx$$

$$= \int_0^{1/2} \left[\frac{2\hat{y}'h' + h'^2}{x^2-1} - \frac{4\hat{y}'h + 2h^2}{(x^2-1)^2} \right] dx$$

$$J[\hat{y}] = \int_0^{1/2} \left[-\frac{4\hat{y}'}{(x^2-1)^2} \cdot h + \frac{2\hat{y}'}{x^2-1} h' \right] dx \equiv 0$$

$$\Rightarrow J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}] = \int_0^{1/2} \left[\frac{h'^2}{x^2-1} - \frac{2h'^2}{(x^2-1)^2} \right] dx \Rightarrow \text{абс. макс}$$

33. $\hat{y}(x) = x^2 + \frac{3x}{2} + 1$, абс. макс.

N75

75. $J(y) = \int_{1/2}^2 [4xyy' - x^2(y')^2 + 4x^2y] dx, y\left(\frac{1}{2}\right) = y(2) = \frac{1}{2}$

$$F = 4xyy' - x^2y'^2 + 4x^2y$$

1) y_p ~~зундера:~~ $\Rightarrow \left[4xy' + 4x^2 \right] - \frac{d}{dx} \left[4xy - 2x^2y' \right] = 0$
 $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$
 $4xy' + 4x^2 - 4y - \cancel{4xy'} + \cancel{4xy'} + 2x^2y'' = 0$

$$2xy' + 2x^2 - 2y + x^2y'' = 0$$

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = -2x^2$$

$$\Rightarrow x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$$

$$y_0 = x$$

$$xy' - y = C \exp \left[-2 \int \frac{1}{x} dx \right] = C \frac{1}{x^2} \quad | : x^2$$

$$\left(\frac{y}{x} \right)' = C_1 \frac{1}{x^4} \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1 \frac{1}{x^3} + C_2 \Rightarrow y = C_1 \frac{1}{x^2} + C_2 x$$

MBR: $\begin{cases} C_1' \frac{1}{x^3} + C_2' x = 0 \\ C_1' \left(-\frac{2}{x^3} \right) + C_2' = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{2}{3} x^3 \\ C_2' = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{x^4}{6} + C_3 \\ C_2 = -\frac{2x}{3} + C_4 \end{cases}$

$$\Rightarrow y = \left[\frac{x^4}{6} + C_3 \right] \frac{1}{x^2} + \left[-\frac{2}{3}x + C_4 \right] x$$

$$= C_3 \frac{1}{x^2} + C_4 x - \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ y(2) = \frac{1}{2} \\ y = C_3 \frac{1}{x^2} + C_4 x - \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4C_3 + \frac{1}{2}C_4 - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}C_3 + 2C_4 - 2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \hat{y} = \frac{5}{4}x - \frac{x^2}{2}$$

допустимая
экспрессия

$$3) Y[\hat{y} + h] - Y[\hat{y}] =$$

$$= \int_{1/2}^2 [4x(\hat{y} + h)(\hat{y}' + h') - x^2(\hat{y}' + h')^2 + 4x^2(\hat{y} + h) - 4x\hat{y}\hat{y}' + x^2(\hat{y}')^2 - 4x^2\hat{y}'] dx$$

$$= \int_{1/2}^2 [4xh\hat{y}' + 4x\hat{y}h' + 4xhh' - 2x^2\hat{y}'h' - x^2h'^2 + 4x^2h'] dx$$

$$8Y[\hat{y}] = \int_{1/2}^2 [(4x\hat{y}' + 4x^2)h + (4x\hat{y} - 2x^2\hat{y}')]h' dx$$

$$\Rightarrow Y[\hat{y} + h] - Y[\hat{y}] = \int_{1/2}^2 [4xhh' - x^2h'^2] dx$$

$$I_1 = \int_{1/2}^2 [4xhh'] dx = 4xh^2 \Big|_{1/2}^2 - \int_{1/2}^2 [4h^2 + 4xhh'] dx$$

$$\Rightarrow 2I_1 = - \int_{1/2}^2 [4h^2] dx \Rightarrow I_1 = \int_{1/2}^2 [-2h^2] dx$$

75. $\hat{y}(x) = \frac{5x}{4} - \frac{x^2}{2}$, абс. макс.

$$\Rightarrow J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}] = \int_{1/2}^2 [-2h^2 - x^2h'^2] dx \Rightarrow \text{абс. макс}$$

№102

В задачах (102–105) показать, что допустимая экстремаль не дает экстремум функционала:

$$102. J(y) = \int_0^\pi \left[(y')^2 - \frac{16}{9} y^2 + 2y \sin x \right] dx, y(0) = 0, y(\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$1) F = y'^2 - \frac{16}{9} y^2 + 2y \sin x$$

$$\frac{\delta F}{\delta y} - \frac{d}{dx} \frac{\delta F}{\delta y'} = 0 \Rightarrow \left[-\frac{32}{9} y + 2 \sin x \right] - \frac{d}{dx} [2y'] = 0$$

$$-\frac{32}{9} y + 2 \sin x - 2y'' = 0$$

$$y'' + \left(\frac{4}{3}\right)^2 y = \sin x$$

$$\text{Ogn: } y'' + \left(\frac{4}{3}\right)^2 y = 0$$

$$y = C_1 \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{4}{3}x\right)$$

$$y_0 = \frac{9}{7} \sin x - \text{r-пем}$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{4}{3}x\right)$$

$$2) \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$y = C_3 \cos\left(\frac{4}{3}x\right) + C_4 \sin\left(\frac{4}{3}x\right) + \frac{9}{7} \sin x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_3 \left(-\frac{1}{2}\right) + C_4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \sin\left(\frac{4}{3}x\right) + \frac{9}{7} \sin x \quad - \text{гомогенная экстремаль}$$

$$3) \quad \boxed{J(\ddot{y}+h) - J(\ddot{y}) = \int_0^\pi \left[(\ddot{y}+h')^2 - \frac{16}{g} (\ddot{y}+h)^2 + 2(\ddot{y}+h) \sin x - \ddot{y}^2 + \frac{16}{g} \ddot{y}^2 - 2\ddot{y} \sin x \right] dx}$$

$$= \int_0^\pi \left[2\ddot{y}'h' + h'^2 - \frac{16}{g}(2\ddot{y}h + h^2) + 2h \sin x \right] dx \quad \textcircled{1}$$

$$S\bar{y}(y) = \int_0^\pi \left[\left(-\frac{16}{g} \cdot 2\ddot{y} + 2\sin x \right) h + (2\ddot{y}')h' \right] dx$$

$$\textcircled{1} \quad \int_0^\pi \left[h'^2 - \frac{16}{g} h^2 \right] dx$$

$$\begin{aligned} h &= \sin ax, a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \int_0^\pi \left[a^2 \cos^2 ax - \frac{16}{g} \sin^2 ax \right] dx \\ h' &= a \cos ax \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \left[a^2 \frac{1 + \cos 2ax}{2} - \frac{16}{g} \frac{1 - \cos 2x}{2} \right] dx \leq$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{a^2}{2} - \frac{8}{g} \right] dx \quad \text{hpr } a = 1 \Rightarrow \Delta \bar{y}[\ddot{y}] \geq 0$$

$$a = 2 \Rightarrow \Delta \bar{y}[\ddot{y}] > 0$$

\Rightarrow ne alcătuire

□

Задача со свободным концом

№ 20.1

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx,$$

на множестве $C^1[a, b]$ таких функций, что $y(a) = A$. Решаем задачу поиска экстремума этого функционала.

Предложение 1 Пусть $F[x, y, p]$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом, то она удовлетворяет условию Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

и граничному условию

$$\frac{\partial F[x, y, y']}{\partial y'} \Big|_{x=b} = 0.$$

или $y(b) = B$
 $\frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_{x=a} = 0$

Решить задачу со свободным концом (1–10):

№ 2:

2. $J(y) = \int_0^1 [2y + 6y' + (y')^2] dx, y(0) = 0.$

$$F = 2y + 6y' + y'^2 \Rightarrow [2] - \frac{d}{dx} [6 + 2y'] = 0$$

$$2 - 2y'' = 0 \Rightarrow y'' = 1 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$[6 + 2y'] \Big|_{x=1} = [6 + 2x + 2C_1] \Big|_{x=1} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} [6y' + y'^2] \Big|_{x=1} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{y} = \frac{x^2}{2} - 4x$$

допустимый экспр.

$$\begin{aligned} J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}] &= \int_0^1 [2(\hat{y} + h) + 6(\hat{y}' + h') + (\hat{y}' + h)^2 - 2\hat{y} - 6\hat{y}' - (\hat{y}')^2] dx \\ &= \int_0^1 [2h + 6h' + 2\hat{y}h + h^2] dx \quad \Theta \end{aligned}$$

$$\delta J[\hat{y}] = \int_0^1 [2h + (6+2y')h'] dx = 0$$

① $\int_0^1 h^2 dx \geq 0 \Rightarrow$ **abs. min**

2. $\hat{y} = \frac{x^2}{2} - 4x$, abs. min.

No

9. $J(y) = \int_1^3 [8yy' \ln x - x(y')^2 + 6xy'] dx, y(3) = 15.$

$$F = 8yy' \ln x - x(y')^2 + 6xy' \Rightarrow [8y' \ln x] - \frac{d}{dx}[8y \ln x - 2xy' + 6x] = 0$$

$$\cancel{8y' \ln x} - \cancel{8y' \ln x} - \cancel{8y' x} + 2y' + 2xy'' - 6 = 0$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 3$$

$$\text{ogn-yp: } x\bar{y}'' + xy' - 4y = 0$$

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_t \cdot t'_x)'_x = y''_{tt} \cdot t'^2_x + y'_t \cdot t''_{xx}$$

Сделаем замену $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$

$$\Rightarrow y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x}, y''_{xx} = y''_{tt} \cdot \frac{1}{x^2} + y'_t \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 \cdot \left[y''_{tt} \cdot \frac{1}{x^2} + y'_t \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] + x \cdot y'_t \cdot \frac{1}{x} - 4y = 0$$

$$\Rightarrow y'' - 4y = 0 \Rightarrow y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$$

$y_0 = -x$ - z. pern reogn

$$\Rightarrow y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} - x \text{ pern}$$

$$\begin{cases} y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} - x \\ y(3) = 15 \\ \left[8y \ln x - 2xy' + 6x \right]_{x=1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9C_1 + \frac{1}{9}C_2 - 3 = 15 \\ -2(2C_1 - C_2 - 1) + 6 = 0 \end{cases}$$

$$y' = 2C_1 x - 2 \frac{C_2}{x^3} - 1$$

$$y'(1) = 2C_1 - C_2 - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = 2x^2 - x = \text{gor. exm.}$$

$$J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}] = \int_1^3 \left[8(\hat{y} + h)(\hat{y}' + h') \ln x - x(\hat{y}' + h')^2 + 6x(\hat{y}' + h') \right] dx - 8\hat{y}\hat{y}' \ln x - x\hat{y}'^2 + 6x\hat{y}'$$

$$= \int_1^3 \left[8(\hat{y}h' + \hat{y}'h + hh') \ln x - 2x\hat{y}'h' - xh'^2 + 6xh' \right] dx$$

$$8J[\hat{y}] = \int_1^3 \left[(8\hat{y}' \ln x)h + (8\hat{y} \ln x - 2x\hat{y}' + 6x)h' \right] dx$$

$$\Rightarrow J[\hat{y} + h] - J[\hat{y}] = \int_1^3 \left[8hh' \ln x - xh'^2 \right] dx$$

$$I_1 = \int_1^3 [8hh' \ln x] dx = 8h^2 \ln x \Big|_1^3 - \int_1^3 [8h^2 \frac{1}{x} + 8h'h \ln x] dx$$

пусть $u = 8h \ln x \Rightarrow u' = 8h \frac{1}{x} + 8h'h$
 $v' = h' \Rightarrow v = h$

$$\Rightarrow 2I_1 = - \int_1^3 8h^2 \frac{1}{x} dx \Rightarrow I_1 = \int_1^3 -4h^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\Rightarrow J[\hat{y} + h] - J[y] = \int_1^3 \left[-4h^2 \frac{1}{x} dx - x h'^2 \right] dx \Rightarrow \text{абс. max}$$

9. $\hat{y} = 2x^2 - x$, абс. max.

Задача без ограничений

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)] dx,$$

на множестве $C^1[a, b]$. Решаем задачу поиска экстремума этого функционала.

Предложение 2 Пусть $F[x, y, p]$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом, то она удовлетворяет условию Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

и граничным условиям

$$\frac{\partial F[x, y, y']}{\partial y'} \Big|_{x=a} = \frac{\partial F[x, y, y']}{\partial y'} \Big|_{x=b} = 0.$$

Решить задачу без ограничений (11–16):

№14

14. $J(y) = \int_0^1 [(y')^2 + y^2 - 4e^x y - 8xe^x y'] dx.$

$$F = y'^2 + y^2 - 4e^x y - 8xe^x y' \Rightarrow [2y - 4e^x] - \frac{d}{dx} [2y' - 8xe^x] = 0$$

$$2y - 4e^x - 2y'' + 8xe^x + 8e^x = 0$$

$$y'' - y = 4xe^x + 2e^x$$

$$\text{ogn: } y''_0 - y'_0 = 0 \Rightarrow y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$y_1: y'' - y = 2e^x \Rightarrow y_1 = x e^x$$

$$y_2: y'' - y = 4xe^x$$

$$y_2 = (x^2 + dx + \beta) e^x \Rightarrow$$

$$y'_2 = (x^2 + (d+2)x + (p+d)) e^x, y''_2 = (x^2 + (d+4)x + (p+2d+2))$$

$$(x^2 + (d+4)x + (p+2d+2)) e^x - (x^2 + dx + \beta) e^x = 4xe^x$$

$$4x + (2d+2) = 4x \Rightarrow \begin{cases} \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta = 0 \\ d = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_2 = (x^2 - x) e^x$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x^2 e^x$$

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x^2 e^x \\ [2y' - 8xe^x] \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow e(C_1 + 3) - C_2 \frac{1}{e} = 4e \\ [2y' - 8xe^x] \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{e^2}{e^2 - 1} \\ C_2 = \frac{e^2}{e^2 - 1} \end{cases}$$

$$y' = e^x (C_1 + x^2 + 2x) - C_2 e^{-x}$$

$$y'(0) = C_1 - C_2$$

$$y'(1) = e(C_1 + 3) - C_2 \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{e^2}{e^2 - 1} (e^x + e^{-x}) + x^2 e^x$$

$$\hat{y} = \frac{\sinh x}{\sinh 1} + x^2 e^x$$

$$\Delta J[\hat{y}] = \int_0^1 \left[(\hat{y}' + h')^2 + (\hat{y} + h)^2 - 4e^x(\hat{y} + h) - 8xe^x(\hat{y}' + h') - \hat{y}'^2 - \hat{y}^2 + 4e^x\hat{y}' + 8xe^x\hat{y}' \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[2\hat{y}'h' + h'^2 + 2\hat{y}h + h^2 - 4e^xh - 8xe^xh' \right] dx$$

$$\delta J[\hat{y}] = \int_0^1 \left[(2\hat{y} - 4e^x)h + (2\hat{y}' - 8xe^x)h' \right] dx$$

$$\Delta J[\hat{y}] = \int_0^1 [h'^2 + h^2] dx \geq 0 \Rightarrow \text{абс. мин}$$

z. 14. $\hat{y} = \frac{e \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} e} + x^2 e^x$, абс. мин.

Функционалы, зависящие от 2 функций

Рассмотрим функционал

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b F[x, y_1, y'_1, y_2, y'_2] dx.$$

на множестве $C^1[a, b] \times C^1[a, b]$ таких функций, что $y_1(a) = A_1, y_1(b) = B_1, y_2(a) = A_2, y_2(b) = B_2$. Решаем задачу поиска экстремума этого функционала.

Предложение 3 Пусть $F[x, y, p]$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом, то она удовлетворяет системе уравнений Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_1} \right) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_2} \right) = 0.$$

№ 20.2

№ 4

4. $J(y_1, y_2) = \int_1^2 [12y_1^2 + y_2^2 + x^2(y'_1)^2 + (y'_2)^2] dx, y_1(1) = 1, y_2(1) = e,$
 $y_1(2) = 8, y_2(2) = e^2.$

$$F = 12y_1^2 + y_2^2 + x^2 y'_1^2 + y'_2^2$$

1) Система ур. Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_1} = 0 \Rightarrow [24y_1] - \frac{d}{dx}[2x^2 y'_1] = 0$$

$$24y_1 - 4xy'_1 - 2x^2 y''_1 = 0$$

$$x^2 y''_1 + 2xy'_1 - 12y_1 = 0$$

$$\text{высв } X = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

$$\Rightarrow x^2 \left(y''_1 \cdot \frac{1}{x^2} - y'_1 \cdot \frac{1}{x^2} \right) + 2x \cdot y'_1 \cdot \frac{1}{x} - 12y_1 = 0$$

$$y''_1 + y'_1 - 12y_1 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -4$$

$$\Rightarrow y_1 = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-4t} \Rightarrow y_1 = C_1 x^3 + C_2 x^{-4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_2} = 0 \Rightarrow [2y_2] - \frac{d}{dx} [2y'_2] = 0$$

$$2y_2 - 2y''_2 = 0 \Rightarrow y''_2 - y_2 = 0$$

$$y_2 = C_3 e^x + C_4 e^{-x}$$

$$2) \begin{cases} y_1 = C_1 x^3 + C_2 x^{-4} \\ y_2 = C_3 e^x + C_4 e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 8 + C_2 \cdot \frac{1}{16} = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(1) = 1, y_2(1) = e \\ y_1(2) = 8, y_2(2) = e^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_3 e + C_4 \frac{1}{e} = e \\ C_3 e^2 + C_4 \frac{1}{e^2} = e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = 1 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_1 = x^3, \hat{y}_2 = e^x \quad \text{gongsm. \exists kcmp.}$$

$$3) Y[\hat{y}_1 + h_1, \hat{y}_2 + h_2] - Y[\hat{y}_1, \hat{y}_2] =$$

$$\int_1^2 \left[12(\hat{y}_1 + h_1)^2 + (\hat{y}_2 + h_2)^2 + x^2(\hat{y}_1 + h_1)^2 + (\hat{y}_2 + h_2)^2 - (2\hat{y}_1^2 - \hat{y}_2^2 - x^2\hat{y}_1^2 - \hat{y}_2^2) \right] dx$$

$$= \int_1^2 \underbrace{\left[2\hat{y}_1 h_1 + 12h_1^2 + 2\hat{y}_2 h_2 + h_2^2 + 2x^2 \hat{y}_1^2 h_1^2 + x^2 h_1^2 + 2\hat{y}_2 h_2^2 + h_2^2 \right]}_{I_1} dx \underbrace{\left[\dots \right]}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 2x^2 y'_1 h'_1 = 2x^2 y'_1 h'_1 \Big|_1^2 - \int_1^2 [4xy'_1 h'_1 + 2x^2 y''_1 h'_1] dx$$

$$\begin{aligned} u &= 2x^2 y'_1 \\ v' &= h'_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u &= 4xy'_1 + 2x^2 y'_1 \\ v &= h'_1 \end{aligned}$$

$$= \int_1^2 [-4xy'_1 h'_1 - 2x^2 y''_1 h'_1] dx$$

$$I_2 = \int_1^2 [2y'_2 h'_2] dx = 2y'_2 h'_2 \Big|_1^2 - \int_1^2 [2y''_2 h'_2] dx = \int_1^2 [-2y''_2 h'_2] dx$$

$$\begin{aligned} u &= 2y'_2 \\ v' &= h'_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u' &= 2y''_2 \\ v &= h'_2 \end{aligned}$$

$$\Delta J[\hat{y}_1, \hat{y}_2] = \int_1^2 \underbrace{[2\hat{y}'_1 h'_1 + (2h'_1)^2 + 2\hat{y}'_2 h'_2 + h'_2^2 + x^2 h'_1{}^2 + h'_2{}^2]}_{-\underbrace{4xy'_1 h'_1 - 2x^2 y''_1 h'_1 - 2y''_2 h'_2}_{\text{реш ур. Эйлера}}} dx$$

$$= \int_1^2 \underbrace{[(2\hat{y}'_1 - 4xy'_1 - 2x^2 y''_1) h'_1 + (2\hat{y}'_2 - 2y''_2) h'_2]}_0 + \underbrace{[12h'_1{}^2 + h'_2{}^2 + x^2 h'_1{}^2 + h'_2{}^2]}_0 dx$$

реш ур. Эйлера

$$= \int_1^2 [(12h'_1{}^2 + h'_2{}^2 + x^2 h'_1{}^2 + h'_2{}^2)] dx \geq 0 \rightarrow \text{адм мин}$$

4. $\hat{y}_1(x) = x^3, \hat{y}_2(x) = e^x$, абс. мин.

Функционалы, содержащие производные второго порядка

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b F[x, y, y', y''] dx.$$

на множестве $C^2[a, b]$ таких функций, что $y(a) = A_1$, $y(b) = B_1$, $y'(a) = A_2$, $y''(b) = B_2$. Решаем задачу поиска экстремума этого функционала.

Предложение 4 Пусть $F[x, y, p]$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция. Если трижды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом, то она удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0.$$

l n 20.3

✓5

5. $J(y) = \int_0^1 [y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2] dx$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y(1) = 2 \sinh 1$,
 $y'(1) = 2e$.

$$F = y^2 + 2y'^2 + y''^2$$

1) Зр. Эйлера - Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \Rightarrow [2y] - \frac{d}{dx} [4y'] + \frac{d^2}{dx^2} [2y'']$$

$$2y - 4y'' + 2y''' = 0$$

$$y''' - 2y'' + y = 0$$

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

$$\lambda_{3,4} = -1$$

$$\Rightarrow y = (c_1 x + c_2) e^x + (c_3 x + c_4) e^{-x}$$

$$2) \begin{cases} y = (C_1 x + C_2) e^x + (C_3 x + C_4) e^{-x} \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \\ y(1) = 28h, y'(1) = 2e \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 - C_4 = 0 \\ (C_1 + C_2)e + (C_3 + C_4) \frac{1}{e} = 28h \\ (2C_1 + C_2)e - e + \frac{1}{e} = 2e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -6 \\ C_3 = -1 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

$$y' = (C_1 x + C_2 + C_4) e^x - (C_3 x + C_4 - C_3) e^{-x}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = 2x \operatorname{sh} x - \text{gonycm. eksp}$$

$$3) M[\hat{y} + h] - M[\hat{y}] = \int_0^1 [\hat{y}(x+h)^2 + 2(\hat{y}'(x+h)^2 + (\hat{y}''(x+h)^2 - \hat{y}^2 - 2\hat{y}'^2 - \hat{y}''^2)] dx$$

$$= \int_0^1 [2\hat{y}h + h^2 + \underbrace{4\hat{y}'h'}_{I_1} + \underbrace{h'' + 2\hat{y}''h''}_{I_2} + h''^2] dx$$

$$I_1 = \int_0^1 [4\hat{y}'h'] dx = 4\hat{y}'h \Big|_0^1 - \int_0^1 [4\hat{y}''h] dx = \int_0^1 [-4\hat{y}''h] dx$$

$$u = 4\hat{y}' \Rightarrow u' = 4\hat{y}''$$

$$v' = h' \quad v = h$$

$$I_2 = \int_0^1 [2\hat{y}''h''] dx = 2\hat{y}''h'' \Big|_0^1 - \int_0^1 [2\hat{y}'''h'] dx = \int_0^1 [-2\hat{y}'''h'] dx$$

$$u_1 = 2\hat{y}''' \Rightarrow u'_1 = 2\hat{y}''''$$

$$v'_1 = h'' \quad v_1 = h'$$

$$u_2 = -2\hat{y}''' \Rightarrow u'_2 = -2\hat{y}''''$$

$$v'_2 = h' \quad v_2 = h$$

$$= (-2\hat{y}'''h') \Big|_0^1 - \int_0^1 [-2\hat{y}''''h] dx = \int_0^1 [2\hat{y}''''h] dx$$

$$\Rightarrow D[\hat{y}] = \int_0^1 [(2\hat{y}'' - 4\hat{y}'' + 2\hat{y}''')h + h^2 + h'^2 + h''^2] dx \geq 0$$

" perem ypr. füreba

адс мин

5. $\hat{y}(x) = 2x \cdot \operatorname{sh} x$, адс. мин.

Изопериметрическая задача

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b F[x, y, y'] dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

на множестве $C^1[a, b]$ таких функций, что $y(a) = A$, $y(b) = B$ и выполнено условие связы

$$\int_a^b G[x, y, y'] dx = l$$

Рассмотрим Лагранжиан

$$L[x, y, y', \lambda] = F[x, y, y'] + \lambda G[x, y, y'].$$

Предложение 5 Пусть $F[x, y, p]$, $G[x, y, p]$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{y}(x)$ является решением изопериметрической задачи, то она удовлетворяет уравнению Эйлера вида:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0.$$

Находим множитель Лагранжа и экстремали решая уравнение Эйлера:

№ 121

№ 7

7. $J(y) = \int_0^1 [2xy + (y')^2] dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 3$, $\int_0^1 xy dx = 1$.

$$F = 2xy + y'^2$$

$$G = xy \Rightarrow L = (2+\lambda)xy + y'^2$$

1) № 7 Эйлер: $\left[(2+\lambda)x \right] - \frac{d}{dx} [2y'] = 0$

$$(2+\lambda)x - 2y'' = 0$$

$$y'' = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)x \Rightarrow y' = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$y = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$$

$$2) \begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=3 \\ \int_0^1 xy \, dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ (1 + \frac{\lambda}{2}) \frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 3 \\ \int_0^1 \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right] dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 0 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = 3x - \text{гомог. реш}$$

$$3) \Delta J[\hat{y}] = J[\hat{y}+h] - J[\hat{y}], h: h(0)=h(1)=0, \int_0^1 x h \, dx = 0$$

$$\Delta J[\hat{y}] = \int_0^1 [2x(\hat{y}+h) + (\hat{y}+h)^2 - 2x\hat{y} - \hat{y}^2] \, dx$$

$$= \int_0^1 [2xh + 2\hat{y}'h' + h'^2] \, dx$$

$$J_1 = \int_0^1 [2\hat{y}'h'] \, dx = (2\hat{y}'h') \Big|_0^1 - \int_0^1 [2\hat{y}''h] \, dx = \int_0^1 [-2\hat{y}''h] \, dx$$

$$u = 2\hat{y}' \Rightarrow u' = 2\hat{y}''$$

$$v' = h' \quad J = h$$

$$\rightarrow \Delta J[\hat{y}] = \int_0^1 [2xh - 2\hat{y}''h + h'^2] \, dx + \int_0^1 [\lambda x h] \, dx$$

$$= \int_0^1 \underbrace{[(2+\lambda)x - 2\hat{y}'']}_0 h + h'^2 \, dx - \int_0^1 [h'^2] \, dx \geq 0 \quad \text{абс. мин.}$$

решение ур. Эйлера

7. $\hat{y}(x) = 3x$, абс. мин.

NT6(a)

6. Исследовать на экстремум при всех значениях вещественного параметра a :

$$a) J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - ay^2) \, dx, y(0) = 0, y(\pi/2) = 0;$$

$$F = y'^2 - ay^2$$

$$1) \text{ур. Эйлера} \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow [-2ay] - \frac{d}{dx} [2y'] = 0$$

$$-2ay - 2y'' = 0$$

$$\Rightarrow y'' + ay = 0 \Rightarrow \text{ngcmb } a = \text{sign}(a) k^2, k \in \mathbb{R}$$

$$\text{if } a > 0 \quad y'' + k^2 y = 0$$

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

$$\text{if } a = 0 \quad y'' = 0 \Rightarrow y = C_1 x + C_2$$

$$\text{if } a < 0 \quad y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$2) y(0) = 0 \quad a > 0 \quad \int C_1 = 0$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \left\{ C_1 \cos \frac{\pi k}{2} + C_2 \sin \frac{\pi k}{2} = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ \hat{y} = 0 \end{cases}$$

$$\text{case } \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \in \mathbb{R} \\ k = 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{then } \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \in \mathbb{R} \\ k \neq 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{perverse cycles}$$

$$a = 0 \quad \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \\ \hat{y} = 0 \end{cases}$$

$$a < 0 \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{y} = 0$$

$$3) \Delta Y[\hat{y}] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\hat{y}')^2 - a(\hat{y} + h)^2 - \hat{y}'^2 + a\hat{y}^2] dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\hat{y}'h' + h'^2 - 2a\hat{y}h - ah^2] dx$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\hat{y}'h'] dx = (2\hat{y}'h') \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\hat{y}''h] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-2\hat{y}''h] dx$$

$$\Delta Y[\hat{y}] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(-2a\hat{y} - 2\hat{y}'')h + h'^2 - ah^2] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [h'^2 - ah^2] dx$$

последнее упр. заслужено

$$\text{ngcmb } h = \sin(2mx), m \in \mathbb{Z}, h(0) = 0, h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$h' = 2m \cos(2mx)$$

$$h'^2 - ah^2 = 4m^2 \cos^2(2mx) - a \sin^2(2mx) = 4m^2 \cdot \frac{1 + \cos 4mx}{2} - a \frac{1 - \cos 4mx}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} [h'^2 - ah^2] dx = \int_0^{\pi/2} \left[4m^2 \frac{1 + \cos 4mx}{2} - a \frac{1 - \cos 4mx}{2} \right] dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos 4mx dx = \frac{1}{4m} \sin 4mx \Big|_0^{\pi/2} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} [h'^2 - ah^2] dx - \int_0^{\pi/2} [(4m^2 - a)\frac{1}{2}] dx = (4m^2 - a)\frac{\pi}{4}$$

при $\forall a: m = \frac{\sqrt{a^2+1}}{2} \Rightarrow \Delta J[y] \geq 0$
 $m = \frac{\sqrt{a}}{4} \Rightarrow \Delta J[y] \leq 0$
 \Rightarrow не одн. экспр.

IV Решение

C №6:

Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать качественную картину поведения интегральных кривых уравнений (1-66):

№ 35

35. $4y^3y' - 4xy' + y = 0.$

$$y'_1,2 = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - y^4}}{2y^3} \quad \text{при } y \neq 0 \quad \text{иначе } y=0 \text{ реш}$$

посл $u = y^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y}u' \rightarrow \frac{1}{2y} \cdot u' = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - u^2}}{2y^3} \Rightarrow u \cdot u' = x \pm \sqrt{x^2 - u^2}$ (*)

посл $u = x \sin \theta \Rightarrow \sqrt{x^2 - u^2} = x \cos \theta$
 $u' = \sin \theta + x \cos \theta \theta'$

$$\Rightarrow (\sin \theta + x \cos \theta \theta')x \sin \theta = x \pm x \cos \theta$$

$$(\sin \theta + x \cos \theta \theta') \sin' \theta = 1 + \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta + x \cos \theta \sin' \theta \theta' = 1 + \cos \theta$$

$$x \sin \theta \cos \theta \theta' = 1 + \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = \pm 1 \Rightarrow x = \pm y^2$$

$\sin \theta \neq 0$

$$x \sin' \theta \theta' = \pm 1 + \cos \theta \Rightarrow \theta' = \frac{\pm 1 + \cos \theta}{x \sin \theta}$$

так $\theta' = \frac{\pm 1 + \cos \theta}{x \sin \theta} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{x}$ или $-\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{x}$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{dx}{x} \text{ или } -\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{dx}{x}$$

$$\int \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta = -2 \int \frac{d \cos \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = -2 \ln |\cos \frac{\theta}{2}|$$

$$\int \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta = -2 \int \frac{d \sin \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} = -2 \ln |\sin \frac{\theta}{2}|$$

$$\Rightarrow \ln |x| + C = -2 \ln |\cos \frac{\theta}{2}| + \text{const} - 2 \ln |\sin \frac{\theta}{2}|$$

$$x^{-\frac{1}{2}} \cdot C = \cos \frac{\theta}{2} \text{ или } \sin \frac{\theta}{2}$$

$$x \sin' \theta = 2x \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} C \cdot \sqrt{1 - x^{-1} C^2} \cdot x = u = y^2$$

$$\Rightarrow y^4 = 4C^2 x^{-1} (1 - x^{-1} C^2) x^2 = 4C^2 (x - C^2) = 4\tilde{C}(x - \tilde{C}), \tilde{c} = C^2$$

$$\Rightarrow y^4 = 4\tilde{C}(x - \tilde{C}) \Rightarrow x = C^* y^4 + \frac{1}{4C^*}, C^* = \frac{1}{4\tilde{C}}$$

35. $y = 0, x = Cy^4 + \frac{1}{4C}, x = \pm y^2$ — особые решения при $y \neq 0$.

Cn7

Найти решение уравнения при заданных начальных условиях (54–67):

N56

56. $xyy'' - xy'^2 + y'(y' + y) \sin x = 0, y(1) = 1, y'(1) = -1.$

$$y \rightarrow \lambda y \text{ unb. } \Rightarrow y^1 = yz \\ y'' = y(z^1 + z^2)$$

$$xy \cdot y(z^1 + z^2) - xy^2 z^2 + yz(yz + y) \sin x = 0$$

$$y=0 \text{ не реш} \Rightarrow x(z^1 + z^2) - xz^2 + z(z+1) \overset{!}{\sin x} = 0 \\ z^1 x + \cancel{z(z+1)} \overset{!}{\sin x} = 0$$

при $z = -1, z^1 = 0 \Rightarrow$ yg. решения

$$\frac{y^1}{y} = -1 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \Rightarrow \begin{cases} \ln y = -x + C \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow C = 1 \\ \Rightarrow \ln y = 1 - x$$

56. $\ln y = 1 - x.$

Cn8:

N126

126. $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 6(1+5x) + e^{2x}.$

ogn: $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \text{ кр 2}$

$$\lambda_{3,4} = 2 \pm i$$

$$\Rightarrow y_0 = (C_1 x + C_2) + e^{2x} (C_3 \sin x + C_4 \cos x)$$

$$y_1: y'' - 4y''' + 5y'' = e^{2x}$$

$$\text{try const } y_1 = de^{2x}$$

$$y_1' = 2de^{2x}$$

$$y_1''' = 8de^{2x}$$

$$y_1'' = 16de^{2x}$$

$$y_1'' = 16de^{2x}$$

$$\Rightarrow 16de^{2x} - 4 \cdot 8de^{2x} + 5 \cdot 16de^{2x} = e^{2x}$$

$$d(16 - 32 + 80) = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{4}e^{2x} - \text{particular}$$

$$y_2: y'' - 4y''' + 5y'' = 6(1+5x)$$

$$y = dx^3 + \beta x^2$$

$$-4 \cdot 6d + 5(6dx + 2\beta) = 6(1+5x)$$

$$y' = 3dx^2 + 2\beta x$$

$$\begin{cases} d=1 \\ \beta=3 \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x$$

$$y''' = 6d$$

$$y'''' = 0$$

$$\Rightarrow y = (C_1 x + C_2) + e^{2x} (C_3 \sin x + C_4 \cos x) + x^3 + 3x + \frac{1}{4}e^{2x}$$

$$126. y = C_1 + C_2 x + e^{2x} (C_3 \cos x + C_4 \sin x) + x^2(3+x) + \frac{1}{4}e^{2x}.$$

Cnq
N34

$$34. x^2y'' + x(-2 + x \operatorname{tg} x)y' + (2 - x \operatorname{tg} x)y = x^3 e^x \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$y_1 = x \text{ particular soln}$$

$$\Rightarrow xy' - y = C_1 \exp \left[\int \frac{2-x \operatorname{tg} x}{x} dx \right] = C_1 x^2 \exp x \quad | : x^2$$

$$I_1 = \int \frac{2-x \operatorname{tg} x}{x} dx = 2 \int \frac{dx}{x} - \int \operatorname{tg} x dx = \ln x^2 + \ln |\cos x|$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = C_1 \cos x \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1 \sin x + C_2$$

$$y = C_1 x \sin x + C_2 x$$

МБи:

$$\begin{cases} C_1' x \sin x + C_2' x = 0 /:x \\ C_1' (\sin x + x \cos x) + C_2' = x e^x \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = e^x \\ C_2' = -e^x \sin x = -I_2 \end{cases}$$

$$I_2 = \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

$$\begin{array}{l|l} u_1 = \sin x & u_1' = \cos x \\ v_1' = e^x & v_1 = e^x \end{array} \quad \begin{array}{l|l} u_2 = \cos x & u_2' = -\sin x \\ v_2' = e^x & v_2 = e^x \end{array}$$

$$2I_2 = e^x (\sin x - \cos x) + C_4 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C_4$$

$$\begin{array}{l|l} C_1 = e^x + C_3 & \\ \hline C_2 = \frac{1}{2} e^x (\cos x - \sin x) + C_4 & \end{array}$$

$$\Rightarrow y = (e^x + C_3)x \sin x + \left[\frac{1}{2} e^x (\cos x - \sin x) + C_4 \right] x$$

$$y = C_3 x \sin x + C_4 x + \frac{1}{2} x (\cos x + \sin x) e^x$$

$$34. \quad y = x(C_1 + C_2 \sin x) + \frac{1}{2} x(\cos x + \sin x)e^x.$$

C n//

Решить линейные однородные системы уравнений третьего порядка (15-116):

№55

$$55. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 2z, \\ \dot{y} = 2x - y + 2z, \\ \dot{z} = x - y + z. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda-1)(1-\lambda^2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \text{ и } \lambda_3 = -1$$

CB: $\lambda_{1,2} = 1$ ирр:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

присоедин h_1 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 2 & -2 & 2 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = -1$ ирр:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right) + C_3 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

55. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^t \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right].$

Cn13

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия для автономных систем (1-52):

4g

49. $\begin{cases} \dot{x} = 2 - 2\sqrt{1+x+y}, \\ \dot{y} = e^{\frac{5}{4}x+2y+y^2} - 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2 - 2\sqrt{1+x+y} = 0 \\ \exp\left(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\right) - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0, 0) \\ \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right) \end{cases}$$

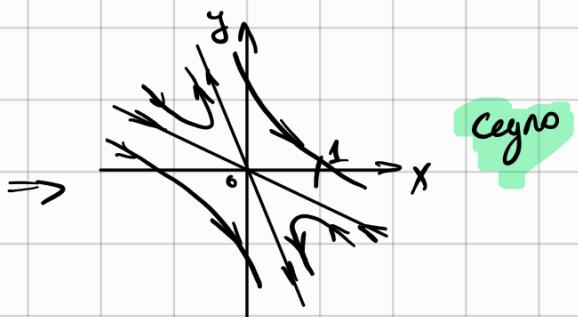
1) $b_{T, (0,0)}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 - 2\sqrt{1+x+y} \\ \dot{y} = \exp\left(\frac{5}{4}x + 2y + y^2\right) - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = \frac{5}{4}x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -1 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

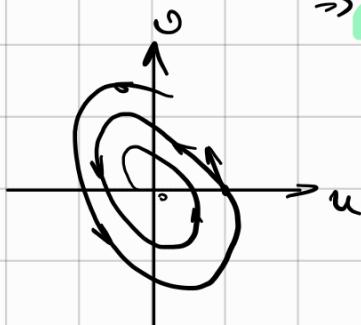
2) $b \left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

переход $\begin{cases} u = x - \frac{3}{4} \\ v = y + \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u + \frac{3}{4} \\ y = v - \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = 2 - 2\sqrt{1+(u+\frac{3}{4})+(v-\frac{3}{4})} \\ \dot{v} = \exp\left(\frac{5}{4}(u+\frac{3}{4})+2(v-\frac{3}{4})+(v-\frac{3}{4})^2\right) - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{u} = -u - v \\ \dot{v} = \frac{5}{4}u + \frac{1}{2}v \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 \pm i\sqrt{11})$$

\Rightarrow уст фокус

$$(1, 0): \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$



49. $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ — устойчивый фокус, \circlearrowleft ;

$(0, 0)$ — седло, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Ch 17

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием (1–100):

№ 84

84. $(x - 2x^2y) \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + 2x^2z^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = y^2z \text{ при } x - y = 0.$

$$\begin{cases} x = x - 2x^2y \\ y = y \\ z = 2x^2z^2 \end{cases} \Rightarrow (x - 2x^2y) dy - y dx = 0 \quad | \cdot -\frac{1}{x}$$

$$\left(-\frac{1}{x} + 2y \right) dy + \frac{y}{x^2} dx = 0$$

$$d\left(-\frac{y}{x} + y^2\right) = 0 \Rightarrow u_1 = y^2 - \frac{y}{x}$$

$$x = \frac{y}{y^2 - u_1}$$

$$2\left(\frac{y}{y^2 - u_1}\right)^2 z^2 dy - y dz = 0 \quad | \cdot \frac{1}{z^2 y}$$

$$\frac{2y}{(y^2 - u_1)^2} - \frac{1}{z^2} = 0 \Rightarrow d\left(-\frac{1}{y^2 - u_1} + \frac{1}{z^2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{y^2 - u_1} + \frac{1}{z^2} = u_2$$

$$\circ \frac{x}{y} + \frac{1}{z^2} = u_2$$

$$\Rightarrow u = f\left(y^2 - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} + \frac{1}{z^2}\right)$$

$$\begin{cases} u = y^2 z \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

$$u_1 = y^2 - 1 \Rightarrow y^2 = u_1 + 1$$

$$u_2 = -1 + \frac{1}{z^2} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{u_2 + 1}$$

$$u_2 = \frac{x}{y} + \frac{1}{z^2} =$$

$$u = \frac{u_1 + 1}{u_2 + 1}$$

$$u = \frac{y^2 - \frac{y}{x} + 1}{-\frac{x}{y} + \frac{1}{z^2} + 1}$$

84. $u = F\left(\frac{y}{x} - y^2, \frac{1}{z} - \frac{x}{y}\right), u = \frac{1 + y^2 - \frac{y}{x}}{1 - \frac{x}{y} + \frac{1}{z}}$.

C 20.1
v8

8. $J(y) = \int_1^2 [x^3(y')^2 - 8(x^2 - x)yy' + 4y^2 + 8x^2y']dx, y(2) = -7.$

$$f = x^3y'^2 - 8(x^2 - x)yy' + 4y^2 + 8x^2y'$$

1) Yp dinera: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow [-8(x^2 - x)y' + 8y] - \frac{d}{dx}[2x^3y' - 8(x^2 - x)y + 8x^2y] = 0$
 $-8(x^2 - x)y' + 8y - 6x^2y' - 2x^3y'' + 16xy + 8x^2y' - 8y - 8xy' - 16x^2y'' = 0$

$$x^2y'' + 3xy' - 8y = -8$$

$$y_1 = x^2 \text{ - pern ogm.}$$

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \frac{C_1}{x^4} \exp\left[-\int \frac{3}{x} dx\right] = \frac{C_1}{x^7}$$

$$\frac{y}{x^2} = \frac{C_1}{x^6} + C_2 \Rightarrow y = C_1 \frac{1}{x^4} + C_2 x^4$$

$$y_1 = 1 \text{ pern ogm } \Rightarrow y = C_1 \frac{1}{x^4} + C_2 x^4 + 1$$

2) $\begin{cases} y(2) = -7 \\ \left[2x^3y' - 8(x^2 - x)y + 8x^2\right] \Big|_{x=1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{y} = 1 - 2x^4$

3) $\Delta J[\hat{y}] = \int_1^2 [x^3(\hat{y}' + h)^2 - 8(x^2 - x)(\hat{y} + h)(\hat{y}' + h) + 4(\hat{y} + h)^2 + 8x^2(\hat{y}' + h) - x^3\hat{y}'^2 + 8(x^2 - x)\hat{y}\hat{y}'] - 4\hat{y}^2 - 8x^2\hat{y}'^2] dx$
 $= \int_1^2 [x^3(2\hat{y}'h + h'^2) - 8(x^2 - x)(\hat{y}'h + \hat{y}h' + hh') + 4(2\hat{y}h + h^2) + 8x^2h'] dx$

$$\delta J[\hat{y}] = \int_1^2 [(-8(x^2 - x)\hat{y}' + 8\hat{y})h + (2x^3\hat{y}' - 8(x^2 - x)\hat{y} + 8x^2)h'] dx = 0$$

$$\Rightarrow \Delta J[\hat{y}] - \int_1^2 [x^3h'^2 - 8(x^2 - x)hh' + 4h^2] dx$$

$$I_1 = \int_1^2 [-8(x^2-x)hh'] dx = (-8(x^2-x)h^2) \Big|_1^2 - \int_1^2 [-8(2x-1)h - 8(x^2-x)h'] h dx$$

$$u = -8(x^2-x)h \Rightarrow u' = -8(2x-1)h - 8(x^2-x)h'$$

$$v' = h' \quad v = h$$

$$2I_1 = \int_1^2 [8(2x-1)h^2] dx \Rightarrow I_1 = \int_1^2 4(2x-1)h^2 dx$$

$$\Rightarrow J[\tilde{y}] = \int_1^2 [x^3 h'^2 + 8x h^2] dx \geq 0 \Rightarrow \text{abc min}$$

8. $\hat{y} = 1 - 2x^2$, abc. min.