Если при каждом значении $\alpha \in E \subset R$ функция $f(x;\alpha)$ интегрируема по Риману как функция от x на отрезке $[a;b]$, то интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x;\alpha)\,dx \qquad (1)$$

называют *собственным интегралом, зависящим от параметра* α. Наряду с интегралами вида (1) рассматривают интегралы более общего вида

$$\Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x;\alpha)\,dx, \qquad (2)$$

зависящие от параметра.

1. Непрерывность интеграла по параметру. Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике

$$K = \{(x;\alpha):\ a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}, \qquad (3)$$

то интеграл (1) есть непрерывная функция параметра α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$.

В частности, если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике K и $\alpha_0 \in [\alpha_1;\alpha_2]$, то

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^b f(x;\alpha)\,dx = \int_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x;\alpha)\,dx, \qquad (4)$$

т. е. возможен предельный переход под знаком интеграла (1).

2. Найти предел:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_0^1 \sqrt{1+\alpha^2x^4}\,dx;$

$f(x,\alpha) = \sqrt{1+\alpha^2 x^4}$ непр. в

$K = \{(x,\alpha) : 0 \le x \le 1, -1 \le \alpha \le 1\}$ непр.

как суперп непр на $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ непр на $\forall$ замкн. и огр прямоуг.

$\Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_0^1 f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{\alpha\to 0} f(x,\alpha)\,dx = \int\limits_0^1 f(x,0)\,dx = \int\limits_0^1 dx = 1$ по Th о предельном переходе под интеграл

2. 1) 1;

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на отрезке $[0;1]$. Доказать, что функция

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\,f(x)\,dx$$

разрывна при $\alpha = 0$.

1) $I(0) = 0$

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} f(x)\,dx = \overbrace{\int\limits_0^\delta}^{I_1(\alpha,\delta)} + \overbrace{\int\limits_\delta^1}^{I_2(\alpha,\delta)} \qquad \delta \in (0,1)$

$\forall x \in [\delta;1] \quad 0 \le \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} \le \frac{\alpha}{x^2} \le \frac{\alpha}{\delta^2}$

f непр $[0,1] \Rightarrow$ огр. и $\exists \max f = M$

$\int\limits_\delta^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} f(x)\,dx \le \int\limits_\delta^1 \frac{\alpha M}{x^2}\,dx = M\alpha\left(\frac{1}{\delta} - 1\right) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$

3) $\forall x \in [0,\delta]$: т.к f непр., то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |f(x) - f(0)| < \varepsilon$

$-\varepsilon < f(x) - f(0) < \varepsilon \Rightarrow f(0) - \varepsilon < f(x) < f(0) + \varepsilon$

$\Rightarrow [f(0)-\varepsilon] \underbrace{\int\limits_0^\delta \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\,dx}_{\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\big|_0^\delta} \le \underbrace{\int\limits_0^\delta \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} f(x)\,dx}_{I_1(\delta,\alpha)} \le [(f(0)+\varepsilon)] \underbrace{\int\limits_0^\delta \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\,dx}_{\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\big|_0^\delta}$

$\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\Big|_0^\delta = \operatorname{arctg}\frac{\delta}{\alpha} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ при $\alpha \to 0 \quad I_1(\delta,\alpha) \to f(0)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I(\alpha) = I_1(\alpha;\delta) + I_2(\alpha;\delta) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} f(0)\cdot\frac{\pi}{2}$ и $f(0) > 0$ по усл-ию

$\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha) \neq I(0)$ и $I(\alpha)$ разрывна при $\alpha=0$

14. Найти $\Phi'(\alpha)$, если:

5) $\Phi(\alpha) = \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} e^{\alpha^4 x^2}\,dx$;

3. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра. Если функции $f(x;\alpha)$ и $\dfrac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны в прямоугольнике (3), то интеграл (1) — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$ функция, производную которой можно вычислить по *правилу Лейбница*

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}\,dx. \qquad (6)$$

Если функции $f(x;\alpha)$ и $\dfrac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны в прямоугольнике (3), функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ дифференцируемы на отрезке $[\alpha;\alpha_2]$, а их значения принадлежат отрезку $[a;b]$, то интеграл (2) — функция, дифференцируемая на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, причем

$$\Phi'(\alpha) = f(\psi(\alpha);\alpha)\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha);\alpha)\varphi'(\alpha) + \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}\,dx. \qquad (7)$$

П. По правилу Лейбница

$\psi(\alpha) = \sin\alpha$ $\Rightarrow$
$\varphi(\alpha) = \cos\alpha$

$$\Phi'(\alpha) = e^{\alpha^4\sin^2\alpha}\cos\alpha + e^{\alpha^4\cos^2\alpha}\sin\alpha + \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} \underbrace{\frac{\partial}{\partial\alpha} e^{\alpha^4 x^2}}_{4\alpha^3 x^2\cdot e^{\alpha^4x^2}}\,dx = e^{\alpha^4\sin^2\alpha}\cos\alpha + e^{\alpha^4\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha + 4\alpha^3\int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} x^2 e^{\alpha^4x^2}\,dx$$

5) $\Phi'(\alpha) = 4\alpha^3 \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} x^2 e^{\alpha^4x^2}\,dx + \cos\alpha\cdot e^{\alpha^4\sin^2\alpha} + \sin\alpha\cdot e^{\alpha^4\cos^2\alpha}$;

17. С помощью дифференцирования интеграла $\int\limits_0^b \dfrac{dx}{x^2+\alpha^2}$ по параметру α, где $\alpha>0$, вычислить интеграл $\int\limits_0^b \dfrac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$. $= I$

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\Big|_0^b = \boxed{\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}}$$

$$\Phi'(\alpha) = \int\limits_0^b \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{x^2+\alpha^2}\right)dx = \int\limits_0^b \frac{-2\alpha}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx = -2\alpha\int\limits_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = -2\alpha I$$

диф. по параметру

$$\Phi'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+b^2/\alpha^2}\left(-\frac{b}{\alpha^2}\right) = -\frac{1}{\alpha^2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \frac{b}{\alpha(b^2+\alpha^2)} = -2\alpha I$$

явно

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{b}{2\alpha^2(b^2+\alpha^2)}$$

17. $\dfrac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{\alpha} + \dfrac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}$.

18. Применяя дифференцирование по параметру α, вычислить интеграл $I(\alpha)$, если:

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^\pi \ln\dfrac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\,\dfrac{dx}{\cos x}$, $|\alpha|<1$;

1) $g(x,\alpha) = \dfrac{1}{\cos x}\,\dfrac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}$ для $|\alpha|\le A<1$

$g(x,\alpha) \sim \dfrac{1}{\cos x}(2\alpha\cos x) = 2\alpha$ в окр-ти $x=\dfrac{\pi}{2}$

дробь ост огранич., на прямоуг $R=\{(x,\alpha)\,|\, x\in[0,\pi],\ \alpha\in[-A;A]\}$, $A<1$

$g(x,\alpha)$ непрер.

$|\alpha|<1 \Rightarrow 1-\alpha^2\cos^2 x>0$ произв по α непр и огр. $\Rightarrow$

можно дифф.

2) $g(x,\alpha) = \dfrac{1}{\cos x}\left[\ln(1+\alpha\cos x) - \ln(1-\alpha\cos x)\right]$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \left[\frac{\cos x}{1+\alpha\cos x} + \frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}\right]\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x}$$

$$I'(\alpha) = 2\int_0^{\pi}\frac{dx}{1-\alpha^2\cos^2 x} = 4\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-\alpha^2\cos^2 x}$$ в силу четности

3) $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}dx \quad \left(1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}\right) \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$$I'(\alpha) = 4\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)\left(1-\frac{\alpha^2}{1+t^2}\right)} = 4\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)-\alpha^2} = 4\int_0^{\infty}\frac{dt}{\underbrace{(1-\alpha^2)}_{a^2=1-\alpha^2}+t^2} = \frac{4}{a}\frac{\pi}{2},\ a>0$$

$$I'(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

4) $I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha = 2\pi\arcsin\alpha + C$

5) $I(0) = \int_0^{\pi}\dfrac{1}{\cos x}\ln 1\,dx = 0 \Rightarrow C=0$, $I(\alpha) = 2\pi\arcsin\alpha$

3) $2\pi\arcsin\alpha$;

Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E (1–5).

$E_2 = (1;+\infty)$

1. 1) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\alpha}$, $E = [\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 1$;

а) $(1;+\infty)$

$$\sup_{\alpha\in E_2}\int_{\xi}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \sup_{\alpha\in E_2}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{\xi}^{+\infty} = \sup_{\alpha\in E_2}\frac{1}{(\alpha-1)\xi^{\alpha-1}}$$

$\sup\limits_{\alpha>1} = +\infty \quad \forall\xi>1 \Rightarrow$ сх. неравномерно

б) $[\alpha_0,+\infty)$, $\alpha_0>1$

$\alpha_0>1 \qquad \sup\limits_{\alpha\geq\alpha_0} = \dfrac{1}{(\alpha_0-1)\xi^{\alpha_0-1}} \to 0 \qquad \xi\to+\infty$

($\downarrow$ по α) сх-ть по $\alpha\geq\alpha_0>1$ равномерна

1. Определение равномерной сходимости интеграла. В этом параграфе определение, признаки сходимости и критерий равномерной сходимости формулируются для несобственных интегралов вида

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx. \tag{1}$$

Соответствующие утверждения аналогично формулируются для других типов несобственных интегралов.

Интеграл (1), сходящийся для каждого $\alpha\in E$, называют *равномерно сходящимся на множестве* E, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое число δ_ε, что для всех $\alpha\in E$ и для всех $\xi\geqslant\delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{\xi}^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Если существует число $\varepsilon_0>0$ такое, что для любого $\delta\in[\alpha;+\infty)$ найдутся числа $\alpha_\delta\in E$ и $\xi_\delta\in[\delta;+\infty)$ такие, что

$$\left|\int\limits_{\xi_\delta}^{+\infty} f(x;\alpha_\delta)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0, \tag{3}$$

то интеграл (1), сходящийся для каждого $\alpha\in E$, *сходится неравномерно на множестве* E.

Интеграл (1) сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sup_{\alpha\in E}\int\limits_{\xi}^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad \xi\to+\infty. \tag{4}$$

$E_2 = (0,1)$

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^1\dfrac{dx}{x^\alpha}$, $E = (0;\alpha_0)$, $\alpha_0<1$;

а) $(0;1)$ $\quad \sup\limits_{\alpha\in E_2}\int_0^{\xi}\dfrac{dx}{x^\alpha} = \sup\limits_{\alpha\in E_2}\left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_0^{\xi} = \sup\limits_{\alpha\in E_2}\dfrac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

$\xi^{1-\alpha} = \exp\{(1-\alpha)\ln\xi\} \underset{\alpha\to1^-}{\to} 1$, а $1-\alpha\to0^+ \Rightarrow \sup\limits_{\alpha<1} = +\infty \quad \forall\xi>0$

$\Rightarrow$ сх. неравномерно

б) $(0;\alpha_0)$, $\alpha_0<1$ $\qquad x^{-\alpha}\le x^{-\alpha_0}$ $\qquad \forall\alpha\in(0;\alpha_0)$, $0\le x\le 1$

$$\sup_{\alpha\in(0;\alpha_0)}\int_0^{\xi} x^{-\alpha}dx = \frac{\xi^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}\to 0,\quad \xi\to 0 \Rightarrow \text{сх. равномерно } \alpha\in(0;\alpha_0)$$

6. Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E_1 и сходится неравномерно на множестве E_2.

3) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}$, $E_1=(-\infty;0]$, $E_2=[0;+\infty)$;

$$\int_{\xi}^{+\infty}\frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}=\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^2}\qquad t=x-\alpha$$

а) $E_1=(-\infty;0]$ $\quad \sup\limits_{\alpha\le 0}=\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{dt}{4+t^6}\to 0,\ \xi\to+\infty$ $\quad$ чит-ие сх. равн по $\alpha\le 0$

б) $E_2=[0,+\infty)$ $\quad\forall\xi\quad \sup\limits_{\alpha\ge 0}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{4+t^6}=c>0\not\to 0$ $\quad$ сх неравн.

4) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$, $E_1=[0;2]$, $E_2=[0;+\infty)$;

$$t=x-\alpha\qquad \int_{\xi-\alpha}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

а) $E_1=[0;2]$ $\quad \sup\limits_{0\le\alpha\le 2}=\int\limits_{\xi-2}^{\infty}e^{-t^2}dt\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0$ $\quad$ сх. равномерно

б) $E_2=[0;+\infty)$ $\quad\forall\xi\quad \sup\limits_{\alpha\ge 0}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\ \underset{\xi\to\infty}{\not\to} 0$ $\quad$ не сх. равномерно

Исследовать интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве E (7,8).

3) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}\,dx$, $E=(0;+\infty)$;

Замечание: при исслед. на равном. сход в интеграле нельзя делать замену, завис от пар-ра

$$\int_{\xi}^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}dx=\int_{\sqrt{\alpha}\,\xi}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$t=\sqrt{\alpha}\,x$ $\quad\forall\xi\quad \sup\limits_{\alpha>0}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\not\to 0$ $\quad(\xi\to+\infty)$ $\quad$ сх неравн.

$\sup\limits_{\alpha\ge\alpha_0}=\int\limits_{\sqrt{\alpha_0}\,\xi}^{+\infty}e^{-t^2}dt\to 0\quad \xi\to+\infty$ $\quad$ сх равном. по $\alpha\ge\alpha_0>0$

4) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}\,dx$, $E=[0;+\infty)$;

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x^2}{x(1+x^\alpha)}\,dx \qquad f(x,\alpha) = x\sin x^2 \text{ не зав. от } \alpha$$

и имеет огр. первообр.

$$-\frac{1}{2}\cos x^2$$

$$g(x) = \frac{1}{x(1+x^\alpha)} \searrow \text{ по } x \quad \forall \alpha \geq 0$$

$$|g(x,\alpha)| \leq \frac{1}{x} \to 0, \ x \to +\infty$$

инт-л сх. равном по $\alpha \geq 0$

по пр Дирихле

3. Признак Дирихле равномерной сходимости интеграла. Интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x;\alpha)g(x;\alpha)\,dx$$

сходится равномерно по α на множестве E, если при каждом фиксированном $\alpha \in E$ функции f, g, g'_x непрерывны по x на множестве $[a;+\infty)$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $g(x;\alpha) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно относительно $\alpha \in E$;

2) функция $g'_x(x;\alpha)$ для каждого фиксированного $\alpha \in E$ не меняет знака при изменении x на промежутке $[a;+\infty)$;

3) функция f для каждого $\alpha \in E$ имеет ограниченную первообразную, т. е. существует число $M > 0$ такое, что

$$\left|\int_a^x f(t;\alpha)\,dt\right| \leqslant M$$

для всех $x \in [a;+\infty)$ и для всех $\alpha \in E$.

---

6) $I(\alpha) = \int\limits_0^1 \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^\alpha}$, $E = (0;2)$.

$$\int_0^\delta \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha} \qquad 0 < \delta < 1$$

$$t = 1/x \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$$

$$\int_{1/\delta}^{\infty} \sin t \cdot t^{\alpha-2}\,dt \Rightarrow \sup_{\alpha\in E} \int_{1/\delta}^{\infty} \underbrace{t^0 \sin t\,dt}_{\alpha=2} = \int_{1/\delta}^{+\infty} \sin t\,dt = -\cos t\Big|_{1/\delta}^{+\infty} = \cos 1/\delta \not\to 0$$

$$\left(\exists \delta_n = \frac{1}{2\pi n} : \cos\frac{1}{\delta} = 1\right) \Rightarrow \text{сх. неравном.}$$

7. 1) Сходится неравномерно; 2) сходится неравномерно; 3) сходится неравномерно; 4) сходится равномерно; 5) сходится неравномерно; 6) сходится неравномерно.

---

1. Исследуйте на равномерную сходимость на множествах $E_1 = [a_0, +\infty)$ $a_0 > 0$ и $E_2 = (0, +\infty)$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

а) E_1: $f(x,\alpha) = \sin\alpha x$

$\forall \alpha > 0$ имеет первообр

$-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}$, если $\alpha \geq \alpha_0$

$$\left|-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{\alpha_0} \text{ при } \alpha \geq \alpha_0 > 0$$

$g(x,\alpha) = \frac{1}{x} \searrow$ по x, не зав от α $\quad g(x,\alpha) \to 0$, $x \to +\infty$ не зав от α

инт-л сход равном по призн Дирихле при $\alpha \geq \alpha_0 > 0$

4. Критерий Коши равномерной сходимости интеграла. Интеграл (1) сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда выполняется *условие Коши*: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_\varepsilon \in (a;+\infty)$ такое, что для любых $\xi' \in [\delta_\varepsilon;+\infty)$, $\xi'' \in [\delta_\varepsilon;+\infty)$ и для всех $\alpha \in E$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x;\alpha)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Если условие Коши не выполняется, т. е. существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (a;+\infty)$ найдутся числа $\alpha_\delta \in E$, ξ'_δ и ξ''_δ, где $\xi'_\delta \geqslant \delta$, $\xi''_\delta \geqslant \delta$, такие, что

$$\left|\int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} f(x;\alpha_\delta)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0, \tag{5}$$

то интеграл (1) не является равномерно сходящимся на множестве E.

Б) E_2: инт-л сход. неравномерно по кр. Коши

$$\exists \varepsilon>0 : \forall b'>1 \ \exists \xi>b', \exists \alpha>0 : \left|\int_{\xi}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}dx\right| \geq \varepsilon$$

$$\int_{\xi}^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x} dx = \int_{\alpha\xi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = C>0$$

$\alpha x = t$, $\xi = 2\pi n$, $\alpha = \frac{1}{n}$

2. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx, \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx, \quad \text{в) } \int_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{1+x^2}dx.$$

1. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Если функции $f(x;\alpha)$ и $f'_\alpha(x;\alpha)$ непрерывны на множестве

$$G = \{(x;\alpha)\colon\ a \leqslant x < +\infty, \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\},$$

интеграл $I(\alpha) = \int_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx$ сходится при каждом $\alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]$, а интеграл $\int_a^{+\infty} f'_\alpha(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha]$, то

$$I'(\alpha) = \int_a^{+\infty} f'_\alpha(x;\alpha)\,dx \tag{1}$$

при $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ (*правило Лейбница*).

2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла. Если на промежутке $[a;+\infty)$ существует функция $\varphi(x)$ такая, что $|f(x;\alpha)| \leqslant \varphi(x)$ для всех $x \in [a;+\infty)$ и для всех $\alpha \in E$, и если интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то интеграл (1) сходится *абсолютно* и *равномерно* на множестве E.

а)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x} = \frac{x\cos\alpha x}{x} = \cos\alpha x,$$

но $\int_0^{\infty} \cos\alpha x\,dx$ расходится

$$\text{Я } \Phi(\alpha;\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}dx, \ \beta>0$$

$g(\beta, x) = \frac{e^{-\beta x}}{x} \searrow$ на $(0;+\infty)$ и $\sin\alpha x$ имеет огр. первообр

$F(\alpha, x) = \frac{1-\cos\alpha x}{\alpha}$, при этом $\Phi(0,\beta)=0$ сх. равн по пр Дирихле

и $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e^{-\beta x}\sin\alpha x}{x}\right) = e^{-\beta x}\cos\alpha x \qquad |e^{-\beta x}\cos\alpha x| \leq e^{-\beta x}$

инт-л сход равномерно по пр Вейерштрасса

$\Rightarrow$ можно дифф. $\Phi'_\alpha(\alpha,\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx$ по пр Лейбница

$$\text{Я } \int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx, \ \beta>0, \alpha\in\mathbb{R}$$

$\mathrm{Re}(\beta - i\alpha) = \beta > 0$ инт-л сход.

$$\cos\alpha x = \mathrm{Re}(e^{i\alpha x}) \Rightarrow J = \mathrm{Re}\int_0^{\infty} e^{-\beta x}e^{i\alpha x}dx = \mathrm{Re}\int_0^{\infty} e^{-(\beta-i\alpha)x}dx = \mathrm{Re}\left.\frac{e^{-(\beta-i\alpha)x}}{-(\beta-i\alpha)}\right|_0^{\infty} = \mathrm{Re}\frac{1}{\beta-i\alpha}$$

$$= \mathrm{Re}\frac{\beta+i\alpha}{\beta^2+\alpha^2} = \frac{\beta}{\beta^2+\alpha^2}$$

интегр. : $\Phi(\alpha;\beta) - \underbrace{\Phi(0;\beta)}_{=0} = \beta\int_0^{\alpha}\frac{dt}{\beta^2+t^2} = \mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$

$\Rightarrow \Phi(\alpha;\beta) = \mathrm{arctg}\frac{\alpha}{\beta}$

инт-л сх равном. по β: $\sin\alpha x$ имеет ог.

первообр., $g(\beta, x) = \frac{e^{-\beta x}}{x} \searrow 0$ при $x>0, \beta \geq 0$
$x \to \infty$

по призн. Дирихле сх равном по $\beta \in [0;1]$ и

$e^{-\beta x}\frac{\sin \alpha x}{x}$ непр на $G = \{(x;\beta) : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq \beta \leq 1\}$

$\Rightarrow \Phi(\alpha;\beta)$ непр. по β на $[0,1]$ и непр. справа в $\beta = 0$

$\Rightarrow$ можно перейти к пределу под знаком инт-ла

$\lim\limits_{\beta \to +0} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{\sin \alpha x}{x}dx = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}dx = \lim\limits_{\beta \to +0}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}$, в силу

нечетности $\frac{\sin \alpha x}{x}$ $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin \alpha x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

б) $\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}$ непрер. $\forall \alpha, x$; $\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right) = -\frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}$

сх. равномерно на $[\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$

$\forall x \in [0;A]$ $\left|\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\right| \leq \frac{x}{1+x^2}$ сх равном по призн Вейерштрасса

$\approx x$ сход.

$\forall x \in [A; +\infty)$ $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \searrow 0$ и $g(x,\alpha) = \sin\alpha x$

имеет огр первообр. $\left|-\frac{\cos \alpha A}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{\alpha}$ $\forall \alpha \geq \alpha_0 > 0$ $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\alpha_0}$

$I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$ по прав. Лейбница

из пункта а) инт-л Дирихле $\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$, $\alpha > 0$

сход. и ; $I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int\limits_0^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x} - \frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}\right)dx$

$= \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x(1+x^2)}dx$

дифф. почленно : $I''(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx = I(\alpha)$

$I''(\alpha) - I(\alpha) = 0$ Общее решение: $I(\alpha) = C_1e^{\alpha} + C_2e^{-\alpha}$

$|I(\alpha)| \leq I(0) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

$\alpha \to +\infty: \ e^{-\alpha} \to 0, \ e^{\alpha} \to \infty \Rightarrow C_1 = 0 \ : \ I(\alpha) = C_2 e^{-\alpha}$

$I(0) = \frac{\pi}{2} = C_2 \Rightarrow I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \ \alpha > 0$, в силу чётности

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

в) $I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = -J(\alpha) \Rightarrow J(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} e^{-\alpha}\right)'_\alpha =$

$= \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \ \alpha > 0 \Rightarrow J(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \ \alpha > 0$, в силу нечётности

$J(\alpha) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha \ e^{-|\alpha|}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Используя интеграл Дирихле (12), вычислить интеграл (2–4).

2(3). $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x} dx$; $u = x^2, \ du = 2x\,dx$ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \frac{du}{2\sqrt{u}}$

$= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du}_{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$ (при $x \to 0$ $\frac{\sin x^2}{x} \sim x$; при $x \to +\infty$ сх условно по пр Дирихле)

3) $\pi/4$;

---

3. 1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$; $\sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}, \ \theta = \alpha x$

$J = \int_0^{+\infty} \frac{3\sin\alpha x - \sin 3\alpha x}{4x} dx = \frac{3}{4} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx}_{\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha} - \frac{1}{4} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3\alpha x}{x} dx}_{\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(3\alpha)} = \frac{\pi}{4} \operatorname{sign}\alpha$

3. 1) $(\pi/4) \operatorname{sign} \alpha$;

---

1. Пусть $a > 0, \ b > 0$. С помощью дифф. по пар-ру вычислить интеграл:

3) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx$; 1) при $x \to 0$: $e^{-ax^2} - e^{-bx^2} = (1 - ax^2 + O(x^4))$

$-(1 - bx^2 + O(x^4)) = -(a-b)x^2 + O(x^4)$

$\Rightarrow \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} = -(a-b)x + O(x^3)$ инт-л сход-ся

при $x \to +\infty$ $|e^{-ax^2} - e^{-bx^2}| \le e^{-\min(a,b)x^2} \Rightarrow \left|\frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\right| \le \frac{e^{-\min(a,b)x^2}}{x}$

сход при $a > 0, b > 0 \Rightarrow I(\alpha)$ сход. $\forall a, b > 0$

$\frac{\partial}{\partial a} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} = -\frac{x^2 e^{-ax^2}}{x} = -x e^{-ax^2}$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2}dx \quad \forall a \in [a_0, a_1] \quad \forall x \geq 0 \quad |xe^{-ax^2}| \leq xe^{-a_0x^2}$$

$$\int_0^\infty xe^{-a_0x^2}dx = \frac{1}{2a_0}$$ сход. инт-и сх-ся равном. по пр Вейерштрасса

2) по правилу Лейбница $I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\right)dx = -\int_0^\infty xe^{-ax^2}dx$

$u = ax^2$, $du = 2axdx$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-u}\frac{du}{2a} = \frac{1}{2a}\int_0^\infty e^{-u}du = \frac{1}{2a} = I'(a)$$

3) $I(a) = \int I'(a)da = -\frac{1}{2}\int\frac{da}{a} = -\frac{1}{2}\ln a + c$

$I(a=b) = \int_0^\infty \frac{e^{-bx^2} - e^{-bx^2}}{x}dx = 0 \Rightarrow 0 = I(b) = -\frac{1}{2}\ln b + c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln b$

$$\Rightarrow I(a) = -\frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{2}\ln b = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$$

3) $0{,}5\ln(b/a)$;

6. С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x}\,dx,\ \beta > 0;$

1) $x \to 0$: $1 - \cos\alpha x = \frac{(\alpha x)^2}{2} + O(x^4) \Rightarrow \frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-\beta x} \sim O(x)$ $\int_0^\varepsilon < \infty$

$x \to \infty$ $\left|\frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-\beta x}\right| \leq \frac{2}{x}e^{-\beta x}$; $\int_1^\infty \frac{e^{-\beta x}}{x}$ сход-ся $\forall x \in (0; \pi/a)$

$\Rightarrow I(\alpha, \beta)$ сход-ся

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1-\cos\alpha x}{x}e^{-\beta x}\right) = \frac{x\sin\alpha x}{x}e^{-\beta x} = \sin\alpha x\, e^{-\beta x}$$

$|\sin\alpha x\, e^{-\beta x}| \leq e^{-\beta x}$ $\int_0^\infty e^{-\beta x}dx = \frac{1}{\beta} < \infty$ инт-е сход. равном. по признаку Вейерштрасса.

2) по правилу Лейбница $I'(\alpha) = \int_0^\infty \sin\alpha x\, e^{-\beta x}dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$

Если $\alpha > 0$, то для любого $\beta \in R$ справедливы формулы

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad (4)$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \qquad (5)$$

$$I'(\alpha) = \frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}$$

3) $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{t}{\beta^2+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln(\beta^2+t^2)\Big|_{t=0}^{t=\alpha} = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}$ $(I(0)=0 \Rightarrow c=0)$

$u = \beta^2+t^2$, $du = 2tdt$

6. 1) $\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin \lambda x \, dx, \ \alpha > 0, \ \beta > 0, \ \lambda \neq 0;$

1) $x \to 0$: $e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} = (\beta - \alpha) x + O(x^2)$, $\sin \lambda x \sim \lambda x$

$\Rightarrow \forall x \in [0, \varepsilon]$ $\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} = (\beta - \alpha) + O(x)$

$x \to +\infty$ $|e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}| \leq e^{-\min(\alpha, \beta) x} \Rightarrow \left| \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin \lambda x \right| \leq \frac{e^{-\min(\alpha, \beta) x}}{x}$ –

инт-л сход равном. по пр Вейерштрасса

2) $I'_\alpha(\alpha, \beta, \lambda) \overset{?}{=} \int\limits_0^{+\infty} \frac{-x e^{-\alpha x}}{x} \sin \lambda x \, dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \lambda x \, dx = -\frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2}$

$\alpha \geq \alpha_0 > 0$

$|e^{-\alpha x} \sin \lambda x| \leq e^{-\alpha_0 x}$ сх равном по $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ по пр Вейершт

$(*)$ $I'_\alpha(\alpha, \beta, \lambda) = -\frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2}$ верно при $\alpha \geq \alpha_0 > 0$

Фактически, по теор. о дифф $\forall [\alpha_1, \alpha_2], \alpha_2 > \alpha_1 > 0$

$\forall \alpha > 0$ $\exists [\alpha_1, \alpha_2] \ni \alpha$ $(*)$ верно $\forall \alpha > 0$

$I(\alpha, \beta, \lambda) = -\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\lambda} + C(\beta, \lambda)$

$I(\beta, \beta, \lambda) = -\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\lambda} + \underbrace{C(\beta, \lambda)}_{= \operatorname{arctg} \beta/\lambda} = 0;$ $I(\alpha, \beta, \lambda) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\lambda}$

$\alpha \geq \alpha_0 > 0$

3) $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\lambda};$

---

5) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x \sqrt{1 - x^2}} \, dx;$ 1) $x \to 1$ $f(x, \alpha) \sim \frac{c}{\sqrt{1 - x^2}} \sim \frac{c_1}{\sqrt{1 - x}}$ $\alpha \neq 0$

$I(\alpha) \overset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^{\to 1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} = \int\limits_{0 \leftarrow}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ – сх. $1 - x = t$

Наш инт-л сх $\forall \alpha$ по пр сравнения

$I'(\alpha) \overset{?}{=} \int\limits_0^{\to 1} \frac{x}{1 + \alpha^2 x^2} \cdot \frac{1}{x \sqrt{1 - x^2}} \, dx = \int\limits_0^{\to 1} \frac{1}{(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{1 - x^2}} \, dx$

$|\ldots| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ – инт-л сход. по призн Вейерштрасса равном.

$$I'(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\sin t}{(1+\alpha^2\cos^2 t)\sin t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)\left(1+\frac{\alpha^2}{1+u^2}\right)} \ominus$$

$x=\cos t$

$dx=-\sin t\,dt$

$u=\operatorname{tg} t$

$t=\operatorname{arctg} u,\ dt=\frac{1}{1+u^2}\,du$

$$\ominus\int_0^{+\infty}\frac{du}{\underbrace{1+\alpha^2}_{=\beta^2}+u^2}=\frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{u}{\beta}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)+C$$

$$C=I(0)=0 \qquad I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1}\right)$$

5) $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$;

13. Используя интеграл Эйлера–Пуассона (19), доказать, что:

13.4) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\operatorname{ch}\beta x\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\beta^2/(4\alpha)},\quad \alpha>0;$

Инт-л Эйлера–Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$t=\sqrt{\alpha}x,\ dx=\frac{dt}{\sqrt{\alpha}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(x+y)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha u^2}du=2\int_0^{\infty}e^{-\alpha u^2}du=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$x+y=u$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\operatorname{ch}\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\alpha x^2+\beta x}+e^{-\alpha x^2-\beta x}\right)dx=\frac{e^{\beta^2/4\alpha}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\alpha(x-\beta/2\alpha)^2}+e^{-\alpha(x+\beta/2\alpha)^2}\right]dx$$

$$=\frac{e^{\beta^2/4\alpha}}{\cancel{2}}\cancel{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\beta^2/4\alpha}$$

Вычислить интеграл (15–19).

4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x}{x^2(1+x^2)}\,dx$; 1) $x\to 0$ $\quad \sin^2\alpha x\sim(\alpha x)^2\Rightarrow\frac{\sin^2\alpha x}{x^2(1+x^2)}\simeq\frac{\alpha^2x^2}{x^2}=\alpha^2 \quad \int_0^{\varepsilon}<\infty$

$x\to\infty$ $\quad \left|\frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2(1+x^2)}\right|\le\frac{1}{x^4}$ инт-л сход.

$|\alpha|\le A\quad \forall x\ge 0$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin^2\alpha x}{x^2(1+x^2)}\right)=\frac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\le\min\left\{\frac{2|\alpha|}{1+x^2},\frac{1}{x(1+x^2)}\right\}\le M(x)=\begin{cases}2A, & 0\le x<1\\ \frac{1}{x(1+x^2)}, & x\ge 1\end{cases}$$

инт-л сход. равном по призн. Вейерштр.

2) $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\right)-\frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}$ аналог сход. равном по пр Вейерштр.

3) $I''(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}dx=2\cdot\frac{\pi}{2}e^{-2|\alpha|}=\pi e^{-2|\alpha|}$

инт-л Лапласа

$$I'(\alpha) = \frac{-\pi}{2} e^{-2|\alpha|} + C_1; \quad I'(0) = -\frac{\pi}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}|\alpha| + \frac{\pi}{4} e^{-2|\alpha|} + C_2; \quad I(0) = \frac{\pi}{4} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{\pi}{4}$$

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}|\alpha| + \frac{\pi}{4} e^{-2|\alpha|} - \frac{\pi}{4}$$

4) $\frac{\pi}{4}(2|\alpha| - 1 + e^{-2|\alpha|})$;

1. Доказать равенство;

3) $\mathrm{B}(p;q) = \mathrm{B}(q;p),\ p>0,\ q>0$;

4) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$;

3)
$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

$u = 1-t$, $du = -dt$

$$B(p,q) = \int_1^0 (1-u)^{p-1} u^{q-1} \cdot (-du) = \int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,du = B(q,p)$$

4)
$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0<p<1$$

$$p = 1/2 \Rightarrow \left(\Gamma(1/2)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi \Rightarrow$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Интеграл
$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx, \tag{1}$$
сходящийся при $p>0$, называют *гамма-функцией*, а интеграл
$$\mathrm{B}(p;q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{2}$$
сходящийся при $p>0$ и $q>0$, называют *бета-функцией*.

Интегралы (1) и (2) называют также *эйлеровыми интегралами второго и первого рода* соответственно.

Отметим основные формулы для интеграла (I):

а) *формула понижения*
$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p), \quad p>0; \tag{3}$$

б) *формула дополнения*
$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0<p<1. \tag{4}$$

Так как $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$, то из формулы (3) следует, что
$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in N.$$

Связь между бета-функцией и гамма-функцией выражается формулой
$$B(p;q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p>0,\ q>0. \tag{5}$$

Используя эйлеровы интегралы, вычислить интеграл (7–12).

12) $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}$; 1) $t = \frac{x+1}{3}$ $\quad dx = 3\,dt$ $\quad x=-1: t=0$; $x=2: t=1$

$2-x = 2-(3t-1) = 3(1-t)$ | $1+x = 1+(3t-1) = 3t$

$$\Rightarrow (2-x)(1+x)^3 = 3(1-t)(3t)^3 = 81t^3(1-t)$$

$$\sqrt[4]{\ldots} = 3t^{3/4}(1-t)^{1/4}$$

2)
$$I = \int_0^1 \frac{3\,dt}{3t^{3/4}(1-t)^{1/4}} = \int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{-1/4}\,dt = B\left(\tfrac14, \tfrac34\right) = \frac{\Gamma\left(\frac14\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\tfrac14\right)\cdot\Gamma\left(\tfrac34\right)$$

3) по ф-ле понижения $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$; $p = \frac14 \Rightarrow \Gamma\left(\frac14\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right) = \frac{\pi}{\sin \pi/4} = \pi\sqrt{2}$

2) $\pi\sqrt{2}$;

9.2 $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$;
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{(1+x)^2} = B\left(\tfrac54, \tfrac34\right) = \frac{\Gamma\left(\frac54\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)}{\underbrace{\Gamma(2)}_{=1!}} =$$

$$= \frac{\frac14\Gamma\left(\frac14\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)}{1} = \frac14 \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$p = \frac54$; $q = \frac34$; $p+q = 2$

2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

128) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \, dx;$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \, dx = \int\limits_0^1 t^4 (1-t^2)^{5/2} dt = \int\limits_0^1 v^2 (1-v)^{5/2} \frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

$\sin x = t \quad t^2 = v$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 v^{3/2} (1-v)^{5/2} dv = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(5/2) \cdot \Gamma(7/2)}{5!} = \frac{1}{2 \cdot 5!} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{3 \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2^9} = \frac{3\pi}{2^9} = \frac{3\pi}{512}$$

8) $\dfrac{3\pi}{512}$;

Найти интеграл в смысле главного значения (248–255).

248. v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx$. **249.** v.p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, dx$.

248) $\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = \lim\limits_{a \to \infty} \int\limits_{-a}^{a} \sin x \, dx$

$$\int\limits_{-a}^{a} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{-a}^{a} = -\cos a + \cos a = 0$$

$\Rightarrow \text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = 0$

249) $\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, dx = \lim\limits_{a \to \infty} \int\limits_{-a}^{a} \cos x \, dx =$

$\lim\limits_{a \to \infty} \sin x \Big|_{-a}^{a} = \lim\limits_{a \to \infty} 2 \sin a$ не имеет предела

7. Метод выделения главной части. Этот метод основан на следующем утверждении: если подынтегральная функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + R(x)$, где $R(x)$ — функция абсолютно интегрируемая, то функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно либо абсолютно интегрируемы, либо условно интегрируемы, либо неинтегрируемы.

Обычно представление функции $f(x)$ в указанном виде удается получить, выделяя ее главную часть при $x \to +\infty$.

8. Интеграл в смысле главного значения (в смысле Коши). *Интегралом в смысле главного значения функции* $f(x)$, $x \in R$, называется

$$\lim_{a \to +\infty} \int\limits_{-a}^{+a} f(x) \, dx.$$

Этот предел обозначается $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$. Таким образом, по определению

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{a \to +\infty} \int\limits_{-a}^{+a} f(x) \, dx.$$

Если существует несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$, то существует и интеграл в смысле главного значения, и оба интеграла равны. Из существования интеграла в смысле главного значения не следует существование соответствующего несобственного интеграла. В самом деле,

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \, dx = \lim_{a \to +\infty} \int\limits_{-a}^{+a} x \, dx = \lim_{a \to +\infty} \frac{x^2}{2} \Big|_{-a}^{+a} = 0,$$

а $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \, dx$, очевидно, не существует.

248. 0. **249.** Не существует.

Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье (1–4).

1. 1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < \tau, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \tau; \end{cases}$

непр на $\mathbb{R} \setminus \{\pm\tau\}$

1. 1) $f(x) = \dfrac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin \tau y}{y} \cos xy \, dy$;

f четн. $\Rightarrow f(x) = \int\limits_0^{\infty} a(y) \cos xy \, dy$

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cos yt \, dt = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\tau} \cos yt \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{\sin ty}{y} \Big|_0^{\tau} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \tau y}{y} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \tau y}{y} \cos xy \, dy$$

1. Интеграл Фурье. Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на любом отрезке действительной прямой, абсолютно интегрируема на R и имеет в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные. Тогда в точках непрерывности функция f представляется в виде *интеграла Фурье*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t)\, dt, \qquad (1)$$

а в точках разрыва функции f левую часть равенства (1) следует заменить на

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Если непрерывная, абсолютно интегрируемая на R функция f имеет в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные, то в случае, когда эта функция является четной, справедливо равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y) \cos xy\, dy, \qquad (2)$$

где

$$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos yt\, dt, \qquad (3)$$

а в случае, когда f — нечетная функция, выполняется равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(y) \sin xy\, dy, \qquad (4)$$

где

$$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \sin yt\, dt. \qquad (5)$$

Формулу (1) можно записать в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy(x-t)}\, dt,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

2. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье. Функцию f, определяемую формулой

$$\widehat{f}(y) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt, \qquad (7)$$

называют *преобразованием Фурье* функции f и обозначают также и через $F[f]$, а функцию $\widehat{f}$, определяемую формулой

$$\widetilde{f}(y) = \text{v.p.} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt}\, dt, \qquad (8)$$

называют *обратным преобразованием Фурье* функции f и обозначают $F^{-1}[f]$.

Если функция f абсолютно интегрируема на R, то интегралы (7) и (8) существуют как несобственные, а не только в смысле главного значения.

2.3) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если} \quad |x| \leqslant \pi/2, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \pi/2; \end{cases}$

$f(x)$ чётна $= \int_0^{+\infty} a(y) \cos xy\, dy$

$a(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos yt\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos yt\, dt$

$\int_0^{\pi/2} \cos t \cos yt\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\cos(1+y)t + \cos(1-y)t]\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(1+y)\pi/2}{1+y} + \frac{\sin(1-y)\frac{\pi}{2}}{1-y}\right] \Rightarrow$

$a(y) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1+y)\frac{\pi}{2}}{1+y} + \frac{\sin(1-y)\frac{\pi}{2}}{1-y}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{1+y} \cdot \frac{1-y}{} + \frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{1-y} \cdot \frac{1+y}{}\right] = \frac{2}{\pi} \frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{1-y^2}$

$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi y/2}{1-y^2} \cos xy\, dy$

3) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi y/2)}{1-y^2} \cos xy\, dy;$

5. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее нечетным образом на интервал $(-\infty; 0)$, если:

1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если} \quad x > \pi; \end{cases}$

$f(x) = \int_0^{+\infty} b(y) \sin xy\, dy$ в силу нечетности

$b(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin yt\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \sin yt\, dt$; $\int_0^{\pi} \sin t \sin yt\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} [\cos(1-y)t - \cos(1+y)t]\, dt =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(1-y)\pi}{1-y} - \frac{\sin(1+y)\pi}{1+y}\right] = \frac{\sin y\pi}{1-y^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \pi y}{1-y^2} \sin xy\, dy$

5. 1) $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi y}{1-y^2} \sin xy\, dy;$

6. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее четным образом на интервал $(-\infty;0)$, если:

1) $f(x)=e^{-\alpha x},\ x\geqslant 0,\ \alpha>0;$

$f(x)=e^{\alpha x}$ продолжим по чётности, $f(x)$ непр на $\mathbb{R}$

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos yt\,dt}_{\alpha/(\alpha^2+y^2)}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}\Rightarrow f(x)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha^2+y^2}\cos xy\,dy$$

6. 1) $f(x)=\dfrac{2\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\alpha^2+y^2}\,dy;$

3. Найдите преобразование Фурье:

а) $f(x)=e^{-\alpha|x|},\ \alpha>0;$ б) $f(x)=\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2},\ \alpha>0;$

$x=-t,\ dx=-dt$

а) $$F[f]=\text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}e^{-ity}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha t}e^{-ity}dt+\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\cdot e^{-ity}dt\right)$$

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty}e^{-(\alpha-iy)x}dx+\int_0^{\infty}e^{-(\alpha+iy)x}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\alpha-iy}+\frac{1}{\alpha+iy}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$$

б) $f(x)=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+x^2},\ \alpha>0$ чётная

$x/\alpha=t\Rightarrow dt=\frac{dx}{\alpha}$

$$F[f]=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixy}}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\cos xy\,dx=\frac{2\alpha^2}{\alpha^2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\cos yx}{1+(x/\alpha)^2}dx=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\cos y\alpha t}{1+t^2}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-\alpha|y|}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\alpha|y|}$$

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$ (7–9).

8. 1) $f(x)=xe^{-\alpha|x|},\ \alpha>0;$ 2) $f(x)=e^{-x^2/2};$

1)
$$F[xf(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)e^{-iyx}dx=$$

св-во 5

$$=i\frac{d}{dy}F[y]=i\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iyx}dx\right]$$

4) *Преобразование Фурье производной.* Если функция f и ее производные до n-го порядка включительно непрерывны и абсолютно интегрируемы на R, то

$$F[f^{(k)}]=(iy)^kF[f],\quad k=1,2,...,n. \tag{9}$$

5) *Производная преобразования Фурье.* Если функция f непрерывна на R, а функции $f(x)$, $xf(x)$, ..., $x^nf(x)$ абсолютно интегрируемы на R, то функция $\widehat{f}(y)=F[y]$ имеет на R производные до n-го порядка включительно, причем

$$\widehat{f}^{(k)}(y)=(-i)^kF[x^kf(x)],\quad k=1,2,...,n. \tag{10}$$

$$f_0(x)=e^{-\alpha|x|}\to F_0(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$$

$$F[y]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\,e^{-\alpha|x|}e^{-iyx}dx=i\frac{d}{dy}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}\right)$$

8. 1) $F[f]=-i\sqrt{\dfrac{8}{\pi}}\dfrac{\alpha y}{(y^2+\alpha^2)^2};$

$$=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-2\alpha y}{(\alpha^2+y^2)^2}\Rightarrow F[y]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\alpha|x|}e^{-iyx}dx=-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha y}{(y^2+\alpha^2)^2}$$

2) $f(x)=e^{-x^2/2}$, $F[f]$ – ? $\quad F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-ixy}\,dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}$

$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos xy\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,I(y)$; $\quad I(y)=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos xy\,dx$

$I'(y)=\int\limits_{0}^{\infty}(-x)e^{-x^2/2}\sin xy\,dx \qquad |xe^{-x^2/2}\sin xy|\le xe^{-x^2/2}$ – инт-л сх

$\Rightarrow$ инт-л сход равном по пр. Вейерштрасса

$u=\sin xy \qquad dv=-xe^{-x^2/2}dx$

$du=y\cos xy\,dx \qquad v=e^{-x^2/2}$

$$I'(y)=\int\limits_{0}^{+\infty}(-x)e^{-x^2/2}\sin xy\,dx=\sin xy\,e^{-x^2/2}\Big|_0^{+\infty}-\int\limits_{0}^{+\infty}ye^{-x^2/2}\cos xy\,dx$$

$I'(y)=-y\,I(y)$

$\frac{dI}{I}=-y\,dy \qquad \ln|I|=-\frac{y^2}{2}+c$, $\quad I(y)=ce^{-y^2/2}$

$$c=I(0)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}} \implies F[f]=e^{-y^2/2}$$

2) $F[f]=e^{-y^2/2}$;

---

5) $f(x)=\frac{d}{dx}\left(x^2e^{-|x|}\right)$; $\quad F[f]=F\left[\frac{d}{dx}(x^2e^{-|x|})\right]=iy\,F[x^2e^{-|x|}] \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$

$$\frac{d^2}{dy^2}F[e^{-|x|}]=F[-x^2f(x)]=-F[x^2f(x)]\Rightarrow F[x^2e^{-|x|}]=-\frac{d^2}{dy^2}F[e^{-|x|}]=$$

$$=-\frac{d^2}{dy^2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}\right)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{6y^2-2}{(y^2+1)^3}=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3};\quad F[f]=iyF[x^2e^{-|x|}]=2i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,y\,\frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3}$$

5) $F[f]=2i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,y\,\frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3}$;

---

10. Пусть $\widehat{f}(y)=F[f(x)]$. Доказать, что:

2) $F[f(x-\alpha)]=e^{-i\alpha y}\widehat{f}(y)$, $\alpha\in R$;

3) $F[\cos\alpha x\cdot f(x)]=\frac{\widehat{f}(y-\alpha)+\widehat{f}(y+\alpha)}{2}$, $\alpha\in R$;

$$2)\ F[f(x-\alpha)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x-\alpha)e^{-ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\alpha y}e^{-iuy}du=e^{-i\alpha y}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-iuy}du}_{\text{"}\,\hat{f}(y)}$$

$e^{-ixy}=e^{-i(u+\alpha)y}=e^{-iuy}e^{-i\alpha y}$

$u=x-\alpha$

$dx=du$

$=e^{-i\alpha y}\hat{f}(y)$

3) $F[\cos\alpha x \cdot f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\alpha x\, f(x) e^{-ixy} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x})e^{-ixy}dx$

константа нормир. подразумев.

$\cos\alpha x = \frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}$

$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(e^{-ix(y-\alpha)}+e^{-ix(y+\alpha)})dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(y-\alpha)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix(y+\alpha)}dx\right] =$

$= \frac{1}{2}[\hat{f}(y-\alpha)+\hat{f}(y+\alpha)]$

13. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-|x|^3}$ есть бесконечно дифференцируемая функция.

$F[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|^3}e^{-iyx}dx$

пок-ем, что $F^m[y] = \frac{d^m}{dy^m}\int xe^{-|x|^3}e^{-iyx}dx = \int xe^{-|x|^3}\frac{\partial^m}{\partial y^m}e^{-iyx}dx =$

$= \int (-ix)^m xe^{-|x|^3}e^{-iyx}dx = (-i)^m\int x^{m+1}e^{-|x|^3}e^{-iyx}dx$

$x\to 0$: $g_m(x) \sim |x|^{m+1}$; $\int_{-1}^{1}|x|^{m+1}dx < \infty$ $\forall m \geq 0$

$x\to\infty$: $|x|^{m+1}e^{-|x|^3} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ и $\int_{1}^{+\infty}|x|^{m+1}e^{-x^3}dx$ сход. по пр. Вейерш. равном. $(x^{m+1}e^{-x^3} \leq x^{m+1}e^{-x^2}$;

$\int_0^\infty x^{m+1}e^{-x^2}dx = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{m+2}{3}\right)$ – сход.)

$\Rightarrow \forall m$ $g_m(x) \in L^1_R$

по теор о дифф под знаком инт-ла $\Phi(y,x) = xe^{-|x|^3}e^{-iyx}$

$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\Phi(y,x) = (-ix)^m xe^{-|x|^3}e^{-iyx}$ и $\left|\frac{\partial^m}{\partial y^m}\Phi(y,x)\right| = g_m(x) \in L^1_R$ $\Rightarrow$

m любое и $F^m[y] = \int\frac{\partial^m}{\partial y^m}\Phi(y,x)dx$ (при этом каждая произв. непрер.)

14. Пусть $\widehat{f}(y)$ — преобразование Фурье функции $1/(1+|x|^5)$. Доказать, что:

1) $\widehat{f}(y)$ имеет непрерывную на R производную третьего порядка.

3) $\widehat{f}(y) = o(1/y^5)$ при $y\to\infty$.

$\hat{f}(y) = F\left[\frac{1}{1+|x|^5}\right]$

1) $f(x) = \frac{1}{1+|x|^5}$ непр. на $\mathbb{R}$

$f(x), xf(x), x^2f(x), x^3f(x) \in L^1_R \Rightarrow \hat{f}(x)$ трижды непр. дифф.

3) $\hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{y^5}\right), y \to \infty$

$f(x) = \varphi(|x|^5)$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t}$ — беск дифф. в окр $t=0$

Теорема 22.8. 1) *Пусть функция f имеет период $2l$ и при всех x существует $f^{(k-1)}(x)$ — кусочно-гладкая функция на $[-l;l]$, $l>0$. Тогда коэффициенты Фурье f удовлетворяют условию $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $k = 1, 2, \ldots$).*

2) *Пусть функция f имеет период $2l$, причём $f^{(k-2)}$ непрерывна в любой точке, а $f^{(k-1)}$ — кусочно непрерывно дифференцируемая функция на $[-l;l]$, $l>0$. Тогда коэффициенты Фурье f удовлетворяют условию $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $k = 2, 3, \ldots$).*

$g(x) = |x|^5$ непр.

$g'(x) = 5x^4 \operatorname{sign} x$

$g''(x) = 20|x|^3$

$g'''(x) = 60x^2 \operatorname{sign} x$

$g^{IV}(x) = 120|x|$ — непр. на $\mathbb{R}$ и абс интегр

по Th о порядке убыв. коэфф.

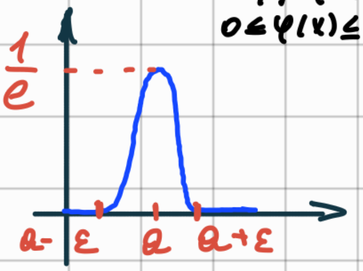
$g^{V}(x) = 120 \operatorname{sign} x$ кусочно-непр. $\xrightarrow{y\to\infty} 0$

$\varphi(g(x)) = f(x)$ — кус-гладк. $\Rightarrow F[f^{V}] = (iy)^5 F[f] = (iy)^5 \hat{f}(y)$, $\hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{y^5}\right), y \to \infty$

58. δ-функция не порождается никакой локально интегрируемой функцией.

Пусть $\exists f(x)$ лок интегр. $(\delta, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$, пусть $\varphi_\varepsilon(x) \geq 0$: $\varphi(0) = 1$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-\varepsilon;\varepsilon]$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - (x-a)^2}}, & |x-a| < \varepsilon \\ 0, & |x-a| \geq \varepsilon \end{cases}$$



Тогда $(\delta, \varphi_\varepsilon) = \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx = \varphi_\varepsilon(a) = \frac{1}{e}$, $|\varphi_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}$

$\exists \varepsilon > 0$: $\int\limits_{a-}^{a+\varepsilon} |\delta_a(x)|\,dx < 1$, $\left|\int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta_a(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{e}\int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta_a(x)\,dx < \frac{1}{e}$

$\delta_a(x)$ — лок абс интегр $\int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} |\delta_a(x)|\,dk \to 0$, противореч

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Топологические пространства. Множество X называют *топологическим пространством*, если в нем задана система $\Omega = \{G\}$ его подмножеств, удовлетворяющая следующим условиям:

1) пересечение любой конечной совокупности множеств системы Ω принадлежит этой системе;

2) объединение любой совокупности множеств системы Ω принадлежит этой системе;

3) $X \in \Omega$, $\varnothing \in \Omega$.

Систему Ω называют *топологией топологического пространства* X, а множества системы Ω — его *открытыми множествами*.

Для каждой точки $x \in X$ всякое содержащее ее множество $G \in \Omega$ называют ее *окрестностью*.

Если у любых двух точек топологического пространства существуют непересекающиеся окрестности, то пространство называют *хаусдорфовым* или *отделимым*.

Множества, дополнительные к открытым, называют *замкнутыми*.

Всякую подсистему $\mathcal{D}$ системы Ω открытых множеств топологического пространства называют его *базой топологии*, если любое открытое множество пространства является объединением некоторой совокупности множеств из $\mathcal{D}$.

Систему $\mathcal{D}(x)$ окрестностей точки x топологического пространства X называют *локальной базой топологии в этой точке*, если, какова бы ни была окрестность V точки x в пространстве X, существует такая окрестность $U \in \mathcal{D}(x)$, что $U \subset V$.

Точку $x \in X$ называют *точкой прикосновения* множества $E \subset X$, если любая окрестность точки x содержит точки множества E.

Точку $x \in X$ называют *предельной точкой* множества $E \subset X$, если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества E, отличную от x.

Совокупность всех точек прикосновения множества $E \subset X$ называют его *замыканием* $\overline{E}$.

Множество E называют *плотным* в пространстве X, если $\overline{E} = X$.

Последовательность точек $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называют *сходящейся* в пространстве X, если существует такая точка $x \in X$, что для каждой ее окрестности $U(x)$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется включение $x_n \in U(x)$. В этом случае точку x называют *пределом последовательности* $(x_1; \ldots; x_n; \ldots)$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. В следующем пункте будет дано обобщение понятия предела последовательности точек топологического пространства.

3. Обобщенные функции. *Пространством основных функций* D называют множество всех бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi\colon R \to C$ со следующим определением сходимости последовательностей: последовательность $\varphi_n \in D$ называют *сходящейся к функции* $\varphi \in D$, если существует такой отрезок $[a;b]$, что $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [a;b]$, $n = 1, 2, \ldots$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [a;b]$ и на этом отрезке последовательность функций φ_n и последовательности всех их производных $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходятся соответственно к функции φ и к ее производным $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в D.

Функции, заданные на пространстве основных функций, называют обычно *функционалами* и вместо $f(\varphi)$ пишут (f, φ).

Функционал $f\colon D \to R$ называют *линейным*, если для любых $\varphi \in D$, $\psi \in D$ и любых λ, $\mu \in C$ выполняется условие

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

Функционал $f\colon D \to C$ называют *непрерывным*, если из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в D следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi)$.

Всякий линейный непрерывный функционал f, заданный на пространстве основных функций D, называют *обобщенной функцией* (на D), и их совокупность обозначают D'.

Функцию $f\colon R \to C$ называют *локально интегрируемой*, если она абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке.

Обобщенную функцию

$$(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

называют *обобщенной функцией, порожденной локально интегрируемой функцией* $f\colon R \to R$.

Другим примером обобщенной функции является δ-функция $\delta(x)$

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D.$$

Сдвинутой δ-функцией $\delta(x - x_0)$ называют обобщенную функцию, ставящую в соответствие каждой основной функции φ число $\varphi(x_0)$.

Можно показать, что δ-функция не порождается никакой локально интегрируемой функцией.

Последовательность обобщенных функций $f_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$, называют *сходящейся к обобщенной функции* $f \in D'$, если для любой функции $\varphi \in D$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

Производной обобщенной функции f называют функционал на D, обозначаемый f' и определяемый равенством

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in D. \tag{2}$$

Производные порядка $n = 2, 3, \ldots$ определяют по формуле

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Из этих определений следует, что

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \quad \varphi \in D, \quad f^{(0)} = f, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для любой обобщенной функции из D' любая ее производная также обобщенная функция из D'.

Таким образом, обобщенные функции имеют производные любого порядка.

60. Существуют ли в пространстве D' пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$? Если они существуют, то чему равны? Да

послед $T_n \in \mathcal{D}'$ обобщ ф-ций сход. к $T \in \mathcal{D}'$, если $\forall \varphi \in \mathcal{D} \to$ $\lim\limits_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$, возьмём $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ – беск дифф. финитн. ф-ции.

т.е φ имеет компактн носитель (границ цены обнул.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(nx)\varphi(x)\,dx = \Big[\underbrace{\frac{\sin nx}{n}\varphi(x)}_{=0}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(nx)\varphi'(x)\,dx = -\frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\sin(nx)\varphi'(x)\,dx$$

φ' – финитная и непр. $\Rightarrow |(T_n,\varphi)| = \left|\int \cos(nx)\varphi\right| \le \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)|\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow T_n(\varphi) \to 0 \;\forall \varphi$

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx = 0$

для $\sin(nx)$: $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(nx)\varphi(x)\,dx = -\frac{\cos nx}{n}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(nx)\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty}\cos(nx)\varphi'(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;\forall\varphi$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin(nx) = 0$

60. 0, 0.

4. Докажите, что в D' справедливы равенства:

а) $\lim\limits_{a\to+0} \dfrac{a}{a^2+x^2} = \pi\delta(x)$; б) $\lim\limits_{a\to+0} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{a} = \pi\delta(x)$.

а) пусть $\underset{\in\mathcal{D}}{\varphi(x)} = \varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \varepsilon \\ \ne 0, & |x| \le \varepsilon \end{cases}$ $\varepsilon > 0$

$\left(\frac{a}{a^2+x^2}, \varphi\right) \in L_R \quad \forall a > 0 \qquad = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{a\,\varphi_\varepsilon(x)}{x^2+a^2}\,dx$

$\sphericalangle\; \overset{\text{огр на } \mathbb{R}}{\varphi'(\xi(x))} = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \lambda(x) \quad \forall x \ne 0$ по Th Лагранжа

$\xi(x) \in (0; x)$

$\varphi \in \mathcal{D}, \varphi' \in \mathcal{D} \Rightarrow \lambda(x)$ огр. $|\lambda(x)| \le M \quad \forall x \ne 0$

$\varphi(x) = \varphi(0) + x\lambda(x)$

$$\left(\frac{a}{x^2+a^2}, \varphi\right) = \overbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{a\varphi(0)}{a^2+x^2}\,dx}^{=I_1} + \overbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{a\,x\,\lambda(x)}{x^2+a^2}\,dx}^{=I_2}$$

$$I_1 = a\varphi(0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{dx}{x^2+a^2} = a\varphi(0)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \varphi(0)\cdot 2\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{a} \xrightarrow{a\to+0} 2\varphi(0)\frac{\pi}{2} = \pi\varphi(0)$$

$$|I_2| \le Ma\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{|x|\,dx}{x^2+a^2} = 2Ma\int_0^{\varepsilon}\frac{x\,dx}{x^2+a^2} = Ma\ln(x^2+a^2)\Big|_0^{\varepsilon} = \underbrace{Ma\ln(\varepsilon^2+a^2)}_{\to 0} - \underbrace{2M\ln a}_{\to 0} \xrightarrow[a\to+0]{} 0$$

$\lim\limits_{a\to+0} I_2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{a\to+0}\left(\frac{a}{x^2+a^2}, \varphi\right) = \pi\varphi(0) + 0 = (\pi\delta(x), \varphi) \Rightarrow \lim\limits_{a\to+0}\frac{a}{x^2+a^2} = \pi\delta(x).$

б) $\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a} \in L_2 \quad \forall a>0$

Пусть $\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x), \varepsilon>0 \quad \forall x\neq 0 \quad \varphi'(\xi(x)) = \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \lambda(x),\ \xi(x)\in(0;x)$ по Th. Лагр.

$|\lambda(x)| \leq M \quad \forall x\neq 0$ и $\varphi(x) = \varphi_0 + x\lambda(x)$

$$\left(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}, \varphi\right) = \varphi(0)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{x}{a}\lambda(x)\,dx = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \varphi(0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{x}{a}}{x}\,dx}_{\text{инт-л Дирихле}} = \pi\varphi(0)$$

$$|I_2| \leq M\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin\frac{x}{a}\,dx\right| = 2M\left|\int_0^{\varepsilon}\sin\frac{x}{a}\,dx\right| = 2M\left|-a\cos\frac{x}{a}\Big|_0^{\varepsilon}\right| = 2Ma\left(1-\cos\frac{\varepsilon}{a}\right)\xrightarrow[a\to+0]{} 0$$

$$\lim_{a\to+0}\left(\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a}, \varphi\right) = \pi\varphi(0) + 0 = (\pi\delta(x), \varphi) \Rightarrow \lim_{a\to+0}\frac{1}{x}\sin\frac{x}{a} = \pi\delta(x).$$

68. Производная f' обобщенной функции $f \in D'$ также является обобщенной функцией из D'.

Пусть $T \in \mathcal{D}'$, определим T' как новый функционал на $\mathcal{D}$

$(T', \varphi) = -(T, \varphi')$

1) линейность: T и $\varphi \to \varphi'$ линейны $\Rightarrow T': \varphi \to -T(\varphi')$ линеен

2) непрер-сть: если $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}$, то $(T', \varphi_n) \to 0$ нужно проверить

если $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}$: $\varphi_n \in K \subset \mathbb{R}$ – фикс компакт: $\forall n$ $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$

и $\forall k$ $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi_n^{(k)}(x)| \to 0 \Rightarrow \varphi_n'$ тоже имеет носитель внутри

K и $\forall k$ $\sup_x|(\varphi_n')^{k}(x)| = \sup_x|\varphi_n^{(k+1)}(x)| \to 0 \Rightarrow \varphi_n' \to 0$ в $\mathcal{D} \Rightarrow (T, \varphi_n') \to 0$

Тогда $(T', \varphi_n) = -(T, \varphi_n') \to 0$ и $T \in \mathcal{D}' \Rightarrow T' \in \mathcal{D}'$

70. Если f и g — обобщенные функции, а $\lambda,\ \mu \in C$, то $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Пусть $f, g \in \mathcal{D}'$ по свой-ву $(a', b) = -(a, b')$ $\forall b \in \mathcal{D}$

$\lambda f + \mu g$: $(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi) \in \mathcal{D}'$

$$([\lambda f + \mu g]', \varphi) = -(\lambda f + \mu g, \varphi') = -[\lambda(f, \varphi') + \mu(g, \varphi')]$$

$$= \lambda[-(f, \varphi')] + \mu[-(g, \varphi')] = \lambda(f', \varphi) + \mu(g', \varphi) \Rightarrow (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

В задачах 71–77 вычислить производные обобщенных функций.

71. $y = \theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \geqslant x_0, \\ 0 & \text{при } x < x_0. \end{cases}$

ф-ция хевисайда

$$\langle(\theta(x-x_0))', \varphi\rangle = -\langle\theta(x-x_0), \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x-x_0)\varphi'(x)\,dx = -\int_{x_0}^{+\infty}\varphi'(x)\,dx$$

$$= -(0 - \varphi(x_0)) = \varphi(x_0) = \langle\delta(x-x_0), \varphi\rangle \Rightarrow y' = \delta(x-x_0)$$

71. $y' = \delta(x - x_0)$.

72. $y=\delta(x-x_0)$. $\langle(\delta(x-x_0))', \varphi\rangle = -\langle(\delta(x-x_0)), \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\varphi'(x)\,dx = -\varphi'(x_0)$

Док-во импульсного св-ва δ-функции: $\measuredangle\ \eta\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ непр неотр. $\int_{-1}^{1}\eta(u)\,du = 1$ и $\eta_n(u) = n\eta(nu)$, тогда $\forall n$ η_n гладкий и неотриц: ($\eta_n(u)=0\ \forall |u|>\frac{1}{n}$)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta_n(u)\,du = \int_{-1/n}^{1/n} n\eta(nu)\,du = \int_{-1}^{1}\eta(v)\,dv = 1$$

$\varphi\in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$: $I_n = \int_{-\infty}^{\infty}\eta_n(x-x_0)\varphi(x)\,dx$ $u=x-x_0,\ dx=du$

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty}\eta_n(u)\,\varphi(u+x_0)\,du = \int\eta_n(u)\,[\varphi(u+x_0)-\varphi(x_0)]\,du + \varphi(x_0)\underbrace{\int\eta_n(u)\,du}_{=1} \Rightarrow$$

$I_n = \varphi(x_0) + \int\eta_n(u)\,[\varphi(u+x_0)-\varphi(x_0)]\,du$, φ непр в $x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall u: |u|<\delta \Rightarrow |\varphi(u+x_0)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$ и $\operatorname{supp}\eta_n \in |u|<\frac{1}{n}<\delta$

$$\Rightarrow \quad \le \int\eta_n(u)\,\underbrace{|\varphi(u+x_0)-\varphi(x_0)|}_{<\varepsilon}\,du \le \underbrace{\int\eta_n(u)\,\varepsilon\,du}_{=1} = \varepsilon \Rightarrow$$

$$I_n = \varphi(x_0) + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \varphi(x_0)$$

$\delta(x-x_0) = \lim\limits_{n\to\infty}\eta_n(x-x_0) \in \mathcal{D}'$ сходим в $\mathcal{D}' \Leftrightarrow \forall\varphi \to \int\eta_n(x-x_0)\varphi(x)\,dx$ $=\varphi(x_0)$

$\to (\delta(x-x_0), \varphi)$

72. $y' = -\varphi'(x_0)$.

73. $y=|x|$. $\langle |x|', \varphi\rangle = -\langle x, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,\varphi'(x)\,dx$

$$-\int_{-\infty}^{0}|x|\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty}|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0}(-x)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty}x\,\varphi'\,dx$$

$$= -x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}(-1)\,\varphi(x)\,dx = 0 + \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx \quad (\varphi \text{ финитная})$$

$$= x\varphi(x)\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty}1\cdot\varphi(x)\,dx = 0 - \int_{0}^{\infty}\varphi(x)\,dx = -\int_{0}^{\infty}\varphi(x)\,dx$$

$$\langle |x|', \varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}(x)\,\varphi(x)\,dx = \langle \operatorname{sign} x, \varphi\rangle$$

$\to y' = \operatorname{sign} x$

73. $y' = \operatorname{sign} x$.

! Можно воспользов. результатом след. з. 84 $\Rightarrow \{f\}' = \{f'\} = |x|' = \operatorname{sign} x$

84. Если f — кусочно гладкая на R функция, имеющая в точках $x_1, \dots, x_n$ разрывы первого рода со скачками $p_1, p_2, \dots, p_n$, то

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} + \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(x - x_k),$$

где f' — обобщенная производная функции f, а $\frac{df(x)}{dx}$ — обобщенная функция, порожденная обычной при $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, производной функции f.

на $[A, B]$ может быть конечное число точек разрыва 1-го рода (кус непр. дифф.)

$x_1 < x_2 < \dots x_n$ – соотв скачку $p_i = f(x_i + 0) - f(x_i - 0)$ $i = \overline{1, n}$

$\triangleleft\ g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \theta(x - x_i)$ – кус гладк. на $\forall$ кон отрезке

$$\{f'\} = \{g'\} = \{g\}' = \{f\}' - \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i) \Rightarrow \{f\}' = \{f'\} + \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i)$$

5. Найдите в D'

$$\lim_{\xi \to +0} \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^2}.$$

из Т4 а) $\lim_{\xi \to +0} \frac{\xi}{x^2 + \xi^2} \overset{D'}{=} \pi\delta(x)$

$$\Rightarrow \lim_{\xi \to +0} \left(\frac{\xi}{x^2 + \xi^2}\right)' = \pi\delta'(x) \in D'$$

$F(x) = \frac{\xi}{x^2 + \xi^2}$ непр дифф., обобщ произв = обычн.

$$F'(x) = -\frac{2x\xi}{(x^2 + \xi^2)^2} \Rightarrow \lim_{\xi \to 0} \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^2}(-2) = \pi\delta'(x) \Rightarrow \lim_{\xi \to +0} \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\delta'(x)$$

6. Упростите в D' выражения:

а) $(\cos x + e^{2x})\,\delta(x)$;

б) $(\cos x + e^{2x})\,\delta'(x)$;

в) $(\cos x + e^{2x})\,\delta''(x)$.

по свой-ву $\langle a(x)\delta(x), \varphi(x)\rangle = \langle a(0)\delta(x), \varphi(x)\rangle = a(0)\varphi(0)$

а) $(\cos x + e^{2x})\delta(x) = (\cos 0 + e^0)\delta(x) = 2\delta(x)$

б) $\langle(\cos x + e^{2x})\delta', \varphi\rangle = \langle\delta', (\cos x + e^{2x})\varphi(x)\rangle = -\langle\delta, (f(x)\varphi(x))'\rangle =$

$= -[(f(x)\varphi(x))']_{x=0}$; $(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$; $f(0) = 2$, $f'(x) = -\sin x + 2e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 2$

$\Rightarrow -[2\varphi(0) + 2\varphi'(0)]$ и $\langle\delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$, $\langle\delta', \varphi\rangle = -\varphi'(0) \Rightarrow -2\varphi(0) - 2\varphi'(0) =$

$= 2(-\varphi'(0)) - 2\varphi(0) = 2(\delta', \varphi) - 2(\delta, \varphi) \Rightarrow (\cos x + e^{2x})\delta'(x) = 2\delta'(x) - 2\delta(x)$

в) $\langle(\cos x + e^{2x})\delta''(x), \varphi\rangle = \langle\delta'', f\varphi\rangle = \langle\delta, (f\varphi)''\rangle = (f\varphi)''|_{x=0}$

$(f\varphi)'' = f''\varphi + 2f'\varphi' + \varphi'' f$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 2$; $f''(x) = -\cos x + 4e^{2x} \Rightarrow$

$f''(0)=3 \Rightarrow (f\varphi)''\big|_0 = 3\varphi(0) + 2\cdot 2\varphi'(0) + 2\varphi''(0) = 3\varphi(0) + 4\varphi'(0) + 2\varphi''(0)$ $(\langle \delta'', \varphi\rangle = \varphi''(0))$

$= 2\varphi''(0) - 4(-\varphi'(0)) + 3\varphi(0) = 2\langle \delta'', \varphi\rangle - 4\langle \delta', \varphi\rangle + 3\langle \delta, \varphi\rangle \Rightarrow (\cos x + e^{2x})\delta''(x) =$

$2\delta''(x) - 4\delta'(x) + 3\delta(x)$