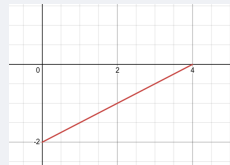


В. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской кривой Γ :

4) $\int_{\Gamma} \frac{ds}{y-x}$, Γ — отрезок с концами $(0; -2)$ и $(4; 0)$;



$$y = \frac{1}{2}x - 2, 0 \leq x \leq 4 \quad x = 2y + 4, -2 \leq y \leq 0$$

$$x = \varphi(y), \quad c \leq y \leq d,$$

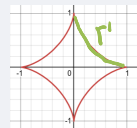
$$\int_{\Gamma} F(x; y) dx = \int_c^d F(\varphi(y); y) \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy.$$

$$\int_{\Gamma} \frac{ds}{y-x} = \int_{-2}^0 \frac{dy}{y-2y-4} \cdot \sqrt{1+4} = -\sqrt{5} \int_{-2}^0 \frac{dy}{y+4} = -\sqrt{5} \ln 2 + \sqrt{5} \ln 4 = -\sqrt{5} \ln 2$$

4) $-\sqrt{5} \ln 2$;

Вычислить криволинейный интеграл по плоской кривой Γ (4-11).

9. $\int_{\Gamma} (x^{4/3} + y^{4/3}) ds$, Γ — астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.



$$\begin{aligned} x &= a \cos^3 t & x' &= -3a \cos^2 t \sin t \\ y &= a \sin^3 t & y' &= 3a \sin^2 t \cos t \\ 0 &< t < 2\pi \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma} F(x; y; z) ds = \int_a^b F(x(t); y(t); z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = 3a \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} = 3a \cos t \sin t = \frac{3}{2} a \sin 2t, \quad 0 < t < \pi/2$$

$$x^{4/3} + y^{4/3} = a^{4/3} (\cos^4 t + \sin^4 t) = a^{4/3} [(\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\cos^2 t \sin^2 t] =$$

$$= a^{4/3} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t) = \frac{1}{2} a^{4/3} (2 - 1 + \cos^2 2t) = \frac{1}{2} a^{4/3} (1 + \cos^2 2t)$$

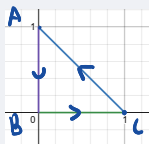
$$\int_{\Gamma} (x^{4/3} + y^{4/3}) ds = 4 \cdot \frac{3}{2} a \cdot \frac{1}{2} a^{4/3} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 2t) \sin 2t dt = \left\{ \begin{aligned} u &= \cos 2t \\ du &= -2 \sin 2t dt \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{3}{2} a^{7/3} \int_{-1}^1 (1 + u^2) du = 3a^{7/3} \int_0^1 (1 + u^2) du = 3a^{7/3} (1 + \frac{1}{3}) = 4a^{7/3}.$$

9. $4a^{7/3}$.

Вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Γ , пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (29, 30).

4) $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, Γ — граница треугольника с вершинами $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(0; 1)$.



$$\int_{\Gamma} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$AB: x=0, 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow I_1 = \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}$$

$$BC: y=0, 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow I_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$CA: y=1-x, 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow I_3 = -\int_0^1 (x^2 + (1-x)^2 - x^2 + (1-x)^2) dx = -\frac{2}{3}$$

$$\int_{\Gamma} = 0$$

4) 0.

85. Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho(x; y)$ по дуге AB плоской кривой Γ если:

4) $\Gamma: y^2 = x, A(1; 1), B(4; 2); \rho(x; y) = y;$

4) $(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})/12;$

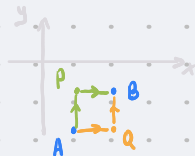
$$m = \int_{\Gamma} \rho(x; y) ds = \int_1^2 y \sqrt{1 + (2y)^2} dy = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{1 + 4y^2} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4y^2)^{3/2} \Big|_1^2 = \frac{1}{12} (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$$

110. Найти работу поля $\mathbf{F} = (4x - 5y; 2x + y)$ вдоль дуги AB кривой Γ , где $A(1; -9), B(3; -3)$, если:

1) Γ — ломаная APB , где $P(1; -3);$

2) Γ — ломаная AQB , где $Q(3; -9);$

$$A = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$



1) $AP: x=1, -9 \leq y \leq -3$

$PB: y=-3, 1 \leq x \leq 3$

$$A_1 = \int_{-9}^{-3} (2 + y) dy = -6 + \frac{y}{2} \Big|_{-9}^{-3} = -24$$

$$A_2 = \int_1^3 (4x + 15) dx = 18 + 45 - 2 - 15 = 46$$

$$A = A_1 + A_2 = 22$$

110. 1) 22; 2) 106;

2) $AQ: y=-9, 1 \leq x \leq 3$

$QB: x=3, -9 \leq y \leq -3$

$$A_1 = \int_1^3 (4x + 15) dx = 18 + 45 \cdot 3 - 2 - 45 = 106$$

$$A_2 = \int_{-9}^{-3} (6 + y) dy = -18 + \frac{y}{2} \Big|_{-9}^{-3} = 0$$

$$A = A_1 + A_2 = 106$$

46. $\int_{\Gamma} (2xy - y) dx + x^2 dy, \Gamma$ — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy,$$

$$Q = x^2 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$P = 2xy - y \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \Rightarrow \int_{\Gamma} = \iint_S dx dy = S_{\text{об}}$$

46. $\pi ab.$

100. Пусть G — ограниченная плоская область с кусочно гладкой границей ∂G , ориентированной так, что область G находится (локально) слева от касательного к ∂G вектора. Доказать, что площадь μG можно вычислять по любой из формул

$$S = \oint_{\partial G} x dy = - \oint_{\partial G} y dx = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} x dy - y dx. \quad (36)$$

Рассч. $I = \int_{\partial G} (Ax + By) dx + (Cx + Dy) dy$

Заметим, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C - B \Rightarrow$

$$I = (C - B) \iint_G dx dy \Rightarrow S = \frac{I}{C - B} \Rightarrow$$

при $A=B=D=0, C=1$

$$S = \int_{\partial G} x dy$$

при $A=C=D=0, B=1$

$$S = - \int_{\partial G} y dx$$

Т.к. $\int_{\partial G} x dy = - \int_{\partial G} y dx$, возьмем ср. ариф.

$$S = \frac{1}{2} \int_{\partial G} x dy - y dx$$

Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой Γ с началом в точке A и концом в точке B (56-68).

59. $\int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy$, $A(0;0)$, $B(-2;-1)$.

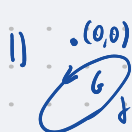
$$\int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy = \int_{\Gamma} d(x^2 y), \quad u = x^2 y \Rightarrow \begin{matrix} u(A) = 0 \\ u(B) = -4 \end{matrix} \Rightarrow \int_{\Gamma} = u(B) - u(A) = -4$$

59. -4.

Т1. Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, где γ — простая

замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0;0)$, ориентированная против хода часовой стрелки.

Пусть $\partial G = \gamma$



$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

Ф-на Грина
 $\int_{\gamma} = 0$



G — круг обл, $ог. (0,0)$

$G_1 = b \setminus b_0$

$$\int_{\partial G_1} = \int_{\partial G_0 \cup \partial b_0} = \int_{\partial G_0} - \int_{\partial b_0} \Rightarrow \int_{\partial G_0} = \int_{\partial b_0} \Rightarrow \begin{matrix} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t}{r^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

37. Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

$$\sigma = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

$$G = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\} - \text{круг } \subset R=1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \underbrace{\iint_G \sqrt{2}}_{\text{Пл. } G} dx dy = \pi \sqrt{2}$$

37. $\pi\sqrt{2}$.

51. Найти площадь поверхности тора $x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi$, $y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi$, $z = a \sin \psi$, $0 < a \leq b$.

$$[\vec{r}'_{\varphi}, \vec{r}'_{\psi}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -(b+a \cos \psi) \sin \varphi & (b+a \cos \psi) \cos \varphi & 0 \\ -a \sin \psi \cos \varphi & -a \sin \psi \sin \varphi & a \cos \psi \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_1 a(b+a \cos \psi) \cos \psi \cos \varphi + \vec{e}_2 a(b+a \cos \psi) \sin \psi \cos \varphi + \vec{e}_3 a(b+a \cos \psi) \sin \psi$$

$$|[\vec{r}'_{\varphi}, \vec{r}'_{\psi}]|^2 = a^2 (b+a \cos \psi)^2 (\cos^2 \psi \cos^2 \varphi + \sin^2 \psi \cos^2 \varphi + \sin^2 \psi) = a^2 (b+a \cos \psi)^2$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b + a \cos \psi) d\psi = 2\pi \cdot ab \cdot 2\pi = 4\pi^2 ab$$

51. $4\pi^2 ab$.

T.2. Вычислить площадь части сферы, заключенной между двумя параллельными плоскостями. Можно рассматривать сферу, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, и плоскости $z = c$, $z = c + h$, $c, c + h \in [-R, R]$. Зависит ли ответ от каких-либо параметров, кроме радиуса сферы R и расстояния между плоскостями h (при условии, что обе плоскости пересекают сферу)?

$$\begin{aligned} X &= R \cos \varphi \cos \psi \\ Y &= R \sin \varphi \cos \psi \\ Z &= R \sin \psi \\ R \sin \psi_1 &= c \\ R \sin \psi_2 &= c + h \Rightarrow 0 \leq \psi \leq 2\pi \\ \psi_1 &\leq \psi \leq \psi_2 \end{aligned}$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} R^2 \cos \psi d\psi = 2\pi R^2 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \cos \psi d\psi = 2\pi R^2 (\sin \psi_2 - \sin \psi_1) = 2\pi R^2 \left(\frac{c+h}{R} - \frac{c}{R} \right) = 2\pi Rh$$

Вычислить интегралы (1-13).

1. $\iint_S (x + y + z) dS$, где:

1) S — часть плоскости $x + 2y + 4z = 4$, выделяемая условиями $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy, \quad (4)$$

$$X = 4 - 2y - 4z$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -2 \quad \frac{\partial X}{\partial z} = -4$$

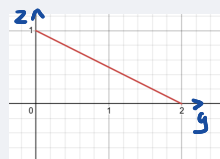
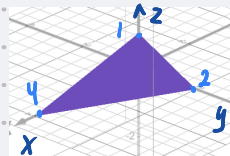
$$\Rightarrow \iint_S (x + y + z) dS = \iint_D (4 - 2y - 4z + y + z) \sqrt{1 + 4 + 16} dy dz =$$

$$= \sqrt{21} \iint_D (4 - y - 3z) dy dz = \sqrt{21} \int_0^2 dy \int_0^{1-\frac{1}{2}y} (4 - y - 3z) dz =$$

$$= \sqrt{21} \int_0^2 \left[4y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{2}y)^2 \right] dy = \frac{\sqrt{21}}{8} \int_0^2 (20 - 12y + y^2) dy =$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{8} \left(40 - 24 + \frac{8}{3} \right) = \frac{7}{3} \sqrt{21}$$

1) $7\sqrt{21}/3$;



18. Определить координаты центра масс однородных поверхностей:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

$$\begin{aligned} X &= R \cos \varphi \cos \psi \\ Y &= R \sin \varphi \cos \psi \\ Z &= R \sin \psi \end{aligned}$$

$$G = \left\{ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$M = \iint_S dS = \iint_G R^2 \cos \psi d\varphi d\psi = R^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \psi d\psi = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$X_c = \frac{1}{M} \iint_S X dS = \frac{R^3}{M} \int_0^{\pi/2} \cos \psi d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2 \psi d\psi = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^3}{4} = \frac{R}{2}$$

В аналог. аналог. $X_c = Y_c = Z_c = \frac{R}{2}$

18. 1) $\left(\frac{R}{2}; \frac{R}{2}; \frac{R}{2} \right)$;

Вычислить интегралы (26-43).

37. 1) $\iint_S yz \, dz \, dx$; S — внешняя сторона на части эллипсоида $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1, z \geq 0$.

$$\iint_S P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_x & y'_x & z'_x \end{vmatrix} du \, dv.$$

$$\begin{vmatrix} X = a \cos \varphi \cos \psi & 0 & b c \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi & 0 \\ y = b \sin \varphi \cos \psi & -a \sin \varphi \cos \psi & b \cos \varphi \cos \psi & 0 \\ z = c \sin \varphi & -a \cos \varphi \sin \psi & -b \sin \varphi \sin \psi & c \cos \psi \end{vmatrix} = abc^2 \sin^2 \varphi \cos^3 \psi$$

1) $\pi abc^2/4$;

$$\iint_S yz \, dz \, dx = abc \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi = abc \pi \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi \, d\cos \varphi = \frac{1}{4} \pi abc$$

38. $\iint_S (2x^2 + y^2 + z^2) \, dy \, dz$, S — внешняя сторона боковой поверхности конуса $\sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq H$.

$$x^2 = y^2 + z^2, \text{ делаем замену: } \begin{matrix} x = z \\ y = x \\ z = y \end{matrix} \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2$$

$$\begin{matrix} x = r \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = r \sin \varphi & 0 \leq r \leq H \end{matrix}$$

38. $-3\pi H^4/2$.

$$\iint_S = - \iint_G (2(x^2 + y^2) + x^2 + y^2) \, dx \, dy = -3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H r^3 \, dr = -3 \cdot 2\pi \cdot \frac{H^4}{4} = -\frac{3}{2} \pi H^4$$

42. $\iint_S x^6 \, dy \, dz + y^6 \, dz \, dx + z^6 \, dx \, dy$, S — нижняя сторона части эллиптического параболоида $z = x^2 + y^2, z \leq 1$.

$$\begin{matrix} x = r \cos \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = r \sin \varphi & 0 \leq r \leq 1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \iint_S &= - \iint_G \begin{vmatrix} x^6 & y^6 & (x^2 + y^2)^3 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} \, dx \, dy = - \iint_G [x^6(-2x) + y^6(-2y) + (x^2 + y^2)^3] \, dx \, dy = \\ &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (-2r^7 \cos^7 \varphi - 2r^7 \sin^7 \varphi + r^9) r \, dr = -2\pi \int_0^1 r^5 \, dr = -2\pi \cdot \frac{1}{6} = -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

42. $-\pi/3$.

44. Найти производную функции f в точке M по данному направлению, если:

1) $f = 3x^4 + y^3 + xy$, $M(1; 2)$, по направлению луча, образующего с осью x угол 135° ;

$$\text{grad } f = (12x^3 + y, 3y^2 + x)^T \quad \text{grad } f(M) = (14, 13)^T$$

$$\bar{p} = \frac{\overline{AM}}{AM} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial e} = (\text{grad } f(M), \bar{p}) = -\frac{14}{\sqrt{2}} + \frac{13}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

44. 1) $-1/\sqrt{2}$;

48. Найти наибольшее значение $\frac{\partial f}{\partial l}$ в точке M , если:

1) $f = xy^2 - 3x^4y^5$, $M(1;1)$;

$$\text{grad} f = (y^2 - 12x^3y^5, 2xy - 15x^4y^4)^T$$

$$\text{grad} f(M) = (-11, -13)^T$$

$$\vec{P} = (\cos \alpha, \sin \alpha)^T \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l} = (\vec{P}, \text{grad} f) \leq |\text{grad} f|$$

$$|\text{grad} f(M)| = \sqrt{11^2 + 13^2} = \sqrt{290} - \max$$

48. 1) $\sqrt{290}$;

13. Пусть u — дифференцируемое поле, $f(t)$ — дифференцируемая функция, $t \in R$. Доказать, что

$$\text{grad} f(u) = f'(u) \text{grad} u.$$

$$\text{grad} f(u) = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x}, \frac{\partial f(u)}{\partial y}, \frac{\partial f(u)}{\partial z} \right)^T = \left(f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, f'(u) \frac{\partial u}{\partial y}, f'(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right)^T = f'(u) \text{grad} u$$

19. Пусть функция $f(r)$ дифференцируема, $\mathbf{r} = ix + jy + kz$, $r = |\mathbf{r}|$.

Доказать, что $\nabla f(r) = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$.

$$\nabla f(r) = \text{grad} f(r) = f'(r) \cdot \text{grad} r = \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

15. Пусть \mathbf{a} и \mathbf{b} — постоянные векторы, $\mathbf{r} = ix + jy + kz$, $r = |\mathbf{r}|$.

Найти $\text{grad} u$, если:

3) $u = 1/r$;

5) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$;

6) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$;

$$3) \text{grad} u = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \quad 5) u = (a_x x, a_y y, a_z z)^T \Rightarrow \text{grad} u = \vec{a}$$

$$6) u = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}) \Rightarrow \text{grad} u = [\vec{a}, \vec{b}]$$

37. Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать их и проверить, используя символ ∇ и правила действия с ним (α, β — числа, $u, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ — дифференцируемые скалярные и векторные поля):

2) $\text{div}(u\mathbf{a}) = (\text{grad} u, \mathbf{a}) + u \text{div} \mathbf{a}$.

$$\text{div}(u\vec{a}) = (\nabla, u\vec{a}) = (\nabla_u, u\vec{a}) + (\nabla_a, u\vec{a}) = (\text{grad} u, \vec{a}) + u \cdot \text{div} \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \text{div}(u\vec{a}) &= \frac{\partial(ua_x)}{\partial x} + \frac{\partial(ua_y)}{\partial y} + \frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial a_x}{\partial x} + \\ &+ u \frac{\partial a_y}{\partial y} + u \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\text{grad} u, \vec{a}) + u \text{div} \vec{a} \end{aligned}$$

39. Выразить в координатной форме $\text{div} \text{grad} u$.

$$\text{div} \text{grad} u = (\nabla, \text{grad} u) = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla) u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

40. Найти:

1) $\text{div}(u \text{grad} u)$;

$$\text{div}(u \text{grad} u) = (\nabla, u \nabla u) = (\nabla_u, \nabla u) + u (\nabla_u, \nabla u) = (\nabla u)^2 + u \Delta u$$

40. 1) $(\text{grad} u)^2 + u \text{div} \text{grad} u \equiv (\nabla u)^2 + u \Delta u$;

1. Найти ($r = xi + yj + zk$), $r = |r|$):
 3) $\operatorname{div} re$, $e = \text{const}$;
 6) $\operatorname{div}(f(r)e)$, $e = \text{const}$; 7) $\operatorname{div}[e, r]$, $e = \text{const}$;

$$3) \operatorname{div} r\bar{e} = (\nabla, r\bar{e}) = (\nabla_r r, \bar{e}) = \frac{1}{r} (\bar{r}, \bar{e})$$

$$6) \operatorname{div}(f(r), \bar{e}) = (\nabla_f f(r), \bar{e}) = f'(r) \cdot \frac{(\bar{r}, \bar{e})}{r}$$

$$7) \operatorname{div}[\bar{e}, \bar{r}] = \frac{\partial(c_3 z - c_2 y)}{\partial x} + \frac{\partial(c_2 x - c_3 z)}{\partial y} + \frac{\partial(c_1 y - c_3 x)}{\partial z} = 0$$

41

$$3) (\bar{r}, e)/r;$$

$$6) (\bar{r}, e)f'(r)/r; 7) 0;$$

49. Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать и проверить их, используя символ ∇ и правила действия с ним (α, β — числа, u, a, b — дифференцируемые скалярные и векторные поля, c — постоянный вектор):

- 1) $\operatorname{rot}(\alpha a + \beta b) = \alpha \operatorname{rot} a + \beta \operatorname{rot} b$; 2) $\operatorname{rot}(u c) = [\operatorname{grad} u, c]$;
- 3) $\operatorname{rot}(u a) = u \operatorname{rot} a + [\operatorname{grad} u, a]$; 4) $\operatorname{rot}[c, a] = c \operatorname{div} a - (c, \nabla) a$;
- 5) $\operatorname{rot}[a, b] = a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a + (b, \nabla) a - (a, \nabla) b$;
- 6) $\operatorname{div}[a, b] = (b, \operatorname{rot} a) - (a, \operatorname{rot} b)$.

$$3) \operatorname{rot}(u \bar{a}) = [\nabla, u \bar{a}] = [\nabla_u u, \bar{a}] + u [\nabla_{\bar{a}}, \bar{a}] = [\operatorname{grad} u, \bar{a}] + u \operatorname{rot} \bar{a}$$

$$5) \operatorname{rot}[\bar{a}, \bar{b}] = [\nabla, [\bar{a}, \bar{b}]] = \bar{a} \cdot (\bar{\nabla}, \bar{b}) - \bar{b} \cdot (\bar{\nabla}, \bar{a}) = \bar{a} \operatorname{div} \bar{b} - \bar{b} \operatorname{div} \bar{a}$$

$$6) \operatorname{div}[\bar{a}, \bar{b}] = (\nabla, [\bar{a}, \bar{b}]) = (\nabla_{\bar{a}}, \bar{a}, \bar{b}) + (\nabla_{\bar{b}}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \operatorname{rot} \bar{a}) + (\bar{a}, \operatorname{rot} \bar{b})$$

50. Найти ($r = xi + yj + zk$, $r = |r|$), a и b — постоянные векторы, $u(r)$ — дифференцируемое поле:

$$5) \operatorname{rot}(u(r)r).$$

$$5) 0.$$

$$\operatorname{rot}(u(r), \bar{r}) = [\nabla, u \bar{r}] = [\nabla_u u, \bar{r}] + u [\nabla_{\bar{r}}, \bar{r}] = \frac{u'}{r} [\bar{r}, \bar{r}] + u [\nabla_{\bar{r}}, \bar{r}] = 0$$

54. Найти:

$$2) \operatorname{rot}[\bar{r}, [e, \bar{r}]], \quad e = \text{const}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}[\bar{r}, [e, \bar{r}]] &= \operatorname{rot}(e r^2 - \bar{r}(\bar{r}, \bar{e})) = [\nabla_r r^2, \bar{e}] - [\nabla_{\bar{r}}, \bar{r}](\bar{r}, \bar{e}) - [\nabla_{(\bar{r}, \bar{e})}, \bar{r}] = \\ &= 2r \left[\frac{\bar{r}}{r}, \bar{e} \right] - [\bar{e}, \bar{r}] = 3[\bar{r}, \bar{e}]. \end{aligned} \quad 2) 3[\bar{r}, e].$$

$$45. \iint_S z \, dx \, dy + (5x + y) \, dy \, dz, \text{ где } S:$$

- 2) внутренняя сторона эллипсоида $x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1$;
- 3) внешняя сторона границы области $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$.

$$2) \bar{a} = (5x + y, 0, z)^T \quad \operatorname{div} \bar{a} = 5 + 0 + 1 = 6$$

$$x = 2r \cos \varphi \cos \psi$$

$$y = 3r \sin \varphi \cos \psi$$

$$z = r \sin \psi$$

$$J = 6r^2 \cos \psi$$

$$\iint_S = -6 \iiint_G dx \, dy \, dz = -6 \cdot 6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi \, d\psi \int_0^1 r^2 \, dr = -\frac{6 \cdot 6 \cdot 1}{3} \cdot 2\pi = -48\pi$$

$$2) -48\pi;$$

$$\begin{aligned} 3) \quad x &= r \cos \varphi \cos \psi & J &= r^2 \cos \psi \\ y &= r \sin \varphi \cos \psi & 1 < r < 2 \\ z &= r \sin \psi \end{aligned}$$

$$\iint_S = 6 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_1^2 r^2 dr = 6 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{7}{3} = 56\pi \quad 3) \quad 56\pi.$$

52. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, где S :

3) нижняя сторона части конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$, $0 < z \leq H$.

$$\vec{a} = (x^2, y^2, z^2)^T \quad \text{div } \vec{a} = 2(x+y+z)$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= h \\ \Rightarrow \iint_{S_{\text{бок}}} + \iint_{S_{\text{кр}}} &= 2 \iint_S (x+y+z) dx dy dz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dh \int_0^h [r(\cos \varphi + \sin \varphi) + h] r dr = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H \frac{1}{2} h^3 dh = \frac{\pi H^4}{2} \end{aligned}$$

$$S_{\text{кр}}: z=H, \quad x^2 + y^2 \leq z^2 \Rightarrow \iint_{S_{\text{кр}}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H H^2 r dr = 2\pi \cdot \frac{H^4}{2} = \pi H^4$$

$$\iint_{S_{\text{бок}}} = -\frac{\pi H^4}{2}$$

$$3) -\pi H^4/2.$$

*57. Пусть $G \in \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей S , \vec{n} — внешняя нормаль к S . $\vec{r} = (x-x)\vec{i} + (y-y)\vec{j} + (z-z)\vec{k}$:

2) вычислить интеграл Гаусса

$$I(x; y; z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^3} dS, \quad (x; y; z) \notin S.$$

$$\cos(\widehat{\vec{r}, \vec{n}}) = \frac{(\vec{r}, \vec{n})}{r \cdot n} \Rightarrow I = \iint_S \frac{(\vec{r}, \vec{n})}{r^3} dS_{\xi, \eta, \zeta}, \quad S = \partial G$$

$$\text{div } \frac{\vec{r}}{r^3} = 3 \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^4} r = 0$$

$$1) (x, y, z) \notin G: \quad I = \iiint_G \text{div } \frac{\vec{r}}{r^3} d\xi d\eta d\zeta = 0$$

$$2) (x, y, z) \in G: \quad S_0 \text{ — сфера (шар) } (x, y, z) \text{ — орг. шар. } \vec{G}_0 \in G$$



$$G_1 = G \setminus \vec{G}_0, \quad \partial G_1 = S \cup S_0 \Rightarrow \iint_{\partial G_1} = \iint_S + \iint_{S_0} = \iiint_{G_1} \text{div } \frac{\vec{r}}{r^3} d\xi d\eta d\zeta = 0 \Rightarrow \iint_S = - \iint_{S_0}$$

(поверхность) (шар)

На S_0 $r = r_0$

$$\iint_{S_0} \frac{(\vec{F}, \vec{n})}{r^3} dS = \iint_{S_0} \left(\frac{\vec{F}}{r^3}, d\vec{S} \right) = \frac{1}{r_0^3} \iint_{S_0} (\vec{F}, d\vec{S}) = \frac{1}{r_0^3} \iiint_{G_0} \operatorname{div} \vec{F} \cdot d\eta d\eta d\eta =$$

1-20 page 2-20 page

$$= \frac{1}{r_0^3} \cdot 3 \cdot V_{G_0} = \frac{1}{r_0^3} \cdot 3 \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 = 4\pi$$

$$I = \begin{cases} 0, (x, y, z) \notin G \\ 4\pi, (x, y, z) \in G \end{cases}$$

62. $\int y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, L — граница треугольника с вершинами в точках $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$, $(0; 0; a)$, ориентированная положительно относительно вектора $(0; 1; 0)$.

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)^T, \quad \vec{m} (0, 1, 0), \quad \cos(\vec{n}, \vec{m}) = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = -2z\vec{i} - 2x\vec{j} - 2y\vec{k}$$

$$\int_L = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}) dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (x+y+z) dS = -\frac{2a}{\sqrt{3}} \iint_S dS = -\frac{2a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2}a)^2 = -a^3$$

на. на. тр.

62. $-a^3$.

63. 2) $\int \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} + z dz$; где L — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0; 0; 1)$.

$L = \partial G$, G_0 — круг. ось, ось. т. $(0, 0)$ $G_1 = G \setminus G_0$

$$\iint_{\partial G_0} + \iint_{L \uparrow} = \iint_{\partial G_1} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, d\vec{S})$$

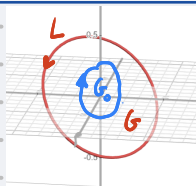
$$\vec{a} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z \right)^T \quad \operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0)^T$$

$$\iint_{G_1} = 0 \Rightarrow \iint_{L \uparrow} = \iint_{\partial G_0}$$

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi \\ y &= R \sin \varphi \\ z &= -R(\cos \varphi + \sin \varphi) \\ dz &= -R(\cos \varphi - \sin \varphi) \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + R^2 \cos 2\varphi) d\varphi = 2\pi$$

2) 2π .



33. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (2x + 3y) dy dz + (x + y + z) dz dx + (x + 2y + 3z) dx dy,$$

где S — часть внешней стороны поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + z^2 = 1$, $x \geq 0$.

$$\vec{a} = (2x + 3y, x + y + z, x + 2y + 3z)^T \quad \text{div} \vec{a} = 2 + 1 + 3 = 6$$

$$\begin{aligned} x &= 2r \cos \varphi \cos \psi \\ y &= 5r \sin \varphi \cos \psi \\ z &= r \sin \psi \end{aligned} \quad \iint_S = 6 \iiint_G dx dy dz = 60 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \psi d\psi \int_0^1 r^2 dr = 40\pi$$

Найти поток поля \mathbf{a} через ориентированную нормалью \mathbf{n} поверхность S ($\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$) (68, 69).

$$\iint_S (\mathbf{a}, \mathbf{n}) dS = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS.$$

68. 4) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$, S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

$$\text{На } S \quad r = r_0 \quad \text{div} \vec{r} = 3$$

4) 4π ;

$$\iint_S (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_S (\vec{a}, d\vec{S}) = \frac{1}{r_0^3} \iiint_G \text{div} \vec{r} dx dy dz = \frac{1}{r_0^3} \cdot 3 \cdot V_G = \frac{3}{r_0^3} \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 = 4\pi$$

94. Найти по формуле Стокса (19) циркуляцию поля \mathbf{a} вдоль контура Γ , ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат, если:

4) $\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$;

$$\vec{a} = (y, -x, z)^T \quad \text{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & z \end{vmatrix} = (0, 0, -2)^T$$

$$\int (\vec{a}, d\vec{r}) = \iiint_S (\text{rot} \vec{a}, d\vec{S}) = -2 \iiint_S dS = -4\pi$$

4) -4π ;

104. Потенциально ли поле $\mathbf{H} = 2l \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$:

1) в подпространстве $x > 0$;

2) во всем пространстве без оси Oz ?

$$\text{rot} \vec{a} = \vec{0}$$

1) $G = \{x > 0\}$ — поверхность односвязна \Rightarrow да

104. 1) да; 2) нет.

2) $G = \{x \neq 0, y \neq 0\}$ — не явл. поверхн. одн. \Rightarrow нет

112. Является ли поле \mathbf{a} потенциальным, соленоидальным, если $(\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, r = |\mathbf{r}|)$:

1) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^2$;

112. 1) Потенциально и соленоидально;

$G = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ — не явл. обычно односв.

$\text{div} \vec{a} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \cdot r = 0$ — соленионг в обычно-односв. обл, не сог. $(0, 0, 0)$

Во всей обл. отр. — не явл. соленионг.

• $r > 0$ — не явл. обь-одн \Rightarrow не соленионг

• $z > 0$ — обь-одн \Rightarrow соленионг

$\text{rot} \vec{a} = \vec{0}$, G — поверхн. односв \Rightarrow потенц.

*115. Найти такую дифференцируемую функцию Φ , чтобы поле $\vec{a} = \Phi(r)\vec{r}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$, было соленоидальным.

$\vec{a} = f(r)\vec{r}$ $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$ $b = R \setminus \{0,0,0\}$ - координ. осей \Rightarrow центр поле всегда потенци

$$\text{div } \vec{a} = 3f(r) + r f'(r) = 0 \quad \backslash \cdot r^2$$

$$3r^2 f(r) + r^3 f'(r) = 0$$

$$(r^3 f(r))' = 0 \Rightarrow f(r) = \frac{C}{r^3}$$

115. C/r^3 .