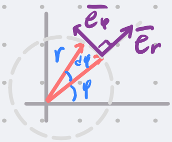
1.18. Движение точки задано в полярных координатах $r(t)$ и $\varphi(t)$. Показать, что вектор ускорения точки коллинеарен ее радиусу-вектору, если $r^2\dot\varphi = \text{const}$.

Дано: $\bar r = \begin{bmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$

Д-ть: $r^2\dot\varphi = \text{const} \Rightarrow \bar W \parallel \bar r$



$|dr_\varphi| = r\,d\varphi \Rightarrow H_\varphi = r$

$|dr_r| = dr \Rightarrow H_r = 1$

$W_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left[(V^2/2)^{\cdot}_{\partial\dot\varphi} - (V^2/2)_{\partial\varphi}\right]$

$V^2 \overset{\text{очв онб}}{=} \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 \Rightarrow W_\varphi = \frac{1}{r}\cdot(\overset{\text{const}}{\overset{\parallel}{r^2\dot\varphi}})^{\cdot} = 0 \Rightarrow \bar W \parallel \bar r$

1.25. Радиус-вектор $\mathbf{r}$, скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ движущейся точки связаны соотношением $\mathbf{w} = a(\mathbf{v}\times\mathbf{r})$, где $a = \text{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

Дано: $\bar W = a(\bar V \times \bar r)$,
$a = \text{const} > 0$
$\rho(\bar r, \bar V)$ – ?

1-й способ:
Из 1-го сема по матану: $k = \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{\bar r}\times\ddot{\bar r}}{|\dot{\bar r}|^3}$

$\rho = \frac{V^3}{|\bar V \times [a(\bar V\times\bar r)]|} = \frac{V^3}{V\cdot|a(\bar V\times\bar r)|} = \frac{V^2}{a|\bar V\times\bar r|}$

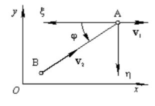
2-й способ: $\bar W = a(\bar V\times\bar r) \Rightarrow \bar W \perp \bar V,\ \bar W \perp \bar r$

$\bar W = \dot V\cdot\bar\tau + \frac{V^2}{\rho}\bar n$ \ $\cdot\bar V$ справа

$\underset{0}{\underset{\parallel}{\bar W\cdot\bar V}} = \dot V\cdot\bar\tau\cdot\bar V + \frac{V^2}{\rho}\overset{0}{\overset{\parallel}{\bar n\cdot\bar V}} = 0$

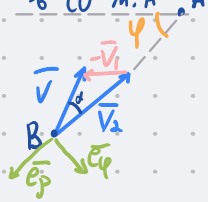
$\dot V\cdot\underset{0}{\underset{\neq}{\bar\tau\cdot\bar V}} = 0 \Rightarrow \dot V = 0 \Rightarrow \bar W = \frac{V^2}{\rho}\bar n \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{V^2}{a|\bar V\times\bar r|}}$

1.31. Убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_2$, направленной по BA. Найти траекторию сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если в начальный момент угол φ между вектором скорости $\mathbf{v}_1$ и прямой BA не равен нулю $\varphi_0 \neq 0$ (см. рис. к задаче 1.29).



К задаче 1.29

в СО т. А



$$\bar{r} = \begin{pmatrix} -\rho\cos\varphi \\ -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Дано: $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \varphi_0 \neq 0$

$AB = r(\varphi)$ — ?

$$\begin{cases} V_\rho = \dfrac{d\rho}{dt} = -V_2 + V_1\cos\varphi \\ V_\varphi = \rho\cdot\dfrac{d\varphi}{dt} = -V_1\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{V_2 - V_1\cos\varphi}{V_1\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{V_2}{V_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \int_{\varphi_0}^{\varphi}\mathrm{ctg}\,\varphi\,d\varphi$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\cdot\left(\frac{\mathrm{tg}\,\varphi/2}{\mathrm{tg}\,\varphi_0/2}\right)^{\frac{V_2}{V_1}}$$

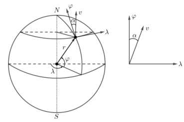
$$\Uparrow$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\mathrm{ctg}\,\varphi\,d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} \underset{t=\mathrm{tg}\,\varphi/2}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\mathrm{tg}\,\varphi_0/2}^{\mathrm{tg}\,\varphi/2}\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t} = \int_{\mathrm{tg}\,\varphi_0/2}^{\mathrm{tg}\,\varphi/2}\frac{dt}{t}$$

1.31. $\dfrac{r}{r_0} = \dfrac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\left(tg\dfrac{\varphi}{2}\Big/tg\dfrac{\varphi_0}{2}\right)^{v_2/v_1}$

T1. Используя сферические координаты (r, λ - долгота, φ - широта), определить, какую кривую опишет корабль, идущий под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану. Корабль принять за точку, движущуюся по поверхности земного шара (Рис. 1). Считая, что модуль скорости v корабля не изменяется, определить проекции ускорения корабля на оси сферических координат, модуль ускорения и радиус кривизны траектории.



T1

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$V = \mathrm{const}$, $\angle(\bar{e}_\varphi, \bar{v}) = \alpha$

ур-е кривой — ?

w_k — ? $k = \{r, \lambda, \varphi\}$

w — ?

$$V_i = \omega_i r_i$$

$$V_\varphi = v\cos\alpha \overset{\downarrow}{=} \frac{d\varphi}{dt}\cdot r$$

$$V_\lambda = v\sin\alpha = \frac{d\lambda}{dt}\cdot r\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{v\cos\alpha}{r} \\ \dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{v\sin\alpha}{r\cos\varphi} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,d\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})} \underset{u=\varphi+\frac{\pi}{2}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}^{\varphi+\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sin u} \underset{\text{из пред задачи}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\mathrm{tg}(\varphi_0/2+\frac{\pi}{4})}^{\mathrm{tg}(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4})}\frac{dt}{t}$$

$$\ln\frac{\mathrm{tg}(\varphi/2+\pi/4)}{\mathrm{tg}(\varphi_0/2+\pi/4)} = \mathrm{ctg}\,\alpha\,(\lambda-\lambda_0)$$

$$\mathrm{tg}(\varphi/2+\pi/4) = \mathrm{tg}(\varphi_0/2+\pi/4)\cdot\exp[\mathrm{ctg}\,\alpha(\lambda-\lambda_0)]$$

ур-е кривой

из геометрии: $H_r = 1,\ H_\varphi = r,\ H_\lambda = r\cos\varphi$

орт ОНБ $\quad V_r = \dot r,\ V_\varphi = r\dot\varphi,\ V_\lambda = \dot\lambda r\cos\varphi$

$$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi\,\dot\lambda^2$$

$$W_r = \frac{1}{H_k}\left[\left(v^2/2\right)^{\cdot}_{\dot s_k} - \left(v^2/2\right)_{s_k}\right] = \overset{0}{\ddot r} - r\dot\varphi^2 - r\cos^2\varphi\cdot\dot\lambda^2 =$$

$$= -r\frac{v^2\cos^2\alpha}{r^2} - r\cdot\frac{v^2\sin^2\alpha}{r^2\cos^2\varphi}\cdot\cos^2\varphi = -\frac{v^2}{r}$$

$$W_\varphi = \frac{1}{r}\left[r^2\ddot\varphi + 2r\dot r\dot\varphi + r^2\dot\lambda^2\cdot\cos\varphi\sin\varphi\right] =$$

$$= r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi + r\dot\lambda^2\cos\varphi\sin\varphi = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{v^2}{r^2}\,r\cos\varphi\sin\varphi = \frac{v^2\sin^2\alpha\cdot tg\,\varphi}{r}$$

$$W_\lambda = \frac{r^2}{r\cos\varphi}\left[\ddot\lambda\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi\,\dot\varphi\dot\lambda\right] = r(\ddot\lambda\cos\varphi - 2\sin\varphi\,\dot\varphi\dot\lambda) =$$

$$= r\left[\cos\varphi\,\frac{v\sin\alpha}{\cancel{r}}\cdot\frac{v\cos\alpha}{r\cos^2\varphi}\cdot\sin\varphi - 2\sin\varphi\cdot\frac{v\cos\alpha}{\cancel{r}}\cdot\frac{v\sin\alpha}{r\cos\varphi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2r}v^2 tg\,\varphi\cdot\sin 2\alpha - \frac{1}{r}v^2 tg\,\varphi\sin 2\alpha = -\frac{v^2 tg\,\varphi\sin 2\alpha}{2r}$$

$$w^2 = w_r^2 + w_\varphi^2 + w_\lambda^2 \Rightarrow$$

$$W = \sqrt{\frac{v^4}{r^2} + \frac{v^4\sin^4\alpha\, tg^2\varphi}{r^2} + \frac{v^4 tg^2\varphi\sin^2 2\alpha}{4r^2}} =$$

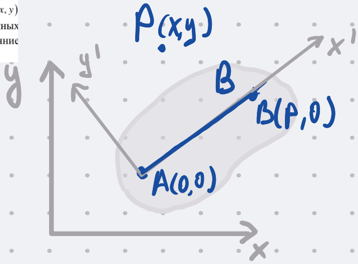
$$= \frac{v^2}{r}\sqrt{1 + tg^2\varphi\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1 + \sin^2\alpha\, tg^2\varphi}$$

$$V = const \Rightarrow a = a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = v^2\cdot\frac{r}{v^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\, tg^2\varphi}}$$

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\, tg^2\varphi}}$$

№3.2

3.2. Плоская фигура движется в своей плоскости. В некоторый момент отношение величин скоростей двух её точек $A(x,y)$ и $B(x,y)$ равно $\lambda \neq 1$. Найти геометрическое место возможных положений мгновенного центра скоростей, если расстояние между точками равно a.



Дано: $\dfrac{v_B}{v_A} = \lambda \neq 1$, $AB = a$,

$P(x,y) - ?$

перейдем в СО X' связанную с телом, начало отсчета в т. А

М.Ц.С.: $v_A \cdot AP = v_B \cdot BP$; $v_B = \lambda v_A \Rightarrow AP = \lambda BP$

$$AP^2 = x^2 + y^2 \qquad BP^2 = (a-x)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 a^2 - 2\lambda^2 ax + \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2$$

$$(1-\lambda^2)x^2 + 2\lambda^2 ax + (1-\lambda^2)y^2 = \lambda^2 a^2$$

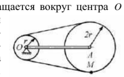
$$x^2 + 2\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}ax + y^2 = \frac{\lambda^2 a^2}{1-\lambda^2}; \qquad \frac{\lambda^2 a^2}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda^4 a^2}{(1-\lambda^2)^2} = \frac{\lambda^2 a^2 - \lambda^4 a^2 + \lambda^4 a^2}{(1-\lambda^2)^2} = \left(\frac{\lambda a}{1-\lambda^2}\right)^2$$

$$\boxed{\left(x + \frac{\lambda^2 a}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\lambda a}{1-\lambda^2}\right)^2}$$

Ответ: **3.2.** Окружность $\left(x + \dfrac{a\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2$ в системе координат, связанной с фигурой так, что $A(0,0)$, $B(a,0)$.

№ 3.20

3.20. Кривошип OA длины l вращается вокруг центра O неподвижной шестерёнки радиуса r и несет на конце A ось другой шестерёнки радиуса $R = 2r$. Угловая скорость и угловое ускорение кривошипа в рассматриваемый момент – ω и ε. Шестерёнки соединены между собой охватывающей их цепью. Найти величины скорости и ускорения точки M подвижной шестерёнки в момент, когда $AM \perp OA$.

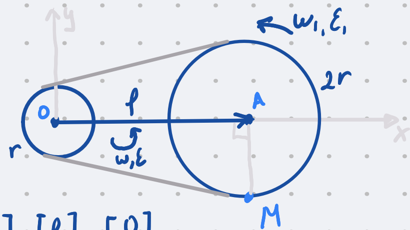


К задаче 3.20

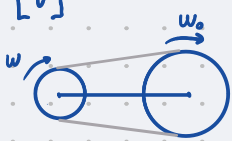
Дано: $l, r, \omega, \varepsilon$

$AM \perp OA$

$v_M, W_M - ?$



1) $\bar V_M = \bar V_A + \bar\omega_1 \times \overline{AM}$; $\bar V_A = \cancel{\bar V_O}^{\,0} + \bar\omega \times \overline{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l\omega \\ 0 \end{bmatrix}$



в СО кривошипа: $\omega r = \omega_0 \cdot 2r \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{2}\omega$

в НСО: $\bar\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \bar\omega + \bar\omega_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\omega}{2} \end{bmatrix}$

$\bar\omega_1 \times \overline{AM} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \bar V_M = \begin{bmatrix} r\omega \\ l\omega \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{V_M = \omega\sqrt{l^2 + r^2}}$

2) $\overline{W}_M = \overline{W}_A + \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{p} - \omega_1^2 \overline{p}$

$$\overline{W}_A = \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} - \omega^2 \overline{\rho} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \omega^2 \rho \\ \rho\varepsilon + 0 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \rho \\ \rho\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_M = \begin{bmatrix} -\omega^2 \rho \\ \rho\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \rho + \varepsilon r + 0 \\ \rho\varepsilon + 0 + \omega^2 r/2 \\ 0 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \rho + \varepsilon r \\ \rho\varepsilon + \omega^2 r/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{W_M = \sqrt{(\omega^2 \rho - \varepsilon r)^2 + \left(\rho\varepsilon + \frac{\omega^2 r}{2}\right)^2}}$$

3.20. $v_M = \omega\sqrt{l^2 + r^2}$, $w_M = \sqrt{\left(\varepsilon l + \frac{\omega^2 r}{2}\right)^2 + \left(\omega^2 l - \varepsilon r\right)^2}$.

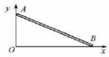
№ 3.21

Дано: $V_A = const$

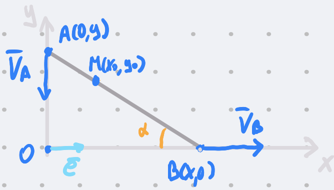
д-ть, что $W_M \perp O_y$,

$W_M \sim x^{-3}$

3.21. Концы A и B стержня движутся по двум взаимно перпендикулярным прямым Ox и Oy. Скорость точки A постоянна. Показать, что ускорение любой точки стержня перпендикулярно Oy и изменяется обратно пропорционально кубу расстояний этой точки от оси Oy.



К задаче 3.21

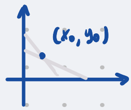


□ 1) A - МЦУ, т.к. $\bar V_A = const$

$\bar{AM} \parallel \bar{AB} \Rightarrow \bar W_M \parallel \bar W_B \Rightarrow \bar W_M \perp O_y$

2) Считаем AM и AB известными, т.к. через одну точку могут проходить стержни разной длины

???



$$\bar e = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \bar W_M\cdot\bar e = \bar W_A\cdot\bar e + \bar\varepsilon\times\bar{AM}\cdot\bar e - w^2\,\bar{AM}\cdot\bar e$$

$$W_M = 0 + \begin{bmatrix}0\\0\\\varepsilon\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}AM\cos\alpha\\-AM\sin\alpha\\0\end{bmatrix}\cdot\bar e - w^2 AM\cdot\cos\alpha = \varepsilon\cdot AM\cdot\sin\alpha - w^2 AM\cos\alpha$$

т.к. A - МЦУ: $tg\alpha = \frac{\varepsilon}{w^2} \Rightarrow W_M = w^2 AM\cdot tg\alpha\sin\alpha - w^2 AM\cos\alpha =$

$$= w^2 AM\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) = w^2 AM\cdot\frac{1-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = w^2 AM\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 2\cos\alpha\right)$$

$$\left.\begin{aligned}&\bar V_B\cdot\bar e = \bar V_A\cdot\bar e + \bar w\times\bar{AB}\cdot\bar e \Rightarrow V_B = wy\\ &V_A\sin\alpha = V_B\cos\alpha \Rightarrow tg\alpha = \frac{V_A}{V_B} = \frac{y}{x} \Rightarrow V_B = \frac{y}{x}V_A\end{aligned}\right\} \Rightarrow w = \frac{V_B}{y} = \frac{V_A}{x} = \frac{AM}{AB}\cdot\frac{V_A}{x_0}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_0}{AM} = \frac{x}{AB} \Rightarrow x = \frac{AB}{AM}x_0 \Rightarrow W_M = \left(\frac{AM}{AB}\cdot\frac{V_A}{x_0}\right)^2\cdot AM\left(\frac{AM}{x_0} - 2\frac{AM}{x_0}\right)$$

$$\boxed{W_M = \frac{AM^4}{AB^2}\cdot V_A^2\left(\frac{1}{x_0^3} - \frac{2}{x_0}\right) \sim \frac{1}{x_0^3}}$$

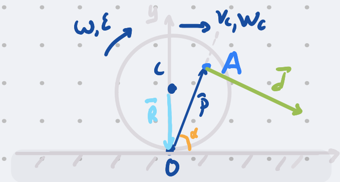
∎

3.25. Диск радиуса R катится по прямой без скольжения. Скорость и ускорение центра C диска в данный момент равны $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{w}_C$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки $A(x, y)$ диска $(x \neq 0, \quad y \neq 0)$.

№3.25

Дано: V_c, W_c, R

W_n, W_τ - ?



Без проскальзывания: $\omega = \frac{V_c}{R}$, $\varepsilon = \frac{W_c}{R}$

$$\bar{W}_A = \bar{W}_c + \bar{\varepsilon} \times \bar{CA} - \omega^2 \cdot \bar{CA} = \begin{bmatrix} \varepsilon R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y-R \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y-R \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cancel{\varepsilon R} + y\varepsilon - \cancel{\varepsilon R} - \omega^2 x \\ \omega^2 R - \omega^2 y - x\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\varepsilon - \omega^2 x \\ \omega^2 R - x\varepsilon - \omega^2 y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}: W_\rho = \frac{1}{\rho} \bar{W}_c \cdot \bar{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left[(y\cancel{\varepsilon} - \omega^2 x)x - (\cancel{x\varepsilon} + \omega^2 y - \omega^2 R)y \right] = \frac{-\omega^2}{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2-yR) \Rightarrow$$

$$\boxed{W_n = \frac{V_c^2 (x^2+y^2-yR)}{R^2 \sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \perp \bar{\rho}$$

$$W_d = \frac{1}{d} \bar{W}_c \cdot \bar{d} = \frac{1}{d} \left[(y\varepsilon - \omega^2 x)y + (x\varepsilon + \omega^2 y - \omega^2 R)x \right] = \frac{\varepsilon(x^2+y^2) - \omega^2 R x}{d} \Rightarrow$$

$$\boxed{W_\tau = \frac{W_c(x^2+y^2) - V_c^2 x}{R\sqrt{x^2+y^2}}}$$

3.25. $w_{A\tau} = \dfrac{w_C(x^2+y^2) - v_C^{\,2} x}{R\sqrt{x^2+y^2}}, \quad w_{An} = \dfrac{v_C^{\,2}(x^2+y^2-yR)}{R^2\sqrt{x^2+y^2}}.$

3.36. Точка движется в плоскости. Известны её скорость $\mathbf{v}(t)$ и радиус $\rho(t)$ кривизны её траектории. Найти угловую скорость и угловое ускорение сопровождающего точку трехгранника $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$.

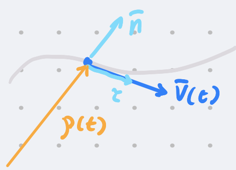
К задаче 3.35

№3.36

Дано: $\bar{V}(t), \rho(t)$

$\bar{\varepsilon}, \bar{\omega}$ - ?

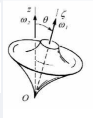
$$\boxed{\begin{gathered} \omega = \frac{V}{\rho} \Rightarrow \bar{\omega} = \bar{b} \cdot \frac{|\bar{V}|}{\rho} = \bar{b} \cdot \frac{\bar{V} \cdot \bar{\tau}}{\rho} \\ \bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \bar{b} \left(\frac{\dot{\bar{V}} \cdot \bar{\tau}}{\rho} - \frac{\bar{V} \cdot \bar{\tau} \dot{\rho}}{\rho^2} \right) \end{gathered}}$$



3.36. $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{b}\dfrac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}}{\rho}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}\left(\dfrac{\dot{\mathbf{v}}\cdot\boldsymbol{\tau}}{\rho} - \dfrac{\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\tau}\dot{\rho}}{\rho^2}\right).$

№4.4

4.4. Юла вращается вокруг своей оси симметрии $O\zeta$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$, образуя с ней постоянный угол θ (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы.



К задаче 4.4

Дано: $\omega_1, \omega_2, \theta$

$\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ – ?

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \cos\theta}}$$

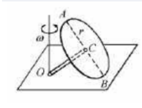
Введем $\bar{e}_{\omega_1} = \dfrac{\bar{\omega}_1}{\omega_1}$

$$\bar{\varepsilon} = (\omega_1 \cdot \bar{e}_{\omega_1})^{\cdot} = \underbrace{\dot{\omega}_1}_{0,\ \text{т.к. } \omega = const} \bar{e}_{\omega_1} + \omega_1 \dot{\bar{e}}_{\omega_1} = \omega_1 \cdot \bar{\omega}_2 \times \bar{e}_{\omega_1} = \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin\theta}$$

4.4. $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\theta}$, $\varepsilon = \omega_2\omega_1\sin\theta$.

№4.10

4.10. Тонкое колесо радиуса r, жестко насаженное под прямым углом на стержень OC длины $l = r\sqrt{3}$, катится по плоскости без скольжения. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение стержня OC, описывающего коническую поверхность с неподвижной вершиной O, равны по величине ω и ε. Определить величины угловой скорости, углового ускорения колеса, а также величины ускорений его точек A и B.



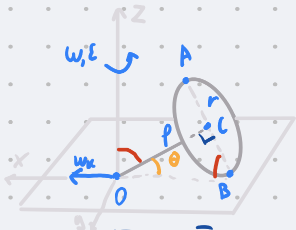
К задаче 4.10

Дано: $r,\ l = r\sqrt{3},\ \omega, \varepsilon$

$\omega_k, \varepsilon_k, V_A, V_B$ – ?

$$\bar{V}_C = \underbrace{\bar{V}_0}_{0} + \bar{\omega} \times \bar{OC} = \underbrace{\bar{V}_B}_{0} + \bar{\omega}_k \times \bar{BC} \Rightarrow \omega \cdot OC \cdot \cos\theta = \omega_k \cdot BC \cos\theta$$

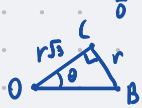
$$\omega_k = \omega \cdot \frac{OC}{BC} = \frac{l}{r}\omega \Rightarrow \boxed{\omega_k = \sqrt{3}\omega}$$



Введем $\bar{e}_{\omega_k} = \dfrac{\bar{\omega}_k}{\omega_k} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_k = \dot{\omega}\bar{e}_{\omega_k} + \omega_k \dot{\bar{e}}_{\omega_k} = \sqrt{3}\varepsilon \cdot \bar{e}_{\omega_k} + \bar{\omega} \times \bar{\omega}_k$

$$\varepsilon_k = \sqrt{(\sqrt{3}\cdot\varepsilon)^2 + (\omega \cdot \sqrt{3}\,\omega)^2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_k = \sqrt{3(\varepsilon^2 + \omega^4)}}$$

$$\bar{W}_B = \underbrace{\bar{W}_0}_{0} + \bar{\varepsilon}_k \times \bar{OB} + \bar{\omega}_k \times \underbrace{(\bar{\omega}_k \times \bar{OB})}_{0} = \bar{\varepsilon}_k \times \bar{OB} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}\varepsilon \\ \omega_k \cdot \omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r/\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\omega_k \cdot \omega \cdot r}{\sin\theta} \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow tg\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30° \Rightarrow \boxed{W_B = \frac{\omega_k \cdot \omega \cdot r}{\sin\theta} = 2\sqrt{3}\cdot\omega^2 r}$$

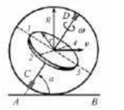
$$\bar{W}_A = \bar{W}_B + \overset{①}{\bar{\varepsilon}_k \times \bar{BA}} + \overset{②}{\bar{\omega}_k} \times \overset{③}{(\bar{\omega}_k \times \bar{BA})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\omega^2 r \\ -3\varepsilon r \\ -\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega^2 r \\ -3\varepsilon r \\ -2\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix}$$

① $\begin{bmatrix} \sqrt{3}\varepsilon \\ \sqrt{3}\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2r\sin\theta \\ 0 \\ 2r\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega^2 r \\ -3\varepsilon r \\ -\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix}$ ② $\begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2r\sin\theta \\ 0 \\ 2r\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\omega r \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ ③ $\begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -3\omega r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix}$

$$\boxed{W_A = r\sqrt{9\omega^4 + 9\varepsilon^2 + 12\omega^4} = r\sqrt{9\varepsilon^2 + 21\omega^4}}$$

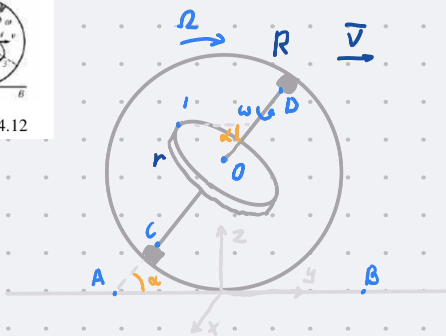
4.10. $\omega_a = \sqrt{3}\omega$, $\varepsilon_a = \sqrt{3(\varepsilon^2 + \omega^4)}$, $w_A = r\sqrt{9\varepsilon^2 + 21\omega^4}$, $w_B = 2\sqrt{3}\omega^2 r$.

4.12. Тонкий обруч радиуса R катится без скольжения по прямой AB. Скорость центра обруча постоянна и равна $\mathbf{v}$. В плоскости обруча укреплена ось CD, вокруг которой с постоянной по величине угловой скоростью ω вращается диск радиуса r. Центры диска и обруча совпадают, плоскость диска перпендикулярна CD. В положении, когда ось CD образует угол α с прямой AB, найти скорость и ускорение точек 1, 3 и 2, 4 диска, соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.



К задаче 4.12

№4.12



Дано: $\bar{V}, R, r, \alpha$

V_1, W_1 - ?

В задавальнике нужно только для 1 точки

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega} + \bar{\Omega}$$

Без скольжения: $\Omega = \frac{V}{R}$,

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} -V/R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega\cdot\cos\alpha \\ \omega\cdot\sin\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\omega}_a = \begin{bmatrix} -V/R \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V} + \bar{\omega}_a \times \bar{O}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -V/R \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega r \\ V + \frac{V}{R} r\cos\alpha \\ \frac{V}{R}\cdot r\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$V_1^2 = \omega^2 r^2 + \left(V + \frac{V}{R} r\cos\alpha\right)^2 + V^2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin^2\alpha = \omega^2 r^2 + V^2 + 2\frac{V^2}{R} r\cos\alpha + \frac{V^2}{R^2} r^2\cos^2\alpha +$$

$$+ \frac{V^2}{R^2} r^2 \sin^2\alpha = \omega^2 r^2 + V^2 + 2V^2\frac{r}{R}\cos\alpha + V^2\frac{r^2}{R^2} \Rightarrow$$

$$V_1 = \sqrt{\omega^2 r^2 + V^2 + 2V^2\frac{r}{R}\cos\alpha + \left(V\frac{r}{R}\right)^2}$$

$$\bar{\varepsilon}_a = \dot{\bar{\omega}} + \overset{\overset{0}{\parallel}}{\dot{\bar{\Omega}}} = \overset{\overset{0}{\parallel}}{\dot{\omega}}\,\bar{e} + \omega\dot{\bar{e}} = \bar{\Omega} \times \bar{\omega}$$

$$\bar{W}_1 = \underset{\overset{\parallel}{0,\ \text{т.к. } \bar{V} = const}}{\bar{W}} + \overset{0,\ \text{т.к.} \parallel}{\overset{\parallel}{\bar{\varepsilon}_a \times \bar{O}_1}} + \bar{\omega}_a \times (\bar{\omega}_a \times \bar{O}_1) = \bar{\omega}_a \times (\bar{\omega}_a \times \bar{O}_1) = \begin{bmatrix} -V/R \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega r \\ \frac{V}{R} r\cos\alpha \\ \frac{V}{R}\cdot r\sin\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ r\sin\alpha\left(\omega^2 + \frac{V^2}{R^2}\right) \\ -r\cos\alpha\left(\omega^2 + \frac{V^2}{R^2}\right) \end{bmatrix} \Rightarrow W_1 = r\left(\frac{V^2}{R^2} + \omega^2\right)$$

4.12. $v_1 = \sqrt{v^2 + 2v^2\frac{r}{R}\cos\alpha + \left(v\frac{r}{R}\right)^2 + \omega^2 r^2}$,

$$w_1 = w_3 = r\left(\frac{v^2}{R^2} + \omega^2\right)$$

4.23. При движении прямой (оси Ox) известны ускорения $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ точек с координатами x_1 и x_2 соответственно. Найти ускорение точки этой прямой с произвольным значением координаты x.

№4.23

$\bar{W}_1, \bar{W}_2, X_1, X_2$

$\bar{W}(x)$ - ?

$$\bar{W}_2 = \bar{W}_1 + \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{X_1X_2} + w_1 \times (w_1 \times \overline{X_1X_2}) \Rightarrow \bar{W}_2 - \bar{W}_1 = \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{X_1X_2} + w_1 \times (w_1 \times \overline{X_1X_2})$$

$$\overline{X_1X_2} = k\cdot\overline{X_1X} \Rightarrow k = \frac{X_2 - X_1}{X - X_1}$$

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{X_1X} + \bar{w}_1(\bar{w}_1 \times \overline{X_1X}) = \bar{w}_1 + \frac{1}{k}\left[\varepsilon \times \overline{X_1X_2} + w_1 \times (w_1 \times \overline{X_1X_2})\right] = \bar{w}_1 + \frac{1}{k}(\bar{w}_2 - \bar{w}_1)$$

$$\bar{w} = \bar{w}_1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\bar{w}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\bar{w}_2 \Rightarrow \boxed{\bar{w} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\bar{w}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\bar{w}_2}$$

4.23. $\mathbf{w} = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\mathbf{w}_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\mathbf{w}_2$.

№4.30

4.30. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равны $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ соответственно. Показать, что вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента – с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Дано: $\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$

д-ть: $\bar{w}_{вр} = \bar{w}_\tau$, $\bar{w}_{ос} = \bar{w}_n \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}, \bar{\omega}, \bar{r}$ - компланарны

$\square$ $\bar{w}_{вр} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$, $\bar{w}_\tau = \dot{V} \cdot \bar{\tau} = ([\bar{\varepsilon} \times \bar{r}] \cdot \bar{\tau}) \cdot \bar{\tau}$

$\bar{w}_{вр} = \bar{w}_\tau \Leftrightarrow \bar{\varepsilon} \times \bar{r} = ([\bar{\varepsilon} \times \bar{r}] \cdot [\bar{\omega} \times \bar{r}]) \cdot \dfrac{\bar{\omega} \times \bar{r}}{|\bar{\omega} \times \bar{r}|^2}$ $/ \cdot \bar{\varepsilon}$ слева

$\bar{\varepsilon} \cdot (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) = \bar{\varepsilon} \cdot [\bar{\omega} \times \bar{r}] \cdot ([\bar{\varepsilon} \times \bar{r}] \cdot [\bar{\omega} \times \bar{r}]) \cdot \dfrac{1}{|\bar{\omega} \times \bar{r}|^2}$

$\bar{\varepsilon} \cdot (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) = 0 \Rightarrow \bar{w}_{вр} = \bar{w}_\tau \Leftrightarrow \bar{\varepsilon} \cdot [\bar{\omega} \times \bar{r}] = 0 \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}, \bar{\omega}, \bar{r}$ - компланарны

$\bar{w} = \bar{w}_{вр} + \bar{w}_{ос} = \bar{w}_\tau + \bar{w}_n = \bar{w}_{вр} + \bar{w}_n \Rightarrow \bar{w}_n = \bar{w}_{ос}$ $\blacksquare$

4.56. Ориентация осей $Oxyz$, жестко связанных с твердым телом, относительно поступательно движущейся системы отсчета $OXYZ$ может быть задана ортогональной матрицей $A(t)$ – таблицей направляющих косинусов. Показать, что угловое перемещение твердого тела из начального положения в конечное может быть осуществлено одним поворотом (теорема Эйлера).

Указание. При решении воспользоваться тем фактом, что орт $\mathbf{u}$ оси конечного поворота удовлетворяет уравнению $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

найдем собств. вектор $\bar{u}$

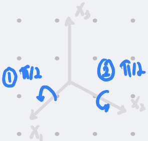
$A\bar{u} = \bar{u}$

$\det(A\bar{u} - \bar{u}) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} A + \lambda \operatorname{tr} A - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1$ (λ_2 и λ_3 нет необх. искать) $\Rightarrow$

$\bar{u}$ - остается неизм. при повороте тела $\Rightarrow$ поворот вокруг $\bar{u}$

T2. Твердое тело поворачивают на угол $\pi/2$ относительно оси x_1 неподвижного базиса x, а затем – на угол $\pi/2$ вокруг оси x_2 того же базиса. Найти матрицу ориентации базиса ξ, связанного с телом, относительно x, если в начальный момент базисы x и ξ совпадают. Найти вектор соответствующего конечно поворота и углы Эйлера.



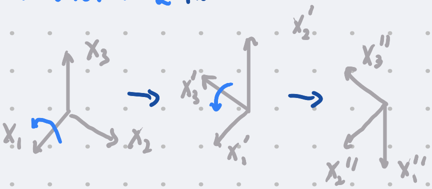
Решение 1: Активная точка зрения

(предпочтительней, т.к. повороты даны в одном базисе)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Решение 2: Пассивная точка зрения



$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

2) ψ - поворот вокруг $\bar{i}_3$ $\quad \psi = 0$

θ - поворот вокруг $\bar{i}_1'$ $\Rightarrow$ $\theta = 90^\circ$

φ - поворот вокруг $\bar{i}_3''$ $\quad \varphi = 90^\circ$

$$\Lambda = \Lambda_\theta \circ \Lambda_\varphi = \left(\cos\frac{\pi}{4} + \bar{i}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) \circ \left(\cos\frac{\pi}{4} - \bar{k}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}(1+\bar{i}) \circ (1-\bar{k}) =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \bar{k} + \bar{i} + \bar{j}) \Rightarrow \bar{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \alpha = 2\arccos\lambda_0 = 2\arccos\frac{1}{2} = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$$

4.66. Поворот твердого тела задается углами Эйлера ψ, θ и φ. С помощью кватернионов найти угол и направляющие косинусы оси конечного поворота тела.

Дано:

$$\bar{i}_3 \xrightarrow{\psi} \quad \bar{i}_1' \xrightarrow{\theta} \quad \bar{i}_3'' \xrightarrow{\varphi}$$

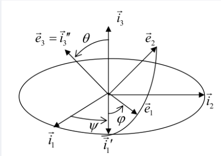


Рис. 3

$$\Lambda_\psi = \underbrace{\cos\frac{\psi}{2}}_{c_1} + \bar{i}_3 \underbrace{\sin\frac{\psi}{2}}_{s_1}$$

$$\Lambda_\theta = \underbrace{\cos\frac{\theta}{2}}_{c_2} + \bar{i}_1' \underbrace{\sin\frac{\theta}{2}}_{s_2}$$

$$\Lambda_\varphi = \underbrace{\cos\frac{\varphi}{2}}_{c_3} + \bar{i}_3'' \underbrace{\sin\frac{\varphi}{2}}_{s_3}$$

углы Эйлера $\Rightarrow$ пассивная т. зр.

$$\Lambda = \Lambda_\psi \circ \Lambda_\theta \circ \Lambda_\varphi$$

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - (\vec{\lambda}, \vec{\mu}) + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}.$$

все штрихи можно убрать, т.к. кватернион поворота имеет одинаковые координаты в i, i', i''

$$\Lambda_\psi \circ \Lambda_\theta = c_1 c_2 + c_1 s_2 \bar{i}_1 + c_2 s_1 \bar{i}_3 + s_1 s_2 \bar{i}_2$$

$$\Lambda = c_1 c_2 c_3 - c_2 s_1 s_3 + c_1 c_2 s_3 \bar{i}_3 + c_3 c_1 s_2 \bar{i}_1 + c_3 c_2 s_1 \bar{i}_3 + c_3 s_1 s_2 \bar{i}_2 + s_2 s_1 s_3 \bar{i}_1 -$$

$$- c_1 s_2 s_3 \bar{i}_2 = c_2 (c_1 c_3 - s_1 s_3) + \bar{i}_3 \cdot c_2 (c_1 s_3 + s_1 c_3) + \bar{i}_2 \cdot s_2 (s_1 c_3 - c_1 s_3) +$$

$$+ \bar{i}_1 \cdot s_2 (c_1 c_3 + s_1 s_3)$$

Компоненты кватерниона

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\psi + \varphi}{2} = c_+$$

$$\lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\psi - \varphi}{2} = c_-$$

$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\psi - \varphi}{2} = s_-$$

$$\lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2} \cdot \sin\frac{\psi + \varphi}{2} = s_+$$

Нормировка:

$$s_2^2 \cdot c_-^2 + s_2^2 s_-^2 + c_2^2 s_+^2 = s_2^2 + c_2^2 s_+^2 =$$

$$= s_2^2 + c_2^2 s_+^2 - c_2^2 + c_2^2 = 1 - c_2^2 (1 - s_+^2) =$$

$$= 1 - c_2^2 c_+^2 = 1 - \lambda_0^2$$

$$\alpha = 2 \arccos \lambda_0$$

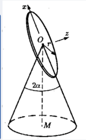
$$\gamma_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1 - \lambda_0^2}} \quad i = 1, 2, 3$$

4.66. Угол и направляющие косинусы оси поворота – $\alpha = 2\arccos\lambda_o$, $\gamma_i = \lambda_i \Big/ \sqrt{1-\lambda_o^2}$, где $\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}$, $\lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}$, $\lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}$, $\lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}$ – компоненты кватерниона поворота.

4.70. Тонкий диск обкатывает без скольжения неподвижный конус с углом 90° при вершине так, что линия касания вращается вокруг оси конуса с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Найти угол и положение оси конечного поворота диска в момент времени $t = \frac{\pi}{\Omega}$.

Дано: Ω, $t = \frac{\pi}{\Omega}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$

α, γ_i - ?



$$\omega = \Omega \sin\alpha = \frac{\Omega}{\sqrt2}$$

$$\omega_r = \omega = \frac{\Omega}{\sqrt2}$$

пассивная т. зр,

поворот вокруг верт. оси:

$$\varphi_1 = \Omega t = \pi, \quad \Lambda_1 = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt2}(\bar i + \bar k)\sin\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{\sqrt2}\bar i - \frac{1}{\sqrt2}\bar k$$

поворот вокруг оси Z: $\varphi_2 = \omega_r t = \frac{\pi}{\sqrt2}$, $\Lambda_2 = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2\sqrt2}}_{c} + \bar k\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{2\sqrt2}}_{s}$

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \frac{1}{\sqrt2}\left[+s - c\bar i - c\bar k + s\bar j\right]$$

$$\varphi = 2\arccos\lambda_0 \Rightarrow \cos\varphi = 2\cdot\frac{s^2}{2} - 1 = s^2 - 1 = -c^2 = -\cos^2\frac{\pi}{2\sqrt2}$$

$$\gamma_1 = \gamma_3 = -\frac{\sqrt2\, c}{\sqrt2\sqrt{1+c^2}} = -\frac{\cos\frac{\pi}{2\sqrt2}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{2\sqrt2}}}$$

Где ошибка?

$$\gamma_2 = \frac{\sin\frac{\pi}{2\sqrt2}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{2\sqrt2}}}$$

4.70. $\cos\varphi = -\cos^2(\pi/\sqrt8)$,

$$\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{\cos(\pi/\sqrt8)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi/\sqrt8)}}, \quad \gamma_2 = \frac{\sin(\pi/\sqrt8)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi/\sqrt8)}}.$$

№4.85

4.85. Положение твердого тела с неподвижной точкой определяется кватернионом $\Lambda(t) = \cos\frac{\varphi(t)}{2} + \mathbf{e}(t)\sin\frac{\varphi(t)}{2}$, то есть его положение в момент времени t есть поворот из начального положения на угол $\varphi(t)$ вокруг вектора $\mathbf{e}(t)$. Найти угловую скорость тела.

$\Lambda = \underbrace{\cos\frac{\varphi(t)}{2}}_{c} + \bar e(t)\cdot\underbrace{\sin\frac{\varphi(t)}{2}}_{s}$

$\bar\omega$ - ?

$$\bar R = \Lambda \circ \bar r^0 \circ \tilde\Lambda$$

$$\bar V = \dot{\bar r} = \dot\Lambda \circ \bar r^0 \circ \tilde\Lambda + \Lambda \circ \bar r^0 \circ \dot{\tilde\Lambda} = \dot\Lambda \circ \tilde\Lambda \circ \bar R - \bar R \circ \Lambda \circ \dot{\tilde\Lambda}$$

$$|\Lambda| = 1 \Rightarrow \Lambda \circ \tilde\Lambda = 1 \Rightarrow \dot\Lambda \circ \tilde\Lambda + \Lambda \circ \dot{\tilde\Lambda} = 0, \text{ где } \dot\Lambda = \dot\lambda_0 + \sum_1^3 \dot\lambda_k \bar i_k$$

$$\widetilde{(\dot\Lambda \circ \tilde\Lambda)} = (\Lambda \circ \dot{\tilde\Lambda}) = -(\dot\Lambda \circ \tilde\Lambda) \Rightarrow \operatorname{sqal}(\dot\Lambda \circ \tilde\Lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$V = 2(\dot\Lambda \circ \tilde\Lambda) \times \bar R = \bar\omega \times \bar R$$

$$2s^2 = 2 - 2c^2 = \underbrace{\cos\varphi - 1}$$

$$\bar\omega = (-s\cdot\dot\varphi + c\cdot\dot\varphi\,\bar e + 2s\dot{\bar e}) \circ (c - s\bar e) \overset{\operatorname{sqal}=0}{=} s^2\dot\varphi\bar e + c^2\dot\varphi\bar e + 2sc\dot{\bar e} - 2s^2\dot{\bar e}\times\bar e =$$

$$= \bar e\dot\varphi + \dot{\bar e}\sin\varphi + \bar e \times \dot{\bar e}(1 - \cos\varphi)$$

4.85. $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{e}\dot\varphi + \dot{\mathbf{e}}\sin\varphi + \mathbf{e}\times\dot{\mathbf{e}}(1-\cos\varphi)$.

T3

T3. Доказать свойство ассоциативности кватернионного умножения: для любых кватернионов Λ, M и N выполняется $\Lambda \circ (M \circ N) = (\Lambda \circ M) \circ N$.

$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$

$M = \mu_0 + \bar{\mu}$

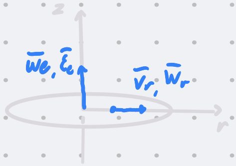
$N = \nu_0 + \bar{\nu}$

D-ть: $\Lambda \circ (M \circ N) = (\Lambda \circ M) \circ N$

Проверить втупую

T4. Решить кинематические уравнения Пуассона $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \omega$ и $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\omega \circ \Lambda$ для $\omega = \mathrm{const}$ и дать геометрическую интерпретацию полученным решениям.

2.9. В некоторый момент переносные угловая скорость и угловое ускорение соответственно равны $\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{e}_z\omega_e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{e}_z\varepsilon_e$. Какими должны быть относительные скорость $\mathbf{v}_r = \mathbf{e}_r v_r$ и ускорение $\mathbf{w}_r = \mathbf{e}_r w_r$ точки, движущейся по оси Or цилиндрической системы координат $Or\varphi z$, чтобы её абсолютное ускорение было равно нулю?



Дано: $\overline{\omega}_e = \overline{e}_z \omega_e$

$\overline{\varepsilon}_e = \overline{e}_z \varepsilon_e$

$\overline{W}_a = \overline{0}$

по оси Or, цил. $Or\varphi z$

$\overline{V}_r, \overline{W}_r$ –?

$$\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e + \overline{W}_k = \overline{0}$$

$$W_e = \cancelto{0}{\overline{W}_0} + \overline{\varepsilon}_e \times \overline{p} + \overline{\omega}_e \times (\overline{\omega}_e \times p) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -r\omega_e^2 \\ r\varepsilon_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_k = 2\overline{\omega}_e \times \overline{V}_r = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2V_r\omega_e \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

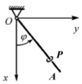
$$\begin{bmatrix} W_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r\omega_e^2 \\ r\varepsilon_e \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2V_r\omega_e \\ 0 \end{bmatrix} = \overline{0} \Rightarrow$$

$$\overline{W}_r = \overline{e}_r \omega^2 r$$

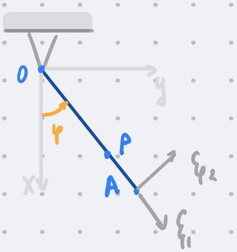
$$\overline{V}_r = -\overline{e}_r \frac{\varepsilon_e r}{2\omega_e}$$

2.9. $\mathbf{w}_r = \mathbf{e}_r\omega_e^2 r$, $\quad \mathbf{v}_r = -\mathbf{e}_r \dfrac{\varepsilon_e r}{2\omega_e}$.

2.16. Стержень OA совершает колебания в плоскости Oxy по закону $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t)$. По стержню скользит колечко P. Пренебрегая размерами колечка, найти величины его абсолютной скорости и абсолютного ускорения, если $OP = \frac{1}{2}at^2$.



К задаче 2.16



Дано: $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t)$

$OP = \frac{1}{2}at^2$

V_a, W_a –?

Введем $O\xi$, связ. со стержнем

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e; \quad \overline{V}_r = \begin{bmatrix} at \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{V}_e = \cancelto{0}{\overline{V}_0} + \overline{\omega} \times \overline{OP} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} OP \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ OP \cdot \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{V}_a = \begin{bmatrix} at \\ \frac{1}{2}at^2\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_a^2 = a^2t^2 + \frac{1}{4}a^2t^4\dot{\varphi}^2 = \frac{a^2t^2}{4}(4 + \dot{\varphi}^2)$$

$$V_a = \frac{at}{2}\sqrt{4 + \varphi_0^2\omega^2\cos^2(\omega t)}$$

$$\overline{W}_a = \overline{W}_r + \overline{W}_e + \overline{W}_k \qquad \overline{W}_r = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_e = \cancelto{0}{\overline{W}_0} + \overline{\varepsilon} \times \overline{OP} + \overline{\omega}_e \times (\overline{\omega}_e \times \overline{OP}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} OP \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ OP \cdot \dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}^2 OP \\ \ddot{\varphi} \cdot OP \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_k = 2\overline{\omega} \times \overline{V}_r = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} at \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\dot{\varphi}at \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}_a = \begin{bmatrix} a - \dot{\varphi}^2 OP \\ \ddot{\varphi}\, OP + 2\dot{\varphi}\, at \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W_a^2 = \left(a - \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 a t^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\ddot{\varphi}\, a t^2 + 2\dot{\varphi}\, a t\right)^2 =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\left(2 - \left[\varphi_0 w t \cdot \cos(wt)\right]^2\right)^2 + \left(4\varphi_0 w t \cos(wt) - \varphi_0 w^2 t^2 \sin(wt)\right)^2\right]$$

$$W_a = \frac{a}{2}\sqrt{\left[2 - (\varphi_0 w t \cos(wt))\right]^2 + \varphi_0^2 w^2 t^2 \left[4\cos(wt) - wt\sin(wt)\right]^2}$$

2.16. $v = \frac{at}{2}\sqrt{4 + \varphi_0^2 (\omega t)^2 \cos^2(\omega t)}$,

$w = \frac{a}{2}\sqrt{\left[2 - \varphi_0^2(\omega t)^2\cos^2(\omega t)\right]^2 + \varphi_o^2(\omega t)^2\left[4\cos(\omega t) - (\omega t)\sin(\omega t)\right]^2}$

2.38. Точка движется по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$. Движение происходит в соответствии с законом площадей $r^2\dot{\varphi} = C$, где C – постоянная величина. Эллипс вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через фокус. Найти величины абсолютных скоростей и ускорения точки в зависимости от r.

К такой приближенной модели приводит учет влияния несферичности Земли на движение спутника в плоскости земного экватора.

введём Oryz, связ. с эллипсом.

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e \; ; \; \bar{V}_e = \cancel{\bar{V}_0}^{\,0} + \bar{w} \times \bar{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ rw \\ 0 \end{bmatrix}$$

Дано: $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$

$r^2\dot{\varphi} = C, \; \bar{w} = const$

$V_a(r), W_a(r) - ?$

$$\dot{r} = \frac{\dot{\varphi}\, pe\sin\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} \qquad V_r^* = \dot{r}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2} \qquad V_\varphi = r\dot{\varphi}$$

$$r + re\cos\varphi = p \Rightarrow \cos\varphi = \frac{p - r}{re}$$

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{C}{r^2} \cdot r^2 \frac{e\sin\varphi}{p}\right)^2 = \left(\frac{Ce}{p}\right)^2\left[1 - \left(\frac{p-r}{re}\right)^2\right] = C^2\left[\left(\frac{e}{p}\right)^2 - \left(\frac{p-r}{pr}\right)^2\right] =$$

$$= C^2\left[\left(\frac{e}{p}\right)^2 - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2\right]$$

$$\bar{V}_a = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} + rw \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_a = \sqrt{\left(wr + \frac{C}{r}\right)^2 + C^2\left[\left(\frac{e}{p}\right)^2 - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2\right]}$$

$$\bar{W}_a = \bar{W}_r + \bar{W}_e + \bar{W}_k$$

$$\bar{W}_e = \cancel{\bar{W}_0}^{\,0} + \cancel{\bar{\varepsilon}_e}^{\,0} \times \bar{r} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ rw \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w^2 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \qquad W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2$$

В силу з-на площадей $W_\varphi = 0$

можете проверить:

$$W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \qquad \ddot{\varphi} = -\frac{2\dot{r}C}{r^3} \qquad W_\varphi = -\frac{2C}{r^2}\cdot\dot{r} + 2\dot{r}\frac{C}{r^2} = 0$$

$$\overline{W}_K = 2\overline{\omega}\times\overline{V}_r = 2\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\dot{r}\\r\dot{\varphi}\\0\end{bmatrix} = 2\omega\begin{bmatrix}-r\dot{\varphi}\\\dot{r}\\0\end{bmatrix}$$

$$2\dot{r}\ddot{r} = \left[-C^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2\right]^{\cdot} = 2C^2\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{\dot{r}}{r^2}$$

$$\ddot{r} = C^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$W_r = C^2\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)\cdot\frac{1}{r^2} - r\frac{C^2}{r^4} = -\frac{C^2}{pr^2}$$

$$\overline{W}_a = \begin{bmatrix}W_r\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\omega^2 r\\0\\0\end{bmatrix} + 2\omega\begin{bmatrix}-r\dot{\varphi}\\\dot{r}\\0\end{bmatrix}$$

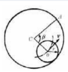
$$W_a^2 = \left(2\frac{C^2}{r^3} + \omega^2 r + 2\omega r\dot{\varphi}\right)^2 + (2\omega\dot{r})^2$$

2.38. $v^2 = \left(\omega r + \frac{C}{r}\right)^2 + C^2\left[\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2\right],$

$w^2 = \left(\omega^2 r + 2\omega\frac{C}{r} + \frac{C^2}{r^2 p}\right)^2 + 4\omega^2 C^2\left[\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2\right].$

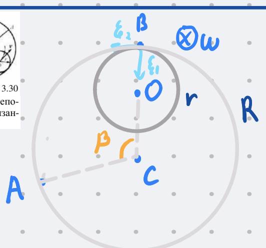
$$W_a = \sqrt{\left(\omega^2 r + 2\omega\frac{C}{r} + \frac{C^2}{pr^2}\right)^2 + 4\omega^2 C^2\left[\left(\frac{e}{p}\right)^2 - \left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)^2\right]}$$

3.30. Цилиндр радиуса r катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиуса R. Угол между линией центров цилиндров CO и радиусом неподвижного цилиндра, проходящим через точку A, равен β. Скорость центра O движущегося цилиндра постоянна по величине и равна v. Найти величины скорости и ускорения точки A неподвижного цилиндра относительно системы координат, связанной с подвижным цилиндром.



К задаче 3.30

Дано: r, R, β, $V = \text{const}$, V_A, W_A –?



$$\overline{V}_A = \overline{V}_{Ae} + \overline{V}_{Ar} = \overline{0} \Rightarrow \overline{V}_{Ar} = -\overline{V}_{Ae}$$

$$\overline{V}_{Ae} = \cancel{\overline{V}_B}^{\,0} + \overline{\omega}\times\overline{BA}$$

$$\omega = \frac{V}{r}, \quad AB = 2R\sin\frac{\beta}{2} \Rightarrow V_{Ar} = 2V\frac{R}{r}\sin\frac{\beta}{2}$$

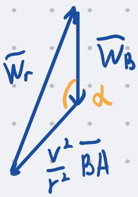
$$\overline{W}_A = \overline{W}_e + \overline{W}_r + \overline{W}_K = \overline{0}$$

$$\overline{W}_e = \overline{W}_B + \cancel{\overline{\varepsilon}}^{\,0}\times\overline{BA} - \omega^2\overline{BA}$$

$$\overline{W}_K = 2\overline{\omega}\times\overline{V}_{Ar} = -2\overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{BA}) = -2\overline{\omega}\,\cancel{(\overline{\omega}\,\overline{BA})}^{\,0} + 2\omega^2\overline{BA}$$

$$\overline{W}_r = -\overline{W}_e - \overline{W}_k = -\left[\overline{W}_B + \frac{V^2}{r^2}\overline{BA}\right]$$

$$\overline{W}_B = \overline{W}_0 - \omega^2\overline{OB},\quad \overline{W}_0 = -\frac{V^2}{R-r}\frac{\overline{OB}}{OB} \Rightarrow \overline{W}_B = \overline{BO}\cdot V^2\left(\frac{1}{(R-r)r}+\frac{1}{r^2}\right) = \frac{RV^2}{(R-r)r^2}\cdot\overline{BO}$$



$$\varphi = 90-\frac{\beta}{2},\quad \alpha = 180-\varphi = 90+\frac{\beta}{2}$$

$$\cos\alpha = -\sin\frac{\beta}{2} = -s$$

$$W_r^2 = \left(\frac{RV^2}{(R-r)r^2}\cdot BO\right)^2 + \left(\frac{V^2}{r^2}\cdot BA\right)^2 + 2\sin\frac{\beta}{2}\,\frac{V^2}{r^2}BA\cdot\frac{Rr}{(R-r)r^2}V^2 =$$

$$= \frac{R^2V^4}{r^4(R-r)^2}\left[r^2 + \underbrace{4(R-r)^2s^2 + 4s^2(R-r)\cdot r}_{4(R-r)s^2(R-\cancel{r}+\cancel{r})}\right]$$

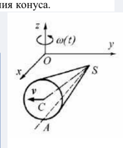
$$\boxed{W_r = \frac{RV^2}{r^2(R-r)}\sqrt{r^2+4R(R-r)\sin^2\frac{\beta}{2}}}$$

3.30. $v_A = 2v\frac{R}{r}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$, $w_A = \frac{v^2R}{r^2(R-r)}\sqrt{r^2+4R(R-r)\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$.

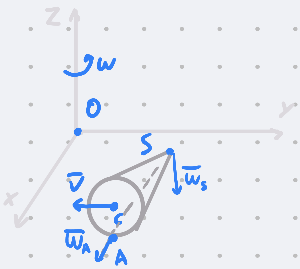
4.25. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$. По плоскости катится без скольжения конус так, что центр его основания движется относительно плоскости с постоянной по величине скоростью v в направлении, указанном на рисунке. Высота конуса h, угол при вершине 2β. Найти величины абсолютных угловой скорости и углового ускорения конуса.

Дано: $\overline{\omega}(t)$, $V = const$, h, 2β

ω_a, ε_a - ?



К задаче 4.25



$$\overline{\omega}_a = \overset{\overline{\omega}}{\overset{\parallel}{\overline{\omega}_e}} + \overline{\omega}_r$$

$$\overline{V}_C = \overline{\omega}_A \times \overline{AC} \Rightarrow$$

$$V = \omega_A\cdot SC\cdot\sin\beta \Rightarrow \omega_A = \frac{V}{h\sin\beta}$$

$$\boxed{\omega_a = \sqrt{\omega^2+\left(\frac{V}{h\sin\beta}\right)^2}}$$

$$\overline{\varepsilon}_a = \overline{\varepsilon}_e + \overline{\varepsilon}_r + \overline{\omega}_e\times\overline{\omega}_r$$

$$\overline{\varepsilon}_r = \overset{0}{\cancel{\dot{\omega}_A}}\,\overline{e} + \omega_A\cdot\dot{\overline{e}} = \overline{\omega}_S\times\overline{\omega}_A$$

$$\overline{V}_C = \overline{\omega}_S\times\overline{SC} \Rightarrow V = \omega_S\cdot SC\cdot\sin(90+\beta) \Rightarrow \omega_S = \frac{V}{h\cos\beta}$$

$$\varepsilon_a = \underset{\text{вдоль } Oz}{\dot{\overline{\omega}}} + \underbrace{\overline{\omega}_S\times\overline{\omega}_A + \overline{\omega}\times\overline{\omega}_A}_{\text{сонаправлены}}$$

$$\boxed{\varepsilon_a = \sqrt{\dot{\omega}^2+\left[\frac{V}{h\sin\beta}\left(\omega-\frac{V}{h\cos\beta}\right)\right]^2}}$$

Т5. Конус II (Рис. 2) с углом при вершине $\alpha_2 = 45°$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1 = 90°$. Высота OO_1 подвижного конуса равна l, а скорость центра его основания O_1 постоянна по величине и равна v. Вдоль высоты конуса OO_1 движется точка M по закону $OM = f(t)$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент, когда $OM = MO_1$.

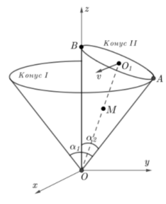
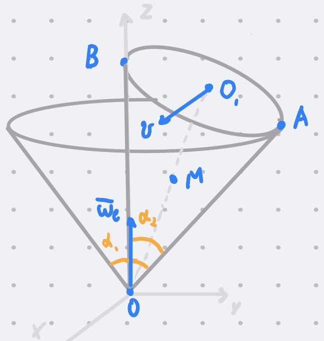


Рис. 2: К задаче Т3



Дано: $\alpha_2 = 45°$, $\alpha_1 = 90°$

$OO_1 = l$, v, $OM = f(t)$

$OM = MO_1$

V_a, W_a - ?

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r$$

$$\overline{V}_e = \frac{1}{2}\overline{V} \qquad \overline{V}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f}_y \\ \dot{f}_z \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{V}_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}V \\ \dot{f}_y \\ \dot{f}_z \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{V_a = \sqrt{\frac{1}{4}v^2 + (\dot{f}(t))^2}}$$

$$\overline{V}_{O_1} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \overline{w}_e \times \overline{OO}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ OO_{1y} \\ OO_{1x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w\,OO_{1y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s = \sin\frac{\alpha}{2},\ c = \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow w = \frac{V}{l s}$$

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r + \overline{W}_k \qquad W_k = 2\,\overline{w}_e \times \overline{V}_r = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f}_y \\ \dot{f}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2w\dot{f}_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{f}(t)_y \\ \ddot{f}(t)_z \end{bmatrix} \qquad \overline{W}_e = \cancel{\overline{\varepsilon}_e \times \overline{OM}}^{\,0} + \overline{w}_e \times (\overline{w}_e \times \overline{OM}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}w\,OO_{1y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}w^2 OO_{1y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_a = \begin{bmatrix} 0 + 0 - 2w\dot{f}_y \\ -\frac{1}{2}w^2 OO_{1y} + \ddot{f}_y + 0 \\ 0 + \ddot{f}_z + 0 \end{bmatrix}$$

$$W_a^2 = (\ddot{f}\cdot c)^2 + (\ddot{f}\cdot s - \frac{1}{2}w^2 l s)^2 + (2w\dot{f}s)^2 = \ddot{f}^2 - \ddot{f}w^2 l s^2 + \frac{1}{4}w^4 l^2 s^2 + 4w^2\dot{f}^2 s^2$$

$$\boxed{W_a = \sqrt{\ddot{f}^2 - \ddot{f}\frac{v^2}{l} + \frac{1}{l^2}\frac{v^4}{2-\sqrt{2}} + 4\frac{v^2\dot{f}^2}{l^2}}}$$

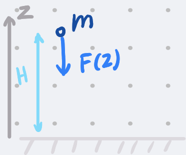
5.7. Камень массы m отпущен без начальной скорости на высоте H над Землей. Пренебрегая силами сопротивления, найти время падения T, по истечении которого камень достигнет высоты h, если сила притяжения меняется с высотой z по закону $\frac{\gamma mM}{(R+z)^2}$, где γ – гравитационная постоянная, M и R – масса и радиус Земли. В выражении для времени падения перейти к пределу при $R\to\infty$ (случай однородного поля тяжести).

Дано: m, H, T, h

$F(z)=\frac{\gamma mM}{(R+z)^2}$

$T-?$

$\lim\limits_{R\to\infty} T-?$



$$m\ddot z=-\frac{\gamma mM}{(R+z)^2}\qquad X(z)=\dot z(t)$$

$$\ddot z(t)=X\cdot X'(z)$$

$$X\cdot X'=-\frac{\gamma M}{(R+z)^2}\Rightarrow\int_0^V X\,dX=-\int_H^z\frac{\gamma M}{(R+z)^2}dz$$

$$\frac{V^2}{2}=\gamma M\left(\frac{1}{R+z}-\frac{1}{R+H}\right)=\frac12\dot z^2$$

$$\dot z^2=2\gamma M\left(\frac{1}{R+z}-\frac{1}{R+H}\right)=2\gamma M\frac{1}{R+H}\cdot\left(\frac{\overbrace{R+H}^{a}}{R+z}-1\right)=\frac{2\gamma M}{a}\cdot\left(\frac{a}{R+z}-1\right)$$

$$u=R+z,\quad dt=\sqrt{\frac{a}{2\gamma M}}\cdot\frac{du}{\sqrt{\frac{a}{u}-1}}=\left\{\begin{array}{l}V=\sqrt{\frac{a}{u}-1}\quad u=\frac{a}{V^2+1}\\ du=-\frac{2aV}{(V^2+1)^2}dV\end{array}\right\}=-\sqrt{\frac{a}{2\gamma M}}\cdot\frac{2a}{(V^2+1)^2}$$

$V=\operatorname{tg}t,$

$\operatorname{tg}^2t+1=\frac{1}{\cos^2t}$, $\Rightarrow$

$dV=\frac{dt}{\cos^2t}$

$$\sqrt{\frac{2\gamma M}{a^3}}\int_0^T dt=-2\int_{\operatorname{arctg}V}^{0}\frac{\cos2t+1}{2}dt=-\left(\frac{\sin2t}{2}+t\right)\Bigg|_{\operatorname{arctg}V}^{0}=\frac12\sin(2\operatorname{arctg}V)+\operatorname{arctg}V;$$

$$\sin(2\operatorname{arctg}V)=2\sin(\operatorname{arctg}V)\cdot\cos(\operatorname{arctg}V)=2\cdot\frac{V}{\sqrt{1+V^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+V^2}}=\frac{2V}{1+V^2}=\frac{2V}{1+\frac{a}{u}-1}=\frac{2uV}{a}$$

$\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$

$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{x-1}$ $\Rightarrow\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt x}\Rightarrow\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt x}$

$$T=\sqrt{\frac{a^3}{2\gamma M}}\left(\frac{uV}{a}+\operatorname{arctg}V\right)=\sqrt{\frac{a^3}{2\gamma M}}\cdot\left(\frac{u}{a}\sqrt{\frac{a}{u}-1}+\operatorname{arctg}V\right)=\sqrt{\frac{a^3}{2\gamma M}}\left(\overbrace{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}\left(\frac{a}{u}-1\right)}}^{\sqrt{\frac{u(a-u)}{a^2}}}+\arccos\sqrt{\frac{u}{a}}\right)$$

$$\gamma M=gR^2\Rightarrow\quad\boxed{T=\sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}}\left(\sqrt{\frac{(R+h)(H-h)}{(R+H)^2}}+\arccos\sqrt{\frac{R+h}{R+H}}\right)}$$

2) $R\to\infty$: $\frac{R+h}{R+H}=1-\frac{H-h}{R+H}=1-b,\ b\to0$

$$\sqrt{1-b} = 1 - \frac{b}{2} + o(b),\ b \to 0$$

$$\arccos(\sqrt{1-b}) = \arccos\left(1 - \frac{b}{2} + o(b)\right) = \arcsin\left(\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b}{2}\right)^2 + o(b^2)}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{1 - 1 + b + o(b)}\right) = \arcsin\sqrt{b + o(b)} = \sqrt{b + o(b)},\ b \to 0$$

$$\boxed{\lim_{R\to\infty} T} = \lim_{R\to\infty}\left[\sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}\cdot\frac{(R+h)(H-h)}{(R+H)^2}} + \sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}\cdot\frac{H-h}{R+H}}\right] = \sqrt{\frac{H-h}{2g}} + \sqrt{\frac{H-h}{2g}} = \boxed{\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}}$$

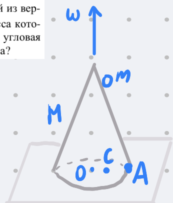
5.7. $T = \sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}}\left(\arccos\sqrt{\frac{R+h}{R+H}} + \sqrt{\frac{(R+h)(H-h)}{(R+H)^2}}\right)$,

$\lim\limits_{R\to\infty} T = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$ – время падения в однородном поле тяжести при отсутствии сопротивления.

6.13. Прямой круговой конус поставлен основанием на гладкий горизонтальный стол. Конусу сообщается угловая скорость ω_0 вокруг его оси симметрии. По его образующей из вершины к основанию опускается материальная точка, масса которой в k раз меньше массы конуса. Чему будет равна угловая скорость конуса, когда точка достигнет основания конуса?

Дано: ω_0, $M = km$

ω – ?



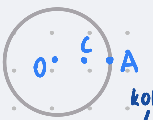
Рассм. сист. конус + м.т.

$$R_z = (M+m)g - N = 0 \Rightarrow \dot{\bar{P}} = \bar{R}^e = \bar{0} \Rightarrow V_c = const$$

$$V_c(0) = 0 \Rightarrow \bar{r}_c = const$$

$$F^e \parallel \text{оси вращ} \Rightarrow \dot{\bar{K}}_c = 0 \Rightarrow K_c = const \Rightarrow K_c^{нач} = K_c^{кон}$$

$$\bar{K}_c^{нач} = J_c\bar{\omega}_0 = \frac{3}{10}MR^2\bar{\omega}_0$$



$$\bar{OC} = \frac{m}{m+M}R \qquad CA = OA - OC = \frac{MR}{m+M}$$

$$\bar{K}_c^{кон} = \overset{\text{конуса}}{\bar{K}_c^1} + \overset{\text{м.т.}}{\bar{K}_c^2} \qquad \bar{K}_c^1 = K_0 + \bar{Q}\times\bar{OC} = \frac{3}{10}MR^2\bar{\omega} + M\bar{V}_0\times\bar{OC}$$

$$\bar{V}_0 = \cancel{\bar{V}_c}^{\,0} + \bar{\omega}\times\bar{CO} \Rightarrow \bar{V}_0\times\bar{OC} = -(\bar{\omega}\times\bar{OC})\times\bar{OC} = \bar{OC}\times(\bar{\omega}\times\bar{OC}) =$$

$$= OC^2\bar{\omega} - \bar{OC}\,(\cancel{\bar{OC}\,\bar{\omega}})^{0} = OC^2\cdot\bar{\omega}$$

$$K_c^1 = \left(\frac{3}{10}MR^2 + M\,OC^2\right)\bar{\omega} = MR^2\left(\frac{3}{10} + \left(\frac{m}{m+M}\right)^2\right)\bar{\omega}$$

$$K_c^2 = m\,\bar{V}_A\times\bar{AC} = m\cdot(\bar{\omega}\times\bar{CA})\times\bar{AC} = m\cdot\bar{CA}\times\bar{\omega}\times\bar{CA} = m\,CA^2\bar{\omega} = m\left(\frac{MR}{m+M}\right)^2\bar{\omega}$$

$$K_c^{кон} = \overline{\omega} \cdot MR^2\left(\frac{3}{10} + \frac{m^2}{(m+M)^2} + \frac{mM}{(m+M)^2}\right) = \overline{\omega} MR^2\left(\frac{3}{10} + \frac{m}{m+M}\right) \Rightarrow$$

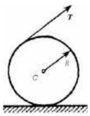
$$\overline{\omega} MR^2\left(\frac{3}{10} + \frac{m}{m+M}\right) = \frac{3}{10} MR^2 \overline{\omega}_0 \Rightarrow$$

$$\overline{\omega}_0 = \frac{3/10 + m/(m+M)}{3/10}\overline{\omega} = \frac{13m + 3M}{3(m+M)}\overline{\omega} = \frac{13+3k}{3(1+k)}\overline{\omega}$$

$$\boxed{\omega = \frac{3(1+k)}{13+3k}\omega_0}$$

6.13. $\omega = \dfrac{3(k+1)}{3k+13}\omega_0$.

6.37. Однородный цилиндр катится по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы T, равной половине веса P цилиндра. Сила T касается цилиндра перпендикулярно его образующей и составляет с горизонтальной плоскостью угол α. Коэффициент трения скольжения равен $f = \frac{1}{3}$. Найти значение угла α^*, при котором возникает скольжение. Найти угловое ускорение цилиндра и ускорение его центра масс для значений угла $\alpha < \alpha^*$ и $\alpha > \alpha^*$.



К задаче 6.37

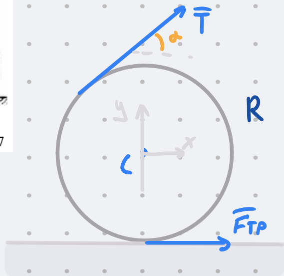
Дано: $T = \frac{1}{2}P, \alpha$

$f = \frac{1}{3}$,

α^* - возн. скольж.

α^* - ?

ε, W_c при $\alpha < \alpha^*$, $\alpha > \alpha^*$ - ?



1) $mW_c = T\cos\alpha^* + F_{тр}$

$T\sin\alpha + N = P \Rightarrow N = \frac{P}{2}(2 - \sin\alpha)$

$mW_c = T\cos\alpha + F_{тр}$

$\dot{K}_c = J_c\varepsilon = R(T - F_{тр})$

Без проск: $W_c = \varepsilon R$, $F_{тр} \leq fN \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\varepsilon = R(T - F_{тр})$

$m\varepsilon R = T\cos\alpha + F_{тр} = 2T - 2F_{тр}$

$F_{тр} = \frac{1}{3}T(2 - \cos\alpha) \leq fN = \frac{1}{3}\cdot\frac{P}{2}(2 - \sin\alpha) \Rightarrow \cos\alpha \leq \sin\alpha$

при $\alpha = \alpha^*$: $\cos\alpha^* = \sin\alpha^* \Rightarrow \boxed{\alpha^* = 45°}$

2) $\alpha < \alpha^*$: $F_{тр} = \frac{1}{3}T(2 - \cos\alpha)$

$W_c = \frac{1}{m}(T\cos\alpha + F_{тр}) = \frac{P}{2m}\left(\cos\alpha + \frac{1}{3}(2 - \cos\alpha)\right) = \boxed{\frac{g}{3}(\cos\alpha + 1)}$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{W_c}{R} = \frac{g}{3R}(1 + \cos\alpha)}$$

3) $\alpha > \alpha^*$: $F_{тр} = fN = \frac{P}{6}(2 - \sin\alpha)$

$W_c = \frac{1}{m}(T\cos\alpha + F_{тр}) = \frac{P}{6m}(3\cos\alpha + 2 - \sin\alpha)$

$$\boxed{W_c = \frac{g}{6}(3\cos\alpha + 2 - \sin\alpha)}$$

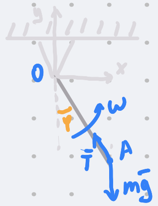
6.37. $\alpha^* = 45°$; при $\alpha < 45°$ $\ddot{x} = r\ddot{\varphi} = \frac{g}{3}(\cos\alpha + 1)$;

при $\alpha > 45°$ $\ddot{x} = \frac{g}{2}\left[\cos\alpha + f(2 - \sin\alpha)\right]$, $\dot{\omega} = \frac{g}{r}\left[1 - f(2 - \sin\alpha)\right]$.

$$\varepsilon = \frac{R}{\frac{1}{2}mR^2}(T - F_{тр}) = \frac{2P}{2mR}(1 - f(2 - \sin\alpha)) = \boxed{\frac{g}{R}\left(1 - \frac{1}{3}(2 - \sin\alpha)\right)}$$

6.39. Как нужно изменять длину $l(t)$ плоского математического маятника, чтобы угол отклонения маятника от вертикали менялся по линейному закону $\varphi(t)=\omega t$, где $\omega=\mathrm{const}$? Найти также нормальную реакцию в точке подвеса.

Дано: $\varphi(t)=\omega t$,
$\omega=\mathrm{const}$
$l(t)-?$
$T-?$ - в задовальнике



Отн-но т.О

$$K=m\omega l^2(t),\quad \dot{\bar K}=\overline{OA}\times m\bar g$$

$$\dot K=2m\omega l\dot l=-mgl\sin\omega t$$

$$\int_{l_0}^{l}dl=-\frac{g}{2\omega}\int_0^t\sin\omega t\,dt$$

$$l-l_0=\frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{\cos(\omega t)-1}{2}\Rightarrow \boxed{l(t)=l_0-\frac{g}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$

для м.т.: $\bar T+m\bar g=m\bar W=m\dot{\bar V}$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}l\sin\varphi\\-l\cos\varphi\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\omega l\cos\varphi\\\omega l\sin\varphi\\0\end{pmatrix}\qquad \bar W=\begin{pmatrix}-\omega\dot l c+\omega^2 l s\\\omega\dot l s+\omega^2 l c\\0\end{pmatrix}$$

ИСПРАВИТЬ

ось y: $T\cos\varphi-mg=m(\omega\dot l\sin\varphi+\omega^2 l\cos\varphi)\Rightarrow$

$$T\cos\varphi=m\left(g+\omega\cdot\frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{\omega}{2}\cdot\sin\varphi+\omega^2 l_0\cos\varphi-\right.$$

$$\left.-\omega^2\cdot\frac{g}{\omega^2}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\varphi\right)=mg\left(1+\frac12\sin^2\varphi+\frac{\omega^2}{g}l_0\cos\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac12\cos\varphi+\frac12\cos^2\varphi\right)=\frac{mg}{2}\left(3+\frac{2l_0}{g}\omega^2\cos\varphi-\cos\varphi\right)$$

6.39. $l(t)=l_0-\frac{g}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}$, $\left(\omega^2>\frac{2g}{l_0}\right)$

$$N=\frac{mg}{2}\left(\frac{2l_0}{g}\omega^2-1+3\cos\omega t\right)>0.$$

7.4. Однородный стержень OA длины l и массы M вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси O. Другой конец стержня несет ось A, на которую насажен однородный диск радиуса r и массы m. Диск катится без скольжения внутри цилиндрической полости радиуса $R=l+r$, прижимая к ней тонкий обруч радиуса ρ и массы μ. Найти кинетическую энергию системы.

Дано: l, M, ω, r, m,
$R=l+r$, ρ, μ
$T-?$

B - центр обруча

$$V_A=\omega_g r=\omega l\Rightarrow \omega_1=\frac{l}{r}\omega$$

$$V_B=\omega_0\rho=\omega(l+r-\rho)\Rightarrow \omega_2=\frac{l+r-\rho}{\rho}\omega$$

$$T=T_{ст}+T_g+T_o=\frac12 J_{ст}\omega^2+\frac12 V_A^2 m+\frac12 J_g\omega_g^2+\frac12 V_B^2\mu+\frac12 J_o\omega_o^2$$

$$\bar V_A=\cancel{\bar V_0}^{\,0}+\bar\omega\times\overline{OA}\Rightarrow V_A=\omega l\qquad \bar V_B=\cancel{\bar V_C}^{\,0}+\bar\omega_0\times\overline{CA}\Rightarrow V_B=\omega_0\rho=(l+r-\rho)\omega$$

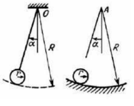
$$T=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Ml^2\cdot\omega^2+\frac{1}{2}\omega^2l^2m+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{l}{r}\right)^2\omega^2+\frac{1}{2}\mu(l+r-\rho)^2\omega^2+\frac{1}{2}\mu\rho^2\cdot\left(\frac{l+r-\rho}{\rho}\right)^2\omega^2=$$

$$=\frac{1}{2}\omega^2\left[\frac{1}{3}Ml^2+l^2m+\frac{1}{2}ml^2+\mu(l+r-\rho)^2+\mu(l+r-\rho)^2\right]$$

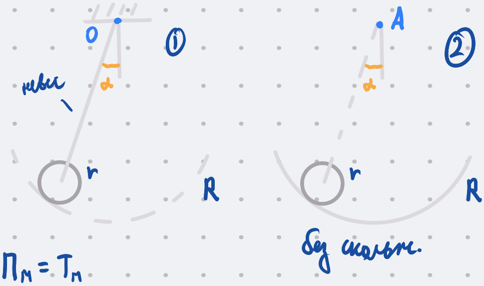
$$\boxed{T=\frac{1}{2}\omega^2\left[\frac{1}{3}Ml^2+\frac{3}{2}ml^2+2\mu(l+r-\rho)^2\right]}$$

7.4. $T=\frac{1}{2}\left[\frac{Ml^2}{3}+\frac{3}{2}ml^2+2\mu(l+r-\rho)^2\right]\omega^2$

7.28. Физический маятник состоит из однородного шара радиуса r, подвешенного на невесомом стержне к точке O; нижняя точка шара описывает окружность радиуса R. Другой такой же шар положен в круговой желоб радиуса R и катится по нему без скольжения. В начальный момент центры шаров находятся на одном уровне и начинают движение без начальной скорости. Найти отношение наибольших скоростей центров шаров. При каком соотношении между радиусами R и r эти скорости будут одинаковыми?



К задаче 7.28



Дано: r, R,

1) $\frac{V_2}{V_1}$ −?

2) $V_1=V_2$, $\frac{R}{r}$ −?

ЗСЭ: $П_м = T_м$

$П_м$ в обоих случаях одинак $\Rightarrow T_{м_1}=T_{м_2}$

① Ω − угл. ск. в нижн. т. $\Rightarrow \Omega=\frac{V_1}{R-r}$

$$T_{m_1}=\frac{1}{2}\left(J_ш+m(R-r)^2\right)\Omega^2=\frac{1}{2}\cdot m\left[\frac{2}{5}r^2\cdot\frac{V_1^2}{(R-r)^2}+V_1^2\right]\Rightarrow T_{m_1}=\frac{1}{10}mV_1^2\left[2\cdot\left(\frac{r}{R-r}\right)^2+5\right.$$

② ω − угл. ск. в нижн. т $\Rightarrow \omega=\frac{V_2}{r}$

$$T_{m_2}=\frac{1}{2}mV_2^2+\frac{1}{2}J_ш\omega^2=\frac{1}{2}mV_2^2\left[1+\frac{2}{5}\right]=\frac{7}{10}\cdot mV_2^2$$

1) $T_{m_1}=T_{m_2}\Rightarrow\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2=\frac{1}{7}\cdot\frac{2r^2+5R^2-10Rr+5r^2}{(R-r)^2}\Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1}=\frac{\sqrt{5R^2-10Rr+7r^2}}{(R-r)\sqrt{7}}}$

2) $\frac{V_2}{V_1}=1\Rightarrow 5R^2-10Rr+7r^2=7R^2-14Rr+7r^2\Rightarrow 2R=4r\Rightarrow \boxed{R=2r}$

7.28. $\frac{v_ш}{v_м}=\frac{\sqrt{5R^2-10Rr+7r^2}}{(R-r)\sqrt{7}}$, $R=2r$.

7.32. Как изменятся импульс $\mathbf{P}$ и кинетическая энергия T плоской фигуры массы m, движущейся в своей плоскости, если в некоторый момент времени закрепить центр инерции фигуры?

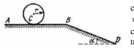
Дано: закрепили C,

$\Delta\bar{P}$, ΔT −?

$\bar{P}=m\bar{V}_c\Rightarrow\Delta\bar{P}=0-m\bar{V}_c=-m\bar{V}_c\Rightarrow\boxed{\Delta\bar{P}=-m\bar{V}_c}$

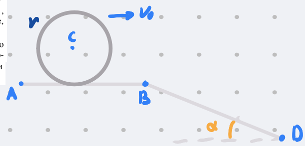
$T=T_c+T_{отн}$, $T_{отн}=const\Rightarrow\Delta T=0-\frac{mV_c^2}{2}\Rightarrow\boxed{2\Delta T=mV_c^2}$

7.32. $\Delta\mathbf{P}=-m\mathbf{v}_C$, $2\Delta T=-mv_C^2$, где $\mathbf{v}_C$ – скорость центра инерции фигуры до закрепления



К задаче 7.42

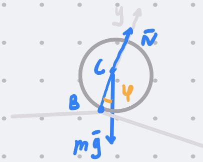
7.42. Шар радиуса r катится без скольжения со скоростью v_0 по горизонтальной плоскости AB. Достигнув точки B, шар, поворачиваясь вокруг нее, перекатывается на наклонную плоскость BD, образующую угол α с горизонтом. Найти значения угла α, при которых проекция силы реакции в угловой точке B на нормаль к траектории центра шара не равна нулю (движение без отрыва).



$$W_{C_0} = \frac{V_0^2}{r}$$

$$\bar N + m\bar g = m\bar W$$

$$N - mg\cos\varphi = -m\frac{V^2}{r}$$



Дано: r, V_0, без отрыва; α – ?

граничн. случаи $N=0$: $\cos\varphi_0 = \frac{V^2}{rg} \Rightarrow \frac{V^2}{gr} \le 1$

$$mgr(1-\cos\varphi_0) = \Delta T \quad (1)$$

1) T_1 – по гориз. пл., $\omega_1 = \frac{V_0}{r}$

$$T_1 = \frac{1}{2}J_ш\omega_1^2 + \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2}{5}r^2\cdot\frac{V_0^2}{r^2} + V_0^2\right) = \frac{7}{10}mV_0^2$$

2) T_2 – вращ. вокруг B, аналог. T_1: $T_2 = \frac{7}{10}mV^2$

$$V^2 = gr\cos\varphi_0 \Rightarrow T_2 = \frac{7}{10}mgr\cos\varphi_0$$

подст. в (1): $mgr(1-\cos\varphi_0) = \frac{7}{10}m(gr\cos\varphi_0 - V_0^2)$

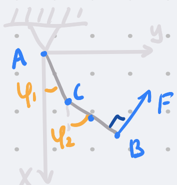
$$gr - gr\cos\varphi_0 = \frac{7}{10}gr\cos\varphi_0 - \frac{7}{10}V_0^2 \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{10}{17} + \frac{7}{17}\frac{V_0^2}{gr}$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{10}{17} + \frac{7}{17}\frac{V_0^2}{gr}\right) \Rightarrow \boxed{0 \le \alpha \le \arccos\left(\frac{10}{17} + \frac{7}{17}\frac{V_0^2}{gr}\right),\ \frac{V_0^2}{gr} \le 1}$$

7.42. $0 \le \alpha \le \arccos\left(\frac{7}{17}\frac{v_0^2}{gr} + \frac{10}{17}\right)$, $\frac{v_0^2}{gr} \le 1$.

7.59. Двойной плоский маятник состоит из двух одинаковых шарнирно соединенных между собой стержней AC и CB длины l. Положение системы определяется углами φ_1, φ_2 между неподвижной осью Ax и стержнями. В точке B стержня CB под прямым к нему углом приложена постоянная по величине сила F. Выяснить, является ли сила F потенциальной.

7.59. F – непотенциальная сила.



$\cos\varphi_1 = c_1$, $\sin\varphi_1 = s_1$

$\cos\varphi_2 = c_2$, $\sin\varphi_2 = s_2$

Дано: $AC = CB = l$; φ_1, φ_2, $F = const$; F – потенц.?

$$\delta A = (\bar F\cdot\bar V_c)dt + ([\overline{CB}\times\bar F]\cdot\dot{\bar\varphi}_2)dt$$

$$\bar V_c = \cancel{\bar V_A}^{\,0} + \dot{\bar\varphi}_1 \times \overline{AC} = \begin{bmatrix}0\\0\\\dot\varphi_1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}l c_1\\ l s_1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dot\varphi_1 l s_1\\ \dot\varphi_1 l c_1\\ 0\end{bmatrix}$$

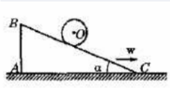
$$\bar{F}\cdot\bar{V}_c = FS_2\dot{\varphi}_1 lS_1 + FC_2\dot{\varphi}_1 lC_1 = F\dot{\varphi}_1 l\cos(\varphi_1-\varphi_2) = F\dot{\varphi}_1 l C_{12}$$

$$\delta A = Fl\dot{\varphi}_1 C_{12}\,dt + Fl\dot{\varphi}_2\,dt = FlC_{12}\,d\varphi_1 + Fl\,d\varphi_2$$

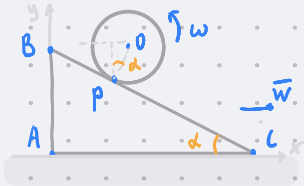
Если F - потенц, то $\delta A = -dU$;

$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = FlC_{12}$ $\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = Fl$, $0 = \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} \neq \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi_2\partial\varphi_1} = FlS_{12} \Rightarrow \nexists U \Rightarrow$ F - непот.

9.8. Клин ABC движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением $\mathbf{w}$. На наклонную грань BC клина, образующую угол α с горизонтом, помещается с нулевой относительной скоростью однородный цилиндр, который может катиться по этой грани без скольжения. При каком ускорении клина цилиндр будет двигаться вверх?



Дано: $\bar W = \text{const}$, α, без скольж., движ. вверх, W – ?

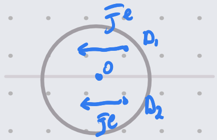


В СО клина: $m\bar W^r = \bar F - \underbrace{m\bar W^e}_{\bar J^e} - \underbrace{m\bar W^c}_{\bar J^k}$

$\bar J^e = -m(\bar W + \bar\varepsilon \times \bar\rho - \omega^2 \bar\rho) = -m\bar W$

$\bar J^c = -2m\bar\omega \times \bar V^r = \bar 0$

Выберите любое обосн.



моменты переносных сил инерции отн O, действ. на симм. расп. dm, уравновеш. друг друга ($M_O^{J^e} = 0$) $\Rightarrow$ можем считать, что J^e проходит через т. O

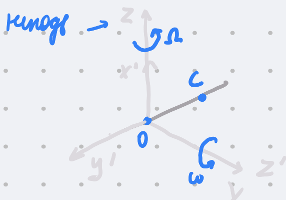
или

J^e – однородное

$\dot K_P = M_P^{J^e} + M_P^{mg} = mW \cdot r \cdot \sin(90 - \alpha) - mgr\sin\alpha > 0 \Rightarrow \boxed{W > g\,tg\,\alpha}$

9.8. $w > g\,\text{tg}\,\alpha$.

9.25. Тонкий стержень вращается с постоянной по величине угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси Oy, проходящей перпендикулярно стержню через его точку O. Ось Oy в свою очередь вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью Ω. На стержень насажено колечко, размерами которого можно пренебречь. Составить дифференциальное уравнение движения колечка относительно стержня, определяя его положение расстоянием s от точки O. Коэффициент трения между колечком и стержнем равен f. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение.



$m\bar W^r = m\bar g + \bar N + \bar F_{тр} + \bar J^e + \bar J^c$

Дано: $\omega = \text{const}$, $\bar\Omega = \text{const}$, $OC = s$, f, в нач. мом. верт

$OC = s$, $\bar V^r = \dot s$, $\bar W^r = \ddot s$

из н.у.

$\bar\omega^r = \bar\omega$, $\bar\omega^e = \bar\Omega$, $\bar\omega^a = \bar\omega + \bar\Omega = \begin{bmatrix}\Omega\cos\omega t\\ \Omega\sin\omega t\\ \omega\end{bmatrix}$ – в Ox'

$$\bar\varepsilon^a = \bar\Omega \times \bar\omega = \begin{matrix}\Omega\cos\omega t\\ \Omega\sin\omega t\\ 0\end{matrix} \times \begin{matrix}0\\0\\\omega\end{matrix} = \begin{matrix}\omega\Omega\sin\omega t\\ -\omega\Omega\cos\omega t\\ 0\end{matrix}$$

Поправить

$$\bar W^e = \cancel{\bar W_0}^{\,0} + \bar\varepsilon^a \times \overline{OC} + \omega^a \times (\omega^a \times \overline{OC}) = \begin{matrix}\omega\Omega\sin\omega t\\ -\omega\Omega\cos\omega t\\ 0\end{matrix} \times \begin{matrix}s\\0\\0\end{matrix} + \begin{matrix}\Omega\cos\omega t\\ \Omega\sin\omega t\\ \omega\end{matrix} \times \left(\begin{matrix}\Omega\cos\omega t\\ \Omega\sin\omega t\\ \omega\end{matrix} \times \begin{matrix}s\\0\\0\end{matrix}\right) =$$

$$= \begin{matrix}0\\0\\ s\omega\Omega\cos\omega t\end{matrix} + \begin{matrix}\Omega\cos\omega t\\ \Omega\sin\omega t\\ \omega\end{matrix} \times \begin{matrix}0\\ s\omega\\ -s\Omega\sin\omega t\end{matrix} = s \cdot \begin{matrix}-(\omega^2 + \Omega^2\sin^2\omega t)\\ \Omega^2\sin\omega t\cos\omega t\\ 2\omega\Omega\cos\omega t\end{matrix}$$

$$\overline{W}^k = 2\cdot\overline{\omega}^a \times \overline{V}^r = 2\begin{pmatrix}\Omega\cos\omega t\\ \Omega\sin\omega t\\ \omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dot s\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 2\dot s\cdot\begin{pmatrix}0\\ \omega\\ -\Omega\sin\omega t\end{pmatrix} \qquad \bar{g} = \begin{pmatrix}\cos\omega t\\ -g\sin\omega t\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\overline{F}_{\text{тр}} = -fN\begin{bmatrix}\operatorname{sign}(\dot s)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

N уравновешивает проекции сил на y' и z'

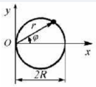
$$N^2 = \left[m(-s\Omega^2\sin\omega t + 2\dot s\omega + g\sin\omega t)\right]^2 + \left[2m\Omega(s\omega\cos\omega t + \dot s\sin\omega t)\right]^2$$

2 ЗН на x': $\ddot s = -g\cos\omega t + s(\omega^2 + \Omega^2\sin^2\omega t) - \frac{1}{m} fN\operatorname{sign}(\dot s)$

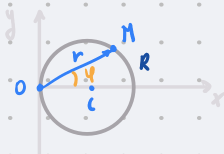
9.25. $\ddot s - s\left(\omega^2 + \Omega^2\sin^2\omega t\right) = g\cos\omega t - fN\operatorname{sign}(\dot s)$, где

$N^2 = \left[m\left(2\dot s\omega - s\Omega^2\sin\omega t\cos\omega t + g\sin\omega t\right)\right]^2 + \left[m2\Omega\left(s\omega\cos\omega t + \dot s\sin\omega t\right)\right]^2$

8.11. Материальная точка массы m движется в центральном поле под действием силы $F_r = -\frac{\alpha m}{r^5}$ $(\alpha = \text{const})$. При каком значении момента импульса K_0 траектория является окружностью $r = 2R\cos\varphi$? Показать, что такая траектория невозможна для других потенциальных центральных сил.



К задаче 8.11



Дано: $F = -\frac{\alpha m}{r^5}$
$\alpha = \text{const}$
$r = 2R\cos\varphi$
K_0 - ?

(1) ф-ла Бине: $U'' + U = -\frac{F(U)}{mC^2U^2}$, где $U = \frac{1}{r} = \frac{1}{2R\cos\varphi}$, $C = \frac{K_0}{m}$

$$U'_\varphi = U'_r\cdot r'_\varphi = -\frac{1}{r^2}\cdot(-2R\sin\varphi) = 2RU^2\sin\varphi$$

$$U''_{\varphi\varphi} = 2R\left(2U\cdot 2RU^2\sin^2\varphi + U^2\cos\varphi\right), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2RU} \quad \sin^2\varphi = 1 - \frac{1}{4R^2U^2}$$

$$U''_{\varphi\varphi} = 8R^2U^3 - 8R^2U^3\cdot\frac{1}{4R^2U^2} + 2RU^2\cdot\frac{1}{2RU} = 8R^2U^3 - 2U + U = 8R^2U^3 - U$$

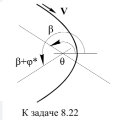
подст. в (1): $8R^2U^3 - U + U = -\frac{F(U)}{mC^2U^2} \Rightarrow F(U) = -8R^2C^2U^5m$

$F(r) = -\frac{8R^2C^2m}{r^5} \Rightarrow$ только для сил вида $F = \frac{-\alpha m}{r^5}$

$-\frac{8R^2C^2m}{r^5} = -\frac{\alpha m}{r^5} \Rightarrow \alpha = 8R^2C^2 = 8R^2\frac{K_0^2}{m^2} \Rightarrow K_0 = \frac{m}{R}\sqrt{\frac{\alpha}{8}}$

8.11. $K_o = \frac{m}{R}\sqrt{\frac{\alpha}{8}}$.

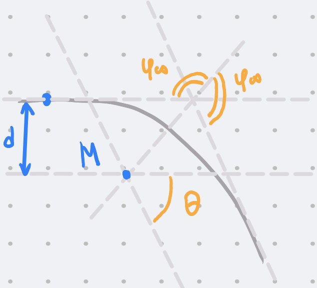
8.22. Комета массы m движется в поле тяготения звезды массы M $(M >> m)$. Величина скорости кометы на бесконечности равна v_∞, а прицельное расстояние – d. Найти уравнение траектории кометы и угол θ, на который отклонится её траектория, когда она снова уйдет в бесконечность.



К задаче 8.22

Дано: $M>>m$, V_∞, d

ур-е, θ – ?



$M>>m \Rightarrow$ Комета не оказ. вл. на звезду

$r=\dfrac{p}{1+e\cos(\varphi+\varphi_0)}$, при $\varphi=0$ – перицентр $\Rightarrow \varphi_0=0$

$\boxed{r=\dfrac{p}{1+e\cos\varphi}}$, $e>1$, т.к. $V_\infty>0$

$r\to\infty$ при $1+e\cos\varphi\to 0 \Rightarrow \cos\varphi\to -\dfrac{1}{e}$

$\varphi_\infty=\arccos\left(-\dfrac{1}{e}\right)$

$$2\varphi_\infty-\theta=\pi \Rightarrow \theta=2\varphi_\infty-\pi=2\arccos\left(-\frac{1}{e}\right)-\pi$$

$$\cos\theta=-\cos 2\varphi_\infty=1-2\cos^2\varphi_\infty$$

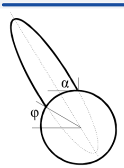
$$K_\infty=dmV_\infty,\quad E_\infty=\frac{mV_\infty^2}{2}=E_0$$

8.22. $\theta=\arccos\dfrac{(v_\infty^2 d)^2-(\gamma M)^2}{(v_\infty^2 d)^2+(\gamma M)^2}$, γ – гравитационная постоянная.

$$e^2=\frac{d^2m^3V_\infty^4+m\alpha^2}{m\alpha^2}=\frac{d^2V_\infty^4+\gamma^2M^2}{\gamma^2M^2}$$

$$\cos\theta=1-2\cdot\frac{\gamma^2M^2}{d^2V_\infty^4+\gamma^2M^2}=\frac{d^2V_\infty^4-\gamma^2M^2}{d^2V_\infty^4+\gamma^2M^2}$$

$$\boxed{\theta=\arccos\frac{d^2V_\infty^4-\gamma^2M^2}{d^2V_\infty^4+\gamma^2M^2}}$$



К задачам 8.24 – 8.26

начальная энергия минимальна.

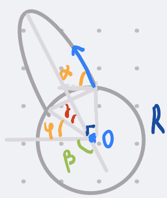
8.24. С Северного полюса под углом α к горизонту запускают снаряд. Какой должна быть величина начальной скорости v_0, чтобы место падения снаряда имело географическую широту φ (географическая широта отсчитывается от экватора, в северном полушарии $\varphi>0$, а в южном – $\varphi<0$)? Землю считать однородным шаром радиуса R.

8.25. В условиях предыдущей задачи найти эксцентриситет $e(\alpha,\varphi)$ и фокальный параметр $p(\alpha,\varphi)$ траектории. При каких значениях α снаряд попадает на заданную широту φ_o?

Дано: α, φ_0, R

e, p – ?

$\alpha(\varphi_0)$ – ?



$$r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi+\beta)}$$

выбираем β так, чтобы при $\varphi=0$ $r=r_{min}$

$$\gamma=\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \beta=\pi-\gamma+\varphi=\frac{3\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}$$

$$(1)\ r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi+\beta)} \Rightarrow (2)\ \dot r=\dot\varphi\cdot\frac{ep\sin(\varphi+\beta)}{(1+e\cos(\varphi+\beta))^2}$$

при $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$V_r = \dot r$
$V_\varphi = r\cdot\dot\varphi$

(1) $R = \dfrac{p}{1 - e\sin\beta} \Rightarrow p = R(1 - e\sin\beta)$

(2) $V_0\cdot\sin\alpha = -\dfrac{V_0}{R}\cos\alpha\cdot\dfrac{ep\cos\beta}{(1-e\sin\beta)^2} \Rightarrow \sin\alpha = -\cos\alpha\cdot\dfrac{e\cos\beta}{1-e\sin\beta}$

$$\sin\alpha - e\sin\beta\cdot\sin\alpha = -e\cos\beta\cos\alpha \Rightarrow e\cos(\alpha+\beta) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\boxed{e = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\varphi}{2}\right)}} \qquad \boxed{p} = R\left(1 + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}\right) = R\left(\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}\right) =$$

$$= R\left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right) = \boxed{\frac{R}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Чтобы снаряд попал на широту φ_0, $0 < e < 1$

Рассм $e = 1$: $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\varphi_0}{2}\right) = \sin\alpha$

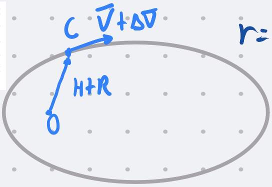
$$\sin\alpha - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right) = 0$$

$$2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8} - \frac{\varphi_0}{4}\right)\sin\left(\frac{\varphi_0}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{8} - \frac{\varphi_0}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{8} + \frac{\varphi_0}{4} \Rightarrow$$

$$\boxed{0 < \alpha < \frac{3\pi}{8} + \frac{\varphi_0}{4}}$$

8.25. $e = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\varphi}{2}\right)}$, $p = \dfrac{R}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}$, $0 < \alpha < \frac{3}{8}\pi + \frac{\varphi_0}{4}$.

8.52. Спутник Земли массы m движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и фокальным параметром p_0. В положении, когда спутник находится на высоте H от поверхности Земли и имеет скорость $\mathbf{v}$, ему сообщается касательный импульс $\Delta\mathbf{q} = \lambda m\mathbf{v}$ (λ=const). Найти параметры новой орбиты спутника.



$r = H+R$

$$p_0 = \frac{C_0^2}{k} = \frac{r^2 V_\varphi^2}{k}$$

$$\Delta q = \lambda m\bar V = m\Delta\bar V \Rightarrow \Delta\bar V = \lambda\bar V$$

Дано: $m, e_0, p_0, \bar V,$

$\Delta\bar q = \lambda m\bar V, \ H, R$

p, e – ?

$$C = r(1+\lambda)V_\varphi \qquad p = \frac{C^2}{k} = \frac{r^2(1+\lambda)^2V_\varphi^2}{k} \qquad \boxed{p = p_0(1+\lambda)^2}$$

$$E_0 = -\frac{mk}{R+H} + \frac{mV_0^2}{2}; \quad E = -\frac{mk}{R+H} + (1+\lambda)^2\frac{mV_0^2}{2} = (1+\lambda)^2\left[-\frac{mk}{R+H} + \frac{mV_0^2}{2}\right] -$$

$$-(\lambda^2+2\lambda)\left(-\frac{mk}{R+H}\right) = (1+\lambda)^2E_0 + (\lambda^2+2\lambda)\cdot\frac{mk}{R+H}$$

$$e_0^2 - 1 = \frac{2E_0C_0^2}{mk^2}, \quad C = (1+\lambda)\cdot C_0$$

$$\boxed{e^2} = 1 + \frac{2EC^2}{mk^2} = 1 + (1+\lambda)^2\cdot\frac{2EC_0^2}{mk^2} = 1 + (1+\lambda)^2\left[(1+\lambda)^2\cdot\frac{2E_0C_0^2}{mk^2} + 2(\lambda^2+2\lambda)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{mk}{R+H}\cdot\frac{C_0^2}{mk^2}\right] = \boxed{1 + (1+\lambda)^2\left[(1+\lambda)^2(e_0^2-1) + (\lambda^2+2\lambda)\cdot\frac{2p_0}{R+H}\right]}$$

8.52. $p = p_0(1+\lambda)^2$, $e^2 = 1+(1+\lambda)^2\left[e_0^2 - 1 + \frac{2p_0}{R+H}(\lambda^2+2\lambda)\right]$, где R – радиус Земли.