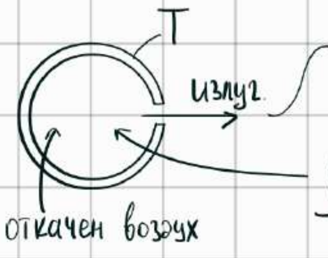
Неделя 2 (Неделя 1 ниже)

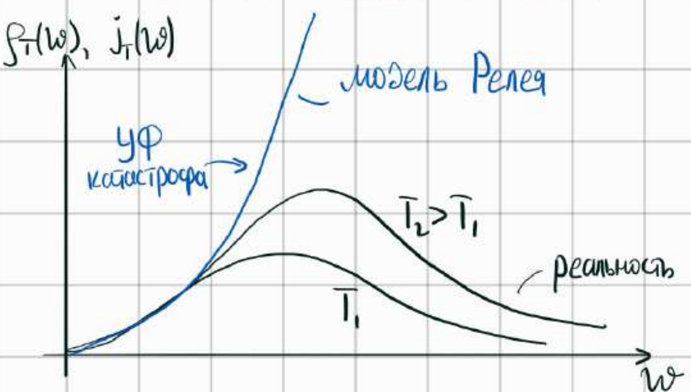
Теория. Абсолютно черное тело



$j(T)\left[\frac{эрг}{см^2 с}\right]$ – плотность потока

$\rho(T) \equiv u(T)\left[\frac{эрг}{см^3}\right]$ – объемн. плотность энергии

Также можно изучать излучение на разных частотах

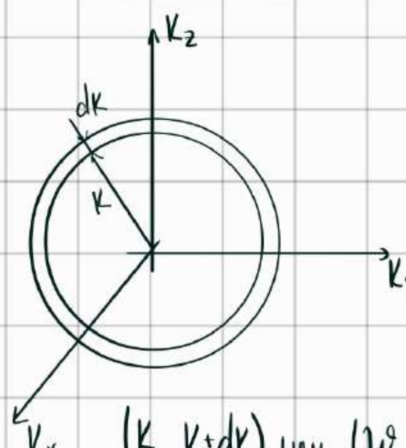


$\boxed{j(T) = \sigma T^4}$, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \frac{эрг}{с \cdot см^2 K^4}$

Число ударов молекул об стенку (Терм.ка): $Z\left[\frac{шт}{см^2 с}\right] = \frac{1}{4} n \bar{v} \xrightarrow{аналог.} j\left[\frac{эрг}{см^2 с}\right] = \frac{1}{4}\rho c \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(T)} = \frac{4}{c} j = \boxed{\frac{4\sigma}{c} T^4}$$

Похоже ид. газу: $p = \frac{2}{3} n \overbrace{\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle}^{u} \Longrightarrow \boxed{P = \frac{1}{3}\rho(T)}$



$(k, k+dk)$ или $(\omega, \omega+d\omega)$

волновой вектор: $k = \frac{\omega}{c}$, рассм. k-пр-во:

полное число возм. колебаний: $\boxed{dN(\omega) = 2\frac{V \cdot dV_k}{(2\pi)^3}}$ (объем в k-пр-ве)

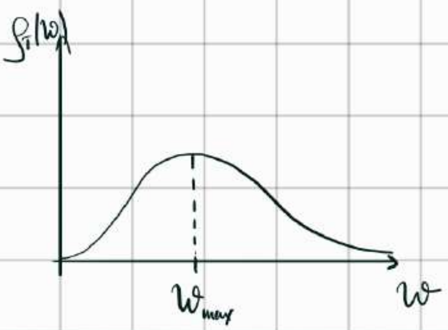
$$\rho(\omega) d\omega = \underbrace{dN(\omega)}_{\text{сколько колеб.}} \cdot \overbrace{\hbar\omega}^{\text{квант энергии}} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}} - 1}}_{\text{вероятность занять место}}$$

$$dV_k = 4\pi k^2 dk \Rightarrow dN(\omega) = V \cdot \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^3 c^3}, \quad \rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}} - 1\right)}$$

① Низкие частоты: $\hbar\omega \ll k_Б T$: $\rho_T(\omega) = \frac{k_Б T}{\pi^2 c^3}\omega^2$

② Высокие частоты: $\hbar\omega \gg k_бT$: $\rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$

$$\rho(T) = \int_0^\infty \rho_T(\omega)\,d\omega = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15\hbar^3 c^3} = aT^4; \qquad j(T) = \frac{c}{4} a T^4 = \sigma T^4$$

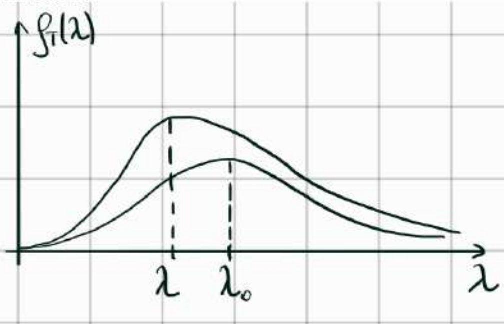


$\omega_{max} = 2.8\frac{kT}{\hbar}$, $\lambda_{max} = \frac{0.29}{T}$, но $\omega_{max} \neq \frac{2\pi c}{\lambda_{max}}$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2}$$

~~2~~	8 – 14 сен.	Законы излучения АЧТ	~~0-2-1~~, ~~0-2-2~~	~~11.26~~, ~~11.38~~, ~~11.50~~	~~11.44~~, ~~Т.4~~, ~~Т5~~

0-2-1. Вследствие повышения температуры положение максимума спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела переместилось с 2 мкм на 1 мкм. Во сколько раз изменилась его интегральная энергетическая светимость?



1) $\lambda_{max} = \frac{0.29}{T} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{a}{T_0}$, $\lambda = \frac{a}{T}$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 2$$

2) $\frac{j}{j_0} = \frac{\sigma T^4}{\sigma T_0^4} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 = 16$

0-2-2. Оценить давление теплового излучения во внутренней области Солнца, где температура равна T=1,3·10[7] К.

1) $P = \frac{1}{3}\rho(T) = \frac{1}{3}\frac{4\sigma}{c}T^4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot 5.67\cdot 10^{-5}}{3\cdot 10^{10}}\cdot(1.3\cdot 10^7)^4 \simeq 7.2\cdot 10^{13}\,\frac{дин}{см^2} = 7.2\cdot 10^{12}$ Па

11.26. Оценить температуру Солнца, исходя из его видимого углового размера $\alpha_С = 0{,}01$ рад и температуры земной поверхности ($T_З \simeq 300$ К).

1) Ур-е теплового баланса:

0) 

$\alpha_c = \frac{2R_c}{L} \Rightarrow \frac{\alpha_c}{2} = \frac{R_c}{L}$

$$\Phi_c \frac{\Omega_З}{4\pi} = \Phi_З$$

11.26. $T_С = 2T_З\alpha_С^{-1/2} \approx 6000$ К.

$$\cancel{\sigma} T_c^4 \cdot \cancel{4\pi} R_c^2 \cdot \frac{\pi R_З^2}{L^2 \cdot 4\pi} = \cancel{\sigma} T_З^4 \cdot \cancel{4\pi} R_З^2 \Rightarrow T_c^4 \cdot \overbrace{\left(\frac{R_c}{L}\right)^2}^{\left(\frac{\alpha_c}{2}\right)^2} = 4T_З^4 \Rightarrow T_c^4 = 16\,\alpha_c^{-2}\,T_З^4 \Rightarrow T_c = 2\alpha_c^{-\frac{1}{2}}T_З = 6000\,K$$

11.38. Напряжение в сети возросло на 5%. На сколько процентов увеличится освещенность, создаваемая вакуумной лампой накаливания с температурой нити 1500 К на длине волны 500 нм? Нить считать абсолютно черным телом. Рассмотреть случаи, когда сопротивление нити $R = \text{const}$ и когда $R = R(T) = R_0 + \alpha(T - T_0)$.

1) $\sigma T^4 \cdot S = N = V^2/R \Rightarrow RT^4 \propto V^2$

2) $R = \text{const} \Rightarrow T^4 \propto V^2 \Rightarrow 4\frac{\Delta T}{T} = 2\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta V}{V} = \underline{2.5\%}$

$R \propto T \Rightarrow T^5 \propto V^2 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{5}\frac{\Delta V}{V} = \underline{2\%}$

3) $\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63\cdot10^{-27}\cdot 3\cdot10^{10}}{5\cdot10^{-5}\cdot \underbrace{1.6\cdot10^{-12}}_{6\ \text{эВ}}} \simeq 2.5$ эВ

$kT = 1.38\cdot10^{-16}\cdot 1500\frac{1}{1.6\cdot10^{-12}} = 0.13$ эВ $\ll \hbar\omega$ – область высоких частот $\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$ основной фактор $\Rightarrow \rho_T(\omega) \propto e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$

$\ln\rho_T(\omega) \propto -\frac{\hbar\omega}{kT}$

4) $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\hbar\omega}{kT^2}\Delta T$;

$R = \text{const}$: $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{kT}\frac{\Delta V}{V} \simeq 48\%$

$R \propto T$: $\frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{5}\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{2}{5}\frac{\hbar\omega}{kT}\frac{\Delta V}{V} \simeq 38\%$

11.38. $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta j}{j} \approx \frac{2}{5}\frac{\hbar\omega}{k_Б T}\frac{\Delta V}{V} \approx 0{,}38$ (38%) — с учетом зависимости сопротивления нити от температуры, $\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{k_Б T}\frac{\Delta V}{V} \approx 0{,}48$ (48%) — без учета этой зависимости.

11.50* Определить температуру абсолютно черного тела, спектральная яркость излучения которого равна яркости лазерного излучения с энергией в импульсе $\mathscr{E} = 1$ Дж. Считать, что расходимость лазерного пучка определяется только дифракцией на выходном отверстии, а немонохроматичность — длительностью импульса.

1) $\mathcal{E} \sim k_Б T_{эфф} \Rightarrow T_{эфф} \sim \frac{\mathcal{E}}{k_Б} \sim 10^{23}$ K – дофига $\Rightarrow k_Б T_{эфф} \gg h\nu$

2) $j_T(\omega) = \frac{c}{4}\rho_T(\omega) = \frac{c}{4}\frac{kT}{\pi^2c^3}\omega^2 = \frac{kT_э}{4\pi^2c^2}\omega^2$

$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow j_T(\omega) = \frac{kT}{4\pi^2c^2}\frac{4\pi^2c^2}{\lambda^2} = \frac{kT_э}{\lambda^2}$

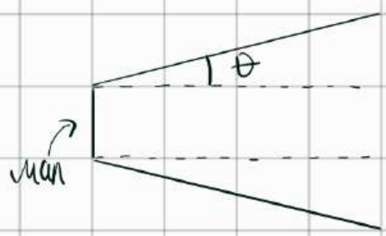
3) Из оптики: ламбертовский излучатель =>

=> $j_T(\omega) = \pi B$ => $B_T(\omega) = \frac{kT_0}{\pi \lambda^2}$

4) Теперь рассмотрим лазер:

$j_л = \frac{\xi}{S\tau}$, $S = \frac{\pi D^2}{4}$ => $j_л = \frac{4\xi}{\pi D^2 \tau}$

5) Угол расхождения дифракц. пучка лазера: $\theta \approx 1.22\frac{\lambda}{D} \sim \frac{\lambda}{D}$



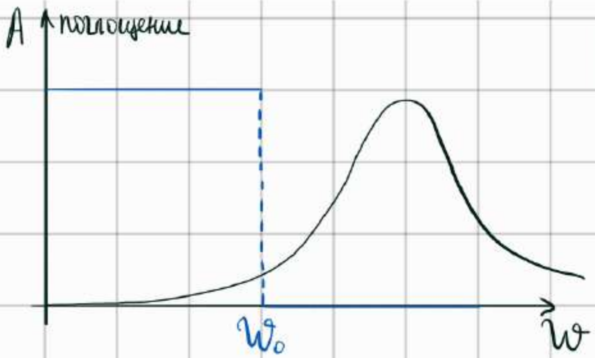
$\Delta\Omega = 2\pi(1-\cos\theta) \approx \pi\theta^2 \simeq \pi\left(\frac{\lambda}{D}\right)^2$

$B = \frac{d^2\Phi}{d\Omega\, dS \cos\theta}$ - яркость

$B_\omega^{лаз} = \frac{j}{d\Omega\, d\omega} = \frac{(\xi/S\tau)}{\pi(\lambda/D)^2\cdot(2\pi/\tau)} = \frac{2\xi}{\pi^3\lambda^2}$

6) $B_\omega^{лаз} = B_\omega^{тела}$ => $\frac{kT}{\pi\lambda^2} = \frac{2\xi}{\pi^3\lambda^2}$ => $T_{эфф} = \frac{2\xi}{\pi^2 k} \approx \frac{2\cdot 1}{9\cdot 1.38\cdot 10^{-23}} \approx 1.47\cdot 10^{22}$

11.44. Поверхность некоторого тела приготовлена таким образом, что коэффициент поглощения электромагнитного излучения $A = 1$ для частот $\omega \leqslant \omega_0$ и $A = 0$ при $\omega > \omega_0$. Это тело помещено в вакуум и в отсутствие других источников излучения нагревается за счет внутреннего источника энергии до температуры T. Определить эту температуру, если известно, что для такого же тела с абсолютно черной поверхностью в тех же условиях равновесная температура $T^* = 300$ K. Граничная частота соответствует температуре $\theta = \hbar\omega_0/k_Б = 300$ K.



1) Рассм. абс черное тело:

$\sigma T^{*4} S = N$ - мощность внутр. ист.

$\omega_{max}^{АЧТ} = 2.8\frac{kT^*}{\hbar} = 2.8\omega_0$

2) Рассм. данное тело: $\omega_{max} > \omega_{max}^{АЧТ}$ - очев. т.к. меньше рассеивается =>

$\omega_{max} > 2.8\omega_0$ =>

3) ⇒ Из графика видно, что излучают только низкие частоты

$$\rho_T(\omega) = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\omega^2; \qquad j_T(\omega) = \frac{c}{4}\frac{kT}{\pi^2 c^3}\omega^2$$

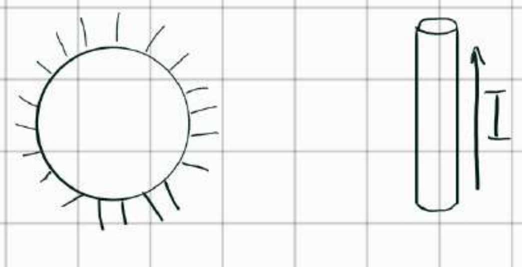
$$j_{обл} = \frac{kT}{4\pi^2 c^2}\int_0^{\omega_0}\omega^2 d\omega = \frac{kT\omega_0^3}{12\pi^2 c^2}$$

4) $$\frac{kT}{12\pi^2 c^3}\omega_0^3 S = N = \sigma T^{*4} S, \qquad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2}$$

$$\frac{kT}{12\pi^2 c^3}\omega_0^3 = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2}T^{*4} \Rightarrow T = \frac{\pi^4}{5}\frac{k^3 T^{*4}}{\hbar^3\omega_0^3} = \frac{\pi^4}{5}\frac{T^{*4}}{\theta^3} = \frac{3.14^4}{5}\cdot\frac{300^4}{300^3} \approx 5840K$$

11.44. $T = \frac{\pi^4}{5}\frac{k_Б^3 T^{*4}}{\hbar^3\omega_0^3} = \frac{\pi^4}{5}\frac{T^{*4}}{\theta^3} \approx 5840$ К.

Т.4. Нитинол (сплав никеля и титана) обладает эффектом "памяти формы": он восстанавливает ее при нагреве выше температуры t=130 °С. Проволока из нитинола, подогреваемая пропускаемым через неё током, используется в качестве привода для раскрытия антенн космических аппаратов. Насколько различаются токи через проволоку, необходимые для запуска такого привода у искусственного спутника Земли, находящегося на теневой и солнечной сторонах геостационарной орбиты? Температуру проволоки считать однородной по объему, сопротивление — не зависящим от температуры. Солнечная постоянная равна J=1,4·10³ Вт/м². Диаметр проволоки d = 1,5 мм удельное сопротивление ρ=0,8·10⁻⁶ Ом м, коэффициент серости ε = 0,66. Считать, что на солнечной стороне орбиты проволока находится на освещённой стороне спутника. Тепловым излучением Земли на геостационарной орбите и тепловым излучением корпуса спутника можно пренебречь



Все энергии смотрим на см (погонные)

1) $N_c = J\cdot d\cdot\varepsilon$ 2) $N_{тока} = N_{отд} \Rightarrow I^2\frac{\rho}{\pi d^2/4} = \sigma t^4\pi d\cdot\varepsilon \Rightarrow I_0 = \frac{1}{2}\pi d t^2\sqrt{\frac{\varepsilon\sigma d}{\rho}} = 3.2A$

$N_{тока} = I^2\frac{\rho}{\pi d^2/4}$

$N_{отдачи} = \sigma t^4\cdot\pi d\cdot\varepsilon$ 3) $N_c + N_{тока} = N_{отд} \Rightarrow I^2\frac{\rho}{\pi d^2/4} + Jd\varepsilon = \sigma t^4\pi d\varepsilon$

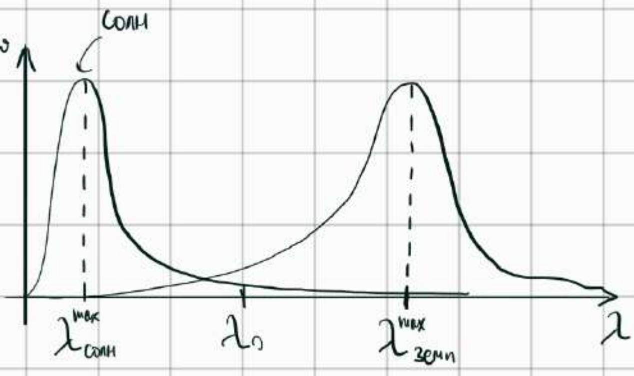
$$I^2 = \frac{1}{4}\frac{\pi d^2}{\rho}\left(\sigma t^4\pi d\varepsilon - Jd\varepsilon\right) = \frac{1}{4}\frac{\pi^2 d^3\sigma t^4\varepsilon}{\rho}\left(1-\frac{J}{\pi\sigma t^4}\right) = I_0^2\left(1-\frac{J}{\pi\sigma t^4}\right)$$

$$\Delta I = I_0\left(1-\sqrt{1-\frac{J}{\pi\sigma t^4}}\right) = 0.52A$$

Ответ: $\Delta I = I_0\left(1-\sqrt{1-\frac{J}{\pi\sigma T^2}}\right) = 0{,}52$ А, где $I_0 = 0{,}5\pi d T^2\sqrt{\frac{\varepsilon\sigma d}{\rho}} = 3{,}2$ А.

Т.5. Средняя температура поверхности Земли составляет 15°C. В результате природных процессов или влияния промышленных выбросов прозрачность атмосферы может измениться. Оценить, как изменится равновесная температура земной поверхности если прозрачность атмосферы уменьшится на 5% для излучения: а) с длиной волны меньше $\lambda_0 = 20000$ Å; б) с длиной волны более $\lambda_0 = 20000$ Å. Под прозрачностью понимается доля излучения, преодолевающая расстояние от верхних слоёв атмосферы до поверхности. Считать для оценки, что прозрачность атмосферы постоянна для $\lambda > \lambda_0$ и $\lambda < \lambda_0$

1) $j_{солн} \cdot \pi R^2 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 \Rightarrow j_{солн} = 4\sigma T^4$



2) $\lambda^{max}_{земл} = \frac{0.29}{T}$ см $\approx \frac{0.29}{290}$ см $= 100000$ Å

$\lambda^{max}_{солн} = \frac{0.29}{T_{солн}}$ см = очень мало Å

3) Теперь уменьшается прозрачность:

а) $\lambda > \lambda_0 \Rightarrow j_{солн} = 0.95 \cdot 4\sigma T_1^4 \Rightarrow 0.95\, 4\sigma T_1^4 = 4\sigma T^4 \to T^4 = (1-0.05)T_1^4$

$\Delta T \approx \frac{1}{4} \cdot 0.05\, T \approx 4°C$ – потепление

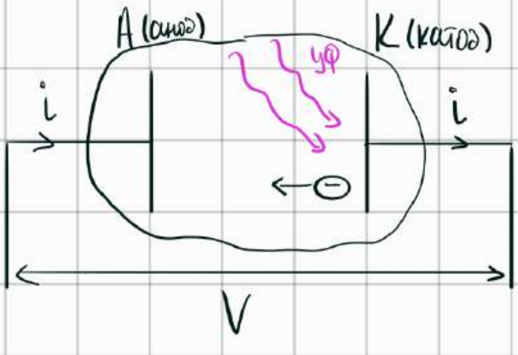
б) $\lambda < \lambda_0 \Rightarrow 0.95\, j_{солн} = 4\sigma T_2^4 \Rightarrow$ аналог $\to$ $\Delta T = 4°C$ похолодание

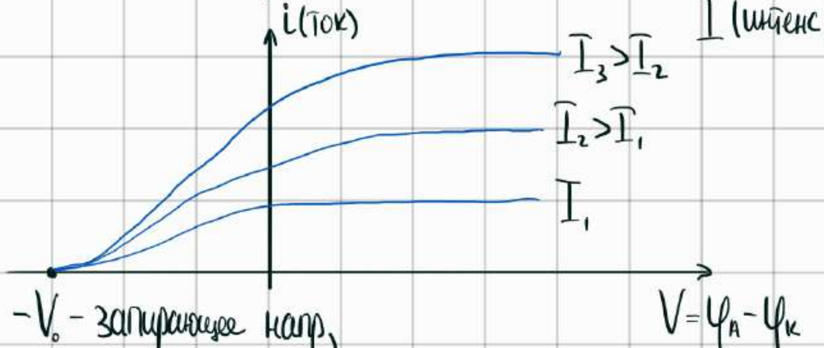
Ответ: случай а): «ядерная осень», температура понизится на 4° C;

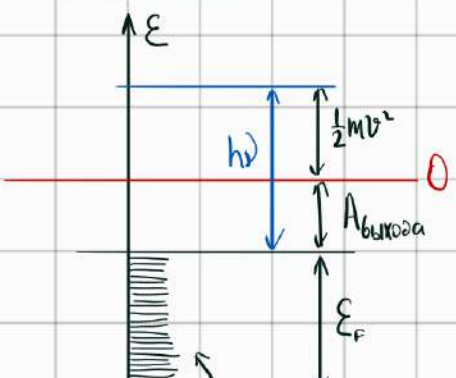
случай б): «глобальное потепление», температура повысится на 4°C

Неделя 1

Теория. Фотоэффект. Эффект Комптона





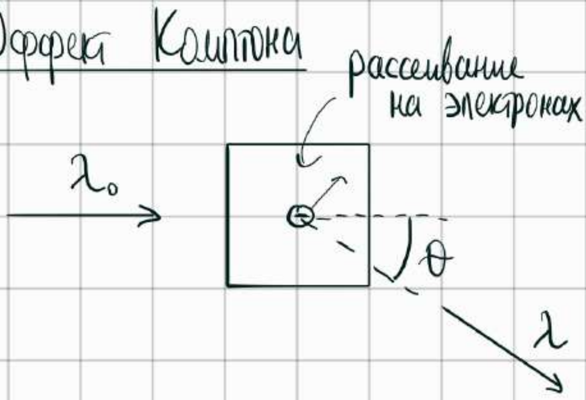


$$h\nu \equiv \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = A + \frac{1}{2}mv^2; \qquad h\nu_0 = A$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \hbar(\omega - \omega_0) = \underbrace{e}_{\text{преодолеть } \varphi_A - \varphi_K}(V_0 + V_c)$$

V_c – контактное напр. для катода материала

Эффект Комптона



$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda_e(1 - \cos\varphi) = 2\pi ƛ_e (1 - \cos\varphi)$$

$$\Lambda_e = 2.426 \cdot 10^{-10}\ \text{см} = \frac{h}{m_e c}$$

$$ƛ_e = 3.86 \cdot 10^{-11}\ \text{см} = \frac{\hbar}{m_e c}$$

1	1 – 7 сен.	Фотоэффект. Эффект Комптона.	~~0-1-1~~, ~~0-1-2~~	~~1.7~~, ~~Т1~~, Т2, ?	~~1.35~~, ~~1.48~~, Т3,

0-1-1. В опытах П. Н. Лебедева, доказавшего существование светового давления, падающий световой поток составлял $S = 6$ Вт/см^2. Вычислить давление, которое испытывали зачернённые и зеркальные лепестки его измерительной установки.

1) Посчитаем кол-во фотонов в сек на см^2:

$$\hbar\omega_0 \cdot N = S \Rightarrow N = \frac{S}{\hbar\omega_0}, \quad N = \frac{d^2n}{dS\,dt}, \quad n \text{ - кол-во}$$

2) $$p_{черн} = \frac{\hbar\omega_0}{c} \qquad p_{зерк} = 2p_{черн} \text{ - очев из механики}$$

3) $$P_{черн} = N \cdot p_{черн} = \frac{S}{c} = \frac{6 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8} = 2 \cdot 10^{-4}\,Па = 200\ мкПа$$

$$P_{зерк} = \frac{2S}{c} = 4 \cdot 10^{-4}\,Па = 400\ мкПа$$

0-1-2. Монохроматическое гамма-излучение рассеивается на покоящихся электронах. Найти частоту излучения, рассеиваемого назад, если энергия налетающего фотона равна энергии покоя электрона.

1) $$\Delta\lambda = \Lambda(1-\cos\theta) \qquad \frac{\omega}{2\pi}\lambda = c$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \Delta\lambda = 2\Lambda = \frac{4\pi\hbar}{mc}$$

2) $$\hbar\omega = mc^2 = \hbar\frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} = \Lambda$$

3) Итого, $$\lambda_{рас} = \lambda + \Delta\lambda = 3\Lambda$$

$$\nu_{рас} = \frac{c}{3\Lambda} = \frac{mc^2}{6\pi\hbar} = \frac{mc^2}{3h} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{3 \cdot 6.6 \cdot 10^{-34}} \approx 4.1 \cdot 10^{19}\ Гц$$

1.7. Электромагнитная волна с круговой частотой $\omega = 2 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$ промодулирована по амплитуде синусоидой с круговой частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. Найти энергию $\mathscr{E}$ фотоэлектронов, выбиваемых этой волной из атомов водорода с энергией ионизации $\mathscr{E}_И = 13{,}6$ эВ.

Чтобы выбить электрон: $\hbar\omega > \mathscr{E}_и$

1) До модуляции: $\hbar\omega = 6.6 \cdot 10^{-16}$ эВ·с $\cdot\, 2 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$ $= 13.2$ эВ $< \underset{\mathscr{E}_и}{\overset{\shortparallel}{13.6}}$ эВ — не выбьет

2) После модуляции: $\hbar(\omega+\Omega) = 6.6 \cdot 10^{-16} \cdot 2.2 \cdot 10^{16}$ эВ $= 14.52$ эВ — выбьет

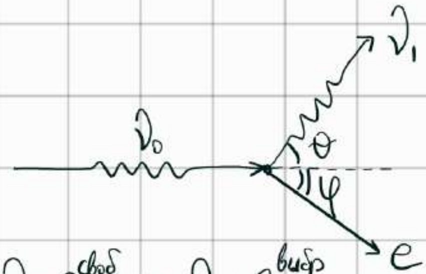
$$\boxed{\mathscr{E} = \hbar(\omega+\Omega) - \mathscr{E}_и = 0.92 \text{ эВ}}$$

Т.1. Детектор нейтрино SUPERKAMIOKANDE (Япония) используется для детектирования нейтрино с энергией выше 3.5 МэВ. При взаимодействии нейтрино с водой, наполняющей детектор, выбиваются энергичные электроны, которые производят обнаруживаемое датчиками черенковское излучение. Определить максимальный угол (по отношению к направлению движения исходного нейтрино), под которым движутся производящее черенковское излучение электроны отдачи при энергии нейтрино, равной порогу детектирования. Показатель преломления воды $n = 1.333$, нейтрино считать безмассовыми частицами.

Ответ: $\Theta_{max} \simeq 59°$

1) Граничное усл-е черенковского свечения: $v = \dfrac{c}{n}$

2) $E_e = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-1/n^2}} \approx 1.51\, mc^2$



$\nu_0 + e^{своб} \to \nu_1 + e^{выб}$

3) $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$p_e = \dfrac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2c^4} = \sqrt{1.51^2 - 1}\; mc \approx 1.13\, mc$

4) ЗСЭ: $E_0 + m_e c^2 = E_1 + E_e$

$(E_1 = p_1 c$, т.к. $m_1 = 0)$

ЗСИ: $p_0 = p_1 \cos\theta + p_e \cos\varphi \quad | \cdot c \quad \Rightarrow \quad E_0 = E_1 \cos\theta + p_e c \cos\varphi$

$$p_1 \sin\theta = p_e \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad E_1 \sin\theta = p_e c \sin\varphi$$

5) $$\begin{cases} E_0 + m_e c^2 = E_1 + E_e \\ E_0 = E_1 \cos\theta + p_e c \cos\varphi \\ E_1 \sin\theta = p_e c \sin\varphi \end{cases}$$

$E_0 = 3.5$ МэВ

$p_e c = 1.13\, m_e c^2 \approx 0.574$ МэВ

$E_e = 1.51\, m_e c^2 = 1.51 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3\cdot 10^8)^2 \cdot \underset{эВ}{6.2\cdot 10^{18}} \approx 0.767$ МэВ

E_1, θ, φ - ?

Math: $$(E_0 - p_e c \cdot \cos\varphi)^2 = (E_1 \cos\theta)^2 \Rightarrow \begin{array}{l} E_0^2 - 2p_e c E_0 \cos\varphi + p_e^2 c^2 \cos^2\varphi = E_1^2 \cos^2\theta \\ p_e^2 c^2 \sin^2\varphi = E_1^2 \sin^2\theta \end{array} \Bigg| \Rightarrow$$

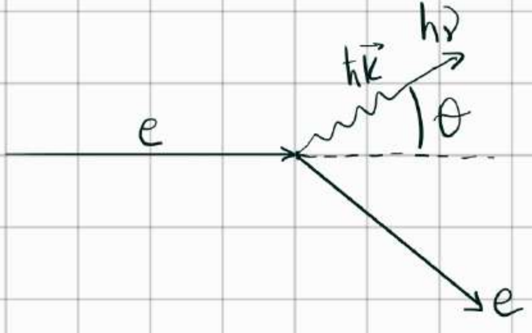
$$\Rightarrow E_0^2 - 2p_e c E_0 \cos\varphi + p_e^2 c^2 = E_1^2 = (E_0 + m_e c^2 - E_e)^2$$

$$\cos\varphi = \frac{E_0^2 + p_e^2 c^2 - (E_0 + m_e c^2 - E_e)^2}{2 p_e c E_0} = \frac{3.5^2 + 0.574^2 - (3.5 + 0.5 - 0.767)^2}{2 \cdot 0.574 \cdot 3.5} = 0.53$$

$$\varphi \approx 58^\circ$$

Т.2. Покажите, что электрон, движущийся в среде с показателем преломления $n > 1$ со скоростью $V > c/n$, способен излучать фотоны (излучение Вавилова—Черенкова). Найдите энергию фотона $\varepsilon(\theta)$ в зависимости от направления излучения θ относительно исходного направления движения электрона. Каково максимально возможное значение $\theta_{\max}$? Энергию фотона считать малой по сравнению с энергией покоя.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{mc^2}{n^2}\left(\cos\theta - \dfrac{c}{nV}\right)$, $\theta_{\max} = \arccos\dfrac{c}{nV}$



1) ЗСЭ: $E_0 = E_1 + \hbar\omega$

2) ЗСИ: $\vec p_0 = \vec p_1 + \hbar\vec k$, $\quad |k| = \dfrac{\omega}{v_{ср}} = \dfrac{n\omega}{c}$

3) $$\begin{array}{l} E_0^2 = p_0^2 c^2 + m_e^2 c^4 \\ E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_e^2 c^4 \end{array} \Bigg| \Rightarrow (p_0^2 - p_1^2) c^2 = E_0^2 - E_1^2$$

4) Math: $$p_0^2 - 2\hbar \vec k \vec p_0 + \hbar^2 k^2 = p_1^2 \qquad (\vec k, \vec p_0) = k \cdot p_0 \cos\theta$$

$$p_0^2 - p_1^2 = \frac{E_0^2 - E_1^2}{c^2} = 2\hbar k p_0 \cos\theta - \hbar^2 k^2$$

$$E_0^2 - (E_0 - \hbar\omega)^2 = c^2 (p_0^2 - p_1^2) \rightarrow \hbar\omega (2E_0 - \hbar\omega) = c^2 (2\hbar k p_0 \cos\theta - \hbar^2 k^2)$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{\hbar\omega}{c^2}(2E_0-\hbar\omega)+\hbar^2k^2}{2\hbar k p_0} = \frac{2E_0-\hbar\omega+\hbar n^2\omega}{2ncp_0} = \frac{E_0}{ncp_0}\left(1-\frac{\hbar\omega(n^2-1)}{2E_0}\right) \Leftrightarrow$$

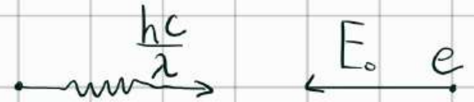
5) $E_0 = \gamma mc^2$
$p_0 = \gamma m v$ $\Bigg| \Leftrightarrow \cos\theta_{max} = \frac{\gamma mc^2}{nc\gamma m v} = \frac{c}{nv}$

6) ?

Т.3. При прохождении гамма-квантов с энергией $E_\gamma = 1$ МэВ через органический сцинтиллятор образуется две группы первичных быстрых электронов: в результате внутреннего фотоэффекта (ионизации атомов) и в результате комптоновского рассеяния. При каком энергетическом разрешении регистрирующей аппаратуры удастся отличить фотоэлектроны от комптоновских электронов с наибольшей энергией?

Ответ: для комптоновских электронов $E_\gamma - E_{\max} = mc^2/(2 + mc^2/E_\gamma) =$ 0,2 МэВ. При фотоэффекте на лёгких атомах (кислород, углерод) энергия ионизации внутренних оболочек не более 10 кэВ, $E_\gamma - E$ =10 кэВ << 0.2 МэВ. Разрешение аппаратуры должно быть лучше 0.2 МэВ.

1.35. Фотон от рубинового лазера ($\lambda = 0{,}6943$ мкм) испытывает лобовое соударение с электроном, имеющим кинетическую энергию $T = 500$ МэВ. Оценить энергию $\mathscr{E}_\gamma$ фотона, образующегося в результате «обратного комптон-эффекта» (т. е. при 180°-рассеянии фотона на движущемся электроне). См. также задачу 4.51.



1) Чтобы применить формулу $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda_e(1-\cos\varphi)$, нужен неподвижный электрон =>

=> перейдем в СО e:

2) Эффект Доплера $\left(T = 500\text{ МэВ} \gg m_e c^2 \approx \frac{1}{2}\text{ МэВ} \text{ – очень быстро}\right)$

$\omega' = \omega_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ или $\lambda' = \lambda_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$, – т.к. навстречу

3) $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \approx \frac{T}{mc^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{T}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\Big(\overset{\alpha}{\frac{mc^2}{T}}\Big)^2 \approx 0.9999\ldots$

$\lambda' = \lambda_0\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_0\left[\frac{\frac{1}{2}\alpha^2}{2-\frac{1}{2}\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{2}\lambda_0\left[1-\frac{1}{4}\alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\alpha}{2}\lambda_0 = \lambda_0\frac{mc^2}{2T} \approx \frac{1}{2000}\lambda_0$

4) $\lambda' \sim 0.1$ нм

$\Lambda_e \sim 1$ пм $\ll \lambda'$

$\Delta\lambda = \Lambda(1-\cos\varphi) = 2\Lambda \Rightarrow \tilde{\lambda}' = \lambda' + 2\Lambda \approx \lambda'$

5) Возвращаемся в ЛСО, но теперь не навстречу, значит формула такая же

$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \left(\frac{mc^2}{2T}\right)^2\lambda_0$

6) $\mathcal{E}_\gamma = \frac{hc}{\tilde{\lambda}} = \frac{hc}{\lambda_0}\left(\frac{2T}{mc^2}\right)^2 \approx 6.85$ МэВ

1.35. При условии $T \gg \hbar\omega_0$ ответ имеет вид

$$\mathscr{E}_\gamma \approx \hbar\omega_0\frac{2T}{\frac{(m_e c^2)^2}{2T} + 2\hbar\omega_0}$$

(кинетическая энергия электрона $T \gg m_e c^2$, поэтому полная его энергия $\mathscr{E}_0 \approx T$). Здесь возможны два случая:

1) $\hbar\omega_0 \ll m_e c^2\frac{m_e c^2}{T}$. Тогда $\mathscr{E}_\gamma \approx \hbar\omega_0\left(\frac{2T}{m_e c^2}\right)^2 \approx 6{,}85$ МэВ (этот случай и реализуется в задаче);

2) $\hbar\omega_0 \gg m_e c^2\frac{m_e c^2}{T}$. Тогда $\mathscr{E}_\gamma = \hbar\omega \approx T$. В задаче этот случай не выполняется.

Задачу можно также решить, рассмотрев два последовательных перехода: в систему покоя электрона и обратно в лабораторную систему. Оба раза частота γ-кванта будет меняться за счет эффекта Доплера.

1.48. Возбужденное ядро с энергией возбуждения $\Delta\mathscr{E} = 1$ МэВ с $A = 100$ движется с кинетической энергией $T = 100$ эВ и испускает гамма–квант. Под каким углом к направлению движения ядра сдвиг γ-кванта по энергии будет равен нулю?

0) сдвиг γ-кванта $= 0 \iff E_\gamma = \Delta E$

1) Перейдем в СО ядра:

· Эффект Доплера: $\nu_1 = \nu_0\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$

· ЗСЭ: $\Delta E = \frac{P^2}{2M_{яд}} + h\nu_1$

· ЗСИ: $\frac{h\nu_1}{c} = P$

$\Rightarrow \frac{(h\nu_1)^2}{2Mc^2} + h\nu_1 - \Delta E = 0$

$h\nu_1 = \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}}\right)Mc^2$

$h\nu_1 = Mc^2\left(-1 + \left(1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \simeq \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2Mc^2} = \Delta E\left[1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right]$

$\nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \Rightarrow \nu_1 = \nu_0\left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right)$

$\nu_1 = \nu_0\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$

$\Rightarrow \frac{v}{c}\cos\theta = \frac{\Delta E}{2Mc^2}$

$\cos\theta = \frac{\Delta E}{2Mv \cdot c}$

2) $v = \sqrt{\frac{2T}{M}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\Delta E}{2\sqrt{2TMc^2}} = \frac{1\ МэВ}{2\sqrt{2 \cdot 100\ эВ \cdot 1.67 \cdot 10^{-22} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 / 1.6 \cdot 10^{-12}\ эВ}} = 0.115$

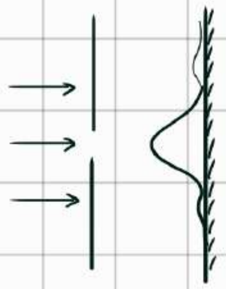
$M = A \cdot m_p = 100 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}\ кг = 1.67 \cdot 10^{-25}\ кг = 1.67 \cdot 10^{-22}\ гр$

$\theta \simeq 83.3^\circ$

1.48. $\cos\theta = \frac{\Delta\mathscr{E}}{2\sqrt{2Tm_{яд}c^2}} = 0{,}116$, $\theta = 83{,}3^\circ$; где $m_{яд}c^2 = A \cdot 931{,}5$ МэВ.

Неделя 3

Волны де Бройля Идея: любая частица может быть волной



$$E=\hbar\omega \to \omega=\frac{E}{\hbar};\quad p=\frac{\varepsilon}{c}=\frac{\hbar\omega}{c}=\hbar k,\quad \vec{p}=\hbar\vec{k}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}=\vec{E}_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$$

Для частицы с $\varepsilon, \vec{p}$: $\psi(x,t)=\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px-\varepsilon t)}$ волновая ф-ция

$\psi^*\psi|_{x,t}=|\psi|^2_{x,t}$ – плотность вероятности обнаружить частицу

Соотношение неопределенностей $\Delta x\Delta p_x\sim\hbar$ в форме Вейля $\overline{\Delta x^2}\,\overline{\Delta p^2}\gtrsim\frac{\hbar^2}{4}$

$\Delta\varepsilon\Delta t\sim\hbar$

„Чем точнее измеряете одна хар-ка частицы, тем менее точно можно измерить 2-ю"

3	15 – 21 сен.	Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей.	~~0-3-1~~, ~~0-3-2~~	~~2.12~~, ~~2.15~~, ~~2.26~~,	~~2.30~~, ~~2.38~~, ~~2.44~~

0-3-1. Определить кинетическую энергию электрона, при которой его дебройлевская и комптоновская длины волн равны между собой.

1) $\underset{\text{фотон}}{p}=\frac{h}{\lambda} \xRightarrow{\text{для частицы}} p=\frac{h}{\lambda_{д.б.}} \to \lambda_{д.б}=\frac{h}{p}$

2) $\Delta\lambda=\lambda-\lambda'=\underbrace{\frac{h}{m_e c}}_{\Lambda}(1-\cos\theta);\quad \Lambda=\frac{h}{m_e c}$

3) $\frac{h}{p}=\frac{h}{mc} \Rightarrow p=mc$

4) $E^2=p^2c^2+m_e^2c^4 \Rightarrow E=\sqrt{2}\,m_e c^2$

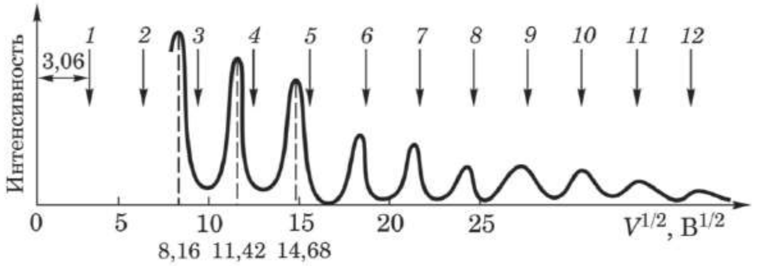
$E_k=E-m_e c^2=(\sqrt{2}-1)\,m_e c^2\approx 0.4\cdot 0.5$ МэВ ≈ 0.2 МэВ

0-3-2. Исходя из соотношения неопределенностей, оцените минимальную энергию осциллятора с частотой ω.

1) $\Delta t \sim \frac{1}{\omega}$

2) $\Delta \mathcal{E} \Delta t \gtrsim \hbar \Rightarrow \Delta \mathcal{E}_{min} \sim \hbar\omega$

2.12*. На рис. 5 приведена кривая, полученная в опытах Дэвиссона и Джермера по рассеянию электронов от монокристалла никеля, падающих под углом скольжения 80°. По оси абсцисс отложено значение $\sqrt{V}$, где V — энергия электронов в вольтах, по оси ординат — относительная интенсивность рассеянных электронов. При больших порядках отражения m максимумы эквидистантны (расстояние между ними 3,06 $\text{В}^{1/2}$), а при малых эта закономерность, показанная стрелками, нарушается. Оценить немонохроматичность используемых электронов и показатель преломления никеля для волны де Бройля электронов, соответствующих 3-му, 4-му и 5-му максимумам, которые наблюдаются при $\sqrt{V}$, равном соответственно 8,16, 11,42 и 14,68 $\text{В}^{1/2}$. Найти межплоскостное расстояние d никеля.



1) Аналогично оптике: $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{max}} = \frac{\lambda}{12}$

$E = \frac{p^2}{2m}$, $p = \frac{h}{\lambda_{д.б.}} \to E = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \propto \frac{1}{\lambda^2} \to \frac{\Delta E}{E} = -2\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \Rightarrow \left|\frac{\Delta E}{E}\right| = \frac{1}{6}$

2) Электрон разгоняется напр. $V \Rightarrow eV = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \propto \sqrt{V}$

В металле: $v_2 \propto \sqrt{V+V_0}$, где V_0 — внутр. потенц. металла

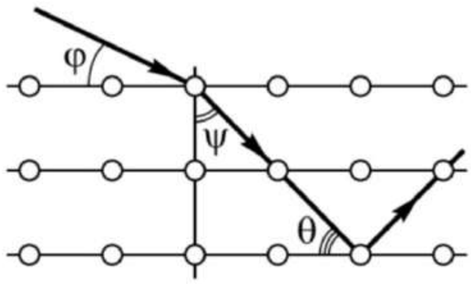
Аналогично оптике вводим: $n_{21} = n = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1+\frac{V_0}{V}}$

3) $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \Rightarrow \sqrt{V} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda\sqrt{2me}} = \frac{12.26}{\lambda[\text{Å}]} = \frac{12.26\, m}{2d\sin\varphi\,[\text{Å}]}$

4) При $m>6$: $V_0 \ll V$: $\sqrt{V} = \frac{12.26\cdot 1}{2\cdot d\cdot \sin(80^\circ)} \Rightarrow d = \frac{12.26}{2\cdot 3.06\cdot\sin(80^\circ)} \approx 2.03$ Å

$n \approx 1$

5) Аналогично закону Снеллиуса:



$$n = \frac{\cos\varphi}{\sin\psi}; \quad \cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}$$

$$2d\sin\theta = m\frac{\lambda}{n} \rightarrow 2nd\sin\theta = m\lambda$$

$$2nd\cos\psi = m\lambda \rightarrow$$

$$\rightarrow 2d\sqrt{n^2-\cos^2\varphi} = m\lambda$$

6) $$\sqrt{V'} = \frac{12.26}{2d\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}} = \frac{12.26m}{2d\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}$$

$$\sqrt{\frac{V}{V'}} = \frac{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}{\sin\varphi} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{V}{V'}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}$$

7) Math:

m	$\sqrt{V}$, $B^{1/2}$	$\sqrt{V'}$, $B^{1/2}$	n
3	9.18	8.16	1.12
4	12.24	11.42	1.07
5	15.3	14.68	1.04

2.12*. Р е ш е н и е. Для нерелятивистского электрона $\mathscr{E} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \propto \frac{1}{\lambda^2}$. Поэтому искомую немонохроматичность электронов $\Delta\mathscr{E}/\mathscr{E}$ легко оценить по числу наблюдаемых отражений $m_{\max} = 12$, откуда следует $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} \approx \frac{\lambda}{12}$. И далее $\left|\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}}\right| = 2\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| = \frac{1}{6}$.

Вне металла скорость электрона $v_1 \propto \sqrt{V}$, внутри металла $v_2 \propto \sqrt{V_0 + V}$, где V_0 — внутренний потенциал металла. Таким образом, показатель преломления металла

$$n = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}.$$

Эквидистантное расположение максимумов интенсивности отраженных электронов наблюдается, когда внутренний потенциал металла $V_0 \ll V$. Это соответствует показателю преломления кристалла $n = 1$ (для $m \geqslant 6$). В этом случае в соответствии с формулой Брэгга–Вульфа (рис. 135)

$$2d\sin\varphi = m\lambda; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meV}}; \quad \sqrt{V} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda\sqrt{2me}},$$

где d следует подставлять в ангстремах [Å], а результат $\sqrt{V}$ получается в $B^{1/2}$. В нашем случае при $m = 1$ $\sqrt{V} = 3{,}06\ B^{1/2}$, и поэтому межплоскостное расстояние $d = 2{,}03$ Å. Из рис. 5 и условия задачи следует, что при $m < 6$ максимумы интенсивности неэквидистантны. Это означает, что при соответствующих энергиях показатель преломления отличается от 1.

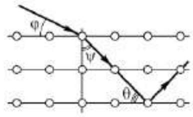


Рис. 135

Закон преломления волн де Бройля идентичен классическому закону Снеллиуса:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\psi} = n; \quad \cos\psi = \sqrt{1 - \sin^2\psi} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}.$$

По формуле Брэгга–Вульфа $n \cdot 2d\sin\theta = m\lambda$, или $n \cdot 2d\cos\psi = m\lambda$, откуда следует

$$2d\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi} = m\lambda.$$

Обозначим через V' ускоряющий потенциал, соответствующий энергиям электронов, когда $n \neq 1$. Тогда

$$\sqrt{V'} = \frac{12{,}26}{\lambda[\text{Å}]} = \frac{12{,}26m}{2d\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}}.$$

Из соотношения $\sqrt{\frac{V}{V'}}$ мы и определим n: $\sqrt{\frac{V}{V'}} = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}}{\sin\varphi}$, откуда $n = \left(\frac{V}{V'}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)^{1/2}$.

Для $m = 5$; $\sqrt{V'} = 14{,}68\ B^{1/2}$; $\sqrt{V} = 15{,}3\ B^{1/2}$; $n = 1{,}04$.
Для $m = 4$; $\sqrt{V'} = 11{,}42\ B^{1/2}$; $\sqrt{V} = 12{,}24\ B^{1/2}$; $n = 1{,}07$.
Для $m = 3$; $\sqrt{V'} = 8{,}16\ B^{1/2}$; $\sqrt{V} = 9{,}18\ B^{1/2}$; $n = 1{,}12$.

2.15*. Чтобы получить пучок нейтронов, обладающих заданной энергией $\mathscr{E} = 1$ эВ, используют брэгговское отражение первого порядка от кристалла LiF, для которого расстояние между плоскостями кристаллической решетки $d = 2{,}32$ Å (рис. 7). На кристалл падает пучок нейтронов с различными энергиями. Оценить разброс нейтронов по энергиям $\Delta\mathscr{E}$ в отраженном пучке, если угловая ширина этого пучка $\Delta\varphi = 0{,}1°$. Какую толщину кристалла D следует выбирать в этом эксперименте? Кристалл вырезан так, что отражающие плоскости параллельны поверхности кристалла.

1) $\mathcal{E} = 1$ эВ, $$\lambda_{дБ} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} = \frac{6.6\cdot10^{-27}\ эрг\cdot с}{\sqrt{2\cdot1.67\cdot10^{-24}\ г\cdot1.6\cdot10^{-12}\ эрг}} = 2.86\cdot10^{-11}\ м = 0.286\ \text{Å}$$

2) Условие Брэгга-Вульфа: $2d\sin\varphi = m\lambda$

$$m=1: \quad \sin\varphi = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0.286}{2\cdot2.32} \simeq 0.06 \Rightarrow \sin\varphi \simeq \varphi \ll 1$$

3) $$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}; \quad \lambda \propto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \Rightarrow \left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}}\right|$$

$$\Delta\mathcal{E} = 2\frac{\Delta\varphi}{\varphi}\mathcal{E} = 2\cdot\frac{0.1\cdot\frac{\pi}{180}}{0.06}\cdot1\ эВ \simeq 0.058\ эВ$$

2.15*. $D \geqslant \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} = 82$ Å.

Р е ш е н и е. Согласно условию Брэгга–Вульфа первый порядок ($m = 1$) отражения соответствует углу

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d}.$$

Длина волны, соответствующая энергии нейтрона $\mathscr{E} = 1$ эВ, равна 0,287 Å, поэтому $\frac{\lambda}{2d} \approx 0{,}06$. Это означает, что $\sin\varphi \approx \varphi \approx 0{,}06$. Очевидно, что $\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$.

Дебройлевская длина волны $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\mathscr{E}}} \propto \frac{1}{\sqrt{\mathscr{E}}}$. Поэтому $\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}}\right|$, откуда

$$\Delta\mathscr{E} = 2\mathscr{E}\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\mathscr{E}\frac{\Delta\varphi}{\varphi} \approx 0{,}057\ эВ.$$

Толщину кристалла D выберем из тех соображений, что разрешающая способность такой системы $R = mN \geqslant \lambda/\Delta\lambda$, т. е. при $m = 1$ и числе интерферирующих пучков, равном числу слоев, $N = D/d$:

$$\frac{D}{d} \geqslant \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\lambda}{2d\Delta\varphi},$$

откуда

$$D \geqslant \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} \approx 82\ \text{Å}.$$

Приведем *другое решение* этой задачи. Рассмотрим бесконечную решетку в направлении оси X (рис. 136). Волновая функция всей решетки представляет собой плоскую волну $A\exp\left(i\frac{p_x x}{\hbar}\right)$, где p_x — импульс решетки в направлении

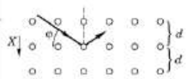


Рис. 136

оси X. При смещении всей решетки вдоль X на период d волновая функция умножается на $\exp\left(i\frac{p_x d}{\hbar}\right)$ и переходит сама в себя. Отсюда $p_x d = 2\pi m\hbar$, т. е. импульс, передаваемый решетке, квантован! При упругом отражении $p_x = 2p\sin\varphi$, откуда следует $2d\sin\varphi = m\frac{h}{p} = m\lambda$. Таким образом, мы получили условие Брэгга–Вульфа.

Если же решетка ограничена по x, то передаваемый по X решетке импульс приобретает неопределенность $\delta p_x \geqslant h/D$. С другой стороны, $\delta p_x = 2p\,\delta(\sin\varphi) = 2p\cos\varphi\,\delta\varphi$. Поскольку $\cos\varphi \approx 1$, то

$$\delta\varphi = \frac{\delta p_x}{2p} \gtrsim \frac{h}{D\cdot 2p} \approx \frac{\lambda}{2D}.$$

Таким образом, искомая толщина кристалла $D \geqslant \frac{\lambda}{2\delta\varphi}$. Полагая $\delta\varphi \approx \Delta\varphi = 0{,}1°$, получим ответ.

4) $R = mN$ – разр. способность, $N = \frac{D}{d}$ – кол-во слоев

$$R = m\frac{D}{d} \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \Rightarrow \boxed{D \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} d = \frac{\varphi}{\Delta\varphi} d = \frac{\lambda}{2d\Delta\varphi} d = \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} \simeq 82\,\text{Å}}$$

2.26. Какова должна быть кинетическая энергия T электронов (протонов) для исследования распределения заряда и ядерной материи внутри ядра с точностью $l \sim 1$ фм (10^{-13} см), и структур с линейными размерами $l \sim 10^{-4}$ фм, что соответствует радиусу слабого взаимодействия?

1) $v \sim c \Rightarrow E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \Rightarrow p = \sqrt{E^2/c^2 - m^2c^2}$

2) $\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar \Rightarrow p \sim \frac{\hbar}{l} \Rightarrow \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 \sim \frac{\hbar^2}{l^2} \Rightarrow E^2 \sim \frac{\hbar^2 c^2}{l^2} + m^2c^4$

3) $E = T + mc^2 \Rightarrow T > \sqrt{\frac{\hbar^2c^2}{l^2} + m^2c^4} - mc^2 = mc^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{ƛ_k}{l}\right)^2} - 1\right]$, $ƛ_k = \frac{\hbar}{mc}$

для e: $ƛ_e = 3.86\cdot10^{-11}$ см

для p: $ƛ_p = 1.32\cdot10^{-13}$ см

$l \sim 10^{-13}$ $\qquad$ $l \sim 10^{-17}$

Электрон: $T \gtrsim \frac{1}{2}\,\text{МэВ}\cdot 400 \simeq \boxed{200\,\text{МэВ}}$ $\qquad$ $T \gtrsim \boxed{2\,\text{ТэВ}}$

Протон: $T \gtrsim 950\,\text{МэВ}\cdot\left(\sqrt{1+(1.3)^2} - 1\right) \simeq \boxed{600\,\text{МэВ}}$ $\qquad$ $T \geq 950\,\text{МэВ}\cdot 19000 \simeq \boxed{2\,\text{ТэВ}}$

2.26. Условие разрешения объекта с характерным размером l: $\lambda_{дБ} \leqslant l$ или $h/p \leqslant l$, откуда $T > mc^2\sqrt{1+(\Lambda/l)^2} - mc^2$, где $\Lambda = h/(mc)$ — комптоновская длина волны электрона (протона).

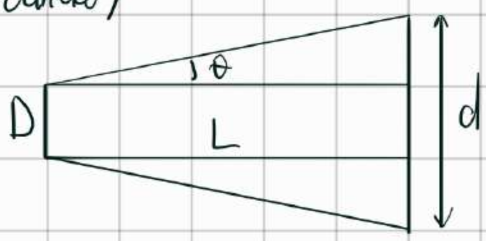
Для электрона: $T \gtrsim 1{,}24$ ГэВ ($l \sim 10^{-13}$ см) и $T \gtrsim 12{,}4$ ТэВ ($l \sim 10^{-17}$ см).

Для протона: $T \gtrsim 620$ МэВ ($l \sim 10^{-13}$ см) и $T \gtrsim 12{,}4$ ТэВ ($l \sim 10^{-17}$ см).

2.30. Оценить минимально достижимый диаметр d пятна, которое можно создать на детекторе пучком атомов серебра, испускаемых печью с температурой $t = 1200\,°$C. Расстояние от выходной щели печи до детектора равно $L = 1$ м. Расчет произвести: 1) исходя из волновой природы частиц в приближении Фраунгофера; 2) исходя из соотношения неопределенностей. Убедиться в эквивалентности обоих подходов.

1) Приближение Фраунгофера (оптика, экран далеко)

$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$ – из оптики



$d = D + 2L\frac{\lambda}{D}$, найдем $d(D)_{min}$

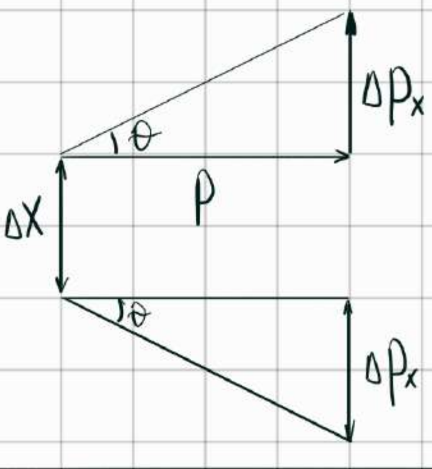
$$d' = 1 - 2L\frac{\lambda}{D^2} = 0 \Rightarrow 2L\frac{\lambda}{D^2} = 1 \Rightarrow D = \sqrt{2L\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{min} = \sqrt{2L\lambda} + \frac{2L\lambda}{\sqrt{2L\lambda}} = 2\sqrt{2L\lambda}$$

2) $\lambda_{дб} = \frac{h}{p}$; $\frac{3}{2}kT = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{3mkT}$ ^{47}Ag 107.86

$$d_{min} = 2\sqrt{2L\frac{h}{p}} = 2\sqrt{\frac{2Lh}{\sqrt{3mkT}}} = 2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot100\cdot6.6\cdot10^{-27}}{\sqrt{3\cdot108\cdot1.66\cdot10^{-24}\cdot1.38\cdot10^{-16}\cdot(1200+273)}}} \approx 7 \text{ мкм}$$

3) Теперь из соотношений неопределенностей: $\Delta x \Delta p_x \sim \hbar$



$\theta = \frac{\Delta p_x}{p}$, $D = \Delta x \Rightarrow \theta = \frac{\hbar}{p\Delta x} = \frac{\lambda}{\Delta x}$

$$d = \Delta x + 2L\theta = \Delta x + 2L\frac{\lambda}{\Delta x} = D + 2L\frac{\lambda}{D},$$

далее аналогично

2.30. $d \approx 2\sqrt{\frac{2hL}{\sqrt{3mkT}}} \approx 7{,}5$ мкм.

2.38. Электрон притягивается к поверхности жидкого гелия электростатическими силами изображения, потенциальная энергия которых, как известно, равна

$$U(x) = -\frac{e^2}{4x}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1},$$

где x — кратчайшее расстояние от электрона до поверхности, e — заряд электрона, $\varepsilon = 1{,}057$ — диэлектрическая проницаемость гелия (рис. 12). В то же время медленный электрон не может проникнуть внутрь гелия из-за отталкивания (так называемое отрицательное сродство гелия к электрону). Поэтому можно считать, что на поверхности ($x = 0$) потенциальная энергия испытывает бесконечный скачок и электрон оказывается в потенциальной яме (рис. 12). Пользуясь этой моделью и соотношением неопределенностей, оценить по порядку величины среднее расстояние $\langle x\rangle$ электрона от поверхности гелия в основном состоянии и энергию связи $\mathscr{E}_{св}$ электрона вблизи поверхности гелия.

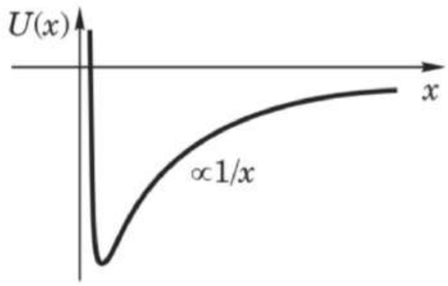


Рис. 12

1) $E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4x}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} = \frac{p^2}{2m} - \frac{C}{x} = \left| px \sim \hbar \right| = \frac{\hbar^2}{2mx^2} - \frac{C}{x}$

Основное состояние: $\frac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{2\hbar^2}{2mx^3} + \frac{C}{x^2} = 0 \Rightarrow \langle x\rangle = \frac{\hbar^2}{mC} = 4\frac{\hbar^2}{me^2}\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}$

$$x = 4\cdot\frac{(1.054\cdot10^{-27})^2}{9.1\cdot10^{-28}\cdot(4.8\cdot10^{-10})^2}\frac{2.057}{0.057} \approx 76\text{ Å}$$

2) Из модели Бора: $\frac{mv^2}{x} = \frac{\partial U}{\partial x} = F = \frac{C}{x^2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{C}{x} = \frac{p^2}{2m}$

$$E_{св} = \frac{1}{2}\frac{C}{\langle x\rangle} - \frac{C}{\langle x\rangle} = -\frac{C}{2\langle x\rangle} = -\frac{mC^2}{2\hbar^2} = -\frac{me^4}{32\hbar^2}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2 = -E_{ион}\cdot\frac{1}{16}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2 = -13{,}6\,эВ\cdot\left(\frac{0.057}{4\cdot 2.057}\right)^2 \approx$$

$$\approx -6.5\cdot 10^{-4}\,эВ$$

2.38. $\langle x\rangle \approx \frac{4(\varepsilon+1)}{\varepsilon-1} r_1 \approx 76$ Å, где $r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}53\cdot 10^{-8}$ см — радиус первой боровской орбиты в атоме водорода. Энергия связи

$$\mathscr{E}_{св} \approx -\frac{me^4}{32\hbar^2}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2 = -\mathscr{E}_{ион}\frac{1}{16}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2 \approx -6{,}5\cdot 10^{-4}\text{ эВ},$$

где $\mathscr{E}_{ион} = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13{,}6$ эВ — энергия ионизации атома водорода.

2.44*. Действие силы на свободно движущуюся частицу массой m можно обнаружить, наблюдая изменение ее координаты во времени. Оценить в соответствии с квантово-механическими законами, какую минимальную силу, действующую по направлению движения частицы, можно обнаружить таким способом за время наблюдения τ.

1) $\Delta X_F = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{F\tau^2}{2m}$

2) В начальный момент нельзя точно найти $p_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta X_p = \frac{\Delta p_0 \tau}{m}$

$(\Delta X)^2 = \underbrace{(\Delta X_p)^2}_{\text{из-за } \Delta p_0} + \underbrace{(\Delta X_0)^2}_{\text{в } t=0}$ — сложение дисперсий

3) $(\Delta p_0)^2(\Delta X_0)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow (\Delta p_0)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4(\Delta X_0)^2} \Rightarrow (\Delta X_p)^2 \geq \frac{\hbar^2\tau^2}{4m^2(\Delta X_0)^2}$

4) $(\Delta X)^2 = \frac{\hbar^2\tau^2}{4m^2(\Delta X_0)^2} + (\Delta X_0)^2$

$\frac{d(\Delta X)^2}{d(\Delta X_0)} = 0 \Rightarrow \frac{\hbar^2\tau^2}{4m^2}\frac{2}{(\Delta X_0)^3} = 2\Delta X_0 \Rightarrow (\Delta X_0)^2_{min} = \frac{\hbar\tau}{2m}$, подставляем:

5) $(\Delta X)^2 = \frac{\hbar\tau}{2m} + \frac{\hbar\tau}{2m} = \frac{\hbar\tau}{m}$

6) $(\Delta X_F)^2 > (\Delta X)^2 \Rightarrow \frac{F^2\tau^4}{4m^2} \geq \frac{\hbar\tau}{m} \Rightarrow F \geq 2\sqrt{\frac{\hbar m}{\tau^3}}$

2.44*. $\sqrt{\frac{4\hbar m}{\tau^3}}$.

Неделя 4

$$\psi(x,t) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)}, \quad |\psi|^2 = \psi^*\psi, \quad \int |\psi|^2 dV = 1$$

$$\langle x \rangle = \int \psi^* x \psi \, dV, \quad \langle \varphi(x) \rangle = \int \psi^* \varphi(x) \psi \, dV$$

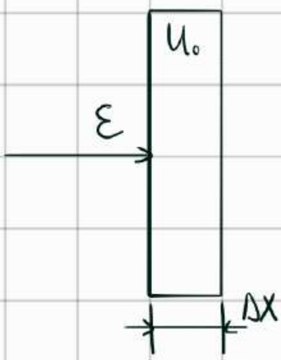
Ур-е Шредингера: $\boxed{E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x,y,z)\psi} = \hat{E}\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$

$\hat{}$ – оператор, например $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, т.к. $\hat{p}_x\psi = p_x\psi$

$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, т.к. $\hat{E}\psi = E\psi$

$$\hat{E} = \hat{T} + \hat{U}, \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta, \quad \hat{U} = U(x,y,z)$$

Туннелирование



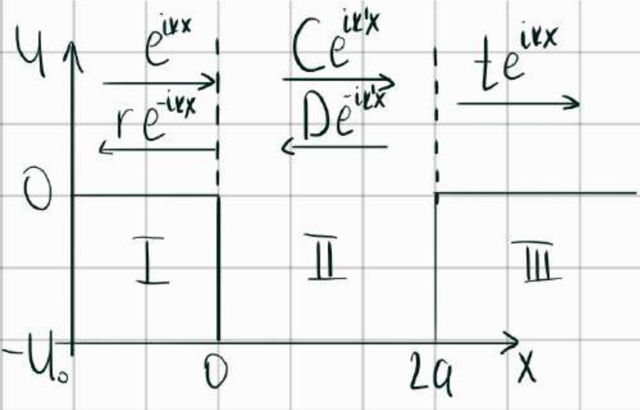
$D = \frac{|\psi|^2_{вых}}{|\psi|^2_{вход}}$ – вероятность пройти через барьер

$|\psi|^2 \propto e^{-\frac{\Delta x}{L}}$, где $L = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0-\varepsilon)}}$

$$D \simeq \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-\varepsilon)}\,\Delta x\right\}$$

4	22 – 28 сен.	Уравнения Шредингера. Потенциальные барьеры. Туннельный эффект	~~0-4-1~~, ~~0-4-2~~	~~3.35~~, ~~3.53~~, ~~3.56~~,	~~3.45~~, ~~Т6~~, ~~Т.7~~ ?

0-4-1. Найти минимальную кинетическую энергию электрона, при которой он без отражения пройдёт над одномерной прямоугольной потенциальной ямой глубиной $U = 2{,}5$ эВ размером $a = 2r_Б$, $r_Б$ — боровский радиус.



1) I: $\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + E\psi = 0$

$$\Delta\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \quad \text{“}k^2\text{”}$$

II Аналогично: $k' = \frac{\sqrt{2m(E+U)}}{\hbar}$

$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}$

2) $R = |r|^2$ – отражающий коэф. по энергии

$T = |t|^2$ – проходящий —||—

$T + R = 1$

Сложный путь (см. пункт 4)

3)
$$\psi_I = e^{ikx} - re^{-ikx}$$
$$\psi_{II} = Ce^{ik'x} - De^{-ik'x}$$
$$\psi_{III} = te^{ikx}$$

$\psi_I(-a) = \psi_{II}(-a)$: $\quad e^{-ika} - re^{ika} = Ce^{-ik'a} - De^{ik'a}$

$\psi_I'(-a) = \psi_{II}'(-a)$: $\quad ik\left(e^{-ika} + re^{ika}\right) = ik'\left(Ce^{-ik'a} + De^{ik'a}\right)$

$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$: $\quad Ce^{ik'a} - De^{-ik'a} = te^{ika}$

$\psi_{II}'(a) = \psi_{III}'(a)$: $\quad ik'\left(Ce^{ik'a} + De^{-ik'a}\right) = ikte^{ika}$

$$2Ce^{ik'a} = \left(1 + \frac{k}{k'}\right)te^{ika} \Rightarrow C = \frac{k+k'}{2k'}e^{i(k-k')a}t = \frac{k+k'}{2k'}\alpha\beta^{-1}t$$
$$D = \frac{k'-k}{2k'}e^{i(k+k')a}t = \frac{k'-k}{2k'}\alpha\beta t$$

Пусть $e^{ika} = \alpha$, $e^{ik'a} = \beta$.

(1) + (2):
$$2\alpha^{-1} = \frac{k'+k}{k}C\beta^{-1} + \frac{k'-k}{k}D\beta$$
$$2\alpha^{-1} = \left[\frac{(k+k')^2}{2kk'}\alpha\beta^{-2} + \frac{(k'-k)^2}{2kk'}\alpha\beta^2\right]t \Rightarrow \boxed{\frac{1}{t} = 1 + \frac{U^2}{4\varepsilon(\varepsilon+U)}\sin^2(2k'a)}$$

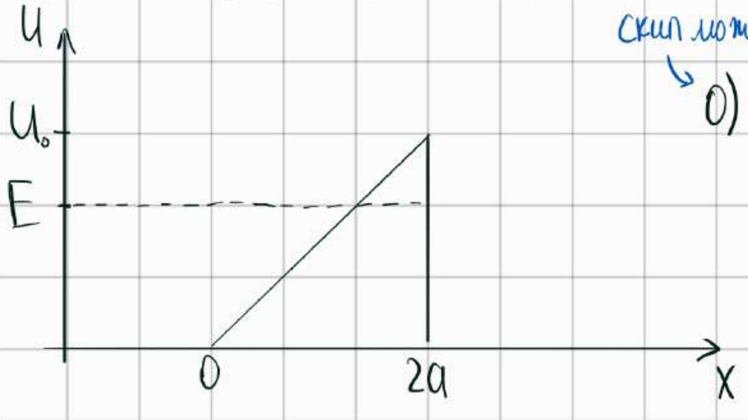
Можно сразу

4) $t = 1 \Leftrightarrow 2k'a = \pi n$ – условие резонанса

$$\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(\varepsilon+U)} = n\pi \Rightarrow$$

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\underset{1}{\underset{\parallel}{n^2}} - U = \frac{(1.05\cdot10^{-27})^2\, 3.14^2}{2\cdot9.1\cdot10^{-28}\cdot(2\cdot5.3\cdot10^{-9})^2\cdot\underbrace{1.6\cdot10^{-12}}_{эВ}} - 2.5\ эВ \approx 31\ эВ$$

0-4-2. Потенциальный барьер представляет собой прямоугольный треугольник с катетами $2a = 2$ Å и $U_0 = 5$ эВ. Оценить вероятность туннелирования через такой барьер электрона с энергией $E = 3U_0/5$.



скип можно

0) Вероятность пройти через прямоуг. барьер:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$$

$$æ = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E-U|}$$

$$\psi = C_1 e^{-æx} + \underbrace{C_2 e^{æx}}_{|C_2| \ll |C_1| \text{ „отраженная волна"}} \Rightarrow \psi \propto e^{-æx} \Rightarrow \text{(известный факт)}$$

$\Rightarrow w = w_0 e^{-2æd}$ - вероятность пройти барьер, d - ширина

1) Наш случай: разделим на прямоугольники

$$U(x) = U_0 \frac{x}{2a} \qquad U\left(\frac{6}{5}a\right) = \frac{3}{5}U_0 = E$$

Экспонену. затухание лишь при $E < U$

2) $$w = w_0 \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{1.2a}^{2a} \sqrt{U(x)-E}\,dx\right\} \ominus$$

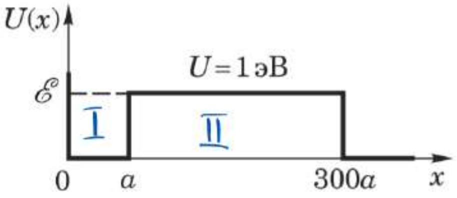
$$I = \int_{1.2a}^{2a}\left(U_0\frac{x}{2a} - E\right)^{1/2} dx = \int_{1.2a}^{2a}(\alpha x - E)^{1/2} = \left| \begin{array}{l} w = \alpha x - E \\ dw = \alpha dx \end{array} \right| = \int_0^{U_0-E} w^{1/2}\frac{dw}{\alpha} = \frac{2}{3\alpha}(U_0-E)^{3/2}$$

$$\ominus\ w_0 \exp\left\{-2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a}{U_0}(U_0-E)^{3/2}\right\}, \quad \text{итого:}$$

$$W = \exp\left\{-\frac{8a\sqrt{2m}}{3\hbar}\frac{(U_0-E)^{3/2}}{U_0}\right\} \approx \exp\left\{-\frac{8 \cdot 1 \cdot 10^{-8}\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28}}}{3 \cdot 1.054 \cdot 10^{-27}} \frac{(2\text{эВ})^{3/2}\sqrt{1.6 \cdot 10^{-12}}}{5\text{ эВ}}\right\} \approx \exp\{-0.77\} \approx$$

$\approx 46\%$

3.35. Электрон находится в одномерной потенциальной яме, изображенной на рисунке рис. 32. Энергия частицы равна $\mathscr{E} = 0{,}9999$ эВ, а высота потенциального барьера $U = 1$ эВ. Найти ширину ямы, если уровень с указанным значением энергии является первым. Оценить время жизни τ частицы в яме. Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера следует пренебречь.



1) $\psi_I'' + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_I = 0 \Rightarrow \psi_I = e^{ikx} + re^{-ikx}$, $\quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, но $\psi_I(0) = 0 \Rightarrow \psi_I = A\sin kx$

$\psi_{II}'' + \frac{2m}{\hbar^2}(U-E)\psi_{II} = 0 \Rightarrow \psi_{II} = Ce^{-\varkappa x} + \cancel{De^{\varkappa x}}$, $\quad \varkappa = \frac{\sqrt{2m|U-E|}}{\hbar} = \frac{1}{100}k =$

отраженным пренебрегаем

$= \frac{\sqrt{2\cdot 9.1\cdot 10^{-21}\cdot 0.0001\cdot 1.6\cdot 10^{-12}}}{1.054\cdot 10^{-27}} = 5.1\cdot 10^{5}$ см$^{-1}$

2) Сшиваем решение:

$\psi_I(a) = \psi_{II}(a)$: $\quad A\sin ka = Ce^{-\varkappa a}$

$\psi_I'(a) = \psi_{II}'(a)$: $\quad kA\cos ka = -\varkappa Ce^{-\varkappa a}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} ka = -\frac{k}{\varkappa}$

$|a| = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{\varkappa}\right)}{k} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{E}{U-E}}\right)$

$a = \frac{1.054\cdot 10^{-27}}{\sqrt{2\cdot 9.1\cdot 10^{-28}\cdot 1\cdot 1.6\cdot 10^{-12}}}\cdot \operatorname{arctg}(100) = 3\,\text{Å}$

3) $D = \exp\{-2\varkappa L\} \approx \exp\{-2\cdot 5.1\cdot 10^{5}\cdot 299\cdot 3\cdot 10^{-8}\} \approx 1.06\cdot 10^{-4} = 0.0106\,\%$

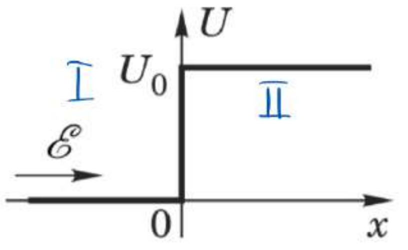
— вероятность прохождения („прозрачность")

$n = \frac{v}{a} = \sqrt{\frac{2E}{ma^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1\cdot 1.6\cdot 10^{-12}}{9.1\cdot 10^{-28}\cdot (3\cdot 10^{-8})^2}} \approx 1.98\cdot 10^{15}$ — частота ударов об яму

$\tau \approx \frac{1}{nD} = \frac{1}{1.98\cdot 10^{15}\cdot 1.06\cdot 10^{-4}} \approx 4.7\cdot 10^{-12}$ с — не совпало, но порядок правильный

3.35. $\tau = \frac{1}{nD} \approx 1{,}2\cdot 10^{-11}$ с, где $D \approx \exp(-598a\varkappa) \approx 8{,}3\cdot 10^{-5}$, $\varkappa = \frac{\sqrt{2m(U-\mathscr{E})}}{\hbar} \approx$ $\approx 5{,}08\cdot 10^{5}$ см$^{-1}$, $a = 3$ Å.

3.53. На одномерную прямоугольную потенциальную ступеньку высотой $U_0 > 0$, расположенную в точке $x = 0$, из области $x < 0$ падают микрочастицы с энергией $\mathscr{E} = U_0/4$ (рис. 37). На каком наименьшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Бройля) плотность вероятности обнаружить частицу будет максимальна и на каком — минимальна?



1) $$K_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{mU_0}}{\hbar}$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} = i\varkappa = i\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{mU_0}}{\hbar} = \sqrt{3}\,i K_1$$

2) Можно воспользоваться формулами Френеля из оптики $(\theta = 0)$

$$\boxed{r = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}, \quad t = \frac{2K_1}{K_1 + K_2}; \quad R = |r|^2 \quad T = \frac{K_2}{K_1}|t|^2}$$

модификация квант. физики

$$|r|^2 = r r^* = \frac{K_1 - i\varkappa}{K_1 + i\varkappa}\cdot\frac{K_1 + i\varkappa}{K_1 - i\varkappa} = 1 \Rightarrow \text{полное отражение}$$

$$r = \frac{K_1 - i\varkappa}{K_1 + i\varkappa} = e^{i\varphi}, \quad \varphi = -2\,\mathrm{arctg}\frac{\varkappa}{K_1} = -2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3/2}}{1/\sqrt{2}} = -\frac{2\pi}{3}$$

3) $$\psi(x) = e^{ikx} + e^{i\varphi}e^{-ikx} = 2e^{\frac{i\varphi}{2}}\left(\frac{e^{-\frac{i\varphi}{2}}e^{ikx} + e^{\frac{i\varphi}{2}}e^{-ikx}}{2}\right) = 2e^{\frac{i\varphi}{2}}\cos\left(kx - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$|\psi(x)|^2 \propto \cos^2\left(kx + \frac{\pi}{3}\right)$$

4) $$x_{max} = -\frac{\pi}{3k} = -\frac{\lambda}{6} \qquad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

$$x_{min} = -\frac{5\pi}{6k} = -\frac{5\lambda}{12}$$

3.53. $x_{\max} = -\lambda/6$, $x_{\min} = -5\lambda/12$, где λ — дебройлевская длина волны падающих микрочастиц.

3.56. Какая доля электронов с энергией $\mathscr{E} = 1$ эВ, падающих слева на прямоугольный несимметричный потенциальный барьер с параметрами $U_1 = \mathscr{E}$, $U_2 = 4U_1$ и шириной $l = 7{,}8 \cdot 10^{-8}$ см, сможет его преодолеть (рис. 40)?

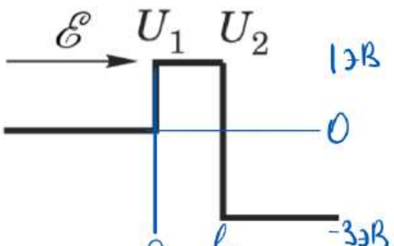


Рис. 40

1) $$K_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = K = \frac{\sqrt{2\cdot 9.1\cdot 10^{-28}\cdot 1.6\cdot 10^{-12}}}{1.054\cdot 10^{-27}} \approx 5.1\cdot 10^{7}\,\text{см}^{-1}$$

$$\psi''_{II} = 0 \Rightarrow \psi_{II} = Ax + B$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{2m\cdot 4E}}{\hbar} = 2K$$

2) $\psi_I(x) = e^{ik_1x} + re^{-ik_1x}$

$$\begin{cases} \psi_I(0) = \psi_{II}(0): & 1 + r = B \\ \psi_I'(0) = \psi_{II}'(0): & ik_1 - rik_1 = A \end{cases}$$

$\psi_{II}(x) = Ax + B$

$$\begin{cases} \psi_{II}(l) = \psi_{III}(l): & Al + B = te^{ik_2l} \\ \psi_{II}'(l) = \psi_{III}'(l): & A = ik_2te^{ik_2l} \end{cases}$$

$\psi_{III}(x) = te^{ik_2x}$

Math: $B = te^{ik_2l} - Al = te^{ik_2l}(1 - ik_2l)$

$$ik_1(1-r) = ik_2te^{ik_2l} \Rightarrow r = 1 - \frac{k_2}{k_1}te^{ik_2l}$$

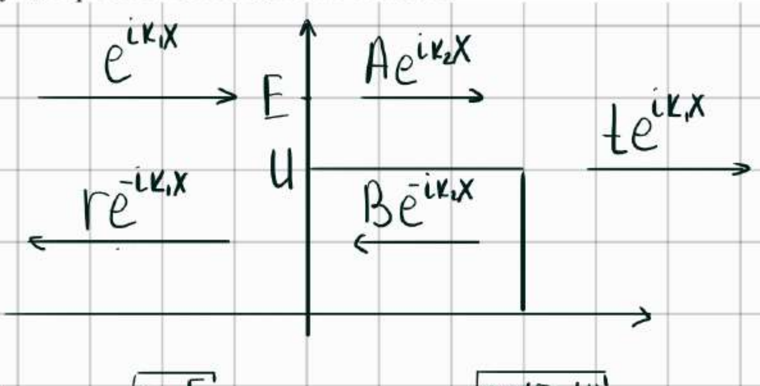
$$2 - \frac{k_2}{k_1}te^{ik_2l} = te^{ik_2l}(1 - ik_2l) \Rightarrow t = \frac{2e^{-ik_2l}}{1 - ik_2l + k_2/k_1}$$

$$t = \frac{2ik_1e^{-ik_2l}}{k_1k_2l + i(k_1+k_2)}$$

$$T = \frac{k_2}{k_1}|t|^2 = \frac{k_2}{k_1}\frac{4k_1k_2}{k_1^2k_2^2l^2 + (k_1+k_2)^2} = \frac{8}{9 + 4k^2l^2} = \frac{8}{9 + 4(5.1\cdot10^{7})^2(7.8\cdot10^{-8})^2} \approx 0.11$$

3.56. Искомая доля равна коэффициенту прохождения барьера $D = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2 + k_1^2k_2^2l^2} = \frac{8}{73} = 0{,}11$, где $k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\mathscr{E}} = 5{,}1\cdot 10^7$ см$^{-1}$; $k_2 = 2k_1$.

3.45. При прохождении нерелятивистской частицы с энергией $\mathscr{E}$ над прямоугольным барьером высотой $U = (3/4)\mathscr{E}$ коэффициент отражения по мощности оказался равным $R = 9/25$. Определить минимально возможную ширину барьера в единицах соответствующей ему дебройлевской длины волны.



$$\begin{cases} 1 + r = A + B \\ 2ik(1-r) = ik(A-B) \\ Ae^{ikl} + Be^{-ikl} = te^{2ikl} \\ ik(Ae^{ikl} - Be^{-ikl}) = 2ikte^{2ikl} \end{cases}$$

1) $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = 2k$; $\quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} = k$

2) В общем случае $r \neq \sqrt{R}$! т.к. $r \in \mathbb{C}$

В нашем случае аналог отражения от более плотной среды.

Как известно, при этом фазы падающ. и отр. волн равны =>

$$\Rightarrow r \in R; \quad r = \sqrt{R} = \frac{3}{5}$$

3) $\begin{cases} 1.6 = A + B \\ 0.8 = A - B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1.2 \\ B = 0.4 \end{matrix}$

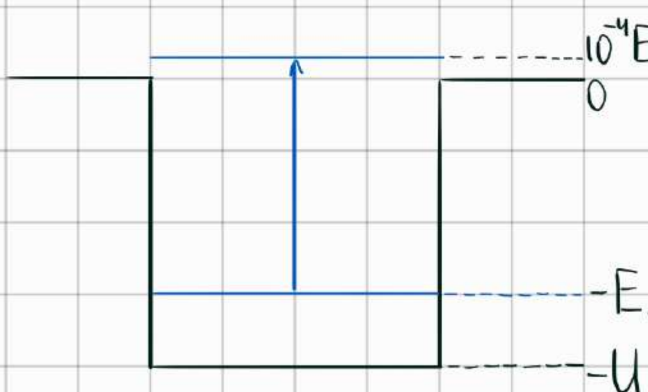
$$1.2e^{ikl} + 0.4e^{-ikl} = te^{2ikl} \rightarrow 2.4e^{ikl} = 3te^{2ikl} \Rightarrow t = \frac{4}{5}e^{-ikl}$$
$$1.2e^{ikl} - 0.4e^{-ikl} = 2te^{2ikl} \rightarrow 1.2e^{ikl} - 0.4e^{-ikl} = 1.6e^{ikl} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{ikl} = -e^{-ikl}$$
$$e^{ikl} = \pm i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$kl = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l_{min} = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi\lambda}{2 \cdot 2\pi} = \frac{\lambda}{4}$$

3.45. $L_{\min} = \lambda/4$.

Т.6. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $d = 1$ Å в основном состоянии. Энергия ионизации электрона $E_0 = 20$ эВ. Электрон поглощает фотон с энергией $1.0001 E_0$, оценить время, которое электрон будет находиться над ямой. Процесс релаксации с испусканием фотона и возвратом в исходное состояние не рассматривать. Глубина ямы $U = 20.32$ эВ. Сравнить уширение уровня с его энергией.

1)



Аналог. оптике: $T = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2} \approx \frac{4k_2}{k_1} \approx 4 \cdot 10^{-2}$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(U+\varepsilon)}}{\hbar} \approx 2.31 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}$$

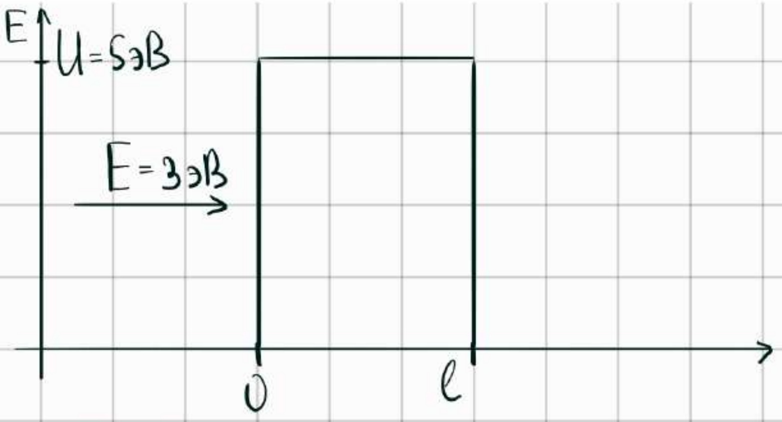
$$k_2 = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} \approx 2{,}29 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1} \ll k_1$$

2) Частота ударов: $\nu = \frac{v}{d} = \sqrt{\frac{2E}{md^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-14}}} = 2.65 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$

3) $\tau \approx \frac{1}{\nu T} = \frac{1}{2.65 \cdot 10^{15} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \approx 10^{-14} \text{ с}$; $\quad \delta E = \frac{\hbar}{\tau} \approx \frac{1.054 \cdot 10^{-27}}{10^{-14} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} \approx 0.066 \text{ эВ} \gg \varepsilon$

Ответ: $\tau \approx 10^{-14}$с; $\delta E = \hbar/\tau \approx 0{,}06$ эВ >> $10^{-4}\ E_0 = 0{,}002$ эВ

Т.7. Электрон с энергией $E = 3$ эВ проходит через прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 5$ эВ и шириной $l = 3$ Å. Определить, во сколько раз должна возрасти высота барьера, чтобы вероятность прохождения через барьер упала в 10 раз: а) при использовании приближенной формулы для проницаемости барьера; б) точной формулы для проницаемости прямоугольного барьера.



I 1) Приближение: $W = \exp(-2\varkappa l) = \exp(-2\cdot 7.24\cdot 10^{7}\cdot 3\cdot 10^{-8}) \simeq 1.3\cdot 10^{-2}$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2\cdot 9.1\cdot 10^{-28}\cdot 2\cdot 1.6\cdot 10^{-12}}}{1.054\cdot 10^{-27}} \approx 7.24\cdot 10^{7}\ \text{см}^{-1}$$

2) $\exp(-2\varkappa l) = 10\exp(-2\varkappa^{*} l)$

$$\exp[-2(\varkappa^{*}-\varkappa)l] = \frac{1}{10} \Rightarrow \varkappa^{*} = \varkappa + \frac{\ln 10}{2l}$$

$$\boxed{U^{*} = E + \left(\sqrt{U-E} + \frac{\ln 10}{2l}\cdot\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\right)^{2}} = 3 + \left(\sqrt{2} + \frac{\ln 10\cdot 1.054\cdot 10^{-27}}{2\cdot 3\cdot 10^{-8}\sqrt{2\cdot 9.1\cdot 10^{-28}}\cdot\sqrt{1.6\cdot 10^{-12}}}\right) = \boxed{7.68\ \text{эВ}}$$

$$\alpha = \frac{U^{*}}{U} = \boxed{1.536}$$

✓ не совпало

II Точная формула: (учёт переотражений от стенок барьера)

$$T = \left[1 + \frac{U^{2}}{4E(U-E)}\sinh^{2}(\varkappa l)\right]^{-1}$$

$$T \simeq \left[1 + \frac{5^{2}}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot\sinh^{2}(3\cdot 10^{-8}\cdot 7.24\cdot 10^{7})\right]^{-1} \simeq 4.87\cdot 10^{-2}$$

$$\left[1 + \frac{U^{*2}}{4E(U^{*}-E)}\sinh^{2}\left(\frac{\sqrt{2m(U^{*}-E)}}{\hbar}\right)\right]^{-1} = 4.87\cdot 10^{-3} \xrightarrow{\text{численно}} \boxed{U^{*} = 7.70\ \text{эВ}}$$

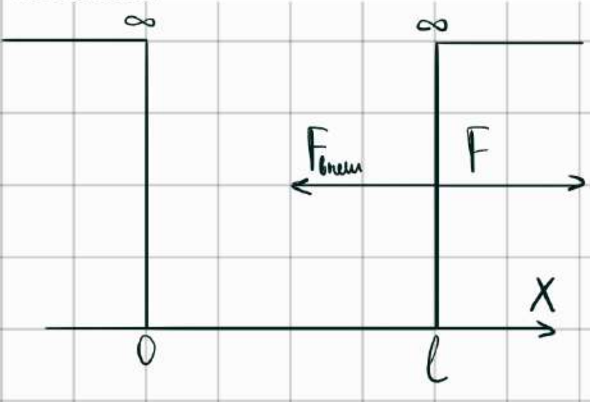
Не совпало

То есть приближенная формула оказалась достаточно точной

Ответ: а) в 1,54 раз ($U_x \approx 7{,}68$ эВ), б) в 1,70 раза ($U_x \approx 8{,}51$ эВ).

5	29 сен. – 5 окт.	Потенциальные ямы. Квазиклассическое приближение	~~0-5-1~~, ~~0-5-2~~	~~3.5~~, ~~3.15~~, ~~3.21~~,?	~~3.6~~, ~~3.23~~, ~~3.50~~

0-5-1. Частица массы m заключена в одномерном потенциальном ящике шириной l с непроницаемыми стенками. Найти работу, которую надо затратить на квазистатическое сжатие ящика вдвое, если частица находится в основном состоянии.



1) $\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \Rightarrow \psi = A\sin kx + B\cos kx$

$\psi(0) = \psi(l) = 0 \Rightarrow \psi = A\sin kx$, где

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$A\sin kl = 0 \Rightarrow kl = \pi n \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}n^2$ – энергия дискретна

2) $W = E_1\left(\frac{l}{2}\right) - E_1(l) = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2ml^2}$

0-5-2. Частица массы m заключена в одномерном потенциальном ящике с непроницаемыми стенками. Какова масса частицы, если при ширине ящика l =3 Å. расстояние между первым и третьим уровнями частицы в яме составляет ΔE= 5 эВ?

1) Из прошлой задачи: $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}n^2$

$$\Delta E = E_3 - E_1 = \frac{8\hbar^2\pi^2}{2ml^2} = \frac{4\hbar^2\pi^2}{ml^2}$$

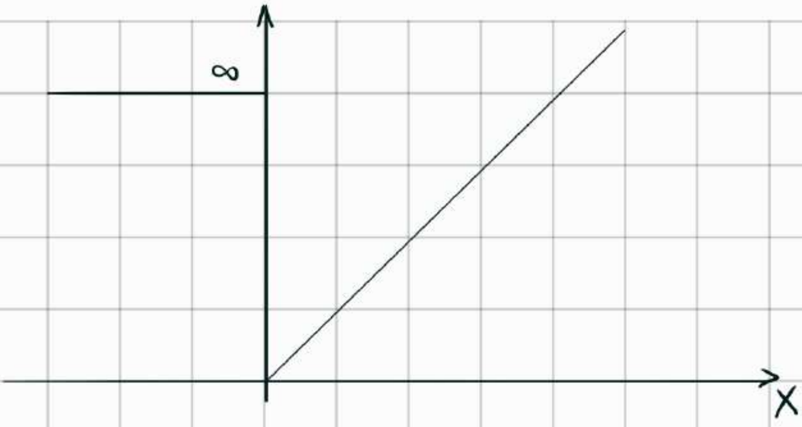
2) $m = \frac{4\hbar^2\pi^2}{\Delta E \cdot l^2} = \frac{4(1.054\cdot10^{-27})^2\, 9.87}{5\cdot1.6\cdot10^{-12}\cdot 9\cdot10^{-16}} \approx 6.1\cdot10^{-27}$ гр

$m_e = 9.1\cdot10^{-28}$ гр $\Rightarrow$ $m \approx 6.69\, m_e \approx 6.1\cdot10^{-27}$ гр

3.5. Частица массой m находится в одномерном потенциале

$$U(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ kx & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Оценить энергию основного состояния частицы в этом потенциале, используя в качестве волновой функции $\psi = x\exp(-ax)$. В качестве оценки взять минимум среднего значения полной энергии частицы. Сравнить с задачей 2.39.



1) Ур-е Шредингера:

$$\hat{E}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x,y,z)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xe^{-ax}) + kx\cdot xe^{-ax} =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[-2ae^{-ax}+a^2xe^{-ax}\right] + kx^2e^{-ax} = e^{-ax}\left\{\frac{\hbar^2}{2m}(2a-a^2x)+kx^2\right\}$$

2) $$\bar{E} = \frac{\int\psi^*\hat{E}\psi\, dV}{\int\psi^*\psi\, dV} = \frac{\int_0^\infty \psi^*\hat{E}\psi\, dx}{\int_0^\infty\psi^*\psi\, dx} = \frac{\frac{\hbar^2}{8ma}+\frac{3k}{8a^4}}{\frac{1}{4a^3}} = \frac{\hbar^2a^2}{2m}+\frac{3k}{2a} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\hbar^2a^3}{m}+3k\right)$$

· $$\int_0^\infty \psi^*\psi\, dx = \int_0^\infty x^2e^{-2ax}dx = \left|\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}\right| = \frac{2}{(2a)^3} = \frac{1}{4a^3}$$

· $$\int_0^\infty\psi^*\hat{E}\psi\, dx = \int_0^\infty xe^{-ax}\cdot e^{-ax}\left\{\frac{\hbar^2}{2m}(2a-a^2x)+kx^2\right\} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\hbar^2 a}{m}xe^{-2ax}dx - \int_0^\infty\frac{\hbar^2a^2}{2m}x^2e^{-2ax}dx + \int_0^\infty kx^3e^{-2ax}dx =$$

$$= \frac{\hbar^2a}{m}\frac{1}{4a^2} - \frac{\hbar^2a^2}{2m}\cdot\frac{1}{4a^3} + k\frac{3}{8a^4} = \frac{\hbar^2}{8ma}+\frac{3k}{8a^4}$$

3) $$\frac{d\bar{E}}{da}=0 \Rightarrow \frac{\hbar^2 a}{m} - \frac{3k}{2a^2}=0 \Rightarrow a^3 = \frac{3km}{2\hbar^2}$$

$$\bar{E}_{min} = \frac12\left(\frac{2\hbar^2}{3km}\right)^{1/3}\cdot\frac{9k}{2} = \frac94\left(\frac{2\hbar^2k^2}{3m}\right)^{1/3} = \frac32\left(\frac94\frac{\hbar^2k^2}{m}\right)^{1/3}$$

3.5. $\mathscr{E}_0 \approx \frac32\left(\frac94\frac{\hbar^2k^2}{m}\right)^{1/3}$, параметр $a=\left(\frac{3mk}{2\hbar}\right)^{1/3}$. (См. также задачу 2.39.) Полученный ответ совпадает с точным решением с точностью 6%.

3.15. Поток нейтронов, летящих со скоростью $V_0 = 25$ см/с, падает на широкую щель с абсолютно отражающими стенками (рис. 22). Длина щели $l = 1$ см, высота $d = 10^{-4}$ см. Сколько времени нейтрон будет находиться внутри щели, если он в нее попадет?

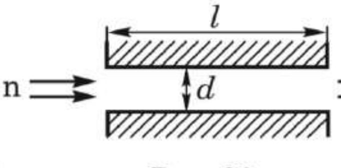


Рис. 22

1) Аналог волновода, часть энергии уходит на осн. сост.

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2}$$

· условие неотражения: $\frac{mv_0^2}{2} > \frac{\pi^2\hbar^2}{2md^2} \Rightarrow (1.67\cdot 10^{-24})^2 25^2 \geq \frac{9.8\cdot(1.054\cdot 10^{-27})^2}{10^{-8}}$

$1.74\cdot 10^{-45} \geq 1.09\cdot 10^{-45} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ попадет в щель

· $v = \sqrt{v_0^2 - \frac{\pi^2\hbar^2}{m^2d^2}} = \sqrt{25^2 - \frac{9.87\cdot(1.054\cdot 10^{-27})^2}{(1.67\cdot 10^{-24})^2\, 10^{-8}}} \approx 15.2\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$

2) $t = \frac{l}{v} = \frac{1}{15.2}\cdot 1000$ мс ≈ 65.8 мс

3.15. $t = 0{,}065$ с.

3.21. Энергия взаимодействия $U(z)$ атома водорода с твердой стенкой аппроксимируется прямоугольной потенциальной ямой глубиной U_0, шириной $a = 6$ Å и $U(z=0) = +\infty$ (рис. 26). Энергия адсорбции — это разность наинизших уровней свободного и прилипшего к стенке атома $\mathscr{E} = U_0 - \mathscr{E}_1 = 1$ К. Найти величину U_0 и среднее значение координаты $\langle z \rangle$ адсорбированных атомов.

Указание: $\varphi \operatorname{ctg} \varphi = -1{,}21$ при $\varphi = 2\pi/3$.

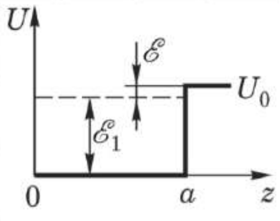
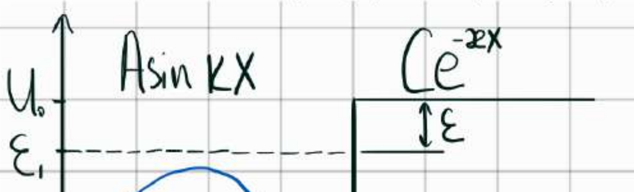


Рис. 26



1) $A \sin ka = Ce^{-\varkappa a}$; $kA\cos ka = -\varkappa Ce^{-\varkappa a}$ $\Rightarrow \operatorname{ctg} ka = -\frac{\varkappa}{k}\frac{a}{a}$

2) $ka \cdot \operatorname{ctg} ka = -\varkappa a = -\frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} a =$

$= \frac{\sqrt{2\cdot 1\cdot 1.67\cdot 10^{-24}\cdot 1.38\cdot 10^{-16}}}{1.054\cdot 10^{-27}} \approx 2\cdot 10^{7}\cdot 6\cdot 10^{-8} \approx -1.21 \Rightarrow$

$\Rightarrow ka = \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{2m\varepsilon_1}}{\hbar} a \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{2\hbar^2\pi^2}{9ma^2} = \frac{2(1.054\cdot 10^{-27})^2\cdot 9.87}{9\cdot 1.67\cdot 10^{-24}\cdot 36\cdot 10^{-16}\cdot 1.38\cdot 10^{-16}} \approx 3$ К

$U_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon = 4$ К;

$A \sin\frac{2\pi}{3} = C\cdot e^{-1.21} \Rightarrow \frac{A}{C} \approx 0.344$

$$3)\ \langle z\rangle = \frac{\int_0^\infty \psi^* z\psi\,dz}{\int_0^\infty \psi^*\psi\,dz} = \frac{A^2\left[\frac{a^2}{4}-\frac{a\sin(2ka)}{4k}-\frac{\cos(ka)-1}{8k^2}\right]+C^2e^{-2\varkappa a}\frac{2\varkappa a+1}{4\varkappa^2}}{A^2\left[\frac{a}{2}-\frac{\sin(2ka)}{4k}\right]+C^2\frac{1}{2\varkappa}e^{-2\varkappa a}} = \ldots \approx 7\,\text{Å} \quad ?$$

$$\cdot \int_0^\infty \psi^*\psi = \int_0^a A^2\sin^2 kz\,dz + \int_a^\infty C^2 e^{-2\varkappa z}\,dz = A^2\left[\frac{a}{2}-\frac{\sin(2ka)}{4k}\right]+C^2\frac{1}{2\varkappa}e^{-2\varkappa a}$$

$$\cdot \int_0^a \sin^2 kz\,dz = \int_0^a \frac{1-\cos(2kz)}{2}\,\frac{d2kz}{2k} = \frac{1}{4k}\int_0^a 1-\cos(2kz)\,d2kz = \frac{a}{2}-\frac{\sin(2ka)}{4}$$

$$\cdot \int_a^\infty e^{-2\varkappa z}\,dz = \left.\frac{e^{-2\varkappa z}}{-2\varkappa}\right|_a^\infty = \frac{1}{2\varkappa}e^{-2\varkappa a}$$

$$\cdot \int_0^\infty \psi^* z\psi\,dz = A^2\int_0^a z\sin^2 kz\,dz + C^2\int_a^\infty z e^{-2\varkappa z}\,dz = A^2\left[\frac{a^2}{4}-\frac{a\sin(2ka)}{4k}-\frac{\cos(ka)-1}{8k^2}\right]+C^2e^{-2\varkappa a}\frac{2\varkappa a+1}{4\varkappa^2}$$

$$\cdot \int_0^a z\,\frac{1-\cos(2kz)}{2}\,dz = \frac{1}{2}\int_0^a z\,dz - \frac{1}{2}\int_0^a z\cos(2kz)\,dz = \frac{a^2}{4}-\frac{a\sin(2ka)}{4k}-\frac{\cos(ka)-1}{8k^2}$$

$$\cdot \int_0^a z\cos(2kz)\,dz = \int_0^a z\,\frac{d\sin(2kz)}{2k} = \frac{1}{2k}\left\{a\cdot\sin(2ka)-\int_0^a \sin(2kz)\,dz\right\} =$$

$$= \frac{a\sin(2ka)}{2k}+\frac{\cos(ka)-1}{4k^2}$$

$$\cdot \int_a^\infty z e^{-2\varkappa z}\,dz = \int_a^\infty z\,\frac{de^{-2\varkappa z}}{-2\varkappa} = \frac{1}{+2\varkappa}\left\{ae^{-2\varkappa a}-\int_a^\infty e^{-2\varkappa z}\,dz\right\} =$$

$$= \frac{ae^{-2\varkappa a}}{2\varkappa}+\frac{e^{-2\varkappa a}}{4\varkappa^2} = \frac{(2\varkappa a+1)e^{-2\varkappa a}}{4\varkappa^2}$$

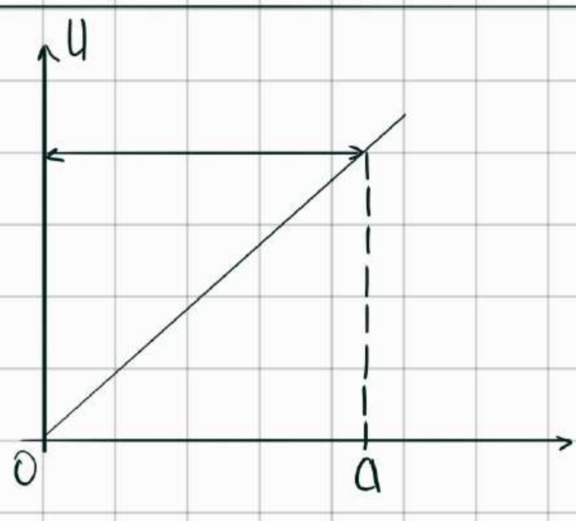
3.21. $U_0 = 4$ K, $\langle z\rangle \approx \frac{\pi}{2k}+\frac{1}{2\varkappa} \approx 7$ Å. Здесь $k=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\mathscr{E}_1}$; $\varkappa=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-\mathscr{E}_1)} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\mathscr{E}}$; $\mathscr{E}_1 = U_0-\mathscr{E}$. Точный расчет показывает, что $\langle z\rangle \approx 5{,}4$ Å, т. е. «в среднем» атом находится не вне ямы, а все-таки внутри нее.

3.6. Используя правило квантования Бора–Зоммерфельда, найти закон квантования энергии частицы массой m при больших значениях главного квантового числа n (в квазиклассическом приближении) в одномерном потенциале

$$\psi(x) = \begin{cases}\infty & \text{при} \quad x<0,\\ kx & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$$

У к а з а н и е. Правило квантования Бора–Зоммерфельда

$$\oint \mathbf{p}\,d\mathbf{l} = nh.$$



1) Считаем, что частица циклично ударяется о стенки:

$$\oint \vec{p}\,d\vec{l} = p\cdot 2a = nh \Rightarrow p = \frac{nh}{2a} = \frac{\pi n \hbar}{a}$$

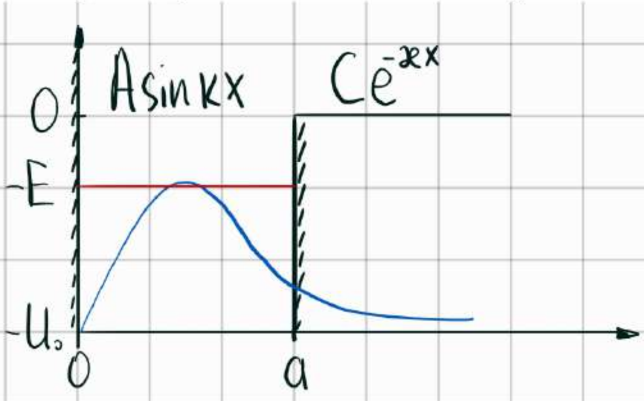
2) $E = \frac{p^2}{2m} + ka = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2} + ka$

3) $E \to \min$: $\frac{dE}{da} = 0 = -\frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{ma^3} + k \Rightarrow a^3_{min} = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{mk}$

$$E_{min} = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{mk}}\left[k + \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2m}\cdot\frac{mk}{\pi^2 n^2 \hbar^2}\right] = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi^2 n^2 \hbar^2 k^2}{m}\right)^{1/3}$$

$$\mathscr{E}_n = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{k^2\pi^2\hbar^2}{m}}n^{2/3}$$

3.23. Найти глубину ямы и энергию ионизации $\mathscr{E}$ электрона (в эВ), находящегося в основном состоянии в одномерной яме шириной $a = 2\,\text{Å}$ с потенциалом $U_0 = \infty$, $U = -U_0$ при $0 < x < a$ и $U = 0$ при $x > a$, если известно, что отношение волновой функции на границе ямы ($x = a$) к ее максимальному значению в яме равно $\alpha = \sqrt{3}/2$.



1) $k^2 = \frac{2m(U_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2}$ $\quad æ^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

2) $\left.\begin{array}{l} A\sin ka = Ce^{-æa} \\ kA\cos ka = -æCe^{-æa}\end{array}\right| \Rightarrow \operatorname{ctg} ka = -\frac{æa}{ka}$

3) $x\in[0;a]$: $\psi_1 = A\sin kx \Rightarrow \psi_1^{max} = A$; $\frac{\psi_1(a)}{\psi_1^{max}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \psi_1(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}A \Rightarrow$

$\Rightarrow ka = \frac{2\pi}{3}$

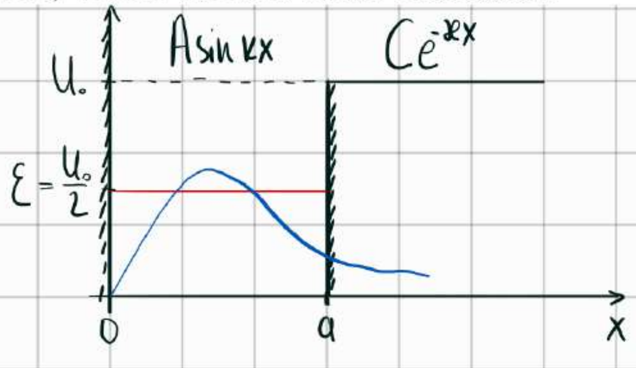
4) $æa = -ka\cdot\operatorname{ctg} ka = -\frac{2\pi}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$

$æ^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{4}{27}\frac{\pi^2}{a^2} \Rightarrow E = \frac{2}{27}\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2} = \frac{2}{27}\frac{(1.054\cdot10^{-27}\cdot3.14)^2}{9.1\cdot10^{-28}\cdot4\cdot10^{-16}}\frac{1}{1.6\cdot10^{-12}\,\frac{\text{эрг}}{\text{эВ}}} \approx 1.38\,\text{эВ}$

5) $k^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} = \frac{4}{9}\frac{\pi^2}{a^2} \Rightarrow \frac{k^2}{æ^2} = \frac{U_0 - E}{E} = 3 \Rightarrow U_0 = 4E = \frac{8}{27}\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2} = 5.53\,\text{эВ}$

3.23. $U_0 = \frac{8\pi^2\hbar^2}{27ma^2} = 5{,}53$ эВ; $\mathscr{E} = \frac{U_0}{4} = 1{,}38$ эВ.

3.50. Микрочастица находится в одномерной потенциальной яме заданной ширины. Одна ее стенка бесконечно высокая, а вторая — конечной высоты U_0. Энергия частицы в яме $\mathscr{E} = U_0/2$. Во сколько раз надо квазистатически изменить высоту ямы при неизменной ширине, чтобы частица стала свободной?



1) $k^2 = \frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}$; $\varkappa^2 = \frac{2m(U_0-\varepsilon)}{\hbar^2}$

2) $\left.\begin{array}{l} A\sin ka = Ce^{-\varkappa a} \\ kA\cos ka = -\varkappa Ce^{-\varkappa a} \end{array}\right| \Rightarrow k\,\mathrm{ctg}\,ka = -\varkappa$

$$\frac{\varkappa^2}{k^2} = \mathrm{ctg}^2 ka = \frac{1}{\sin^2 ka} - 1 = \frac{U_0-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{U_0}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \sin^2 ka = \frac{\varepsilon}{U} = \frac{1}{2}$$

$$ka = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \xrightarrow{\text{из рис.}} ka = \frac{3\pi}{4}$$

$$k^2a^2 = \frac{9\pi^2}{16} = \frac{2ma^2\varepsilon}{\hbar^2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{9\pi^2\hbar^2}{32ma^2} \qquad U_0 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{16ma^2}$$

3) После сдвига $\tilde{E} = \tilde{U} \Rightarrow \tilde{\varkappa} = 0 \Rightarrow \mathrm{ctg}\,\tilde{k}a = 0 \Rightarrow \tilde{k}a = \frac{\pi}{2}$

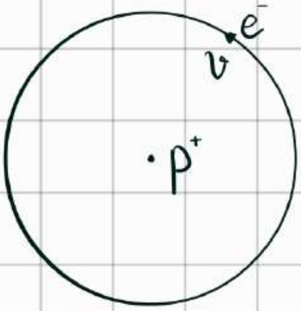
$$\tilde{k}^2a^2 = \frac{2m\tilde{U}a^2}{\hbar^2} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \tilde{U} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} = \frac{9}{2}U_0 \Rightarrow \frac{\tilde{U}}{U_0} = \frac{9}{2}$$

3.50. $\frac{U_0}{U_0'} = \frac{9}{2} = 4{,}5$, где U_0' — измененная высота ямы.

Неделя 6

Теория. Атом Бора

$$Ry = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13.6\ \text{эВ}$$



$$\begin{cases} E = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{r} \\ m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{r^2} \end{cases} \Rightarrow r_n = \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 \qquad E_n = \frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2} = \frac{Ry}{n^2}$$

$$r_Б = r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0.53\ \text{Å}$$

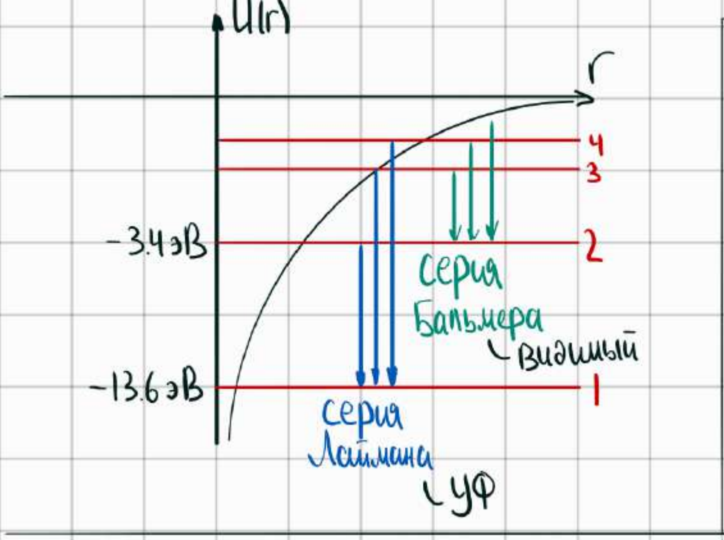
Правило квантования: $mvr = n\hbar$

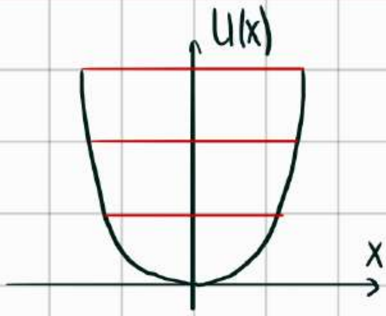
$\lambda_e = \frac{\hbar}{mc}$ - комптоновская длина волны

$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ - постоянная тонкой структуры

$$\Rightarrow r_Б = \frac{\lambda_e}{\alpha}$$

$$E_n = -\frac{mc^2}{2}\alpha^2\frac{1}{n^2}$$





$2^х$ атомная молекула

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \left(\frac{kx^2}{2} - E\right)\psi = 0$$

$$E_n^{колеб} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$E = \frac{L^2}{2I} = \frac{L^2}{2Mr^2}$$

$$\frac{\hat{L^2}}{2Mr^2}\psi = E\psi \longrightarrow E_l^{вращ} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$$

6	6 – 12 окт.	Колебательные и вращательные уровни. Водородоподобные атомы.	~~0-6-1, 0-6-2~~	~~4.32, 5.16, 5.25~~	~~4.38, 4.45, 5.50~~

0-6-1. При какой температуре средняя энергия поступательного движения молекулы O_2 равна энергии, необходимой для возбуждения ее на первый вращательный уровень? Межъядерное расстояние в молекуле равно d =1,2 Å.

1) $E_{пост} = \frac{3}{2}kT$

2) $E^{вращ}_{l=1} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) = \frac{\hbar^2}{I} = \frac{\hbar^2}{\mu d^2}$, $\mu = \frac{m_o \cdot m_o}{m_o + m_o} = \frac{1}{2} m_o = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 1.66 \cdot 10^{-24}\ г = 1.33 \cdot 10^{-23}\ г$

3) $\frac{3}{2}kT = \frac{\hbar^2}{\mu d^2} \Rightarrow T = \frac{2\hbar^2}{3k\mu d^2} = \frac{2\cdot(1.054\cdot10^{-27})^2}{3\cdot1.38\cdot10^{-16}\cdot1.33\cdot10^{-23}\cdot(1.2\cdot10^{-8})^2} \approx 2.8\ K$

0-6-2. Электрон с энергией E=12,5 эВ сталкивается с неподвижным атомом водорода, находящимся в основном состоянии. Найдите минимально возможную энергию рассеянного электрона. Энергию отдачи атома не учитывать.

1) Н атом $\Rightarrow E_n = \frac{Ry}{n^2} = \frac{13.6}{n^2}$ эВ

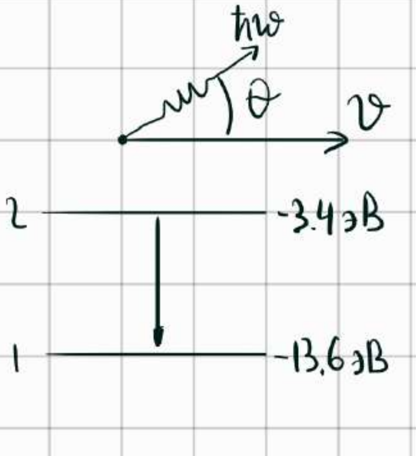
$\Delta E_n = E_1 - E_n = Ry\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = Ry \frac{n^2-1}{n^2} = \{\underset{n=2}{10.2}, \underset{n=3}{12.09}, 12.75, \ldots\}$ эВ

2) Имея 12.5 эВ можно потратить $\Delta E_3 = 12.09$ эВ на возбуждение до 3^го ур-я

$E = \Delta E_{3\to1} + \tilde{E} \Rightarrow \tilde{E} = E - \frac{8}{9}Ry = \left(12.5 - \frac{8}{9}\cdot13.6\right)$ эВ ≈ 0.41 эВ

4.32. Атом водорода, вначале находившийся в неподвижном состоянии, излучил квант света, соответствующий головной (наиболее длинноволновой) линии серии Лаймана. Определить относительное изменение частоты фотона $\Delta\nu/\nu_0$ из-за отдачи. Какую скорость приобрел атом за счет энергии отдачи?

4.32. $\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{h\nu_0}{2m_{ат}c^2} = \frac{3}{16}\frac{m_e}{m_{ат}}\alpha^2 = 5{,}44\cdot10^{-9}$; $v = \frac{3}{8}\frac{m_e}{m_{ат}}\alpha^2 c = 326$ см/с, где $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$ — постоянная тонкой структуры.



1) $\hbar\omega_0 = E_1 - E_2 = Ry\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}Ry = 10.2$ эВ

Энергия перехода $\quad \frac{3}{4}\frac{m_e c^2}{2}\alpha^2$ (см. теор)

2) ЗСЭ: $\hbar\omega_0 = \hbar\omega + \frac{1}{2}mv^2$

ЗСИ: $\vec{0} = \hbar\vec{k} + m\vec{v}$, $|k| = \frac{\omega}{c}$

3) Math: $\hbar^2 k^2 = m^2 v^2 \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\hbar^2\frac{\omega^2}{mc^2} = \hbar\Delta\omega \rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}$

$\quad\; \overset{\shortparallel}{\hbar^2\frac{\omega^2}{c^2}}$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2}\frac{1}{mc^2}\cdot\frac{3}{4}\frac{m_e c^2}{2}\alpha^2 = \frac{3}{16}\frac{m_e}{m}\alpha^2 = \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{3}{16}\frac{9.1\cdot10^{-28}}{1.66\cdot10^{-24}}\frac{1}{137^2} \approx 5.44\cdot10^{-9}$$

4) $\frac{1}{2}mv^2 = \hbar\Delta\omega \simeq \hbar\frac{\Delta\omega}{\omega}\omega_0 = \frac{3}{16}\frac{m_e}{m}\hbar\omega_0\alpha^2 = \frac{3}{16}\frac{m_e}{m}\frac{3}{4}\frac{m_e c^2}{2}\alpha^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v = \frac{3m_e}{8m}\alpha^2 c = \frac{\Delta\omega}{2\omega}c = \frac{1}{2}\cdot5.44\cdot10^{-9}\cdot3\cdot10^{10} \approx 326\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

5.25. В угарном газе CO из-за возбуждения колебаний молекул наблюдается пик поглощения инфракрасного излучения на длине волны $\lambda = 4{,}61$ мкм. Определить амплитуду A_0 нулевых колебаний молекулы CO. Оценить также температуру, при которой возбуждаются колебательные уровни с $n = 1$.

1) $\langle E\rangle = \langle T\rangle + \langle U\rangle = \langle\frac{1}{2}\mu v^2\rangle + \langle\frac{1}{2}\mu\omega^2x^2\rangle, \quad \mu = \frac{m_c m_o}{m_c+m_o} = \frac{12\cdot16}{12+16}\cdot1.66\cdot10^{-24}\,\text{г} \approx 1.138\cdot10^{-23}\,\text{г}$

$\quad\shortparallel$

$E_1 = \hbar\omega(n-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\hbar\omega$

2) $\langle x^2\rangle = \langle A_0^2\sin^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}A_0^2$

$\langle v^2\rangle = \langle A_0^2\omega^2\cos^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}A_0^2\omega^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\mu\cdot\frac{1}{2}A_0^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu\omega^2\frac{1}{2}A_0^2$

$\hbar\omega = A_0^2\mu\omega^2 \Rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}$

$$A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar\lambda}{2\pi c\mu}} = \sqrt{\frac{1.054\cdot10^{-27}\cdot4.61\cdot10^{-4}}{2\cdot3.14\cdot3\cdot10^{10}\cdot1.138\cdot10^{-23}}} \approx 4.76\cdot10^{-10}\text{ см}$$

в задачнике ошибка

3) $kT \geq E_{0\to1} = \hbar\omega$

$$T \geq \frac{\hbar\omega}{k} = \frac{2\pi\hbar c}{k\lambda} = \frac{2\cdot1.054\cdot10^{-27}\cdot3.14\cdot3\cdot10^{10}}{1.38\cdot10^{-16}\cdot4.61\cdot10^{-4}} \approx 3100\text{ K}$$

5.25. $A_0 = \sqrt{\frac{\hbar\lambda}{2\pi c\mu}} \approx 4\cdot10^{-10}$ см; $T \gtrsim 3100$ K.

5.16. Дальний инфракрасный спектр молекулы HBr, обусловленный переходами между соседними вращательными уровнями молекул, состоит из ряда линий, отстоящих друг от друга на расстояние $\Delta = 1/\lambda = 17$ см$^{-1}$. Найти расстояние между ядрами в молекуле HBr.

1) $E_l^{вращ} = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$, $I = \mu r^2$; $\mu = \frac{m_H m_{Br}}{m_H + m_{Br}} = \frac{1 \cdot 35}{1+35} \cdot 1.66 \cdot 10^{-24} \approx 1.61 \cdot 10^{-24}$ г

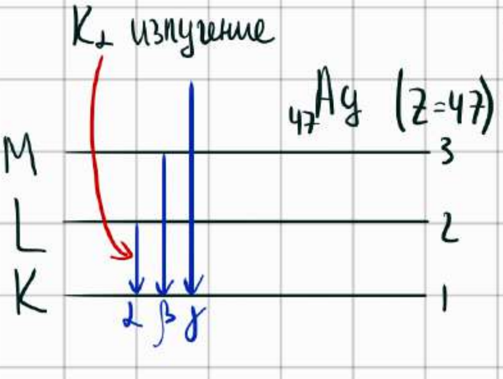
2) $\Delta E_i = \Delta E_{i+1} - \Delta E_i = \frac{\hbar^2}{2I}\left[(i+1)(i+2) - i(i+1)\right] = \frac{\hbar^2}{I}(i+1) = h\nu_{i+1 \to i} \Rightarrow$

$\Rightarrow \nu_{i+1\to i} = \frac{\hbar}{2\pi \mu r^2}(i+1) \Rightarrow \Delta\nu = \frac{\hbar}{2\pi\mu r^2}$

3) $\Delta = \frac{\Delta\nu}{c} = \frac{\hbar}{2\pi\mu c r^2} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\mu c\Delta}} = \left(\frac{1.054 \cdot 10^{-27}}{2 \cdot 3.14 \cdot 1.61 \cdot 10^{-24} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 17}\right)^{1/2} \approx 1.4 \cdot 10^{-8}$ см $= 1.4$ Å

5.16. $r = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\mu_{HBr} c\Delta}} = 1{,}4 \cdot 10^{-8}$ см, где $\mu_{HBr} \approx m_p$ — приведенная масса молекулы HBr.

4.38*. Считая, что поправка на экранирование заряда ядра электронами на K-оболочке одинакова для атомов с $Z < 50$, найти кинетическую энергию T_e фотоэлектронов, вылетающих из K-оболочки атомов $_{30}$Zn под действием K_α-излучения серебра $_{47}$Ag с энергией 21,6 кэВ.



1) Поправка: $E_n = Ry(Z-\sigma)^2 \frac{1}{n^2}$

$E = Ry(Z-\sigma)^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} Ry (Z-\sigma)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma = Z - \sqrt{\frac{4E}{3Ry}} = 47 - \sqrt{\frac{4 \cdot 21.6 \cdot 10^3}{3 \cdot 13.6}} \approx 1$

2) $E_{Zn} = \hbar\omega_{Zn} = Ry(Z-\sigma)^2 = 13.6$ эВ $\cdot 29^2 \approx 11.4$ кэВ

3) ЗСЭ: $T_e = E - E_{Zn} = (21.6 - 11.4)$ кэВ $= 10.2$ кэВ

4.38*. $T_e = 10{,}2$ кэВ.

Решение. Согласно закону Мозли энергия кванта, излученного при переходе электрона с уровня n_2 на уровень n_1 (заряд ядра Z, а σ — поправка на экранирование заряда ядра электронами K-оболочки),

$$\mathcal{E} = \hbar\omega = \mathrm{Ry}\,(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Для линии K_α $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Поскольку энергия такого кванта в спектре излучения серебра известна и равна $\mathcal{E} = 21{,}6$ кэВ, то из приведенной формулы найдем поправку σ на экранирование заряда ядра электронами на K-оболочке (в обоих случаях $Z < 50$)

$$\sigma = Z_{Ag} - \sqrt{\frac{4\mathcal{E}}{3\mathrm{Ry}}} \approx 1.$$

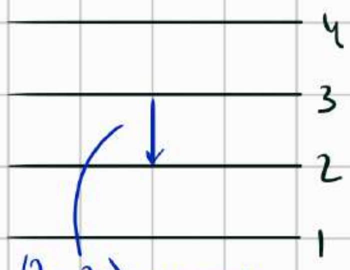
Энергия, необходимая для освобождения электрона из K-оболочки атома $_{30}$Zn (переход $n = 1$ в $n = \infty$), равна

$$(\hbar\omega)_{Zn} = \mathrm{Ry}\,(Z_{Zn} - 1)^2 = 13{,}6 \cdot 29^2 = 11{,}4 \text{ кэВ},$$

а значит, кинетическая энергия T_e вылетевшего оттуда электрона равна

$$T_e = \mathcal{E} - (\hbar\omega)_{Zn} = 21{,}6 - 11{,}4 = 10{,}2 \text{ кэВ}.$$

4.45. В атоме гелия один из электронов замещен мюоном. Оценить энергию электронного $(3p–2s)$-перехода в таком атоме.



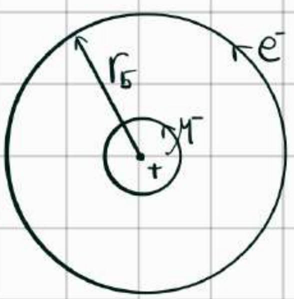
(3p-2s)-переход

0) Мюон ≈ тяжелый электрон

$$m_{\mu}c^2 \simeq 105.6\,МэВ \simeq 207\, m_e c^2$$

1) $r_n = \dfrac{\hbar^2}{me^2} n^2$ (см. теорию) – для H

Только у нас 2 электрона $\Rightarrow$ $r_\mu\Big|_{n=1} \overset{(Z=2)}{=} \dfrac{\hbar^2}{m_\mu Z e^2}\cdot\dfrac{m_e}{m_e} = r_Б \dfrac{m_e}{Z m_\mu}$ ($r_Б$)



$$r_\mu = 0.53\cdot10^{-8}\cdot\frac{0.511}{2\cdot105.6} \simeq 1.28\cdot10^{-11}\,см \ll r_Б$$

2) $\Delta E_{32} = Ry\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}\right) = \dfrac{5}{36}Ry$

можно как в решении

$$\lambda_{32} = \frac{2\pi\hbar}{\Delta E_{32}}c = \frac{2\cdot3.14\cdot1.054\cdot10^{-27}}{\frac{5}{36}\cdot13.6\cdot1.6\cdot10^{-12}}\cdot3\cdot10^{10} \simeq 656\,нм$$

4.45. Так как радиус мюонной орбиты $r_\mu = \dfrac{\hbar^2}{Ze^2m_\mu} \approx 10^{-11}$ см $\ll r_Б$ — боровского радиуса (0,53 Å), то оставшийся электрон фактически движется в поле с зарядом $Z=1$ (водородоподобный атом). Энергия перехода между уровнями $n=3$ и $n=2$ равна (это линия H_α)

$$\frac{1}{\lambda_{32}} = R_\infty\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36}R_\infty \approx 1{,}52\cdot10^4\ см^{-1};\quad \lambda_{32} = 656\ нм,$$

где $R_\infty = 109737{,}3$ см$^{-1}$.

5.50. С какой относительной точностью $\Delta\lambda/\lambda$ надо измерить длинноволновую часть вращательного спектра CO, чтобы увидеть изотопическое расщепление спектра, появляющееся при наличии примеси $^{12}C^{17}O$ в обычном $^{12}C^{16}O$? Чему равна наибольшая длина волны вращательного кванта у молекул CO? Расстояние между ядрами C и O $d=1{,}13$ Å.

0) $\mu_{чист} = \dfrac{16\cdot12}{28} = 6.857\,\dfrac{г}{моль}$

$\mu_{изот.} = \dfrac{17\cdot12}{29} = 7.034\,\dfrac{гр}{моль}$

1) $E_l^{вр} = \dfrac{\hbar^2}{2I}l(l+1) \quad\longrightarrow\quad \Delta E_l = E_{l+1} - E_l = \dfrac{\hbar^2}{2I}\left[(l+1)(l+2) - l(l+1)\right] = \dfrac{\hbar^2}{I}(l+1)$

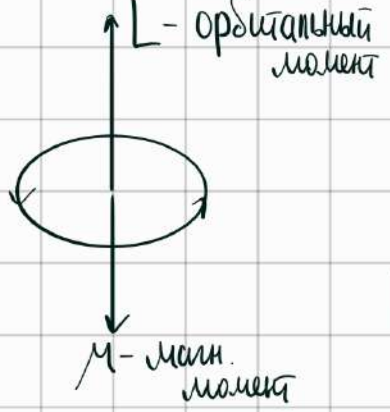
$$\lambda_{l+1\to l} = \frac{2\pi\hbar c}{\Delta E} = \frac{2\pi\hbar c}{\hbar^2/(\frac{\mu}{N_A}d^2)}\frac{1}{l+1} = \frac{2\pi c\mu d^2}{\hbar N_A}\frac{1}{l+1}$$

$$\lambda_{max} = \lambda_{1\to0} = \frac{2\pi c d^2}{\hbar N_A}\mu \;\ominus\; \Rightarrow\; \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\mu}{\mu} = \frac{7.034-6.857}{7.034} \approx 2.5\cdot10^{-2}$$

$$\ominus\;\frac{2\cdot3.14\cdot3\cdot10^{10}\,(1.13\cdot10^{-8})^2}{1.054\cdot10^{-27}\cdot6.02\cdot10^{23}}\cdot7 = 0.265\,см \;\ominus\; 2.65\,мм$$

5.50. $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{\Delta\mu}{\mu} = 2{,}5\cdot10^{-2}$, где μ — приведенная масса молекулы. Наибольшей длине волны соответствует переход из $l=1$ в $l=0$, откуда $\lambda = 2{,}65$ мм.

Неделя 7



Γ_l - гиромагн. отношение

$$\vec{\mu}_l = -g_l \frac{e}{2mc} \vec{L},$$

орбит. g-фактор, $g_l = 1$

$$L_z = m\hbar, \quad m = \underbrace{0, \pm 1, \dots, \pm l}_{2l+1}, \quad |l| < n$$

$$\vec{\mu}_{l_z} = -g_l \Gamma L_z = -g_l \mu_Б m, \qquad \mu_Б = \frac{e\hbar}{2mc} = 0.927 \cdot 10^{-20} \frac{эрг}{Гс}$$

$$|\vec{\mu}_{l_z}| = \mu_Б \sqrt{l(l+1)}$$

Спин: $\Gamma_s = \frac{e}{mc}, \quad \vec{\mu}_s = -\overset{\overset{2}{\shortparallel}}{g_s} \mu_Б \vec{S}$

$$\vec{\mu}_{s_z} = -g_s \mu_Б m_s,$$ для электрона $m_s = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \mu_{s_z} = \pm \mu_Б$

---

n	l	m_l	обозн.	кратн. вырожд.	
1	0	0	1s	1	
2	0	0	2s	1	4
	1	0, ±1	2p	3	
3	0	0	3s	1	9
	1	0, ±1	3p	3	
	2	0, ±1, ±2	3d	5	

7	13 – 19 окт.	Магнитный момент. Спин. Обменное взаимодействие.	~~0-7-1~~, 0-7-2 x3	~~6.8~~, ~~6.10~~, ~~6.15~~,	?~~6.46~~, ~~6.68~~, ~~6.78~~

0-7-1. Найти возможные значения полного спина атома водорода в основном состоянии с учетом спина ядра.

1) Основное значение $\Rightarrow n=1$

Орбитальный момент $l=\{0,1,\dots,n-1\}\overset{\text{макс. знач.}}{=}0$, $m_l=\{0,\pm1,\dots,\pm l\}\overset{\text{с прин. значение}}{=}0$

2) Спин электрона $S=\frac{1}{2} \Rightarrow m_s=\pm\frac{1}{2}$ (прин. значение)

Полный электронный момент: $J=l+S=\frac{1}{2}$

Спин протона $I=\frac{1}{2} \Rightarrow m_I=\pm\frac{1}{2}$

3) Полный момент атома: $m_F=0,\pm1$

$F=\{0,1\}$

0-7-2. Оценить энергетическое расщепление состояний, найденных в предыдущей задаче, при учете магнитного взаимодействия протона и электрона, рассматриваемых, как точечные магнитные диполи.

$\mathcal{M}_Б=\frac{e\hbar}{2m_e c}\approx 0.927\cdot10^{-20}\ \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$

$r_Б=\frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ $\qquad \alpha=\frac{e^2}{\hbar c}=\frac{1}{137}$

$\alpha^4=\frac{e^8}{\hbar^4 c^4}$

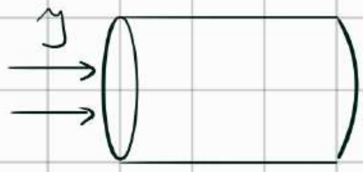
1) $W\sim\frac{\vec{\mu}_e\vec{\mu}_p}{r^3}$ – взаимодейств. магн. диполей

2) $\mu_e=-\overset{2}{g_s}\mathcal{M}_Б\overset{1/2}{S}=-\frac{1}{2}\mathcal{M}_Б=-\frac{1}{2}\frac{e\hbar}{2m_e c}$

$\mu_p=+\underset{\simeq 6 \text{ для протона}}{g_p}\mathcal{M}_Б\overset{1/2}{S}\simeq 3\,\mathcal{M}_Б^p=3\frac{e\hbar}{2m_p c}=3\left(\frac{m_p}{m_e}\right)\mathcal{M}_Б$

3) $r\sim r_Б \Rightarrow W=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\mathcal{M}_Б^2\frac{m_e}{m_p}}{r_Б^3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{m_e}{m_p}\frac{e^2\hbar^2}{4m_e^2c^2}\frac{m_e^3e^6}{\hbar^6}=\frac{3}{16}\frac{m_e^2c^2}{m_p}\alpha^4$

6.8. Пучок продольно поляризованных по спину электронов с током 100 А и кинетической энергией 100 кэВ поглощается цилиндром Фарадея. Определить силу и крутящий момент, действующие на цилиндр. Пучок электронов направлен параллельно оси цилиндра.



1) $n = \frac{J}{e}$ - $\left[\frac{\text{электр}}{\text{сек}}\right]$

$$M = n\cdot\frac{\hbar}{2} = \frac{\hbar J}{2e} = \frac{1.054\cdot10^{-27}\cdot100\cdot3\cdot10^{9}}{2\cdot4.8\cdot10^{-10}} \simeq 3.3\cdot10^{-7}\,\text{дин}\cdot\text{см}$$

2) $F = n\cdot p$

$$\cdot\ \begin{matrix} E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \\ E = mc^2 + T \end{matrix} \ \Bigg|\ \Rightarrow\ \cancel{m^2c^4} + 2mc^2T + T^2 = \cancel{m^2c^4} + p^2c^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2mc^2)} = \frac{1}{3\cdot10^{10}}\left(10^5\left(10^5 + 2\cdot0.5\cdot10^6\right)\right)^{1/2}\cdot1.6\cdot10^{-12} \simeq 1.78\cdot10^{-17}\,\text{г}\cdot\frac{\text{см}}{\text{с}}$$

$$F = \frac{J}{e}p = \frac{100\cdot3\cdot10^9}{4.8\cdot10^{-10}}\cdot1.78\cdot10^{-17} \simeq 1.12\cdot10^4\,\text{дин}$$

6.8. $F = p\frac{\mathcal{J}}{e} = 1{,}12\cdot10^4$ дин, где $p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2mc^2)} = 1{,}78\cdot10^{-17}$ г·см/с; $M = \frac{\hbar\mathcal{J}}{2e} = 3{,}3\cdot10^{-7}$ дин·см.

6.9. С какой угловой скоростью ω и в каком направлении должен начать вращаться цилиндр, подвешенный в магнитном поле B, направленном параллельно его оси вертикально вверх, если изменить направление поля на обратное? Считать, что цилиндр намагничивается до насыщения. (Момент импульса электрона в атоме равен l, число атомов в цилиндре N, момент инерции цилиндра I.)

→ **6.10.** Какое значение для ω следует ожидать в упрощенном опыте Эйнштейна–де Гааза (предыдущая задача), если длина цилиндра $L = 1$ см, его масса $m = 1$ г, цилиндр сделан из железа и если предположить, что момент импульса каждого атома равен таковому для электрона на первой боровской орбите? Спин электрона не учитывать.

1) Из приближения Бора: $L = n\hbar$, на 1й орбите $l = \hbar$

2) $\Delta l = 2\hbar$

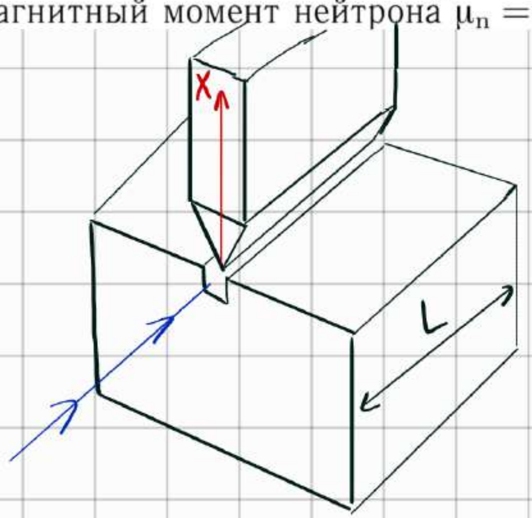
3) ЗСМИ: $I\omega = N\cdot\Delta l = 2N\hbar \Rightarrow \omega = \frac{2N\hbar}{I}$

6.10. $\omega = \frac{2N_A\hbar}{Am}L\rho = 1{,}1\cdot10^{-3}$ с$^{-1}$, где N_A — число Авогадро, A — атомная масса железа, ρ — его плотность.

4) $\begin{matrix} I = \frac{1}{2}mR^2 \\ N = \frac{m}{M}N_A \end{matrix}\ \Bigg|\ \Rightarrow$ $\omega = \frac{4mN_A\hbar}{MmR^2} = 4\frac{N_A\hbar}{MR^2}\frac{\rho\pi L}{\rho\pi L} = 4\pi N_A\frac{\rho\hbar L}{Mm} =$

$$= 4\cdot3.14\cdot6.02\cdot10^{23}\cdot\frac{7.87\cdot1.054\cdot10^{-27}\cdot1}{55.845\cdot1} \approx 1.1\cdot10^3\,\frac{1}{c}$$

6.15. Параллельный пучок нейтронов с энергией $T = 0{,}025$ эВ проходит через коллимирующую щель шириной $d = 0{,}1$ мм и затем через зазор в магните Штерна–Герлаха длиной $L = 1$ м. Оценить значение градиента поля dB/dx, при котором угол магнитного отклонения компонент пучка равен углу дифракционного уширения. Магнитный момент нейтрона $\mu_n = -9{,}66 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс.



1) Энергия магн. диполя в магн. поле:

$$U = -(\vec{\mu}, \vec{B}) \Rightarrow |\vec{F}| = \mu \frac{\partial B}{\partial x}$$

2) $$a_\perp = \frac{\mu_n}{m_n}\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{v_\perp}{\tau}, \quad \tau = \frac{L}{v_\parallel}$$

$$\frac{\mu_n}{m_n}\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{v_\perp v_\parallel}{L}$$

3) $\alpha_{дифр} = \dfrac{v_\perp}{v_\parallel}$ — по условию $\qquad \partial\lambda = C$

$$2T = m v_\parallel^2$$

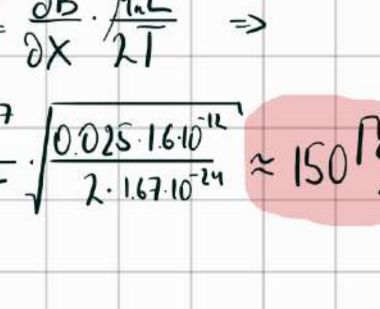
$$\alpha_{дифр} = \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{pd} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mT}\,d} = \frac{v_\perp}{v_\parallel} = \frac{L}{v_\parallel^2}\frac{\mu_n}{m_n}\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial x}\cdot\frac{\mu_n L}{2T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{4\pi\hbar E}{\sqrt{2mE}\,d\mu_n L} = \frac{4\pi\hbar}{\mu_n L d}\sqrt{\frac{E}{2m}} = \frac{4\cdot 3.14\cdot 1.054\cdot 10^{-27}}{9.66\cdot 10^{-24}\cdot 100\cdot 10^{-2}}\cdot\sqrt{\frac{0.025\cdot 1.6\cdot 10^{-12}}{2\cdot 1.67\cdot 10^{-24}}} \approx 150\ Гс/см$$

6.15. $\dfrac{dB}{dx} = \dfrac{4\pi\hbar}{\mu_n L d}\sqrt{\dfrac{T}{2m_n}} \approx 150$ Гс/см.

6.46. Оценить величину расщепления $2p$-состояния позитрония, вызванного взаимодействием спиновых магнитных моментов позитрона и электрона.

1) $W \sim \dfrac{\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2}{r^3}$ — энергия взаимодейств. магн. моментов



2) $r_n \sim n^2 r_1 = n^2 r_Б \Rightarrow r = r_2 = 4 r_Б = \dfrac{4\hbar^2}{m_e e^2}$

3) $\mu = g_s m_Б S = 2\cdot\dfrac{e\hbar}{2m_e c}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{e\hbar}{2m_e c}, \quad \vec{\mu}_1\vec{\mu}_2 = \dfrac{1}{2}\mu^2$

$$W \sim \frac{e^2\hbar^2}{2\cdot 4 m_e^2 c^2}\cdot\frac{m_e^3 e^6}{64\hbar^6} = \left|\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}\right| = \frac{m_e c^2 \alpha^4}{512} \approx \frac{9.1\cdot 10^{-28}\cdot 9\cdot 10^{20}\cdot\frac{1}{137^4}}{512} \sim 10^{-6}\ эВ$$

6.46. $\Delta\mathscr{E} \approx \dfrac{m_e c^2}{1024}\alpha^4 \approx 1{,}4\cdot 10^{-6}$ эВ.

Оценка совпала не точно

6.68*. Образование молекул водорода происходит только в том случае, если спины двух сталкивающихся атомов антипараллельны. В настоящее время предпринимаются попытки хранения атомарного водорода при низких температурах в сильных магнитных полях. Оценить степень деполяризации α атомарного водорода, определяемую отношением числа атомов с антипараллельными спинами к их полному числу, при температуре $T = 1$ К в магнитном поле $B = 10$ Тл.

6.68*. $\alpha \approx 3 \cdot 10^{-6}$.

Р е ш е н и е. В магнитном поле атомы водорода поляризуются из-за того, что проекция их магнитного момента на направление поля принимает

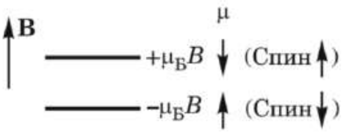


Рис. 166

два значения $\pm\mu_Б$. Как в любой двухуровневой системе, полное число атомов $N_0 = N_\uparrow + N_\downarrow$. Отношение числа атомов водорода со спином по полю $N_\uparrow$ к числу атомов со спином против поля $N_\downarrow$ (рис. 166)

$$\frac{N_\downarrow}{N_\uparrow} = \exp\left(-\frac{2\mu_Б B}{kT}\right),$$

отсюда

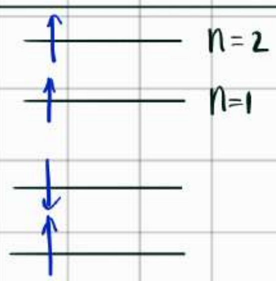
$$N_\uparrow = \frac{N}{1 + \exp\left(-\frac{2\mu_Б B}{kT}\right)}; \qquad N_\downarrow = \frac{N_0 \exp\left(-\frac{2\mu_Б B}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2\mu_Б B}{kT}\right)}.$$

Поскольку $N_\downarrow < N_\uparrow$, то число атомов с антипараллельными спинами равно $2N_\downarrow$, а их относительное число

$$\alpha = \frac{2N_\downarrow}{N_0} = \frac{2\exp\left(-\frac{2\mu_Б B}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2\mu_Б B}{kT}\right)} \approx 2\exp\left(-\frac{2\mu_Б B}{kT}\right) \approx 3 \cdot 10^{-6}.$$

6.78. Возбужденное состояние атома гелия $1s^1 2s^1$ может иметь полный спин электронной оболочки S как 1 (ортогелий), так и 0 (парагелий). Энергии полной ионизации этих состояний $W_{орто} = 59{,}2$ эВ и $W_{пара} = 58{,}4$ эВ. Кроме энергии взаимодействия с ядром, в эти энергии вносят вклад не зависящая от полного спина часть энергии кулоновского отталкивания электронов $\mathscr{E}_к$ и зависящая от полного спина часть, называемая энергией обменного взаимодействия, $V = -\frac{A}{2}(1 + 4\langle \mathbf{s}_1 \mathbf{s}_2 \rangle)$, где A — константа, s_1, s_2 — спины электронов, $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, а угловые скобки означают усреднение по направлениям спинов. Найти A и $\mathscr{E}_к$, считая, что оба электрона находятся в поле ядра с $Z = 2$, т. е. не учитывая экранировку поля ядра электронами.

ортогелий



$S = 2\frac{1}{2} = 1$

парагелий

$S = 0$

1) $\overline{(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2} = \overline{S_1^2} + \overline{S_2^2} + \overline{2\vec{S}_1\vec{S}_2} \Rightarrow \overline{2\vec{S}_1\vec{S}_2} = \underbrace{\overline{(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2}}_{S^2} - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2 =$

$= \left| S^2 = S(S+1) \right| = S(S+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = S(S+1) - 3/2$

2) $V = -\frac{A}{2}\left[1 + 2\left(S(S+1) - 3/2\right)\right] = A\left[1 - S(S+1)\right]$

$S = 0$: $V = A$ — пара-

$S = 1$: $V = -A$ — орто-

3) $E_{пара} = -W_{пара} = E + E_к + A$ | $\Rightarrow A = \frac{1}{2}(W_{орто} - W_{пара}) = 0.4$ эВ

$E_{орто} = -W_{орто} = E + E_к - A$ | $E + E_к = -\frac{1}{2}(W_{орто} + W_{пара}) = -58.8$ эВ

4) $E = -\frac{Ry Z^2}{1} - \frac{Ry \cdot Z^2}{2^n} = \left| E_n = \frac{Ry Z^2}{n^2} \right| = -13.6(4+1) = -68$ эВ

$E_к = 5Ry - \frac{1}{2}(W_{орт} + W_{пара}) \simeq 9.2$ эВ

6.78. $A = 0{,}4$ эВ; $\mathscr{E}_к = 9{,}2$ эВ.

Заметим, что энергия возбужденного состояния атома гелия $\mathscr{E}_{пара} = -W_{пара} = \mathscr{E} + \mathscr{E}_к + A$, а $\mathscr{E}_{орто} = -W_{орто} = \mathscr{E} + \mathscr{E}_к - A$, так как энергия обменного взаимодействия

$$V = -A\big(S(S+1) - 1\big) = \begin{cases} -A & \text{для ортогелия}, \\ +A & \text{для парагелия}, \end{cases}$$

а энергия электронной конфигурации $1s^1 2s^1$ в данном приближении $\mathscr{E} = -68$ эВ.