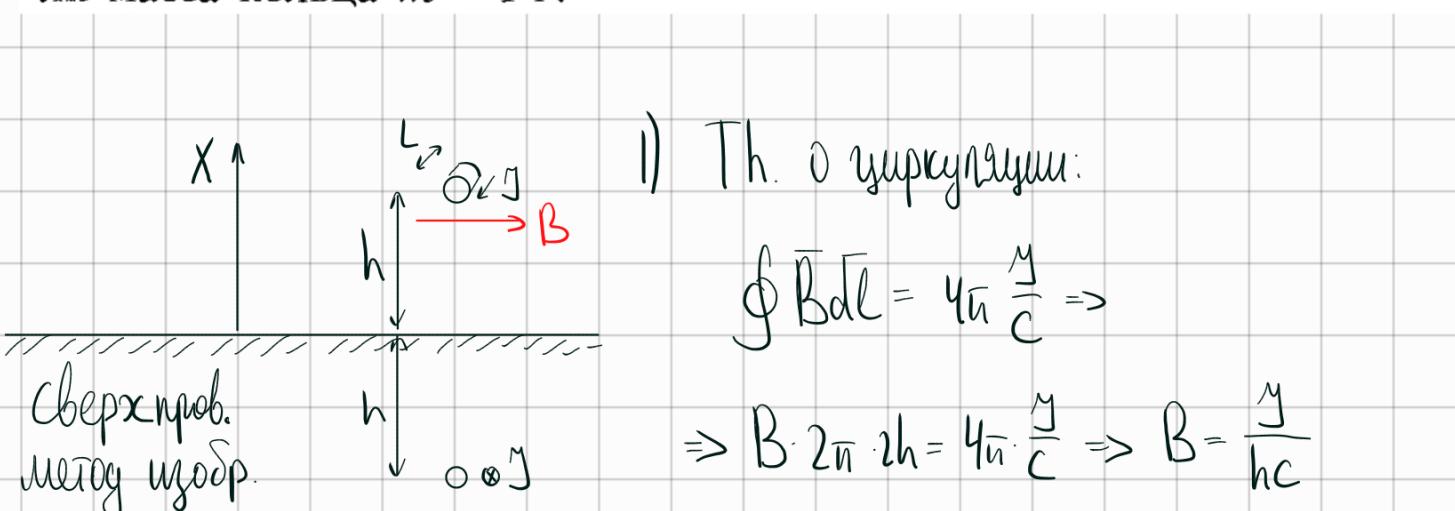


20–26 окт.	8	Сверхпроводники в магнитном поле. Эффект Холла. Движение заряженных частиц.	6.35 X 8.9 X 8.1 X ?	6.23 X 6.37 X 8.30 X 8.69 X	7.83 X 8.34 X T10 X T11 X ?
---------------	---	---	----------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

6.35. Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода на изолирующем слое толщиной $h = 5 \text{ мм}$ лежит тонкое сверхпроводящее кольцо радиусом $R = 10 \text{ см}$, по которому течет постоянный ток \mathcal{I} . При каком токе \mathcal{I} кольцо начнет парить над сверхпроводником, если масса кольца $m = 1 \text{ г}$?



1) Th. о циркуляции:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 4\pi \frac{M}{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi \cdot 2h = 4\pi \frac{M}{C} \Rightarrow B = \frac{M}{hC}$$

2) Сила Ампера: $d\vec{F}_A = \frac{M}{C} d\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow F_A = B \frac{M}{C} 2\pi R$

3) $F_A = mg \Rightarrow \left(\frac{M}{C}\right) \frac{2\pi R}{h} = mg \Rightarrow M \geq C \sqrt{\frac{mgh}{2\pi R}} =$

$$= 3 \cdot 10^{10} \sqrt{\frac{1 \cdot 1000 \cdot 0,5}{2 \cdot 3,14 \cdot 10}} \approx 8,4 \cdot 10^{10} \text{ ед. СГСЭ}$$

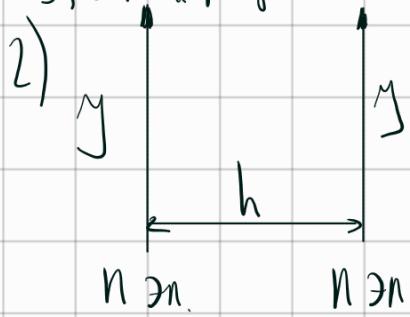
6.35. $\mathcal{I} \geq c \sqrt{\frac{mgh}{2\pi R}} = 8,4 \cdot 10^{10} \text{ ед. СГСЭ} = 25 \text{ А.}$ ✓

8.9. Найти отношение силы кулоновского расталкивания к силе притяжения Ампера двух параллельных пучков электронов, прошедших ускоряющий потенциал $V = 10$ кВ.

Рис. 129

$$1) 3(3): |e|V = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-2}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3}} \approx 5,9 \cdot 10^9 \frac{cm}{s} \approx 0,2 C$$

$J, L, S_{\text{пучок}}$



$$\text{Th. Раяса: } E_{\text{зар}} \cdot L = q_{\bar{n}} \cdot q_{\bar{z}} \Rightarrow E = \frac{q_{\bar{z}}}{hL}$$

$$3) \text{ Введен плотность заряда } \rho_e = \frac{q_{\bar{z}}}{SL}$$

$$F_k = q_{\bar{z}} E = \frac{2q_{\bar{z}}^2}{hL} = \frac{2\rho_e^2 S^2 L}{h}$$

$$4) \text{ Th. Чиркун: } B \cdot 2\bar{n}h = q_{\bar{n}} \frac{J}{C} \Rightarrow B = \frac{2J}{hc}$$

$$5) J = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho_e S dx}{dt} = \rho_e S v$$

$$6) F_A = \int_C \vec{J} d\vec{x} \times \vec{B} = \frac{\rho_e S v}{C} \cdot L \cdot \frac{2\rho_e S v}{hc} = \frac{2\rho_e^2 S^2 L}{hc^2}$$

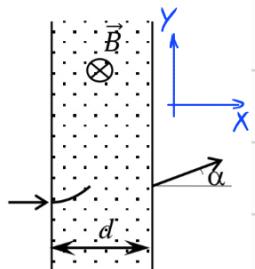
$$7) \lambda = \frac{F_k}{F_A} = \frac{C^2}{V^2} = \frac{MC^2}{2eV} \approx \frac{1}{0,04} = 25$$

$$8.9. \frac{F_k}{F_A} = \left(\frac{c}{v}\right)^2 = \frac{c^2 m}{2eV} \approx 25,6. \checkmark$$

Семинар 8

8.1. Протон влетает в область поперечного магнитного поля $B = 5 \text{ Тл}$ со скоростью $v = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$. Толщина области, занятой полем, $d = 50 \text{ см}$ (см. рис.). Найти угол отклонения протона α от первоначального направления движения. Излучением пренебречь.

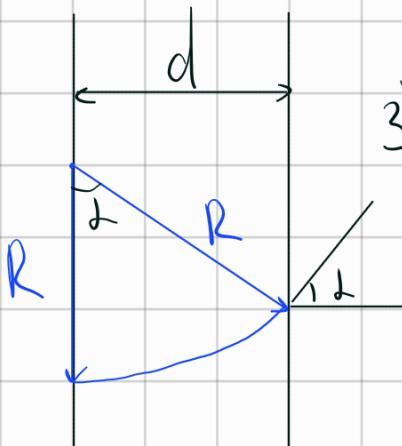
Ответ: $\alpha \approx \arcsin \frac{3}{5} \approx 37^\circ$.



$$1) \vec{F}_{\text{нор}} = q \left[\frac{\vec{v}}{c}; \vec{B} \right] \Rightarrow F_{\text{нор}} = q B \frac{v}{c}$$

2) Под действием $F_{\text{нор}}$ протон имеет движение по окружн., $|v| = \text{const}$

$$m \frac{v^2}{R} = q B \frac{v}{c} \Rightarrow R = \frac{mc}{qB}$$

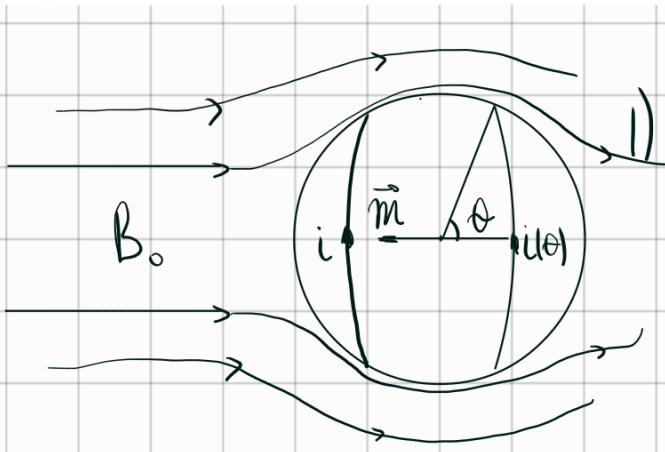


$$3) R \sin \alpha = d \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{d}{R} = \arcsin \frac{dqB}{mc} =$$

$$= \arcsin \frac{50 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^4}{1,67 \cdot 10^{-17} \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^8} = \arcsin \frac{500}{501} \approx \frac{\pi}{2}$$

Не сошлось

6.23* Шар радиусом R из сверхпроводника I рода внесен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией B_0 . Определить магнитное поле B вне шара, если поле B_0 еще не разрушает сверхпроводимость в шаре. Найти также поверхность плотность сверхпроводящего тока i .



Иногда такую же задачу
из ЭЛ. шар можно представить
диполем \vec{m}

$$B_u = \frac{3(\vec{m}, \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$$

2) Пграничное условие: $\partial B_n = 0$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 + \frac{3(\vec{m}, \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$$

$$B_n(R) = B_0 \cos \theta + \frac{2m \cos \theta}{R^3} = 0 \Rightarrow \vec{m} = -\frac{\vec{B}_0 R^3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) - \frac{3R^3 (\vec{B}_0, \vec{r}) \cdot \vec{r}}{2r^5}$$

3) Пграничное условие $nH_t = 4\pi \frac{i}{c} (= \partial B_t)$

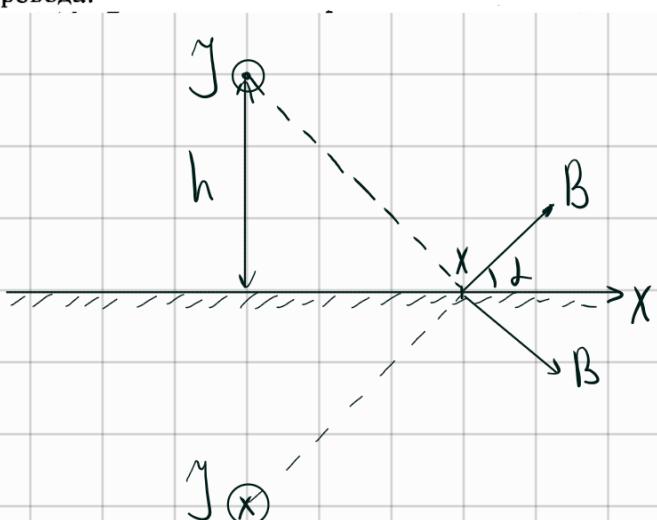
$$H_t(R) = B_0 \left(1 + \frac{R^3}{2R^3}\right) \sin \theta = 4\pi \frac{i}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i(\theta) = \frac{3c}{8\pi} B_0 \sin \theta$$

$$6.23^*: \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) - \frac{3R^3 (\mathbf{B}_0 r)}{2r^5} \mathbf{r};$$

$$i(\theta) = \frac{3c}{8\pi} B_0 \sin \theta.$$

6.37. Найти распределение поверхностных токов i для плоской поверхности сверхпроводника, если на расстоянии $h = 1$ см от нее расположен прямолинейный достаточно длинный параллельный плоскости сверхпроводника тонкий провод, по которому течет ток $I = 10$ А. Найти также силу f , действующую на единицу длины провода.



$$1) F = B \frac{y}{c} L \Rightarrow f = B \frac{y}{c}$$

$$\cdot B = \frac{2y}{c \cdot 2h} = \frac{y}{ch} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{y^2}{c^2 h} = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 10^9)^2}{(3 \cdot 10^9)^2 \cdot 1} = 1 \text{ дин}$$

$$2) \partial B_t = 4\pi \frac{i}{c}$$

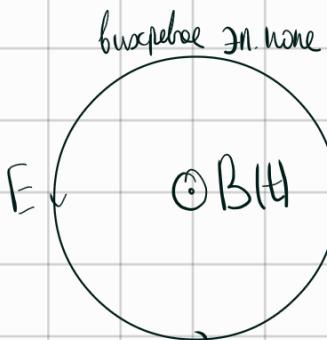
$$\partial B_t = 2B \sin \angle = 2 \cdot \frac{2y}{c \sqrt{x^2 + h^2}} \cdot \frac{h}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{4yh}{c(x^2 + h^2)} \Rightarrow$$

$$6.37. i(x) = \frac{Ih}{\pi(h^2 + x^2)} \text{ (см. рис. 402),}$$

$$f = \frac{I^2}{c^2 h} = 1 \text{ дин/см.}$$

$$i(x) = \frac{yh}{\pi(x^2 + h^2)}$$

8.30. В ускорителе электронов бетатроне роль ускоряющего напряжения играет ЭДС индукции, возбуждаемая изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электронов. Электроны движутся при этом по орбитам приблизительно постоянного радиуса. Считая радиус орбиты электрона неизменным, определить необходимое для этого в данный момент времени соотношение между средним магнитным полем $\bar{B}(t)$, пронизывающим орбиту электрона, и магнитным полем на орбите электрона $B(t)$. Магнитное поле параллельно оси симметрии вакуумной камеры бетатрона.



1) Ур-е Максвелла: $\oint (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$, $\Phi = \bar{B}S$

$$E \cdot 2\pi R = \frac{1}{c} \left| \frac{d\bar{B}}{dt} \right| \pi R^2 \Rightarrow E = \frac{R}{2c} \left| \frac{d\bar{B}}{dt} \right|$$

2) $\vec{F}_n = e \left(\vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c}, \vec{B} \right] \right)$

$$\tau: m \frac{d|\vec{v}|}{dt} = eE = \frac{eR}{2c} \left| \frac{d\bar{B}}{dt} \right| \quad (1)$$

$$n: m \frac{\vec{v}}{R} = e \frac{\vec{v}}{c} B \Rightarrow R = \frac{mcv}{eB} = \text{const} \quad (2)$$

$$R' = \frac{mc}{eB} \frac{d|\vec{v}|}{dt} - \frac{mcv}{e} \frac{1}{B^2} \frac{dB}{dt} = 0 \quad (3)$$

3) (1) & (2): $\frac{eR}{2c} \frac{dB}{dt} = \frac{mcv}{B} dB$

(3) ||

$$\frac{e mc v}{2c e B} dB = \frac{mcv}{B} dB \Rightarrow \frac{dB}{2} = dB \Rightarrow$$

8.30. $B(t) = \frac{\bar{B}(t)}{2}$.

$B_s = \frac{\bar{B}}{2}$

ится между внутренней и наружной поверхностями трубы. Число свободных электронов в единице объема металла — n .

8.69. В простейшей схеме магнитного гидродинамического генератора плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d помещен в поток проводящей жидкости с проводимостью λ (рис. 151), двигающейся с постоянной скоростью v параллельно пластинам. Система находится в магнитном поле с индукцией B , направленной перпендикулярно плоскости рисунка. Какая мощность N выделяется во внешней цепи, имеющей сопротивление R ?

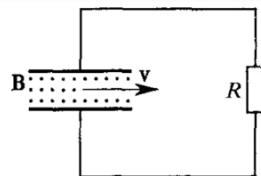


Рис. 151

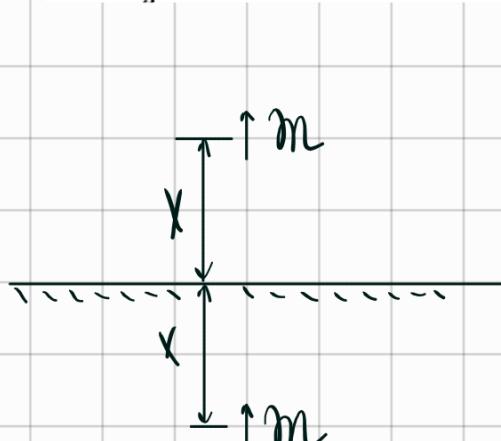
$$1) \quad \mathcal{E}_i = B \frac{v}{c} d \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}_i}{R + R_m}$$

$$2) \quad R_m = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{S}$$

$$3) \quad N = IR = \left(\frac{B \frac{v}{c} d}{R + \frac{d}{\lambda S}} \right)^2 R$$

$$8.69. \quad N = \left[\frac{Bvd}{c \left(\frac{d}{\lambda S} + R \right)} \right]^2 R$$

7.83. На какой высоте h постоянный магнитик с магнитным моментом $\vec{m} = 10^3 \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$ и массой $m = 10 \text{ г}$ будет парить в горизонтальном положении над плоской горизонтальной поверхностью сверхпроводника I рода? Магнитик считать точечным диполем.



$$1) \quad \vec{B} = \frac{2\vec{m}}{r^3} = \frac{\vec{m}}{r^3}$$

$$2) \quad \vec{F} = (\vec{m}; \vec{v}) \vec{B} \Rightarrow |F| = m \frac{\partial B}{\partial x}$$

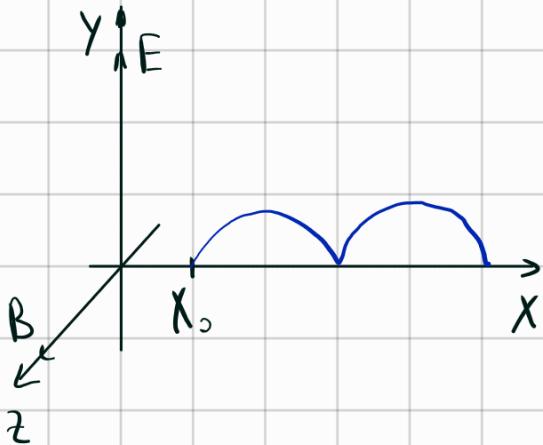
$$F = m^2 \frac{3}{r^4} =$$

$$3) \quad mg = 3 \frac{m^2}{(2h)^4} \Rightarrow h = \frac{1}{2} \left(\frac{3m^2}{mg} \right)^{1/4} = \frac{1}{2} \left(\frac{3 \cdot 10^6}{10 \cdot 1000} \right)^{1/4} \approx 2,1 \text{ см}$$

$$7.83. \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{3m^2}{mg} \right)^{1/4} \approx 2,1 \text{ см.}$$

8.34. В скрещенных однородных полях E и B ($E \perp B$) из некоторой точки x_0 разлетаются электроны с одинаковыми скоростями $v \ll c$, лежащими в плоскости Oxy (рис. 139). Считая $E \ll B$ (СГСЭ) и пренебрегая взаимодействием электронов друг с другом, найти, на каком расстоянии l и через какое время T они снова собираются в одну точку. Изобразить (качественно) траекторию частицы, если известно, что в начальный момент она покоялась в точке x_0 ?

Указание. Перейти в систему отсчета, в которой электрическое поле равно нулю.



$$II) \frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \left[\frac{\vec{v}}{c}; \vec{B} \right])$$

$$\begin{cases} m \ddot{v}_y = eE + e \frac{v_x}{c} B \\ m \ddot{v}_x = e \frac{v_y}{c} B \end{cases}$$

2) $v_x^* \rightarrow v_x - V, \text{ где } V = c \frac{E}{B}, \text{ тогда}$
 $v_y^* \rightarrow v_y.$

$$\begin{cases} m \ddot{v}_y^* = e \frac{v_x^*}{c} B \\ m \ddot{v}_x^* = e \frac{v_y^*}{c} B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{v}_y^* = \frac{eB}{mc} v_x^* = \omega v_x^* \\ \ddot{v}_x^* = \frac{eB}{mc} v_y^* = \omega v_y^* \end{cases}$$

$$\ddot{v}_y^* + \omega v_y^* = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_y = v_{y_0} \cos(\omega t + \varphi) + c \frac{E}{B} \\ v_x = v_{x_0} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

3) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi mc}{eB}$

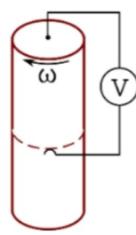
$$l = VT = \frac{2\pi mc}{eB} \cdot \frac{cE}{B} = \frac{2\pi mc^2 E}{eB^2}$$

$$8.34. T = \frac{2\pi m_e c}{eB}; \quad l = \frac{2\pi m_e c^2 E}{eB^2}. \quad Тра-$$

ектория частицы совпадает с траекторией точки колеса (циклоида) радиусом $R = \frac{m_e c^2 E}{eB^2}$, катящегося без проскальзывания вдоль оси x (рис. 406).

T10. (2020-4A) Длинный однородный металлический цилиндр радиусом $r = 30$ см несёт на себе некоторый заряд, так что статическая напряжённость поля на его боковой поверхности равна $E_0 = 30$ кВ/см. Цилиндр подключили к идеальному вольтметру как показано на рис.: одним контактом к оси, а другим скользящим контактом — к боковой поверхности в середине цилиндра. Какую разность потенциалов $\Delta\varphi$ покажет вольтметр при вращении цилиндра вокруг оси с угловой скоростью $\omega = 10^3$ рад/с? Центробежные эффекты не учитывать.

Ответ: $\Delta\varphi = 0,45$ мкВ.



Неподв.

Бегают заряды

$$1) E_0 = \frac{q}{4\pi r} \Rightarrow \sigma = \frac{E_0}{4\pi}$$

$$2) \text{Заряд сеч.}: dq = \sigma \cdot 2\pi r = \frac{E_0 r}{2}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E_0 r}{2} \cdot \frac{\omega}{2\pi} = \frac{E_0 \omega r}{4\pi}$$

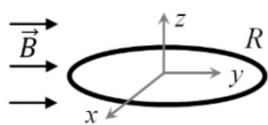
$$3) B = \frac{\mu_0}{c} i = E_0 \frac{\omega r}{c}$$

$$4) \text{Для зарядов внутри: } eE = e \frac{v}{c} B \Rightarrow E(x) = B \frac{wx}{c} = E_0 \frac{\omega^2 r}{c} x$$

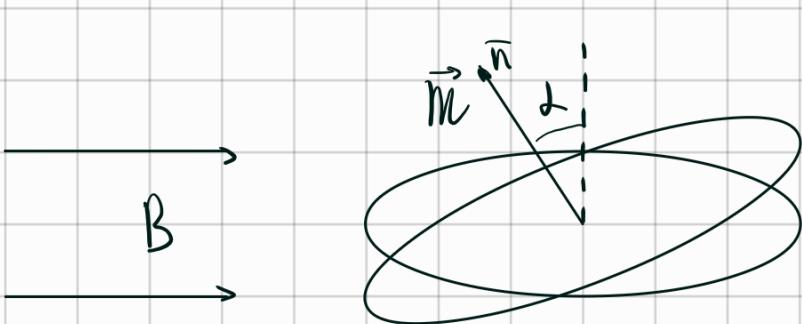
$$5) \Delta\varphi = \int_0^r E(x) dx = E_0 \frac{\omega^2 r}{c} \frac{r^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta\varphi = \frac{E_0 \omega^2 r^3}{2c} = 0,45 \text{ мкВ}$$

T11. (2016-2A) В однородном магнитном поле \vec{B} , направленном вдоль оси y , находится сверхпроводящее кольцо, лежащее в плоскости xy . Масса кольца M , коэффициент самоиндукции L , радиус R . Найти период малых колебаний кольца при вращении вокруг оси x . Начало координат совпадает с центром кольца.



Ответ: $T = \sqrt{2LM}/(RB)$.



$$1) \text{ Сверхпр.} \Rightarrow \Phi = \text{const}$$

$$\Phi \equiv 0$$

$$2) \Phi = BS \sin \varphi - L \dot{\varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi}(t) = \frac{BS}{L} \sin \varphi$$

$$3) M = \frac{M}{C} S = \frac{M}{C} \pi R^2 = \frac{B}{LC} \pi^2 R^4 \sin^2 \varphi$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \Rightarrow M = m B \cos \varphi = \frac{B^2}{LC} \pi^2 R^4 \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

$$MR^2 \ddot{\varphi} + \frac{B^2 \pi^2 R^4}{LC} \sin(2\varphi) = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{\pi^2 B^2 R^2}{LM C} \varphi = 0$$

ω^2

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\sqrt{LM}}{BR}$$

Не сошлось

9.4	X	9.8	X	9.27	X
10.1	X	9.15	X	9.36	X
9.33	X	9.48	X	9.54	X
9.34	X	T12	X		

9.4. Из конденсатора быстро извлекают пластины с диэлектрической проницаемостью ϵ так, что емкость скачкообразно изменяется до значения C (рис. 160). Найти зависимость тока в цепи от времени и нарисовать график $\mathcal{I}(t)$. Диэлектрик заполняет весь объем конденсатора.

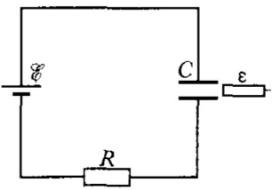


Рис. 160

1) Заряд мгновенно не меняется \Rightarrow

$$q = C_1 U_1 = C U_1$$

$$\begin{aligned} \cdot C_1 &= \epsilon C \quad | \Rightarrow U_1 = \epsilon \mathcal{E} \\ \cdot U_1 &= \frac{\mathcal{E}}{\epsilon} \end{aligned}$$

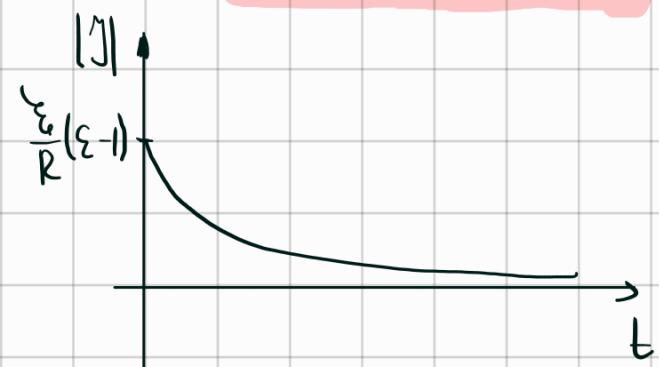
2) $\mathcal{E}_e = \frac{q}{C} + \dot{q} R$

$$\dot{q} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} \Rightarrow \int_0^t \frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln \frac{q(t) - \mathcal{E}C}{\mathcal{E}C(\epsilon - 1)} = - \frac{t}{\tau_{RC}} \Rightarrow$$

$$q(t) = \mathcal{E}C + \mathcal{E}C(\epsilon - 1)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

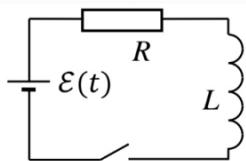
$$\mathcal{I}(t) = - \frac{\mathcal{E}}{R} (\epsilon - 1) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

9.4. $\mathcal{I}(t) = (\epsilon - 1) \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/(RC)}$.



10.1. Найти зависимость тока в цепи $I(t)$ от времени в схеме на рис., если после замыкания ключа в момент $t = 0$ напряжение источника меняется по закону $\mathcal{E}(t) = At$. Рассмотреть случай $t \ll L/R$.

Ответ: $I(t) \approx \frac{At^2}{2L}$.



$$I) \quad \dot{\mathcal{E}}(t) = L \ddot{I} + I R = At$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} I = \frac{A}{L} t \Rightarrow I(t) = -\frac{A}{L} \frac{L^2}{R^2} + \frac{A}{L} \frac{L}{R} t + C e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$I(t) = -\frac{AL}{R^2} + \frac{A}{R} t + C e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$-\frac{R}{L} t \ll 1 \quad I(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{AL}{R^2}$$

$$I(t) = \frac{AL}{R^2} \left(e^{-\frac{R}{L} t} - 1 \right) + \frac{A}{R} t \approx \frac{AL}{R^2} \frac{1}{2} \frac{R^2}{L^2} t^2 = \frac{1}{2} \frac{At^2}{L}$$

9.33. С помощью осциллографа наблюдают свободные затухающие колебания в колебательном контуре. Как изменится число колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда затухает в e раз, если в два раза уменьшить индуктивность контура L и в два раза увеличить его емкость C , сохранив неизменным активное сопротивление?

$$II) \quad 0 = L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{q}{C} \Rightarrow \underbrace{\dot{q} + \frac{R}{L} \dot{q}}_{2\delta} + \underbrace{\frac{1}{LC} q}_{\omega_0^2} = 0$$

Известно решение: $q(t) = q_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0) = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

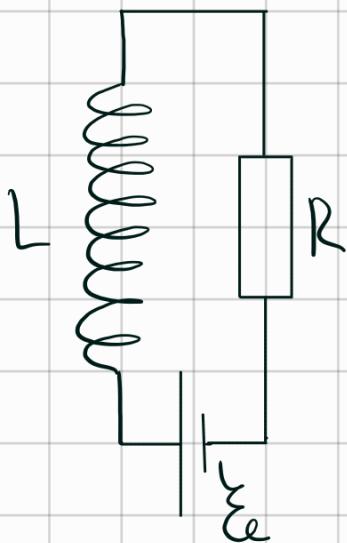
$$\delta \ll \omega_0 \Rightarrow \omega \approx \omega_0;$$

$$2) \quad \omega_{\text{старт}} = \omega_{\text{старт}}; \quad \delta_{\text{старт}} = \frac{1}{2} \delta_{\text{старт}} \Rightarrow \text{б 2 раза быстрее затух.} \Rightarrow$$

\Rightarrow Ставо б 2 раза меньше

$$9.33. N_2 = \frac{N_1}{2}.$$

9.8. Последовательно соединенные дроссель L и омическое сопротивление присоединены к источнику постоянного тока с ЭДС \mathcal{E} . Полное омическое сопротивление цепи равно R . Индуктивность дросселя, когда в него вставлен железный сердечник, равна L_1 . Индуктивность того же дросселя без железного сердечника L_2 . Вначале сердечник был вставлен. В момент времени $t = 0$, когда ток в цепи уже установился, очень быстро вынимают железный сердечник (в течение времени, пренебрежимо малого по сравнению с временем установления тока). Определить силу тока \mathcal{I} в цепи в зависимости от времени t для $t > 0$.



1) Поток магнитно не меняется:

$$L_1 I_1 = L_1 \frac{\mathcal{E}}{R} = L_2 I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{L_1}{L_2} \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$2) \mathcal{E} = L \dot{I} + R I \mid : L$$

$$\dot{I} + \frac{R}{L_1} I = \frac{\mathcal{E}}{L_2}$$

Общ. реш.: $I = C e^{-\frac{t}{\tau}}, \tau = \frac{L_2}{R}$

Частн. реш.: $I = \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} + C e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R} + C = \frac{L_1}{L_2} \frac{\mathcal{E}}{R} \Rightarrow \frac{L_1 - L_2}{L_2} \frac{\mathcal{E}}{R} = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R} + \frac{L_1 - L_2}{L_2} \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}, \tau = \frac{L_2}{R}$$

9.8. $\mathcal{I}(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 + \frac{L_1 - L_2}{L_2} e^{-t/\tau} \right)$, где $\tau = \frac{L_2}{R}$.

9.15. Цель, состоящая из последовательно соединенных сопротивления R и большой индуктивности L , присоединена к источнику постоянного тока, поддерживающему на зажимах постоянное напряжение V_0 . Для ограничения перенапряжений во время отключения источника параллельно с цепью включен конденсатор емкостью C (рис. 165). Определить напряжение на конденсаторе $V(t)$ после отключения источника постоянного напряжения. Параметры контура удовлетворяют условию $4L > CR^2$.

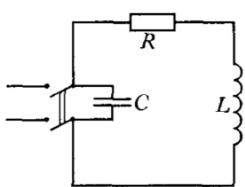


Рис. 165

1) До откл.: $q_c = CV_0$

$$I_i = \frac{V_0}{R}$$

2) После: $L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \Sigma$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$q(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t) + B e^{-\delta t} \sin(\omega t)$$

$q(0) = A = q_0 = CV_0$

$$\dot{q}(t) = -\delta A e^{-\delta t} \cos(\omega t) - A e^{-\delta t} \omega \sin(\omega t) + -\delta B e^{-\delta t} \sin(\omega t) + B e^{-\delta t} \omega \cos(\omega t)$$

$\dot{q}(0) = B\omega - CV_0 \Rightarrow B = \frac{V_0}{\omega} \left(C\delta + \frac{1}{R} \right)$

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = V_0 e^{-\delta t} \left[\cos(\omega t) + \left(\frac{\delta}{\omega} + \frac{1}{\omega R C} \right) \sin(\omega t) \right]$$

9.15. $V(t) = V_0 e^{-\delta t} \left[\cos \omega t + \left(\frac{1}{\omega R C} - \frac{\delta}{\omega} \right) \sin \omega t \right]$, где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $\delta = \frac{R}{2L}$; $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$.

9.48: По двум вертикальным идеальными проводам (см. предыдущую задачу) в поле силы тяжести может скользить без трения идеальная проводящая перемычка массой m и длиной l (рис. 182). Проводники сверху замкнуты индуктивностью L , а снизу — сопротивлением R . Перемычка сначала удерживается в некотором положении, а затем отпускается без толчка. Найти новое положение равновесия перемычки и характер переходного процесса.

Решение 6 СИ

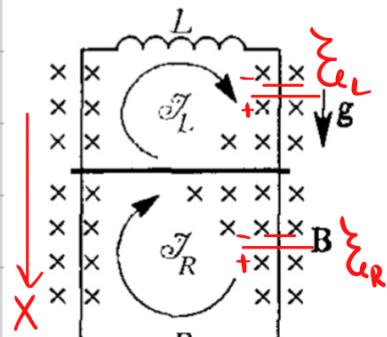


Рис. 182

$$1) |\sum \mathcal{E}| = |\mathcal{E}_L| = Bvl$$

$$2) 23H: m\ddot{x} = mg - B(I_R - I_L)l$$

$$3) -\mathcal{E}_L = L\dot{I}_L = -B\dot{x}l \Rightarrow L\dot{I}_L = -B\dot{x}l$$

$$\mathcal{E}_R = R\dot{I}_R = B\dot{x}l$$

$$4) \ddot{x} + \underbrace{\frac{(Bl)^2}{mR}\dot{x}}_{2\delta} + \underbrace{\frac{(Bl)^2}{ML}x}_{\omega^2} = g$$

Общее решение: $x = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t) + Be^{-\delta t} \sin(\omega t) + C$, где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

5) $t \rightarrow \infty$: $x = C$. Найдем конечное положение:

$$mg = BI_L l \Rightarrow I_L = \frac{mg}{Bl}$$

$$L \frac{dI_L}{dt} = B \frac{dx}{dt} l \Rightarrow LI_L' = Bx.l \Rightarrow I_L' = \frac{Bx.l}{L} = \frac{mg}{Bl} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{mgl}{(Bl)^2} = C$$

$$6) x(0) = 0 \Rightarrow 0 = A + C \Rightarrow A = -\frac{mgl}{(Bl)^2}$$

$$\dot{x} = -\delta A e^{-\delta t} \cos(\omega t) - A w e^{-\delta t} \sin(\omega t) - \\ - \delta B e^{-\delta t} \sin(\omega t) + B w e^{-\delta t} \cos(\omega t)$$

$$v(0)=0 \quad 0 = -A\delta + Bw \Rightarrow A\delta = Bw \Rightarrow B = A \frac{\delta}{w}$$

? $x = -\frac{mgl}{(Bl)^2} e^{-\delta t} \cos(\omega t) - \frac{mgl}{(Bl)^2} \frac{\delta}{w} e^{-\delta t} \sin(\omega t) + \frac{mgl}{(Bl)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{mgl}{(Bl)^2} \left[1 - e^{-\delta t} \cos(\omega t) - \frac{\delta}{w} e^{-\delta t} \sin(\omega t) \right]$$

Если затухание мало ($\delta \ll \omega$), то $\omega \approx \omega_0$, $\frac{\delta}{w} \approx 0$, тогда

$$x = \frac{mgl}{(Bl)^2} \left[1 - e^{-\delta t} \cos(\omega_0 t) \right]$$

$$x(t) = \frac{mgl}{(Bl)^2} (1 - e^{-\delta t} \cos \omega t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{mgl}{(Bl)^2}; \quad \delta = \frac{(Bl)^2}{mR}; \quad \omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}$$

9.34. Катушка колебательного контура (рис. 175) помещена в постоянное магнитное поле, создающее в ней постоянный магнитный поток Φ_0 . В момент времени $t = 0$ магнитное поле выключается. Время выключения пренебрежимо мало по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти ток \mathcal{I} в контуре в зависимости от времени после выключения поля.



Рис. 175

1) Поток через катушку мгновенно не меняется

$$\Phi_0 = \mathcal{I}_0 L \Rightarrow \mathcal{I}_0 = \frac{\Phi_0}{L}$$

2) $L \ddot{\mathcal{I}} + \frac{1}{C} \mathcal{I} = 0 \Rightarrow \ddot{\mathcal{I}} + \underbrace{\frac{1}{CL}}_{\omega^2} \mathcal{I} = 0 \Rightarrow \mathcal{I} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

3) $\mathcal{I}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$$\dot{q} = B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{q}(0) = \frac{\Phi_0}{L} = B \omega_0 \Rightarrow B = \frac{\Phi_0}{L \omega_0} \Rightarrow q(t) = \frac{\Phi_0}{L \omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

$$y(t) = \frac{\Phi_0}{L} \cos(\omega_0 t)$$

9.34. $\mathcal{I} = \frac{\Phi_0}{L} \cos \omega_0 t$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

9.27. В схеме, изображенной на рис. 170, в некоторый момент времени замыкают ключ K , и конденсатор C , имеющий первоначальный заряд q_0 , начинает разряжаться через индуктивность L . Когда ток разряда достигает максимального значения, ключ K вновь размыкают. Какой заряд протечет через сопротивление R ? Сопротивление диода D в схеме в прямом направлении много меньше R , в обратном — бесконечно велико.

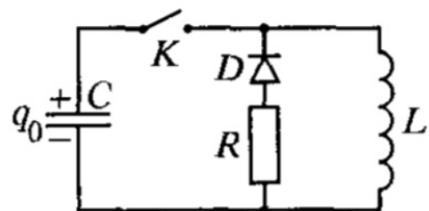


Рис. 170

1) После размыкания K : (аналог 9.34)

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$q = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\begin{aligned} \cdot q(0) = q_0 &\Rightarrow A = q_0 & q = q_0 \cos(\omega_0 t) \\ \cdot \dot{q}(0) = 0 &\Rightarrow B = 0 & \Rightarrow \\ && \dot{q} = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) & \Rightarrow y(t) = q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \\ && q(t_{max}) = 0 & \end{aligned}$$

2) После размыкания K :

$$L \ddot{y} + R y = 0 \quad | \cdot dt \Rightarrow L dy/dt = -R dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q = \frac{L}{R} y_{max} = \frac{L}{R} \cdot q_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow q = \frac{q_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

9.27. $q = \frac{q_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

9.36. Конденсатор $C = 0,1 \text{ мкФ}$, заряженный до напряжения ЭДС $\mathcal{E} = 1 \text{ кВ}$, в момент $t = 0$ замыкается на катушку индуктивностью $L = 100 \text{ мГ}$ и сопротивление, равное критическому для образовавшегося контура (рис. 176). Определить время, за которое ток достигнет максимального значения, и вычислить это значение тока.

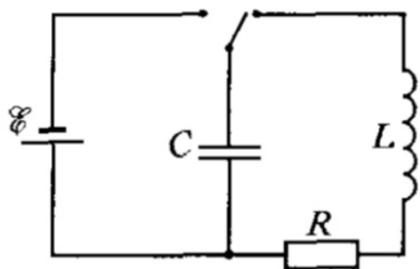


Рис. 176



$$q_0 = C \sum = 0,1 \text{ мкФ} \cdot 1 \text{ кВ} = 10^{-4} \text{ К}$$

2) RLC - колеб. контур

$$\ddot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$\underbrace{\frac{R}{L}}_{2\delta}$ $\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}$

$$3) R = R_{kp} \Leftrightarrow \omega_0 = \delta$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R_{kp}}{2L} \Rightarrow R = R_{kp} = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \Omega$$

$$4) \ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad \text{НО } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 0$$

граничка апериодического процесса, тогда

$$q \neq A \sin(\omega t) e^{-\delta t} + B \cos(\omega t) e^{-\delta t},$$

$$q = (At + B) e^{-\delta t}$$



$$5) \cdot q(0) = q_0 \Rightarrow B = q_0$$

$$\Rightarrow q(t) = q_0 (\omega_0 t + 1) e^{-\omega_0 t}$$

$$\cdot \dot{q}(t) = -\delta e^{-\delta t} (At + B) + A e^{-\delta t}$$

$$\dot{q}(t) = q_0 \omega_0 e^{-\omega_0 t} - q_0 (\omega_0 t + 1) \omega_0 e^{-\omega_0 t} =$$

$$\dot{q}(0) = -B\delta + A = 0 \Rightarrow A = B\delta = q_0 \delta$$

$$= -q_0 \omega_0^2 e^{-\omega_0 t} t$$

$$6) |Y(t)| = q_0 \omega_0 e^{-\omega_0 t} t$$

$$|Y(t_{\max})| = q_0 \omega_0^2 \left(e^{-\omega_0 t_{\max}} - \omega_0 t_{\max} e^{-\omega_0 t_{\max}} \right) = 0 \Leftrightarrow \omega_0 t_{\max} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_{\max} = \frac{1}{\omega_0} = \sqrt{LC} = 10^{-4} \text{ с}$$

$$Y_{\max} = C \sum e^{-t} \omega_0 = \frac{e}{e} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{e} A \approx 0.37 A$$

9.36. $t = \sqrt{LC} = 10^{-4} \text{ с}$; $\mathcal{I}_{\max} = \frac{e}{e} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0.37 \text{ А}$, где e — основание натурального логарифма.

9.54. В момент времени $t = 0$ идеальный LC -контур с собственной частотой 100 Гц возбуждается периодической последовательностью импульсов с длительностью $\tau = 0,02$ с, изображенной на рис. 186 ($\mathcal{E}_0 = 5$ В). Найти период следования импульсов T , при котором среднее значение напряжения на конденсаторе $V_{cp} = 2$ В. Нарисуйте график зависимости $V_C(t)$.

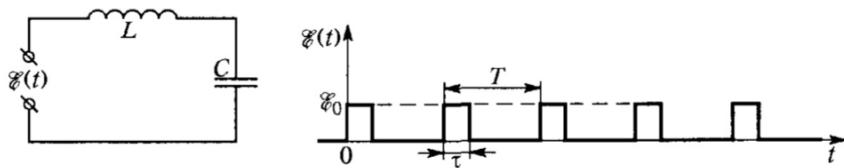


Рис. 186

$$1) U = \sum: \quad \sum = L \ddot{q} + \frac{q}{C}$$

Общее решение: $q(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$

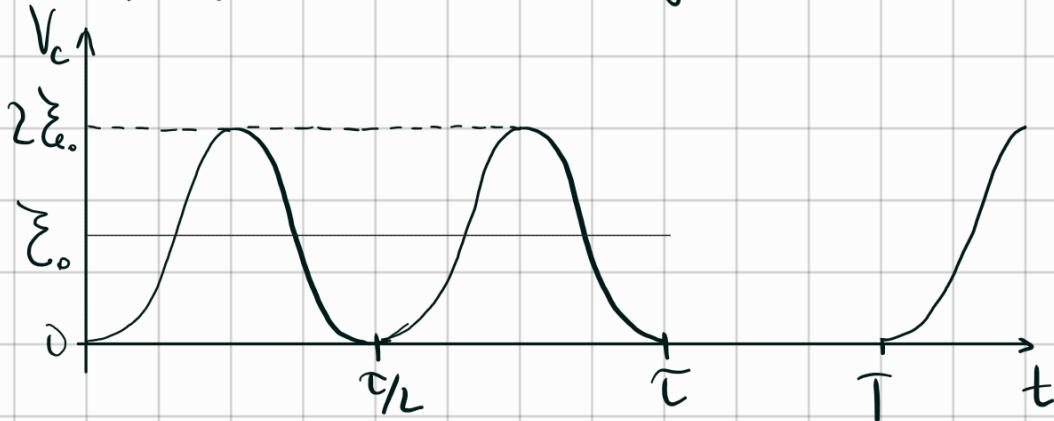
Частное решение: $q(t) = C \sum$

$$\Rightarrow V_c(t) = C q(t) = \sum + A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

$$2) q(0) = 0 \Rightarrow B = -\sum \quad \Rightarrow V_c(t) = \sum (1 - \cos(\omega t)) \\ \dot{q}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

3) \sum вкл. на $T = 0,02$ с, за это время LC -контур

Придёт $N = 2\tau = 2$ периода

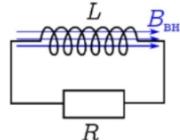


$$4) V_{\varphi} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} E_0 (1 - \cos(\omega t)) dt = \frac{E_0}{\tau} \left[\tau + \frac{\sin(\omega t)}{\omega t} \Big|_0^{\tau} \right] = E_0 \quad (\text{ориб. тк. конец окна } E_0)$$

$$V_{\varphi} = \frac{E_0 \tau}{T} = \frac{2}{5} E_0 \Rightarrow T = \frac{5}{2} \tau = 0,05 \text{ с}$$

$$9.54. T = \frac{5}{2} \tau = 0,05 \text{ с}; \quad V_C(t) = \begin{cases} E_0(1 - \cos \omega t), & \text{(рис. 407)} \\ 0 & \end{cases}$$

T12. (2020-3A) Переменное однородное внешнее магнитное поле $B_{\text{вн}}(t) = B_0 \cos \omega t$ пронизывает катушку индуктивности вдоль её оси (см. рис.). Катушка имеет индуктивность L и замкнута на сопротивление $R = \omega L$. Найдите амплитуду и сдвиг фазы (относительно $B_{\text{вн}}$) установившихся колебаний суммарного магнитного поля внутри катушки.



$$1) \hat{B}_{\text{вн}} = B_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow \hat{\Phi} = B_0 S N e^{-i\omega t} = \Phi_0 e^{-i\omega t}$$

$$\hat{J} = \hat{J}_0 e^{-i\omega t}$$

$$2) L \dot{\hat{J}} + R \hat{J} = -\dot{\hat{\Phi}}$$

$$L \hat{J}_0 (-i\omega) e^{-i\omega t} + R \hat{J}_0 e^{-i\omega t} = -\Phi_0 (-i\omega) e^{-i\omega t} \Rightarrow \hat{J}_0 L (1 - i) = \Phi_0 i$$

$$\hat{J}_0 = \frac{\Phi_0 i}{L(1-i)} = \frac{\Phi_0}{L} \frac{i(1+i)}{1-i^2} = \frac{\Phi_0}{L} \cdot \frac{i-1}{2}$$

3) Поток через катушку сохраняется

$$\hat{B}_{\text{одн}} = \hat{B}_0 + \frac{\hat{L} \hat{J}}{SN} = B_0 e^{-i\omega t} + B_0 \frac{i-1}{2} e^{-i\omega t} = \frac{1+i}{2} B_0 e^{-i\omega t}$$

$$|\hat{B}_{\text{одн}}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} B_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} B_0$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1/2}{1/2} = 1 \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{4}$$

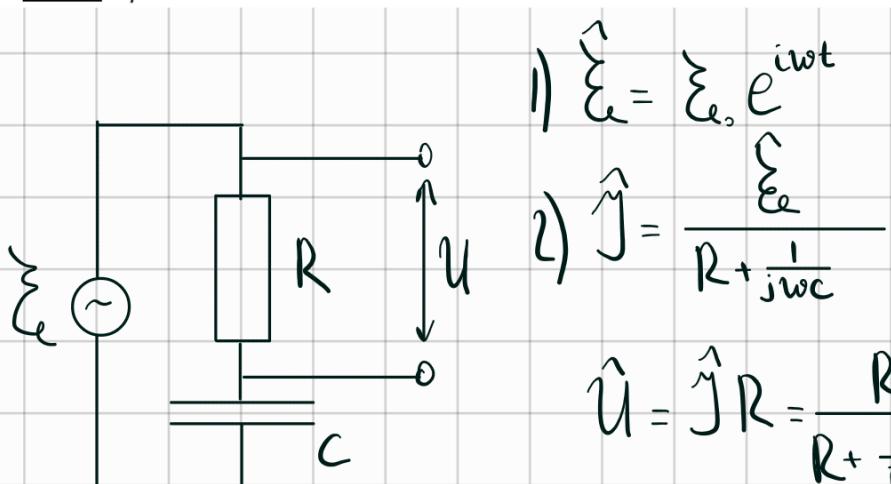
знак другой. Т.к. $e^{-i\omega t}$, т.е. фаза в другую сторону.

если использовать $e^{i\omega t}$, то всё ок

10-16 нояб.	11	Вынужденные колебания	011.1 X 011.2 X T13 X	10.8 X 10.6 X 10.23 X 10.59 X	10.20 X 10.25 Y 10.82 Y T14 X 10.92 X
----------------	-----------	-----------------------	-----------------------------	--	---

*11.1. К последовательно соединенным резистору с сопротивлением $R = 3,2 \text{ кОм}$ и конденсатору ёмкостью $C = 1 \text{ мкФ}$ приложено сетевое напряжение с частотой $f = 50 \text{ Гц}$. Найдите сдвиг фаз $\Delta\varphi$ между напряжением в сети и напряжением на резисторе.

Ответ: $\Delta\varphi \approx -45^\circ$.



$$3) \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} \cdot \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{(j\omega RC)^2 + j\omega RC}{1 + (j\omega RC)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{U} = \underbrace{\frac{(j\omega RC)^2}{1 + (j\omega RC)^2} \sum_e}_a + j \underbrace{\frac{\omega RC}{1 + (j\omega RC)^2} \sum_e}_b$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{2\pi f RC} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 3,2 \cdot 10^{-3}} \approx 1 \Rightarrow \psi \approx 45^\circ$$

11.2. Некоторый двухполюсник, имеющий импеданс $Z = 3 + i\sqrt{3}$ [Ом], подключён к идеальному источнику переменной ЭДС с амплитудой $\mathcal{E}_0 = 2$ В. Найдите среднюю мощность, потребляемую двухполюсником.

Ответ: $P = 0,5$ Вт.

$$1) \hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{Z} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \hat{\mathcal{E}} \left[\frac{1}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{12} \right]$$

$$2) P = \frac{1}{T} \int_0^T \operatorname{Re} \hat{\mathcal{E}} \cdot \operatorname{Re} \hat{I}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} - \text{период}$$

$$\operatorname{Re} \hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$\operatorname{Re} \hat{I} = \frac{1}{4} \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$P = \frac{1}{T} \cdot \frac{\mathcal{E}_0^2}{4} \int_0^T \cos^2(\omega t) = \frac{1}{T} \cdot \frac{\mathcal{E}_0^2}{8} \left[T + \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \Big|_0^T \right] = \frac{\mathcal{E}_0^2}{8} = 0,5 \text{ Вт}$$

2.1) Способ иначе:

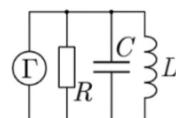
$$P = \frac{1}{2} |I|^2 R = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 0,5 \text{ Вт}$$

$$\cdot R = |Z| = 3$$

$$\cdot |I| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

T13. (2023-1Б) В представленной на рисунке электрической схеме генератор Γ создаёт переменный ток по закону $I(t) = I_0(\cos \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t)$, где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Определите выделяющуюся на сопротивлении R среднюю мощность, если $\sqrt{L/C} = 3/2 R$.

Ответ: $P = \frac{3}{4} I_0^2 R$.



$$1). \frac{1}{Z(\omega_0)} = \frac{1}{R} + j\omega_0 C - \frac{j}{\omega_0 L} = \frac{1}{R} + j\sqrt{\frac{C}{L}} - j\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(\omega_0) = R - \text{только } 1^{\text{a}} \text{ гармоника}$$

$$\cdot \frac{1}{Z(2\omega_0)} = \frac{1}{R} + 2j\sqrt{\frac{C}{L}} - j\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{R} + \frac{3}{2}j \cdot \frac{2}{3R} = \frac{1}{R} + j\frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(2\omega_0) = R \frac{1}{1+j} = R \left[\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right] - \text{только } 1^{\text{a}} \text{ гармоника}$$

2) Третья гармоника ($\omega = \omega_0$): \Leftrightarrow

$$P_1 = \frac{1}{2} |Y|^2 R = \frac{1}{2} Y_0^2 R$$

3) Вторая гармоника ($\omega = 2\omega_0$)

$$\hat{\Sigma}_e = \hat{J} \cdot \hat{Z}, \quad \hat{J} = \hat{Y}_0 (\cos(2\omega_0 t) + i \sin(2\omega_0 t))$$

$$\hat{\Sigma}_e = \hat{Y}_0 (\cos(2\omega_0 t) + i \sin(2\omega_0 t)) \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \right) R$$

$$\operatorname{Re}(\hat{\Sigma}_e) = \frac{1}{2} \hat{Y}_0 R (\cos(2\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t))$$

$$P_2 = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{Y}_0 \cos(2\omega_0 t) \cdot \frac{1}{2} \hat{Y}_0 R (\cos(2\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t)) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \frac{1}{2} \hat{Y}_0^2 R \int_0^T (\cos^2(2\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t) \cos(2\omega_0 t)) dt =$$

$$= \frac{I_0^2 R}{2T} \left[\int_0^T \frac{1 - \sin(4\omega_0 t)}{2} dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sin(4\omega_0 t) dt \right] = \frac{I_0^2 R}{4}$$

4) $P_{\text{общ}} = P_1 + P_2 = \frac{1}{2} I_0^2 R + \frac{1}{4} I_0^2 R = \frac{3}{4} I_0^2 R$

10.8. Источник переменного тока с циклической частотой ω и ЭДС \mathcal{E} действует на колебательный контур (рис. 192). Определить силу тока I и сдвиг фазы φ между I и \mathcal{E} при резонансе.

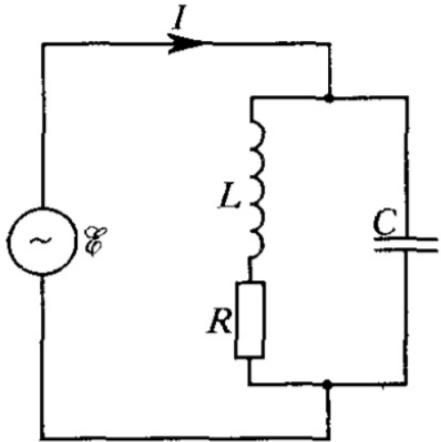


Рис. 192

$$1) \dot{q} + \frac{R}{L} \dot{q} + \frac{1}{LC} q = 0$$

ω ω_0

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$2) \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{j\omega RC - \omega^2 LC + j}{R + j\omega L}$$

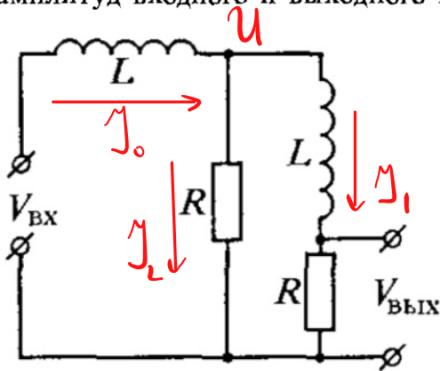
$$Z = \frac{R + j\omega L}{j\omega RC} = -\frac{j}{\omega C} + \frac{L}{RC}$$

$$3) \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega C} \cdot \frac{RC}{L} = -\frac{R}{\omega L}$$

$$10.8. I = \frac{\mathcal{E} RC \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{R}{L}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{|Z|} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{\left(\frac{L}{RC}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\mathcal{E} RC \omega}{\sqrt{L^2 \omega^2 + R^2}}$$

10.6. С помощью схемы, показанной на рис. 191, требуется получить фазовый сдвиг на угол 90° между напряжением на входе $V_{\text{вх}}$ и напряжением на выходе $V_{\text{вых}}$. Какому условию должны удовлетворять параметры схемы R и L , если циклическая частота входного напряжения равна ω ? Чему при этом будет равно отношение амплитуд входного и выходного напряжений?



$$\begin{aligned} \text{II) } Z_0 &= j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R+j\omega L}} = j\omega L + \frac{R(R+j\omega L)}{2R+j\omega L} = \\ &= \frac{3j\omega LR - \omega^2 L^2 + R^2}{2R+j\omega L} \quad (j\omega L = Z) \end{aligned}$$

$$2) \quad I_0 = \frac{V_{bx}}{Z_0} = V_{bx} \frac{2R+Z}{R^2+Z^2+3ZR}$$

$$U = V_{bx} - I_0 Z = V_{bx} \left[1 - \frac{2RZ+Z^2}{R^2+Z^2+3ZR} \right] = \frac{R^2+2R}{R^2+3ZR+Z^2} V_{bx}$$

$$I_1 = \frac{U}{R+Z} = \frac{R}{R^2+3ZR+Z^2} V_{bx}$$

$$V_{\text{вых}} = U - I_1 Z = \underbrace{\frac{R^2}{R^2+3ZR+Z^2}}_{Z^*} V_{bx}$$

$$3) \quad Z^* = \frac{R^2}{R^2 - \omega^2 L^2 + 3j\omega LR}$$

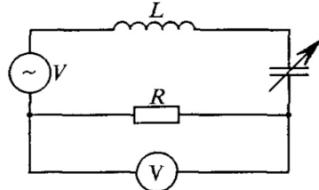
Поворот на $\frac{\pi}{2} \Rightarrow Z^* \in \text{Im} \Rightarrow R^2 - \omega^2 L^2 = 0$

$$\downarrow \\ R = \omega L$$

$$4) \quad Z^* = \frac{-R}{3\omega L} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \left| \frac{V_{\text{вых}}}{V_{\text{вх}}} \right| = \frac{1}{3}$$

$$10.6. \quad \omega L = R; \quad \left| \frac{V_{\text{вх}}}{V_{\text{вых}}} \right| = 3.$$

10.23. Емкостный датчик — одно из наиболее чувствительных радиотехнических устройств для регистрации малых механических смещений. Обычно емкостный датчик представляет собой электрический колебательный контур с воздушным конденсатором (рис. 197), одна из пластин которого подвижна. Оценить минимальное измеряемое перемещение пластины конденсатора Δd , если контур настроен в резонанс. Напряжение источника питания $V = 100$ В, минимальное измеряемое изменение напряжения на сопротивлении $\Delta V = 10$ мВ, добротность контура $Q = 10^3$ и зазор между пластинами $d = 1$ мм.



$$1) \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega CR}$$

$$V = IR = \frac{U_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{2\omega w}{\omega}\right)^2}}$$

- из gen. си.
Обычно

$$2) \Delta \omega = \Delta \frac{1}{\sqrt{LC}} = \Delta \frac{1}{\sqrt{L \epsilon_0 S}} = \frac{\Delta d}{2 \sqrt{L \epsilon_0 S d}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta d}{d} \omega$$

$$\left(\frac{2\omega w}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2$$

$$3) V \approx U_0 \left(1 - \frac{Q^2 \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2}{2} \right) \Rightarrow \Delta V \approx \frac{U_0 Q^2 \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta d = \frac{d}{Q} \sqrt{\frac{2\Delta V}{U_0}} \approx 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

$$10.23. \Delta d = \frac{d}{Q} \sqrt{\frac{2\Delta V}{V}} = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ см.}$$

ошибка
в задании?

10.59. К клеммам A и B (рис. 218) подводится произвольное переменное напряжение $V_{bx}(t)$, которое возбуждает между клеммами M и N напряжение $V_{вых}(t)$. Параметры R , L , C подобраны таким образом, что напряжение на выходе в каждый момент времени мало по сравнению с напряжением на входе в тот же момент. Показать, что при выполнении этого условия выходное напряжение на

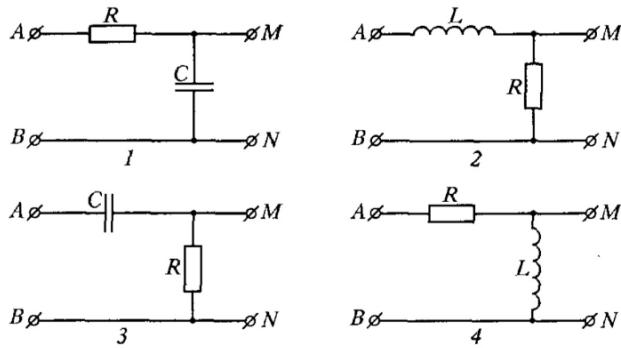


Рис. 218

схемах 1 и 2 приблизительно пропорционально интегралу, а на схемах 3 и 4 — производной от входного напряжения по времени.

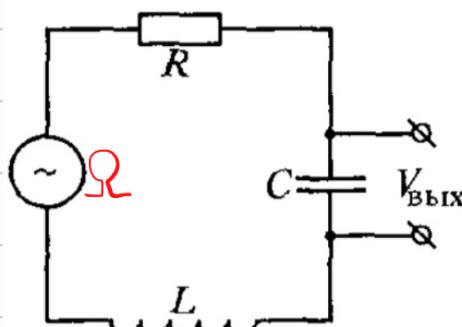
$$1) \quad \dot{V} = \frac{V_{bx} - V_{bx}^0}{R} = C \frac{dV_{bx}}{dt} \Rightarrow V_{bx}^0 \approx \frac{1}{RC} \int V_{bx} dt$$

$$2) \quad V_{bx} - V_{bx}^0 = L \frac{d\dot{V}}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{V_{bx}}{R} \right) = \frac{L}{R} \cdot \frac{dV_{bx}}{dt} \Rightarrow V_{bx}^0 \approx \frac{R}{L} \int V_{bx} dt$$

$$3) \quad \dot{V} = C \frac{dV_{bx}}{dt} = \frac{V_{bx}}{R} \Rightarrow V_{bx}^0 = RC \cdot \frac{dV_{bx}}{dt}$$

$$4) \quad V_{bx}^0 = L \frac{d\dot{V}}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{V_{bx}}{R} \right) = \frac{L}{R} \frac{dV_{bx}}{dt} \Rightarrow V_{bx}^0 = \frac{L}{R} \frac{dV_{bx}}{dt}$$

10.20. При снятии резонансной кривой колебательного контура (рис. 194) с малым затуханием найдено: выходное напряжение максимально при частоте $f_0 = 1,6$ кГц; при частотах $f \ll f_0$ это напряжение равно $V_0 = 1$ В. Чему равно выходное напряжение V_1 при частоте $f_1 = 16$ кГц?



$$1) \quad Z = R + j \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2}; \quad \delta = \frac{R}{2L} \ll 1$$

$$|Z| = \sqrt{4\delta^2 L^2 + \left(\Omega - \frac{1}{\Omega C L^2} \right)^2} = \left| \omega = \frac{1}{LC} \right|$$

Рис. 194

$$= \frac{L}{\Omega} |\Omega^2 - \omega^2|$$

$$2) V_{\text{бых}} = \frac{\zeta}{|Z|} \cdot \frac{1}{j\Omega C} = \frac{\zeta \cancel{\Omega}}{L} \cdot \frac{1}{j\cancel{\Omega} C} \frac{1}{|\Omega^2 - \omega^2|} = -j \zeta \frac{\omega^2}{|\Omega^2 - \omega^2|}$$

$$(V_{\text{бых}})|_{\omega} = 0 \Leftrightarrow \Omega = \omega \Rightarrow 2\bar{n}f_0 = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$3) f \ll f_0: |V_{\text{бых}}| = \zeta = V_0$$

$$4) V_1 / (16kP_y) = V_0 \frac{(2\bar{n}f_0)^2}{|(2\bar{n}f_1)^2 - (2\bar{n}f_0)^2|} \approx 0 = V_0 \left(\frac{f_0}{f_1} \right)^2 = 10 \text{ мВ}$$

$$10.20. V_1 \approx V_0 \left(\frac{f_0}{f_1} \right)^2 = 10 \text{ мВ.}$$

10.25. Для схемы, изображенной на рис. 198, определить частоты источника ЭДС, соответствующие резонансам токов и напряжений. Построить график сдвига фазы тока \mathcal{I} относительно ЭДС \mathcal{E} в зависимости от частоты источника, считая внутреннее сопротивление последнего пренебрежимо малым.

$$1) Z_{L||C} = \frac{1}{\frac{1}{j\Omega L} + j\Omega C} = \frac{j\Omega L}{1 - \Omega^2 CL} = \frac{j\Omega L}{1 - j}$$

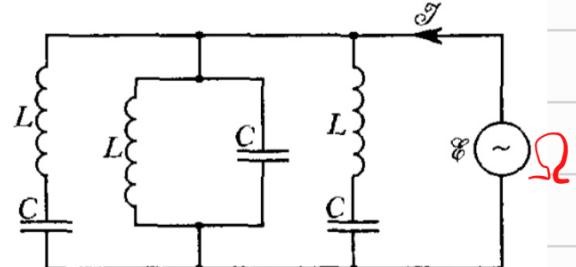


Рис. 198

$$Z_{L||C} = j\Omega L - \frac{j}{\Omega C} = j \frac{\Omega^2 LC - 1}{\Omega C} = j \frac{\omega^2 - 1}{\Omega C}$$

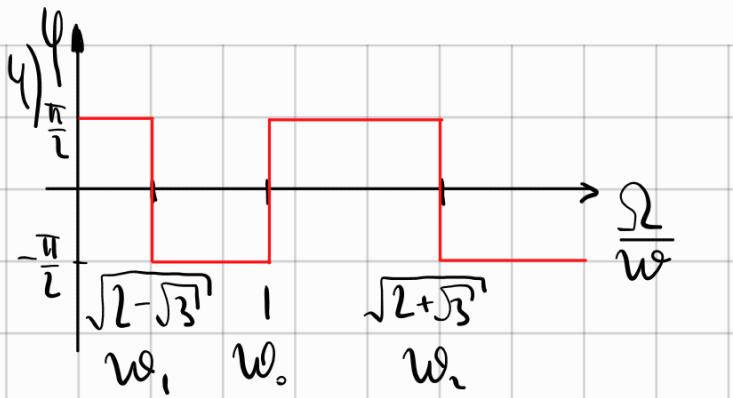
$$\omega^2 = \frac{1}{LC}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega^2} = \Omega \sqrt{LC}$$

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_{L||C}} + \frac{1}{Z_{L||C}} = \frac{-j2\Omega C}{(\omega^2 - 1)} + \frac{(\omega^2 - 1)j}{\Omega L} =$$

$$= \frac{(\omega^2 - 1)^2 - 2\omega^2}{(\omega^2 - 1)\Omega L} j = \frac{\omega^4 - 4\omega^2 + 1}{(\omega^2 - 1)\Omega L} j \Rightarrow Z_0 = \frac{(1-j)\Omega L}{\omega^2 - 4\omega^2 + 1} j$$

$$2) \text{ Резонанс напряжение} \Leftrightarrow Z_0 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \Omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$3) \text{ Резонанс тока} \Leftrightarrow Z_0 = \infty \Leftrightarrow \omega^2 - 4\omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Omega^2 = (2 \pm \sqrt{3})\omega^2$$



$$\operatorname{tg} \varphi =$$

10.25. Резонансу напряжений соответствует частота $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Резонансу токов соответствует $\omega_1 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{LC}} \approx \frac{0,52}{\sqrt{LC}}$ и $\omega_2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{LC}} \approx \frac{1,93}{\sqrt{LC}}$. График $\varphi(\omega)$ — фазовой характеристики цепи — изображен на рис. 409.

← Скорее бровь ошибки, должно быть ч10

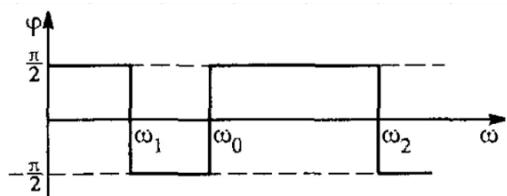


Рис. 410

10.82. Две одинаковые катушки, намотанные на цилиндрический каркас, как показано на рис. 286, подключены последовательно с конденсатором емкостью $C = 0,1 \text{ мкФ}$ и резистором с сопротивлением

$R = 10 \Omega$ к генератору синусоидального напряжения. При разомкнутом ключе K резонансная частота контура оказалась равной $f_1 = 1780 \text{ Гц}$, а при замкнутом ключе — $f_2 = 1990 \text{ Гц}$. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и подводящих проводов, определить:

- 1) добротность контуров Q_1 и Q_2 в обоих случаях;
- 2) коэффициенты самоиндукции L_1 и L_2 катушек и коэффициент взаимной индукции между ними.

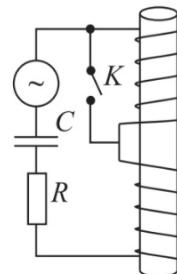


Рис. 286

$$I \quad Q = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{2\pi f RC} = Q(f)$$

$$\cdot Q(f_1) = \frac{1}{2\pi f_1 RC} \approx 90$$

$$\cdot Q(f_2) = \frac{1}{2\pi f_2 RC} \approx 80$$

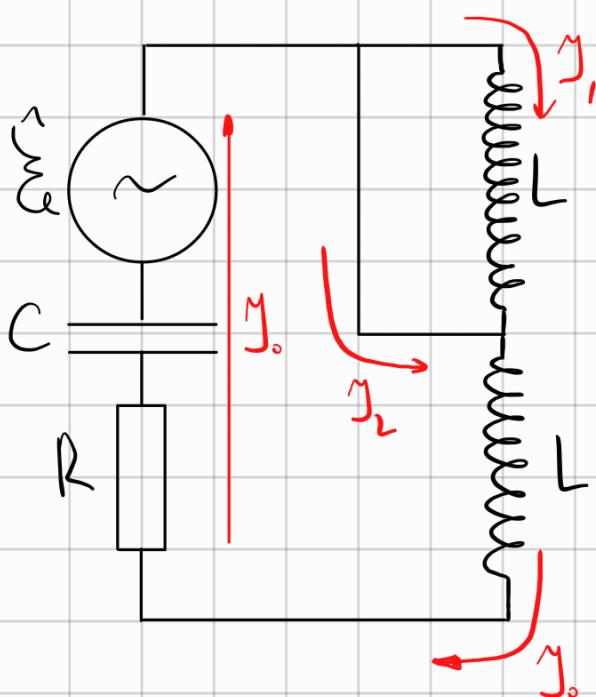
II Ключ разомкнут:

$$1) L_o I = L \bar{I} - M \bar{I} + L \bar{I} - M \bar{I} \Rightarrow L_o = 2(L - M)$$

$$2) (2\pi f_1)^2 = \frac{1}{L_o C} \Rightarrow L_o = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 C}$$

III

Кінок симкунд:



$$I \cdot \hat{\Sigma} = R \dot{I} + \frac{1}{C} I + L \frac{dI_0}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\cdot 0 = L \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_0}{dt} \Rightarrow \frac{dI_1}{dt} = - \frac{M}{L} \frac{dI_0}{dt}$$

$$\hat{\Sigma} = R I_0 + \frac{I}{C} + \left(L - \frac{M^2}{L} \right) \frac{dI_0}{dt}$$

$$2) \hat{\Sigma} e^{i\omega t} = R I_0 e^{i\omega t} + \frac{I_0 e^{i\omega t}}{C \cdot i\omega} + \left(L - \frac{M^2}{L} \right) I_0 e^{i\omega t} \cdot i\omega$$

$$\hat{\Sigma} = I_0 R + i I_0 \left(w \left(L - \frac{M^2}{L} \right) - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$L^* = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 C}$

$$IV) \frac{L^2 - M^2}{L} = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 C}$$

$$2(L - M) = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 C}$$

$$\frac{(L - M)(L + M)}{L} \cdot \frac{1}{2(L - M)} = \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 = \frac{L + M}{2L} = \frac{1}{2} + \frac{M}{2L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{M}{L} = 2 \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 - 1 = \frac{3}{5}$$

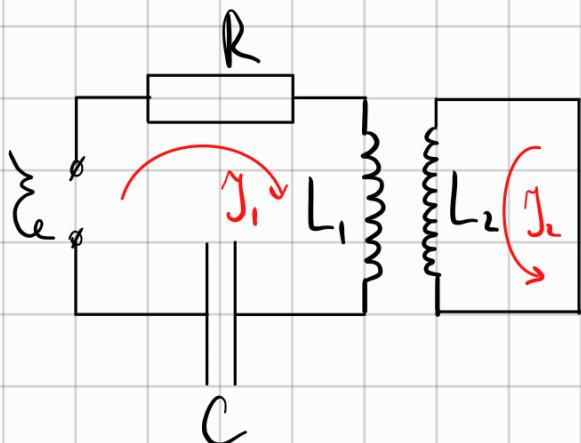
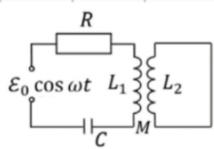
10.82. 1) $Q_1 = \frac{1}{2\pi f_1 C R} \approx 90; Q_2 = \frac{1}{2\pi f_2 C R} \approx 80.$ 2) $L = \frac{f_2^2}{(f_2^2 - f_1^2) 16\pi^2 C f_1^2} = 0,1 \Gamma_H; M = \frac{2f_1^2 - f_2^2}{(f_2^2 - f_1^2) 16\pi^2 C f_1^2} = 0,06 \Gamma_H.$

$$2) 2 \left(L - \frac{3}{5} L \right) = \frac{4}{5} L = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 C} \Rightarrow L = \frac{5}{4} \frac{1}{(2\pi f_1)^2 C} = 0,1 \Gamma_H$$

$$M = 0,06 \Gamma_H$$

T14. (2019-4Б) Определите коэффициент взаимной индукции катушек M в схеме, изображённой на рисунке, если ток в колебательном контуре отстает от входного напряжения по фазе на $\pi/4$. Параметры цепи: $L_1 = 20 \text{ мГн}$, $L_2 = 5 \text{ мГн}$, $R = 5 \Omega$, $C = 100 \text{ мкФ}$, $\omega = 10^3 \text{ рад/с}$.

Ответ: $M = 5 \text{ мГн}$.



$$1) \sum_{\text{вн}} = JR + L_1 \frac{dJ_1}{dt} + M \frac{dJ_2}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$0 = L_2 \frac{dJ_2}{dt} + M \frac{dJ_1}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dJ_2}{dt} = - \frac{M}{L_2} \frac{dJ_1}{dt}$$

$$2) \sum_{\text{вн}} e^{i\omega t} = J_{10} e^{i\omega t} R + \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) J_{10} e^{i\omega t} \cdot i\omega - \frac{i J_{10} e^{i\omega t}}{C\omega}$$

$$\sum_{\text{вн}} = J_{10} R + i \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} - \frac{1}{C\omega} \right) J_{10} \omega$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} - \frac{1}{C\omega} \right)}{R} = 1 \Rightarrow M = \sqrt{\left(L_1 - \frac{R}{\omega} - \frac{1}{C\omega} \right) L_2} = \sqrt{(20 - 5 - 10) \cdot 5} = 5 \text{ мГн}$$

10.92. Последовательный колебательный контур состоит из конденсатора и неидеальной катушки, омическое сопротивление которой, измеренное на постоянном токе, оказалось равным $r = 2 \Omega$. В эксперименте была получена зависимость амплитуды $V_C(\omega)$ напряжения на конденсаторе при неизменной амплитуде \mathcal{E} сигнала генератора — источника напряжения. Используя прилагаемый график (рис. 296), определить:

- 1) индуктивность L катушки; 2) емкость C конденсатора; 3) коэффициент затухания δ ; 4) добротность контура Q ; 5) амплитуду \mathcal{E} напряжения генератора; 6) сопротивление R , которое нужно включить в колебательный контур, чтобы свободные колебания контура происходили в критическом режиме.

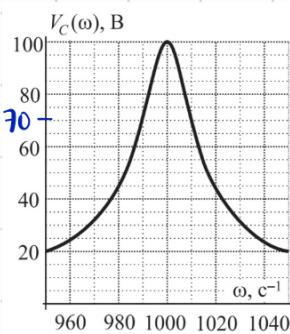


Рис. 296

$$4) Q = (\omega_{\max}) / (\text{ширина по уровню } \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\max}) = 100\% / \omega_0 = 50$$

$$5) \sum_{\text{вн}} = \frac{V_{\max}}{Q} = 100 / 50 = 2 \text{ В}$$

$$1,2,3) 2\delta = \frac{r}{L} = 20 \text{ c}^{-1} \Rightarrow L = 100 \text{ мГн}; \delta = 10 \text{ c}^{-1}$$

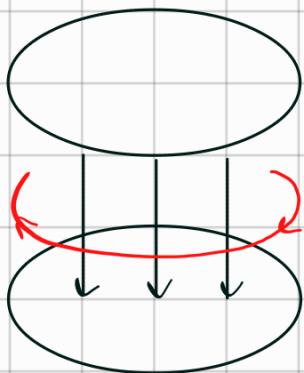
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000 \text{ rad/s} \Rightarrow C = 10 \text{ nK}\Phi$$

$$6) R = R_{up} \Leftrightarrow \omega_0 = \delta \Rightarrow \frac{R_{up}}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R_{up} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 200 \text{ Ohm}$$

10.92. $L = 100 \text{ mH}$; $C = 10 \text{ nK}\Phi$; $\delta = 10 \text{ rad/s}$; $Q = 50$; $\mathcal{E} = 2 \text{ V}$; $R = 200 \text{ Ohm}$.

⁰13.1. Напряжение в плоском конденсаторе меняется по гармоническому закону $U = U_0 \sin \omega t$. Пластины имеют форму дисков радиуса R , расстояние между которыми $h \ll R$, между пластин — среда с проницаемостью ϵ . Пренебрегая краевыми искажениями поля, найдите магнитное поле на краю конденсатора (на расстоянии R от оси). Частоту считать малой: $\omega \ll c/R$.

Ответ: $B = \frac{\omega R}{2c} \cdot \frac{\epsilon U_0}{h} \cos \omega t$.



1) Уп-е Максвеля:

$$\int \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{C} \int j dS + \frac{1}{C} \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} dS$$

$$2) E = \frac{U}{h} = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow D = \frac{\epsilon U_0 \sin(\omega t)}{h}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\epsilon U_0 \omega \cos(\omega t)}{h}$$

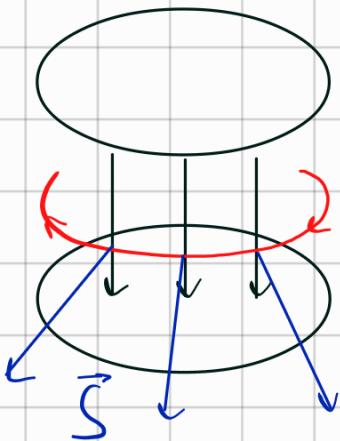
$$3) B \cdot 2\pi R = \frac{\pi R^2}{C} \cdot \frac{\epsilon U_0 \omega \cos(\omega t)}{h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{\omega R}{2C} \cdot \frac{\epsilon U_0}{h} \cos(\omega t)$$

⁰13.2. Используя выражение для вектора Пойнтинга S , в условиях предыдущей задачи найдите полный поток электромагнитной энергии из конденсатора и сравните его с выражением для скорости изменения энергии, запасённой в конденсаторе dW/dt .

Ответ: $S \cdot 2\pi Rh = \frac{dW}{dt} = \frac{\epsilon \pi R^2}{h} \sin 2\omega t$.

$$1) \vec{S} = \frac{C}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}] \Rightarrow |\vec{S}| = \frac{C}{4\pi} EH = \frac{C}{4\pi} \cdot \frac{U_0}{h} \cdot \frac{\omega R}{2C} \cdot \frac{\epsilon U_0}{h} \cos(\omega t) \sin(\omega t)$$



$$2) \Phi_S - S \cdot 2\pi Rh = \frac{\epsilon U_0^2 w \sin(2\omega t) R^2}{8h}$$

$$3) \frac{dW}{dt} = \frac{CU}{2} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon R^2}{4h} U^2 \cdot 2 \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \cdot w = \\ = \frac{\epsilon U_0^2 w \sin(2\omega t) R^2}{8h}$$

Cobranu!

8.51. Диск из изолятора может свободно вращаться вокруг своей оси, на которой укреплен длинный сверхпроводящий соленоид радиусом $r_0 = 2$ см без механической связи с диском (рис. 178). Соленоид замкнут накоротко и в нем циркулирует ток, создающий в центре соленоида индукцию $B_0 = 10^4$ Гс. На диск вне соленоида нанесены заряды, суммарная величина которых составляет $Q = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл. Соленоид разогревается, и ток в нем прекращается. Найти момент импульса диска L , который он получает в результате этого.

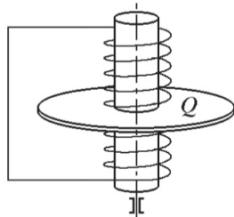


Рис. 178

$$1) \text{Ур-е Максвелла: } \int \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{C} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow$$

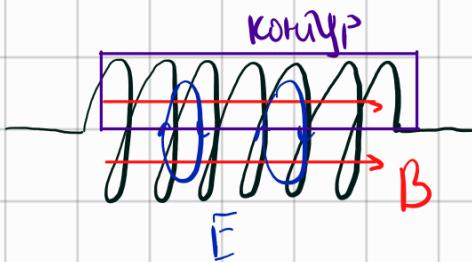
$$\Rightarrow E(r) 2\pi r = -\frac{1}{C} \pi r_0^2 \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow E(r) = -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{r_0^2}{2Cr}$$

$$2) M = \int_{r_0}^R E(r) dq \ r = \int_{r_0}^R -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{r_0^2}{2C} dq = -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{r_0^2}{2C} Q$$

$$3) \frac{dL}{dt} = \frac{Qr_0^2}{2C} \frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow L = \frac{Qr_0^2}{2C} B_0 = 8 \cdot 10^{-3} \frac{2 \cdot Cm^2}{C}$$

$$8.51. L = \frac{Q}{2C} r_0^2 B_0 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с.}$$

12.3. Пространство внутри длинного соленоида, состоящего из N витков проволоки, заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Длина соленоида равна l , радиус R . По обмотке соленоида течет переменный ток $I = I_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить магнитную и электрическую энергии, локализованные внутри соленоида, и найти отношение максимальных значений этих энергий. Провести числовой расчет для $R = 5$ см, $\epsilon = \mu = 1$ и частоты $\nu = 100$ Гц.



1) Th. магнитной:

$$Hl = \frac{4\pi}{C} NI \Rightarrow H = \frac{4\pi}{C} \frac{N}{l} I_0 \cos \omega t$$

$$2) W_M = \iiint_V w_M dV = \frac{M H^2}{8\pi} \cdot \pi R^2 \cdot l = \frac{\mu_0 I^2 N^2 R^2 l}{8 \cdot C^2 l^2} I_0^2 \cos^2 \omega t \Rightarrow \\ \Rightarrow W_M = \frac{2 \mu_0 I^2 N^2 R^2 l}{C^2 l} I_0^2 \cos^2 \omega t$$

$$3) \int \vec{E}(r) dl = -\frac{1}{c} S \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mu_0 I^2 R^2}{C} \frac{4\pi}{C} \frac{N}{l} I_0 \sin \omega t \cdot \omega = E \cdot 2\pi R$$

$$E(r) = \frac{2\mu_0 I^2 N}{C^2 l} I_0 \omega \sin \omega t$$

$$4) W_{\text{Эн}} = \int_0^R \frac{\epsilon_0 E^2}{8\pi} \cdot l \cdot 2\pi r dr = \frac{\epsilon_0 \mu_0 I^2 N^2}{8\pi C^2 l^2} I_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} \mu_0 \sin^2 \omega t \int_0^R r^3 dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\text{Эн}} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 I^2 N^2 R^4}{4C^2 l} I_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t$$

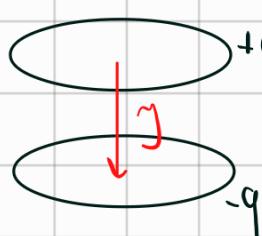
$$5) L = \frac{W_{\text{Эн}}^{\max}}{W_M^{\max}} = \frac{\epsilon_0 \mu_0 I^2 R^2}{8C^2} = \frac{1 \cdot (2 \cdot 3.14 \cdot 100)^2 \cdot 5^2}{8 \cdot (3 \cdot 10^{10})^2} = 1.3 \cdot 10^{-15} \Rightarrow \text{Энергия Электр. поля приобр. ядра}$$

$$12.3. W_M = \frac{2\pi^2 \mu R^2 N^2}{C^2 l} I_0^2 \cos^2 \omega t; \quad W_{\text{Э}} = \frac{\epsilon \mu^2 \omega^2 R^4 N^2}{4C^4 l} I_0^2 \sin^2 \omega t;$$

$$\frac{W_{\text{Э}}^{\max}}{W_M^{\max}} = \frac{\epsilon \mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2C} \right)^2 \approx 1.3 \cdot 10^{-15}.$$

12.5* Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиусом R , пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, вычислить мгновенное значение напряженности магнитного поля H внутри конденсатора (в зависимости от расстояния r до его оси), если сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент времени равна \mathcal{I} .

12.8 пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, определить полный поток электромагнитной энергии, вытекающий из пространства между обкладками. Обсудить явление с точки зрения сохранения и превращения энергии.



$$1) \int \vec{H} d\ell = \frac{4\pi}{C} \vec{J} - \frac{1}{C} \int \frac{\partial \Phi}{\partial t} dS$$

$$\cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi \frac{d\phi}{dt} = 4\pi \frac{dq}{dt} = \frac{4\pi}{R^2} J = \frac{4J}{R^2}$$

$$2) H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{C} J - \frac{1}{C} \frac{4J}{R^2} \pi r^2 = \frac{4\pi}{C} \left(J - J \frac{r^2}{R^2} \right) = \frac{4\pi}{C} J \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \Rightarrow$$

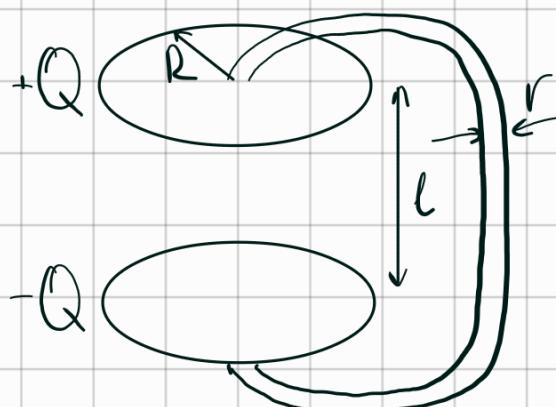
$$\Rightarrow H(r) = \frac{2J}{Cr} \left[1 - \frac{r^2}{R^2} \right]$$

$$12.5*: H = \frac{2J}{cr} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

$$3) \frac{dW}{dt} = \Phi_S = \frac{C}{4\pi} [\vec{E} \times \vec{H}(R)] \cdot S_{\text{диск}} = 0, \text{ т.к. } H(R) = 0$$

12.8. Поток энергии равен нулю

12.9. Плоскому конденсатору емкостью C , обкладками которого являются два одинаковых диска, сообщен заряд Q . Затем конденсатор отключают от источника электричества. После этого пластины соединяют длинным цилиндрическим проводом, проходящим вне конденсатора, и конденсатор разряжается. Пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, показать непосредственным расчетом, что полный поток электромагнитной энергии из конденсатора равен полному потоку электромагнитной энергии, втекающему внутрь провода. Проанализировать явление с точки зрения представления о движении, превращении и сохранении энергии.



$$1) U = E \cdot l = \frac{Q}{S} l = \frac{4Ql}{R^2}$$

$$2) R_{np} = \frac{2L}{\pi r^2}$$

$$3) \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4}{R^2} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{16\pi}{L} Q \frac{r^2 l}{R^4 L}$$

$$4) H \cdot 2\pi R = -\frac{1}{C} \frac{\partial E}{\partial t} \pi R^2 \Rightarrow$$

L-g1. провода

$$\Rightarrow H = \frac{8\pi}{2C} Q \frac{r^2 l}{R^3 L}$$

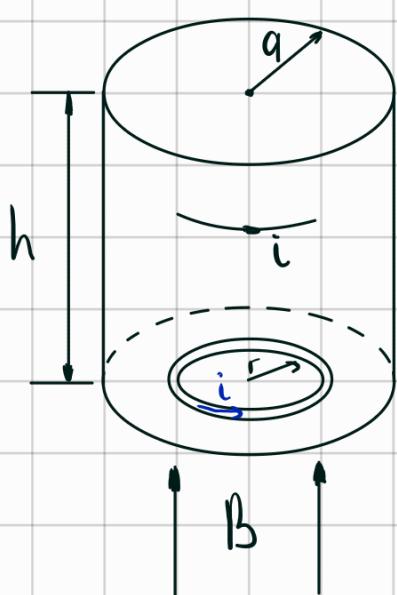
$$5) \Phi_s = \frac{C}{2\mu_0} [\vec{E}, \vec{H}] \cdot 2\pi R \cdot l = \frac{l}{2} \cdot \frac{\mu_0^2}{R^2} \cdot \frac{8\pi}{2C} \frac{r^2}{R^3} \cdot \frac{RL}{L} = \frac{16\pi Q^2 r^2 l^2}{2R^4 L}$$

$$6) P_{np} = \gamma R = \frac{16\pi^2}{2} Q^2 \frac{R^4 l^2}{R^4 L} \cdot \frac{2L}{\pi r^2} = \frac{16\pi Q^2 r^2 l^2}{2R^4 L}$$

(возможно нужно еще посчитать Φ_s^{prob} , не получилось)

12.9. Поток электрической энергии вытекает из конденсатора через его края, втекает внутрь провода и там превращается во внутреннюю (тепловую) энергию.

12.22. Медный цилиндр радиусом $a = 1$ см и высотой $h = 10$ см помещен в переменное однородное магнитное поле $B = B_0 \cos \omega t$ параллельное оси цилиндра. Амплитуда поля $B_0 = 100$ Гц, частота $v = 50$ Гц. Определить среднюю мощность тепла Q , выделяющегося в цилиндре из-за токов Фуко. Электропроводность меди $\lambda = 5,14 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$ (СГСЭ).



$$II \int \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$E(r) \cdot 2\pi r = \frac{\pi r^2}{c} \cdot B_0 \omega \sin \omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{B_0 \omega r}{2c} \sin(\omega t)$$

$$2) \vec{j} = \lambda \vec{E} \quad - \text{плотность тока}$$

$$3) \frac{dW}{dt} = \iiint_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV = \int_0^a \lambda E \cdot 2\pi r h dr = \lambda \frac{B_0 \omega \sin(\omega t)}{4c} \cdot 2\pi h \int_0^a r^3 dr \\ = \lambda \frac{B_0^2 \omega \sin^2(\omega t)}{8c^2} \pi h a^4$$

$$4) \overline{\frac{dW}{dt}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dW}{dt} dt \Leftrightarrow \text{это } T\text{-период колебание}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda B_0^2 w^2 \pi h a^4}{8c^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(wt) dt = \frac{\lambda B_0^2 w^2 \pi h a^4}{16c^2}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} - \frac{\cos(2wt)}{2} dt = \frac{1}{2}$$

5) $w = 2\pi\nu \rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{\frac{dW}{dt}} = \frac{2B_0^2 \pi^3 D^2 h a^4}{4c^2} \approx 1,1 \cdot 10^6 \frac{\text{Эрг}}{C}$$

дано в СИ

$$12.22. Q = \lambda \pi h \left(\frac{\pi \nu B_0 a^2}{2c} \right)^2 \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ эрг/с} \approx 0,11 \text{ Вт.}$$

12.27. Постоянный ток \mathcal{I} течет по цепи, состоящей из резистора сопротивлением R и длинной катушки радиусом r_2 и плотностью намотки витков $n [\text{см}^{-1}]$ и соосного с катушкой прямого провода радиусом r_1 (рис. 258). Пренебрегая сопротивлением катушки и провода, найти аксиальную S_z и азимутальную S_ϕ компоненты вектора Пойнтинга внутри катушки вдали от ее торцов. Вычислить поток энергии через сечение катушки.

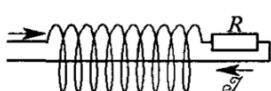
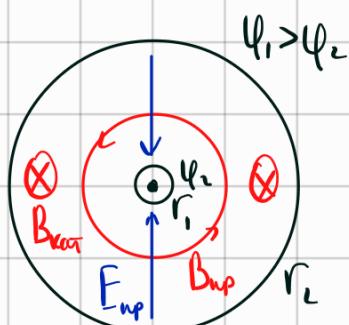
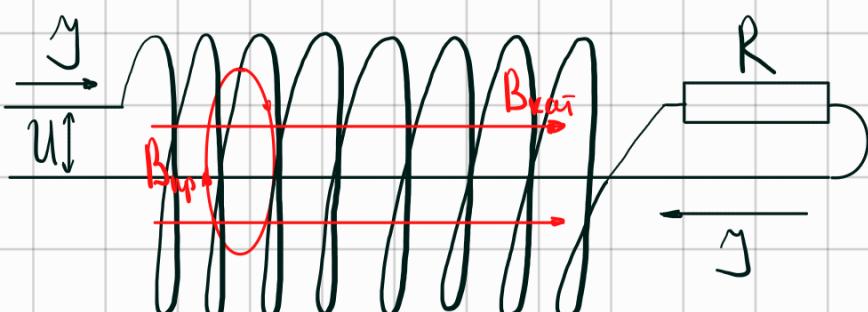


Рис. 258

подключается к источнику постоянной ЭДС E через сопротивле-



$$1) B_{\text{solenoid}} = \frac{4\pi}{c} n I \quad (\text{было в 12.3})$$

$$B_{\text{axial}}(r) = \frac{2I}{cr}$$

$$2) \text{Th. Рассеяния: } E(r) \cdot 2\pi r \mathcal{I} = 4\pi \cdot \mathcal{E} \Rightarrow E(r) = \frac{2\mathcal{E}}{r}$$

$$3) U = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = 2\varphi \ln \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow 2\varphi = \frac{\gamma R}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \Rightarrow E(r) = \left. \frac{\gamma R}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot \frac{1}{r} \right|_{r=r_2}$$

$$4) S_z = \left| \frac{C}{4\pi} [\vec{E}_{np}, \vec{B}_{np}] \right| = \frac{C}{4\pi} \cdot \frac{\gamma R}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r} \cdot \frac{2\varphi}{C r} = \frac{\gamma^2 R}{2\pi r^2 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$S_\varphi = \left| \frac{C}{4\pi} [\vec{E}_{np}, \vec{B}_{np}] \right| = \frac{q}{4\pi} \frac{\gamma R}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r} \cdot \frac{4\varphi}{C} \cdot n = \frac{n\gamma^2 R}{r \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

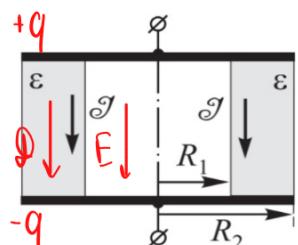
$$5) \text{ Поток через сечение: } \Phi_{S_z} = \int_{r_1}^{r_2} S_z 2\pi r dr = \frac{\gamma^2 R}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \gamma^2 R$$

$$12.27. S_z = \frac{\mathcal{J}^2 R}{2\pi r^2 \ln (r_2/r_1)}; \quad S_\varphi = \frac{\mathcal{J}^2 R n}{r \ln (r_2/r_1)}. \text{ По-}$$

ток энергии через сечение катушки направлен в сторону резистора и равен

$$W = \int_{r_1}^{r_2} S_z \cdot 2\pi r dr = \mathcal{J}^2 R.$$

12.81. Заряженный плоский конденсатор с круглыми пластинами радиусом R_2 , отключённый от внешней цепи, постепенно разряжается через слабо проводящий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , вставленный между пластинами (рис. 357). Диэлектрик



имеет форму кольца с внутренним радиусом R_1 и наружным радиусом R_2 , ток через него в данный момент равен \mathcal{J} . Пренебрегая краевыми эффектами для электрического поля в конденсаторе, определить распределение магнитного поля внутри и вне диэлектрика в конденсаторе. Магнитная проницаемость $\mu = 1$.

$$1) q = C U = C E d \Rightarrow E = \frac{q}{C d}; \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\mathcal{J}}{C d}$$

$$\mathcal{D} = \epsilon E \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon \mathcal{J}}{C d}$$

$$2) C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}; \quad C_0 = \frac{\pi R_1^2}{4\pi d} + \frac{\epsilon \pi (R_2^2 - R_1^2)}{4\pi d} = \frac{R_1^2(1-\epsilon) + \epsilon R_2^2}{4d}$$

$$3) r < R_1: \quad \int \vec{H} d\vec{l} = B(r) \cdot 2\pi r = -\frac{1}{C} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \pi r^2 + \frac{4\pi}{C} \mathcal{J} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(r) \Big|_{r < R_1} = \frac{1}{2C} \sqrt{\frac{4r}{R_i^2(1-\varepsilon) + \varepsilon R_i^2}} = \frac{1}{C} \frac{2\sqrt{r}}{\varepsilon R_i^2 + (1-\varepsilon)R_i^2}$$

4) $R_1 < r < R_2$:

$$B(r) \Big|_{R_1 < r < R_2} = \frac{Y_0}{C} \sqrt{\frac{r^2 - R_i^2}{R_i^2 - R_1^2}} \bar{u}(r^2 - R_i^2) - \frac{1}{C} \frac{\partial E}{\partial t} \bar{u}R_i^2 - \frac{1}{C} \frac{\partial Q}{\partial t} \bar{u}(r^2 - R_i^2)$$

$$B(r) \Big|_{R_1 < r < R_2} = \frac{2Y_0}{C} \sqrt{\frac{r^2 - R_i^2}{R_i^2 - R_1^2}} - \frac{1}{C} \frac{2Y_0 \pi R_i^2}{R_i^2(1-\varepsilon) + \varepsilon R_i^2} - \frac{1}{C} \frac{2Y_0 \varepsilon \pi (r^2 - R_i^2)}{R_i^2(1-\varepsilon) + \varepsilon R_i^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(r) \Big|_{R_1 < r < R_2} = \frac{2Y_0}{Cr} \left[\frac{r^2 - R_i^2}{R_i^2 - R_1^2} - \frac{\varepsilon r^2 + (1-\varepsilon)R_i^2}{\varepsilon R_i^2 + (1-\varepsilon)R_i^2} \right]$$

5) $r > R_2$: $B(r) \Big|_{r > R_2} = B(R_2) \Big|_{R_2 < r < R_1} = 0$

$$12.81. \quad B(r) \Big|_{r \leq R_1} = -\frac{2\mathcal{J}_r}{c[\varepsilon R_2^2 - (\varepsilon - 1)R_1^2]};$$

$$B(r) \Big|_{r \geq R_1} = \frac{2\mathcal{J}_r}{cr} \left[\frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{\varepsilon r^2 - (\varepsilon - 1)R_1^2}{\varepsilon R_2^2 - (\varepsilon - 1)R_1^2} \right];$$

$$B(R_2) = 0.$$

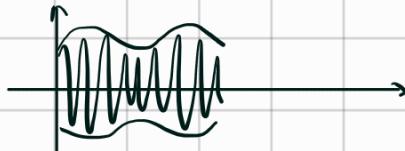
1) 1	11.16	11.10
1) 13(а,б)	T15	11.13
0) 12.1	11.2	T16

11.35	11.36
T17	T18

11.1. Найти спектры следующих колебаний:1) $f(t) = A \cos^2 \omega_0 t$ (квадратичное преобразование монохроматического сигнала);2) $f(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$; ($\Omega \ll \omega_0$; $m < 1$) (амплитудная модуляция);3) $f(t) = A \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t)$; ($\Omega \ll \omega_0$; $m \ll 1$) (фазовая модуляция).

$$1) f(t) = A \cos^2 \omega_0 t = \frac{A}{2} (1 + \cos(2\omega_0 t))$$

$$2) f(t) = A (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t) + Am \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) = \\ = A \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} Am \cos((\Omega + \omega_0)t) + \frac{1}{2} Am \cos((\Omega - \omega_0)t)$$



$$3) f(t) = A \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t) = A \cos(\omega_0 t) \cos(m \cos \Omega t) \approx A \cos(\omega_0 t) \cos(m \cos \Omega t) - A \sin(\omega_0 t) \sin(m \cos \Omega t) =$$

$$A \cos(\omega_0 t) - Am \cos(\Omega t) \sin(\omega_0 t) =$$

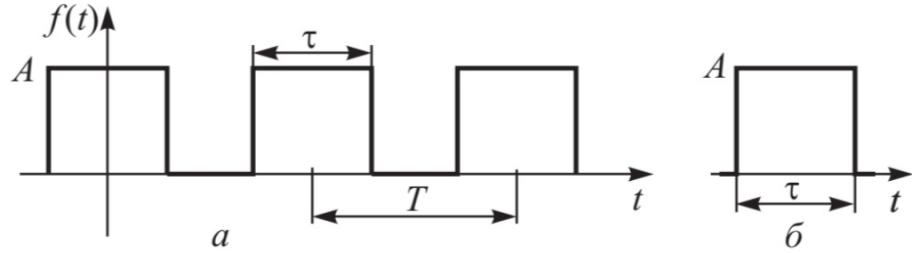
$$= A \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2} Am (\sin(\Omega t + \omega_0 t) + \sin(\Omega t - \omega_0 t))$$

$$11.1. 1) f(t) = A \cos^2 \omega_0 t = \frac{A}{2} + \frac{A}{2} \cos 2\omega_0 t;$$

$$2) f(t) = A(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t \approx A \cos \omega_0 t + \frac{mA}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t] + \frac{mA}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t];$$

$$3) f(t) = A \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t) \approx A \cos \omega_0 t + \frac{mA}{2} \cos \left[(\omega_0 - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right] + \frac{mA}{2} \cos \left[(\omega_0 + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right].$$

11.3. Найти спектр следующих сигналов, изображенных на рис. 298: а) периодическая последовательность прямоугольных импульсов; б) прямоугольный импульс; ~~и~~ синусоидальный ~~и~~.



$$f(t) = \frac{a_0}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)] \quad - \text{спектр}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(\omega n t) dt$$

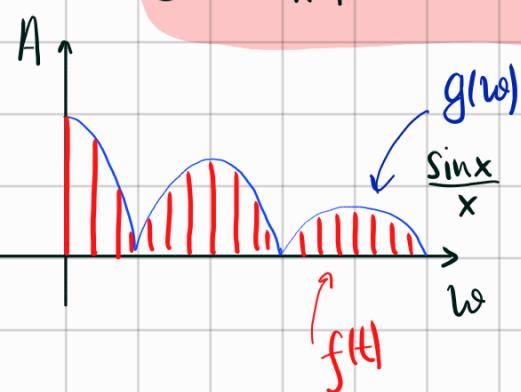
$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin(\omega n t) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt$$

$$\text{а)} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos(\omega n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} A \cos(\omega n t) dt = \frac{2A}{T \omega n} \cdot 2 \sin\left(\omega n \frac{T}{2}\right) = \\ = A \frac{2\pi}{T} \frac{\sin\left(\frac{\omega n \pi}{2}\right)}{\frac{\omega n \pi}{2}}$$

$$b_n = 0 \quad - \text{T.K. } f(t) \text{ четная}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\omega n t), \quad \text{згд} \quad a_n = A \frac{2\pi}{T} \frac{\sin\left(\frac{\omega n \pi}{2}\right)}{\frac{\omega n \pi}{2}}$$



$$\text{11.3. а)} \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i \omega_n t), \quad \text{где} \quad C_n = A \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n \pi / T)}{n \pi / T}, \quad \omega_n = n \frac{2\pi}{T};$$

$$\text{б)} \quad g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i \omega t) dt = A \tau \frac{\sin(\omega \tau / 2)}{\omega \tau / 2};$$

$$\delta) g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-i\omega t} dt = -\text{имеет каверноз.: или. Пурье}$$

$$= A \int_{-\infty}^{\gamma_1} e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{i\omega} \left(e^{-i\omega \frac{\gamma_1}{2}} - e^{i\omega \frac{\gamma_1}{2}} \right) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega \gamma_1}{2}\right) = A \frac{\sin\left(\frac{\omega \gamma_1}{2}\right)}{\frac{\omega \gamma_1}{2}}$$

12.1. Найдите спектр модулированного по амплитуде сигнала вида $g(t) = f(t) \cdot \cos \omega_0 t$, если спектр сигнала $f(t)$ равен $F(\omega)$. Рассмотрите случай $f(t) = e^{-\gamma t}$ при $t \geq 0$.

Ответ: $G(\Omega) = \frac{\gamma + i\Omega}{(\gamma + i\Omega)^2 + \omega_0^2}$

$$1) G(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega_0 t) e^{-i\Omega t} dt$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$2) G(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} e^{-i\Omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\Omega - \omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\Omega + \omega_0)t} dt \Rightarrow$$

$$G(\Omega) = \frac{1}{2} F(\Omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\Omega + \omega_0)$$

$$3) F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-i(\gamma + \omega)t} dt = \frac{e^{-(\gamma + i\omega)t}}{-(\gamma + i\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\gamma + i\omega}$$

$$G(\Omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma + i(\Omega - \omega_0)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma + i(\Omega + \omega_0)} = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma + i\Omega + i\omega_0}{(\gamma + i\Omega)^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma + i\Omega - i\omega_0}{(\gamma + i\Omega)^2 + \omega_0^2} \right] =$$

$$= \frac{\gamma + i\Omega}{(\gamma + i\Omega)^2 + \omega_0^2}$$

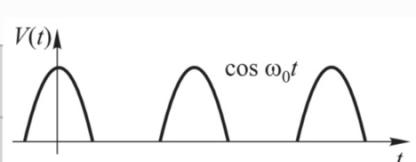
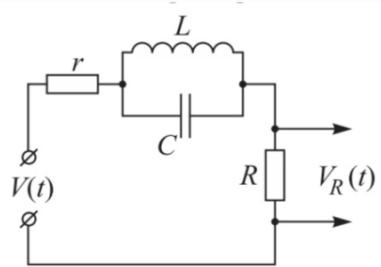


Рис. 308

ники к первой на выходе контура, если его добротность $Q = 100$.

11.16. Сигнал с выпрямителя имеет вид $V(t)$ (половинки косинусоиды) (рис. 308). Его подают на схему, изображенную на рис. 309. Контур L, C настроен на частоту ω_0 ; $R \gg \omega_0 L$ и $R \gg r$. Считая контур идеальным, определить форму сигнала $V_R(t)$.



$$1) Z(\omega) = r + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} + R = R + r + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2/\omega_0^2}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{\omega^2 L^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}} = R \sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \frac{\omega_0^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

$$V_{\text{вых}} = \frac{V_{\text{бх}}}{|Z|} R \approx V_{\text{бх}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0 L}{R} \right)^2 \frac{\omega^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right]$$

$$\text{To eqn } V_{\text{вых}} = V_{\text{бх}} \Leftrightarrow \omega_0 \neq \omega$$

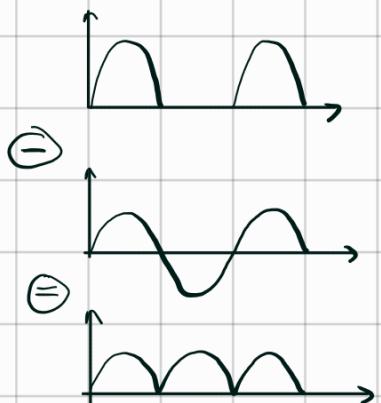
2) Рассмотрим $\omega = \omega_0$. (первая гармоника)

$f_i(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t)$ - единств. гармоника, которая не пропадет

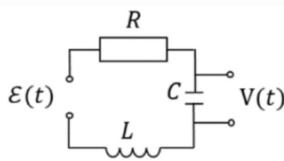
$$a_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t) dt = \frac{1}{2}$$

$$3) V_R(t) = V(t) - f_i(t) = \frac{1}{2} |\cos(\omega_0 t)|$$

$$11.16. V_R(t) = \frac{1}{2} |\cos \omega_0 t|.$$

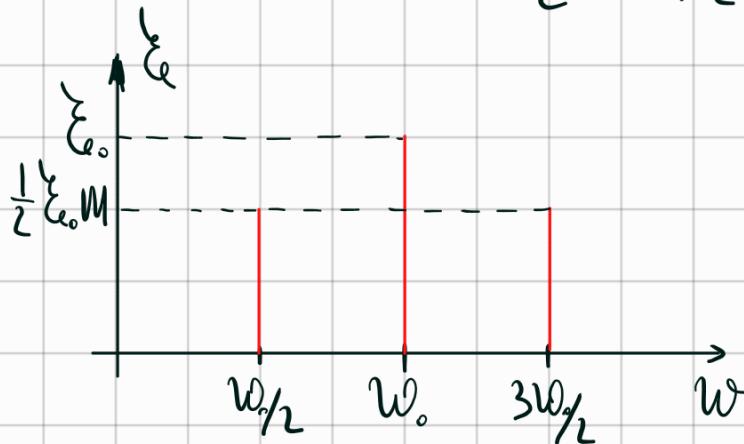


T15. (2019-5A) Вынужденные колебания напряжения на конденсаторе высокодобротного колебательного контура возбуждаются внешней ЭДС $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, где частота модуляции $\Omega = \omega_0/2$, $m < 1$. При резонансной частоте контура $\omega_p = \omega_0/2$ оказалось, что две гармоники из спектра колебаний напряжения на конденсаторе $V(t)$ имеют одинаковые амплитуды. Определите глубину модуляции m , если добротность контура $Q = 25$.



Ответ: $m = \frac{2}{3Q} = \frac{2}{75}$

$$1) \quad \sum_{\text{E}} |t| = \sum_{\text{E}_0} (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = \\ = \sum_{\text{E}_0} \cos \omega_0 t + \frac{\sum_{\text{E}_0} m}{2} \cos \left(\frac{3\omega_0}{2} t \right) + \frac{\sum_{\text{E}_0} m}{2} \cos \left(\frac{\omega_0}{2} t \right)$$



$$2) \quad Q = \frac{1}{\omega_p R C} \quad \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \delta = \frac{R}{2L}$$

$$K(\omega) = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C} = R + j \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} \right) = R + j \left(\frac{\omega^2 / \omega_p^2 - 1}{\omega C} \right)$$

$$|K(\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1 - \omega^2 / \omega_p^2}{\omega C} \right)^2} = \frac{1}{\omega C} \sqrt{\frac{1}{Q^2} \frac{\omega^2}{\omega_p^2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right)^2}$$

$$\Rightarrow V_{\text{busx}} = \left| \frac{V_{\text{bus}}}{|K(\omega)|} \frac{1}{j\omega C} \right| = \frac{V_{\text{bus}} Q}{\sqrt{Q^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega^2}{\omega_p^2} \right)^2}}$$

$$4) \quad \omega = \omega_0/2 = \omega_p \quad \rightarrow \quad V_{\text{busx}} = \frac{\sum_{\text{E}} M}{2} \cdot 25 \quad \left| \begin{array}{l} \frac{25}{2} M = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow M = \frac{2}{75} \end{array} \right.$$

$$\omega = \omega_0 = 2\omega_p \quad \rightarrow \quad V_{\text{busx}} = \sum_{\text{E}} \cdot \frac{1}{3} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{3} = \frac{M}{16} \\ \Rightarrow M > 1 - \text{Неверно} \end{array} \right.$$

$$\omega = \frac{3}{2}\omega_0 = 3\omega_p \quad \rightarrow \quad V_{\text{busx}} = \frac{\sum_{\text{E}} M}{2} \cdot \frac{1}{8}$$

11.2. В приемниках радиоизлучения обычно осуществляется квадратичное преобразование принимаемого сигнала с последующим усреднением за некоторое время Δt , причем $2\pi/\omega_0 \ll \Delta t \ll 2\pi/\Omega$, где ω_0 — радиочастота, Ω — частота модуляции ($\omega_0 \gg \Omega$). Что зарегистрирует такой приемник в следующих случаях:

1) на вход поданы амплитудно-модулированные колебания (задача 11.1, п. 2);

2) на вход поданы колебания, модулированные по фазе (задача 11.1, п. 3);

3) на вход поданы колебания с отфильтрованной несущей (т. е. частотой ω_0);

4) на вход поданы колебания, модулированные по фазе, в которых фаза спектральной компоненты частоты ω_0 изменена на $\pi/2$ (т. е. фаза несущей изменена на $\pi/2$)?

$$1) f(t) = A(1+m\cos\Omega t)\cos(\omega t), \quad \omega \gg \Omega$$

$$g(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \frac{\Delta t}{2}}^{t_0 + \frac{\Delta t}{2}} f'(t) dt = \frac{A^2(1+m\cos\Omega t)}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin((\omega + \Omega)t) dt =$$

$$= \frac{A^2(1+m\cos\Omega t)}{2} = \frac{A^2}{2}(1+2m\cos\Omega t)$$

$$2) f(t) = A\cos(\omega t + m\cos\Omega t) \quad \omega \gg \Omega$$

$$g(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \Delta t}^{t_0 + \Delta t} A\cos^2(\omega t + \varphi_0) dt = \frac{A^2}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{2} = \frac{A^2}{2}$$

$$3) f(t) = A \cancel{\cos(\omega_0 t)} + \frac{1}{2} Am \cos((\Omega + \omega_0)t) + \frac{1}{2} Am \cos((\Omega - \omega_0)t)$$

$$g(t) = \frac{1}{\Delta t} \frac{A'm'}{4} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} (\cos(\dots) + \cos(\dots))^2 dt = \frac{1}{\Delta t} \frac{A'm'}{4} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} (\cos^2(\dots) + 2\cos(\dots)\cos(\dots) + \cos^2(\dots)) dt =$$

$$= \frac{m^2 A^2}{4} + \frac{m^2 A^2}{4\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \cos(2\Omega t) + \cos(2\omega t) dt = \frac{m^2 A^2}{4} (1 + \cos(2\Omega t))$$

$$4) f(t) \stackrel{11.1}{=} A \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2} Am \left(\sin(\Omega t + \omega_0 t) + \sin(\Omega t - \omega_0 t) \right)$$

$$f(t) = A \left(\sin \omega_0 t + \frac{M}{2} \cdot 2 \sin(\omega_0 t) \cos(\Omega t) \right) = A \sin(\omega_0 t) \left[1 + \overset{\approx \text{const}}{M \cos(\Omega t)} \right]$$

$$g(t) = A^2 \left(\left(1 + M \cos \Omega t \right) \frac{1}{\omega t} \int_{t-\frac{\omega t}{2}}^{t+\frac{\omega t}{2}} \sin^2(\omega t) dt \right) = \frac{A^2}{2} (1 + 2m \cos \Omega t)$$

11.2. 1) $g(t) \sim A^2 (1 + m \cos \Omega t)^2$; при $m \ll 1$ $g(t) \sim A^2 (1 + 2m \cos \Omega t)$.

2) $g(t) \sim A^2 = \text{const}$.

3) $g(t) \sim (mA)^2 + (mA)^2 \cos 2\Omega t$.

4) $g(t) \sim A^2 (1 + 2m \cos \Omega t)$.

11.10. В схеме, изображенной на рис. 303, действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos^2 \Omega t$. Определить токи \mathcal{J} и \mathcal{J}_1 , если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению $\Omega^2 = 1/(4LC)$.

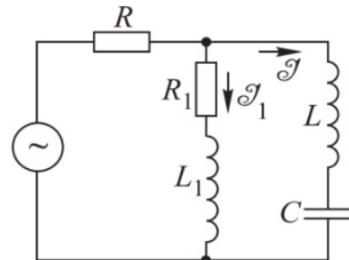


Рис. 303

$$\xi(t) = \frac{\xi_0}{L} + \frac{\xi_0}{2} \cos(2\Omega t)$$

$$1) \text{ Постоянная } \frac{\xi_0}{2} \text{ вызывает } J_1^* = \frac{\xi_0}{2(R_1 + R)}$$

$$2) 2\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0 \Rightarrow K_{ic} = j\omega L - \frac{j}{\omega C} = j \left(\frac{\omega \omega_0^2 - 1}{\omega C} \right) = 0 \Big|_{\omega = \omega_0}$$

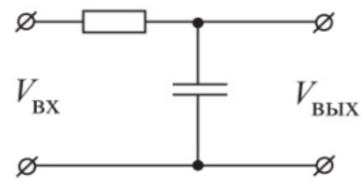
$$\Rightarrow LC \text{ контур имеет } 0^\circ \text{ comp} \Rightarrow J^* = \frac{\xi_0 \cos(2\Omega t)}{2R}$$

$$3) \text{ Итого: } J = J_1^* = \frac{\xi_0}{2(R_1 + R)}$$

$$J = J^* = \frac{\xi_0}{2R} \cos(2\Omega t)$$

$$11.10. J = \frac{\mathcal{E}_0}{2R} \cos 2\Omega t; J_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2(R_1 + R)}.$$

11.13. На RC -цепочку (рис. 306) подается синусоидальное напряжение $V_{\text{вх}} = V_0 \cos \omega t$. Параметры цепочки подобраны так, что сдвиг фаз между $V_{\text{вых}}$ и $V_{\text{вх}}$ составляет -45° . Определить спектральный состав выходного напряжения и фазовые сдвиги между спектральными компонентами для случая, когда расстояние между пластинами плоского конденсатора изменяется по закону $d = d_0(1 + a \cos \Omega t)$, причем $\Omega \ll \omega$ и $a \ll 1$.



$$1) V_{\text{вых}} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} V_{\text{вх}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} V_{\text{вх}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 RC^2} V_{\text{вх}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\omega RC = -1 \Rightarrow \omega RC = 1$$

$$2) C(t) = \frac{d}{d_0(1 + a \cos \Omega t)} = \frac{C_0}{1 + a \cos \Omega t}$$

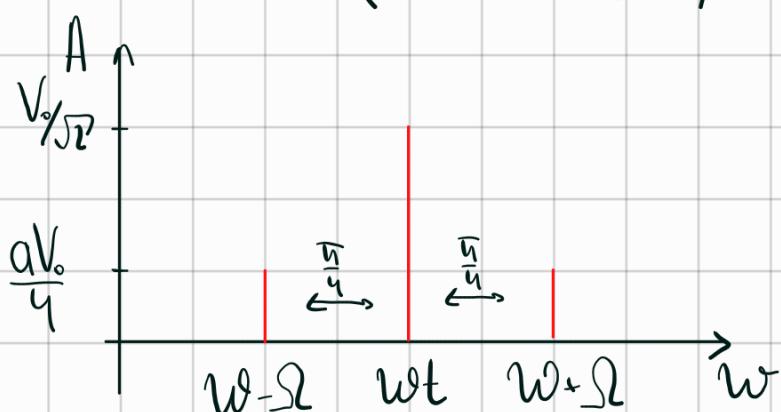
$$3) V_{\text{вых}} = \frac{V_{\text{вх}}}{1 + j\omega RC} = \frac{V_{\text{вх}}}{1 + \frac{j}{1 + a \cos \Omega t}} = \frac{1 + a \cos \Omega t}{1 + a \cos \Omega t + j} V_{\text{вх}} = \frac{(1 + a \cos \Omega t)(1 + a \cos \Omega t - j)}{(1 + a \cos \Omega t)^2 + 1}$$

$$4) \frac{1}{j\omega C} = \frac{1 + 2a \cos \Omega t - j(1 + a \cos \Omega t)}{2(1 + a \cos \Omega t)} = \frac{1}{2} \left[2 - j - \frac{1}{1 + a \cos \Omega t} \right] V_{\text{вх}} \approx$$

$$= \frac{1}{2} \left[2 - j - 1 + a \cos \Omega t \right] V_{\text{вх}} = \left[\frac{1 - j}{2} + \frac{a \cos \Omega t}{2} \right] V_{\text{вх}}$$

$$4) V_{\text{вых}} = \frac{1}{2} V_{\text{вх}} e^{j\omega t} \left(\sqrt{1} e^{j\frac{\pi}{4}} + a \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) = \frac{V_0}{2} \left[e^{j(\omega t - \frac{\pi}{4})} + \frac{a}{2} e^{j(\omega + \Omega)t} + \frac{a}{2} e^{j(\omega - \Omega)t} \right]$$

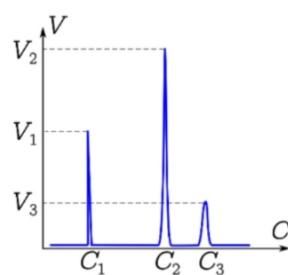
сдвиг $\frac{\pi}{4}$



11.13. Спектр выходного напряжения содержит компоненту основной частоты ω с амплитудой $V_0/\sqrt{2}$ и две боковые компоненты на частотах $\omega \pm \Omega$ с амплитудами $aV_0/4$, сдвинутые по фазе на $\pi/4$ относительно основной частоты.

T16. (2020-1Б) Вынужденные колебания в высокодобротном RLC-контуре возбуждаются последовательно включённой внешней ЭДС $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ с законом фазовой модуляции $\varphi(t) = m \cos \Omega t$, где $m = \frac{1}{9}$ и $\Omega = \frac{4}{5} \omega_0$. Зависимость амплитуды напряжения V на конденсаторе от его ёмкости C схематично показана на рисунке. Найдите отношения V_2/V_1 и V_1/V_3 .

Ответ: $\frac{V_2}{V_1} = 10$, $\frac{V_1}{V_3} = 9$.



11.1

$$1) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \Omega t)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E} \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 M \left(\sin(\Omega t + \omega_0 t) + \sin(\Omega t - \omega_0 t) \right)$$

$$2) \quad K(\omega) = \frac{1}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{Q}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)Q - j \frac{\omega}{\omega_p}} =$$

$$V_{\text{谐振}} = \frac{\mathcal{E}_0}{|K|} = \sqrt{Q^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} \Rightarrow \omega = \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$3) \quad V_1: \quad Q_1 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_1}} \Rightarrow V_1 = \frac{\mathcal{E}_0 M}{2} \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_1}} \quad \left| \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{2}{M \sqrt{C_2}} = \frac{2}{M \omega_0 + \Omega} = \right.$$

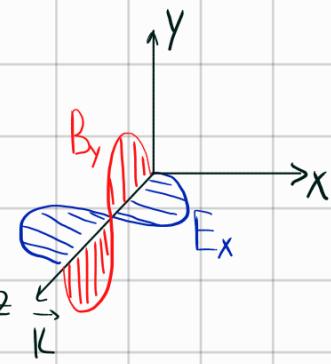
$$V_2: \quad Q_2 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_2}} \Rightarrow V_2 = \mathcal{E}_0 \cdot \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_2}}$$

$$V_3: \quad Q_3 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_3}} \Rightarrow V_3 = \frac{\mathcal{E}_0 M}{2} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C_3}}$$

$$= 18 \cdot \frac{1}{1 + \frac{4}{5}} = 10$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_3} = \sqrt{\frac{C_3}{C_1}} = \frac{\omega_0 + \Omega}{\omega_0 - \Omega} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} = 9$$

14.1. Плоская электромагнитная волна бежит в однородной среде в направлении оси z и имеет компоненты поля $E_x(z, t)$ и $B_y(z, t)$. Фазовая скорость волны равна v . Показать, что в любой момент времени $E_x = \frac{v}{c} B_y$.



$$1) K = \frac{\omega}{v_\phi}$$

$$2) \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t - i(K_z r)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i\omega t - i(K_z r)}$$

3) Уп-е Маркевича:

$$\text{rot } \vec{E} = [\vec{\nabla} \vec{E}] = -i [\vec{K}, \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{c} i \omega B$$

$$4) KE_x = \frac{1}{c} \omega B_y \Rightarrow E_x = \frac{\omega}{Kc} B_y = \frac{v_\phi}{c} B_y$$

14.2. При какой длине кабеля его нельзя при расчётах заменить эквивалентным точечным сопротивлением, если частота в цепи $v = 50$ Гц?

Ответ: $\ell \gtrsim 6 \cdot 10^3$ км.

$$1) \lambda = vT = \frac{v}{\omega} = \frac{2\pi v}{\omega}$$

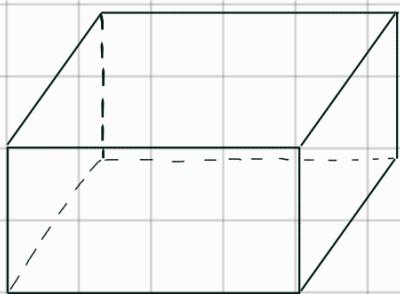
$$\lambda = \frac{c}{\omega} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}{5 \cdot 10^6 s^{-1}} = 6 \cdot 10^6 m = 6 \cdot 10^3 km$$

$$2) \text{Длинная линия} \Leftrightarrow \ell \gtrsim \lambda = 6 \cdot 10^3 km$$

$U = U(x, t) \Rightarrow$ нельзя заменить

14.3. Найти минимальную частоту электромагнитных колебаний в объёмном прямоугольном резонаторе со сторонами $1 \times 2 \times 3$ см, выполненным из идеального проводника.

Ответ: 9 ГГц.



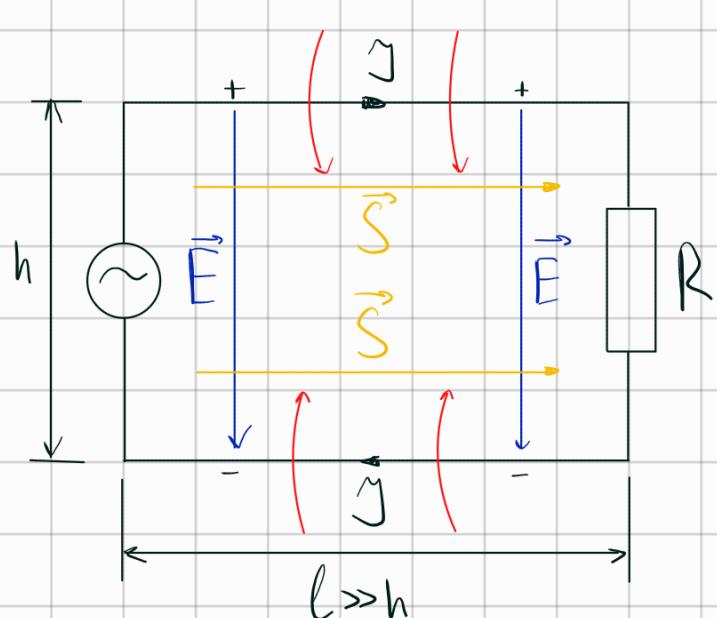
$$1) W = \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n_x \pi}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{n_y \pi}{Y_0}\right)^2 + \left(\frac{n_z \pi}{Z_0}\right)^2}, \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \quad \text{но только один } 0 \Rightarrow n_x = 0, \text{ т.к. } \min$$

$$W_{\min} = W_{0,11} = C_0 \sqrt{\frac{1}{Y_0^2} + \frac{1}{Z_0^2}} \Rightarrow \omega_{\min} = \frac{C}{2} \sqrt{\frac{1}{Y_0^2} + \frac{1}{Z_0^2}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{2} \sqrt{\frac{13}{36}} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Р}_y$$

12.25. Имеется двухпроводная линия из идеального проводника (без тепловых потерь). Одна пара концов линии присоединена к генератору постоянного тока, другая — к некоторому сопротивлению (нагрузке). Показать, что если падение напряжения в проводах не учитывать, то вектор потока энергии (вектор Пойнтинга) \vec{S} в пространстве между проводами направлен вдоль проводов от генератора к нагрузке. Как изменится картина, если учесть сопротивление проводов?

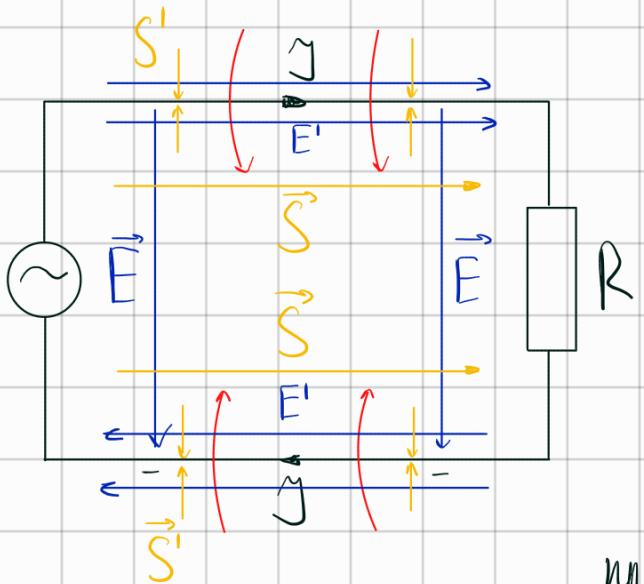
$$\vec{S} = [\vec{E}; \vec{H}] \quad (\text{ч.н})$$

1) Сопр. проводов не учитываем



Вектор \vec{S} направлен от источника к нагрузке

2) Сопр. проводов учитываем



Теперь некоторая составляющая вектора \vec{S} направлена в провод.

Это соответствует тому, что на проводе передаёт нек. энергия

12.40. В двухпроводной линии из задачи 12.25 ток отстает по фазе от напряжения на 90° . Показать, что вектор Пойнтинга \mathbf{S} через каждую четверть периода меняет свое направление на обратное и, следовательно, поток энергии за период равен нулю (стоячая волна).

$$1) U = U_0 \cos(\omega t)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_0 \sin(\omega t)$$

$$2) \vec{E} = \frac{U}{h} = \frac{U_0}{h} \cos(\omega t)$$

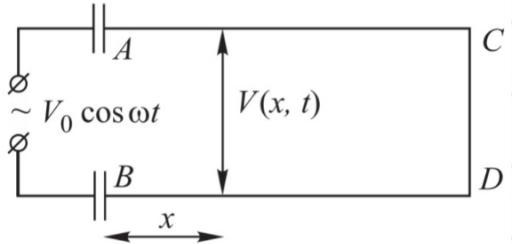
$$\vec{B} = \frac{2I}{cr} = \frac{2I_0}{cr} \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow S(r) = \frac{U_0 I_0}{h c r} \cdot \sin(2\omega t) = \frac{U_0 I_0}{h c r} \cdot \sin\left(\pi \frac{4t}{T}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow S$ меняет направл. каждые $\frac{T}{4}$

$$3) \Phi_w \propto \int_0^T \sin\left(\pi \frac{4t}{T}\right) dt = 0$$

12.42. Провода системы Лехера находятся в ёмкостной связи с генератором синусоидальных колебаний, который поддерживает между концами A и B переменное напряжение $V_0 \cos \omega t$, где V_0 и ω — постоянные. Концы C и D закорочены (рис. 343). Длина лехеровой системы $AC = BD = l$. Найти распределение напряжения $V(x, t)$ между проводами как функцию координаты x и времени t , предполагая, что колебания установились, а активное сопротивление всех проводов равно нулю. Исследовать амплитуду A установившихся колебаний напряжения в пучностях в зависимости от длины l лехеровой системы.



$$V(x, t) = \underbrace{A e^{-\delta x} e^{i\omega t - ikx}}_{\text{падающий}} + \underbrace{B e^{-\delta x} e^{i\omega t + ikx}}_{\text{отдающий}} e^{i\psi_a}$$

1) Провода идеальные $\Rightarrow e^{-\delta x} \equiv 1$

Известна форма $\Rightarrow V(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \psi_a) + B \cos(\omega t + kx + \psi_b)$

2) Ры: $V(l, t) = 0 \Rightarrow A \cos(\omega t - kl + \psi_a) + B \cos(\omega t + kl + \psi_b) = 0 \Rightarrow A = -B, -kl + \psi_a = kl + \psi_b \Rightarrow \psi_b = \psi_a - 2kl$

3) $V(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \psi_a) - A \cos(\omega t + kx + \psi_a - 2kl) = A \cdot 2 \sin(\omega t + \psi_a - kl) \sin(k(l-x))$

Ры: $V(0, t) = V_0 \cos(\omega t)$

$$V(0, t) = 2A \sin(\omega t + \psi_a) \sin(kl) = V_0 \cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A \sin(kl) = V_0; \quad \psi_a = -\frac{\pi}{2}$$

Утог: $V(x, t) = \frac{V_0}{\sin(kl)} \sin(k(l-x)) \cos(\omega t)$

Приведем к общему виду задачника:

$$V(x,t) = V_0 \frac{\cos(kl + kx + \frac{\pi}{2}) \cos(\omega t)}{\cos(\frac{\pi}{2} - kl)} = V_0 \frac{\cos(kx + \delta) \cos(\omega t)}{\cos \delta},$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} - kl < \frac{\pi}{2}$$

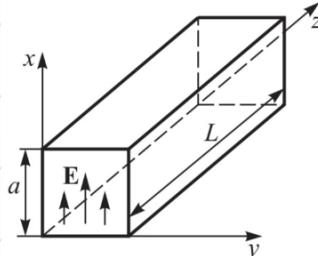
Путиныль $\Leftrightarrow \sin(k(l-x)) = \pm 1 \Rightarrow kl(l-x) = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow x = l - \frac{\frac{\pi}{2} + n\pi}{k}$

12.42. Без учета сопротивления проводов $V(x,t) = V_0 \frac{\cos(kx + \delta) \cos \omega t}{\cos \delta}; A = \frac{V_0}{\cos \delta}$, где $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, $\delta \leq \pi/2$.

$$A_{\text{мод}} = \frac{V_0}{\sin(kl)} = \frac{V_0}{\cos \delta}$$

12.46. В волноводе квадратного сечения со стороной $a = 5$ см с металлическими стенками возбуждаются колебания электрического поля $E_x = E_0 \cos 2\pi\nu_0 t$ с частотой $\nu_0 = 2995$ МГц (поле \mathbf{E} перпендикулярно оси волновода z и параллельно одной из стенок)

(рис. 344). При какой минимальной частоте амплитудной модуляции ν_{\min} в волноводе возникнет бегущая волна? Чему равна фазовая скорость волны при частоте модуляции $\nu = 5$ МГц?



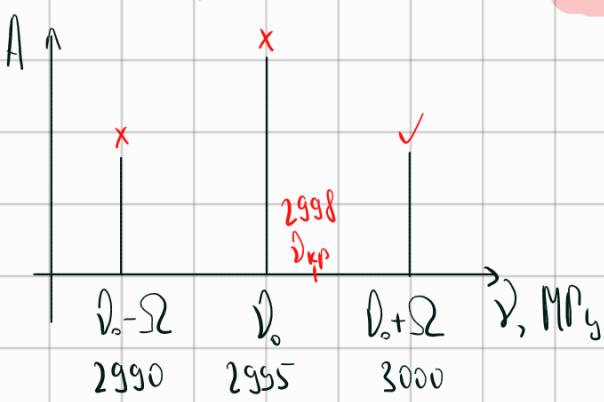
$$1) \omega_{kp} = \omega_{1,0} = \frac{\pi}{a} c$$

$$\nu_{kp} = \frac{\omega_{kp}}{2\pi} = \frac{c}{2a} = \frac{c}{2a} \approx 2998 \text{ МГц}$$

Рис. 344

3) Синхр АМ:

$$\nu_{\min} = \nu_{kp} - \nu_0 = 3 \text{ МГц} - \text{появляется правое гармоника}$$



$$4) \quad V_{\Phi} = \frac{W}{K_2} = \frac{C}{\sqrt{1 - \left(\frac{w_{kp}}{w}\right)^2}} = \frac{C}{\sqrt{1 - \left(\frac{2998}{3000}\right)^2}} \approx 27,4 C$$

12.46. $v_{min} = 3 \text{ МГц}; v = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{kp}}{v_0 + v}\right)^2}} \approx 27,4 c; v_{kp} = \frac{c}{2a} \approx 2998 \text{ МГц.}$

12.52. Мощный СВЧ-генератор через волновод питает нагрузку, посылая в волновод мощность $N_0 = 100 \text{ кВт}$. Часть этой мощности поглощается в нагрузке ($N_h = 75 \text{ кВт}$), а часть отражается. В результате в волноводе возникает суперпозиция прямой и отраженной волн, распространяющихся во встречных направлениях. Найти коэффициент стоячей волны в волноводе, т. е. отношение максимальной напряженности поля (в пучности) к минимальной (в узле).

$$1) \quad U(x,t) = A e^{i\omega t - kx} + B e^{i\omega t + kx} \quad N_{avg} = 2A^2; \quad N_o = 2(A^2 + B^2)$$

$$Y(x,t) = \frac{A}{R} e^{i\omega t - kx} + \frac{B}{R} e^{i\omega t + kx} \quad \Rightarrow \quad N_{opp} = 2B^2; \quad N_h = 2A^2$$

$$\Rightarrow \frac{N_h}{A^2} = \frac{N_o}{A^2 + B^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{A^2 + B^2}{A^2} = \frac{N_h}{N_o} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{N_o - N_h}{N_o}} = \frac{B}{A} = \frac{1}{2} = r$$

$$2) \quad KCB = \frac{U_{max}}{U_{min}} = \frac{1+r}{1-r} = 3$$

12.52. $k = \frac{1+r}{1-r} = 3$. Здесь $r^2 = \frac{N_0 - N_h}{N_0} = 0,25$ — коэффициент отражения по мощности, r — коэффициент отражения по амплитуде.

12.67. Для передачи электромагнитной энергии от генератора высокочастотных колебаний к нагрузке используется длинная линия, состоящая из двух плоских шин, расположенных параллельно друг другу (рис. 349). Ширина шин $l = 10$ см, расстояние между ними $d = 1$ см. Оценить скорость распространения электромагнитных волн в такой линии, а также импеданс Z_H нагрузки, при которой в линии устанавливается чисто бегущая волна. Считать, что длина волны $\lambda \gg d, l$.

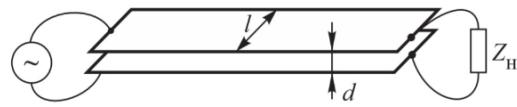
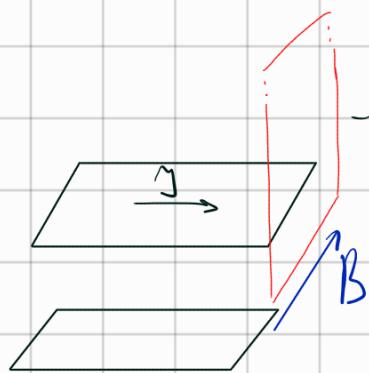


Рис. 349

$$1) V = \frac{C}{\sqrt{C_x L_x}}$$

$$2) C_x = \frac{\epsilon S}{4\pi d} = \frac{l}{4\pi d}$$

3)



Th. Чиркуляции:

$$\cdot 4\pi \frac{M}{C} = B \cdot l \Rightarrow B = \frac{4\pi M}{C l}$$

$$\Phi = \frac{1}{C} L M \Rightarrow L = \frac{C \Phi}{M} = \frac{C}{M} B S = \frac{C}{M} \frac{4\pi M}{C l} S = \frac{4\pi}{l} S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_x = 4\pi \frac{d}{l}$$

$$4) V = \frac{C}{\sqrt{\frac{l}{4\pi d} \cdot \frac{4\pi d}{l}}} = C$$

$$5) R_{\text{согл}} = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{L_x}{C_x}} = \frac{1}{C} \cdot \frac{4\pi d}{l} = \frac{1}{3 \cdot 10^{10}} \frac{4 \cdot 3.14 \cdot 1}{10} = 4.2 \cdot 10^{-10} \frac{C}{CM}$$

$$12.67. v = c; z_H = R_{\text{согл}} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L_{\text{ед}}}{C_{\text{ед}}}} = \frac{4\pi d}{cl} = 4.2 \cdot 10^{-10} \text{ с/см} = 37.7 \text{ Ом}$$

12.48. Генератор электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda = 8 \text{ мм}$ и мощностью $N = 1 \text{ Вт}$ настроен на основную моду прямоугольного резонатора с металлическими стенками, объем которого $V = 0,2 \text{ см}^3$ и добротность $Q = 10^3$. Система соединения генератора и резонатора обеспечивает полное поглощение энергии генератора внутри резонатора. Определить максимальную напряженность E_0 электрического поля в резонаторе.

$$|| Q = \frac{\epsilon}{2\pi\lambda} = \frac{W}{4\pi\lambda} = 2\pi \frac{W_{\max}}{W_{\text{not}}} = 2\pi \frac{W_{\max}}{NT} = 2\pi \frac{W_{\max}}{N} \cdot \frac{C}{\lambda}$$

$$2) E_x = E_{x0} \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z e^{i\omega t}$$

$$E_y = E_{y0} \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z e^{i\omega t}$$

$$E_z = E_{z0} \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z e^{i\omega t}$$

Основная мода $\Rightarrow \begin{cases} E_x = E_0 \sin k_y y \sin k_z z e^{i\omega t} \\ E_y = E_z = 0 \end{cases}$

$$3) W_{\max} = W_{\text{not}} = \frac{\bar{E}^2}{8\pi} V \Rightarrow W^{\max} = \frac{\bar{E}^2}{4\pi} V \quad (W = W^{\max} \Leftrightarrow \bar{E} = \bar{E})$$

$$4) \bar{E}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T E_x^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \sin^2 k_y y \sin^2 k_z z \cos^2 k_z z dt = \frac{E_0^2}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \cos(2k_z z) \right) \left(\frac{1}{2} - \cos(2k_y y) \right) \left(\frac{1}{2} + \cos(2k_z z) \right) dt$$

$$= \frac{E_0^2}{T} \cdot \frac{1}{8} T = \frac{E_0^2}{8}$$

$$5) E_0 = \sqrt{8\bar{E}} = \sqrt{8 \cdot \frac{4\pi}{V} W_{\max}} = \sqrt{8 \cdot \frac{4\pi}{V} \cdot \frac{QN\lambda}{2\pi C}} = \sqrt{4 \frac{QN\lambda}{VC}} \approx 4,67 \text{ ед. СГСЭ} = 1,4 \text{ кВ/см}$$

12.48. $E_0^2 = \frac{16QN\lambda}{VC}; E_0 \approx 4,6 \text{ ед. СГСЭ} = 1,4 \text{ кВ/см}$

T20. (2018-4A) В прямоугольном резонаторе с хорошо проводящими стенками размерами $a \times a \times b$, где $a > b$, две наименьшие резонансные частоты равны $\nu_1 = 10 \text{ ГГц}$ и $\nu_2 = 11 \text{ ГГц}$ соответственно. Найдите следующую разрешенную частоту резонатора.

Ответ: $\nu_3 \approx 13 \text{ ГГц}$.

$$1) \quad \omega_1 = \frac{C}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi}{b}\right)^2}, \quad n, m, l = 0, 1, 2, \dots$$

но только один 0

$$\begin{array}{l} a \ a \ b \\ 1 \ 1 \ 0 : \end{array} \quad \omega_1 = \frac{C\pi}{a} \sqrt{2} \Rightarrow \nu_1 = \frac{C}{a} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \frac{C}{\nu_1} \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2,12 \text{ см}$$

$$0 \ 1 \ 1 : \quad \omega_1 = C\pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \Rightarrow \nu_2^2 = \frac{C^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \Rightarrow b^2 = \frac{1}{\frac{4\nu_2^2}{C^2} - \frac{1}{a^2}} \approx 3,17 \text{ см}^2$$

$b \approx 1,78 \text{ см}$

$$1 \ 1 \ 1 : \quad \omega_3 = C\pi \sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \Rightarrow \nu_3 = \frac{C}{2} \sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \approx 13 \text{ ГГц}$$

8-14 дек.	15	Элементы физики плазмы. Скин-эффект.	015.1 X	12.55 X	12.53 X
			015.2 X	12.58 X	T21 X
			015.3 X	12.96 X	T23 X
			T22 X		

15.1. Температура электронов в плазме тлеющего разряда $T_e \sim 10^4$ К, концентрация $n_e \sim 10^9$ см⁻³. При каком радиусе трубки разряд можно считать квазинейтральным?

Ответ: $r \gg 0,2$ мм.

$$1) R_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n_e e^2}} = \frac{1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 10^4}{4 \cdot 3.14 \cdot 10^9 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9)^2} \approx 0.02 \text{ см} = 0.2 \text{ мм}$$

$$2) r \gg R_D = 0.2 \text{ мм}$$

15.2. В условиях предыдущей задачи оцените кулоновскую энергию взаимодействия заряженных частиц в плазме (в расчёте на одну частицу). Можно ли считать такую плазму идеальным газом?

$N \left[\frac{\text{моль}}{\text{см}^3} \right]$

$$1) l \sim n^{-\frac{1}{3}} - \text{расц. между молекул}$$

$$2) W_{\text{кул}} = \frac{e^2}{l} = e^2 n^{\frac{1}{3}} \approx (1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9)^2 \cdot (10^9)^{\frac{1}{3}} \approx 2.3 \cdot 10^{-16} \text{ эВ} \approx 10^{-4} \text{ эВ}$$

$$W_{\text{кул}} = \frac{3}{2} k T_e = \frac{3}{2} (1.38 \cdot 10^{-16} \cdot 10^4) \cdot 10^9 \sim 10^{-8} \text{ эВ} \gg W_{\text{кул}} \Rightarrow$$

\Rightarrow да, можно

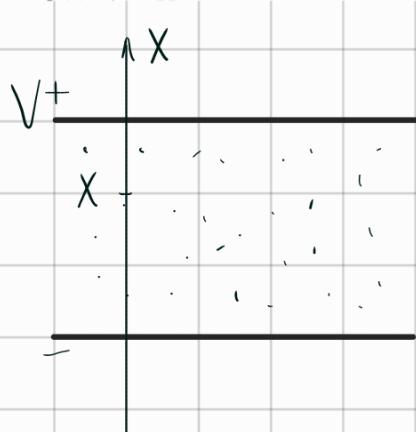
15.3. Радиосигнал с частотой $v = 4$ МГц посыпается вертикально вверх и отражается от ионосферы на некоторой высоте. Определить концентрацию электронов в точке отражения.

Ответ: $n_e = 2 \cdot 10^5$ см⁻³.

$$1) \text{Отраж} \Rightarrow n^2 = 1 - \frac{W_p}{W} \Rightarrow W_p = W$$

$$2) W_p = \frac{4\pi N e^2}{m} = 4\pi^2 N \Rightarrow N_e = \frac{\pi^2 M}{e^2} = \frac{3.14 \cdot (4 \cdot 10^6)^2 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}}{(1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9)^2} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$$

12.55. Плоский конденсатор заполнен плазмой со средней концентрацией электронов и ионов n_0 и температурой T . Расстояние между пластинами конденсатора a , разность потенциалов V . Пренебрегая током через плазму и считая $eV \ll kT$, определить пространственную зависимость потенциала в плазме между пластинами конденсатора.



$$1) n_e = n_0 e^{\frac{e\psi}{kT}} \approx n_0 \left(1 + \frac{e\psi}{kT}\right)$$

$$n_i = n_0 e^{-\frac{e\psi}{kT}} \approx n_0 \left(1 - \frac{e\psi}{kT}\right)$$

$$2) \Delta\psi = -4\pi\delta n f = -4\pi\delta n e(n_e - n_i) = +\delta n \frac{n_0 e^2}{kT} \psi$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\delta n e^2 n_0}{kT} \psi = \frac{\psi}{D^2}$$

$$D = \sqrt{\frac{kT}{\delta n n_0 e^2}}$$

$$3) \text{Решаем дифферур: } \psi(x) = A e^{-\frac{x}{D}} + B e^{\frac{x}{D}}$$

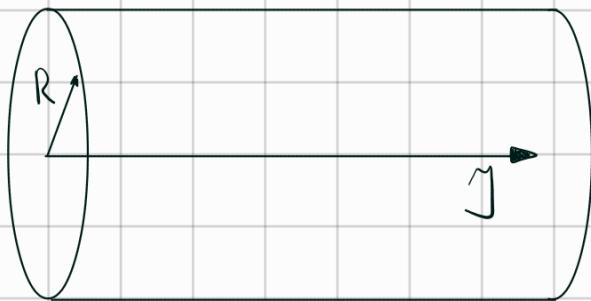
$$\psi(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$$

$$\psi(a) = V \Rightarrow A e^{-\frac{a}{D}} - A e^{\frac{a}{D}} = V \Rightarrow A = \frac{V/2}{\operatorname{sh}(a/D)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(x) = V \frac{\operatorname{sh}(x/D)}{\operatorname{sh}(a/D)}$$

$$12.55. \varphi(x) = V \frac{\operatorname{sh}(x/D)}{\operatorname{sh}(a/D)}, \text{ где } D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi n_0 e^2}}.$$

12.58* Z-пинч представляет собой плазменный шнур, вдоль оси которого течет ток \mathcal{J} . В равновесии магнитное давление его собственного магнитного поля уравновешивает газокинетическое давление плазмы. В одной из моделей плазма считается нейтральной с однородным распределением плотностей частиц и тока по поперечному сечению пучка. Оценить температуру T плазмы на оси шнура. Принять, что внешний радиус шнюра $R = 5 \text{ см}$, сила тока $\mathcal{J} = 4 \cdot 10^5 \text{ А}$, плотность частиц $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, магнитная проницаемость плазмы $\mu = 1$.



1) J_0 th. үиркүл:

$$B(r) \cdot 2\pi r = \frac{\mu_0}{c} \cdot \frac{J}{R^2} \Rightarrow B(r) = \frac{2J}{cR^2} r$$

$$2) W = \frac{B^2}{8\pi} = \frac{J^2}{8\pi c^2 R^4} r^2$$

$$dW = \frac{J^2}{8\pi c^2 R^4} r dr = P_{\text{магн}}(r) - \text{магн. давление}$$

$$3) P_{\text{магн}} = nk dT(r) = \frac{J^2}{8\pi c^2 R^4} r dr \Rightarrow dT(r) = \frac{J^2}{8\pi n k c^2 R^4} r dr$$

$$4) \int_R^0 dT(r) dr = \frac{J^2}{8\pi n k c^2 R^4} \int_R^0 r dr \Rightarrow T(0) - T(R) = \frac{J^2}{8\pi n k c^2 R^4} \frac{R^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow T(0) = \frac{J^2}{2\pi n k c^2 R^4} \sim 10^7 \text{ К}$$

↑ Пункт 2

$$12.58*: T(0) = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 \pi R^2 n k} \approx 1,47 \cdot 10^7 \text{ К}, \text{ где } k \text{ — постоянная Больцмана.}$$

12.96. Плоская электромагнитная волна с частотой $\omega = 10^{11} \text{ с}^{-1}$ падает нормально на поверхность плазмы. Уменьшение частоты на $\Delta\omega = 10^{10} \text{ с}^{-1}$ приводит к росту амплитудного коэффициента отражения на 0,01. Определить концентрацию электронов плазмы, полагая $\omega_p \ll \omega$.

$$1) \epsilon = n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}$$

$$r = \frac{1-n}{1+n} = \frac{\omega_p^2}{4\omega^2} \Rightarrow dr = \frac{-\omega_p^2}{2\omega^3} d\omega \Rightarrow \omega_p^2 = -2\omega^3 \frac{dr}{d\omega}$$

$$2) \omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m} \Rightarrow n = \frac{m_e}{4\pi e^2} \omega_p^2 = \frac{m_e}{2\pi e^2} \omega^3 \frac{dr}{d\omega} \approx 6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$$

12.96. $N_e = \frac{m_e}{4\pi e^2} \omega_p^2 \approx 6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$, где $\omega_p^2 = -2\omega^3 \frac{dr}{\Delta\omega} \approx 2 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-2}$.

T22. Оцените относительное уменьшение амплитуды сигнала из-за скин-эффекта в телевизионном коаксиальном кабеле длиной $L = 10 \text{ м}$ на частоте $f = 1 \text{ ГГц}$ (приблизительно верхняя граница дециметрового диапазона). Считать, что потери обусловлены в основном токами в центральном медном проводнике диаметром $D = 0,6 \text{ мм}$ (потери в экране малы вследствие его большой площади). Удельная проводимость меди $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \frac{\text{См}}{\text{м}} \approx 5,8 \cdot 10^{17} \text{ С}^{-1}$. См/м, волновое сопротивление кабеля $\rho = 75 \text{ Ом}$.

Ответ: $\Delta U/U \sim 0,4$.

$$1) l_{\text{скин}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu_0\sigma\omega}} \approx 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ см}$$

$$2) R_{\text{сп}} = \frac{1}{2} \frac{L}{\pi D l_{\text{скин}}} \approx 4,9 \cdot 10^9 \text{ Ом.} \text{ СРС} = 43,7 \text{ Ом}$$

$$3) \frac{\Delta U}{U} = \frac{f - R_{\text{сп}}}{f} \approx 0,4$$

12.53. В прямоугольном объемном резонаторе СВЧ-диапазона со сторонами $a < b < l$ возбуждают низшую моду колебаний. После накопления в резонаторе плазмы, образующейся в результате ионизации оставшегося после откачки воздуха, частота этой моды колебаний удваивается. По этим данным определить концентрацию электронов плазмы.

$$1) \quad \omega_{\min} = c \bar{n} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}$$

$$\omega^* = \frac{c \bar{n}}{\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\omega_{\min}^2}{\omega^{*2}} = \epsilon = \frac{1}{4}$$

$$2) \quad \epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^{*2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \omega_p^2 = \frac{3}{4} \omega^{*2} = 3\omega_{\min}^2 = 3c^2 \bar{n}^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2} \right)$$

$$3) \quad \frac{4\pi \bar{n} Ne^2}{m} = 3c^2 \bar{n}^2 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2} \right) \Rightarrow n = \frac{3mc^2 \bar{n}}{4e^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2} \right)$$

$$12.53. \quad n_e = \frac{3\pi m_e c^2}{4e^2} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{l^2} \right).$$

T21. Оцените омические потери в медном проводе длиной $l = 1$ м сечением $S = 4 \text{ мм}^2$ при протекании через него синусоидального тока с амплитудой $I = 20 \text{ А}$ и частотой $v = 13,56 \text{ МГц}$. Удельная проводимость меди $\sigma = 5,2 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$. Сравните результат с потерями при $v_0 \approx 50 \text{ Гц}$.

Ответ: $Q \approx \frac{I_0^2 l}{2\pi r} \sqrt{\frac{v}{\sigma}}$ [ед. СГС] $\approx 30 \text{ Вт}$ (при 50 Гц $Q \approx 0,9 \text{ Вт}$).

$$S = 4 \text{ мм}^2$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 1,12 \text{ мм}$$

$$1) \quad v = 13,56 \text{ МГц}; \quad l_{\text{ак}} = \frac{C}{2\pi \sqrt{\mu_0 \sigma}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{6,28 \sqrt{5,2 \cdot 10^7 \cdot 13,56 \cdot 10^6}} \approx 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ мкм}$$

$$2) \quad R_{\text{эф}} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{2\pi r l_{\text{ак}}} = \frac{1}{5,2 \cdot 10^{17}} \frac{100}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,112 \cdot 1,8 \cdot 10^{-2}} \cdot 9 \cdot 10^1 \Omega_M = 0,137 \Omega_M$$

$$3) \quad Q = \frac{I^2 R}{2} = \frac{1}{2} I^2 \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{l}{2\pi r} \cdot \frac{l}{C} \sqrt{\mu_0 \sigma} = \frac{1}{2} I^2 \frac{l}{C r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\sigma}} \approx 400 \cdot 0,14 \approx 30 \text{ Вт}$$

$$3) \quad v = 50 \text{ Гц}; \quad Q_0 \approx \frac{1}{2} 400 \cdot 0,0047 \approx 0,9 \text{ Вт}$$

T23. Плазма имеет проводимость $\sigma \sim 10^{14} \text{ с}^{-1}$. Оцените коэффициент диффузии магнитного поля в плазме и глубину проникновения магнитного поля за время $\tau = 1 \text{ мкс}$.

Ответ: $D_M \approx 70 \text{ м}^2/\text{с}$, $\delta \sim 1 \text{ см}$.

1) Ур-е диффузии:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

$$2) [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$[\vec{\nabla}, \vec{B}] = \frac{4\pi}{c} \lambda M \vec{E}$$

$$3) [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = -\frac{1}{c} [\vec{\nabla}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}]$$

$$0 - D \vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{4\pi}{c} \lambda M \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \underbrace{\frac{c^2}{4\pi \lambda M} D \vec{E}}$$

$$D = \frac{c^2}{4\pi \mu M \lambda} = 0.7 \cdot 10^6 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

$$\delta \sim \sqrt{D\tau} \approx 1 \text{ см}$$

11.1 X	11.16 X	11.10 X
11.3(a,b) X	T15 X	11.13 X
12.1 X	11.2 X	T16 X
	11.35 X	11.36 X
	T17 X	T18 X

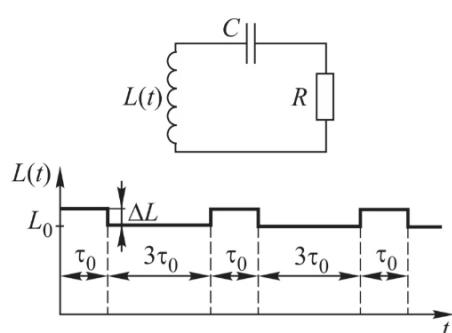


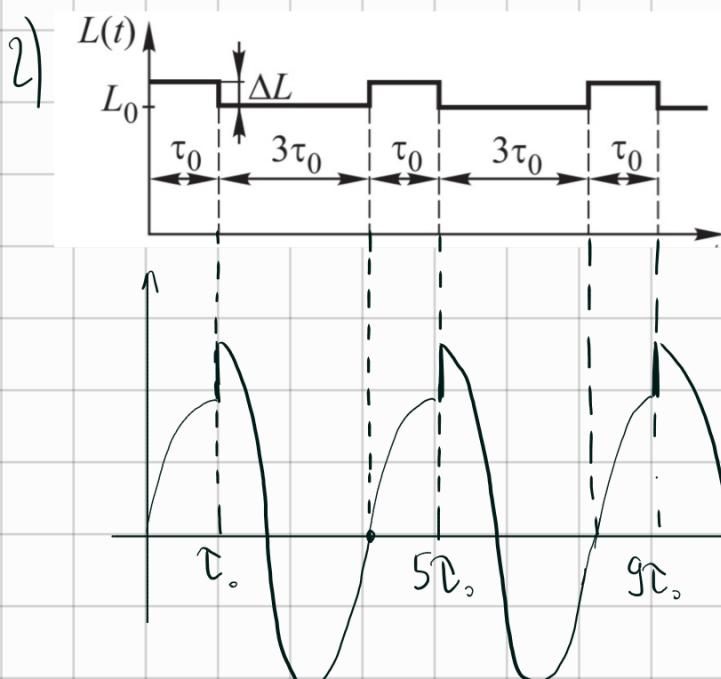
Рис. 322

$$1) \Phi = \frac{1}{C} LI - \text{множение не меняет}$$

$$\text{правиль сканка: } L_0 \bar{I}_0 = (L_0 + \Delta L) \bar{I} \Rightarrow \bar{I} = \frac{L_0}{L_0 + \Delta L} \bar{I}_0 = \bar{I}_0 \left(1 - \frac{\Delta L}{L_0 + \Delta L}\right) - \\ - \text{ток } \downarrow \text{ на } \frac{\Delta L}{L_0 + \Delta L} \bar{I}_0$$

$$\text{Частот сканка: } (L_0 + \Delta L) \bar{I}_0 = L \bar{I} \Rightarrow \bar{I} = \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right) \bar{I}_0 -$$

$$- \text{ток } \uparrow \text{ на } \frac{\Delta L}{L_0} \bar{I}_0$$



$$Q = \frac{1}{2} \bar{I}^2 R \cdot 4\tau = 2\bar{I}_0^2 R \tau$$

$$Q = \frac{1}{2} (L_0 + \Delta L) \bar{I}_0^2 - \frac{1}{2} L_0 \bar{I}_0^2 \left(\frac{L_0 + \Delta L}{L_0} \right)^2 = \\ = \frac{1}{2} \bar{I}_0^2 \left[L_0 + \Delta L - \frac{(L_0 + \Delta L)^2}{L_0} \right] \approx \\ \approx \frac{1}{2} \Delta L \bar{I}_0^2$$

$$3) 2\bar{I}_0^2 R \tau \leq \frac{1}{2} \Delta L \bar{I}_0^2 \Rightarrow R \leq \frac{\Delta L}{4\tau} = 10 \Omega$$

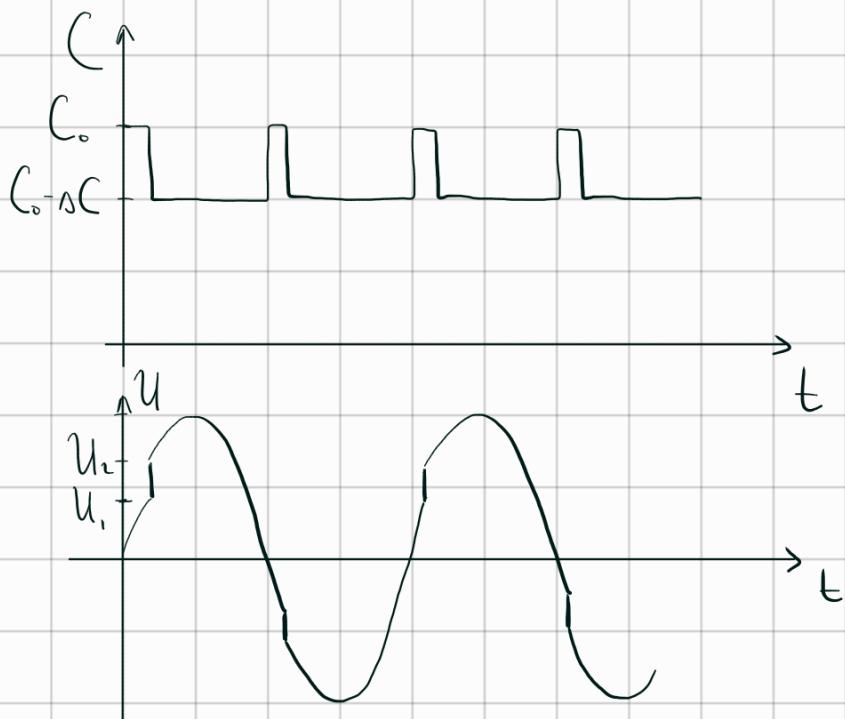
$$11.35. C = \frac{4\tau_0^2}{\pi^2 L_0} = 10^{-9} \Phi; R_{\max} = \frac{\Delta L}{4\tau_0} = 10 \Omega$$

$$4) \quad T = 2\pi \sqrt{RC} = 4\tau \Rightarrow C = \frac{4\tau^2}{4\pi^2 R} = 10^{-9} \Phi$$

11.36. Для поддержания незатухающих колебаний в LCR -контуре ($L = 4 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C = 10^{-10}$ Ф, $R = 1$ Ом) емкость конденсатора быстро изменяют на величину ΔC каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время $\tau = 6,4 \cdot 10^{-8}$ с возвращают в исходное состояние. Определить величину и знак ΔC .

$$1) \quad q = CU - \text{мин. не может}$$

Оreb, то когда $U=0$, $\Delta C > 0$,
когда $U=U_{\max}$, $\Delta C < 0$



$$(C_0 - \Delta C)U_0 = C_0 U_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow U_1 = \frac{C_0 - \Delta C}{C_0} U_0$$

$$U_1 = \frac{q}{C} = \frac{I_0 \tau}{C}$$

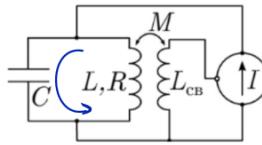
$$2) \cdot Q = \frac{1}{2} (C_0 - \Delta C) U_1^2 - \frac{1}{2} C_0 \left(\frac{C_0 - \Delta C}{C_0} \right)^2 U_1^2 = \\ = \frac{1}{2} U_1^2 \left[C_0 - \Delta C - \frac{(C_0 - \Delta C)^2}{C_0} \right] = \frac{1}{2} \Delta C U_1^2 = \frac{1}{2} \frac{I_0^2 \tau^2}{C^2} \Delta C$$

$$\cdot Q = \frac{1}{2} I_0^2 R \cdot \frac{T}{2} = \frac{1}{4} I_0^2 R T; \quad T = 2\pi \sqrt{LC} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$$

$$3) \quad \frac{1}{2} \frac{I_0^2 \tau^2}{C^2} \Delta C = \frac{1}{4} I_0^2 R T \Rightarrow \Delta C = \frac{R C T}{2 \tau^2} = 5 \cdot 10^{-12} \Phi$$

11.36. $|\Delta C| > \frac{RC^2 T}{2\tau^2} \approx 5 \cdot 10^{-12} \Phi$, где $T = 2\pi\sqrt{LC} \approx 4 \cdot 10^{-6}$ с. $\left| \frac{\Delta C}{C} \right| \approx 10^{-2}$.

T17. (2023-6A) Колебательный контур подключён к источнику тока (показан на схеме символом « I », стрелка указывает направление протекания тока). Величина тока источника регулируется напряжением U_{cb} на «катушке обратной связи» L_{cb} по закону $I = I_0 + SU_{cb}$, где I_0 , S — константы. При каком наибольшем сопротивлении R катушки контура будет возможна генерация автоколебаний в контуре? Каким при этом должен быть коэффициент M взаимной индукции катушек L и L_{cb} ? Параметры цепи: $S = 2 \text{ мА/В}$, $C = 10 \text{ нФ}$, $L = 10 \text{ мГн}$, $L_{cb} = 0,01L$. Ток в катушке связи считать пренебрежимо малым.



Ответ: $R_{max} = \sqrt{LL_{cb}} S / C = 200 \text{ Ом}$, $|M| \leq \sqrt{LL_{cb}} = 1 \text{ мГн}$.

$$1) M \ddot{I}_L = U_{cb} = M \dot{I}_L$$

$$2) \dot{Y}_c = \dot{Y} + \dot{Y}_L = \dot{Y}_o + MS \dot{I}_L + \dot{Y}_L$$

$$3) L \ddot{I}_L + \dot{I}_L R + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L \ddot{I}_L + \dot{I}_L R + \frac{Y_c}{C} = 0$$

$$L \ddot{I}_L + \dot{I}_L R + \frac{Y_o}{C} + \frac{Y_L}{C} + \frac{MS}{C} \dot{I}_L = 0$$

$$\ddot{I}_L + \left[\frac{R}{L} + \frac{MS}{CL} \right] \dot{I}_L + \frac{1}{LC} I_L = -\frac{1}{C}$$

Чтобы колебания не затухали:

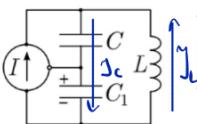
$$2\delta = \frac{R}{L} + \frac{MS}{CL} \Leftrightarrow R < \frac{IMS}{C} = \frac{\sqrt{LL_{cb}} S}{C} = 200 \text{ Ом}$$

$$|M| \leq \sqrt{LL_{cb}} = 1 \text{ мГн}$$

T18. (2023-6Б) Колебательный контур подключён к источнику тока (показан на схеме символом « I », стрелка указывает направление протекания тока). Контур содержит «конденсатор связи» C_1 , напряжение U_1 на котором регулирует величину тока источника по закону $I = I_0 + SU_1$, где I_0 , S — константы. Определите минимальное отношение C_1/C , при котором изменение напряжения на конденсаторе C будет иметь колебательный характер с нарастающей амплитудой. Параметры цепи: $S = 20 \text{ мА/В}$, $C = 1 \text{ нФ}$, $L = 1 \text{ мГн}$. Потерями пренебречь. Токи через C и C_1 считать одинаковыми.

Примечание: знаками « $+/-$ » на схеме показано состояние конденсатора связи, когда U_1 считается положительным.

$$\text{Ответ: } \frac{c_1}{c} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{S^2 L}{c}} - 1 \right) \approx 9.5.$$



$$1) \quad \dot{I} = \dot{I}_c - \dot{I}_L \Rightarrow \dot{I}_c = \dot{I}_c - \dot{I}_L - S U_1$$

$$2) \quad U_1 = \frac{q}{C_1} \Rightarrow \dot{U}_1 = \frac{\dot{q}}{C_1}, \quad \dot{U}_c = \frac{\dot{q}}{C}$$

$$C_1 U_1 = C U_c \Rightarrow U_1 = \frac{C}{C_1} U_c$$

$$3) \quad \dot{I}_L = \dot{I}_c - S \frac{\dot{U}_c}{C_1} = C \ddot{U}_c - S \frac{C}{C_1} \dot{U}_c$$

$$L \dot{I}_L + U_c + U_1 = 0$$

$$LC \ddot{U}_c - LS \frac{C}{C_1} \dot{U}_c + \frac{C+C_1}{C_1} U_c = 0 \quad | : LC$$

$$\ddot{U}_c - \underbrace{\frac{S}{C_1} \dot{U}_c}_{\omega_0^2} + \underbrace{\frac{1}{LC_0} U_c}_{\omega_0^2} = 0 \quad \left(C_0 = \frac{CC_1}{C+C_1} \right)$$

$$4) \quad U(t) = U_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t + \varphi_0)$$

$\delta < 0 \Rightarrow$ затуханий не будет

колебания сохраняются при $\delta < \omega_0$

$$5) \frac{S}{2C_1} < \frac{1}{\sqrt{LC_0}} = \sqrt{\frac{C+C_1}{LC_1}}$$

$$\frac{\sqrt{LS}}{2} < \sqrt{\frac{C_1(C+C_1)}{C}} = \sqrt{\frac{C_1}{C} \left(1 + \frac{C_1}{C}\right)} = \sqrt{L^2 + L}$$

$$L^2 + L - \frac{LS}{4} > 0$$

$$\frac{C_1}{C} > \frac{1}{L} \left(\sqrt{1+LS^2} - 1 \right) \approx 9,5$$