T1.

T.1. Дано уравнение $x^2 = y^2$.

а) Сколько функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?

б) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?

в) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

г) Сколько непрерывных функций $y : [1;2] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

а) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm x$, $x \in R \Rightarrow$ в каждой точке (кроме $x=0$) выбираем из x или $-x$ $\Rightarrow$ бесконечно много ф-й

б) $y=x$, $y=-x$, $y=|x|$, $y=-|x| \Rightarrow$ 4 ф-и

в) $y=x$, $y=|x| \Rightarrow$ 2 ф-и

г) $y=x \Rightarrow$ 1 ф-я

№3.61

61. Найти в указанной точке частные производные функции $u(x;y)$, заданной неявно уравнением:

2) $x\cos y + y\cos u + u\cos x = 1,\ (0;1;0)$;

$x=0, y=1:\ 0\cdot\cos 1 + 1\cdot\cos u + u\cos 0 = 1$

$u + \cos u = 1 \Rightarrow$ при $u=0$ $F(0,1,0)=0$

u'_x: $\cos y - y u'_x \sin u + u'_x \cos x - u\sin x = 0$; $x=0, y=1, u=0 \Rightarrow$

$\cos 1 + 0 + u'_x - 0 = 0 \Rightarrow u'_x = -\cos 1$

u'_y: $-x\sin y + \cos u - y u'_y \sin u + u'_y \cos x = 0$; $x=0, y=1, u=0 \Rightarrow$

$0 + 1 - 0 + u'_y = 0 \Rightarrow u'_y = -1 \neq 0$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\cos 1,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -1$;

№3.64

64. Найти в указанной точке дифференциал функции $u(x;y)$, заданной неявно уравнением:

2) $x^3 + 2y^3 + u^3 - 3xyu + 2y - 3 = 0$, а) $(1;1;1)$, б) $(1;1;-2)$.

$x=1, y=1:\ 1+2+u^3-3u+2-3=0 \Rightarrow u^3-3u-2=0$

а) $u=1$: $1-3-2=-4\neq 0 \Rightarrow F(x_0,y_0,u_0)\neq 0 \Rightarrow$

не выполняется условие теоремы о неявной ф-и $\Rightarrow \nexists$ дифф.

б) $u=-2$: $1+2-8+6+2-3=0$

$u'_x: 3x^2+0+3u'_x u^2-3yu-3xyu'_x+0-0=0$

$x=1, y=1, u=-2: 3+12u'_x+6-3u'_x=0 \Rightarrow u'_x=-1$

$u'_y: 0+6y^2+3u'_y u^2-3xu-3xyu'_y+2-0=0$

$x=1, y=1, u=-2: 6+12u'_y+6-3u'_y+2=0 \Rightarrow u'_y=-\frac{14}{9}\neq 0$

$du=-dx-\frac{14}{9}dx$

2) а) не существует, б) $-dx-(14)/(9)\,dy$.

№3.69

69. Пусть уравнением $f(x-y;\, y-z;\, z-x)=0$, где $f(u;z;w)$ — дифференцируемая функция, определяется дифференцируемая функция $z(x;y)$. Найти $dz(x,y)$.

$f(x-y; y-z; z-x)=f$

$f'_u(dx-dy)+f'_v(dy-dz)+f'_w(dz-dx)=0$

$f'_u dx-f'_u dy+f'_v dy-f'_v dz+f'_w dz-f'_w dx=0$

$$dz=\frac{(f'_u-f'_w)dx+(f'_v-f'_u)dy}{f'_v-f'_w}$$

69. $\dfrac{(f'_u-f'_w)\,dx+(f'_v-f'_u)\,dy}{f'_v-f'_w}$.

№3.75

75. Найти в точке $(1;2)$ частные производные дифференцируемых функций $u(x;y)$ и $v(x;y)$, заданных неявно уравнениями
$$xe^{u+v}+2uv=1,\quad ye^{u-v}-\frac{u}{1+v}=2x,\quad u(1;2)=v(1;2)=0.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x}: e^{u+v}+x(u'_x+v'_x)e^{u+v}+2u'_x v+2uv'_x=0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}: xe^{u+v}(u'_y+v'_y)+2u'_y v+2uv'_y=0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}: ye^{u+v}(u'_x+v'_x)-(u'_x(1+v)+uv'_x)(1+v)^{-2}=2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}: e^{u+v}+e^{u+v}(u'_y+v'_y)-(u'_y(1+v)+uv'_y)(1+v)^{-2}=0 \end{cases}$$

$x=1, y=2, u=v=0:$ $\begin{cases} 1+u'_x+v'_x=0 \\ u'_y+v'_y=0 \\ 2(u'_x-v'_x)-u'_x=2 \\ 1+2(u'_y-v'_y)-u'_y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} -u'_x=1+v'_x \\ u'_y=-v'_y \\ u'_x=2+2v'_x \\ u'_y=2v'_y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'_x=0 \\ u'_y=-\frac{1}{3} \\ v'_x=-1 \\ v'_y=\frac{1}{3} \end{cases}$

75. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-1,\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{3}$.

№ 4.43

43. Найти второй дифференциал функции $u(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$, если $u(x;y)$ — дифференцируемая функция, заданная указанным ниже уравнением и такая, что $u(x_0;y_0)=A$, если:

5) $u^3+2yu+xy=0,\ u(1;-1)=-1;$

$$3u^2du+2dyu+2ydu+dxy+xdy=0$$

$x=1, y=-1, u=-1$: $3du-2dy-2du-dx+dy=0 \Rightarrow du=dx+dy$

$$6udu^2+3u^2d^2u+2dudy+2yd^2u+2dydu+dxdy+dxdy=0$$

$$-6dx^2-6dy^2-12dxdy+3d^2u+4dy^2+4dxdy-2d^2u+2dxdy=0$$

$$d^2u=6dx^2+2dy^2+6dxdy$$

5) $6\,dx^2+6\,dx\,dy+2\,dy^2;$

№ 4.46

46. Пусть уравнением:

1) $f(x+u;y+u)=0;$

где f — дважды дифференцируемая функция, определяется дважды дифференцируемая функция $u(x;y)$. Найти $d^2u(x;y)$.

$f_1'=f'_{x+u}$, $f_2'=f'_{y+u}$, $f''_{11}, f''_{12}, f''_{22}$ - аналогично

$$f_1'dx+f_1'du+f_2'dy+f_2'du=0 \Rightarrow du=-(f_1'dx+f_2'dy)\cdot(f_1'+f_2')^{-1}$$

$$dx+du=\frac{\cancel{f_1'dx}+f_2'dx-\cancel{f_1'dx}-f_2'dy}{f_1'+f_2'}=\frac{f_2'(dx-dy)}{f_1'+f_2'}$$

$$dy+du=\frac{f_1'dy+f_2'dy-f_1'dx-f_2'dy}{f_1'+f_2'}=-\frac{f_1'(dx-dy)}{f_1'+f_2'}$$

$$d^2f=f''_{11}(d(x+u))^2+2f''_{12}d(x+u)\cdot d(y+u)+f''_{22}(d(y+u))^2+f_1'd^2(x+u)+f_2'd^2(y+u)=0$$

$$d^2u(f_1'+f_2')=-[f''_{11}(d(x+u))^2+2f''_{12}d(x+u)\cdot d(y+u)+f''_{22}(d(y+u))^2]$$

$$d^2u=-\frac{(dx-dy)^2}{(f_1'+f_2')^3}\cdot[f''_{11}\cdot(f_1')^2-2f''_{12}\cdot f_1'\cdot f_2'+f''_{22}\cdot(f_2')^2]$$

46. 1) $-\dfrac{(f_2')^2f_{11}''-2f_1'f_2'f_{12}''+(f_1')^2f_{22}''}{(f_1'+f_2')^3}(dx-dy)^2;$

№ 3.105

105. Найти якобиан $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)}$ отображения
$x = r\cos^p\varphi\cos^q\psi,\quad y = r\sin^p\varphi\cos^q\psi,\quad z = r\sin^q\psi,\quad p,q\in N.$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\psi)} = \begin{vmatrix} \cos^p\varphi\cos^q\psi & -rp\cos^{p-1}\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\cos^q\psi & -rq\cos^p\varphi\cos^{q-1}\psi\cdot\sin\psi \\ \sin^p\varphi\cos^q\psi & rp\sin^{p-1}\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos^q\psi & -rq\sin^p\varphi\cos^{q-1}\psi\cdot\sin\psi \\ \sin^q\psi & 0 & qr\sin^{q-1}\psi\cos\psi \end{vmatrix} =$$

по 3-й стр.

$$= \sin^{q+1}\psi\cdot r^2qp\cdot\cos^{2q-1}\psi\cdot\sin^{p-1}\varphi\cdot\cos^{p-1}\varphi\,\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{=1} +$$

$$+pqr^2\sin^{q-1}\psi\cos^{2q+1}\psi\cdot\cos^{p-1}\varphi\cdot\sin^{p-1}\varphi\cdot\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} =$$

$$= pqr^2(\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}\cdot(\cos\psi)^{2q-1}\cdot(\sin\psi)^{q-1}(\sin^2\psi+\cos^2\psi) =$$

$$= \boxed{pqr^2(\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}\cdot(\cos\psi)^{2q-1}\cdot(\sin\psi)^{q-1}}$$

105. $pqr^2(\sin\varphi\cos\varphi)^{p-1}(\cos\psi)^{2q-1}(\sin\psi)^{q-1}$.

T.3. Для отображения $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$u = e^x\cos y,\qquad v = e^x\sin y,$$

показать, что якобиан отображения всюду в $\mathbb{R}^2$ отличен от нуля, но отображение не является взаимно-однозначным. Найти множество значений отображения f.

1) $J = \begin{vmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0,$

Но $\begin{matrix} U(x,y) = U(x,y+2\pi) \\ V(x,y) = V(x,y+2\pi) \end{matrix} \Rightarrow$

отображение не биективное в силу периодичности

2) $U = \mathrm{Re}(e^{x+iy}),\ V = \mathrm{Im}(e^{x+iy})$

e^z принимает все значения кроме $0 \Rightarrow$

$\boxed{f(R^2) = R^2\setminus\{0,0\}}$

Т4.

T.4. Отображение $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ задано координатными функциями

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi, r>0.$$

Выразить частные производные r и φ по переменным x и y как функции от r и φ.

$$\begin{cases} 1 = r'_x\cos\varphi + r(-\sin\varphi)\varphi'_x \\ 0 = r'_y\cos\varphi + r(-\sin\varphi)\varphi'_y \\ 0 = r'_x\sin\varphi + r\cdot\cos\varphi\cdot\varphi'_x \\ 1 = r'_y\sin\varphi + r\cdot\cos\varphi\cdot\varphi'_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} r'_x\cos\varphi + r(-\sin\varphi)\varphi'_x = 1 \\ r'_x\sin\varphi + r\cdot\cos\varphi\cdot\varphi'_x = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\Delta_{\varphi_1} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 \\ \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\sin\varphi$$

$$\Delta_{r_1} = \begin{vmatrix} 1 & r\sin\varphi \\ 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos\varphi$$

$$\boxed{\begin{aligned} r'_x &= \frac{\Delta_{r_1}}{\Delta_1} = \cos\varphi \\ \varphi'_x &= \frac{\Delta_{\varphi_1}}{\Delta_1} = -\frac{\sin\varphi}{r} \end{aligned}}$$

Ответ

$$\begin{cases} r'_y\cos\varphi - \varphi'_y r\sin\varphi = 0 \\ r'_y\sin\varphi + \varphi'_y r\cos\varphi = 1 \end{cases}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\Delta_{\varphi_2} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} = \cos\varphi$$

$$\Delta_{r_2} = \begin{vmatrix} 0 & r\sin\varphi \\ 1 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\sin\varphi$$

$$\boxed{\begin{aligned} r'_y &= \frac{\Delta_{r_2}}{\Delta_2} = \sin\varphi \\ \varphi'_y &= \frac{\Delta_{\varphi_2}}{\Delta_2} = \frac{\cos\varphi}{r} \end{aligned}}$$

№3.86

86. Решить уравнение $x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, преобразовав его к полярным координатам.

$x u'_y - y u'_x = 0$; $x = r\cos\varphi$ $\quad y = r\sin\varphi$

$$u'_x = u'_r\cdot r'_x + u'_\varphi\cdot\varphi'_x = u'_r\cos\varphi - u'_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}$$ – из ТЧ

$$u'_y = u'_r\cdot r'_y + u'_\varphi\cdot\varphi'_y = u'_r\sin\varphi + u'_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}$$

$$r\cos\varphi\left(u'_r\sin\varphi + u'_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}\right) - r\sin\varphi\left(u'_r\cos\varphi - u'_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right) = 0 \Rightarrow u'_\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{u(r,\varphi) = u(r) = u(x^2+y^2)}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

86. 1) $u = f(x^2+y^2)$, f — произвольная дифференцируемая функция.

№88

88. Решить уравнение, преобразовав его к новым независимым переменным u и v:

1) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $u = x+y$, $v = x-y$;

$u = x+y \quad u'_x = 1 \quad u'_y = 1$

$v = x-y \quad v'_x = 1 \quad v'_y = -1$

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + z'_v$$
$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = z'_u - z'_v$$
$$\Rightarrow z'_u + z'_v - z'_u + z'_v = 0 \Rightarrow z'_v = 0$$

$$\boxed{z = z(u) = z(x+y)}$$

88. 1) $z = f(x+y)$;

№91

91. Преобразовать уравнение $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, приняв x за функцию, а $u = y-z$, $v = y+z$ за независимые переменные.

$u = y - z$, $v = y + z$, $x = x(u,v)$

$$dx = x'_u\,du + x'_v\,dv = x'_u\,dy - x'_u\,dz + x'_v\,dy + x'_v\,dz =$$

$$= (x'_u + x'_v)\,dy + (x'_v - x'_u)\,dz \Rightarrow$$

$$dz = (x'_v - x'_u)^{-1}dx + (x'_u + x'_v)(x'_u - x'_v)^{-1}dy$$

91. $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{v}$.

$$u(x'_v - x'_u)^{-1} + v(x'_u + x'_v)(x'_u - x'_v)^{-1} = 0 \Rightarrow u = v(x'_u + x'_v) \Rightarrow \boxed{\frac{u}{v} = x'_u + x'_v}$$

№51(2)

51. Преобразовать уравнение к полярным координатам, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$:

2) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$;

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $u'_x = u'_r\cos\varphi - u'_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}$, $u'_y = u'_r\sin\varphi + u'_\varphi\frac{\cos\varphi}{r}$

$r'_x = \cos\varphi$ $\varphi'_x = -\frac{\sin\varphi}{r}$ $r'_y = \sin\varphi$ $\varphi'_y = \frac{\cos\varphi}{r}$ из Т4 и 3.86

- $u''_{xx} = (u'_x)'_r\cdot r'_x + (u'_x)'_\varphi\cdot\varphi'_x = \left[u''_{rr}\cos\varphi - \frac{u''_{\varphi r}\sin\varphi}{r} + \frac{u'_\varphi\sin\varphi}{r^2}\right]\cdot\cos\varphi +$

$+\left[u''_{r\varphi}\cos\varphi - u'_r\sin\varphi - \frac{u''_{\varphi\varphi}\sin\varphi}{r} + \frac{u'_\varphi\cos\varphi}{r}\right]\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) =$

$= u''_{rr}\cos^2\varphi - u''_{\varphi r}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + u'_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + u''_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2} - u''_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}$

- $u''_{yy} = (u'_y)'_r\cdot r'_y + (u'_y)'_\varphi\cdot\varphi'_y = \left[u''_{rr}\sin\varphi + \frac{u''_{\varphi r}\cos\varphi}{r} - \frac{u'_\varphi\cos\varphi}{r^2}\right]\cdot\sin\varphi +$

$+\left[u''_{r\varphi}\sin\varphi + u'_r\cos\varphi + u''_{\varphi\varphi}\frac{\cos\varphi}{r} - u'_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right]\cdot\frac{\cos\varphi}{r} =$

$= u''_{rr}\sin^2\varphi + u''_{\varphi r}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + u''_{r\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} - u'_\varphi\frac{\sin 2\varphi}{r^2} + u''_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + u'_r\frac{\cos^2\varphi}{r}$

- $u''_{yx} = (u'_y)'_r\cdot r'_x + (u'_y)'_\varphi\cdot\varphi'_x = \left[u''_{rr}\sin\varphi + \frac{u''_{\varphi r}\cos\varphi}{r} - \frac{u'_\varphi\cos\varphi}{r^2}\right]\cdot\cos\varphi +$

$+\left[u''_{r\varphi}\sin\varphi + u'_r\cos\varphi + u''_{\varphi\varphi}\frac{\cos\varphi}{r} - u'_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right]\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) =$

$= u''_{rr}\frac{\sin 2\varphi}{2} + u''_{\varphi r}\frac{\cos^2\varphi}{r} - u''_{r\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r} + u'_\varphi\cdot\frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{r^2} - u'_r\frac{\sin 2\varphi}{2r} - u''_{\varphi\varphi}\frac{\sin 2\varphi}{2r^2}$

$u''_{xx}r^2\cos^2\varphi + u''_{yx}r^2\sin 2\varphi + u''_{yy}r^2\sin^2\varphi = 0$

$r^2\cos^2\varphi\left(u''_{rr}\cos^2\varphi - u''_{\varphi r}\frac{\sin 2\varphi}{r} + 0 + u'_r\frac{\sin^2\varphi}{r} + u''_{\varphi\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\right) +$

$r^2\sin 2\varphi\left(u''_{rr}\frac{\sin 2\varphi}{2} + u''_{\varphi r}\frac{\cos 2\varphi}{r} + u'_\varphi\cdot\frac{\sin^2\varphi - \cos^2\varphi}{r^2} - u'_r\frac{\sin 2\varphi}{2r} - u''_{\varphi\varphi}\frac{\sin 2\varphi}{2r^2}\right) +$

$r^2\sin^2\varphi\left(u''_{rr}\sin^2\varphi + u''_{\varphi r}\frac{\sin 2\varphi}{r} - u'_\varphi\frac{\sin 2\varphi}{r^2} + u'_r\frac{\cos^2\varphi}{r} + u''_{\varphi\varphi}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\right) = 0$

$\boxed{r^2u''_{rr} = 0}$

2) $r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$;

№52

52. Преобразовать уравнение, принимая u и v за новые независимые переменные:

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $u = x - at$, $v = x + at$;

$Z''_{tt} = a^2 Z''_{xx}$, $U = X - at$, $V = X + at$

$Z'_x = Z'_u U'_x + Z'_v V'_x = Z'_u + Z'_v$

$Z'_t = Z'_u U'_t + Z'_v V'_t = a(-Z'_u + Z'_v)$

$Z''_{xx} = Z''_{uu} + Z''_{vu} + Z''_{uv} + Z''_{vv} = Z''_{uu} + 2Z''_{uv} + Z''_{vv}$

$Z''_{tt} = a[(-Z''_{uu} + Z''_{vu})(-a) + (-Z''_{uv} + Z''_{vv})\cdot a] =$

$= a^2(Z''_{uu} - 2Z''_{uv} + Z''_{vv})$

$a^2(Z''_{uu} - 2Z''_{uv} + Z''_{vv}) = a^2(Z''_{uu} + 2Z''_{uv} + Z''_{vv}) \Rightarrow \boxed{Z''_{uv} = 0}$

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$;

№2.2

Исследовать функцию $u(x;y)$ на экстремум (1–8). 2) $u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$;

§5: 2(2); 9; 10*; 13(1); 18(1).
§5: 19(1), 21(2); 25(6); 31(3); 36*.

$$\begin{cases} U'_x = 6XY - 12 = 0 \\ U'_y = 3X^2 + 3Y^2 - 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} XY = 2 \\ X^2 + Y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (2,1), & (-2,-1) \\ (1,2) & (-1,-2) \end{matrix}$$

>4 решений быть не может, т.к. сводится к ур-ю 4-го порядка

$U''_{xx} = 6y$

$U''_{yy} = 6y \Rightarrow d^2 f = 6[y(dX^2 + dY^2) + 2X\,dX\,dY]$

$U''_{xy} = 6X$

1) $(1,2)$: $d^2 f = 12(dX^2 + dY^2 + dXdY)$ $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ $\Rightarrow$ лок. мин.

2) $(-1,-2)$: $d^2 f = -12(dX^2 + dY^2 + dXdY)$ $\begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ $\Rightarrow$ лок. макс

3) $(2,1)$: $d^2 f = 6(dX^2 + dY^2 + 4dXdY)$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ $\Rightarrow$ нет лок. экстр

4) $(-2,-1)$: $d^2 f = -6(dX^2 + dY^2 + 4dXdY)$ $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$ $\Rightarrow$ нет лок. экстр

$U(1,2) = 3\cdot 2 + 8 - 12 - 30 + 3 = -25$ мин

$U(-1,-2) = -3\cdot 2 - 8 + 12 + 30 + 3 = 31$ макс

2) минимум $u(1;2) = -25$, максимум $u(-1;-2) = 31$;

№9 **9.** Найти все стационарные точки функции $u = x^4 + y^4 - 2x^2$ и исследовать ее на экстремум. Можно ли использовать при этом достаточные условия строгого экстремума?

$u'_x = 4x^3 - 4x = 0 \qquad x(x^2-1)=0 \qquad (0,0)\ (1,0)\ (-1,0)$

$u'_y = 4y^3 = 0 \qquad y = 0$

$u''_{xx} = 12x^2 - 4 \qquad d^2u = (12x^4-4)dx^2 + 12y^2dy^2$

$u''_{yy} = 12y^2$

$u''_{xy} = 0$

$(0,0)$: $d^2u = -4dx^2$ – отриц полуопр.

$\Delta u(0,0) = u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) = (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - 2(\Delta x)^2 =$

$= (\Delta x)^2((\Delta x)^2 - 2) + (\Delta y)^4$

Если $0<|\Delta x|<\sqrt{2}$, $\Delta y = 0 \Rightarrow \ominus$ Если $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0 \Rightarrow \oplus$ нет лок. экстр.

$(\pm1, 0)$: $d^2u = 8dx^2$ – полож. полуопр.

$\Delta u(\pm1, 0) = u(\pm1+\Delta x, \Delta y, 0) - u(\pm1, 0) = (\pm1+\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 -$

$-2(\pm1+\Delta x)^2 + 1 = \cancel{1} \pm 4\Delta x + 6(\Delta x)^2 \pm 4(\Delta x^3) + (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - \cancel{2} \mp 4\Delta x -$

$-2(\Delta x)^2 \cancel{+1} = 4(\Delta x)^2 \pm 4(\Delta x^3) + (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 = (\Delta x)^2(2 \pm \Delta x)^2 + (\Delta y)^4 \geq 0$

Если $\Delta u = 0 \Rightarrow \Delta y = 0, \Delta x = 0 \Rightarrow$ 2 строгих лок. мин $u(\pm1, 0) - 1$

9. Стационарные точки $(\pm1;0)$, $(0;0)$, минимум $u(\pm1;0) = -1$. Нельзя, так как d^2u в стационарных точках не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, ни неопределенной квадратичной формой.

Исследовать функцию $u(x;y;z)$ на экстремум (13–15)

13. 1) $u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$;

№13.1 $u'_x = 2x - y + 1 = 0 \qquad x = -2/3 \qquad (-2/3, -1/3, -1)$

$u'_y = 2y - x = 0 \qquad y = -1/3$

$u'_z = 2z + 2 = 0 \qquad z = -1$

$u''_{xx} = 2 \qquad u''_{xz} = 0 \qquad d^2u = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 - 2dxdy$

$u''_{yy} = 2 \qquad u''_{xy} = -1$

$u''_{zz} = 2 \qquad u''_{yz} = 0 \qquad d^2u(-2/3, -1/3, -1) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dxdy)$

$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$ $\Rightarrow$ лок. мин $u(-2/3, -1/3, -1) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

13. 1) Минимум $u(-2/3; -1/3; -1) = -1/3$;

№ 18.1

18. Исследовать на строгий экстремум каждую непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x;y)$, заданную неявно уравнением:
1) $x^2+y^2+u^2+2x-2y+4u-3=0$;

$$2x\,dx+2y\,dy+2u\,du+2dx-2dy+4du=0$$

$$(x+1)dx+(y-1)dy=-(u+2)du \quad (*)$$

$$du=[(x+1)dx+(y-1)dy](-u-2)^{-1} \qquad x=-1,\ y=1 - \text{ст.т.}$$

$$1+1+u^2-2-2+4u-3=0 \Rightarrow u^2+4u-5=0 \Rightarrow u_1=1,\ u_2=-5$$

диф. $(*)$, dx и dy - const: $dx^2+dy^2=-(u+2)d^2u-du^2$, $du^2 \to 0$, т.к. ст.т.

$$d^2u=-(dx^2+dy^2)(u+2)^{-1}$$

$(-1,1,1)$: $d^2u=-\frac{1}{3}(dx^2+dy^2)$ отриц. опр. $\Rightarrow$ лок. макс

$(-1,1,5)$: $d^2u=\frac{1}{3}(dx^2+dy^2)$ полож опр $\Rightarrow$ лок мин

18. 1) Минимум $u_1(-1;1)=-5$, максимум $u_2(-1;1)=1$;

III. Экстремумы функций многих переменных

T.5. В стационарной точке квадратичная форма второго дифференциала положительно полуопределена.

а) Может ли эта точка быть точкой строгого локального минимума?
б) Может ли эта точка быть точкой строгого локального максимума?
в) Может ли эта точка не быть точкой локального экстремума (даже нестрогого)?

а) да, например 5.9

б) нет,

в) да, пример для отр. опр 5.9

---

19. Найти условные экстремумы функции $u=f(x;y)$ относительно заданного уравнения связи:
1) $u=xy,\ x+y-1=0$;

§5: 19(1), 21(2); 25(6); 31(3);

$y=1-x$, $u=x(1-x)=x-x^2 \Rightarrow \max$ в т. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

усл max $u(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

19. 1) Максимум $u(1/2;1/2)=1/4$;

---

21. Найти условные экстремумы функции $u=f(x;y)$ относительно заданного уравнения связи:
2) $u=1-4x-8y,\ x^2-8y^2=8$;

$$\mathcal{L}=1-4x-8y+\lambda(x^2-8y^2-8)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x=-4+2\lambda x=0 \\ \mathcal{L}'_y=-8-16\lambda y=0 \\ x^2-8y^2=8 \end{cases}$$

$\lambda=0$ - не подх $\Rightarrow x=\frac{2}{\lambda},\ y=-\frac{1}{2\lambda}$

$\frac{4}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^2}=8 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow x=\pm4,\ y=\mp1$

$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda$

$\mathcal{L}''_{yy} = -16\lambda$

$\mathcal{L}''_{xy} = 0$

$d^2\mathcal{L} = 2\lambda(dx^2 - 8dy^2)$

дифр. усл. св.: $2x\,dx - 16y\,dy = 0 \Rightarrow dx = 8\frac{y}{x}dy$

$\lambda = \frac{1}{2},\ x=4,\ y=-1:\ d^2\mathcal{L} = 4dy^2 - 8dy^2 = -4dy^2$ — отриц. опр $\Rightarrow$ $U(4,-1) = -7$ - max

$\lambda = -\frac{1}{2},\ x=-4\ y=1:\ d^2\mathcal{L} = -4dy^2 + 8dy^2 = 4dy^2$ — полож. опр $\Rightarrow$ $U(-4,1) = 9$ - min

2) минимум $u(-4;1) = 9$, максимум $u(4;-1) = -7$;

---

25. Найти условные экстремумы функции $u = f(x;y;z)$ при заданном уравнении связи:

6) $u = x - y + 2z,\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 16;$

$\mathcal{L} = x - y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 16)$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = -1 + 2\lambda y = 0 \\ \mathcal{L}'_z = 2 + 4\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 16 \end{cases} \quad \begin{matrix} \to x = -\frac{1}{2\lambda}\ (\lambda = 0 \text{ не подх.}) \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ z = -\frac{1}{2\lambda} \\ 4 \cdot \frac{1}{4\lambda^2} = 16 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{4} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda = \pm\frac{1}{4} \\ x = -y = z = \mp 2 \end{matrix}$$

$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda \quad \mathcal{L}''_{xy} = 0$

$\mathcal{L}''_{yy} = 2\lambda \quad \mathcal{L}''_{xz} = 0$

$\mathcal{L}''_{zz} = 4\lambda \quad \mathcal{L}''_{yz} = 0$

$\Rightarrow d^2\mathcal{L} = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + 2dz^2)$

$\lambda > 0\ (\lambda = \frac{1}{4})$: полож. опр $\Rightarrow$ $U(-2,2,-2) = -8$ min

$\lambda < 0\ (\lambda = \frac{1}{4})$: отриц. опр $\Rightarrow$ $U(2,-2,2) = 8$ max

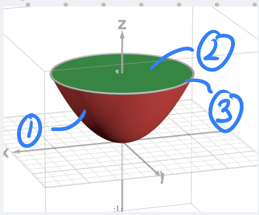
6) минимум $u(-2;2;-2) = -8$, максимум $u(2;-2;2) = 8$;

№31

Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции u на заданном множестве (28–33).

3) $u = x + y + z,\ x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1;$

можно не рисовать



$G = \{x^2 + y^2 < z < 1\}$

Стац. в G: $U'_x = 1\ \ U'_y = 1\ \ U'_z = 1 \Rightarrow$ стац. т. $\varnothing$

1) $U = x + y + z,\ z = x^2 + y^2 < 1$

$U = x + y + x^2 + y^2$

$U'_x = 1 + 2x = 0$

$U'_y = 1 + 2y = 0$

$\Rightarrow U(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$

2) $U = x + y + z,\ z = 1,\ x^2 + y^2 < 1$

$U = x + y + 1$, стац т. $\varnothing$

3) $u = x+y+z,\ x^2+y^2=z=1 \Rightarrow u = x+y+1,\ x^2+y^2=1$

3) $M = 1+\sqrt{2},\ m = -1/2;$

$$\mathcal{L} = x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 1+2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = 1+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2\lambda = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} \\ x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \quad \begin{matrix} u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1+\sqrt{2} \\ u\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1-\sqrt{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} M = 1+\sqrt{2} \\ m = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

---

23. Указать функцию, непрерывную на измеримом множестве, но не интегрируемую на этом множестве (для сравнения см. достаточное условие интегрируемости).

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & 0<x<y<1 \\ -\frac{1}{x^2}, & 0<y<x<1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \qquad G = [0,1]\times[0,1]$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f\,dx = \int_0^1 dy\left(\int_0^y f\,dx + \int_y^1 f\,dx\right) = \int_0^1 dy\left(\int_0^y \frac{dx}{y^2} - \int_y^1 \frac{dx}{x^2}\right) = \int_0^1 dy\left(\frac{x}{y^2}\Big|_0^y + \frac{1}{x}\Big|_y^1\right) = \int_0^1 dy = 1$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f\,dy = \int_0^1 dx\left(\int_0^x f\,dy + \int_x^1 f\,dy\right) = \int_0^1 dx\left(-\int_0^x \frac{dy}{x^2} + \int_x^1 \frac{dx}{y^2}\right) = \int_0^1 dx\left(-\frac{y}{x^2}\Big|_0^x - \frac{1}{y}\Big|_x^1\right) =$$

$$= \int_0^1 dx\left(-\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\int_0^1 dx = -1$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f\,dy \neq \int_0^1 dy \int_0^1 f\,dx \Rightarrow \text{не инт. на } [0,1]\times[0,1]$$

Т.6. Пусть функция f двух переменных определена на прямоугольнике $P = [a,b]\times[c,d]$.

а) Верно ли, что если функция $f(x,\cdot)$ интегрируема на $[c,d]$ при всех $x \in [a,b]$, а функция $I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ интегрируема на $[a,b]$, то функция f интегрируема на P?

б) Верно ли, если функция f интегрируема на P, то функция $f(x,\cdot)$ интегрируема на $[c,d]$ при всех $x \in [a,b]$?

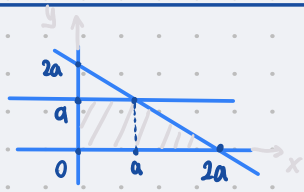
а) нет (предыдущий пример)

б) нет: $f(0,y) = \begin{cases} 1, & y \in \mathbb{Q} \\ 0, & y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ - не инт при $x=0$

В задачах 78–81 для заданного множества G записать интеграл $\iint\limits_G f(x;y)\,dx\,dy$ в виде повторных интегралов с разными порядками интегрирования.

79. G — четырехугольник, ограниченный прямыми ($a > 0$):
1) $x = 0,\ y = 0,\ y = a,\ x + y = 2a$;

$$\int_0^a dx \int_0^a f(x,y)\,dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{2a-x} f(x,y)\,dx = \int_0^a dy \int_0^{2a-y} f(x,y)\,dx$$

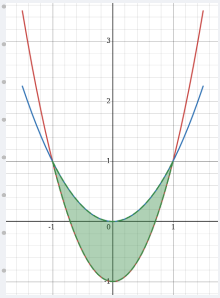


83. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

15) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2x^2-1} f(x;y)\,dy$;

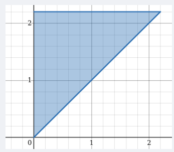
$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{2x^2-1} f(x,y)\,dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{\frac{y+1}{2}}}^{-\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{\frac{y+1}{2}}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx +$$

$$+ \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{\frac{y+1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y+1}{2}}} f(x,y)\,dx$$



85. Вычислить повторные интегралы, переменив порядок интегрирования:

3) $\int\limits_0^a dx \int\limits_x^a (a^2 - y^2)^\alpha\,dy,\ a > 0,\ \alpha > 0$;



$$\int_0^a dx \int_x^a (a^2-y^2)^\alpha dy = \int_0^a dy \int_0^y (a^2-y^2)^\alpha dx =$$

$$= \int_0^a y(a^2-y^2)^\alpha dy = -\frac{1}{2}\int_0^a (a^2-y^2)^\alpha d(a^2-y^2) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2-y^2)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_0^a = \boxed{\frac{a^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)}}$$

3) $a^{2(\alpha+1)}/2(\alpha+1)$;

Вычислить двойные интегралы (90–94):

90. 1) $\iint\limits_G (x\sin y + y\cos x)\,dx\,dy,\ G = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$;

$$I = \iint\limits_G (x\sin y + y\cos x)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin y + y\cos x)\,dy}_{I_0}$$

$$I_0 = \left(-x\cos y + \frac{1}{2}y^2\cos x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{\pi^2}{8}\cos x + x$$

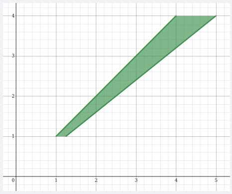
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{8}\cos x+x\right)dx=\left(\frac{\pi^2}{8}\sin x+\frac12 x^2\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{8}=\boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$

1) $\pi^2/4$;

---

8) $\iint\limits_G \sqrt{x-y}\,dx\,dy,\ G=\left\{\frac45 x\leqslant y\leqslant x,\ 1\leqslant y\leqslant 4\right\}$;

$$I=\iint\limits_G\sqrt{x-y}\,dx\,dy=\int_1^4 dy\underbrace{\int_y^{\frac54 y}\sqrt{x-y}\,dx}_{I_0}$$



$$I_0=\frac23(x-y)^{3/2}\Big|_y^{\frac54 y}=\frac23\left(\frac14 y\right)^{3/2}$$

$$I=\frac23\cdot\frac18\cdot\int_1^4 y^{3/2}dy=\frac23\cdot\frac18\cdot\frac25\left(4^{5/2}-1\right)=\frac1{30}(32-1)=\boxed{\frac{31}{30}}$$

8) 31/30;

---

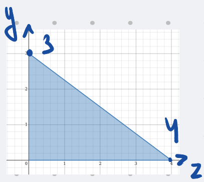
133. В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, расставить пределы интегрирования:

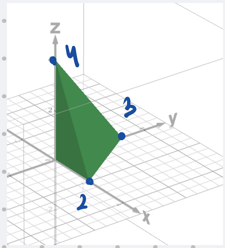
2) $\int\limits_0^4 dz\int\limits_0^{3-3z/4}dy\int\limits_0^{2-2y/3-z/2}f(x;y;z)\,dx,\ (x;y;z)$;

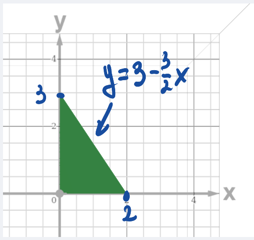
$$\int_0^4 dz\int_0^{3-\frac{3z}{4}}dy\int_0^{2-\frac{2y}{3}-\frac{z}{2}}f(x,y,z)\,dx=$$

← выраж. z

$$=\int_0^2 dx\int_0^{3-\frac32 x}dy\int_0^{4-2x-\frac43 y}f(x,y,z)\,dz$$







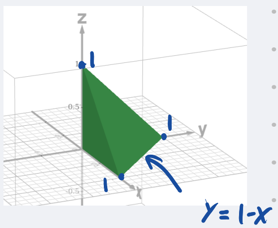
---

139. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$, если:

2) $f(x;y;z)=(1+x+y+z)^{-3}$; область G ограничена плоскостями $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

$$I=\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_S dx\,dy\int_0^{1-x-y}f(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\underbrace{\int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)^{-3}dz}_{I_0}$$



$$I_0=-\frac12(1+x+y+z)^{-2}\Big|_0^{1-x-y}=-\frac12\left[2^{-2}-(1+x+y)^{-2}\right]$$

$$I=\frac12\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\overbrace{\left[(1+x+y)^{-2}-(2)^{-2}\right]dy}^{I_1}$$

$$I_1 = -(1+x+y)^{-1}\Big|_0^{1-x} - \frac{1}{4}y\Big|_0^{1-x} = -2^{-1} + (1+x)^{-1} - \frac{1}{4}(1-x)$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-2^{-1} + (1+x)^{-1} - \frac{1}{4}(1-x)\right]dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{8} = \boxed{\frac{8\ln 2 - 5}{16}}$$

2) $(8\ln 2 - 5)/16$;

175. Вычислить интегралы по кубу $Q_n = [0;a]^n \in R^n$, $n \geqslant 2$:

2) $\int\limits_{Q_n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\,dx$;

$$\int\limits_{Q_n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,dx = \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \int_0^a \dots \int_0^a dx_{n-1} \int_0^a \sum_{k=1}^{n} x_k\,dx_n = \int_0^a x_1\,dx_1 \int_0^a \dots \int_0^a dx_n +$$

$$+ \int_0^a dx_1 \int_0^a x_2\,dx_2 \int_0^a \dots \int_0^a dx_n + \dots + \int_0^a dx_1 \int_0^a \dots \int_0^a x_n\,dx_n = n\cdot\int_0^a x_1\,dx_1 \int_0^a \dots \int_0^a dx_n =$$

$$= n\cdot a^{n-1}\cdot\frac{a^2}{2} = \boxed{\frac{na^{n+1}}{2}}$$

2) $na^{n+1}/2$

176. Вычислить интегралы по пирамиде $\Pi_n = \{0 \leqslant x_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \dots$
$\dots \leqslant x_2 \leqslant x_1 \leqslant a\}$:

2) $\int\limits_{\Pi_n} x_1 x_2 \dots x_n\,dx$;

$$\int\limits_{\Pi_n} x_1 x_2 \dots x_n\,dx = \int_0^a x_1\,dx_1 \int_0^{x_1} x_2\,dx_2 \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{n-2}} x_{n-1}\,dx_{n-1} \int_0^{x_{n-1}} x_n\,dx_n =$$

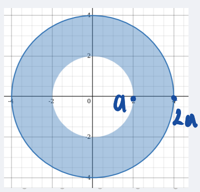
$$= \int_0^a x_1\,dx_1 \int_0^{x_1} x_2\,dx_2 \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{n-2}} \frac{x_{n-1}^3}{2}\,dx_n = \dots = \boxed{\frac{a^{2n}}{(2n)!!}}$$

2) $a^{2n}/(2n)!!$

$$n=1: \int_0^a x_1\,dx_1 = \frac{a^2}{2} \quad n=2: \int_0^a \frac{x_1^3}{2} = \frac{a^4}{2\cdot 4}, \quad n=3: \int_0^a \frac{x_1^5}{2\cdot 4} = \frac{a^6}{2\cdot 4\cdot 6}$$

Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам (106–109).

3) $\iint\limits_G |xy|\,dx\,dy$, $G = \{a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4a^2\}$;



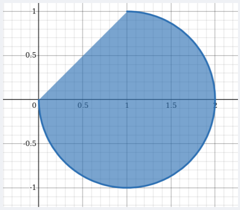
$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} r^3 |\cos\varphi \sin\varphi|\,dr = \frac{15a^4}{4}\,4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= 15a^2 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,d\sin\varphi = \boxed{\frac{15}{2}a^4}$$

3) $15a^4/2$;

№107

2) $\iint\limits_G y\,dx\,dy,\ G=\{x^2+y^2\leqslant 2x,\ x>y\};$



$$x^2+y^2\leqslant 2x \Rightarrow (x-1)^2+y^2\leqslant 1,\quad r^2\leqslant 2r\cos\varphi$$

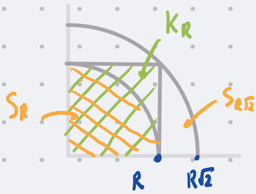
$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_0^2 r^2\sin\varphi\cdot dr+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\sin\varphi\, dr=$$

$$=\frac{8}{3}\Bigg[\overbrace{\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cancel{\sin\varphi d\varphi}}^{0}+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi\Bigg]=-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\cos^4\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}=\boxed{-\frac{1}{6}}$$

2) $-1/6$;

№110

3) вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.



$$(1)\quad \iint\limits_{S_R} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\leqslant\iint\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy\leqslant\iint\limits_{S_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

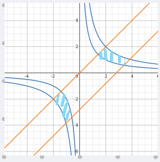
$$\iint\limits_{K_R}=\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_0^R e^{-y^2}dy=\Big(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\Big)^2$$

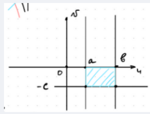
$$\iint\limits_{S_R}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^R e^{-r^2}r\,dr=\left\{\begin{matrix}r^2=t\\2r\,dr=dt\end{matrix}\right\}=\frac{\pi}{4}\int\limits_0^{R^2}e^{-t}dt=\frac{\pi}{4}\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^{R^2}=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

подст в (1): $\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)\leqslant\Big(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\Big)^2\leqslant\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$

$$R\to+\infty\Rightarrow\frac{\pi}{4}\leqslant\Big(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\Big)^2\leqslant\frac{\pi}{4}\Rightarrow\int\limits_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

124. 1) $f(x;y) = x+y$, G ограничено линиями $xy=a$, $xy=b$, $y=x$, $y=x-c$, где $0<a<b$, $0<c$;





$$\begin{matrix} xy = u \\ y - x = v \end{matrix} \Rightarrow \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = y + x = f(x,y)$$

$\Rightarrow$ все сохр.

$$\iint\limits_G du\,dv = \int_a^b du \int_{-c}^{0} dv = (b-a)\cdot c$$

1) $c(b-a)$;

---

5) $f(x;y) = x^4 - y^4$, $G = \{x>0,\ 1 \leqslant xy \leqslant 2,\ 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 2\}$.

$$\begin{matrix} xy = u \\ x^2 - y^2 = v \end{matrix} \Rightarrow \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2+y^2) \qquad \frac{x^4-y^4}{2(y^2+x^2)} = \frac{x^2-y^2}{2} = \frac{1}{2}v$$

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{G^*} v\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_1^2 du \int_1^2 v\,dv = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\int_1^2 du = \frac{3}{4}$$

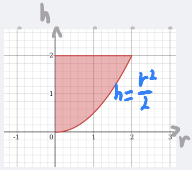
5) $3/4$.

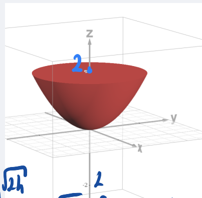
---

146. Вычислить интеграл $\iiint\limits_G f(x;y;z)\,dx\,dy\,dz$, перейдя к цилиндрическим координатам, если:

3) $f(x;y;z) = x^2+y^2$, $G = \{(x^2+y^2)/2 \leqslant z \leqslant 2\}$;

$$\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{matrix} \qquad G = \left\{\frac{r^2}{2} \leqslant h \leqslant 2\right\}$$





3) $16\pi/3$;

$$\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dh \int_0^{\sqrt{2h}} r^3\,dr = 2\pi\int_0^2 dh\cdot\frac{r^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{2h}} = \frac{\pi}{2}\int_0^2 4h\,dh = 2\pi\frac{h^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{16\pi}{3}$$

---

147. Показать, что при переходе к обобщенным сферическим координатам

$$x = ar\cos\varphi\cos\psi, \quad y = br\sin\varphi\cos\psi, \quad z = cr\sin\psi$$

якобиан отображения равен $J = abcr^2\cos\psi$.

по 3-ей строке

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\psi)} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi\cos\psi & -ar\sin\varphi\cos\psi & -ar\cos\varphi\sin\psi \\ b\sin\varphi\cos\psi & br\cos\varphi\cos\psi & -br\sin\varphi\sin\psi \\ c\sin\psi & 0 & cr\cos\psi \end{vmatrix} = c\sin\psi\cdot r^2ab\cdot\cos\psi\sin\psi +$$

$$+ cr^2\cos\psi\cdot ab\,(\cos^2\varphi\cos^2\psi + \cos^2\psi\sin^2\varphi) = abcr^2\cos\psi\,(\sin^2\psi+\cos^2\psi) = abcr^2\cos\psi$$

---

148. Пусть $G = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqslant 1\}$. Вычислить интегралы:

2) $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$;

$$\begin{matrix} x = ar\cos\varphi\cos\psi \\ y = br\sin\varphi\cos\psi \\ z = cr\sin\psi \end{matrix} \qquad x^2+y^2 = (a^2+b^2)r^2\cdot\cos^2\psi$$

$$\iiint_G (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 (a^2+b^2) r^2 \cos^2\psi \, abc r^2 \cos\psi \, dr =$$

2) $4\pi abc(a^2+b^2)/15$;

$$= \frac{4}{5}\pi (a^2+b^2) abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^3\psi\, d\psi}_{= I_0} = \frac{4}{5}\pi \cdot abc(a^2+b^2)\, I_0 = \frac{8}{15} abc\,(a^2+b^2)$$

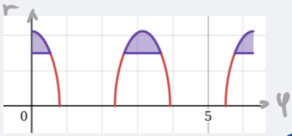
$$I_0 = \frac{1}{3} \sin x \cos^2 x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{2}{3} \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$$

6. Найти площадь области, ограниченной кривыми (можно использовать полярные координаты):

2) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2),\ x^2+y^2=a^2\ \ (\sqrt{x^2+y^2} \geqslant a > 0)$;

$$r^4 = 2a^2 r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \Rightarrow \begin{matrix} r^2 = 2a^2\cos 2\varphi \\ r^2 = a^2 \end{matrix} \Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{6}$$

$$G = \left\{ \begin{matrix} a < r < a\sqrt{2\cos 2\varphi} \\ -\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6} \end{matrix} \right\}$$



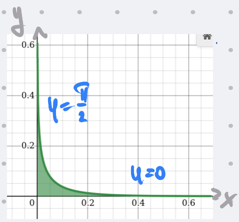
2) $(3\sqrt{3}-\pi)a^2/3$;

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r\,dr = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1)\,d\varphi = 2a^2\left(\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\pi}{6}\right) = 2a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}a^2}$$

---

8. Найти площадь области, ограниченной кривыми (можно воспользоваться обобщенными полярными координатами; см. задачу 119, §8):

6) $\sqrt[4]{x/a} + \sqrt[4]{y/b} = 1,\ x=0,\ y=0,\ a>0,\ b>0$;



$$\begin{matrix} x = ar\cos^8\varphi \\ y = ar\sin^8\varphi \end{matrix} \Rightarrow \sqrt[4]{r}\,(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 1 \Rightarrow G = \left\{ \begin{matrix} 0 < r < 1 \\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos^8\varphi & -8ar\cos^7\varphi\sin\varphi \\ a\sin^8\varphi & 8br\sin^7\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = 8abr\cos^7\varphi\sin^7\varphi$$

$$S = \iint_G dx\,dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 8abr\cos^7\varphi\sin^7\varphi\,dr = 8ab\int_0^1 dr\int_0^{\pi/2}\sin^7\varphi\cos^7\varphi\,d\varphi = 4ab\cdot I$$

$$I = \frac{1}{2^7}\int_0^{\pi/2}\sin^7 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2^8}\int_0^{\pi}\sin^7 t\,dt = \left\{ \begin{matrix} u = \cos t \\ du = -\sin t\,dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2^8}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^3\,du =$$

$2\varphi = t$

$$= \frac{1}{2^7}\int_0^1 (1 - 3u + 3u^4 - u^6)\,du = \frac{1}{2^7}\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{8\cdot 35} \Rightarrow \boxed{S = \frac{ab}{70}}$$

6) $ab/70$;

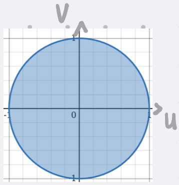
10. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1,$$

если $\Delta = a_1b_2 - b_2a_1 \neq 0$.

$$U = a_1x + b_1y + c_1$$
$$V = a_2x + b_2y + c_2$$

$$\frac{D(U,V)}{D(X,Y)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_2a_1 = \Delta \neq 0$$



$$U = r\cos\varphi,\quad V = r\sin\varphi \Rightarrow G = \begin{Bmatrix} 0<r<1 \\ 0<\varphi<2\pi \end{Bmatrix}$$

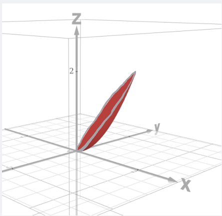
$$S = \iint_G dx\,dy = \frac{1}{|\Delta|}\iint_{G_1} du\,dv = \frac{1}{|\Delta|}\iint_{G^*} dr\,d\varphi = \frac{1}{|\Delta|}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr = \boxed{\frac{\pi}{|\Delta|}}$$

10. $\pi/|\Delta|$.

№13.5

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (см. формулы (24), (25)) (12, 13).

5) $z = x^2 + y^2,\ z = x + y$;



$$X = r\cos\varphi,\quad Y = r\sin\varphi,\quad Z = h$$

$$\Rightarrow G = \left\{ r^2 < h < r(\cos\varphi + \sin\varphi),\ 0 < r < \overset{a}{\cos\varphi + \sin\varphi},\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \right\}$$

$$V = \iint_G r\cdot(ra - r^2)\,dr\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \underbrace{\int_0^a r^2(a-r)\,dr}_{I_0}$$

$$I_0 = a\int_0^a r^2 dr - \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{12}a^4$$

$$V = \frac{1}{12}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\varphi + \sin\varphi)^4 d\varphi = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

5) $\pi/8$;

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (можно использовать сферические координаты) (16, 17).

3) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x,\ a > 0$;

$$\cos\varphi\cos\psi \geq 0$$

$$X = r\cos\varphi\cos\psi$$
$$y = r\sin\varphi\cos\psi$$
$$z = r\sin\psi$$

$$r^4 = a^3 r\cos\varphi\cos\psi \Rightarrow r = \sqrt[3]{a^3\cos\varphi\cos\psi}$$

$$G = \left\{0 < r < \sqrt[3]{a^3\cos\varphi\cos\psi},\ -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$V = \iiint_G r^2\cos\psi\,d\varphi\,d\psi\,dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{a^3\cos\varphi\cos\psi}} r^2\cos\psi\,dr = \frac{a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\,d\varphi \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\psi\,d\psi}_{I_0} = \frac{2}{3}a^3 I_0$$

$$I_0 = \frac{1}{2}\cancelto{0}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2x)\,dx} + \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi}{3}a^3}$$

3) $\pi a^3/3$;

21. Найти объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями $a_1x + b_1y + c_1z = \pm d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = \pm d_2,\ a_3x + b_3y + c_3z = \pm d_3$, считая, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$U = a_1x + b_1y + c_1z \qquad \frac{D(U,V,W)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta \neq 0$$

$$V = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$W = a_3x + b_3y + c_3z$$

$$G = \{-d_1 < U < d_1,\ -d_2 < V < d_2,\ -d_3 < W < d_3\}$$

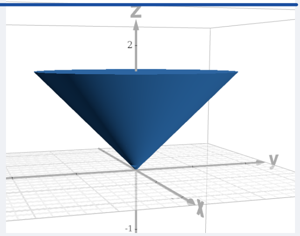
$$V = \iiint\limits_G \frac{1}{|\Delta|}\,dU\,dV\,dW = \frac{1}{|\Delta|}\int\limits_{-d_1}^{d_1} dU \int\limits_{-d_2}^{d_2} dV \int\limits_{-d_3}^{d_3} dW = 8\frac{d_1d_2d_3}{|\Delta|}$$

21. $8d_1d_2d_3/|\Delta|$.

---

63. Найти координаты центра масс тела с плотностью ρ:

4) $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant h,\ \ \rho = \rho_0 z^2$;



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \quad G = \{0 < r < h,\ r < \lambda < h,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$$

$$\rho = \rho_0\lambda^2$$

$M_x = M_y = 0$ - очев, но можно расписать

$$M_x = \iiint\limits_G \rho\, x\,dx\,dy\,dz = \rho_0\iiint\limits_G \lambda^2 r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\lambda = \rho_0\int\limits_0^{2\pi} \overset{0}{\cancel{\cos\varphi}}\,d\varphi \int\limits_0^h r^2dr \int\limits_r^h \lambda^2 d\lambda = 0$$

$$M_y = \rho_0\iiint\limits_G \lambda^2 r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\lambda = \rho_0\int\limits_0^{2\pi} \overset{0}{\cancel{\sin}}\,d\varphi \int\limits_0^h r^2dr \int\limits_r^h \lambda^2 d\lambda = 0$$

$$M_z = \rho_0\iiint\limits_G \lambda^3 r\,dr\,d\varphi\,d\lambda = \rho_0\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h r\,dr \int\limits_r^h \lambda^3 d\lambda = \frac{2\pi}{4}\rho_0\int\limits_0^h (h^4 - r^4)\,r\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\rho_0\left(\frac{1}{2}h^4r^2\Big|_0^h - \frac{1}{6}h^6\Big|_0^h\right) = \frac{1}{6}\pi\rho_0 h^6$$

$$M = \rho_0\iiint\limits_G \lambda^2 r\,dr\,d\varphi\,d\lambda = \rho_0\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^h r\,dr \int\limits_r^h \lambda^2 d\lambda = \frac{2}{3}\pi\rho_0\int\limits_0^h (h^3 - r^3)\,r\,dr =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\rho_0\left(\frac{1}{2}h^3r^2\Big|_0^h - \frac{1}{5}r^5\Big|_0^h\right) = \frac{1}{5}\pi\rho_0 h^5$$

$$Z_c = \frac{M_z}{M} = \frac{\frac{1}{6}\pi\rho_0 h^6}{\frac{1}{5}\pi\rho_0 h^5} = \frac{5}{6}h, \quad X_c = y_c = 0$$

4) $x_C = y_C = 0,\ z_C = 5h/6$;