

$$3. y'' + 3y' + 2y = 0.$$

1. Чтобы решить однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\alpha_0 y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y = 0, \quad (1)$$

все состоят характеристическое уравнение

$$\alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0 \quad (2)$$

и наше это корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения (1) есть сумма, состоящая из частных решений y_i для каждого простого корня λ_i уравнения (2) и линейной комбинации

$$(C_{n+1} + C_{n+2}x + C_{n+3}x^2 + \dots + C_{n+k}x^{k-1})e^{\lambda x}, \quad (3)$$

для каждого кратного корня λ уравнения (2), где k — кратность корня λ ; C_i — произвольные постоянные. Коэффициенты уравнения (3) и корни λ здесь могут быть комплексными или вещественными.

$$7. y'' = 6y' + 18y = 0.$$

Если же все коэффициенты уравнения (1) вещественные, то решение можно написать в вещественной форме и в случае комплексных корней λ . Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \pm i\beta$ общее решение включает слагаемые

$$C_m + e^{i\beta x} \cos \beta x + C_{m+1} e^{i\beta x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемым

$$P_{k-1}(x)e^{i\beta x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x)e^{i\beta x} \sin \beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ имеет кратность k . Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} — многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену в (3); их коэффициенты — произвольные постоянные.

$$12. y'' - 6y' + 9y = 0.$$

$$\text{Хар. ур-е: } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \Rightarrow y = e^{3x} (C_1 + C_2 x)$$

$$12. y = e^{3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

$$23. y^{IV} - y''' + 2y' = 0.$$

$$\text{Хар. ур-е: } \lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda = 0; \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda^3 - \lambda^2 + 2 = 0; \quad \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda+1) - 2(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1, \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{3,4} = 1 \pm i$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x (C_3 \cos x + C_4 \sin x) \quad 23. y = C_1 e^{-x} + C_2 + e^x (C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

$$31. y^{IV} + 6y''' + 12y'' + 8y' = 0.$$

$$\text{Хар. ур-е: } \lambda^4 + 6\lambda^3 + 12\lambda^2 + 8\lambda = 0; \quad \lambda (\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8) = 0; \quad \lambda (\lambda + 2)^3 = 0$$

$$y = C_1 + e^{-2x} (C_2 x^2 + C_3 x + C_4). \quad 31. y = C_1 + e^{-2x} (C_2 x^2 + C_3 x + C_4).$$

$$35. y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$$

$$\text{Хар. ур-е: } \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0; \quad (\lambda^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2i, \quad \lambda_{3,4} = 2i$$

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 x + C_4) \sin 2x$$

График вижуально.

$$35. y = (C_1 x + C_2) \cos 2x + (C_3 x + C_4) \sin 2x.$$

$$47. y'' + 4y = 4xe^{-2x} - \sin 2x.$$

2. Для неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью, состоящей из суммы и произведения функций b_0, b_1, \dots, b_n , $a_0 e^{ax}, a_1 e^{ax}, \dots, a_n e^{ax}, \cos bx, \sin bx$, частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для решения с правой частью $P(x)e^{ax}$, если $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$, частное решение имеет вид

$$y_1 = Q_m(x)e^{ax}, \quad (4)$$

где $Q_m(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_m(x)$, если $a = 0$, если $a \neq 0$, то корень характеристического уравнения (2), а если a — корень, то $P(x)$ не является решением уравнения.

Для решения с правой частью $\sin bx$ и $\cos bx$ методом неопределенных коэффициентов (4) не подходит, ввиду изменения коэффициентов в уравнении и приведения коэффициентов при подстановках в левые и правые части уравнения.

Если в правую часть уравнения входит сумма и косинус, то можно выразить через показательную функцию по формуле Эйлера

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}, \quad \sin bx = \frac{e^{ibx} - e^{-ibx}}{2i}, \quad (5)$$

и свести задачу к уже рассмотренному случаю.

Если же коэффициенты левой части уравнения вещественны, то можно обйтись без перехода к комплексным функциям (5). Для решения с правой частью

$$e^{ax} (P(x) \cos bx + Q(x) \sin bx) \quad (6)$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^m e^{ax} (R_m(x) \cos bx + T_m(x) \sin bx), \quad (7)$$

где $a = 0$, если $a + \beta i$ не корень характеристического уравнения, и s равен единице, если корни $a + \beta i$ входят в R_m и T_m соответственно.

Чтобы найти коэффициенты многочленов R_m и T_m , чтобы найти коэффициенты многочленов R_m и T_m , надо подставить (7) в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

При этом ожидается, что частное решение уравнения

с вещественными коэффициентами и правой частью типа (6) состоит в следующем. Сначала решают уравнение с правой частью $P(x)e^{ax} \cos bx$. Вещественная часть этого решения будет решением уравнения с правой частью $P(x)e^{ax} \cos bx$, а минимум — решением уравнения с правой частью $P(x)e^{ax} \sin bx$.

При этом решают уравнение сумме нескольких функций $P(x)e^{ax} \cos bx$ и y_1 , то чистое решение отмечается по следующему правилу.

Чистое решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + \dots + f_n$ — это сумма чистых решений уравнений с той же левой частью и правой частями f_1, \dots, f_n .

Однако решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

Пример. Решить уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y = xe^{3x} + e^{3x} \cos 2x. \quad (8)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9 = 0$ имеет корень $\lambda = 3$ кратности 3. Частное решение уравнения (8) имеет вид $y_1 = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{3x}$.

Частное решение уравнения (8) согласно (3) имеет вид $y_2 = (C_4 + C_5 x)xe^{3x}$.

Частное решение уравнения (8) согласно (3) имеет вид $y_3 = (C_6 + C_7 x)\cos 2x + (C_8 + C_9 x)\sin 2x$.

Общее решение уравнения (8) равно $y = y_1 + y_2 + y_3$, где y_1, y_2, y_3 — ука-заны.

$$y''' - 6y'' + 9y = xe^{3x} + e^{3x} \cos 2x. \quad (9)$$

Число $x = 3$ является корнем кратности 3, поэтому чистое

решение уравнения (9) согласно (3) имеет вид $y_1 = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{3x}$.

Частное решение уравнения (9) согласно (3) имеет вид $y_2 = (C_4 + C_5 x)xe^{3x}$.

Частное решение уравнения (9) согласно (3) имеет вид $y_3 = (C_6 + C_7 x)\cos 2x + (C_8 + C_9 x)\sin 2x$.

Общее решение уравнения (9) равно $y = y_1 + y_2 + y_3$, где y_1, y_2, y_3 — ука-заны.

Однород. ур. (OУ)

$$\text{Хар. ур.: } \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow y_0 = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x \quad \text{общее реш. одн. ур. (OУ)}$$

Неоднор. ур. (НУ)

$$1) y'' + 4y = 4xe^{-2x}, \quad y_1 = x^s Q_m(x)e^{dx} \quad d=-2, s=0 \Rightarrow y_1 = (ax+b)e^{-2x}$$

$$\text{Подст } y_1 \text{ и сразу поделим на } e^{-2x}: -2a - 2a + 4ax + 4b + 4ax + 4b = 4x$$

$$y_1' = ae^{-2x} - 2(ax+b)e^{-2x} \quad y_1'' = -2a - 2y_1'$$

$$\begin{cases} -4a + 8b = 0 \\ 8a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}$$

$$2) y'' + 4y = -\sin 2x, \quad y_2 = x^s e^{dx} (P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$$

$$d=0, \beta=2, s=1, m=0 \Rightarrow y_2 = ax \cos 2x + bx \sin 2x$$

y_2 уже можно подст. Но упростим!

y'' - нечет

ПР. часть нечет, в ст. произв. в лев. части чет \Rightarrow ищем $y_2 = ax \cos 2x$ - нечет

$$y_2' = a \cos 2x - 2ax \sin 2x, \quad y_2'' = -2a \sin 2x - 2a \sin 2x - 4ax \cos 2x$$

$$-4a \sin 2x - 4ax \cos 2x + 4ax \cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = \frac{1}{4}x \cos 2x$$

$$47. y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + \frac{1}{4}x \cos 2x.$$

$$y = y_0 + y_1 + y_2 = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + \frac{1}{4}x \cos 2x$$

$$56. y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$$

$$\text{OPOY: } \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \Rightarrow y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

$$\text{ЧРНУ: } y_1 = x^s Q_m(x)e^{dx}, \quad d=-2, s=1 \Rightarrow y_1 = ax^2 e^{-2x}$$

$$y_1' = 2ax e^{-2x} - 2ax^2 e^{-2x}, \quad y_1'' = 2ae^{-2x} - 4axe^{-2x} - 2y_1'$$

$$\text{CPASY gen. na } e^{-2x}: 2a - 4ax + 4ax + 4ax^2 - 4ax^2 = 2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y_1 = x^2 e^{-2x}$$

$$y = (C_1 + C_2 x + x^2) e^{-2x}$$

$$56. y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + x^2 e^{-2x}.$$

$$107. y''' - 2y'' + 2y' = 20 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$\text{OPOY: } \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \quad \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1 \pm i \Rightarrow y_0 = C_1 + (C_2 \sin x + C_3 \cos x) e^x$$

$$\text{ПР.ЧАСТЬ: } 20 \sin^2 \frac{x}{2} = 10 - 10 \cos x$$

$$1) y''' - 2y'' + 2y' = 10, m=0, f=0, S=1 \Rightarrow y_1 = ax \Rightarrow a=5 \Rightarrow y_1 = 5x$$

$$2) y''' - 2y'' + 2y' = -10 \cos x, \alpha=0, \beta=1, S=0, m=0 \Rightarrow y_2 = a \cos x + b \sin x$$

$$\begin{aligned} \cos x: -b + 2a + 2b &= -10 & 2a + b &= -10 & a &= -4 \\ \sin x: a + 2b - 2a &= 0 & 2b - a &= 0 & b &= -2 \end{aligned} \Rightarrow y_2 = -4 \cos x - 2 \sin x$$

$$y = C_1 + (C_2 \sin x + C_3 \cos x) e^x + 5x - 4 \cos x - 2 \sin x$$

$$107. y = C_1 + e^x(C_2 \cos x + C_3 \sin x) + 5x - 4 \cos x - 2 \sin x.$$

$$131. y^{IV} - y'' - 2y = 12 \sin 3x \cos 2x - 6(e^{-2x} + \sin 5x).$$

$$\text{OPOY: } \lambda^4 - \lambda^2 - 2 = 0 \quad (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{2}$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-x\sqrt{2}} + C_4 e^{x\sqrt{2}}$$

$$12 \sin 3x \cos 2x = 12 \cdot \frac{1}{2} (\sin(3x+2x) + \sin(3x-2x)) = 6 \sin 5x + 6 \sin x \Rightarrow$$

$$\text{ПР.ЧАСТЬ: } 6 \sin x - 6e^{-2x}$$

$$\text{ЧРНУ: 1) } y'' - y'' - 2y = 6 \sin x;$$

$$6 \text{ неявн. чет. ПР, ПР.Ч. Невн., } \alpha=0, \beta=1, S=1, m=0 \Rightarrow y_1 = ax \cos x$$

$$y_1' = a \cos x - a x \sin x \quad y_1'' = -a \sin x - a \sin x - a x \cos x$$

$$y_1''' = -2a \cos x - y_1' \quad y_1'''' = 2a \sin x - y_1''$$

$$\sin x: 2a + 4a = 6 \Rightarrow a=1 \quad y_1 = x \cos x$$

$$\cos x: 2ax - 2ax = 0$$

$$2) y'' - y''' - 2y = -6e^{-2x}; \quad \begin{cases} \lambda=2, \\ \lambda^2=4, \\ \lambda^3=-2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = Ae^{-2x}$$

$$e^{-2x}: 16A - 4A - 2A = -6 \quad A = -\frac{3}{5} \quad y_2 = -\frac{3}{5}e^{-2x}$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-3x} + C_4 e^{3x} - \frac{3}{5} e^{-2x} + x \cos x$$

$$131. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-x\sqrt{2}} + C_4 e^{x\sqrt{2}} + x \cos x - \frac{3}{5} e^{-2x}$$

$$153. y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}.$$

Линейное неоднородное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (11)$$

с любой правой частью $f(x)$ решается методом вариации постоянных. Пусть найдено общее решение $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$, линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогда решение уравнения (11) ищется в виде

$$y = C_1(x) y_1 + \dots + C_n(x) y_n.$$

Функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{aligned} C'_1 y_1 + \dots + C'_n y_n &= 0 \\ C'_1 y'_1 + \dots + C'_n y'_n &= 0 \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} &= 0 \\ a_0(C'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)}) &= f(x). \end{aligned}$$

$$OPOY: \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$OPHY: y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{2x} = 0 \\ C_1'(x) e^x + 2C_2'(x) e^{2x} = \frac{1}{1+e^x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2'(x) = -\frac{1}{e^x} \frac{1}{1+e^x} \\ C_2'(x) = \frac{1}{e^{2x}} \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

$$C_1(x) = - \int \frac{dx}{e^x(e^x+1)} = \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} = - \int \frac{du}{u^3+u^2} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u+1} \right) du = -Pn(e^x+1) + x + e^x + C$$

$$\frac{1}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1} \quad (AU+B)(U+1) + (U^2+1)AU^2 + AU + BU + B + U^2 = 1 \\ B=1 \quad A=-1 \quad C=1$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^{2x}(e^x+1)} = \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} = \int \frac{du}{u^4+u^3} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u+1} \right) du = x + e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - Pn(1+e^x) + C$$

$$\frac{1}{u^3(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u^3} + \frac{D}{u+1} \Rightarrow U^3 A + U^2 A + U^2 B + UB + (U+C+DU^3) = 1 \\ A=1 \quad B=-1 \quad C=1 \quad D=-1$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (e^x + e^{-x}) [x - Pn(1+e^x)] + e^x + \frac{1}{2}$$

$$153. y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (e^x + e^{-x}) [x - \ln(1+e^x)] + e^x + \frac{1}{2}$$

4. Уравнение Эйлера

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (12)$$

сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = e^t$ при $x < 0$). Для полученного уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \dots (\lambda-n+1) + \dots + a_{n-2} \lambda(\lambda-1) + a_n = 0.$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^k y^{(k)}$ в (12) заменяется на произведение k убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \dots (\lambda-k+1)$.

Пример. Решить уравнение
 $x^3 y''' - x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$

Сделать характеристическое уравнение и решить его:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2(\lambda-1) - 2\lambda = 0. \quad (14)$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda+2) - 2(\lambda-1) - 2\lambda = 0. \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

При таких 3-х различных корнях имеем 3 линейно независимых

коэффициентов ищем общее решение в виде

$$y = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^t + C_4 e^{-2t}.$$

Чтобы решить уравнение (14), сначала делим обе части на x^3 , получаем характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2(\lambda-1) - 2\lambda = 0. \quad (14)$$

Сделав замену $t = \ln x$, получим характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2(\lambda-1) - 2\lambda = 0. \quad (14)$$

Так как член 2 не является членом характеристического уравнения, то члены равняются нулю: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$. Поэтому в уравнении (14) имеем

$$(C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^t + C_4 e^{-2t}.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^t + C_4 e^{-2t}.$$

При $x < 0$ получаем аналогичную формулу, но с $t = |t|$ вместо t .

$$593. x^2y'' - xy' + y = 8x^3.$$

$$\begin{aligned} X &= e^t \\ y'_X &= \frac{y'_t}{e^t} = e^{-t} y'_t \\ y''_X &= e^{-2t} (y''_{tt} - y'_{tt}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{2t} \cdot e^{-2t} (y''_{tt} - y'_{tt}) - e^t \cdot e^{-t} y'_t + y &= 8e^{3t} \\ y''_{tt} - 2y'_{tt} + y &= 8e^{3t} \end{aligned}$$

$$\text{OPOY: } \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda_1, 2 = 1 \Rightarrow y_0 = (C_1 + C_2 t)e^t$$

$$\text{YPHY: } y_1 = a e^{3t} \Rightarrow e^{3t}: ga - 6a + a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y_1 = 2e^{3t}$$

$$y = X(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3$$

$$593. y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3.$$

$$598. x^2y'' - 2y = \sin \ln x.$$

T.k. $\ln x \Rightarrow x > 0$

$$\begin{aligned} X &= e^t \\ y'_X &= e^{-t} y'_t \\ y''_X &= e^{-2t} (y''_{tt} - y'_{tt}) \end{aligned}$$

$$y''_{tt} - y'_{tt} - 2y = \sin x$$

$$\text{OPOY: } \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_0 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

$$y_1 = a \cos t + b \sin t \Rightarrow \cos t: -a - b - 2a = 0 \quad a = 0, 1$$

$$\sin t: -b + a - 2b = 1 \quad b = -0, 3 \Rightarrow y = 0, 1 \cos t - 0, 3 \sin t$$

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^2 + 0,1 \cos \ln x - 0,3 \sin \ln x$$

$$598. y = C_1 x^2 + C_2 x^{-1} + 0,1 \cos \ln x - 0,3 \sin \ln x.$$

$$610. x^2y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}.$$

T.k. $\ln x \Rightarrow x > 0$

$$X = e^t$$

$$y'_X = e^{-t} y'_t$$

$$y''_X = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_{tt})$$

$$\Rightarrow y''_{tt} - y'_{tt} - y'_t + y = \frac{t}{e^t} + \frac{e^t}{t} \Rightarrow y''_{tt} - 2y'_t + y = t \cdot e^{-2t} + \frac{1}{t}$$

$$\text{Заменим, что } (y \cdot e^{-t})'' = y''_{tt} - 2y'_t + y$$

$$(y \cdot e^{-t})'' = (y'_t e^{-t} - y e^{-t})' = y''_{tt} e^{-t} - y'_t e^{-t} - y'_t e^{-t} + y e^{-t} = e^{-t} (y''_{tt} - 2y'_t + y)$$

$$(y \cdot e^{-t})'' = t \cdot e^{-2t} + \frac{1}{t}$$

$$(y \cdot e^{-t})' = \int t \cdot e^{-2t} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} + \ln|t| + C$$

$$U=t \quad U'=1$$

$$V=e^{-2t} \quad V'=-\frac{1}{2}e^{-2t} \quad \int e^{-2t} dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C \quad \int \ln|t| dt = t \ln|t| - t + C$$

$$y \cdot e^{-t} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} t e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-2t} \right) + \frac{1}{8} e^{-2t} + t \ln t - t + C_1 t + C_2$$

$$y = \frac{1}{4} (t+1) e^{-t} + e^t [t(\ln t - 1 + C_1) + C_2]$$

$$y = \frac{1}{4} (\ln x + 1) \frac{1}{x} + x [\ln x (\ln (\ln x) + C_1) + C_2]$$

$$610. y = x[C_1 + (C_2 + \ln |\ln x|) \ln x] + \frac{1+\ln x}{4x}$$

В задачах 613–618 построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

$$613. y_1 = x^2 e^x.$$

$$\lambda=1, s=3 \Rightarrow (\lambda-1)^3=0 \Rightarrow y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$613. y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Более низкого порядка нельзя

Более низкого порядка нельзя

$$\lambda=\pm i, s=1 \Rightarrow (\lambda^2+1)^2=0 \Rightarrow y''+2y''+y=0$$

$$615. y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

$$617. y_1 = xe^x, y_2 = e^{-x}.$$

Более низкого порядка нельзя.

$$617. y''' - y'' - y' + y = 0.$$

$$1) \lambda=1, s=2$$

$$2) \lambda=-1, s=1 \Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0 \Rightarrow y'''-y''-y'+y=0$$

1. Решить уравнение $y'' - ay' + 2y = e^x \cos x$, где $a \in \mathbb{R}$ – действительный параметр.

$$\text{ОПОГ: } \lambda^2 - a\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 8}}{2}$$

$$a^2 > 8: \lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 8}}{2} \Rightarrow y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$a^2 = 8: \lambda_{1,2} = \frac{a}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow y_0 = e^{\sqrt{2}x} (C_1 x + C_2)$$

$$a^2 < 8: \lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{8-a^2}}{2} i \Rightarrow y_0 = e^{\frac{ax}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{8-a^2}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{8-a^2}}{2} x \right)$$

$$\text{ЧРНУ: } e^x \cos x \Rightarrow f = 1 \pm i$$

$$a^2 = 8: \text{ } j - \text{корень характерист. урн.} \Rightarrow y_1 = x e^x (b \cos x + d \sin x)$$

$$a^2 \neq 8: y_1 = e^x (b \cos x + d \sin x)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 6y, \\ \dot{y} = 8x + 9y. \end{cases}$$

получ. уз (2)

$$\text{где} \quad \ddot{x} = -5\dot{x} - 6\dot{y} = -5\dot{x} - 48x - 9 \cdot (6y) = -5\dot{x} - 48x + 9\dot{x} + 45x \\ \ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0; \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \quad \text{т.к.} \quad C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} = -5C_1 e^t - 5C_2 e^{3t} - 6y$$

$$y = -C_1 e^t - \frac{4}{3} C_2 e^{3t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} C_1 e^{3t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} C_2 e^t$$

Пример. Решить систему $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 5x + 2y$. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 + 2i$ находим собственный вектор (a, b) :

$$\begin{cases} (1 - 3 - 2i)a - b = 0, \\ 5a + (1 + 2i)b = 0. \end{cases}$$

Можно взять $a = 1, b = 1 - 2i$. Имеем частное решение $x = e^{(3+2i)t}$, $y = (1 - 2i)e^{(3+2i)t}$.

Так как данная система с вещественными коэффициентами, то правильное соответствующее корень $\lambda = 3 - 2i$, можно не искать, оно будет получено из общего решения. Но это не лишне. Это было бы интересно увидеть, как решать в комплексных числах.

Однако решим параллельно для подтверждения именно комплексных решений:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^t (\cos 2t + i \sin 2t),$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^t (\cos 2t + 2 \sin 2t).$$

$$1. \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. \quad \begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y, \\ \dot{y} = 10x + 7y. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -5 - \lambda & -4 \\ 10 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 35 + 40 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0; \quad \lambda_1 = 1 \pm 2i$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i: \quad \begin{cases} -(6+2i)\alpha_1 - 4\beta_1 = 0 \\ 10\alpha_1 + (6-2i)\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = -\frac{3+i}{2}\alpha_1 \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \left[C_1 \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ 3 \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ 3 \sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix} \right]$$

$$x = 2C_1 e^t \sin(2t) + 2C_2 e^t \cos(2t)$$

$$y = C_1 e^t \sin(2t) - 3C_1 e^t \sin(2t) - 3C_2 e^t \cos(2t) - C_2 e^t \cos(2t)$$

$$5. \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ 2 \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -\cos 2t + \sin 2t \\ 2 \cos 2t - 2 \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$12. \quad \begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

$$\ddot{x} = -5\dot{x} + 4\dot{y} = -5\dot{x} - 4x - \dot{x} - 5x \Rightarrow \ddot{x} + 6\dot{x} + 9 = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3 \Rightarrow x = e^{-3t} (C_1 + C_2 t)$$

$$4y = e^{-3t} (-3C_1 - 3C_2 t + C_2 + 5C_1 + 5C_2 t) = e^{-3t} (2C_1 + C_2 + 2C_2 t)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$12. \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Пример. Решить систему $\dot{x} = y + 1, \dot{y} = 2e^t - x$. Исключаем из первого уравнения имеем $y = \dot{x} - 1$. Подставляя во второе уравнение, получаем $\ddot{x} = 2e^t - x$. Решив это уравнение второго порядка (методами § 11), найдем $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t - 1$. Значит, $y = \dot{x} - 1 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + e^t - 1$.

Для решения системы (где \dot{x} означает $\frac{dx}{dt}$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases} \quad (1)$$

или, в векторной записи, $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, где \mathbf{x} — вектор, A — матрица:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

надо найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Каждому простому корню λ_i характеристического уравнения соответствует решение $C_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}^i$, где C_i — произвольный постоянный, \mathbf{v}^i — собственный вектор матрицы A , соответствующий этому λ_i .

$$23. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y - z, \\ \dot{y} = 9x - 6y + 3z, \\ \dot{z} = 20x - 20y + 10z. \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 9 & -6-\lambda & 3 \\ 20 & -20 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(6+\lambda)(\lambda-10)+60] - 2[9(10-\lambda)-60] +$$

$$+180 - (6+\lambda)20 = \lambda^2 - 4\lambda - \lambda^3 + 4\lambda^2 + 18\lambda - 60 + 180 - 120 - 20\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$$

$$= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-2) = 0 \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$$\lambda_1 = 0: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & -6 & 3 \\ 20 & -20 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 9 & -8 & 3 \\ 20 & -20 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & -8 & 3 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3: \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 9 & -9 & 3 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & z & y \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$23. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$31. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$$

м у λ .

Если для кратного корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов v^1, \dots, v^k , какова его кратность, то ему соответствует решение $C_1 v^1 e^{\lambda t} + \dots + C_k v^k e^{\lambda t}$.

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] - 2[2(1-\lambda) - 4] + 2[4 - 2(1-\lambda)] =$$

$$= (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) + 8(\lambda+1) = 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 4 + 4\lambda + 8\lambda + 8 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = \\ = -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda^2 + 9\lambda + 5 = (\lambda+1) \cdot (-\lambda^2) + 4(\lambda+1)(\lambda + \frac{5}{4}) = -(\lambda+1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) = \\ = -(\lambda+1)^2(\lambda+5) = 0; \quad \lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = 5$$

$$\lambda_{1,2} = -1: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m=k=2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5: \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$31. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Решить систему $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 5x + 2y$.

Составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2+\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 + 2i$ находим собственный вектор (a, b) :

$$\begin{cases} (4-\lambda)a - b = 0, \\ 5a + (2+\lambda)b = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a - 3a - 2ia - b = 0, \\ 5a + (2+3+2i)a = 0, \end{cases}$$

Можно взять $a = 1, b = -2i$. Ищем частное решение $x = e^{3+2it}$

$$y = (1 - 2it)e^{3+2it}$$

Так как данная система с коэффициентами, то решаем соответствующее квадратное уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$, можно не делать, что будет излишне сопряжено с найденными решениями. Частное решение имеет вид $x = e^{3+2it}$, а общее решение, так как наше введение ищем общее членом нахождения общего решения. Так как $e^{3+2it} = e^{3t}(\cos 2t + i \sin 2t)$, то

$$\begin{cases} x = Re(e^{3+2it}) = e^{3t} \cos 2t, \\ y = Im(e^{3+2it}) = e^{3t} \sin 2t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re}(e^{3+2it}) = e^{3t} \cos 2t, \\ y = \operatorname{Im}(e^{3+2it}) = e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t). \end{cases}$$

Общее решение выражается через x найденным линейно зависимым частным решениями:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{3t} \cos 2t + C_2 e^{3t} \sin 2t,$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y + z, \\ \dot{y} = 7x - 3y + z, \\ \dot{z} = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y + z, \\ \dot{y} = 7x - 3y + z, \\ \dot{z} = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 1 \\ 7 & -3-\lambda & 1 \\ 4 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)[(7-\lambda)(2-\lambda) + 2] + 4[7(2-\lambda) - 4] - 14 + 4(3+\lambda) =$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 4) + 4(10 - 7\lambda) - 2 + 4\lambda = 7\lambda^2 + 7\lambda - 28 - \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 40 - 28\lambda - 2 + 4\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 13\lambda + 10 = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda^2 - 8\lambda - 5\lambda + 10 =$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) = 0; \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = 2; \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2+i: \begin{cases} (5-i)\alpha_2 - 4\beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ 7\alpha_2 - (5+i)\beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ 4\alpha_2 - 2\beta_2 - i\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad -(2+i)\alpha_2 + (1+i)\beta_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = \frac{2+i}{1+i}\alpha_2 \\ \gamma_2 = \frac{2}{1+i}\alpha_2 \end{cases}$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+i \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{2t} \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2 \cos t - \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2 \cos t + 2 \sin t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} \right]$$

$$46. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2 \cos t - \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2 \cos t + 2 \sin t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Каждому простому корню λ_i характеристического уравнения соответствует решение $C_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$, где C_i – произвольный вектор, \mathbf{v}_i – собственный вектор A , соответствующий этому λ_i .

Если для царского корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов $\mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_k^1$, known that it is приступает, то ему соответствует решение $C_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}_1^1 + \dots + C_k e^{\lambda t} \mathbf{v}_k^1$.

Если для корня λ кратности k имеется только линейно независимые собственные векторы, и $m < k$, то решением, соответствующим этому корню, является произведение многочленов степеней $k-m$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$\begin{aligned} f_1(t) &= (\alpha_1 t^k + \dots + \alpha_{k-m} t^{k-m}) e^{\lambda t}, \\ f_2(t) &= (\beta_1 t^k + \dots + \beta_{k-m} t^{k-m}) e^{\lambda t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы найти коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, надо подставить решение (3) в систему (1). Принесят коэффициенты подобных членов в левые и правые части уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ зависят от λ производных выражений, где λ – кратность корня λ .

Найдем для каждого λ решение узкого вида и склоняю, что общее решение системы (1).

$$68. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = -6x - 4y + 3z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 3z. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -4-\lambda & 3 \\ -2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda) [\lambda^2 + 7\lambda + 12 - 6] - [18 + 6\lambda + 6] - [-12 - 8 - 2\lambda] =$$

$$= -2\lambda^2 - 14\lambda - 12 - \lambda^3 - 7\lambda^2 - 6\lambda - 6\lambda - 24 + 2\lambda + 12 = -(\lambda^3 + 9\lambda^2 + 24\lambda + 16) =$$

$$= -(\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 16\lambda + 16) = -(\lambda+1) \cdot (\lambda+4)^2 = 0; \quad \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -4$$

$$\lambda_1 = -1: \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(коэффициенты этой системы равны элементам детерминанта (5) при $\lambda = 2$). Из (6) находим $2\alpha = -\beta - \gamma$. Значит, вектор $(1, -2, 2)$ – собственный, и

$$x = e^{2t}, \quad y = -2e^{2t}, \quad z = 2e^{2t} \quad (7)$$

– частное решение системы (1).

Для царского корня $\lambda = 1$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. При $\lambda = 1$ из (5) получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ее ранг $n = 3$, ранг $r = 2$. Число линейно независимых собственных векторов равно $m = n - r = 1$. Корень $\lambda = 1$ имеет кратность $k = 2$. Так как $k > m$, то решению надо явить в виде произведения многочленов степени $k - m = 1$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$x = (a + b)t, \quad y = (c + dt)e^t, \quad z = (f + gt)e^t. \quad (8)$$

Чтобы найти коэффициенты a, b, \dots, g , подставляем (8) в систему (4) и приравниваем коэффициенты при подобных членах. Получаем систему

$$\begin{aligned} b + d + g &= 0, & b = a + c + f, \\ -2b - d - g &= 0, & d = -2a - c - f, \\ 2b + d + g &= 0, & g = 2a + c + f. \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем общее решение этой системы. Из двух левых уравнений имеем $b = 0, g = -d$. Подставляем это в остальные уравнения, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= a + c + f, & f = -2a - c - f, \\ 0 &= a + c + f, & d = -2a - c - f, \\ a = -d, & f = d - c. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, все неизвестные выражены через c и d . Положим $c = C_1, d = C_2$, имеем $a = -C_1, b = 0, f = -C_2 - C_1, g = -C_2$. Общее решение системы (9) найдено.

Подставляем найденные значения a, b, \dots, g в (8) и приходим к частному решению (7), умножение на C_1, C_2 получим общее решение системы (4):

$$\begin{aligned} x &= -C_1 t + C_2 e^t, & y = (C_1 + C_2 t) e^t - 2C_2 e^{2t}, \\ z &= (C_2 - C_1 - C_2 t) e^t + 2C_2 e^{2t}. \end{aligned}$$

$$\lambda_{2,3} = -4 : \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k-m=1 \Rightarrow \text{нужен рум. 6 фунг. } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix} e^{-4t}$$

Получит б) (1) и приравни коэф.

$$\begin{aligned} -4a &= -2a + c - e & a = \zeta_2 & a - 4b = -2b + d - f & b = \zeta_3 & \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_2 t + \zeta_3 \\ 0 + \zeta_2 \\ 2\zeta_2 t + 2\zeta_3 \end{pmatrix} e^{-4t} \\ -4c &= -6a - 4e + 3e \Rightarrow c = 2a = 2\zeta_3 & \zeta_4, \zeta = -6b - 4d + 3f \Rightarrow f = 2b = 2\zeta_3 & \\ -4e &= -2a + 2c - 3e & c = 0 & e - 4f = -2b + 2d - 3f & a = d = \zeta_2 & \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_4 e^{-4t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$68. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-4t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Пример 3. Решение систем линейных уравнений

$$\begin{cases} x = 2y \\ x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$$

Δ для системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

из условия $\det(A - \lambda I) = 0$ для каждого λ система имеет решение, поскольку собственное значение λ является корнем характеристического уравнения. Для каждого собственного значения λ найдем соответствующий вектор. Для этого решим систему линейных уравнений

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Быстро решим $(A - \lambda I)x = 0$ для каждого собственного значения λ .

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, можно сразу записать

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

$$79. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y + z, \\ \dot{y} = -2x + 3y - z, \\ \dot{z} = -5x + 4y - z. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ -5 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4) + (2+2\lambda - 5) + (-8 + 15 - 5\lambda) =$$

$$= 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 3 - 5\lambda + 7 = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = -(\lambda - 2)^3 = 0; \lambda_{1,2,3} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{присоед. к } h_1: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{присоед. к } h_2: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{2t} \left(C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] + C_3 \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right)$$

$$79. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{4t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$88. \begin{cases} \dot{x} = 9x - 6y - 2z, \\ \dot{y} = 18x - 12y - 3z, \\ \dot{z} = 18x - 9y - 6z. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -6 & -2 \\ 18 & -12-\lambda & -3 \\ 18 & -9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda) [\lambda^2 + 18\lambda + 72 - 27] + 6 [-18 \cdot 6 - 18 \cdot \lambda + 3 \cdot 18] - 2 [-18 \cdot 9 + (12+\lambda) \cdot 18] = \\ = 9\lambda^2 + 9 \cdot 18\lambda + 45 \cdot 9 - \lambda^3 - 18\lambda^2 - 45\lambda - 6 \cdot 18\lambda + 6 \cdot 18 - 36\lambda = \\ = -(\lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27) = -(\lambda + 3)^3 = 0; \quad \lambda_{1,2,3} = -3$$

$$\lambda_{1,2,3} = -3 : \begin{vmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} M=2 \\ K=3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Т.к. 2-я и 3-я строки $A+3E$ одинаковы, рассчит $h_3^2 = h_3^3 \Rightarrow$

При deg. K h_2 : $\begin{vmatrix} 12 & -6 & -2 & | & 2 \\ 18 & -9 & -3 & | & 3 \\ 18 & -9 & -3 & | & 3 \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{e}^{3t} \left(C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right)$$

6. Частичное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = a_{1i}x_1 + \dots + a_{ni}x_n + f_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций $b_0 + b_1t + \dots + b_mt^m$, $e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$ и $\sin \beta t$. Это делается на тем же принципе, что для однородных уравнений с постоянными коэффициентами (см. § 11; оно сохраняется и в системах)

если $f_i(t) = P_m(t)e^{\alpha t}$, где $P_m(t)$ — многочлен степени m , то частичное решение (13) имеет в виде $t^k Q_m(t)e^{\alpha t}$, а в виде

$$x_i = Q_{m+k}(t)e^{\alpha t}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14)$$

где $Q_{m+k}(t)$ — многочлен степени $m+k$ с неизвестными коэффициентами, а показатель s — 0, если α не корень характеристического уравнения (2), и s — порядок, по которому характеристическая приводит это корни (или, точнее, s на 1 больше наибольшей из степеней многочленов, на которые умножается $e^{\alpha t}$ в общем решении однородной системы). Неизвестные коэффициенты многочленов определяются путем подстановки выражений (14) в данную систему (13) и сравнения коэффициентов различных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда $f_i(t)$ содержит $e^{\alpha t} \cos \beta t$ и $e^{\alpha t} \sin \beta t$, а число $\gamma = \alpha + \beta i$ является порядком характеристического уравнения.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^{3t}(t + \sin t), \\ \dot{y} = x + 2y + t e^{3t} \cos t. \end{cases} \quad (15)$$

Сначала для однородной системы $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = x + 2y$ находим корни $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -3$ и как в п. 2 отыскиваем общее решение

$$x_0 = (C_1 + C_2 t)^{e^{2t}}, \quad y_0 = (C_1 t + C_2 - C_1 t)^{e^{-3t}}.$$

В системе (15) для функции $t e^{3t}$, $t e^{3t} \sin t$, $t e^{3t} \cos t$ числа $\alpha + \beta i$ соответственно равны 3, 3 + i, 3 + i. Поэтому надо отдельно найти частные решения систем

$$\dot{x} = 4x - y + t e^{3t}, \quad \dot{y} = x + 2y, \quad (16)$$

$$\dot{x} = 4x - y - e^{3t} \sin t, \quad \dot{y} = x + 2y + t e^{3t} \cos t. \quad (17)$$

Для системы (16) $\alpha + \beta i = 3 = \lambda_1 = \lambda_2$, $x = 2$, $m = 1$. Согласно (14), частное решение можно искать в виде

$$x_1 = (at^2 + bt^2 + ct + d)e^{3t}, \quad y_1 = (ft^2 + gt^2 + ht + j)e^{3t}.$$

Для системы (17) $\alpha + \beta i = 3 \neq \lambda_1, \lambda_2$, $x = 0$, $m = 1$. Частное решение имеет вид

$$x_2 = (kt + l)e^{3t} \sin t + (mt + n)e^{3t} \cos t,$$

$$y_2 = (pt + q)e^{3t} \sin t + (rt + s)e^{3t} \cos t.$$

Отыскав значения коэффициентов a, b, \dots , общее решение системы (15) напишем в виде

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad y = y_0 + y_1 + y_2.$$

$$154. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^t, \\ \dot{y} = 5x - y - (2t + 6)e^t. \end{cases}$$

$$\text{OC(DY): } \begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 10 = \lambda^2 + 9, \quad \lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$$\lambda = 3i: \begin{cases} (1-3i)\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \\ 5\alpha_1 - (1+3i)\beta_1 = 0 \end{cases} \quad \alpha_1 = \frac{2}{1-3i} \beta_1 \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2C_1 \cos 3t + 2C_2 \sin 3t \\ y_1 = C_1 (\cos 3t + 3 \sin 3t) + C_2 (\sin 3t - 3 \cos 3t) \end{cases}$$

для част. $\lambda=1, s=0, m=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (at+b)e^t \\ y_1 = (ct+d)e^t \end{cases}$ могут б. част. и приводн. коэф.

$$\begin{cases} a = a - 2C_1 - 2 \\ c = 5a - C_2 - 2 \\ a+b = b - 2d \\ C+d = 5b - d - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-1 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^t \\ y_1 = -te^t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$$

$$154. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$$

$$159. \begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 4z + \sin t + \cos t, \\ \dot{y} = 3x + 4y - 5z - \sin t - \cos t, \\ \dot{z} = x + y - 2z, \end{cases}$$

OC(DY): $\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 & 4 \\ 3 & 4+\lambda & -5 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 4 + 4\lambda - 3 - 5\lambda + 2\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^2 - \lambda^3 = (\lambda+1)(1-\lambda^2) = 0; \lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 1$

$$\lambda_{1,2} = -1: \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 3 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{При соед. к } h_2: \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 & | & 0 \\ 3 & 5 & -5 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1: \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

УРНС(У): $\lambda = 0, s=0, m=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \sin t + b \cos t \\ y_1 = c \sin t + d \cos t \\ z_1 = e \sin t + f \cos t \end{cases} \Rightarrow \text{значит, что } \begin{cases} -x - z = y \\ z = 0 \end{cases} \text{ но же } \begin{cases} x_1 = -\cos t \\ y_1 = \cos t \\ z_1 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left[t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$159. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 4. Методом вариации постоянных решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y + \frac{1}{2} \sin t. \end{cases}$$

△ Линейную однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$ решаем методом исключений. Её решение имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = \frac{1}{2} [(C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t], \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение заданной линейной неоднородной системы уравнений ищем в виде

$$\begin{cases} x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t, \\ y = \frac{1}{2} [(C_1(t) - C_2(t)) \cos t + (C_1(t) + C_2(t)) \sin t], \end{cases}$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, которые находятся подстановкой x и y в заданную систему уравнений.

Подстановка x и y в заданную систему уравнений дает следующую линейную алгебраическую систему для $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$\begin{cases} C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t = 0, \\ C_1(t) \sin t - C_2(t) \cos t = \frac{1}{2} \sin t, \end{cases}$$

Отсюда находим $\dot{C}_1(t) = 1$, $\dot{C}_2(t) = -\operatorname{ctg} t$ и, значит, $C_1(t) = t + C_1$, $C_2(t) = -\ln |\sin t| + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя найденные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$, получим общее решение заданной системы уравнений

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + t \cos t - \sin t \ln |\sin t|, \\ y &= \frac{1}{2} [(C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t] + (t - \ln |\sin t|) \cos t + \end{aligned}$$

▲

$$183. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - \frac{1}{1+e^{-t}}, \\ \dot{y} = -3x - 2y - \frac{1}{1+e^{-t}}. \end{cases}$$

$$\text{O(OY): } \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 + 6 = \lambda(\lambda-1) = 0; \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

$$X_0 = C_1 + C_2 e^t \Rightarrow y_0 = -C_2 e^t - \frac{3}{2} C_1$$

$$\text{Ищем реш. б. буде } \begin{cases} X = C_2(t) e^t + C_1(t) \\ Y = -C_2(t) e^t - \frac{3}{2} C_1(t), \end{cases} \text{ но же б. ищт}$$

$$\begin{aligned} C_1'(t) + C_2'(t) e^t + C_2(t) e^t &= 3 C_1(t) + 3 C_2(t) e^t - 2 C_2(t) e^t - 3 C_1(t) - \frac{1}{1+e^{-t}} \\ -\frac{3}{2} C_1'(t) - C_1'(t) e^t - C_2(t) e^t &= -3 C_1(t) - 3 C_2(t) e^t + 2 C_2(t) e^t + 3 C_1(t) - \frac{1}{1+e^{-t}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t) e^t = -\frac{1}{1+e^{-t}} \\ -3 C_1'(t) - 2 C_2'(t) e^t = -\frac{2}{1+e^{-t}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(t) = \frac{4}{1+e^{-t}} \\ C_2'(t) = -\frac{5e^{-t}}{1+e^{-t}} \end{cases}$$

$$C_1(t) = \int \frac{4}{1+e^{-t}} dt = 4 \int \frac{d(1+e^t)}{1+e^t} = 4 \ln(e^t + 1) + \tilde{C}_1$$

$$C_2(t) = -5 \int \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} dt = 5 \int \frac{d(1+e^{-t})}{1+e^{-t}} = 5 \ln(e^{-t} + 1) + \tilde{C}_2$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(4 \ln(e^t + 1) + 5e^t \ln(e^{-t} + 1) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 6 \ln(e^{-t} + 1) - 5e^t \ln(e^t + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$183. \begin{cases} x = -2C_1 - C_2 e^t + 4 \ln(1+e^t) + 5e^t \ln(1+e^{-t}), \\ y = 3C_1 + C_2 e^t - 6 \ln(1+e^t) - 5e^t \ln(1+e^{-t}). \end{cases}$$

Пример 3. С помощью матричной экспоненты решить следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x + 3y, \quad x(0) = 1, \end{cases}$$

△ Для матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ находим собственное значение $\lambda = 2$ кратности два. Ему соответствуют собственный вектор $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

и присоединенный вектор $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В базисе из векторов h_1, h_2

матрица A принимает нормальную матричную форму $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Из определения матричной экспоненты, находим

$$e^{tJ} = e^{tA} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Если через H обозначить матрицу, у которой первая строка — базис h_1 , а вторая — базис h_2 , то

$$e^{tA} = H e^{tH^{-1} A H} H^{-1} = e^{tH} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & 1+t \end{pmatrix} H^{-1}.$$

Общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tH} \begin{pmatrix} -1 & 1+t \\ 1 & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Определив C_1 и C_2 из начальных условий, находим решение задачи Коши: $x = y = e^{2t}$.

8. Поводящая функцией e^A матрицы A называется сумма рядов

$$e^A = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (18)$$

где I — единичная матрица. Ряд расходится для любой матрицы A .

Свойства e^A :

a) если $A = BC^T$, то $e^A = C^T e^B C^{-1}$;

b) если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$, $e^{AB} = e^A e^B$, $e^{\lambda A} = \lambda e^A$;

c) матрица $X(t) = e^{At}$ удовлетворяет уравнению $\frac{dX}{dt} = AX$;

Методы отыскания e^A :

1) путем решения системы дифференциальных уравнений;

2) путем применения метода матричной экспоненты;

3) путем применения метода матричного интегрирования (в частном случае) $\hat{x} = Ax + \hat{x}_0$ с начальными условиями $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ при $\hat{x} \neq 1$ (x — вектор состояния);

\hat{x}_0 — вектор коэффициентов вектора \hat{x}).

С помощью матричной экспоненты решить задачу Коши для линейных однородных систем уравнений с начальными условиями $x(0) = C_1$, $y(0) = C_2$ (117-131):

С. 11; 117; 124; 128 (для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y(0) = 0$):

$$117. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0; \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= B e^t + C e^{3t} & \text{при } t=0: \begin{cases} E = B + C \\ A = B + 3C \end{cases} \Rightarrow C = \frac{A-E}{2} & C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ Ae^{tA} &= Be^t + 3(Ce^t) & B = \frac{3E-A}{2} & B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$117. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

$$124. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0; \quad \lambda_{1,2} = 3$$

$$e^{tA} = Be^{3t} + (te^{3t}) \quad \text{при } t=0: E=B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ae^{tA} = 3Be^{3t} + (e^{3t} + 3te^{3t}) \quad (A-3B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$124. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

$$128. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0; \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$$

$$e^{tA} = (B+iC)e^{2t}(\cos 3t + i \sin 3t) + (B-iC)e^{2t}(\cos 3t - i \sin 3t) = e^{2t}(2B \cos 3t - 2i \sin 3t)$$

$$Ae^{tA} = e^{2t}(4B \cos 3t - 4i \sin 3t) + e^{2t}(-6B \sin 3t - 6i \cos 3t)$$

$$\text{при } t=0: E=2B, \quad 2C = \frac{4B-A}{3} = \frac{2E-A}{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$128. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить задачу Коши: $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \bar{x}_0$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, и $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ — заданные число и столбец, $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ — искомая вектор-функция.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -a \\ 0 & \lambda & a \\ a & a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + a^2\lambda - a^2\lambda = -\lambda^3 = 0; \lambda_{1,2,3} = 0$$

$$e^{tA} = B + Ct + Dt^2 \quad \text{при } t=0: \quad E=B$$

$$Ae^{tA} = 2Dt + C$$

$$A^2e^{tA} = 2D$$

$$D = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a^2 & -a^2 & 0 \\ a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=A$$

$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}a^2t^2 & -\frac{1}{2}a^2t^2 & -at \\ \frac{1}{2}a^2t^2 & 1 + \frac{1}{2}a^2t^2 & at \\ at & at & 1 \end{pmatrix} \bar{x}_0$$

3. а) Записать (в векторном виде) общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если матрица A в базисе $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \bar{h}_5$ имеет вид $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

б) Найти матрицу $e^{A'}$.

a) $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_5$ — некор. базис $\Rightarrow \bar{X} = S e^{A't} S^{-1} \cdot \bar{I}$, где $S = (h_1^1, \dots, h_5^1)$, $\bar{I} = (I_1, \dots, I_5) - \text{const}$

$$\delta) e^{A'} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

4.* Доказать формулу: $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

$$\det e^A = \det(S e^B S^{-1}) = \det(e^B) = \prod_i e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i} = e^{\operatorname{tr} A}$$

ПРИМЕР 5. Операционным методом решить задачу Коши

$$y' - 4y + 3y = 2t^2 + e^{3t}, \quad t \geq 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

Для будем считать, что при $t < 0$ $y(t) \equiv 0$ и правая часть уравнения — тождественный нуль. Тогда мы предложим на всю область $t \in (-\infty, +\infty)$ решение и правая часть уравнения являются ортогональными в смысле $y(t) = pY(p)t + q, y'(t) = pY'(p) + q'$. Проверка на выполнение начальных условий $y(0) = pY(p) + q, y'(0) = pY'(p) + q' - 1$. Предположим, что $t < 0$ правая часть уравнения имеет своим преобразованием Лапласа функцию $2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right)$. Переходя в исходном уравнении к преобразованию Лапласа, т. е. умножив его на e^{-pt} и интегрируя по t от нуля до бесконечности, получим алгебраическое уравнение для нахождения $Y(p)$:

$$pY(p) + p - 1 - 4pY(p) + 1] + 3Y(p) = 2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right).$$

Если считать комплексный параметр p таким, что $\operatorname{Re} p > 3$, то из алгебраического уравнения находим

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-3)} \left[\frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3} - p + 5 \right].$$

Разложим правую часть на простые дроби:

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{(p-3)^2}.$$

Применим выражение для $Y(p)$, находим

$$A = -2, \quad B = -1, \quad C = 1, \quad D = 1.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение

$$y(t) = (t+1)e^{3t} - (t+2)e^t.$$

Функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^1$ называется оригиналом, если выполнено:

- 1) $f(t) \equiv 0, t < 0;$
- 2) $\cos \omega t \rightleftharpoons \frac{p}{p^2 + \omega^2};$
- 3) $\sin \omega t \rightleftharpoons \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$
- 4) $t \cos \omega t \rightleftharpoons \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2};$
- 5) $t \sin \omega t \rightleftharpoons \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}.$

$$y(t) \rightleftharpoons F(p)$$

$$y'(t) \rightleftharpoons pF(p) - y(0)$$

$$y''(t) \rightleftharpoons p^2y(t) - y'(0).$$

Операционным методом решить при $t \geq 0$ задачу Коши (172–183):

172. $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$$P^2F - 1 - 3PF + 2F = \frac{1}{P+1}; \quad F(P^2 - 3P + 2) = \frac{1}{P+1} + 1 \Rightarrow$$
$$F = \frac{P+2}{(P+1)(P-1)(P-2)} = \frac{A}{P+1} + \frac{B}{P-1} + \frac{C}{P-2} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{l} P=-1: A=\frac{1}{6} \\ P=1: B=-\frac{3}{2} \\ \text{домн. и подст} \quad P=2: C=\frac{4}{3} \end{array} \Rightarrow y = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{3}{2}e^t + \frac{4}{3}e^{2t}$$

172. $y = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{3}{2}e^t + \frac{4}{3}e^{2t}$.

182. $y'' + 4y = 4(\cos 2t + \sin 2t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$$P^2F - 1 + 4F = \frac{4P}{P^2+4} + \frac{8}{P^2+4} \Rightarrow F = \frac{4P}{(P^2+4)^2} + \frac{8}{(P^2+4)^2} + \frac{1}{P^2+4}$$
$$\frac{8}{(P^2+4)^2} + \frac{1}{P^2+4} = \frac{-P^2+4+4+P^2}{(P^2+4)^2} + \frac{1}{P^2+4} = -\frac{P^2-4}{(P^2+4)^2} + \frac{2}{P^2+4}$$

$$y = t \sin 2t - t \cos 2t + \sin 2t$$

182. $y = (1+t) \sin 2t - t \cos 2t$.

Решить операционным методом задачу Коши при $t \geq 0$ (187–197):

189. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y + e^{2t}, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2. \end{cases}$

$$x(t) = F(P), \quad y(t) = G(P)$$

$$\begin{cases} PF - 1 = F + G + \frac{1}{P-2} \\ PG - 2 = -2F + 4G + \frac{1}{P-2} \end{cases} \quad \begin{cases} G = (P-1)F - 1 - \frac{1}{P-1} \\ (P-4)(P-1)F - (P-4) - \frac{P-4}{P-2} - 2 = -2F + \frac{1}{P-2} \end{cases}$$
$$F(P-2)(P-3) = P-2 + \frac{P-3}{P-2}$$

$$F = \frac{1}{P-3} + \frac{1}{(P-2)^2}, \quad G = \frac{\overbrace{P-1}^{P-3+1}}{P-3} + \frac{\overbrace{P-1}^{P-2+1}}{(P-2)^2} - 1 - \frac{1}{P+2} = \frac{2}{P-3} + \frac{1}{(P-2)^2}$$

$$\begin{cases} x = e^{3t} + te^{2t} \\ y = 2e^{3t} + te^{2t} \end{cases}$$

189. $x = e^{3t} + te^{2t}$, $y = 2e^{3t} + te^{2t}$.

194. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y + 4, \\ \dot{y} = -4x - 4y + 4t, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 3. \end{cases}$

$$X(t) = F(p), \quad Y(t) = G(p)$$

$$\begin{cases} pF = 4F + 5G + \frac{4}{p}, \\ pG - 3 = -4F - 4G + \frac{4}{p^2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{1}{5}[F(p-4) - \frac{4}{p}] \\ \frac{p+4}{5}[F(p-4) - \frac{4}{p}] - 3 = -4F + \frac{4}{p^2} \end{cases}$$

$$F(p^2+4) = 4 \frac{p+4}{p} + 15 + \frac{20}{p^2}$$

$$F = 4 \frac{p+4}{p(p^2+4)} + \frac{15}{p^2+4} + \frac{20}{p^2(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+4} \quad \begin{matrix} A=4 \\ B=5 \\ C=-4 \\ D=-14 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{4}{p} + \frac{5}{p^2} - 4 \frac{p}{p^2+4} + 7 \frac{2}{p^2+4} \\ G &= -\frac{3}{p} - \frac{4}{p^2} + \frac{6p}{p^2+4} - 4 \frac{2}{p^2+4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 4 + 5t - 4(\cos 2t) + 7 \sin 2t \\ Y &= -3 - 4t + 6(\cos 2t) - 4 \sin 2t \end{aligned}$$

194. $x = 4 + 5t - 4 \cos 2t + 7 \sin 2t, \quad y = 6 \cos 2t - 4 \sin 2t - 3 - 4t.$