Наумов В Б01-303

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 мая)

I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 2; 12.

Ф.: 1164.

1. Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2 + 2y + 3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2 + y + z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

2. Найти все первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$; в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

С. §16: 6; 26.

3*. Дифференциальное уравнение $\ddot{x} + x^5 = 0$ описывает колебания, период T которых зависит от начальных значений: $T = T(x(0); \dot{x}(0))$. Найти отношение $T(1,1)/T(2,2)$.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 4; 16; 45; 79; 85.

4. Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;
б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;
в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

5*. Найти поверхность, проходящую через кривую $y = x, z = 2y + y^3$ и обладающую свойством, что любая касательная плоскость пересекает ось Ох в точке с абсциссой, вдвое меньшей абсциссы точки касания.

III. Вариационное исчисление

С. §19: 12; 33; 75; 102.
С. §20.1: 2; 9; 14.
С. §20.2: 4.
С. §20.3: 5.
С. §21: 7.

6. Исследовать на экстремум при всех значениях вещественного параметра a:

а) $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - ay^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$;
б)* $J[y] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 - ay^2)dx$, $y(0) = 0$.

IV. Повторение

С. §6: 35.
С. §7: 56.
С. §8: 126.
С. §9: 34.
С. §11: 55.
С. §13: 49.
С. §17: 84.
С. §20.1: 8.

$\boxed{34+3^*}$

I. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

С п14

№2

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия $(0,0)$ для систем (1–11):

$$\boxed{\mathbf{2.}}\quad \begin{cases} \dot{x} = y + ax\sqrt{x^2+y^2}, \\ \dot{y} = x + ay\sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

при $a=0$: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$ седло

при $a \neq 0$: перейдём к полярным:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = r\sin\varphi + ar\cos\varphi \cdot r \\ \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} = r\cos\varphi + ar\sin\varphi \cdot r \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ar^2 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ar^2 \\ r \end{pmatrix}$$

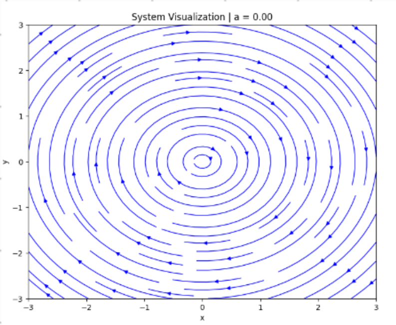
$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin 2\varphi \\ 0 & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ar^2 \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{r} = ar^2 + r\sin 2\varphi \\ \dot{\varphi} = \cos 2\varphi \end{cases}$$

в окрестности (0,0): $\begin{cases} \dot r \sim r\sin 2\varphi \\ \dot\varphi = \cos 2\varphi \end{cases}$, система не зависит от параметра

$\Rightarrow$ На система ведёт себя как седло.

~~**2.** (0,0) — центр при $a = 0$. При $a < 0$ спирали по часовой стрелке закручиваются вокруг (0,0) при $t \to +\infty$, а при $a > 0$ они раскручиваются от (0,0) при $t \to +\infty$.~~

Ответ неправильный. Совпадает с ответом к №3.



№12

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для систем (12–21):

12. $\begin{cases} \dot x = y + ax(x^2 + y^2 - 2), \\ \dot y = -x + ay(x^2 + y^2 - 2). \end{cases}$

при $a=0$: $\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm i$

$\Rightarrow$ центр

при $a \neq 0$: $\begin{cases} \dot x = y + ax(x^2+y^2-2) \\ \dot y = -x + ay(x^2+y^2-2) \end{cases}$

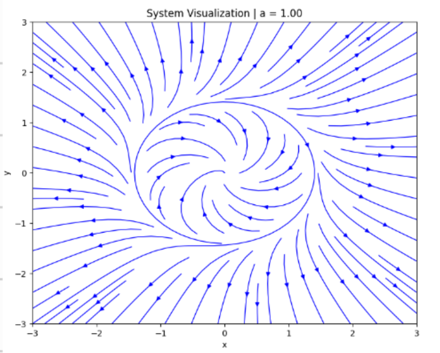
$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\dot\varphi = r\sin\varphi + ar\cos\varphi(r^2-2) \\ \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\dot\varphi = -r\cos\varphi + ar\sin\varphi(r^2-2) \end{cases}$

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\varphi r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ar(r^2-2) \\ r \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\varphi r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ar(r^2-2) \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot r = ar(r^2-2) \\ \dot\varphi = -1 \end{cases}$

$\dot\varphi = -1 \Rightarrow$ движение по часовой стрелке (не зависит от a)

Определение. Предельным циклом системы (1) называется такая замкнутая траектория (1) в области Ω, которая изолирована от всех остальных замкнутых траекторий системы (1) в области Ω.



а) устойчивый (притягивающий) предельный цикл, где траектории навиваются на предельный цикл с обеих сторон при $t \to +\infty$ (см. пример 3);

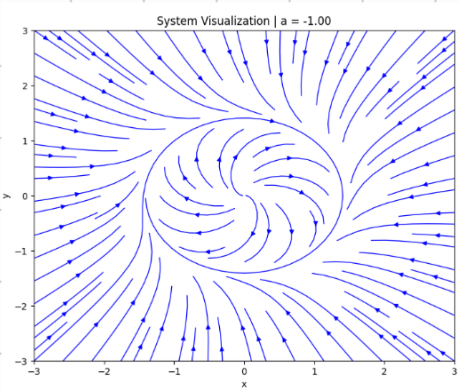
б) неустойчивый (отталкивающий) предельный цикл, где траектории — спирали удаляются от предельного цикла с обеих сторон при $t \to +\infty$;

в) полуустойчивый предельный цикл, где траектории с одной стороны навиваются на предельный цикл и удаляются от него с другой стороны при $t \to +\infty$.

$\dot r = ar(r^2-2) \Rightarrow r=2:\ \dot r = 0 \Rightarrow r = const$ (кольцевая траектория)

при $a>0$: при $t \to +\infty$ при $r<2$, $r \to 0$; при $r>2$, $r \to +\infty$ $\Rightarrow$ неуст предельный цикл

при $a<0$ при $t \to +\infty$ при $r<2$, $r \to 2$; при $r>2$, $r \to 2$ $\Rightarrow$ уст предельный цикл



12. (0,0) — центр при $a = 0$. При $a \neq 0$ траекториями являются спирали с направлением движения по часовой стрелке при $t \to +\infty$. Окружность $x^2 + y^2 = 2$ — устойчивый предельный цикл при $a < 0$ и неустойчивый предельный цикл при $a > 0$.

Для того чтобы непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$, $x \in G$, была первым интегралом системы $\dot{x} = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная в силу системы $\dot{u}(x) = (\operatorname{grad} u(x), f(x)) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\,\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ в области G.

Первые интегралы $u_1(x), \ldots, u_k(x)$, $1 \leqslant k < n$, автономной системы называются независимыми в области $G_0 \subseteq G$, если ранг матрицы Якоби

$$\left\| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \right\|, \quad i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, n},$$

равен k для всех точек $x \in G_0$.

Ф:

№1164

1164. Проверить, являются ли независимыми первые интегралы $\frac{x+y}{z+x} = C_1$, $\frac{z-y}{x+y} = C_2$ системы

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

проверим C_1:

$$x \cdot \frac{(z-y)}{(x+z)^2} + y \cdot \frac{1}{(x+z)} - z\,\frac{x+y}{(x+z)^2}$$

$$= \frac{1}{(x+z)^2}\Big[xz - xy + xy + yz - zx - zy\Big] = 0 \Rightarrow C_1 - \text{п.и}$$

проверим C_2:

$$x \cdot \frac{(y-z)}{(x+y)^2} - y\,\frac{(x+z)}{(x+y)^2} + z\,\frac{1}{(x+y)}$$

$$= \frac{1}{(x+y)^2}\Big[xy - xz - yx - yz + xz + yz\Big] = 0 \Rightarrow C_2 = \text{п.и}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = \frac{(z+x)-(x+y)}{(z+x)^2}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial x} & \frac{\partial C_1}{\partial y} & \frac{\partial C_1}{\partial z} \\ \frac{\partial C_2}{\partial x} & \frac{\partial C_2}{\partial y} & \frac{\partial C_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z-y}{(x+z)^2} & \frac{1}{x+z} & -\frac{x+y}{(x+z)^2} \\ \frac{y-z}{(x+y)^2} & -\frac{x+z}{(x+y)^2} & \frac{1}{x+y} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(z+x)^2 \\ \sim \\ \cdot(x+y)^2 \end{matrix} \begin{pmatrix} -(y-z) & z+x & -(x+y) \\ y-z & -(x+z) & x+y \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -(y-z) & z+x & -(x+y) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\, J = 1 < 2 \Rightarrow \text{зависимы}$$

. **1164.** Зависимы.

№ Т1

1. Проверить, что функция $u = y + xz^2$ является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2xz^2 + 2y + 3z), \\ \dot{y} = xz^3, \\ \dot{z} = z(xz^2 + y + z). \end{cases}$$

Найти все первые интегралы системы.

u = первый интеграл $\Leftrightarrow \dot{u} = [-x(2xz^2+2y+3z)]\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + (xz^3)\frac{\partial u}{\partial y} + [z(xz^2+y+z)]\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = z^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2xz$

$$\Rightarrow \dot{u} = [-x(2xz^2+2y+3z)]\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + (xz^3)\frac{\partial u}{\partial y} + [z(xz^2+y+z)]\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$= [-x(2xz^2+2y+3z)]z^2 + xz^3 + z(xz^2+y+z)2xz = 0$$

$$= xz^2[-2xz^2 - 2y - 3z + z + 2xz^2 + 2y + 2z] = 0$$

$xz^2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow u = y + xz^2$ = первый интеграл

$$\begin{cases} \dot{y} = (u-y)z \\ \dot{z} = z(u+z) \end{cases} \Rightarrow dy\cdot(u+z) = dz(u-y)$$

$$\frac{dy}{u-y} = \frac{dz}{u+z}$$

$$-\ln|u-y| = \ln|u+z| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{u-y} = \frac{1}{v}(u+z) \Rightarrow v = (u+z)(u-y)$$

$$v = xz^2(z+y+xz^2)$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} z^2 & 1 & 2zx \\ z^3+z^2y+2xz^4 & xz^2 & 3z^2x+2xyz+4z^3x^2 \end{pmatrix}, \; rg\, J = 2 \Rightarrow u \text{ и } v \text{ нез.}$$

№T2

2. Найти все первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости. В пункте в) найти также интегральные кривые системы.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$; в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$

пусть $y = \dot{x}$

$$y\,dy + \sin x\,dx = 0$$

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{y^2}{2} - \cos x = C$ первый интеграл (полная энергия маятника)

$\Downarrow$

точки $M_k(\pi k, 0), k \in \mathbb{Z}$ — положения ровновесия

при чём M_k = центр, при чётных k

M_k = седло, при неч. k

$\dot{x}^2 = 2(\cos x + C)$

при $C < -1 \Rightarrow (2\cos x + C) < 0$, что невозможно

$\Rightarrow C \geqslant -1$

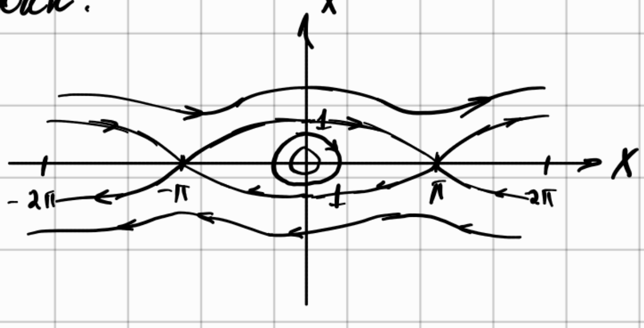
при $C \in [-1, 1) \to$ фазовые траектории замкнутые

при $C = 1 \to$ две сепаратрисы

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2(\cos x + 1)} = \pm 2\cos\frac{x}{2}$$

при $C > 1 \to$ фазовые траектории не пересек. или самопересек.

график:

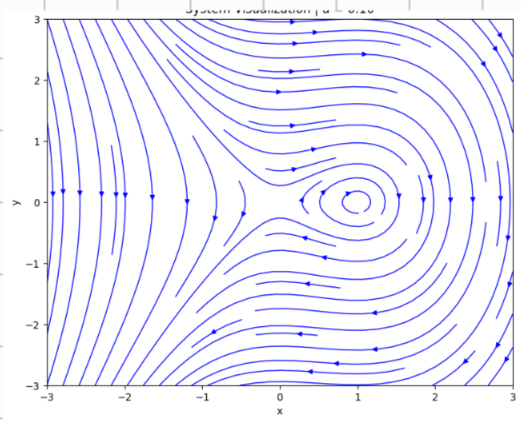


б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^2 \end{cases}$

пусть $y = \dot{x}$

$(x^2 - x)dx + y\,dy = 0$

$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$ первый интеграл



$\Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x^3 + 2c}$

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^2 \end{cases} \Rightarrow$ $(0,0)$ и $(1,0)$ стац. точки (в $(0,0)$ — седло)

при $C = 0$: $y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x^3}$ проходит через $(0,0) \Rightarrow$ сепаратриса (начинается на ∞ или на седле)

$x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Rightarrow x \le \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ сепаратрисса соединяет $(0,0)$ и $(\frac{3}{2}, 0)$

в точке $(1,0)$: $C = -\frac{1}{6}$ замкнутые траектории вокруг центра

$C > 0$ неограниченные траектории

в) $\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow (x^2 + y^2 - 1)dx - 2xy\,dy = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 + y^2 - 1\right] = 2y$ пусть $\mu = \mu(x)$

$\frac{\partial}{\partial x}\left[-2xy\right] = -2y$

$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x^2 + y^2 - 1)\right] = 2y\mu$

$\frac{\partial}{\partial x}\left[-2xy\mu\right] = -2y\mu - 2xy\frac{d\mu}{dx}$

$2y\mu = -2y\mu - 2xy\frac{d\mu}{dx}$

$4y\mu = -2xy\frac{d\mu}{dx} \Rightarrow 2\mu = -x\frac{d\mu}{dx} \Rightarrow -2\frac{dx}{x} = \frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{y^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0$$

$$d\left(x-\frac{y^2}{x}+\frac{1}{x}\right)=0 \Rightarrow x-\frac{y^2}{x}+\frac{1}{x}=C$$

интегральные кривые

$$\begin{cases}\dot x = 2xy \\ \dot y = x^2+y^2-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2xy = 0 \\ x^2+y^2-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(-1,0) & (1,0) \\ (0,-1) & (0,1)\end{matrix}$$

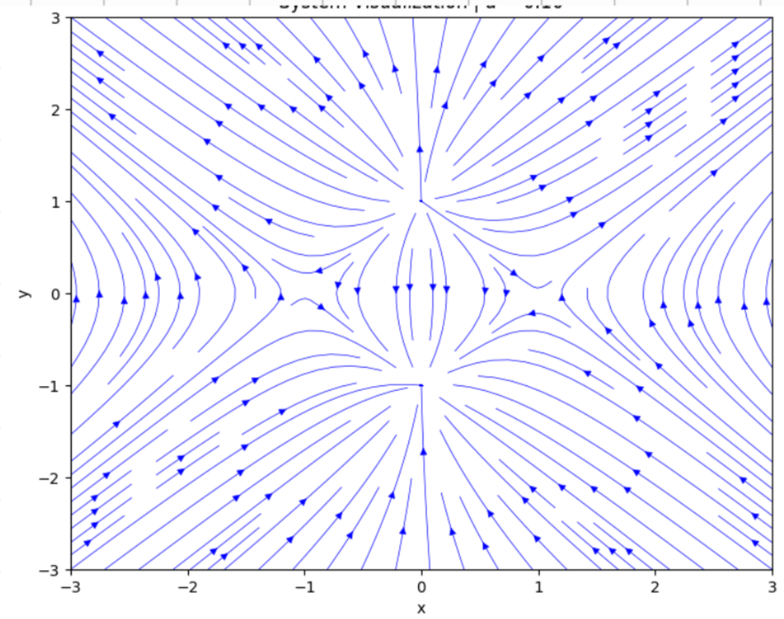
1) $$\begin{cases}u = x\pm1 \\ v = y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = u\mp1 \\ y = v\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot u = 2(u\mp1)v \\ \dot v = (u\mp1)^2+v^2-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot u = \mp2v \\ \dot v = \mp2u\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & \mp2 \\ \mp2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm2$$

седло в точках $(-1,0)$ и $(1,0)$

2) $$\begin{cases}u = x \\ v = y\pm1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = u \\ y = v\mp1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot u = 2u(v\mp1) \\ \dot v = u^2+(v\mp1)^2-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot u = \mp2u \\ \dot v = \pm2v\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}\mp2 & 0 \\ 0 & \mp2\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \mp2 \text{ кр } 2$$

в точке $(0,1)$ $\lambda_{1,2} = 2$ кр 2
нест. узел
в точке $(0,-1)$ $\lambda_{1,2} = -2$ кр 2
стаб. седло



$(-1,0)$ и $(1,0)$ − седло $\Rightarrow C = 2$ и -2
сепаратрисы

$(0,1)$ − нестабильная точка, от которой удаляются траектории
$(0,-1)$ − стабильная точка, куда сходятся траектории

C: n 16 6.26

Найдя первый интеграл, решить системы (1–17) в указанных областях:

№6

$\boxed{\textbf{6.}}$ $\begin{cases} \dot{x} = x - xy, \\ \dot{y} = -x + xy, \ (x > 0,\ x + y > 1). \end{cases}$

$$\dot{x} + \dot{y} = (x - xy) + (-x + xy) = 0$$

$$(x+y)^{\cdot} = 0$$

$$x + y = C_1 > 1$$

$$y = -x + C_1 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x(1 + x - C_1) \\ y = -x + C_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{x(x+1-C_1)} = dt$$

$$\frac{1}{C_1 - 1}\int\left[\frac{1}{x+1-C_1} - \frac{1}{x}\right]dx = t + C_2$$

$$\frac{1}{C_1-1}\left[\ln|x+1-C_1| - \ln x\right] = t + C_2 \Rightarrow \ln\left|\frac{x+1-C_1}{x}\right| = (t + C_2)(C_1 - 1) = t(C_1-1) + C_2(C_1-1)$$

$$\frac{C_1-1}{x} - 1 = \exp[(C_1-1)t]\cdot\exp[C_2(C_1-1)] \Rightarrow x = (C_1-1)\big/\exp[(C_1-1)t]\cdot\exp[C_2(C_1-1)] + 1$$

$$\Rightarrow y = C_1 - x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1 - 1}{(C_1-1)\tilde{C}_2\exp[(C_1-1)t] + 1} \\ y = C_1 - \dfrac{C_1 - 1}{(C_1-1)\tilde{C}_2\exp[(C_1-1)t] + 1} \end{cases}$$

где $\tilde{C}_2 = \dfrac{\exp[C_2(C_1-1)]}{C_1 - 1}$

$\boxed{\textbf{6.}}$ $x = \dfrac{C_1 - 1}{(C_1-1)C_2e^{(C_1-1)t} + 1}$, $y = C_1 - \dfrac{C_1 - 1}{(C_1-1)C_2e^{(C_1-1)t} + 1}$.

Найдя два независимых первых интеграла системы, решить системы (18–26) в указанных областях:

№26

26. $\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = 2x^3 - xy - z, \\ \dot{z} = xz - 2x^4, \ (x > 0). \end{cases}$

$$(2x^4 - xz)dx + x^2 dz = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(2x^4 - xz) = -x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2) = 2x \quad \neq \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ умножим на $\mu = \mu(x)$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu(2x^4 - xz)\right] = -x\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu x^2\right] = x^2 \frac{d\mu}{dx} + 2\mu x$$

$$\Rightarrow -x\mu = x^2 \frac{d\mu}{dx} + 2x\mu$$

$$-3\mu = x \frac{d\mu}{dx}$$

$$-3\frac{dx}{x} = \frac{d\mu}{\mu} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow (2x^4 - xz)dx + x^2 dz = 0 \Big/ \frac{1}{x^3} \quad \text{полн дифф.}$$

$$\left(2x - \frac{z}{x^2}\right)dx + \frac{dz}{x} = 0$$

$$d\left(x^2 + \frac{z}{x}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{z}{x} = C_1 \quad \text{первый интеграл}$$

$$\Rightarrow z = (C_1 - x^2)x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = 3x^3 - xy - C_1 x \\ z = (C_1 - x^2)x \end{cases}$$

$$(3x^3 - xy - C_1 x)dx - x^2 dy = 0$$

$$(3x^2 - y - C_1)dx - x dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - y - C_1) = -1$$
$$\parallel \quad \Rightarrow$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1$$

$$\Rightarrow d(x^3 - xy - C_1 x) = 0 \Rightarrow x^3 - xy - C_1 x = C_2$$ первый интеграл

$$y = \frac{C_2 + C_1 x - x^3}{-x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ y = \dfrac{C_2 + C_1 x - x^3}{-x} \\ z = (C_1 - x^2)x \end{cases}$$

$$\dot{x} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow -\frac{1}{x} = t + C_3$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{C_3 - t}$$

$$\Rightarrow y = C_2(C_3 - t) - C_1 + \frac{1}{(C_3 - t)^2} \qquad z = \frac{C_1}{C_3 - t} - \frac{1}{(C_3 - t)^3}$$

$\boxed{26.}$ $x = \dfrac{1}{C_3 - t}$, $y = C_1(C_3 - t) + C_2 + \dfrac{1}{(C_3 - t)^2}$, $z = \dfrac{-C_2}{C_3 - t} - \dfrac{1}{(C_3 - t)^3}$.

Ответ совпадает при $C_1 \to -C_2$
$C_2 \to C_1$

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С п/7:

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием (1–100):

№4.

$\boxed{4.}$ $(x^2+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2(xy-xz^3)\dfrac{\partial u}{\partial y}+2xz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=\dfrac{y}{z}-\dfrac{z^2}{2}$ при $x^2-z^2=2.$

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2+z^2 \\ \dot{y} = 2(xy-xz^3) \\ \dot{z} = 2xz \end{cases}$$

$2(xz^3-xy)dz + 2xz\,dy = 0 \quad \Big| :2x$

$(z^3-y)dz + z\,dy = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}(z^3-y) = -1$

$\frac{\partial}{\partial z}(z) = 1$ $\quad \ne \quad$ $\Rightarrow$ умножим на $\mu=\mu(z)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(z^3-y)\right] = -\mu$

$\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu z\right] = z\cdot\frac{\partial\mu}{\partial z} + \mu$ $\quad \Rightarrow -\mu = z\frac{\partial\mu}{\partial z}+\mu$

$\Rightarrow \mu = \frac{1}{z^2}$

$\Rightarrow (z^3-y)dz + z\,dy = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{z^2}$ полн диф

$\left(z-\frac{y}{z^2}\right)dz + \frac{1}{z}dy = 0 \Rightarrow d\left(\frac{1}{2}z^2+\frac{y}{z}\right) = 0$

$\frac{z^2}{2}+\frac{y}{z} = u_1$ первый интеграл

$$\begin{cases} u_1 = \frac{z^2}{2} + \frac{y}{z} \\ (x+z)^{\circ} = (x+z)^2 \\ (x-z)^{\circ} = (x-z)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{d(x\pm z)}{(x\pm z)^2} = dt$$

$$-\frac{1}{x\pm z} = t + C_{2,3} \Rightarrow \frac{\frac{1}{x-z} - \frac{1}{x+z}}{2} = u_2$$

$$\Rightarrow \frac{z}{x^2-z^2} = u_2 \Rightarrow u = F(u_1, u_2) = F\left(\frac{z^2}{2} + \frac{y}{z}, \frac{z}{x^2-z^2}\right)$$

Задача Коши: $\begin{cases} u = \frac{y}{z} - \frac{z^2}{2} \\ x^2 - z^2 = 2 \\ u_1 = \frac{z^2}{2} + \frac{y}{z} \\ u_2 = \frac{z}{x^2-z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = u_1 - z^2 \\ z = 2u_2 \end{cases} \Rightarrow u = u_1 - 4u_2^2$

$$\Rightarrow u = \frac{y}{z} + \frac{z^2}{2} - \frac{4z^2}{(z^2-x^2)^2}$$

$\boxed{4.}$ $u = F\left(\frac{z^2-x^2}{z}, \frac{y}{z} + \frac{z^2}{2}\right)$, $u = \frac{y}{z} + \frac{z^2}{2} - \frac{4z^2}{(z^2-x^2)^2}$.

№16

$\boxed{16.}$ $(z-x+3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (z+x-3y)\frac{\partial u}{\partial y} - 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \frac{4y}{z}$ при $x = 3y$.

$$\begin{cases} \dot{x} = z - x + 3y \\ \dot{y} = z + x - 3y \\ \dot{z} = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 2z \\ \dot{y} = z + x - 3y \\ \dot{z} = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y+z)^{\circ} = 0 \\ \dot{y} = z + x - 3y \\ \dot{z} = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = x+y+z \\ \dot{y} = z + x - 3y \\ \dot{z} = -2z \end{cases}$$

$$x = u_1 - y - z \Rightarrow \begin{cases} u_1 = x+y+z \\ \dot{y} = -4y + u_1 \\ \dot{z} = -2z \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-4y+u_1)dz + 2z\,dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(-4y+u_1) = -4$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(2z) = 2$$

$\#$ $\to$ умножим на $\mu = \mu(z)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(-4y+u_1)\right] = -4\mu$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[2\mu z\right] = 2z\frac{\partial\mu}{\partial z} + 2\mu$$

$\parallel \Rightarrow -4\mu = 2\mu + 2z\frac{d\mu}{dz}$

$$-3\frac{dz}{z} = \frac{d\mu}{\mu}$$

$$\mu = \frac{1}{z^3}$$

$$\Rightarrow (-4y+u_1)dz + 2z\,dy = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{z^3}$$ полн. дифф

$$\left(\frac{-4y+u_1}{z^3}\right)dz + \frac{2}{z^2}dy = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{-4y+u_1}{z^3} \Rightarrow u_2 = \frac{2y - \frac{u_1}{2}}{z^2} + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{2}{z^2} = \frac{2}{z^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{4y-u_1}{2z^2}$$

$$\Rightarrow u = F(u_1, u_2) = F\left(x+y+z, \frac{3y-x-z}{2z^2}\right)$$

Задача Коши

$$\begin{cases} u = \frac{4y}{z} \\ x = 3y \\ u_1 = x+y+z \\ u_2 = \frac{3y-x-z}{2z^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{4y}{z} \\ x = 3y \\ u_1 = 4y+z \\ u_2 = \frac{4y-u_1}{2z^2} = -\frac{1}{2z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{2u_2} \\ 4y = u_1 - z = u_1 + \frac{1}{2u_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = \frac{u_1 + \frac{1}{2u_2}}{-1/2u_2} = -2u_1u_2 - 1$$

$$\Rightarrow u = \frac{(x-y+z)(x+z-3y)}{z^2} - 1$$

$\boxed{16.}$ $u = F[x+y+z, \dfrac{z^2}{x-3y+z}]$, $u = \dfrac{(x+y+z)(x-3y+z)}{z^2} - 1.$

Ответ совпадает при замене $u_2 \to -\dfrac{1}{2u_2}$

№45

$\boxed{45.}$ $xz\operatorname{tg} z\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y-x)\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - z\,\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \cos z - \sin z$ при $x = yz$ $\left(0 < z < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = xz\operatorname{tg} z \\ \dot{y} = y - x \\ \dot{z} = -z \end{cases}$$

$$xz\operatorname{tg} z \cdot dz + z\,dx = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{x^2 z} \cdot \cos z$$

$$\frac{\sin z\,dz}{x} + \frac{\cos z}{x^2}\,dx = 0$$

$$d\left(-\frac{\cos z}{x}\right) = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{\cos z}{x} \Leftrightarrow x = \frac{\cos z}{u_1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{\cos z}{x} \\ \dot{y} = y - \dfrac{\cos z}{u_1} \\ \dot{z} = -z \end{cases}$$

$$\left(y - \frac{\cos z}{u_1}\right)dz + z\,dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y - \frac{\cos z}{u_1}\right) = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 \quad \Rightarrow \text{полный дифф}$$

$$d\left(yz - \frac{\sin z}{u_1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow u_2 = yz - \frac{\sin z}{u_1} = yz - x\operatorname{tg} z$$

$$\Rightarrow u = F(u_1, u_2) = F\left(\frac{\cos z}{x}, yz - x\operatorname{tg} z\right)$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} u = \cos z - \sin z \\ x = yz \\ u_1 = \frac{\cos z}{x} \\ u_2 = yz - x\operatorname{tg} z \end{cases} \Rightarrow u_2 = x(1 - \operatorname{tg} z)$$

$$\Rightarrow u = u_1 u_2$$

$$u = \frac{yz}{x}\cos z - \sin z$$

45. $u = F\left(\frac{x}{\cos z}, yz - x\operatorname{tg} z\right)$, $u = \frac{yz}{x} \cdot \cos z - \sin z$.

$u_1 \to \frac{1}{u_1}$

№79

79. $2xy\frac{\partial u}{\partial x} + (1 - y^2 - 2xz)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $u = \frac{1}{2} - y^2$ при $y^2 + xz = 1$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 1 - y^2 - 2xz \\ \dot{z} = -y/x \end{cases} \Rightarrow 2xy\,dz + \frac{y}{x}dx = 0 \;\Big|\cdot\frac{1}{y}$$

$$2x\,dz + \frac{1}{x}dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \neq \quad \Rightarrow \text{умн. на } \mu = \mu(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[2\mu x] = 2x\frac{\partial\mu}{\partial x} + 2\mu$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\mu}{x}\right] = 0 \quad \| \quad \Rightarrow 2x\frac{d\mu}{dx} + 2\mu = 0$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \mu = \frac{1}{x}$$

$$2x\,dz + \frac{1}{x}dx = 0 \;\Big/ \frac{1}{x} \quad \text{полн. диф}$$

$$2dz + \frac{1}{x^2}dx = 0 \Rightarrow d\left(2z - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow u_1 = 2z - \frac{1}{x} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}\left(u_1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2z - \frac{1}{x} \\ \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = 1 - y^2 - x\left(u_1 + \frac{1}{x}\right) \end{cases} \Rightarrow 2xy\,dy + (y^2 + u_1 x)dx = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$$
$$= \quad \Rightarrow \text{полн. диф}$$
$$\partial/\partial y\left(y^2 + u_1 x\right) = 2y$$

$$d\left(xy^2+\frac{u_1 x^2}{2}\right)=0 \Rightarrow u_2 = xy^2+\frac{u_1x^2}{2} = xy^2+\frac{x^2}{2}\left(2z-\frac{1}{x}\right)$$
$$= xy^2+x^2z-\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow u = F\left(2z-\frac{1}{x},\ xy^2+x^2z-\frac{x}{2}\right)$$

Задача Коши

$$xy^2+x\left(\frac{xu_1+1}{2}\right)-\frac{x}{2}$$

$$\begin{cases} u=\frac{1}{2}-y^2 \\ y^2+xz=1 \\ u_1 = 2z-\frac{1}{x} \\ u_2 = xy^2+x^2z-\frac{x}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y^2+xz-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad |\cdot x \\ u=\frac{1}{2}-y^2 \\ \frac{u_1 x}{2} = xz-\frac{1}{2} \\ u_2 = xy^2+x^2z-\frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = \frac{x}{2} \\ u=\frac{1}{2}-y^2 = xz-\frac{1}{2} \\ \frac{u_1 x}{2} = xz-\frac{1}{2} = u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = u_1 \cdot u_2$$

$$\Rightarrow u = u_1u_2 \quad = \left(2z-\frac{1}{x}\right)\left(xy^2+x^2z-\frac{x}{2}\right)$$
$$u = (2zx-1)\left(y^2+xz-\frac{1}{2}\right)$$

79. $u = F\left(\frac{1}{x}-2z,\ xy^2-\frac{x}{2}+x^2z\right)$, $u=(2xz-1)\left(y^2-\frac{1}{2}+xz\right)$.

$u_1 \to -u_1$

№85

85. $(y-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial y}+2yz^2\frac{\partial u}{\partial z}=0$, $u=x^2z$ при $x+y=0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = y-x \\ \dot{y} = x+y \\ \dot{z} = 2yz^2 \end{cases} \qquad (x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x+y)=1$$
$\Rightarrow$ полн дифф
$$\frac{\partial}{\partial x}(x-y)=1$$

$$\Rightarrow d\left(\frac{1}{2}x^2+xy-\frac{1}{2}y^2\right)=0 \Rightarrow x^2+2xy-y^2=u_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = x^2 + 2xy - y^2 \\ (x+y)^{\cdot} = 2y \\ \dot{z} = 2y z^2 \end{cases}$$

$$2y z^2 \cdot d(x+y) - 2y\, dz = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{2y \cdot z^2}$$

$$1 d(x+y) - \frac{1}{z^2} \cdot dz = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(1) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial (x+y)}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = 0 \Rightarrow \text{полный дифф}$$

$$\Rightarrow d\left(x+y+\frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow u_2 = x+y+\frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow u = F\left(x^2 + 2xy - y^2,\ x+y+\frac{1}{z}\right)$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} u = x^2 z \\ x+y=0 \\ u_1 = x^2 + 2xy - y^2 \\ u_2 = x+y+\frac{1}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 z \\ x+y = 0 \\ u_1 = -2y^2 \\ u_2 = \frac{1}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 = -\frac{u_1}{2} \\ z = \frac{1}{u_2} \\ u = -\frac{u_1}{2u_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = -\frac{1}{2}\frac{(x^2 + 2xy - y^2)}{\left(x+y+\frac{1}{z}\right)}$$

85. $u = F\left(x^2 + 2xy - y^2, x+y+\frac{1}{z}\right)$, $u = \dfrac{y^2 - x^2 - 2xy}{2(x+y+\frac{1}{z})}$.

№ Т4

4. Найти общее решение уравнения $2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Затем в пунктах а), б) и в) решить соответствующую задачу Коши. Объяснить получившиеся результаты:

а) $u = 10$ при $3x - 2y = 5$;
б) $u = e^x$ при $3x - 2y = 5$;
в) $u = \sin y$ при $x = 0$.

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow 3dx - 2dy = 0$$

$$d(3x-2y) = 0$$

$$u_1 = 3x - 2y$$

$$\Rightarrow u = F(3x-2y)$$

а) $\begin{cases} u = 10 \\ 3x - 2y = 5 \\ u_1 = 3x - 2y \end{cases} \Rightarrow$ $u(x,y) = 10$ $\forall u_1$

б) $\begin{cases} u = e^x \\ 3x - 2y = 5 \\ u_1 = 3x - 2y \end{cases}$

$u = F(u_1) = \text{const}$

вдоль $3x - 2y = 5$

подставим $\underbrace{\begin{cases} (1, -1) \\ (2, \frac{1}{2}) \end{cases}}_{3x-2y=5} \Rightarrow \begin{matrix} u = e \\ u = e^2 \end{matrix} \Rightarrow u \neq \text{const}$ вдоль $3x - 2y = 5$

Решения Коши не сущ.

в) $\begin{cases} u = \sin y \\ x = 0 \\ u_1 = 3x - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{u_1}{2} \\ u = \sin y \end{cases} \Rightarrow u = \sin\left(-\frac{u_1}{2}\right)$

$$u = \sin\left(\frac{2y-3x}{2}\right)$$

Решить простейшую вариационную задачу (1–90):

III Вариационное исчисление

В пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $C[a,b]$ (k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций $C^k[a,b]$) с нормой $\|y(x)\|_{C[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)|$ $\left(\|y(x)\|_{C^k[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]}|y(x)| + \sum\limits_{i=1}^{k}\max\limits_{x\in[a,b]}|y^{(i)}(x)|\right)$ рассмотрим функционал $J[y(x)]$.

Например, определенный интеграл

$$J(y) = \int\limits_a^b y(x)\,dx,$$

на множестве функций

$$M = \{y \in C^k[a,b] \mid y(a) = A,\ y(b) = B\} -$$

функционал заданный на множестве M в пространстве $C^k[a,b]$.

В пространствах $C[a,b]$ и $C^k[a,b]$ введем расстояние между 2 элементами

$$\varrho_{C[a,b]}(y_1,y_2) = \max_{x\in[a,b]}|y_1(x) - y_2(x)|,$$

$$\varrho_{C^k[a,b]}(y_1,y_2) = \max_{x\in[a,b]}|y_1(x) - y_2(x)| + \sum_{i=1}^{k}\max_{x\in[a,b]}|y_1^{(i)}(x) - y_2^{(i)}(x)|.$$

Пусть $F(x,y,p)$ – заданная непрерывно дифференцируемая функция на $[a,b]\times\mathbb{R}^2$.

$$J(y) = \int\limits_a^b F[x,y(x),y'(x)]\,dx, \tag{1}$$

на множестве $C^1[a,b]$ таких функций, что

$$y(a) = A, \qquad y(b) = B. \tag{2}$$

Будем называть функции y, удовлетворяющие условие (2), допустимыми.

Определение 1 *$\tilde{y}(x)$ дает слабый локальный минимум функционала (1) если $\exists\varepsilon > 0$ такое что $\forall y(x) \in M:\quad \varrho_{C^1[a,b]}(\tilde{y}(x), y(x)) < \varepsilon$ выолняется неравенство $J(y) \geq J(\tilde{y})$.*

Аналогично определяется слабый локальный максимум.

Определение 2 *Задача отыскания слабого локального экстремума функционала (1) называется простейшей задачей вариационного исчисления.*

Рассмотрим семейство функций $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x)$, где $\eta(x) \in C^1[a,b]$, $\eta(a) = \eta(b) = 0$ (такие функции называются допустимым приращением/вариацией). Отметим, что любая функция данного семейства является допустимой. При фиксированных $y(x)$ и $\eta(x)$ рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha) = J(y+\alpha\eta) = \int\limits_a^b F[x,y(x)+\alpha\eta(x),y'(x)+\alpha\eta'(x)]\,dx.$$

$$\Phi'(0) = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F[x,y(x),y'(x)]}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F[x,y(x),y'(x)]}{\partial y'}\eta'(x)\right)\,dx.$$

Определение 3 *$\frac{d}{d\alpha}J[y(x)+\alpha\eta(x)]\mid_{\alpha=0}$ – первая вариация функционала $J[y]$, обозначается $\delta J[y,\eta(x)]$.*

$$\delta J[y,\eta(x)] = \int\limits_a^b \left(\frac{\partial F[x,y(x),y'(x)]}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F[x,y(x),y'(x)]}{\partial y'}\eta'(x)\right)\,dx.$$

Теорема 1 *Пусть $F(x,y,p$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[a,b]\times\mathbb{R}^2$. Если дважды непрерывная функция $\tilde{y}(x)$ $\delta J[y,\eta(x)]$ является решением простейшей вариационной задачи, то она удовлетворяет условию Эйлера:*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

Определение 4 *Любое решение уравнения Эйлера называется экстремалью функционала. Всякая экстремаль, которая является допустимой функцией, называется допустимой экстремалью.*

$$\int\limits_a^b \eta^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\int\limits_a^b \eta'^2(x)dx.$$

План: 1) Ищем реш ур-я Эйлера $\hat{y}(x, c_1, c_2)$
2) Находим c_1, c_2 из нач. усл.
3) Проверяем

Частные случаи:

1) $F = F(x,y)$ то нет реш, т.к $\hat{y}$ не может зависить от нач усл

2) $F = P(x,y) + Q(x,y)y'$, $P, Q \in$ непр диф

нет реш или если $P\,dx + Q\,dy$ не имеет смысл т.к const

3) $f = F(x, y')$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f(x,y')}{\partial y'} = 0, \text{ т.е } \frac{\partial f(x,y')}{\partial y'} = c$$

4) $f = F(y, y')$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y'' = 0 \ \Big/ \cdot y' \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$$

Важно!

Далее в решении будем использовать следующий факт:

$$\mathcal{J}[y + t\delta y] = \mathcal{J}[y] + \delta\mathcal{J}\cdot t + \delta^2\mathcal{J}\cdot\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

для допустимой вариации δy: $\delta\mathcal{J} = 0$

если порядок (у или у') подинтегральной функции F не больше 2

$\Rightarrow o(t^2) \equiv 0$

$$\Rightarrow \Delta\mathcal{J} = \delta^2\mathcal{J}\cdot\frac{t^2}{2} \Rightarrow \text{знак } \Delta\mathcal{J} \text{ зависит только от } \delta^2\mathcal{J}$$

$$\delta^2\mathcal{J} = \int_a^b\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\,\delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta y'^2\right]dx$$

С п19:

№12

12. $J(y) = \int_1^2 \left[x(y')^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y\ln x}{x} \right] dx,\ y(1) = 0,\ y(2) = 1 - \ln 2.$

$$F = xy'^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y\ln x}{x}$$

1) Ур. Эйлера: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \left(\frac{2y}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right) - \frac{d}{dx}\left(2xy'\right) = 0$

$$\frac{2y}{x} + \frac{2\ln x}{x} - 2y' - 2xy'' = 0$$

$$xy'' + y' - \frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} = 0$$

Однор: $xy'' + y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow$

ч. реш. $y_0 = \frac{1}{x}$,

$\Rightarrow W[y_0, y] = C_1 \exp\left[-\int \frac{q}{p} dx\right]$

$$\frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = C_1 \exp\left[-\int \frac{1}{x}dx\right] = C_1 \frac{1}{x} \quad \Big| : \frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{y}{1/x}\right)' = (xy)' = C_1 x \Rightarrow xy = C_1 x^2 + C_2$$

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

$$xy'' + y' - \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

Заметим, что $y_0 = -\ln x$ реш

$$\Rightarrow y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x} - \ln x$$

$$\hat{y} = C_4 x + C_3 \cdot \frac{1}{x} - \ln x$$

2) $y(1)=0$
$y(2)=1-\ln 2$ $\Rightarrow \begin{cases} C_4+C_3=0 \\ 2C_4+\frac{1}{2}C_3-\ln 2=1-\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4+C_3=0 \\ 2C_4+\frac{1}{2}C_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3=-\frac{2}{3} \\ C_4=\frac{2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{y}=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\ln x$ – допустимая экстремаль

3) $\delta^2 y=\int_1^2\Big[\underset{\overset{\vee\!/}{0}}{\frac{2}{x}\delta y^2}+\underset{\overset{\vee\!/}{0}}{2x\,\delta y'^2}\Big]dx \Rightarrow \Delta y\geq 0 \Rightarrow$ абс. min

12. $\hat{y}(x)=\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)-\ln x$, абс. min.

№33

33. $J(y)=\int\limits_0^{1/2}\left[\frac{(y')^2}{x^2-1}-\frac{2y^2}{(x^2-1)^2}\right]dx,\ y(0)=1,\ y\left(\frac{1}{2}\right)=2.$

$$F=\frac{y'^2}{x^2-1}-\frac{2y^2}{(x^2-1)^2}$$

1) Ур. Эйлера:

$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0$ $\qquad \left[-\frac{4y}{(x^2-1)^2}\right]-\frac{d}{dx}\left[\frac{2y'}{(x^2-1)}\right]=0$

$$\frac{-4y}{(x^2-1)^2}-\frac{2y''(x^2-1)-4y'x}{(x^2-1)^2}=0$$

$$-4y-2y''(x^2-1)+4y'x=0$$

$$(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$$

$(x^2-1)y''-2xy'+2y=0$ $\qquad$ замена: $y=zx \Rightarrow y'=z'x+z$

$y''=z''x+2z'$

$$(x^2-1)(z''x+2z')-2x(z'x+z)+2zx=0$$

$$z''(x^3-x)+\left(2(x^2-1)-2x^2\right)z'\ \cancel{-2xz+2xz}=0$$

$z''(x^3-x)-2z'=0$

пусть $t=z'$, $t'=z''$ $\quad t'(x^3-x)-2t=0 \Rightarrow \dfrac{dt}{t}=\dfrac{2dx}{x^3-x}$

$$\frac{2}{x^3-x}=\frac{2}{x(x-1)(x+1)}=\frac{-2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow \int\frac{2dx}{x^3-x}=\int\left[-\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right]dx$$

$$\Rightarrow \ln|t|=\ln\left|\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right|+C_1 \Rightarrow t=\frac{x^2-1}{x^2}C_1$$

$$\Rightarrow z=\int t\,dx=C_1\int 1-\frac{1}{x^2}dx=C_1\left(x+\frac{1}{x}\right)+C_2$$

$$y=xz \Rightarrow y=C_1(x^2+1)+C_2x$$

2) $\begin{cases} y(0)=1 \\ y(\frac{1}{2})=2 \\ y=C_1(x^2+1)+C_2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ \frac{5}{4}C_1+\frac{1}{2}C_2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=\frac{3}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{y}=x^2+1+\frac{3}{2}x$ – допустимая экстремаль

3) $\delta^2 J=\int_0^{1/2}\Big[\underbrace{-\frac{4}{(x^2-1)^2}}_{\leq 0}\delta y^2+\underbrace{\frac{2}{x^2-1}}_{\leq 0}\delta y'^2\Big]dx \Rightarrow \delta J\leq 0$

$\Rightarrow$ абс. max

33. $\hat{y}(x)=x^2+\frac{3x}{2}+1$, абс. max.

№75

75. $J(y) = \int\limits_{1/2}^{2} [4xyy' - x^2(y')^2 + 4x^2y]\,dx,\ y\left(\frac{1}{2}\right) = y(2) = \frac{1}{2}.$

$$F = 4xyy' - x^2y'^2 + 4x^2y$$

1) Ур Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \left[4xy' + 4x^2\right] - \frac{d}{dx}\left[4xy - 2x^2y'\right] = 0$$

$$4xy' + 4x^2 - 4y - \cancel{4xy'} + \cancel{4xy'} + 2x^2y'' = 0$$

$$2xy' + 2x^2 - 2y + x^2y'' = 0$$

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = -2x^2$$

$$\Rightarrow x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$$

$$y_0 = x$$

$$xy' - y = C_1 \exp\left[-2\int \frac{1}{x}dx\right] = C_1\frac{1}{x^2} \quad \Big| : x^2$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = C_1\frac{1}{x^4} \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1\frac{1}{x^3} + C_2 \Rightarrow y = C_1\frac{1}{x^2} + C_2x$$

МВП: $\begin{cases} C_1'\frac{1}{x^2} + C_2'x = 0 \\ C_1'\left(-\frac{2}{x^3}\right) + C_2' = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{2}{3}x^3 \\ C_2' = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{x^4}{6} + C_3 \\ C_2 = -\frac{2x}{3} + C_4 \end{cases}$

$$\Rightarrow y = \left[\frac{x^4}{6} + C_3\right]\frac{1}{x^2} + \left[-\frac{2}{3}x + C_4\right]x$$

$$= C_3\frac{1}{x^2} + C_4x - \frac{x^2}{2}$$

2) $\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ y(2) = \frac{1}{2} \\ y = C_3 \frac{1}{x^2} + C_4 x - \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4C_3 + \frac{1}{2} C_4 - \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} C_3 + 2C_4 - 2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \hat{y} = \frac{5}{4}x - \frac{x^2}{2}$

допустимая экстремаль

3) $\delta^2 J = \int\limits_{1/2}^{2} \left[8x\,\delta y \cdot \delta y' - 2x^2\,\delta y'^2 \right] dx$

$I_1 = \int\limits_{1/2}^{2} \left[8x\,\delta y \cdot \delta y' \right] dx = 8x \overset{0}{\overset{\|}{\delta y^2}} \Big|_{1/2}^{2} - \int\limits_{1/2}^{2} \Big[\underbrace{8x\,\delta y\,\delta y'}_{I_1} + 8\,\delta y^2 \Big] dx$

$\Rightarrow 2I_1 = 2\int\limits_{1/2}^{2} \left[-4\,\delta y^2 \right] dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta^2 J = \int\limits_{1/2}^{2} \Big[-4 \underset{\geq 0}{\delta y^2} - 2 \underset{\geq 0}{x^2} \delta y'^2 \Big] dx \Rightarrow \Delta J \leq 0 \Rightarrow$ абс max

75. $\hat{y}(x) = \frac{5x}{4} - \frac{x^2}{2}$, абс. max.

№102

В задачах (102–105) показать, что допустимая экстремаль не дает экстремум функционала:

102. $J(y)=\int\limits_0^\pi\left[(y')^2-\frac{16}{9}y^2+2y\sin x\right]dx,\ y(0)=0,\ y(\pi)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

1) $F=y'^2-\frac{16}{9}y^2+2y\sin x$

$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \Rightarrow \left[-\frac{32}{9}y+2\sin x\right]-\frac{d}{dx}\left[2y'\right]=0$

$$-\frac{32}{9}y+2\sin x-2y''=0$$

$$y''+\left(\frac{4}{3}\right)^2y=\sin x$$

Одн: $y''+\left(\frac{4}{3}\right)^2y=0$

$$y=C_1\cos\left(\frac{4}{3}x\right)+C_2\sin\left(\frac{4}{3}x\right)$$

$y_0=\frac{9}{7}\sin x$ – ч.реш

$$\Rightarrow y=C_1\cos\left(\frac{4}{3}x\right)+C_2\sin\frac{4}{3}x+\frac{9}{7}\sin x$$

2) $\begin{cases} y(0)=0 \\ y(\pi)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=C_3\cos\frac{4x}{3}+C_4\sin\frac{4}{3}x+\frac{9}{7}\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3=0 \\ C_3\left(-\frac{1}{2}\right)+C_4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3=0 \\ C_4=1 \end{cases}$

$\Rightarrow y=\sin\frac{4}{3}x+\frac{9}{7}\sin x$ – допустимая экстремаль

3) $\delta^2 J=\int\limits_0^\pi\left[-\frac{32}{9}\delta y^2+2\delta y'^2\right]dx$

$\delta y = \sin ax, \; a \in \mathbb{Z}$
$\delta y' = a\cos ax$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} \left[a^2\cos^2 ax - \frac{16}{9}\sin^2 ax\right] dx$

$\Rightarrow \int_0^{\pi} \left[a^2 \frac{1-\cos 2ax}{2} - \frac{16}{9} \frac{1-\cos 2x}{2}\right] dx = \int_0^{\pi} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{8}{9}\right] dx$

$\Rightarrow$ при $a = 1 \Rightarrow \Delta J[\hat{y}] < 0$

$a = 2 = 2 \Rightarrow \Delta J[\hat{y}] > 0$

$\Rightarrow$ не абс экстр

С п 20.1

Задача со свободным концом

Рассмотрим функционал

$$J(y)=\int\limits_a^b F[x,y(x),y'(x)]\,dx,$$

на множестве $C^1[a,b]$ таких функций, что $y(a)=A$. Решаем задачу поиска экстремума этого функционала.

Предложение 1 *Пусть $F[x,y,p]$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом, то она удовлетворяет условию Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

и граничному условию

$$\left.\frac{\partial F[x,y,y']}{\partial y'}\right|_{x=b}=0.$$

или $y(b)=B$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=a}=0$$

Решить задачу со свободным концом (1–10):

№2:

$\boxed{2.}$ $J(y)=\int\limits_0^1[2y+6y'+(y')^2]dx$, $y(0)=0$.

1) $F=2y+6y'+y'^2 \Rightarrow [2]-\frac{d}{dx}[6+2y']=0$

$2-2y''=0 \Rightarrow y''=1 \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$

2) $\begin{cases} y=\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2 \\ y(0)=0 \\ \left.\frac{\partial}{\partial y'}[6y'+y'^2]\right|_{x=1}=0 \end{cases}$ $\quad [6+2y']\Big|_{x=1}=[6+2x+2C_1]\Big|_{x=1}=0$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1=-4 \\ C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \hat{y}=\frac{x^2}{2}-4x$

допустимая экстр.

3) $\delta^2 J=\int\limits_0^1[2\delta y'^2]dx \Rightarrow \Delta J\geq 0$ абс. min

$\boxed{2.}$ $\hat{y}=\dfrac{x^2}{2}-4x$, абс. min.

№9

$\boxed{9.}$ $J(y)=\int_1^3[8yy'\ln x - x(y')^2+6xy']dx,\ y(3)=15.$

1) $F=8yy'\ln x - x(y')^2+6xy' \Rightarrow [8y'\ln x]-\frac{d}{dx}[8y\ln x-2xy'+6x]=0$

$\cancel{8y'\ln x}-\cancel{8y'\ln x}-8y\frac{1}{x}+2y'+2xy''-6=0$

$y''+\frac{1}{x}y'-\frac{4}{x^2}y=3$

одн-ур: $x^2y''+xy'-4y=0$

найдём решение в виде $y=x^\alpha \Rightarrow x^2\cdot\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+x\alpha x^{\alpha-1}-4x^\alpha=0 \mid : x^\alpha$

$\alpha(\alpha-1)+\alpha-4=0 \Rightarrow \alpha^2-4=0$

$\alpha=\pm 2$

$y_1=x^{-2}$
$y_2=x^2$ лнз $\Rightarrow y=C_1x^2+C_2x^{-2}$

$y_0=-x$ - ч. реш неодн

$\Rightarrow y=C_1x^2+C_2x^{-2}-x$ реш

2) $\begin{cases} y = C_1x^2 + C_2x^{-2} - x \\ y(3) = 15 \\ \left[8y\ln x - 2xy' + 6x\right]\Big|_{x=1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9C_1 + \frac{1}{9}C_2 - 3 = 15 \\ -2(2C_1 - 2C_2 - 1) + 6 = 0 \end{cases}$

$y' = 2C_1x - 2\frac{C_2}{x^3} - 1$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

$y'(1) = 2C_1 - C_2 - 1$

$\Rightarrow \hat{y} = 2x^2 - x$ = доп. экст.

3) $\delta^2 y = \int_1^3 \left[16\ln x\,\delta y\,\delta y' - 2x\,\delta y'^2\right] dx$

$I_1 = \int_1^3 \left[16\ln x\,\delta y\,\delta y'\right] dx = 16\ln x\,\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\delta y^2}}\Big|_1^3 - \int_1^3 \left[\frac{16}{x}\delta y^2 + \underset{\overset{\shortparallel}{I_1}}{16\ln x\,\delta y\,\delta y'}\right] dx$

$2I_1 = 2\int_1^3 \left[-\frac{8}{x}\delta y^2\right] dx$

$\delta^2 y = \int_1^3 \left[-\underset{\overset{\wedge}{0}}{\frac{8}{x}\delta y^2} - \underset{\overset{\wedge}{0}}{2x\delta y'^2}\right] dx \Rightarrow \Delta J \le 0$ абс max

$\boxed{9.}$ $\hat{y} = 2x^2 - x$, абс. max.

Задача без ограничений

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]\, dx,$$

на множестве $C^1[a,b]$. Решаем задачу поиска экстремума этого функционала.

Предложение 2 *Пусть $F[x,y,p]$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом, то она удовлетворяет условию Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

и граничным условиям

$$\left.\frac{\partial F[x,y,y']}{\partial y'}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial F[x,y,y')}{\partial y'}\right|_{x=b} = 0.$$

Решить задачу без ограничений (11–16):

№14

$\boxed{\mathbf{14.}}$ $J(y) = \int\limits_0^1 [(y')^2 + y^2 - 4e^x y - 8xe^x y']\, dx.$

1) $F = y'^2 + y^2 - 4e^x y - 8xe^x y' \Rightarrow [2y - 4e^x] - \frac{d}{dx}[2y' - 8xe^x] = 0$

$2y - 4e^x - 2y'' + 8xe^x + 8e^x = 0$

$y'' - y = 4xe^x + 2e^x$

одн: $y_0'' - y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

y_1: $y'' - y = 2e^x \Rightarrow y_1 = xe^x$

y_2: $y'' - y = 4xe^x$

$y_2 = (x^2 + \alpha x + \beta)e^x \Rightarrow$

$y_2' = (x^2 + (\alpha+2)x + (\beta+\alpha))e^x$, $y_2'' = (x^2 + (\alpha+4)x + (\beta + 2\alpha + 2))$

$(x^2 + (\alpha+4)x + (\beta + 2\alpha + 2))e^x - (x^2 + \alpha x + \beta)e^x = 4xe^x$

$$4x + (2\alpha+2) = 4x \Rightarrow \begin{cases} \beta \in \mathbb{R} \\ \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \beta = 0$$

$$\Rightarrow y_2 = (x^2 - x)e^x$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x^2 e^x$$

2)

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x^2 e^x \\ [2y' - 8xe^x]\Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow e(C_1+3) - C_2 \frac{1}{e} = 4e \\ [2y' - 8xe^x]\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{e^2}{e^2-1} \\ C_2 = \frac{e^2}{e^2-1} \end{cases}$$

$$y' = e^x(C_1 + x^2 + 2x) - C_2 e^{-x} \Rightarrow y(x) = \frac{e \cdot 2}{e^1 - e^{-1}} \frac{(e^x + e^{-x})}{2} + x^2 e^x$$

$$y'(0) = C_1 - C_2$$

$$y'(1) = e(C_1+3) - C_2 \frac{1}{e}$$

$$\hat{y} = \frac{e \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}(1)} + x^2 e^x$$

$$3)\ \delta^2 y = \int_0^1 [2\underset{\overset{\Uparrow}{0}}{\delta y^2} + 2\underset{\overset{\Uparrow}{0}}{\delta y'^2}]dx \Rightarrow \Delta y \geqslant 0 \Rightarrow \text{абс min}$$

x. $\boxed{14.}$ $\hat{y} = \dfrac{e \cdot \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} \cancel{e}\, 1} + x^2 e^x$, абс. min.

Функционалы, зависящие от 2 функций

Рассмотрим функционал

$$J[y_1, y_2] = \int_a^b F[x, y_1, y_1', y_2, y_2']\,dx.$$

на множестве $C^1[a,b] \times C^1[a,b]$ таких функций, что $y_1(a) = A_1$, $y_1(b) = B_1$, $y_2(a) = A_2$, $y_2(b) = B_2$. Решаем задачу поиска экстремума этого функционала.

Предложение 3 *Пусть $F[x, y, p]$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом, то она удовлетворяет системе уравнений Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}\right) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right) = 0.$$

С п 20.2

№4

$\boxed{4.}$ $J(y_1, y_2) = \int_1^2 [12y_1^2 + y_2^2 + x^2(y_1')^2 + (y_2')^2]dx$, $y_1(1) = 1$, $y_2(1) = e$, $y_1(2) = 8$, $y_2(2) = e^2$.

$$F = 12y_1^2 + y_2^2 + x^2 y_1'^2 + y_2'^2$$

1) Система ур. Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_1'} = 0 \Rightarrow [24y_1] - \frac{d}{dx}[2x^2 y_1'] = 0$$

$$24y_1 - 4xy_1' - 2x^2 y_1'' = 0$$

$$x^2 y_1'' + 2xy_1' - 12y_1 = 0$$

пусть $x = e^t \Rightarrow t = \ln x$

$$\Rightarrow x^2\left(y_{tt}'' \cdot \frac{1}{x^2} - y_t' \cdot \frac{1}{x^2}\right) + 2x \cdot y_t' \cdot \frac{1}{x} - 12y = 0$$

$$y_{tt}'' + y_t' - 12y = 0$$

$$\lambda^2+\lambda-12=0 \Rightarrow \lambda_1=3,\quad \lambda_2=-4$$

$$\Rightarrow y_1=C_1e^{3t}+C_2e^{-4t} \Rightarrow y_1=C_1x^3+C_2x^{-4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_2'}=0 \Rightarrow [2y_2]-\frac{d}{dx}[2y_2']=0$$

$$2y_2-2y_2''=0 \Rightarrow y_2''-y_2=0$$

$$y_2=C_3e^{x}+C_4e^{-x}$$

2) $$\begin{cases} y_1=C_1x^3+C_2x^{-4} \\ y_2=C_3e^{x}+C_4e^{-x} \\ y_1(1)=1,\ y_2(1)=e \\ y_1(2)=8,\ y_2(2)=e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1 8+C_2\cdot\frac{1}{16}=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=1 \\ C_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_3e+C_4\frac{1}{e}=e \\ C_3e^2+C_4\frac{1}{e^2}=e^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3=1 \\ C_4=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y}_1=x^3,\ \hat{y}_2=e^x$$ допуст. экстр.

3) $$\delta^2 J=\int_1^2\left[24\delta y_1^2+2\delta y_2^2+2x^2\delta y_1'^2+2\delta y_2'^2\right]dx$$

$$\Rightarrow \Delta J\geq 0 \Rightarrow$$ абс min

$\boxed{\mathbf{4.}}$ $\hat{y}_1(x)=x^3$, $\hat{y}_2(x)=e^x$, абс. min.

Функционалы, содержащие производные второго порядка

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b F[x, y, y', y''] \, dx.$$

на множестве $C^2[a, b]$ таких функций, что $y(a) = A_1$, $y(b) = B_1$, $y'(a) = A_2$, $y'(b) = B_2$. Решаем задачу поиска экстремума этого функционала.

Предложение 4 *Пусть $F[x, y, p]$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция. Если трижды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{y}(x)$ является решением задачи со свободным концом, то она удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0.$$

С п 20.3

№5

5. $J(y) = \int_0^1 [y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2] dx$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y(1) = 2\operatorname{sh} 1$, $y'(1) = 2e$.

$F = y^2 + 2y'^2 + y''^2$

1) Ур. Эйлера – Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \Rightarrow [2y] - \frac{d}{dx}[4y'] + \frac{d^2}{dx^2}[2y'']$$

$$2y - 4y'' + 2y^{IV} = 0$$

$$y^{IV} - 2y'' + y = 0$$

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

$$\lambda_{3,4} = -1$$

$$\Rightarrow y = (C_1 x + C_2)e^x + (C_3 x + C_4)e^{-x}$$

2) $\begin{cases} y = (C_1 x + C_2) e^{x} + (C_3 x + C_4) e^{-x} \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0 \\ y(1) = 2\,\mathrm{sh}\,1, \ y'(1) = 2e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 - C_4 = 0 \\ (C_1 + C_2)e + (C_3 + C_4)\frac{1}{e} = 2\,\mathrm{sh}\,1 \\ (2C_1 + C_2)e - C_4 \frac{1}{e} = 2e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \\ C_3 = -1 \\ C_4 = 0 \end{cases}$

$y' = (C_1 x + C_2 + C_1) e^{x} - (C_3 x + C_4 - C_3) e^{-x}$

$\Rightarrow \hat{y} = 2x\,\mathrm{sh}\,x$ – допуст. экстр

3) $\delta^2 \mathcal{J} = \int_0^1 [2\delta y^2 + 4\delta y'^2 + 1\delta y''^2] dx \Rightarrow \Delta \mathcal{J} \geq 0 \Rightarrow$ абс мин

$\boxed{5.}$ $\hat{y}(x) = 2x \cdot \mathrm{sh}\, x$, абс. min.

Изопериметрическая задача

Рассмотрим функционал

$$J[y] = \int_a^b F[x, y, y']\, dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

на множестве $C^1[a, b]$ таких функций, что $y(a) = A$, $y(b) = B$ и выполнено условие связи

$$\int_a^b G[x, y, y']\, dx = l$$

Рассмотрим Лагранжиан

$$L[x, y, y', \lambda] = F[x, y, y'] + \lambda G[x, y, y'].$$

Предложение 5 *Пусть $F[x, y, p]$, $G[x, y, p]$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\tilde{y}(x)$ является решением изопериметрической задачи, то она удовлетворяет уравнению Эйлера вида:*

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0.$$

Находим множитель Лагранжа и экстремали решая уравнение Эйлера:

С п 21

№7

$\boxed{7.}$ $J(y) = \int_0^1 [2xy + (y')^2]dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 3$, $\int_0^1 xy\, dx = 1$.

$$F = 2xy + y'^2$$
$$G = xy \quad \Rightarrow \quad L = (2+\lambda)xy + y'^2$$

1) Ур Эйлера: $\left[(2+\lambda)x\right] - \frac{d}{dx}\left[2y'\right] = 0$

$$(2+\lambda)x - 2y'' = 0$$
$$y'' = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)x \Rightarrow y' = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)\frac{x^2}{2} + C_1$$
$$y = \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

2) $\begin{cases} y(0)=0 \\ y(1)=3 \\ \int_0^1 xy\,dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ \left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 3 \\ \int_0^1 \left[\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right]dx = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 0 \\ \lambda = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{y} = 3x$ – допуст. экс

3) $\delta^2 J = \int_0^1 [2\,\delta y'^2]\,dx \Rightarrow \Delta J \geq 0 \Rightarrow$ абс min.

$\boxed{7.}$ $\hat{y}(x) = 3x$, абс. min.

№T6(а)

6. Исследовать на экстремум при всех значениях вещественного параметра a:
а) $J[y] = \int_0^{\pi/2}(y'^2 - ay^2)dx$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$;

$F = y'^2 - ay^2$

1) Ур Эйлера $\quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow [-2ay] - \frac{d}{dx}[2y'] = 0$

$-2ay - 2y'' = 0$

$\Rightarrow y'' + ay = 0 \Rightarrow$ пусть $a = \text{sign}(a)\cdot k^2$, $k \in \mathbb{R}$

при $a>0$ $\quad y'' + k^2 y = 0$

$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$

при $a=0$ $\quad y'' = 0 \Rightarrow y = C_1 x + C_2$

при $a<0$ $\quad y'' - k^2 y = 0 \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

2) $y(0)=0$ $\qquad a>0$ $\qquad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 \cos\frac{\pi k}{2} + C_2 \sin\frac{\pi k}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \\ \hat{y} = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \in \mathbb{R} \\ k = 2n, n \in \mathbb{Z} \\ \hat{y} = C_2 \sin(2nx) \end{cases}$ или $\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \in \mathbb{R} \\ k \neq 2n, n \in \mathbb{Z} \\ \text{решение не сущ} \end{cases}$

$a = 0$ $\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \\ \hat{y} = 0 \end{cases}$ $\quad a < 0$ $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\frac{\pi}{2}} + C_2 e^{-\frac{\pi}{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{y} = 0$

3) $\delta^2 J = \int_0^{\pi/2} [2\delta y'^2 - 2a\delta y^2] dx$

при $a \leq 4$ есть экстр.?

рассмотрим $\delta y = \sin(2mx)$, $m \in \mathbb{Z}$

$\delta y' = 2m\cos(2mx)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\delta y'^2 - 2a\delta y^2] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[4m^2 \frac{1+\cos 4mx}{2} - a\frac{1-\cos 4mx}{2}\right] dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4mx\, dx = \frac{1}{4m}\sin 4mx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2\delta y'^2 - 2a\delta y^2] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4m^2 - a] dx = (4m^2 - a)\frac{\pi}{2}$$

$4m^2 - a \geq 0 \quad m \geq \frac{\sqrt{a}}{2}$

$\forall a$: при $m \geq \frac{\sqrt{a}}{2}$, $m = \left[\frac{\sqrt{a}}{2}\right] + 1$

$\Delta J \geq 0$

при $m = \left[\frac{\sqrt{a}}{2}\right]$ $\Delta J \leq 0$

$\Rightarrow$ не абс. экстр

IV Повторение

С п6:

Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать качественную картину поведения интегральных кривых уравнений (1-66):

№ 35

35. $4y^3y'^2 - 4xy' + y = 0.$

Рисунок!

$y'_{1,2} = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2 - y^4}}{2y^3}$ при $y \neq 0$ иначе $y = 0$ реш

пусть $u = y^2 \Rightarrow y' = \frac{1}{2y}u' \rightarrow \frac{1}{2y}\cdot u' = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2-u^2}}{2y^3} \Rightarrow u \cdot u' = x \pm \sqrt{x^2-u^2}$ (*)

пусть $u = x\sin\theta \Rightarrow \sqrt{x^2-u^2} = x\cos\theta$

$u' = \sin\theta + x\cos\theta\,\theta'$

$\Rightarrow (\sin\theta + x\cos\theta\,\theta')x\sin\theta = x \pm x\cos\theta$

$(\sin\theta + x\cos\theta\,\theta')\sin\theta = 1 \pm \cos\theta$

$\sin^2\theta + x\cos\theta\sin\theta\,\theta' = 1 \pm \cos\theta$

$x\sin\theta\cos\theta\,\theta' = \pm\cos\theta + \cos^2\theta$

$\cos\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = \pm 1 \Rightarrow x = \pm y^2$

$\sin\theta \neq 0$

$x\sin\theta\,\theta' = \pm 1 + \cos\theta \Rightarrow \theta' = \dfrac{\pm 1 + \cos\theta}{x\sin\theta}$

при $\theta' = \dfrac{\pm 1 + \cos\theta}{x\sin\theta} = \dfrac{\mathrm{ctg}\,\theta/2}{x}$ или $-\dfrac{\mathrm{tg}\,\theta/2}{x}$

$$tg\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{dx}{x} \quad \text{или} \quad -ctg\frac{\theta}{2}\,d\theta = \frac{dx}{x}$$

$$\int tg\frac{\theta}{2}\,d\theta = -2\int\frac{d\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = -2\ln\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

$$\int ctg\frac{\theta}{2}\,d\theta = -2\int\frac{d\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = -2\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \ln|x| + C = -2\ln\left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \text{ или } -2\ln\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$

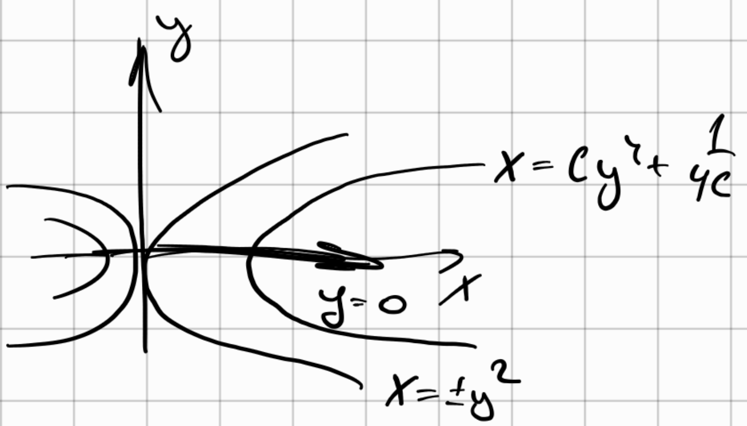
$$x^{-\frac{1}{2}}\cdot C = \cos\frac{\theta}{2} \text{ или } \sin\frac{\theta}{2}$$

$$x\sin\theta = 2x\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\cdot x^{-\frac{1}{2}}C\cdot\sqrt{1 - x^{-1}C^2}\cdot x = u = y^2$$

$$\Rightarrow y^4 = 4C^2x^{-1}(1 - x^{-1}C^2)x^2 = 4C^2(x - C^2) = 4\tilde{C}(x - \tilde{C}), \quad \tilde{C} = C^2$$

$$\Rightarrow y^4 = 4\tilde{C}(x - \tilde{C}) \Rightarrow x = C^*y^4 + \frac{1}{4C^*}, \quad C^* = \frac{1}{4\tilde{C}}$$

35. $y = 0$, $x = Cy^4 + \frac{1}{4C}$, $x = \pm y^2$ — особые решения при $y \neq 0$.



С п7

Найти решение уравнения при заданных начальных условиях (54–67):

№56

56. $xyy'' - xy'^2 + y'(y' + y)\sin x = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = -1.$

$y \to \lambda y$ инв. $\Rightarrow y' = yz$ $\quad -1 = z(1)$

$y'' = y(z' + z^2)$

$xy \cdot y(z' + z^2) - xy^2 z^2 + yz(yz + y)\sin x = 0$

$y = 0$ не реш $\Rightarrow x(z' + z^2) - xz^2 + z(z+1)\sin x = 0$

$z'x + z\underbrace{(z+1)}_{0}\sin x = 0$

при $z = -1$; $z' = 0 \Rightarrow$ уд. решению

$\frac{y'}{y} = -1 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \Rightarrow \begin{cases} \ln y = -x + C \\ y(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow C = 1$

$\Rightarrow \ln y = 1 - x$

56. $\ln y = 1 - x.$

С п8:

№126

126. $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 6(1 + 5x) + e^{2x}.$

одн: $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$ кр 2

$\lambda_{3,4} = 2 \pm i$

$\Rightarrow y_0 = (C_1 x + C_2) + e^{2x}(C_3 \sin x + C_4 \cos x)$

y_1: $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = e^{2x}$

пусть $y_1 = \alpha e^{2x}$

$y_1' = 2\alpha e^{2x}$ $\quad y_1''' = 8\alpha e^{2x}$

$y_1'' = 4\alpha e^{2x}$ $\quad y_1^{IV} = 16\alpha e^{2x}$

$\Rightarrow 16\alpha e^{2x} - 4\cdot 8\alpha e^{2x} + 5\cdot 4\alpha e^{2x} = e^{2x}$

$\alpha(16 - 32 + 20) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{4}e^{2x}$ - реш

y_2: $y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 6(1+5x)$

$y = \alpha x^3 + \beta x^2$ $\qquad -4\cdot 6\alpha + 5(6\alpha x + 2\beta) = 6(1+5x)$

$y' = 3\alpha x^2 + 2\beta x$ $\qquad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3x^2$

$y'' = 6\alpha x + 2\beta$

$y''' = 6\alpha$

$y^{IV} = 0$

$\Rightarrow y = (C_1 x + C_2) + e^{2x}(C_3 \sin x + C_4 \cos x) + x^3 + 3x^2 + \frac{1}{4}e^{2x}$

126. $y = C_1 + C_2 x + e^{2x}(C_3 \cos x + C_4 \sin x) + x^2(3+x) + \frac{1}{4}\, e^{2x}$.

Спд

№34

34. $x^2 y'' + x(-2 + x \operatorname{tg} x)y' + (2 - x \operatorname{tg} x)y = x^3 e^x \cos x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$y_1 = x$ решение одн

$\Rightarrow xy' - y = C_1 \exp\left[\int \frac{2 - x\operatorname{tg}x}{x}dx\right] = C_1 x^2 \cos x \quad \Big| : x^2$

$I_1 = \int \frac{2 - x\operatorname{tg}x}{x}dx = 2\int \frac{dx}{x} - \int \operatorname{tg}x\, dx = \ln x^2 + \ln|\cos x|$

$\left(\frac{y}{x}\right)' = C_1 \cos x \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1 \sin x + C_2$

$y = C_1 x \sin x + C_2 x$

МВП:

$$\begin{cases} C_1' x\sin x + C_2' x = 0 \quad |:x \\ C_1'(\sin x + x\cos x) + C_2' = xe^x\cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = e^x \\ C_2' = -e^x\sin x \end{cases} = -I_2$$

$$I_2 = \int e^x \sin x\, dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx$$

$$u_1 = \sin x \quad u_1' = \cos x \qquad u_2 = \cos x \quad u_2' = -\sin x$$
$$v_1' = e^x \rightarrow v_1 = e^x \qquad v_2' = e^x \Rightarrow v_2 = e^x$$

$$2I_2 = e^x(\sin x - \cos x) + C_4 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C_4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = e^x + C_3 \\ C_2 = \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) + C_4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = (e^x + C_3)x\sin x + \left[\frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x) + C_4\right]x$$

$$y = C_3 x\sin x + C_4 x + \frac{1}{2}x(\cos x + \sin x)e^x$$

34. $y = x(C_1 + C_2\sin x) + \dfrac{1}{2}\,x(\cos x + \sin x)e^x.$

С п11

Решить линейные однородные системы уравнений третьего порядка (15–116):

№55

55. $\begin{cases} \dot x = x + 2z, \\ \dot y = 2x - y + 2z, \\ \dot z = x - y + z. \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=0$$

$$(\lambda-1)(1-\lambda^2)=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=1 \text{ кр } 2$$
$$\lambda_3=-1 \text{ кр } 1$$

СВ: $\lambda_{1,2}=1$ кр 2: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

присоед к h_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3=-1$ кр 1: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right) + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

55. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^t \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right].$

Сп13

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия для автономных систем (1–52):

№49

49. $\begin{cases} \dot{x} = 2 - 2\sqrt{1+x+y}, \\ \dot{y} = e^{\frac{5}{4}x+2y+y^2} - 1. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2-2\sqrt{1+x+y}=0 \\ \exp\left(\frac{5}{4}x+2y+y^2\right)-1=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (0,0) \\ \left(\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right) \end{array}\right.$$

1) в т. $(0,0)$:

$$\begin{cases} \dot{x}=2-2\sqrt{1+x+y} \\ \dot{y}=\exp\left(\frac{5}{4}x+2y+y^2\right)-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=-x-y \\ \dot{y}=\frac{5}{4}x+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{4} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

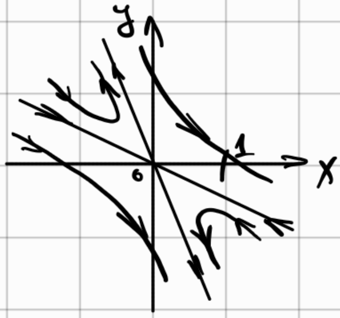
$$\Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{2}$$

$$\lambda_2=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 5/4 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -1 \\ 5/4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$



седло

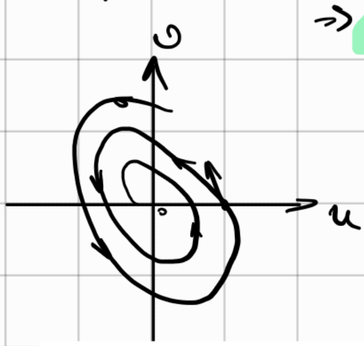
2) в $\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right)$

пусть $\begin{cases} u=x-\frac{3}{4} \\ \vartheta=y+\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=u+\frac{3}{4} \\ y=\vartheta-\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{u}=2-2\sqrt{1+\left(u+\frac{3}{4}\right)+\left(\vartheta-\frac{3}{4}\right)} \\ \dot{\vartheta}=\exp\left(\frac{5}{4}\left(u+\frac{3}{4}\right)+2\left(\vartheta-\frac{3}{4}\right)+\left(\vartheta-\frac{3}{4}\right)^2\right)-1 \end{cases}$

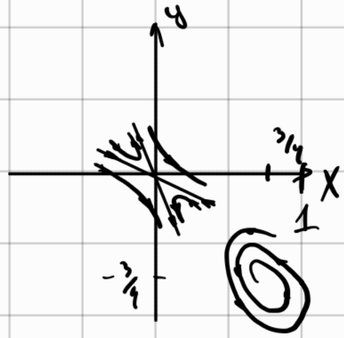
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{u}=-u-\vartheta \\ \dot{\vartheta}=\frac{5}{4}u+\frac{1}{2}\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5/4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ \vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{1}{4}\left(-1\pm i\sqrt{11}\right)$$

$\Rightarrow$ уст фокус

$(1,0)$: $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5/4 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow$



49. $\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right)$ — устойчивый фокус, ↺;
$(0,0)$ — седло, $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\frac{3}{2}$, $h_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

С п17

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием (1–100):

№84

84. $(x-2x^2y)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+2x^2z^2\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\ u=y^2z$ при $x-y=0.$

$$\begin{cases}\dot x = x-2x^2y\\ \dot y = y\\ \dot z = 2x^2z^2\end{cases} \Rightarrow (x-2x^2y)\,dy - y\,dx = 0 \quad \Big| \cdot -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(-\frac{1}{x}+2y\right)dy+\frac{y}{x^2}dx=0$$

$$d\left(-\frac{y}{x}+y^2\right)=0 \Rightarrow u_1 = y^2-\frac{y}{x}$$

$$x=\frac{y}{y^2-u_1}$$

$$2\left(\frac{y}{y^2-u_1}\right)^2 z^2 dy - y\,dz = 0 \quad \Big|\cdot\frac{1}{z^2y}$$

$$\frac{2y\,dy}{(y^2-u_1)^2}-\frac{dz}{z^2}=0 \Rightarrow d\left(-\frac{1}{y^2-u_1}+\frac{1}{z}\right)=0$$

$$-\frac{1}{y^2-u_1}+\frac{1}{z}=u_2$$

$$-\frac{x}{y}+\frac{1}{z}=u_2$$

$$\Rightarrow u=F\left(y^2-\frac{y}{x},-\frac{x}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$u=\frac{u_1+1}{u_2+1}$$

$$\begin{cases}u=y^2z\\ x-y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{aligned}&x=y\\ &u_1=y^2-1\\ &u_2=-1+\frac{1}{z}\end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned}&y^2=u_1+1\\ &z=\frac{1}{u_2+1}\end{aligned} \Rightarrow$$

$u_1=y^2-\frac{y}{x}$

$u_2=-\frac{x}{y}+\frac{1}{z}=$

$$u=\frac{y^2-\frac{y}{x}+1}{-\frac{x}{y}+\frac{1}{z}+1}$$

84. $u=F\left(\dfrac{y}{x}-y^2,\dfrac{1}{z}-\dfrac{x}{y}\right),\ u=\dfrac{1+y^2-\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{z}}.$

С 20.1

№8

$\boxed{8.}$ $J(y) = \int\limits_1^2 [x^3(y')^2 - 8(x^2-x)yy' + 4y^2 + 8x^2y']dx$, $y(2) = -7$.

$$F = x^3y'^2 - 8(x^2-x)yy' + 4y^2 + 8x^2y'$$

1) Ур Эйлера: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \Rightarrow [-8(x^2-x)y' + 8y] - \frac{d}{dx}[2x^3y' - 8(x^2-x)y + 8x^2] = 0$

$$\cancel{-8(x^2-x)y'} + \cancel{8y} - 6x^2y' - 2x^3y'' + 16xy + \cancel{8x^2y'} \cancel{-8y} - \cancel{8x}y' - 16x = 0$$

$$x^2y'' + 3xy' - 8y = -8$$

$y_1 = x^2$ - реш одн.

$$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = \frac{C_1}{x^4}\exp\left[-\int \frac{3}{x}dx\right] = \frac{C_1}{x^7}$$

$$\frac{y}{x^2} = \frac{C_1}{x^6} + C_2 \Rightarrow y = C_1\frac{1}{x^4} + C_2x^2$$

$y_1 = 1$ реш неодн $\Rightarrow y = C_1\frac{1}{x^2} + C_2x^2 + 1$

2) $\begin{cases} y(2) = -7 \\ [2x^3y' - 8(x^2-x)y + 8x^2]\big|_{x=1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -2 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{y} = 1 - 2x^2$

3) $\delta^2 J = \int\limits_1^2 [8\delta y^2 - 16(x^2-x)\delta y\delta y' + 2x^3\delta y'^2]dx$

$$I_1 = \int\limits_1^2 [-16(x^2-x)\delta y\delta y']dx = \underbrace{-16(x^2-x)\delta y^2\Big|_1^2}_{=0} - \int\limits_1^2 [\underbrace{-16(x^2-x)\delta y\delta y'}_{= I_1} - 16(2x-1)\delta y^2]dx$$

$u = -16(x^2-x)\delta y \qquad u' = -16(x^2-x)\delta y' - 16(2x-1)\delta y$

$v' = \delta y' \qquad \Rightarrow \qquad v = \delta y$

$$2 I_1 = 2 \int_{1}^{2} [8(2x-1)\,\delta y^2]\,dx$$

$$\Rightarrow \delta^2 y = \int_{1}^{2} \left[16\,\delta y^2 + 2x^3 \delta y'^2\right] dx \Rightarrow \Delta y \geqslant 0 \Rightarrow \text{абс min}$$

$\boxed{\textbf{8.}}$ $\hat{y} = 1 - 2x^2$, абс. min.