

Неделя 7

7. Функция Гамильтона и канонические уравнения
19.12, 19.21, 19.23 (найти решение в квадратурках), 19.47, 19.51

№ 19.12

В задачах 19.12–19.16 найти функцию Лагранжа механической системы, динамика которой задана функцией Гамильтоновы.

$$19.12. H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 + \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2.$$

Для механических систем \mathcal{H} выражается более простой формулой

$$\mathcal{H} = \hat{\mathcal{L}}_g - \mathcal{L}_g$$

Теория из античности 7 (23 минуты)

Крышкой (\hat{q}) обозначаем величину (q), выраженную через новые переменные (p вместо q)

Оп. (Гамильтониан).

Гамильтониан или функция Гамильтона (H) — потенциал обратного преобразования (от p к q)

$$H = \sum \dot{q}_i p_i, \text{ где } \hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

| Вывод из Теоремы (Лагранжа)

$$\Rightarrow \hat{\mathcal{L}} = \sum \hat{p}_i \dot{\hat{q}}_i - \hat{H} \quad (19.2.1)$$

$$H = H_2 + H_1 + H_0 = \frac{1}{2} p^T \tilde{A} p + \tilde{b}^T p + \tilde{c} \Rightarrow \hat{\mathcal{L}} = \hat{H}_2 - H_0 \quad (\text{аналогично 19.2.2}) \quad [H = \hat{L}_g - \mathcal{L}_g]$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \text{ — уравнения Гамильтона} \Rightarrow \dot{\hat{q}} = \tilde{A} p + b \Rightarrow \hat{p} = \tilde{A}^{-1}(q - \tilde{b})$$

$$\hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} (\dot{q} - \tilde{b})^T \tilde{A}^{-1} (\dot{q} - \tilde{b}) - H_0 \quad (19.2.3)$$

$$H = \underbrace{\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)}_{H_2} + \underbrace{\frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2}_{H_0} + \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2 \quad (\text{дл. 19.2.1})$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ просто козырь! При } \frac{1}{2} p^2 \text{ и } \frac{1}{2} p^2 \Rightarrow \tilde{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$19.2.3 \rightarrow \hat{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 - \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2$$

$$19.12. L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{a}{4}(q_1 - q_2)^2 - \frac{b}{4}(q_1 + q_2)^2.$$

19.21. При отсутствии силового поля уравнения динамики

релятивистической частицы, масса покоя которой равна m_0 , опре-

деляются функцией Лагранжа $L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}$, где

c — скорость света, x, y, z — декартовы координаты. Составить

канонические уравнения и найти закон движения частицы.

Система не механическая \Rightarrow ищем по опр. $[H = \sum \dot{q}_i p_i - \hat{\mathcal{L}}]$

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow p_i = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}{c^2}}} \quad (19.21.1)$$

$$\hat{\mathcal{L}} = \sum p_i \hat{x}_i - \hat{\mathcal{L}}, \text{ нужно найти } \hat{x}_i \text{ (выразить } \dot{x}_i \text{ через } p_i\text{)}$$

$\dot{X}_1^2, \dot{X}_2^2, \dot{X}_3^2$ бывают одинак. в (19.21.1) \Rightarrow ищем $\hat{X}_i = f(p_i) p_i$, где $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$

$$\text{Получ. в (19.21.1): } p_i = \frac{m f p_i}{\sqrt{1 - \frac{p^2 f^2}{c^2}}} \Rightarrow$$

$$c^2 - p^2 f^2 = m^2 c^2 f^2 \Rightarrow f = \frac{c}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$\hat{X}_i = f p_i = \frac{c p_i}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$\hat{\mathcal{L}} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{f^2 p^2}{c^2}} = -mc \sqrt{1 - \frac{p^2}{p^2 + m^2 c^2}} = -\frac{mc^3}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$\mathcal{H} = \sum p_i \hat{X}_i - \hat{\mathcal{L}} = \frac{c p^2}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}} + \frac{mc^3}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

\mathcal{H} - явно не зависит от $X_i \Rightarrow X_1, X_2, X_3$ - иском. коорд.

Оп. (Циклические координаты).

Координата q_i называется циклической, если она не входит в $\mathcal{L} \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{const}$

Напомним, что

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_i}$$

Следовательно q_i циклическая в обоих описаниях (Лагранжевом и Гамильтоновом)

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases} \text{ - уравнения Гамильтона}$$

$$p_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{x}_i} \Rightarrow p_i = p_i^\circ = \text{const}$$

$$\dot{X}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \frac{2 c^2 p_i}{2 \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}} = \frac{c^2}{\mathcal{H}} p_i, \quad p_i = p_i^\circ = \text{const} \Rightarrow X_i = X_i^\circ + \frac{c^2}{\mathcal{H}} p_i^\circ t$$

$$\text{ур-е движение: } \bar{X} = \bar{X}^\circ + \frac{c^2 \bar{p}^\circ}{\mathcal{H}} t$$

19.23. Составить канонические уравнения движения материальной точки массы m , движущейся по гладкой сфере радиуса R в однородном поле тяжести (сферический маятник).

19.23 (найти решение в квадратуре)

$$T = \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad \Pi = -m g r \cos \theta$$



Система консервативна $\Rightarrow \mathcal{H} = \hat{T} + \Pi$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} p^T A^{-1} p + \Pi(q)$$

$$A = \begin{bmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & mr^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{mr^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{mr^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{P_\psi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - mg r \cos \theta$$

$$19.23. H = \frac{1}{2mR^2} \left(P_\theta^2 + \frac{P_\psi^2}{\sin^2 \theta} \right) + mgR \cos \theta.$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \text{ - уравнения Гамильтона}$$

$$(1) \quad \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{mr^2}; \quad \dot{\psi} = \frac{P_\psi}{mr^2 \sin^2 \theta} \quad (3)$$

$$(2) \quad \dot{P}_\theta = \frac{P_\psi^2}{mr^2 \sin^2 \theta} (\cos \theta - mgs \sin \theta); \quad \dot{P}_\psi = 0$$

(Частные координаты)

$$\dot{P}_\psi = 0 \Rightarrow P_\psi = P_\psi^0 = \text{const}$$

$$H \text{ не зависит явно от } t \Rightarrow H = h = \text{const}$$

из H выразим $P_\theta = P_\theta(\theta, \text{const})$ и подставим в (1):

$$(4) \quad P_\theta = \sqrt{2mr^2(h + mg r \cos \theta) - \frac{P_\psi^2}{\sin^2 \theta}}$$

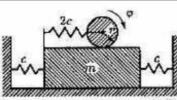
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{P_\theta(\theta)}{mr^2} \Rightarrow t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{mr^2}{P_\theta(\theta)} d\theta \Rightarrow \text{получили } \theta(t)$$

$$\theta(t), P_\psi^0 \rightarrow (3): \quad \dot{\psi}(t) - \dot{\psi}_0 = \int_{t_0}^t \frac{P_\psi^0}{mr^2 \sin \theta(t)} dt$$

$$\theta(t) \rightarrow (4): \quad P_\theta(t) = P_\theta(\theta(t))$$

19.47. Составить канонические уравнения Гамильтона для системы, описанной в задаче 16.40.

16.40. Доска массы m , которая может скользить по гладкой горизонтальной направляющей, связана с неподвижными стенками двумя одинаковыми пружинами жесткости c каждая. По доске катится без проскальзывания диск массы $\frac{m}{2}$ и радиуса r , центр которого соединён с доской пружиной жесткости $2c$, как показано на рисунке. Найти малые колебания системы.



К задаче 16.40

$$\Pi = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot C X^2 \cdot 2}_{\text{доска}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2C \cdot (r\dot{\psi})^2}_{\text{диск}} = CX^2 + (r^2\dot{\psi}^2)$$

(*) касается 6 объектах используем лишь из контура, а не доска

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{\text{доска}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} r^2 \dot{\psi}^2}_{\text{диск отн}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot (\dot{x} + r\dot{\psi})^2}_{\text{диск vs. доска}} = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 + \frac{3}{8} m r^2 \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m r \dot{x} \dot{\psi}$$

$$\mathcal{H} = \underbrace{\frac{1}{2} p^T A^{-1} p}_{\hat{T}} + \Pi(q)$$

$$\text{Система конс} \Rightarrow H = \hat{T} + \Pi$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}m & \frac{1}{2}mr \\ \frac{1}{2}mr & \frac{3}{4}mr^2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{16}{7mr^2} \begin{bmatrix} \frac{3}{4}mr^2 & -\frac{1}{2}mr \\ -\frac{1}{2}mr & \frac{3}{2}m \end{bmatrix} = \frac{4}{7mr^2} \begin{bmatrix} 3r^2 - 4r \\ -4r & 6 \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{2}{7mr^2} [3r^2 p_x^2 - 4rp_x p_y + 6p_y^2] + cx^2 + cr^2 \psi^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right. \text{ — уравнения Гамильтона}$$

Несоог.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{2}{7mr^2} (6rp_x - 4p_y) & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -2cx \\ \dot{\psi} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{2}{7mr^2} (12p_y - 4rp_x) & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial \psi} = -2cr^2 \psi \end{aligned}$$

$$19.47. \dot{x} = \frac{4rp_x - 2p_y}{5mr}, \quad \dot{p}_x = -2cx, \quad \dot{\psi} = \frac{6p_y - 2rp_x}{5mr^2}, \quad \dot{p}_y = -2r^2 \psi.$$

19.51. В состоянии равновесия (q^*, p^*) функция Гамильтона

$H(q, p)$ имеет строгий минимум по всем переменным. Доказать, что это состояние устойчиво по Ляпунову.

$$H = H(q, p),$$

$$(q^*, p^*) - \Pi.P : H(q^*, p^*) - \text{стр. лок. мин}$$

$\Rightarrow (q^*, p^*)$ —уст по Ляпунову

1. Без огр. обобщ. коц $H(q^*, p^*) = 0$ (опр. с точ. до конц.)

$$\text{или можно. } \Delta V = H(q, p) - H(q^*, p^*)$$

$$2. H(q^*, p^*) = 0;$$

$\Rightarrow H$ -постоян. опр в $\dot{U}_E(q^*, p^*)$

$$H(q, p) \geq 0 \text{ в } \dot{U}_E(q^*, p^*)$$

$$3. H - \text{первый интеграл!} \quad \frac{dH}{dt} + \{H, H\} = 0$$

$$H(q, p) = 0 \Rightarrow \Pi.P(q^*, p^*) - \text{уст.}$$

Th. Ляпунова

Критерий первого интеграла для Гамильтоновых систем имеет вид:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{(H, G)} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) = 0, \text{ где } \{H, G\} — \text{ скобка Пуассона}$$

Теорема. Если дифференциальные уравнения движения тахоны, что существует интегралы движения V , производной которых V в силу этих законов является или знакопостоянной функцией противоположного знака с V , или тождественно равна нулю, то неизменное движение устойчива.

Неделя 8

8. Первые интегралы. Скобки Пуассона
20.2, 20.14, 20.24, 20.34, 20.36

№ 20.2

В задачах 20.2 – 20.13 для заданных функций $\varphi(q, p)$ и $\psi(q, p)$ вычислить скобки Пуассона.

$$20.2. \varphi = q^2 + p^2, \psi = \arctan\left(\frac{p}{q}\right).$$

Оп. (Скобка Пуассона):

$$\text{Сокращенная запись для } \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right)$$

Обозначается $\{H, G\}$

Можно представить в виде дифференциального оператора $\{H, G\} = U_H G$

$$U_H = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\{\varphi, \psi\} = \frac{\partial \varphi}{\partial p} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial q} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial p}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 2q; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 2p;$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{1}{1+(p/q)^2} \cdot \left(-\frac{p}{q^2}\right) = -\frac{p}{p^2+q^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{1}{1+(p/q)^2} \cdot \frac{1}{q} = \frac{q}{p^2+q^2}$$

$$\{\varphi, \psi\} = -2p \cdot \frac{q^2}{p^2+q^2} - 2q \cdot \frac{q}{p^2+q^2} = -2$$

$$\{\dots\} = -\{\dots\}$$

в лекциях в задачнике

$$20.2. (\varphi, \psi) = \frac{2}{1+(p/q)^2} + \frac{2p}{1+(p/q)^2} \frac{p}{q^2}.$$

20.14. С помощью скобок Пуассона записать канонические уравнения Гамильтона.

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \text{ — уравнения Гамильтона}$$

Оп. (Скобка Пуассона):

$$\text{Сокращенная запись для } \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)$$

Обозначается $\{H, F\}$

Можно представить в виде дифференциального оператора $\{H, F\} = U_H F$

$$U_H = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

$$\{H, F\} = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} + \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \cdot \frac{\partial F}{\partial p_i} \Rightarrow$$

хотим выразить

$$\begin{cases} \{H, q_i\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i \\ \{H, p_i\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i \end{cases}$$

$$20.14. \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = (q_i, H), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = (p_i, H).$$

отсюда $L = \dots$ (или $\dot{p}_i = \dots$)

№ 20.24

20.24. Показать, что для системы с гамильтонианом $H = H[\phi_1(q_1, p_1), \dots, \phi_n(q_n, p_n), t]$ функции $\phi_i(q_i, p_i) = \alpha_i$ ($k = \overline{1, n}$) являются первыми интегралами. Считая, что первые интегралы разрешимы относительно импульсов $p_i = \psi_i(q, \alpha_i)$, ($i = \overline{1, n}$) найти движение системы в квадратурах.

Из Лекции 8:

2. Отделенная комбинация

Случай, когда $H = H[\phi_1(q_1, p_1), q_{>1}, p_{>1}, t]$

ϕ_1 - [Первый интеграл]:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \{H, \phi_1\} = \frac{\partial H}{\partial \phi_1} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial p_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} - \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial p_1} \right)^0$$

$$\phi_1(q_1, p_1) = \text{const} = \phi_1^0$$

Тогда из [уравнений Гамильтона]:

$$\begin{cases} q_1 > 1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} [\phi_1^0, q_{>1}, p_{>1}, t] \\ p_1 > 1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} [\phi_1^0, q_{>1}, p_{>1}, t] \end{cases}$$

Получили понижение порядка на две единицы

Допустим, что $q_{>1}(t), p_{>1}(t)$ - решения [этой системы]

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} [\phi_1^0, q_{>1}(t), p_{>1}(t), t] \frac{\partial \phi_1^0}{\partial p_1} \\ \dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial q_1} [\phi_1^0, q_{>1}(t), p_{>1}(t), t] \frac{\partial \phi_1^0}{\partial q_1} \\ \phi_1(q_1, p_1) = \phi_1^0 \Rightarrow p_1 = f(q_1, \phi_1^0) \end{cases}$$

Подставляя $\underline{\phi_1^0}$ в $\underline{q_1}$ получим уравнение с разделяющимися переменными
Подставив полученный q_1 в $\underline{p_1}$ получим p_1

Составить доделанный конспект

20.24. Показать, что для системы с гамильтонианом $H = H[\phi_1(q_1, p_1), \dots, \phi_n(q_n, p_n), t]$ функции $\phi_i(q_i, p_i) = \alpha_i$ ($k = \overline{1, n}$) являются первыми интегралами. Считая, что первые интегралы разрешимы относительно импульсов $p_i = \psi_i(q, \alpha_i)$, ($i = \overline{1, n}$) найти движение системы в квадратурах.

$$1) \exists H = H[\Psi_k(q_k, p_k), t], \Rightarrow \Psi_k - \text{п.и.}$$

$$\Psi_k(q_k, p_k) = \alpha_k \quad (k = \overline{1, n})$$

$$\square \text{ кр. п.и. : } \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \{H, \Psi_k\} = 0, \quad \{H, \Psi_k\} = \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_i}$$

$$0, \text{ т.к. } \Psi_k(q_k, p_k)$$

$$\Psi_k = \Psi_k(q_k, p_k) \Rightarrow \sum \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k} \Rightarrow \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k}$$

для P аналогично

$$\text{Тогда } \{H, \Psi_k\} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_k} \cdot \left[\frac{\partial \Psi_k}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k} - \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_k} \right] = 0 \Rightarrow \Psi_k(q_k, p_k) = \alpha_k = \text{const}$$

$$2) \exists P_k = \Psi_k(q_k, \alpha_k), \text{ найти реш в квадратурах}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \text{ - уравнения Гамильтона}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} [\alpha_k, t] \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} [\alpha_k, t] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial \Psi_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial \Psi_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k} \end{cases}$$

Опр. (Первый интеграл).

Пусть есть система $D \times I = F(t, x)$, тогда $G(t, x)$ — первый интеграл $\Leftrightarrow G(t, x(x_0, t_0, t)) = \text{const} \Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial x} + \sum \frac{\partial G}{\partial x_i} F_i = 0$ — критерий первого интеграла

В [Гамильтоновых системах] первый интеграл в общем случае:

$G = G(t, x)$

Критерий первого интеграла для Гамильтоновых систем имеет вид:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} \right) = 0, \text{ где } (H, G) — \text{ скобка Пуассона}$$

$$P_k = \Psi_k(q_k, \dot{q}_k); \Psi_k = \Delta_k \Rightarrow \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \Psi_k}{\partial P_k} = \frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \Psi_k}{\partial q_k}}$$

$$\int \frac{\partial \Psi_k}{\partial \Delta_k} dq_k = \int \frac{\partial H}{\partial q_k} dt + C_k \quad \text{нашли } q_k(t)$$

$$P_k(t) = \Psi_k(q_k(t), \dot{q}_k)$$

20.34. Система дифференциальных уравнений

$\dot{q}_i = A_i(q, p, t), \dot{p}_i = B_i(q, p, t) \quad (i=1..n)$ имеет в некоторой области

$2n$ независимых первых интегралов $W_i(q, p, t) = \text{const}$ ($i=1..2n$).

Доказать, что эта система является гамильтоновой тогда и только тогда, когда скобки Пуассона любой пары первых интегралов

также являются первым интегралом: $\{W_i, W_j\} = \text{const}$.

$$\text{для } \begin{cases} \dot{q}_i = A_i(q, p, t) \\ \dot{p}_i = B_i(q, p, t) \\ i=1..n \end{cases} \text{ имеет П.И. } \left\{ \begin{array}{l} W_k(q, p, t) = \text{const} \\ k=1..2n \end{array} \right.$$

$$\text{Д-тв: } (*) - \text{Гамильтонова} \Leftrightarrow \{W_i, W_j\} = \text{const} \quad \forall i, j$$

$$\square \leftarrow \text{Хотим д-тв, что } \exists H: A_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, B_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

для этого нужно проверить рабочество эллип. правила

$$W^k - \Pi.H \Leftrightarrow \sum_i W_{sq_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + W_{sp_i} B^i + W_{st} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Рассм. } F \text{ и } G - \text{П.И.}: \{F, G\} = \sum_k F_{sq_k} G_{sp_k} - F_{sp_k} G_{sq_k}$$

$$\text{но уш. } \{F, G\} - \text{П.И.}: \frac{d}{dt} \{F, G\} = \sum_i \{F, G\}_{sq_i} A^i + \{F, G\}_{sp_i} B^i + \{F, G\}_{st} = 0$$

$$\{F, G\}_{st} = \{F_{st}, G\} + \{F_s G_{st}\};$$

$$\text{из (1): } F_{st} = - \sum_i (F_{sq_i} A^i + F_{sp_i} B^i) \Rightarrow \{F_{st}, G\} = - \sum_i \{F_{sq_i} A^i, G\} - \sum_i \{F_{sp_i} B^i, G\}$$

$$\frac{d}{dt} \{F, G\} = \sum_i \{F_{sq_i}, G\} A^i - \{F_{sq_i} A^i, G\} + \{F_s G_{sq_i}\} A^i - \{F_s G_{sq_i} A^i\} + (q_i \rightarrow p_i, A^i \rightarrow B^i) = 0$$

$$\{F_{sqi}, A_s^i, G\} = \{F_{sqi}, G\} A^i + \{A^i, G\} F_{sqi} \quad (\text{правила постановки}) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \{F, G\} = - \sum_i \{A^i, G\} F_{sqi} + \{F, A^i\} G_{sqi} + \{B^i, G\} F_{spi} + \{F, B^i\} G_{spi}$$

$$\sum_i \{A^i, G\} F_{sqi} + \{F, A^i\} G_{sqi} = \sum_{i,k}^n A_{sq_k}^i G_{sq_k} F_{sqi} - A_{sq_k}^i G_{sq_k} F_{qi} +$$

$$+ F_{sp_k} A_{sq_k}^i G_{sqi} - F_{sq_k} A_{sp_k}^i G_{sqi} = \sum_{i,k}^n G_{sq_k} F_{qi} \cdot (A_{sp_k}^i - A_{sp_k}^k) + A_{sq_k}^i (F_{sp_k} G_{sqi} - F_{sq_k} G_{sp_k})$$

$$\text{аналогично } \sum_i \{B^i, G\} F_{spi} + \{F, B^i\} G_{spi} = \sum_{i,k}^n G_{sp_k} F_{spi} (B_{sq_k}^i - B_{sq_k}^k) + B_{sp_k}^i (F_{sp_k} G_{sqi} - F_{sq_k} G_{sp_k})$$

$$\frac{d}{dt} \{F, G\} = \sum_{i,k} (A_{sq_k}^i + B_{sp_k}^i) (F_{sp_k} G_{sqi} - F_{sq_k} G_{sp_k}) + G_{sq_k} F_{qi} \cdot (A_{sp_k}^i - A_{sp_k}^k) + G_{sp_k} F_{spi} (B_{sq_k}^i - B_{sq_k}^k) = 0$$

F и G линейны из 2н крк. П.у. $\Rightarrow A_{sq_k}^i = -B_{sp_k}^k, A_{sp_k}^i = A_{sp_k}^k, B_{sq_k}^i = B_{sq_k}^k \Rightarrow$

$$\exists H: A^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, B^i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_i \partial p_i} = -\left(\frac{\partial H}{\partial p_i \partial q_k}\right), \frac{\partial H}{\partial p_i \partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_i \partial p_k}, -\frac{\partial H}{\partial q_i \partial p_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i \partial q_k} \Rightarrow$$

$$\exists H: A^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, B^i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \Rightarrow \text{ист. гамильтонова}$$

\Rightarrow g-го следует из Th. Якоби-Пуассона (было на лекции)

$$\square F, G - П.у. \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = 0, \frac{\partial G}{\partial t} + \{H, G\} = 0$$

$$\text{г-го, т.к. } \frac{\partial}{\partial t} \{F, G\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \{F, G\} &= \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\} = -\left\{ \{H, F\}, G \right\} - \left\{ F, \{H, G\} \right\} = \\ &= \{G, \{H, F\}\} + \{F, \{G, H\}\} \end{aligned}$$

$$\text{получ. 6(2): } \{G, \{H, F\}\} + \{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$$

Получили тожд. Пуассона ■

Теорема (Либ-Пуассон).
 F, G — первые интегралы системы с гамильтоном $H = \{P, G\}$ тоже первый интегралы системы с гамильтоном H .

Доказательство:

□ Контроль первого интеграла:

$$F, G — первые интегралы $\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \{H, F\} = 0, \frac{\partial G}{\partial t} + \{H, G\} = 0 \quad (1.1)$$$

Требуется доказать, что

$$\frac{\partial \{F, G\}}{\partial t} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \quad (1.2)$$

Применем правило Либмана

$$\frac{\partial \{F, G\}}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\} = 0 \quad (1.3)$$

(1.1) \rightarrow (1.3):

$$\frac{\partial \{F, G\}}{\partial t} = \{G, \{H, F\}\} + \{F, \{G, H\}\} \quad (1.4)$$

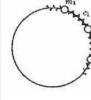
(1.4) \rightarrow (1.2):

$$\{G, \{H, F\}\} + \{F, \{G, H\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$$

Вопрос: тождество Пуассона

4. Тождество Пуассона $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$

20.36. Система состоит из n точечных масс m_1, m_2, \dots, m_n , которые могут перемещаться по гладкому колысу. Массы последовательно соединены пружинами (последняя масса соединена с первой). Определить положение каждой массы её смещением $\bar{q}_i = r_i - r_0$ по дуге колыса из положения равновесия, подобрать преобразование $\bar{q}_i = \bar{q}_i(q, a)$ ($i = 1, n$), не меняющее лагранжиан системы. Показать, что в силу теоремы Нэтер система имеет первый интеграл $\sum_{i=1}^n m_i \dot{\bar{q}}_i = \text{const}$.



К задаче 20.36

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \dot{\psi}_i^2$$

$$\Pi = \sum \frac{1}{2} C (q_i - q_{i+1})^2 = \sum \frac{1}{2} C r^2 (\psi_i - \psi_{i+1})^2 \quad \psi_{n+1} \equiv \psi_1$$

$$I = T - \Pi$$

1) Найдем $\dot{q}_i' = Q(q, \dot{q})$ такой, что $\dot{L}(q') = \dot{L}(q)$:

$$\begin{aligned} \text{для } m_i \quad T_i \sim \dot{\psi}_i^2 & \Rightarrow \dot{\psi}_i' = \dot{\psi}_i + \alpha \\ \text{для } \Pi_i \sim (\psi_i - \psi_{i+1})^2 & \end{aligned}$$

2)

Теорема (Теорема Нэтер).

Если \exists кратное действие $L(q, \dot{q}, t)$ для которого $\int_0^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt = t_1 + r(q, t)$, для которой действие по Гамильтону $S = \int_0^{t_1} p_i \dot{q}_i - H dt = \text{const}$, то у системы есть первый интеграл

$$\sum p_i \eta_i - \{H\} = \text{const}$$

(см. [Sp.15](#) и [Smathcal\(H11\)](#))

Добавить показательство?

Опр. (Ядро группы).

Ядро группы называются первые два слагаемых при линейном приближении $Q(q, \mu)$ в окрестности $\mu = 0$

$$q' = Q(q, \mu) \approx q + \frac{\partial Q}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0} \mu = q + \mu \eta(q), \text{ где } \eta(q) = \frac{\partial Q}{\partial \mu} \Big|_{\mu=0}$$

Время не преобразовано $\Rightarrow S = \text{inv}$

б) симу Th. Нэтер

$$\sum p_i \eta_i - \{H\} = \text{const}, \text{ т.е. } \sum p_i = \text{const}$$

$$P_i = \frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{\psi}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\psi}_i} \left[\sum \frac{1}{2} m_i r^2 \dot{\psi}_i^2 - \frac{1}{2} C (\psi_i - \psi_{i+1})^2 \right] = \sum m_i r^2 \dot{\psi}_i^2$$

Неделя 9

9. Принцип Гамильтона
21.10, 21.13, 21.23, 21.32

21.10. Свободная релятивистская частица имеет лагранжиан

$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2}}$, где c — скорость света, а x, y, z — декартовы координаты частицы. Показать, что в расширенном координатном пространстве (x, y, z, t) частицы через любые две точки (x_0, y_0, z_0, t_0) и (x_1, y_1, z_1, t_1) ($t_0 \neq t_1$) проходит прямой путь и при этом только один.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad X - \text{уравн.} \Rightarrow P_x = \text{const} \Rightarrow \dot{x} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \text{const}$$

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad q(t) = q_0 + V(t - t_0), \quad \text{ПР. ПУТЬ, ег. реш.}$$

Опр. (Прямой и окольные пути).
 $q(t, 0)$ — решение краевой задачи, **прямой путь** ($\alpha = 0$)
 $q(t, \alpha)$ — траектория вблизи $q(t, 0)$, **окольный путь** ($\alpha \neq 0$)

21.13. Одномерный гармонический осциллятор $L = \frac{1}{2}(q^2 - \omega^2 q^2)$ начинает движение из состояния $q(0) = q_0$, $\dot{q}(0) = 0$. Вычислить значение W действия по Гамильтону на этом прямом пути от $q(t_1) = \sqrt{10} > \pi$. За то же время вычислить значение действия на окольных путях вида $q_{\text{ок}} = q_0 + \delta q$, $\dot{\delta q} = \alpha t(t_1 - t)$. На плоскости (q, t) изобразить прямой путь и семейство окольных путей. Показать, что существуют значения параметра α , для которых а) $W_{\text{ок}} > W_{\text{пр}}$; б) $W_{\text{ок}} = W_{\text{пр}}$; в) $W_{\text{ок}} < W_{\text{пр}}$.

Опред. (действие по Гамильтону).

Действием по Гамильтону называется функционал S :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Ставит каждой траектории $q(t)$ в соответствии некоторое число

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = 0 \Rightarrow q_{\text{пр}} = q_0 \cos \omega t$$

$$L_{\text{пр}} = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) = \frac{1}{2}q_0^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t)$$

$$L_{\text{ок}} = -\frac{1}{2}q_0^2 \omega^2 \cos 2\omega t$$

$$1) S_{\text{ок}} = \int_0^{t_1} L_{\text{ок}} dt = -\frac{1}{2}q_0^2 \omega^2 \int_0^{t_1} (\cos 2\omega t) dt = -\frac{1}{4}\omega q_0^2 \sin 2\omega t_1.$$

$$2) q_{\text{ок}} = q_{\text{пр}} + \delta q, \quad \delta q = \alpha t(t_1 - t), \quad q_{\text{ок}}(0) = q_{\text{пр}}(0), \quad q_{\text{ок}}(t_1) = q_{\text{пр}}(t_1)$$

$$S_{\text{ок}} = \int_0^{t_1} L_{\text{ок}} dt = \int_0^{t_1} \frac{1}{2}[(\dot{q}_{\text{пр}} + \dot{\delta q})^2 - \omega^2(q_{\text{пр}} + \delta q)^2] dt = S_{\text{пр}} + \delta S + S_2$$

Посчитаем вариацию [действия по Гамильтону](#)

$$\delta S = L_2 dt_2 - L_1 dt_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

Теорема (Принцип Гамильтона (изменение действия)).
 $\delta S = 0 \Leftrightarrow q = q(t, 0)$ — прямой путь.

[Доказательство >](#)

по кр. Гамильтон
 (члн 8, 31 мин.)

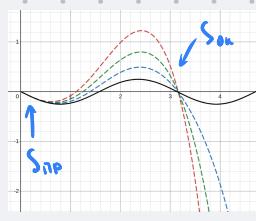
$$S_{\text{ок}} = S_{\text{пр}} + S_2 = S_{\text{пр}} + \int_0^{t_1} \frac{1}{2}(\delta \dot{q}^2 - \omega^2 \delta q^2)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\alpha^2 \left[\int_0^{t_1} (t_1 - 2t)^2 dt - \omega^2 \int_0^{t_1} t^2 (t_1 - t)^2 dt \right] = \frac{1}{2}\alpha^2 \left(\frac{t_1^3}{3} - \frac{\omega^2 t_1^5}{30} \right)$$

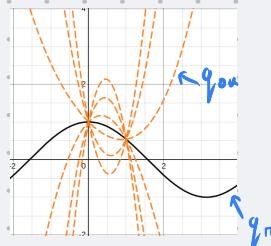
$$S_{\text{ок}} = S_{\text{пр}} + S_2 = -\frac{1}{4}\omega q_0^2 \sin 2\omega t_1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \left(\frac{t_1^3}{3} - \frac{\omega^2 t_1^5}{30} \right)$$

$$\text{Sign}(S_2) = \text{Sign}(10 - \omega^2 t_1^2) = \text{Sign}(S_{\text{ок}} - S_{\text{пр}}) \quad (\text{Не забыть о } \alpha)$$

21.13. При любом значении α $W_{\text{ок}}(q(t_1) = \sqrt{10}) = W_{\text{пр}}(q(t_1) = \sqrt{10})$ и $W_{\text{ок}}(q(t_1) < \sqrt{10}) > W_{\text{пр}}(q(t_1) < \sqrt{10})$; $W_{\text{ок}}(q(t_1) > \sqrt{10}) < W_{\text{пр}}(q(t_1) > \sqrt{10})$.



Но надо рисовать



21.23. Показать, что для системы с лагранжианом
 $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i \dot{q}_i^2 + b_i^2 q_i^2)$ ($a_i = \text{const}$, $b_i = \text{const}$) действие по Гамильтону на прямом пути имеет глобальный минимум.

Пусть q_j - пр. путь

$$\Delta S = S(q_j + \delta q_j) - S(q_j) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum [a_i^2 (\dot{q}_i + \delta \dot{q}_i)^2 + b_i^2 (q_i + \delta q_i)^2] dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum [a_i^2 \dot{q}_i^2 + b_i^2 q_i^2] dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sum [a_i^2 \delta \dot{q}_i^2 + b_i^2 \delta q_i^2] dt > 0 \Rightarrow \min$$

ЛИН ЧА.
по $\delta q_j, \delta \dot{q}_j$ (пред. задана)
уходит

21.32. Для материальной точки, движущейся по инерции, действие по Гамильтону имеет вид $W = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\Delta x}{2} dt$. Найти такие значения параметров $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ на трехпараметрическом семействе кривых $x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2/2$, проходящих через две заданные точки $(x_0, t_0 = 0)$ и $(x_1, t_1 > 0)$, чтобы $W(\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2) \leq W(a_0, a_1, a_2)$ (прямой метод отыскания прямых путей на заданном классе функций).

$$X = \alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{1}{2} \alpha_2 t^2 \Rightarrow \tilde{\alpha}_0 = X_0, \quad \alpha_1 = \frac{X_1 - X_0}{t_1} - \frac{1}{2} \alpha_2 t_1,$$

$$\dot{X} = \alpha_1 + \alpha_2 t \Rightarrow S = \int_0^{t_1} \frac{\dot{X}^2}{2} dt = \int_0^{t_1} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 t)^2}{2} dt = \frac{1}{2} \alpha_1^2 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_1 \alpha_2 t_1^2 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 t_1^3,$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{t_1} - \frac{1}{2} \alpha_2 t_1 \right)^2 t_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{t_1} - \frac{1}{2} \alpha_2 t_1 \right) \alpha_2 t_1^2 + \frac{1}{6} \alpha_2^2 t_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta x^2}{t_1^2} - \alpha_2 \Delta x t_1 + \frac{1}{4} \alpha_2^2 t_1^3 + \alpha_2 \Delta x t_1 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 t_1^3 + \frac{1}{3} \alpha_2^2 t_1^3 \right] = \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{t_1^2} + \frac{1}{24} \alpha_2^2 t_1^3$$

$$S \min \text{ при } \alpha_2 = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha}_0 = X_0, \quad \tilde{\alpha}_1 = \frac{X_1 - X_0}{t_1}, \quad \tilde{\alpha}_2 = 0.$$

$$21.32. \quad a_0 = x_0, \quad a_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1}, \quad a_2 = 0.$$

но убд $X_0 = 0$: $\tilde{\alpha}_0 = 0, \tilde{\alpha}_1 = \frac{X_1}{t_1}, \tilde{\alpha}_2 = 0$

Негеля 10

10. Интегральные инварианты

22.6, 22.20, 22.29, 22.31

Выяснить, какие из квадратичных интегралов в задачах 22.3-22.8 являются универсальными интегральными инвариантами. Как связана эти интегралы с универсальным интегральным инвариантом Пуанкаре?

$$22.6. I = \oint \sum_{i=1}^n [(a_i p_i + \varphi_i(q_i)) \delta q_i + (\beta_i q_i + \psi_i(p_i)) \delta p_i]$$

по Т.Ли Хуанхунда

$$J = \text{inv} \Leftrightarrow J = C J_p \Leftrightarrow J - C J_p = 0$$

$$I = J - C J_p = \oint \sum [(\alpha_i - C) p_i + \varphi_i(q_i)] \delta q_i + [\beta_i q_i + \psi_i(p_i)] \delta p_i$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i}$$

контур прошл. $\Rightarrow I = 0 \Leftrightarrow$ по знаком ищ. полн. инв.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial \varphi_i(q_i)}{\partial q_j} = 0 = \frac{\partial W_3(p_i)}{\partial p_i} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_j}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial p_j} = \beta_i \cdot \delta_{ij} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial q_j} = (\alpha_i - C) \delta_{ij} \Rightarrow C = \alpha_i - \beta_i$$

$$22.6. I = \oint \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) p_i \delta q_i$$

Если $\forall i \rightarrow \alpha_i - \beta_i = C = \text{const}$ $J = \oint \sum (\alpha_i - \beta_i) p_i \delta q_i$, иначе не инв. инв.

22.20. Показать, что интегралы

$$I_1 = \int_{G_{\alpha}} \varphi_1(q_1, p_1) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \delta p_1 \delta p_2 \delta p_3,$$

$$I_2 = \int_{G_{\alpha}} \varphi_2(q_1, p_1) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \delta p_1 \delta p_2 \delta p_3,$$

$$I_3 = \int_{G_{\alpha}} \varphi_3(q_1, p_1) \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \delta p_1 \delta p_2 \delta p_3,$$

где α и p_i — произвольные постоянные, являются интегральными инвариантами канонической системы с гамильтонионом $H = \varphi_1[\varphi_1(q_1, p_1), \varphi_2(q_2, p_2), \varphi_3(q_3, p_3)]$.

В лекции 9 (13.04) утверждалось без у-фа, что

$$\text{для } H = \varphi_3(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2), q_3, p_3 \quad \dot{q}_k = \dot{q}_k(H_{q_k}, q_{k+1}, p_{k+1}) - \Pi_{q_k}.$$

$$\{H, \Pi\} = \sum \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum \frac{\partial \varphi_k}{\partial q_k} \frac{\partial \dot{q}_{k+1}}{\partial q_{k+1}} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_k} \frac{\partial \dot{q}_{k+1}}{\partial q_{k+1}} \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$$

Критерий первого интеграла для Гамильтоновых систем имеет вид:

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{(k, l)} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_l} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_l} \right) = 0, \text{ где } (k, l) — \text{связь Пуассона}$$

Алгоритм 9 (13.04)

$$I_1 = \int_{G_{\alpha}} \varphi_1(\varphi_1(q_1, p_1), q_2, p_2) \delta q_1 \delta q_2 \delta p_1 \delta p_2 =$$

$$= \int_{G_{\alpha}} \widetilde{U}_K(\widetilde{\varphi}_1(\widetilde{\varphi}_1(q_1, p_1), q_2, p_2)) \left| \frac{\partial(\varphi_1, p_1)}{\partial(q_1, p_1)} \right| \delta q_1 \delta q_2 \delta p_1 \delta p_2$$

$$U_K - \Pi.U. \Rightarrow \widetilde{U}_K = U_K$$

$$V = \text{const} \Rightarrow \left| \frac{\partial(\varphi_1, p_1)}{\partial(q_1, p_1)} \right| = 1 \Rightarrow \int_{G_{\alpha}} \dots = \int_{G_0} \dots = \text{inv}$$

Теорема (Сокращение V для гамильтоновых систем).

Для гамильтоновых систем, фазовый объем V сохраняется

Доказательство >

22.29. Найти необходимые и достаточные условия сохранения фазового объёма в пространстве (x_1, \dots, x_n) для стационарной линейной динамической системы $\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ ($i = 1, n$).

22.29. $\operatorname{tr} A = 0$

Теорема (Литвилда о сохранении фазового объема).

$V = \text{const} \Leftrightarrow \operatorname{div} F(x, t) = 0$

Доказательство >

$$\dot{X} = AX \text{ по Th. Литвильда } V = \text{const} \Leftrightarrow \operatorname{div} AX = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k a_{ik} X_k \right) = \operatorname{tr} A$$

22.31. Груз массы m движется по прямой Ox под действием упругой силы $-cx$ и силы сопротивления $-\beta \dot{x}$. На плоскости (x, \dot{x}) выбирается область G_0 площади S_0 . Совокупность движений груза с начальными условиями в G_0 переводит G_0 в G_t . Найти площадь S_t области G_t .

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + cx = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v \\ \ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\beta}{m}v \end{cases} \Rightarrow F(x, v) = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{c}{m}x - \frac{\beta}{m}v \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{div} F = -\frac{\beta}{m} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \int_G \operatorname{div} F dx dv = -\frac{\beta}{m} S \Rightarrow \int_{S_0}^{S_t} \frac{dS}{S} = -\frac{\beta}{m} \int_0^t dt \Rightarrow S_t = \exp(-\beta t/m) S_0$$

$$V_t = \int_{G_t} \dots \int_{G_t} \operatorname{div} F(x_1, t) dx_1 \dots dx_n$$

Неделя II

11. Канонические преобразования
23.7, 23.20, 23.29, 23.48, 23.71, 23.97

№ 23.7

Для канонических преобразований в задачах 23.4–23.9
найти вспомогательные с и производящие функции $F(q, p, t)$.

23.7. $\tilde{q} = -q \operatorname{ctg} p$, $\tilde{p} = 2 \ln \cos p$

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

Преобр. канон. \Leftrightarrow

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} = 2 \frac{1}{\cos p} \cdot \left(-\sin p \right) \cdot \operatorname{ctg} p - 2 \ln \cos p \cdot \frac{1}{\sin^2 p} + C$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} = -2 \ln \cos p \cdot \frac{1}{\sin^2 p}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p} \Rightarrow C = 2$$

(Симплекс 10, 40 мин)

$$\begin{cases} 2 \ln \cos p \cdot (-\operatorname{ctg} p) - C p = -\frac{\partial F}{\partial q} \\ 2 \ln \cos p \cdot \left(q \cdot \frac{1}{\sin^2 p} \right) = -\frac{\partial F}{\partial p} \end{cases}$$

Находим F : $F(q, p, t) = \int \frac{\partial F}{\partial p} dp + f(q, t)$ (1)

$$\int \frac{\partial F}{\partial p} dp = -2q \int \frac{\ln \cos p}{\sin^2 p} dp = 2q \left[C \operatorname{tg} p \cdot \ln \cos p + p \right]$$

$$U = p \ln \cos p \quad dU = -\operatorname{tg} p \cdot dp$$

$$dV = \frac{dp}{\sin^2 p} \quad V = -C \operatorname{tg} p$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = 2 \ln \cos p \cdot ctg p + 2p = 2 [ctg p \cdot \ln \cos p + p] + f'_q(q_1, t) \Rightarrow$$

$$f'_q(q_1, t) = 0 \Rightarrow f_q(q_1, t) = 0 \quad \text{добавление } g = g(t) \text{ или const не существенно}$$

$$F(q_1, p, t) = 2q_1 [ctg p \cdot \ln \cos p + p]$$

$$23.7. \ c=2, \ F(q, p, t) = 2q [p + \ln(\cos p) \cdot \operatorname{ctg} p]$$

Nº 23.20

Приведённые в задачах 23.20–23.24 выражения $x_i = x_i(q, t)$ ($i=1,2,3$) определяют переход от декартовых к обобщённым координатам. Используя результат задачи 23.18, найти соответствующие этому переходу формулы преобразования обобщённых импульсов $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q, p, t)$.

$$23.20. \ x_1 = p \cos \varphi, \ x_2 = p \sin \varphi, \ x_3 = z.$$

23.18. В механической системе с лагранжианом $L(q, \dot{q})$ при помощи несессенного преобразования $\tilde{q} = \tilde{q}_i(q, t)$ ($i=1, n$) совершается переход от обобщённых координат q к обобщённым координатам \tilde{q} . Найти соответствующий этому переходу закон преобразования обобщённых импульсов $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q, p, t)$ ($i=1, n$) и доказать каноничность преобразования $\tilde{q} = \tilde{q}_i(q, t)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q, p, t)$ ($i=1, n$). Найти взаимность c и производную функцию $F(q, p, t)$ этого преобразования.

$$23.18. \ \tilde{p}_i = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial q_j}{\partial \tilde{q}_i} \quad (i=1, n), \ c=1, \ F=0.$$

↑
3

$$\tilde{P}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}$$

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_1, t) \Rightarrow \dot{\tilde{q}}_i = \sum_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{\tilde{q}}_i}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} = \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_i}$$

$$\tilde{P}_i = \sum_j P_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}$$

$$\text{усл 23.18} \quad \tilde{P}_i = \sum_j P_j \frac{\partial q_j}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}$$

$$P_p = \sum_i P_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p} = P_{x_1} \cos \varphi + P_{x_2} \sin \varphi = \frac{P_{x_1} X_1 + P_{x_2} X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$$

$$P_q = \sum_i P_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q} = -P_{x_1} \cdot p \cdot \sin \varphi + P_{x_2} \cdot p \cdot \cos \varphi = -P_{x_1} X_2 + P_{x_2} X_1$$

$$P_z = \sum_i P_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial z} = P_{x_3}$$

$$P_{x_i} = P_p \frac{\partial p}{\partial x_i} + P_q \frac{\partial q}{\partial x_i} + P_z \frac{\partial z}{\partial x_i} \Rightarrow$$

$$P_{x_1} = P_p \cdot \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} + P_q \left(-\frac{X_2}{X_1^2 + X_2^2} \right) + 0 = P_p \cos \varphi - P_q \frac{\sin \varphi}{p}$$

$$P_{x_2} = P_p \cdot \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} + P_q \left(\frac{X_1}{X_1^2 + X_2^2} \right) + 0 = P_p \sin \varphi + P_q \frac{\cos \varphi}{p}$$

$$P_{x_3} = P_z$$

$$23.20. \ P_p = \frac{P_{x_1} X_1 + P_{x_2} X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}, \quad P_\varphi = -P_{x_1} X_2 + P_{x_2} X_1, \quad P_z = P_{x_3};$$

$$P_{x_1} = P_p \cos \varphi - P_\varphi \frac{\sin \varphi}{p}, \quad P_{x_2} = P_p \sin \varphi + P_\varphi \frac{\cos \varphi}{p}, \quad P_{x_3} = P_z,$$

23.29. Задано каноническое преобразование
 $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q, p, t)$, $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q, p, t)$ ($i=1, n$). Каким условиям должны удовлетворять функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ для того, чтобы преобразование $\tilde{q}'_i = f_1(t)\tilde{q}_i(q, p, t)$, $\tilde{p}'_i = f_2(t)\tilde{p}_i(q, p, t)$ было каноническим?

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\tilde{q}'_i, \tilde{p}'_i - \text{канон.} \Rightarrow \begin{cases} \sum_j \tilde{p}'_j \frac{\partial \tilde{q}'_i}{\partial q_j} = CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}'_j \frac{\partial \tilde{q}'_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\sum_j P'_j \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} = f_1(t) \cdot f_2(t) \sum_j \tilde{p}'_j \frac{\partial \tilde{q}'_i}{\partial q_j} = f_1(t) \cdot f_2(t) \left(CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \right)$$

$$\sum_j P'_j \frac{\partial q'_i}{\partial p_j} = f_1(t) \cdot f_2(t) \sum_j \tilde{p}'_j \frac{\partial \tilde{q}'_i}{\partial p_j} = f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

$$q^+, p^+ - \text{канон} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(t) \cdot f_2(t) \left(CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) = C^* P_i - \frac{\partial F^*}{\partial q_i} \\ f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot \left(-\frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = -\frac{\partial F^*}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial p_i \partial q_i} = C^* - f_1(t) \cdot f_2(t) \left(C - \frac{\partial F}{\partial p_i \partial q_i} \right)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial q_i \partial p_i} = f_1(t) f_2(t) \cdot \frac{\partial F}{\partial q_i \partial p_i}$$

$$C^* = f_1(t) \cdot f_2(t) \cdot C = \text{const} \Rightarrow f_1(t) \cdot f_2(t) = \text{const}$$

23.29. $f_1(t) f_2(t) = \text{const}$

23.48. Найти движение осциллятора с гамильтонианом $H = \frac{1}{2} \sum_i (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2)$. Показать, что закон движения системы $q_i = q_i(q_0, p_0, t)$, $p_i = p_i(q_0, p_0, t)$ ($i=1, n$) можно рассматривать, как униполярное каноническое преобразование начальных данных. Найти производящую функцию этого преобразования и гамильтониан $H_0(q_0, p_0)$.

$$\begin{cases} q_i = q_i^\circ \cos \omega_i t + \frac{p_i}{\omega_i} \sin \omega_i t \\ p_i = \dot{q}_i = -q_i^\circ \omega_i \sin \omega_i t + p_i^\circ \cos \omega_i t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\text{канон} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_j P_j \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} = P_i \cos \omega_i t = CP_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j P_j \frac{\partial q'_i}{\partial p_j} = \frac{P_i}{\omega_i} \sin \omega_i t = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i \partial q_i^\circ} = -\cos^2 \omega_i t + C = \sin^2 \omega_i t = \frac{\partial F}{\partial q_i^\circ \partial p_i} \Rightarrow C=1 \quad (\text{униполярное})$$

$$F = \int \sum \frac{\partial F}{\partial p_i^\circ} dp_i^\circ + f(q^\circ, t) = \sum [P_i^\circ q_i^\circ \sin^2 \omega_i t - \frac{P_i^\circ}{2\omega_i} \sin \omega_i t \cdot \cos \omega_i t] + f(q^\circ, t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i^0} = q_i^0 w_i \sin \omega t \cdot \cos \omega t - p_i^0 \cos^2 \omega t + p_i^0 = p_i^0 \sin^2 \omega t + f_i^0$$

$$f = \sum \frac{1}{2} q_i^0 w_i \sin \omega t \cos \omega t$$

23.48. $F = pq \sin^2 \omega t + \frac{p^2 - q^2 \omega^2}{2\omega} \cos \omega t \sin \omega t, \quad H_0 = 0.$

$$F = \sum_i p_i^0 q_i^0 \sin^2 \omega t - \frac{p_i^0 - q_i^0 w_i^2}{2w_i} \cos \omega t \sin \omega t$$

$$\tilde{H} = cH + \frac{\partial F}{\partial t} + \sum \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial t} \Rightarrow H_0 = H - \frac{\partial F}{\partial t} - \sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

$$\sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial t} = \sum p_i^2; \quad H = \frac{1}{2} \sum p_i^2 + w_i^2 q_i^2$$

$$H_0 = -\frac{1}{2} \sum p_i^2 + \frac{1}{2} \sum w_i^2 q_i^2 - \frac{\partial F}{\partial t} \Rightarrow H_0 = 0$$

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = -\sum p_i^0 q_i^0 w_i \sin 2\omega t - \frac{p_i^0 - q_i^0 w_i^2}{2} \cos 2\omega t$$

$$-\frac{1}{2} p_i^2 = -\frac{1}{2} q_i^0 w_i^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2} p_i^0 q_i^0 w_i \sin 2\omega t - \frac{1}{2} p_i^0 \cos^2 \omega t$$

$$\frac{1}{2} w_i^2 q_i^2 = \frac{1}{2} w_i^2 q_i^0 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2} p_i^0 q_i^0 w_i \sin 2\omega t + \frac{1}{2} p_i^0 \sin^2 \omega t$$

23.71. При каких значениях $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ ($i=1, n$) преобразование $\tilde{q}_i = q_i^\infty p_i^0, \quad \tilde{p}_i = q_i^\infty p_i^0$ является каноническим?

$$\begin{cases} \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial q_j} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum_j \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum q_i^{\chi_i} p_i^{\delta_i} \alpha_i q_i^{\alpha_i-1} p_i^{\beta_i} = cp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \sum q_i^{\chi_i} p_i^{\delta_i} \beta_i q_i^{\alpha_i} p_i^{\beta_i-1} = -\frac{\partial F}{\partial p_i} \end{cases}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i \partial q_i} = \alpha_i q_i^{\delta_i + \alpha_i - 1} \cdot (\delta_i + \beta_i) p_i^{\delta_i + \beta_i - 1} + C$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i \partial p_i} = -(\alpha_i + \chi_i) \beta_i q_i^{\delta_i + \alpha_i - 1} \cdot p_i^{\delta_i + \beta_i - 1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_i \partial q_i} = \frac{\partial F}{\partial q_i \partial p_i}, \quad C = \text{const} \Rightarrow \chi_i + \alpha_i = 1; \quad \delta_i + \beta_i = 1 \Rightarrow$$

$$C = \alpha_i (\delta_i + \beta_i) - \beta_i (\alpha_i + \chi_i) = \alpha_i - \beta_i = (\alpha_i - \gamma_i) - (\gamma_i - \beta_i) = \delta_i - \chi_i$$

23.71. $\gamma_i + \alpha_i = 1, \quad \delta_i + \beta_i = 1, \quad c = \alpha_i - \beta_i = \delta_i - \gamma_i$

Используя критерий каноничности преобразования (q, \dot{q}) -описания, выяснить, какие из преобразований в задачах 23.85–23.10 являются каноническими (величины $a, b, \gamma, \lambda, \mu, a_i, b_i, \omega_i, \alpha_i, \beta_i$ – постоянные). Для канонических преобразований найти величинность c и производящую функцию $S(q, \dot{q}, t)$.

23.97. $\ddot{q}_i = \sqrt{pq_i} q_i^{(a_i-1)}$, $\ddot{p}_i = -\sqrt{pq_i} (q_i^{(a_i-1)})^{(2a_i-1)} (i=1, n)$.

$$\begin{cases} \ddot{p}_i = -\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \\ c p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \end{cases}$$

Нез. пер. $(q_i, \dot{q}_i) \Rightarrow$ выражим \tilde{P}_i и P_i через (q_i, \dot{q}_i)

$$\tilde{q}_i^{a_i} = \gamma P_i q_i^{(1-\gamma)} \Rightarrow P_i = \frac{1}{\gamma} \tilde{q}_i^{a_i} \cdot q_i^{a_i-1}$$

$$\tilde{P}_i = -\sqrt{\left(\tilde{q}_i^{a_i} \cdot q_i^{a_i-1}\right)^{a_i-1}} q_i^{2a_i-1} = -\sqrt{\tilde{q}_i^{a_i^2-a_i} \cdot q_i^{a_i^2}} = -\tilde{q}_i^{a_i-1} \cdot q_i^{a_i}$$

канон $\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{P}_i = -\frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \\ C P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \end{cases}$

$$\frac{\partial S}{\partial q_i \cdot \partial \tilde{q}_i} = \frac{\partial \tilde{P}_i}{\partial q_i} = \alpha_i q_i^{(a_i-1)} \tilde{q}_i^{(a_i-1)}$$

$$\Rightarrow C = \gamma$$

$$\frac{\partial S}{\partial \tilde{q}_i \cdot \partial q_i} = C \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{C}{\gamma} \alpha_i \tilde{q}_i^{(a_i-1)} q_i^{(a_i-1)}$$

уравн S: $S = \sum \frac{1}{\alpha_i} (q_i \cdot \tilde{q}_i)^{a_i}$

23.97. $c = \gamma$, $S(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} (q_i \tilde{q}_i)^{a_i}$

Лекция 12

12. Уравнение Гамильтон–Якоби
24.9, 24.18, 24.43, 24.66, 24.87

24.9. Материальная точка массы m движется в центральном поле с потенциальной энергией $\Pi(r) = \frac{\mu_1}{r} + \frac{\mu_2}{r^2}$. Используя сферические координаты r, θ, ϕ , составить уравнение Гамильтон–Якоби, построить его полный интеграл и получить из него уравнение траектории точки в плоскости меридиана ($\phi = \text{const}$, $\alpha_0 = 0$).

$$H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \frac{P_\phi^2}{2mr^2 \cos^2 \theta} + \Pi(r)$$

$$T.K. \Psi = \text{const} = 0; \quad H = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{P_\theta^2}{2mr^2} + \Pi(r) = h = \text{const}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) = 0$$

уравнение Гамильтон–Якоби

$$c p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Более некоторых производных функции времени Гамильтон–Якоби в виде полного интеграла. Решение $S = S(\vec{q}, \vec{p}, t)$ – полный интеграл уравнения Гамильтон–Якоби, если

1. S удовлетворяет уравнению Гамильтон–Якоби

$$2. \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{q} \partial \vec{q}}\right) \neq 0$$

Одним из методов нахождения производной функции в виде полного интеграла является метод разделения переменных. Для этого полный интеграл пишут в виде

$$S = S_0(t, \vec{a}) + S_1(\vec{q}_1, \vec{a}) + \dots + S_n(\vec{q}_n, \vec{a})$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \psi} \right)^2 \right] + \Pi(r) = 0$$

Полный интеграл можно в форме

$$S = S_0(t, \alpha) + S_r(r, \alpha) + S_\psi(\psi, \alpha)$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S_\psi}{\partial \psi} \right)^2 \right] + \Pi(r) = 0$$

Уравнение распадается на слагаемые, каждое из которых зависит от своих переменных. Но так как уравнение должно тождественно выполняться, то получаем, что все слагаемые есть константы:

$$\left(\frac{\partial S_\psi}{\partial \psi} \right)^2 = \alpha_\psi \Rightarrow S_\psi = \sqrt{\alpha_\psi} \cdot \psi$$

$$\frac{1}{2m} \left[\left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{\alpha_\psi}{r^2} \right] + \Pi(r) = h \Rightarrow S_r = \int \sqrt{2m(h - \Pi(r)) - \frac{\alpha_\psi}{r^2}} dr$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + h = 0 \Rightarrow S_0 = -ht$$

$$S = -ht + \int \sqrt{2m(h + \frac{\mu_1}{r} - \frac{\mu_2}{r^2}) - \frac{\alpha_\psi}{r^2}} dr + \sqrt{\alpha_\psi} \cdot \psi$$

$$\beta_h = \frac{\partial S}{\partial h} = -t + \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(h + \frac{\mu_1}{r} - \frac{\mu_2}{r^2}) - \frac{\alpha_\psi}{r^2}}} \Rightarrow r = r(\alpha, \beta, t)$$

$$\beta_\psi = \int \frac{dr}{2r\sqrt{2m(h + \frac{\mu_1}{r} - \frac{\mu_2}{r^2}) - \frac{\alpha_\psi}{r^2}}} - \frac{\psi}{2\sqrt{\alpha_\psi}}$$

затем находим траектории посчитаем β_ψ :

$$I = \int \frac{dr}{2r\sqrt{2mh + \frac{r^2}{r^2} + 2m\mu_1 r - 2m\mu_2 - \alpha_\psi}}$$

запишем: $\sqrt{\alpha_\psi + 2m\mu_2} \cdot 2r \cdot \sqrt{\frac{2mh}{\alpha_\psi + 2m\mu_2} \cdot r^2 + 2 \frac{m\mu_1}{\alpha_\psi + 2m\mu_2} r - 1}$

однозн. $\frac{1}{P} = \frac{m\mu_1}{\alpha_\psi + 2m\mu_2}$, тогда $\frac{2mh}{\alpha_\psi + 2m\mu_2} \cdot r^2 = 2mh \cdot \frac{\alpha_\psi + 2m\mu_2}{(m\mu_1)^2} \cdot \left(\frac{r}{P} \right)^2 e^{2-1}$

24.9. $S = -ht + \int \sqrt{2m \left(h + \frac{\mu_1}{r} - \frac{\mu_2}{r^2} \right) - \frac{\alpha_\psi}{r^2}} dr + \sqrt{\alpha_\psi} \cdot 0$. Траектория определяется квадратурой

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\psi} = -\beta_\psi \rightarrow \rightarrow \frac{0}{2\sqrt{\alpha_\psi}} - \int \frac{dr}{2r^2 \sqrt{2mh + \frac{2m\mu_1}{r} - \frac{\alpha_\psi + 2m\mu_2}{r^2}}} = -\beta_\psi.$$

Вводим обозначения

$$\text{обозн. } e^2 = 2m\hbar \cdot \frac{\alpha_\psi + 2m\mu_2}{(m\mu_1)^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\text{пог корнем } (e^2 - 1) \left(\frac{r}{p}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{p}\right) - 1 = e^2 \left(\frac{r}{p}\right)^2 - \left(\frac{r}{p} - 1\right)^2$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_\psi + 2m\mu_2}} \int \frac{dr}{r \sqrt{e^2 \left(\frac{r}{p}\right)^2 - \left(\frac{r}{p} - 1\right)^2}} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\alpha_\psi} \sqrt{1 + \frac{2m\mu_2}{\alpha_\psi}}} \int}_{w} \frac{d\left(\frac{p}{r} - 1\right)}{e \sqrt{1 - \frac{1}{e^2} \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_\psi} \cdot w} \cdot \arccos \frac{\frac{p}{r} - 1}{e}$$

$$\arccos \frac{\frac{p}{r} - 1}{e} = \underbrace{2w\sqrt{\alpha_\psi} \beta_\psi}_\psi + w\psi = \psi_0 + w\psi \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(w\psi + \psi_0)}$$

24.18. Однородный стержень массы m и длины l движется по гладкой вертикальной плоскости Oz_Ω . Плоскость вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси Oz . Используя метод Якоби, записать уравнения относительного движения стержня в квадратурах.



$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \frac{ml^2}{12} (\dot{\psi}^2 + \omega^2 \sin^2 \psi) \quad \Pi(z, r) = mgz - \frac{1}{2} mw^2 r^2$$

$$H = \hat{T} + \Pi = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{6}{ml^2} p_\psi^2 + \frac{ml^2}{24} \omega^2 \sin^2 \psi + mgz - \frac{1}{2} mw^2 r^2$$

$$\frac{ds}{dt} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{ds}{dr} \right)^2 + \left(\frac{ds}{dz} \right)^2 \right] + \frac{6}{ml^2} \left(\frac{ds}{d\psi} \right)^2 + f(z, r, \theta) = 0$$

Полный интеграл ищем в виде

$$S = S_0(t, \alpha) + S_r(r, \alpha) + S_z(z, \alpha) + S_\psi(u, \alpha)$$

$$\frac{ds_0}{dt} + \frac{1}{2m} \left[\left(\frac{ds_r}{dr} \right)^2 + \left(\frac{ds_z}{dz} \right)^2 \right] + \frac{6}{ml^2} \left(\frac{ds_\psi}{du} \right)^2 + \frac{ml^2}{24} \omega^2 \sin^2 \psi + mgz - \frac{1}{2} mw^2 r^2 = 0$$

Уравнение распалось на слагаемые, каждое из которых зависит от своих переменных. Но так как уравнение должно тождественно выполняться, то получаем, что все слагаемые есть константы:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{ds_z}{dz} \right)^2 + mgz = \alpha_2 \Rightarrow S_z = \int \sqrt{2m(\alpha_2 - mgz)} dz$$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{1 + 2m\hbar \left(\alpha_2 + 2m\mu_2 \right)} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{m\mu_1}{\alpha_2 + 2m\mu_2}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m\mu_2}{\alpha_2}}, \\ 0_1 &= 2\alpha\sqrt{\alpha_2} \beta_1, \text{ получаем} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{0}{2\alpha\sqrt{\alpha_2}} &- \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2} \sqrt{1 + \frac{2m\mu_2}{\alpha_2}}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{2m\hbar \left(\alpha_2 + 2m\mu_2 \right)} \left(\frac{m\mu_1 r^2}{\alpha_2 + 2m\mu_2} \right)^2 + 2\frac{m\mu_1 r}{\alpha_2 + 2m\mu_2} - 1}} = \\ &= -\beta_1 \rightarrow \text{отт} \beta_1 = \int \frac{dr}{r \sqrt{(\frac{p}{e}-1)\left(\frac{p}{e}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{e}\right)-1}} = \int \frac{dr}{r \sqrt{\left(\frac{p}{e}\right)^2 - \left(\frac{p}{e}-1\right)^2}} = \\ &= -\int \frac{d\left(\frac{p}{e}-1\right)}{e\left(1-\frac{1}{e^2}\right)\left(\frac{p}{e}-1\right)} = \arccos \frac{e}{p} \rightarrow r = \frac{p}{1 + \cos(\arccos(e/p))} = \\ &= \frac{p}{1 + \cos(\arccos(e/p))} = \end{aligned}$$

Имеем замкнутые траектории при $e=0$, либо $e<1$ и ограниценные. Траектории разомкнуты при $e>1$ либо $e>1$ и ограницены. При $\mu_2=0$ имеем обычное коническое сечение:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} m w^2 r^2 = dr \Rightarrow S_r = \sqrt{2m \cdot (dr + \frac{1}{2} mr^2 w^2)} dr$$

$$\frac{6}{mr^2} \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 - \frac{m l^2}{2u} w^2 \sin^2 \theta = d\theta \Rightarrow S_\theta = \sqrt{\frac{ml^2}{6} (\alpha_\theta + \frac{ml^2}{2u} w^2 \sin^2 \theta)} d\theta$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + dr + d\theta + dz = 0 \Rightarrow S_0 = -\alpha_r t - \alpha_\theta t - \alpha_z t$$

$$S = -\alpha_r t + \sqrt{2m \cdot (dr + \frac{1}{2} mr^2 w^2)} dr - \alpha_\theta t + \sqrt{\frac{ml^2}{6} (\alpha_\theta + \frac{ml^2}{2u} w^2 \sin^2 \theta)} d\theta - \alpha_z t + \sqrt{2m(\alpha_z - mgz)} dz$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -t + \int \frac{2m dr}{2\sqrt{2m dr + mr^2 w^2}} = \beta_r \Rightarrow \int \frac{\sqrt{m} dr}{\sqrt{2dr + mr^2 w^2}} = \beta_r + t$$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = -t + \int \frac{\frac{ml^2}{6} d\theta}{2\sqrt{\frac{ml^2}{6} (2u d\theta + ml^2 w^2 \sin^2 \theta)}} \Rightarrow \int \frac{\sqrt{ml^2} d\theta}{\sqrt{2u d\theta + ml^2 w^2 \sin^2 \theta}} = \beta_\theta + t$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = -t + \int \frac{2m dz}{2\sqrt{2m(\alpha_z - mgz)}} \Rightarrow \int \frac{\sqrt{m} dz}{\sqrt{2(\alpha_z - mgz)}} = \beta_z + t$$

$$24.18. \int \frac{\sqrt{m} dr}{\sqrt{2\alpha_r + mr^2 \omega^2}} = \beta_r + t,$$

$$\int \frac{\sqrt{m} d\theta}{\sqrt{2(\alpha_\theta - mgz)}} = \beta_\theta + t, \quad \int \frac{\sqrt{ml^2} d\theta}{\sqrt{24\alpha_\theta + ml^2 \omega^2 \sin^2 \theta}} = \beta_\theta + t.$$

В задачах 24.36-24.47 система задаётся своим гамильтонианом. Используя метод Якоби, составить в квадратурах уравнения, определяющие закон движения системы.

$$24.43. H = \frac{p_{q_1}^2}{q_1^2} + \frac{1}{q_1^2} \left(\frac{p_{q_2}^2}{q_2^2} + \frac{p_{q_3}^2}{q_3^2 q_1^2} \right)$$

Аналогично пред. задачам

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \frac{(\partial S_1 / \partial q_1)^2}{q_1^2} + \frac{1}{q_1^2 q_2^2} \left((\partial S_2 / \partial q_2)^2 + \frac{(\partial S_3 / \partial q_3)^2}{q_3^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha_1 = 0 \Rightarrow S_0 = -\alpha_1 t$$

$$\left(\frac{\partial S_3 / \partial q_3}{q_3^2} \right)^2 = \alpha_3 \Rightarrow S_3 = \int \sqrt{\alpha_3} q_3 dq_3 = \frac{1}{2} q_3^2 \sqrt{\alpha_3}$$

$$\frac{1}{q_1^2} \left[(\partial S_2 / \partial q_1)^2 + \alpha_3 \right] = \alpha_2 \Rightarrow S_2 = \int \sqrt{\alpha_2 q_1^2 - \alpha_3} dq_1$$

$$\frac{1}{q_1^2} \left[(\partial S_1 / \partial q_1)^2 + \alpha_2 \right] = \alpha_1 \Rightarrow S_1 = \int \sqrt{\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2} dq_1$$

$$S = -\alpha_1 t + \int \sqrt{\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2} dq_1 + \int \sqrt{\alpha_2 q_1^2 - \alpha_3} dq_1 + \frac{1}{2} q_3^2 \sqrt{\alpha_3}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = -t + \int \frac{q_1^2 dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2}} = \beta_1 \Rightarrow \int \frac{q_1^2 dq_1}{\sqrt{\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2}} = 2(\beta_1 + t)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = - \int \frac{dq_1}{2\sqrt{\alpha_1 q_1^2 - \alpha_2}} + \int \frac{q_2^2 dq_2}{2\sqrt{\alpha_2 q_2^2 - \alpha_3}} = \beta_2$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_3} = - \int \frac{dq_2}{2\sqrt{\alpha_2 q_2^2 - \alpha_3}} + \frac{q_3^2}{4\sqrt{\alpha_3}} = \beta_3$$

$$24.43. \int \frac{q_i^2 dq_i}{\sqrt{a_i q_i^2 - a_2}} = 2(\beta_i + t),$$

$$\int \frac{dq_i}{2\sqrt{a_i q_i^2 - a_2}} - \int \frac{q_i^2 dq_i}{2\sqrt{a_i q_i^2 - a_3}} = \beta_2, \quad \int \frac{dq_3}{2\sqrt{a_3 q_3^2 - a_3}} - \frac{q_3^2}{4\sqrt{a_3}} = \beta_3,$$

24.66. Найти полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби для системы с гамильтонианом

$$H = H[\psi_1(q_1, p_1), \dots, \psi_n(q_n, p_n), t],$$

где функции $\psi_i(q_i, p_i) = a_i$ ($i = 1, n$) разрешимы относительно импульсов $p_i = p_i(q_i, a_i)$.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}[\psi(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}), t] = 0$$

$$\Psi_i(q_i, p_i) = a_i \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H}(a_i, t) = 0$$

$$\text{Ищем } S \text{ в виде } S = S_0(t, a) + \sum S_i(q_i, a_i)$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = -\mathcal{H}(a, t) \Rightarrow S_0 = - \int \mathcal{H}(a, t) dt$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial q_i} = P_i = P_i(q_i, a_i) \Rightarrow S_i = \int P_i(q_i, a_i) dq_i$$

$$S = - \int \mathcal{H}(a, t) dt + \sum \int P_i(q_i, a_i) dq_i$$

$$24.66. S = - \int H(a_1, \dots, a_n, t) dt + \sum_{i=1}^n \int p_i(q_i, a_i) dq_i$$

В задачах 24.84 – 24.89 по заданному полному интегралу
уравнения Гамильтонона – Якоби найти гамильтониан системы.

24.87.

$$S = -\alpha_1 \int f(t) dt + \int \sqrt{[\alpha_n f_n(q_n)]} dq_n + \sum_{n=1}^{n-1} \int \sqrt{(\alpha_i - \alpha_{i+1}) f_i(q_i)} dq_i.$$

у.п.е Г-я: $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, p_i, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} = -H = \alpha_i f_i(t)$

у.п.е

с

$$P_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \Rightarrow \begin{cases} P_{i < n} = \sqrt{(\alpha_i - \alpha_{i+1}) f_i(q_i)} \\ P_n = \sqrt{\alpha_n f_n(q_n)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha_i - \alpha_{i+1}) = \frac{P_{i < n}^2}{f_i(q_i)} \\ \alpha_n = \frac{P_n^2}{f_n(q_n)} \end{cases}$$

$$\alpha_{n-1} = \alpha_n + \frac{P_{n-1}^2}{f_{n-1}(q)} = \frac{P_n^2}{f_n(q)} + \frac{P_{n-1}^2}{f_{n-1}(q)} \Rightarrow \alpha_1 = \sum \frac{P_i^2}{f_i(q_i)} \Rightarrow H = f(t) \sum \frac{P_i^2}{f_i(q_i)}$$

24.87. $H = f(t) \sum_{i=1}^n \frac{P_i^2}{f_i(q_i)}$

