Задание 1 Draft! Наумов В.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября — 04 октября)

I. Комплексные числа

§1: ~~1($\underline{2}$, 4)~~; ~~2(2, 3, $\underline{4}$)~~; ~~3(4)~~; ~~4($\underline{2}$)~~; ~~5(4)~~; ~~6~~; ~~7(3)~~; ~~9(3,$\underline{4}$)~~; ~~10(7, 9)~~; 18*.

II. Элементарные функции. Функциональные ряды

§3: ~~8(1, 2, 4)~~; ~~9(3, $\underline{4}$, 8)~~; ~~11(1, 2, $\underline{3}$, 4)~~; ~~12(1, 2)~~; ~~13($\underline{1}$, 3)~~; ~~14(1, 4)~~; ~~17($\underline{1}$, 4, 8)~~; ~~19(3)~~.

§4: 6(4).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

§5: ~~1($\underline{2}$, 4, 6)~~; ~~6(2, $\underline{5}$)~~; ~~7(1, 6)~~; ~~13($\underline{1}$, 2)~~; ~~17(3, $\underline{6}$)~~.

IV. Ряд Тейлора

§7: ~~1~~; 5*; ~~6($\underline{6}$)~~; ~~11(1, $\underline{4}$)~~; ~~12(1)~~.

V. Теорема единственности

§9: 2(1, 2, $\underline{5}$, 11, 12); 13($\underline{5}$, 8).

1. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено $f^{(n)}(z) = 0$. Доказать, что f – многочлен степени меньше n.

2*. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G, и для любого $z \in G$ существует натуральное число n такое, что $f^{(n)}(z) = 0$. Верно ли, что $f(z)$ – многочлен?

3. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, гармонические в области D, совпадают в ней в окрестности некоторой точки $(x_0, y_0) \in D$. Доказать, что эти функции тождественно равны друг другу в области D.

4. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, гармонические в области D, совпадают в ней на бесконечном множестве точек E, имеющем предельную точку в D. Верно ли, что эти функции тождественно равны друг другу в области D?

VI. Ряд Лорана

§11: 1(6); 2(1, $\underline{4}$, 6); 3(1, $\underline{6}$); $\underline{4(4)}$; 5(4); 7(3); $\underline{8(6)}$; 9(2); $\underline{10(6)}$.

5. Доказать, что если четная функция регулярна в кольце с центром в точке $z = 0$, то ее разложение в этом кольце в ряд Лорана не содержит нечетных степеней.

77[3*($\underline{21}$)]

I. Комплексные числа:

п 1:

$$(1+2i)(1-2i) = 1+4$$

№ 1 (2, 4)

1. Вычислить:

~~1) $(1+2i)(2-i)+(1-2i)(2+i)$;~~ 2) $\dfrac{5}{1+2i}+\dfrac{5}{2-i}$;

~~3) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$~~; 4) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

2) $\dfrac{5}{1+2i}+\dfrac{5}{2-i} = 5\left(\dfrac{1-2i}{5}+\dfrac{2+i}{5}\right) = 3-i$

2) $3-i$.

4) $\dfrac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2} = \dfrac{(-3+4i)+(2+2i)}{(-9+46i)-(3+4i)} = \dfrac{-1+6i}{-12+42i}$

$$= -\frac{1}{318}(-44+5i)$$

4) $\dfrac{22}{159}-\dfrac{5}{318}i$.

№ 2 (2, 3, 4)

2. Записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число z:

~~1) $z = 1+i^{121}$~~; 2) $z=(-3+4i)^3$;

3) $z = 1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$; 4) $z=\dfrac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

2) $z = (-3+4i)^3 = \left[5\left(-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\right]^3$

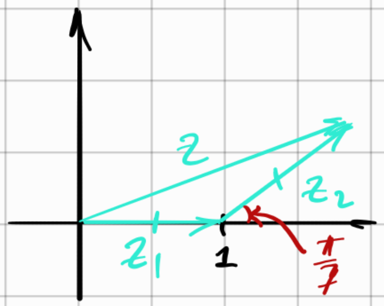
$$\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$$

$\Rightarrow$

$$z = 125\cdot(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 125\cdot e^{3i\varphi}$$

3) $z = \underbrace{1}_{z_1} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}}_{z_2}$; $\varphi = \frac{\pi}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{14}$

$r = 2\cos\frac{\pi}{14}$



$$\Rightarrow z = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right) = 2\cos\frac{\pi}{14}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{14}}$$

№4

$$z = \frac{(1+i)^9}{(1-\sqrt{3}i)^6} = \frac{\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^9}{\left(2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^6} = 2^{\frac{9}{2}-6}\cdot e^{i\left(\frac{9}{4}\pi + \frac{6}{3}\pi\right)} = 2^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{-\frac{3}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

2) $125(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 125e^{i3\varphi}$; $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$;

3) $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right) = 2\cos\frac{\pi}{14}\, e^{i\pi/14}$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{i\pi/4}$.

№3(4)

3. Найти все корни уравнения: 1) $\bar{z} = z^3$; 2) $|z| - z = 1 +$

$-1 + 2i$;

4) $|z|^2 - 2iz + 2i = 0$.

$$|z|^2 - 2iz + 2i = 0$$

$$|x+iy|^2 - 2i(x+iy) + 2i = 0$$

$$(x^2+y^2) + 2y - 2xi + 2i = 0$$

$$\mathrm{Re}\left[(x^2+y^2) + 2y - 2xi + 2i\right] = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left[x^2+y^2+2y\right] = 0$$

$$\mathrm{Im}\left[(x^2+y^2)+2y-2xi+2i\right]=0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\left[-2xi+2i\right]=0 \Rightarrow -2x+2=0$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=0 \\ -2x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+y^2+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z=1-i$$

4) $z=1-i.$

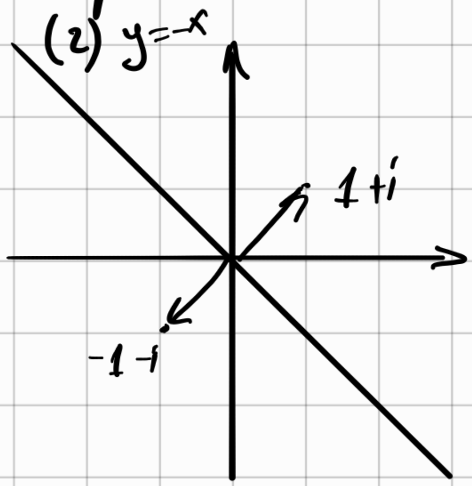
№4(2)

4. Решить систему уравнений:

1) $\cancel{\begin{cases} |z-2i|=|z|, \\ |z-i|=|z-1|; \end{cases}}$ 2) $\begin{cases} |z^2-2i|=4, \\ |z+1+i|=|z-1-i|. \end{cases}$

$$\begin{cases} |z^2-2i|=4 & (1) \\ |z+1+i|=|z-1-i| & (2) \end{cases}$$

геометрически (2):



$$\Rightarrow z: x(1-i)$$

подставим в (1):

$$|x^2(1-i)^2-2i|=4$$

$$|x^2(1-2i-1)-2i|=4$$

$\Rightarrow |x^2(-2i)-2i| = 4 \Rightarrow \underbrace{|-2i|}_{2}\,|x^2+1| = 4$

$\Rightarrow x^2+1 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow z_1 = 1-i$

$z_2 = -1+i$

2) $z_1 = 1 - i;\ z_2 = -1 + i.$

№5(4)

5. **Решить уравнение:**

4) $z^8 = 1 + i.$

$z^8 = 1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_k = \sqrt[16]{2}\cdot e^{i\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}$

$= \sqrt[16]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{32}(8k+1)},\ k = 0..7$

4) $z_k = \sqrt[16]{2}e^{i(8k+1)\pi/32},\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.$

№6

6. Пусть $z = z_0$ — корень многочлена $P(z)$ с действительными коэффициентами. Доказать, что $P(\overline{z}_0) = 0$, т. е. $\overline{z}_0$ — корень многочлена $P(z)$.

$\square$ пусть $\overline{z}_0$ = не корень $\Rightarrow P(\overline{z}_0) \neq 0$; P - полином степени n

представим $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^n$; $a_i \in \mathbb{R}$

тогда $P(\bar{z}_0) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\bar{z}_0)^n \ominus$

если $z_0 = re^{i\varphi}$ то $\bar{z}_0 = re^{-i\varphi} \Rightarrow (\bar{z}_0)^n = r^n \cdot e^{-in\varphi}$

$= \overline{(z_0^n)}$

$\ominus \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{(z_0^n)} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z_0^n} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z_0^n}$

$a_i = \bar{a}_i \qquad = \overline{P(z_0)} = \bar{0}$

$\boxtimes$

№7(3)

7. Пусть z_1 и z_2 — фиксированные точки комплексной плоскости. Дать геометрическое описание множества всех точек z, удовлетворяющих уравнению:

3) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, где $a > \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$;

Эллипс, с фокусами z_1 и z_2, a = большая полуось

очка $z = 1$.

3) Эллипс с фокусами в точках z_1 и z_2 и с большой полуосью, равной a.

№9.(3,4)

9. Выяснить, какая линия на плоскости задается уравнением:

3) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$; 4) $\operatorname{Re} \frac{z-a}{z+a} = 0 \quad (a > 0)$.

3) $\operatorname{Im}\left[\frac{z-1}{z+1}\right] = 0$, пусть $t = z+1$; $z \neq -1$

$\operatorname{Im}\left[\frac{t-2}{t}\right] = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\left[\frac{(t-2)\bar{t}}{|t|^2}\right] = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{|t|^2} \cdot \operatorname{Im}\left[(t-2)\bar{t}\right]=0 \Rightarrow \operatorname{Im}\left[(t-2)\bar{t}\right]=0$$

пусть $t = x+iy$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\left[((x-2)+iy)(x-iy)\right]=0$$

$$\operatorname{Im}\left[iy\cdot x-(x-2)iy\right]=0 \Rightarrow xy-xy+2y=0$$

$$y=0$$

$$\forall z \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

4) $\operatorname{Re}\left[\frac{z-a}{z+a}\right]=0$; $a>0$ и $z\neq -a$

пусть $t=z+a$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{t-2a}{t}\right]=0 \Rightarrow \operatorname{Re}\left[\frac{(t-2a)\cdot\bar{t}}{|t|^2}\right]=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|t|^2}\operatorname{Re}\left[(t-2a)\bar{t}\right]=0$$

пусть $t=x+iy \Rightarrow \operatorname{Re}\left[((x-2a)+iy)(x-iy)\right]=0$

$$(x-2a)x+y^2=0$$

$$x^2-2ax+y^2=0$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2=a^2$$

$(x-a)^2+y^2=a^2$ для t

$\Rightarrow$ для z: $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(t-a) = x-a$

$\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} z = y$

$\Rightarrow \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = a^2$; где $z = \tilde{x} + i\tilde{y}$

окружность с центром в $z=0$

и радиусом a, кроме $z = -a$

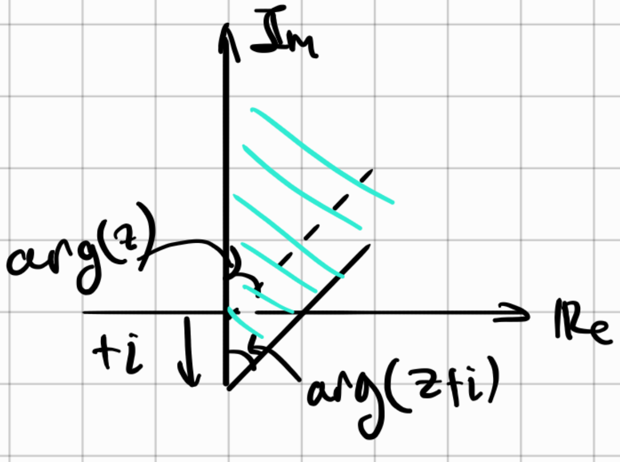
3) Действительная ось.
4) Окружность радиуса a с центром в точке $z = 0$.

№10.(7, 9)

10. Выяснить, какое множество точек z комплексной плоскости удовлетворяет неравенству:

7) $\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}$; ~~8) $|z| > 1 - \operatorname{Re} z$~~; 9) $\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4$.

7) $\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}$



9) $\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^4 = r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$

$\operatorname{Re} z^4 = r^4 \cos 4\varphi$

$\operatorname{Im} z^4 = r^4 \sin 4\varphi$

$\Rightarrow \cos 4\varphi > \sin 4\varphi$

$$\cos 4\varphi - \sin 4\varphi > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 4\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 4\varphi > 0$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos 4\varphi - \sin\frac{\pi}{4}\sin 4\varphi > 0$$

$$\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$2\pi k < 4\varphi + \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi k$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < 4\varphi < \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$$

$$-\frac{\pi}{16} + \frac{1}{2}\pi k < \varphi < \frac{3}{16}\pi + \frac{1}{2}\pi k, \quad k = 0, \ldots, 3$$

7) Угол раствора $\frac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z = -i$, стороны которого проходят через точки $z = 1$, $z = 0$.

~~8) Часть плоскости, лежащая с той же стороны параболы $y^2 = 1 - 2x$, что и точка $z = 1$ (и ограниченная этой параболой).~~

9) Четыре угла раствора $\frac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z = 0$, биссектрисами которых являются лучи $\arg z = -\frac{\pi}{16} + \pi k$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Во всех случаях точки граничных линий не включаются.

II. Элементарные функции

Функциональные ряды

п3

№ 8(1, 2, 4)

8. Вычислить значения функции e^z в точках:
1) $z = 2\pi i$; 2) $z = \pi i$;
~~3) $z = \pi i/2$~~; 4) $z = -\pi i/2$;
~~5) $z = \pi i/4$~~.

e^z в точке 1) $z = 2\pi i$

$$e^z = e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

2) $z = \pi i$: $e^z = e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

4) $z = -\pi i/2$: $e^z = e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$

8. 1) 1; 2) -1; ~~3) i;~~ 4) $-i$;

№9 (3, 4, 8)

9. Доказать формулы:

3) $\sin\left(z+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos z$; 4) $\sin(\pi+z)=-\sin z$;

8) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$.

3) $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$\square$

$$\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{iz+i\frac{\pi}{2}}-e^{-iz-i\frac{\pi}{2}}}{2i}=\frac{e^{iz}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}-e^{-iz}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i}; \quad e^{i\frac{\pi}{2}}=i,\ e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$$

$$=\frac{e^{iz}\cdot i-e^{-iz}\cdot(-i)}{2i}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$$

$\boxtimes$

4) $\sin(\pi+z)=-\sin z$

$$\square\ \frac{e^{i\pi+iz}-e^{-i\pi-iz}}{2i}=\frac{e^{i\pi}\cdot e^{iz}-e^{-i\pi}\cdot e^{-iz}}{2i}\ominus; \quad e^{i\pi}=-1,\ e^{-i\pi}=-1$$

$$\ominus\ \frac{(-1)\cdot e^{iz}-(-1)\cdot e^{-iz}}{2i}=(-1)\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)=-\sin z \quad \boxtimes$$

8) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2$

$\square\ \cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2=$

$$\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}-\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{-i}{-i}\;\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}\cdot\frac{-i}{-i}$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}-e^{-iz_2}\right)$$

$$\frac{1}{4}\Big[e^{iz_1+iz_2}+\cancel{e^{iz_1-iz_2}}+\cancel{e^{-iz_1+iz_2}}+e^{-iz_1-iz_2}+e^{iz_1+iz_2}-\cancel{e^{iz_1-iz_2}}-\cancel{e^{-iz_1+iz_2}}+e^{-iz_1-iz_2}$$

$$=\frac{e^{iz_1+iz_2}+e^{-iz_1-iz_1}}{2}=\cos(z_1+z_2)\ \boxtimes$$

№11 (1, 2, 3, 4)

11. Доказать формулы:

1) $\operatorname{sh} z=-i\sin(iz)$; 2) $\operatorname{sh}(iz)=i\sin z$;

3) $\cos(iz)=\operatorname{ch} z$; 4) $\operatorname{ch}(iz)=\cos z$;

$$\operatorname{sh}\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\qquad \operatorname{ch}\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

1) $\operatorname{sh} z=-i\sin iz$

$$\square\ -i\sin iz=-i\cdot\frac{e^{iz\cdot i}-e^{-iz\cdot i}}{2i}=-\frac{e^{-z}-e^{z}}{2}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$=\operatorname{sh} z\ \boxtimes$$

2) $\operatorname{sh}(iz)=i\sin z$

$$\square\ \operatorname{sh} iz=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=i\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=i\sin z\ \boxtimes$$

3) $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$

$\square$ $\dfrac{e^{iz\cdot i} + e^{-iz\cdot i}}{2} = \dfrac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \operatorname{ch} z$ $\blacksquare$

4) $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$

$\square$ $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$ $\blacksquare$

№12(1, 2)

12. Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать, что:

1) $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\sin z = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$;

2) $\operatorname{Re}\cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y$, $\operatorname{Im}\cos z = -\sin x \cdot \operatorname{sh} y$;

1) $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$ $\qquad$ $\operatorname{Im}\sin z = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$

$\square$ $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\quad z = x + iy$

$$= \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = -\frac{1}{2} i \left(e^{ix}\cdot e^{-y} - e^{-ix}\cdot e^{y}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} i (\cos x + i\sin x) e^{-y} + \frac{1}{2} i (\cos x - i\sin x) e^{y}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-y} (\sin x - i\cos x) + \frac{1}{2} e^{y} (\sin x + i\cos x)$$

$\Rightarrow \operatorname{Re}\sin z = \sin x \cdot \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\sin z = \frac{1}{2} e^{-y} \cdot (-\cos x) + \frac{1}{2} e^{y} \cdot \cos x = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$ $\blacksquare$

2) $\operatorname{Re}\cos z=\cos x\,\operatorname{ch}y \qquad \operatorname{Im}\cos z=-\sin x\cdot\operatorname{sh}y$

$\square$ $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $z=x+iy$

$=\dfrac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2}=\frac{1}{2}e^{-y}(\cos x+i\sin x)+\frac{1}{2}e^{y}(\cos x-i\sin x)$

$\Rightarrow \operatorname{Re}\cos z=\frac{1}{2}e^{-y}\cos x+\frac{1}{2}e^{y}\cdot\cos x=\cos x\cdot\operatorname{ch}y$

$\operatorname{Im}\cos z=\frac{1}{2}e^{-y}\sin x-\frac{1}{2}e^{y}\sin x=\sin x\,\operatorname{sh}y$ $\blacksquare$

№13(1, 3)

13. Пусть $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$. Доказать, что:

1) $|\sin z|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-\cos^2 x}$; ~~2) $|\sin z|$~~

3) $|\operatorname{sh} z|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 x-\cos^2 y}$; ~~4) $|\operatorname{ch} z|$~~

$|z|^2=\operatorname{Re}^2 z+\operatorname{Im}^2 z$; $z=x+iy$

1) $\square$ $|\sin z|^2=\sin^2 x\,\operatorname{ch}^2 y+\cos^2 x\,\operatorname{sh}^2 y$ (из №12(1, 2))

$=(1-\cos^2 x)\operatorname{ch}^2 y+\cos^2 x(\operatorname{ch}^2 y-1)$

$=\operatorname{ch}^2 y-\cos^2 x \Rightarrow |\sin z|=\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-\cos^2 x}$ $\blacksquare$

3) $\square$ заметим, что $\operatorname{sh}z=-i\sin iz$ (из №11(1))

тогда $|\operatorname{sh} z| = |\sin iz|$ $\qquad$ из (1)

$\Rightarrow |\operatorname{sh} z|^2 = |\sin iz|^2 = \operatorname{ch}^2 \operatorname{Im}(iz) - \cos^2 \operatorname{Re}(iz)$

$= \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y \Rightarrow |\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$

$\boxtimes$

№14(1,4)

14. Описать точки z, в которых следующие функции принимают действительные значения:

1) $\cos z$; ~~2) $\operatorname{ch} z$~~; ~~3) $\sin z$~~; 4) $\operatorname{tg} z$; ~~5) $\operatorname{cth} z$~~.

1) $\cos z \in \mathbb{R}$? $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \cos z = 0$

из №12(2): $\operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{sh} y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{Im} z = 0 \\ \operatorname{Re} z = \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

14. 1) $\operatorname{Im} z = 0$; $\operatorname{Re} z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

4) $\operatorname{Im} \operatorname{tg} z = 0$

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x+iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh}(2y)}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} \Rightarrow \operatorname{Im} \operatorname{tg} z = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \operatorname{sh}(2y) = 0$

$\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow \operatorname{Im} z = 0$

4) $\operatorname{Im} z = 0$;

№ 17 (1, 4, 8)

17. Найти все решения следующих уравнений:

1) $\sin z = \frac{4i}{3}$; 2) $\cancel{\sin z = \frac{5}{3}}$; 3) $\cancel{\cos z = \frac{3i}{4}}$; 4) $\cos z = \frac{3+i}{4}$;

5) $\cancel{\operatorname{tg} z = \frac{5i}{3}}$; 6) $\cancel{\operatorname{ctg} z = -\frac{3i}{5}}$; 7) $\cancel{\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}}$; 8) $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}$.

1) $\sin z = \frac{4i}{3} \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{4i}{3}$

$e^{iz} - e^{-iz} = -8/3$; пусть $t = e^{iz}$

$t - \frac{1}{t} = -\frac{8}{3}$

$t^2 + \frac{8}{3}t - 1 = 0$

$t = \frac{-\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + 4}}{2} \quad \frac{-\frac{8}{3} \pm \frac{10}{3}}{2} =$

$= -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3}$

$\Rightarrow t_1 = -3 \qquad e^{iz} = -3 \Rightarrow iz = \ln 3 + i(2\pi k + \pi)$

$t_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$k \in \mathbb{Z}$

$z_1 = -i \ln 3 + 2\pi k + \pi$

$t_2 : e^{iz} = \frac{1}{3} \Rightarrow iz = \ln \frac{1}{3} + i \cdot 2\pi k ; k \in \mathbb{Z}$

$z_2 = -i \ln \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

17. 1) $z = i(-1)^k \ln 3 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$;

4) $\cos z = \frac{3+i}{4}$

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{3+i}{4} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \left(\frac{3+i}{2}\right)$$

$$t^2 - 2\cdot\frac{(3+i)}{4}t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{3+i}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3+i}{4}\right)^2 - 1} = \frac{3+i}{4} \pm \sqrt{\frac{-4+3i}{8}} = \frac{3+i}{4} \pm \frac{1+3i}{4}$$

$$\Rightarrow t_1 = 1+i$$
$$t_2 = \frac{1-i}{2}$$

$$\Rightarrow e^{iz} = 1+i \Rightarrow zi = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

$$z_1 = -i\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{iz} = \frac{1-i}{2} \Rightarrow zi = \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

$$z_2 = -i\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \pm\left(-\frac{i}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$$

4) $z = \pm\left(-\frac{i}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z};$

8) $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^z + e^{-z} = 1$

$t = e^z \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 1$

$t^2 - t + 1 = 0$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= e^{i\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)} = e^z$

$\Rightarrow z = \pm\frac{\pi}{3} i + i \cdot 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

8) $z = \pm\frac{\pi i}{3} + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}.$

№ 19 (3)

19. Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать, что:

3) Функции $\sin z$ и $\cos z$ стремятся к бесконечности при $y \to \pm\infty$ и это стремление равномерно по x.

□ заметим, что $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos x$ - ограничена

$\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Rightarrow |\sin z| \to \infty$ при $y \to \pm\infty$

для $\cos z$:

$|\sin z|^2 = 1 - \cos^2 z \Rightarrow \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x = 1 - \cos^2 z$

$$\Rightarrow \cos z = \sqrt{1+\cos^2 x - \operatorname{ch}^2 y}$$

?

$$\cos x = \text{огр}$$

$$\operatorname{ch} y = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} \Rightarrow \cos z \to \infty$$

№4

№6(4)

6. Доказать равномерную сходимость ряда на множестве E:

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\cos nz,\ \ E = \{z\colon |\operatorname{Im} z| \leqslant \delta < \ln 2\}.$

Ограничим функциональный ряд, числовым рядом (для т. Вейерштрасса)

$$|\cos nz| = \left|\frac{e^{inz}+e^{-inz}}{2}\right| \leq \frac{|e^{inz}| + |e^{-inz}|}{2}$$

?

$$|e^{inz}| = |e^{in(x+iy)}| = |e^{inx-ny}| = e^{-ny}$$

Узх у Скубача

III Условия Коши – Римана

Гармонические функции

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Дифференцируемость. Условия Коши—Римана

1.1. *Дифференцируемость.* Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, т. е. на множестве

$$B_r(z_0) = \{z\colon |z - z_0| < r\},$$

где $r > 0$. Если существует конечный предел отношения $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ при $z \to z_0$, тот этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$, т. е.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1}$$

или

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z},$$

где

$$\Delta z = z - z_0, \quad \Delta f = f(z) - f(z_0).$$

Если функция $f(z)$ имеет в точке z_0 производную, то говорят, что функция $f(z)$ *дифференцируема* в точке z_0.

1.2. *Условия дифференцируемости.* Для того чтобы функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ дифференцируемы в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;
2) в точке (x_0, y_0) справедливы равенства (*условия Коши—Римана*):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

2. Понятие регулярной функции. Функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ называется *регулярной* (или *голоморфной*) функцией в области $G \subset \mathbb{C}$, если она определена и дифференцируема в каждой точке области G.

Говорят, что функция f *регулярна в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если она регулярна в некоторой окрестности этой точки.

Говорят, что функция f *регулярна на множестве* D, если существует область $G \supset D$, в которой функция f определена и регулярна.

3. Понятие гармонической функции

3.1. *Определение гармонической функции.* Действительная функция $u(x, y)$, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая в области $G \subset \mathbb{R}^2$, называется *гармонической* в области G, если в любой точке $(x, y) \in G$ справедливо равенство

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

h5

№1 (2, 4, 6)

1. Найти все точки $z = x + iy$, в которых дифференцируемы функции:
~~1) Im~~ z; 2) $|\bar{z}|^2$; ~~3) $x^2 - iy^2$~~; 4) $x^2 - y^2 - 2ixy$;
~~5) $x - y + i(x + y)$~~; 6) $z \operatorname{Re} z$.

2) $|\bar{z}|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = 0 \end{cases}$

Проверим: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$: $2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$: $2y = 0 \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow z = 0$

4) $x^2 - y^2 - 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = -2xy \end{cases}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$: $2x = -2x \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow z = 0$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$: $-2y = 2y \Rightarrow y = 0$

6) $z \operatorname{Re} z = (x+iy)x = x^2 + ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 \\ v = xy \end{cases}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$: $2x = x \Rightarrow x = 0$

$\rightarrow \boxed{z = 0}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$; $0 = -y \Rightarrow y = 0$

1. ~~1) Нигде~~; 2) в точке $z = 0$; ~~3) на прямой $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$~~;
4) нигде;? ~~5) всюду~~; 6) в точке $z = 0$.

№6(2,5)

6. Выяснить, в каких точках $z \in \mathbb{C}$ дифференцируемы функции, и найти их производные:
~~1) $e^{\operatorname{sh} z}$~~; 2) $\cos(2e^z)$; ~~3) $\sin z \operatorname{sh} z + i \cos z \operatorname{ch} z$~~;
~~4) $\frac{e^z}{z}$~~; 5) $\frac{z}{e^z}$; ~~6) $\frac{\sin z}{1+z^2}$~~.

2) $\cos(2e^z)$

$2e^z = 2e^{x+iy} = 2e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$

Из задания ранее: $\operatorname{Re} \cos(2e^z) = \cos(2e^x \cos y) \cdot \operatorname{ch}(2e^x \sin y)$

$\operatorname{Im} \cos(2e^z) = -\sin(2e^x \cos y) \cdot \operatorname{sh}(2e^x \sin y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\sin(2e^x \cos y) \cdot 2e^x \cos y \cdot \operatorname{ch}(2e^x \sin y) + \cos(2e^x \cos y) \cdot \operatorname{sh}(2e^x \sin y) \cdot 2e^x \sin y$

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\cos(2e^x \cos y) \cdot 2e^x \cdot (-\sin y) \cdot \operatorname{sh}(2e^x \sin y) - \sin(2e^x \cos y) \cdot \operatorname{ch}(2e^x \sin y) \cdot 2e^x \cos y$

не трудно заметить, что условие $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ выполнено

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Найдём $\frac{\partial v}{\partial x}=-\cos(2e^x\cos y)\cdot 2e^x\cos y\cdot \operatorname{sh}(2e^x\sin y)$
$-\sin(2e^x\cos y)\cdot \operatorname{ch}(2e^x\sin y)\cdot 2e^x\sin y$

$$\Rightarrow f'(z_0)=\begin{pmatrix}-\sin(2e^x\cos y)\cdot 2e^x\cos y\cdot \operatorname{ch}(2e^x\sin y)\\ +\cos(2e^x\cos y)\cdot \operatorname{sh}(2e^x\sin y)\cdot 2e^x\sin y\end{pmatrix}$$

$$+i\begin{pmatrix}-\cos(2e^x\cos y)\cdot 2e^x\cos y\cdot \operatorname{sh}(2e^x\sin y)\\ -\sin(2e^x\cos y)\cdot \operatorname{ch}(2e^x\sin y)\cdot 2e^x\sin y\end{pmatrix}$$

$$=2e^x\begin{pmatrix}\cos(2e^x\cos y)\operatorname{sh}(2e^x\sin y)\sin y\\ -i\cos(2e^x\cos y)\operatorname{sh}(2e^x\sin y)\cos y\end{pmatrix}\qquad -i\cdot i=1$$

$$+2e^x\begin{pmatrix}-\sin(2e^x\cos y)\operatorname{ch}(2e^x\sin y)\cos y\\ -i\sin(2e^x\cos y)\operatorname{ch}(2e^x\sin y)\sin y\end{pmatrix}$$

$$=2e^x\cdot(-i)\begin{pmatrix}\cos(2e^x\cos y)\operatorname{sh}(2e^x\sin y)\,i\sin y\\ \cos(2e^x\cos y)\operatorname{sh}(2e^x\sin y)\cos y\end{pmatrix}$$

$$2e^x\cdot(-1)\begin{pmatrix}\sin(2e^x\cos y)\operatorname{ch}(2e^x\sin y)\cos y\\ \sin(2e^x\cos y)\operatorname{ch}(2e^x\sin y)\,i\sin y\end{pmatrix}$$

$$=2e^x(-i)\cdot e^{iy}\cdot\cos(2e^x\cos y)\operatorname{sh}(2e^x\sin y)$$
$$+2e^x\cdot(-1)\cdot e^{iy}\cdot\sin(2e^x\cos y)\operatorname{ch}(2e^x\sin y)$$

$$=-2e^z\cdot\sin(2e^z)$$

можно ли по формуле?

5) $\frac{z}{e^z}$ $\qquad \frac{z}{e^z} = \frac{x+iy}{e^{x+iy}} = \frac{x+iy}{e^x}\cdot e^{-iy} = \frac{x+iy}{e^x}\cdot(\cos y - i\sin y)$

$$u = \operatorname{Re}\frac{z}{e^z} = \frac{1}{e^x}(x\cos y + y\sin y)$$

$$v = \operatorname{Im}\frac{z}{e^z} = \frac{1}{e^x}(-x\sin y + y\cos y)$$

можно ли по формуле?

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{e^x}(x\cos y + y\sin y) + \frac{1}{e^x}\cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{e^x}(-x\cos y + \cos y - y\sin y)$$

У половинана есть вывод для бозовых свойств но нет для сложной функции (?!)

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

для $f'(z)$ найдём $\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{e^x}(-x\sin y + y\cos y) + \frac{1}{e^x}(-\sin y)$$

$$\Rightarrow f' = \frac{1}{e^x}(-x\cos y - y\sin y + \cos y) + \frac{1}{e^x}i(x\sin y - y\cos y - \sin y)$$

$i\cdot(-i) = 1$

$$= \frac{1}{e^x}\left(-x(\cos(-y) + i\sin(-y)) + (\cos(-y) + i\sin(-y)) + -y(\sin y + i\cos y)\right)$$

$$= \frac{1}{e^x}(-xe^{-iy} + e^{-iy} - iye^{-iy}) = \frac{1}{e^z}(1 - z) = (1-z)e^{-z}$$

6. $\cancel{1)\ \operatorname{ch} z e^{\operatorname{sh} z}}$; 2) $-2e^z \sin(2e^z)$;
$\cancel{3)\ (1+i)\cos z \operatorname{sh} z + (1-i)\sin z \operatorname{ch} z}$;
$\cancel{4)\ \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)e^z,\ z \neq 0}$; 5) $(1-z)e^{-z}$;

№7(1,6)

7. Выяснить, где дифференцируемы функции, и найти их производные:
1) $\operatorname{tg} z$; $\cancel{2)\ \operatorname{ctg} z}$; $\cancel{3)\ \frac{e^z+2}{e^z-2}}$; $\cancel{4)\ \frac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}}$;
$\cancel{5)\ (e^z+e^{-z})^{-3}}$; 6) $\frac{\sin z}{\sin z - \cos z}$.

1) $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ дифф $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k\},\ k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{tg}' z = \frac{\sin' z \cos z - \sin z \cos' z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

6) $\frac{\sin z}{\sin z - \cos z}$

дифф-сть: $\sin z - \cos z \neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin z + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos z \neq 0$

$\sin\frac{\pi}{4}\sin z + \cos\frac{\pi}{4}\cos z \neq 0$

$\cos\left(z + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$

$z + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$z = \frac{\pi}{4} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ дифф-сть $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \pi k\}$

произв: $\dfrac{\cos z(\sin z-\cos z)-\sin z(\cos z+\sin z)}{(\sin z-\cos z)^2}$

$$=\frac{-1}{(\sin z-\cos z)^2}$$

7. 1) $\dfrac{1}{\cos^2 z}$; ~~2) $-\dfrac{1}{\sin^2 z}$; 3) $\dfrac{-4e^z}{(e^z-2)^2}$; 4) $\cos 2z$;~~
~~5) $\dfrac{3(e^{-z}-e^z)}{(e^z+e^{-z})^4}$;~~ 6) $\dfrac{-1}{(\sin z-\cos z)^2}$.

№13(1,2)

13. В следующих задачах дается одна из пары сопряженных гармонических функций u или v. Найти вторую функцию пары.
1) $u = xy$; 2) $u = x^2 - y^2 + 2xy$;

гармоническая: $\Delta u(x,y) = 0$

сопряж u и v $\Rightarrow$ для них верен критерий К-Р

1) $u = xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \frac{y^2}{2} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -x \Rightarrow \varphi = -\frac{x^2}{2} + C$$

$\Rightarrow v = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} + C$; заметим, что $\Delta v = 0$ верно

2) $u = x^2 - y^2 + 2xy$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x + 2y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = 2xy + y^2 + \varphi(x)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -2y + 2x = -2y - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2x \Rightarrow \varphi = -x^2 + C$

$\Rightarrow v = 2xy + y^2 - x^2 + C$; $\Delta v = 0$ верно

13. 1) $-\frac{x^2 - y^2}{2} + C$; 2) $2xy \underset{+e}{-} x^2 + y^2 + C$;

№17(3,6)

17. Восстановить регулярную функцию $f(z)$ по условию

3) $\operatorname{Im} f(z) = y \operatorname{ch} x \cos y + x \sin y \operatorname{sh} x$, $f(0) = 1$;

$v = \operatorname{Im} f = y \operatorname{ch} x \cos y + x \sin y \operatorname{sh} x$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ch} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y + x \cos y \operatorname{sh} x$

$\Rightarrow u = \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{sh} x \sin y + \cos y (x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) + \varphi(y)$

$= -y \operatorname{sh} x \sin y + \cos y \, x \operatorname{ch} x + \varphi(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -\operatorname{sh} x \sin y - y \operatorname{sh} x \cos y - \sin y \, x \operatorname{ch} x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$= -y \operatorname{sh} x \cos y - \sin y \operatorname{sh} x - x \sin y \operatorname{ch} x$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \varphi = C$$

$$\Rightarrow u = -y\,\mathrm{sh}x \sin y + \cos y \cdot x\,\mathrm{ch}x + C$$

подставим $f(0)=1$; $f = u + iv$

$v(0)=0$; $u(0)=C \Rightarrow C=1$

$$f(z) = (-y\,\mathrm{sh}x \sin y + \cos y \cdot x\,\mathrm{ch}x + 1) + i(y\,\mathrm{ch}x \cos y + x \sin y\,\mathrm{sh}x)$$

$$= (iy \sin y \sin ix + x \cos y \cos ix) + 1 + i(y \cos ix \cos y - ix \sin y \sin ix)$$

$$= iy(\sin y \cdot \sin ix + \cos y \cdot \cos ix) + x(\cos y \cdot \cos ix + \sin y \cdot \sin ix) + 1$$

$$= iy \cdot \cos(y - ix) + x \cdot \cos(y - ix) + 1$$

$$= z\,\mathrm{ch}\,z + 1$$

3) $z \operatorname{ch} z + 1$;

6) 6) $\operatorname{Re} f(z) = xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y, \quad f(0) = i$;

$$u = \operatorname{Re} f = xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow e^x \cos y + xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v = \cancel{e^x} \sin y + xe^x \sin y + (y+1)\cos y \cdot e^x \cancel{- \sin y\, e^x} + \varphi(x)$$

$$= xe^x \sin y + (y+1)\cos y \, e^x + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -xe^x \sin y - e^x \sin y - ye^x \cos y - e^x \cos y$$

$$= -e^x \sin y - xe^x \sin y - (y+1)\cos y \, e^x + \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \to \varphi = C$$

$$\Rightarrow v = xe^x \sin y + (y+1)\cos y \, e^x + C$$

$$f(0) = i \to i(1+c) = i \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow f = u + iv = \left(xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y\right) + i\left(xe^x \sin y + (y+1)\cos y \cdot e^x\right)$$

$$xe^x(\cos y + i\sin y) + ye^x(-\sin y + i\cos y) + e^x(-\sin y + i\cos y)$$

$$= xe^x \cdot e^{iy} + ye^x \cdot ie^{iy} + e^x \cdot ie^{iy} = (z+i)e^z$$

6) $(z+i)e^z$;

IV Ряд Тейлора:

n7

№4

4. Разложить функцию
$$f(z) = \frac{2z^2+2z-7}{z^2+z-2}$$
в ряд Тейлора в окрестности точки $z=-1$.

$$f(z) = \frac{2z^2+2z-7}{z^2+z-2} = 2 + \frac{-3}{z^2+z-2}$$

$$= 2 + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z-1}$$

в окрестности $z=-1 \Rightarrow$ пусть $t = z+1$

$$\Rightarrow f(t) = 2 + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-t/2}$$

$$= 2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n$$

$$= \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right) = \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(z+1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right)$$

$|z+1| < 1$

4. $f(z) = \frac{7}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2^{-(n+1)} + (-1)^n\right)(z+1)^n.$

№6(6)

6. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ функции:

6) $\operatorname{ch} z \cdot \cos z$.

$$6)\ \operatorname{ch} z \cdot \cos z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \cdot \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)z}+e^{-(1+i)z}+e^{(1-i)z}+e^{-(1-i)z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(1+i)z + \operatorname{ch}(1-i)z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((1+i)z)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((1-i)z)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\left((1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\cdot\left((2i)^{n}+(-2i)^{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{4k}}{(4k)!}\cdot(-1)^{k}\cdot 2^{2k}$$

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}2^{2n}\,\dfrac{z^{4n}}{(4n)!}$.

№11(1,4)

11. Определить порядок m нуля $z=a$ функции $f(z)$, если:

1) $f(z)=(\cos 3z-\cos 5z)^{2}(1-\cos 2z)^{3}$, $a=0$;

4) $f(z)=(z^{4}+2z^{3}-2z-1)^{2}(e^{i\pi z}+1)^{3}$, $a=-1$.

$$1)\ f(z)=(\cos 3z-\cos 5z)^{2}(1-\cos 2z)^{3};\ z=0$$

$$g(z)=(\cos 3z-\cos 5z) = z^{2}\cdot h_{1}(z)$$

$$-\sin 3z\cdot 3+\sin 5z\cdot 5=0,\quad -\cos 3z\cdot 9+\cos 5z\cdot 25\neq 0$$

$$t(z)=(1-\cos 2z) = z^{2}\cdot h_{2}(z)$$

$$\sin 2z\cdot 2=0,\quad \cos 2z\cdot 4\neq 0$$

$$\Rightarrow f(z) = z^{10} \cdot h_1^2(z) \cdot h_2^3(z)$$

$$\Rightarrow m = 10$$

4) $f(z) = (z^4 + 2z^3 - 2z - 1)^2 (e^{i\pi z} + 1)^3$; $z = -1$

$$g(z) = (z^4 + 2z^3 - 2z - 1) = (z-1)(z+1)^3$$

$$= (z+1)^3 h_1(z)$$

$$t(z) = e^{i\pi z} + 1 = (z+1) h_2(z)$$

$$i\pi e^{i\pi z} = -i\pi \neq 0$$

$$\Rightarrow (z+1)^9 h_1(z) \cdot h_2(z) \Rightarrow m = 9$$

11. 1) $m = 10$; 2) ~~$m = 6$~~; 3) ~~$m = 6$~~; 4) $m = 7$.?

№12(1)

12. Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции, удовлетворяющей указанным ниже условиям:

1) $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$;

$$f'(z) = f(z) \Rightarrow f(z) = e^z \cdot C \; ; \; f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(z) = e^z$$

в окр. $z=0$: $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

12. 1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$;