

**Сборник задач
по общему курсу
физики**

часть 3

- Атомная и ядерная физика
- Физика элементарных частиц
- Излучение



Сборник задач по общему курсу физики

в трех частях

**Под редакцией
В. А. ОВЧИНКИНА**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации по образованию
в области прикладных математики и физики в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению
подготовки «Прикладные математика и физика»*

Часть 3

**Атомная и ядерная физика
Физика элементарных частиц
Излучение**

Издание третье, исправленное и дополненное



Москва
Физматкнига
2023

ББК 22.3я73
С23
УДК 53(076.1)

В. А. ОВЧИНКИН, А. О. РАЕВСКИЙ, Ю. М. ЦИПЕНЮК

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ: Учеб. пособие: Для вузов. В трех частях. Ч. 3. Атомная и ядерная физика. Физика элементарных частиц. Излучение / Под ред. В. А. Овчинкина. Изд. 3-е, испр. и доп. — М.: Физматкнига, 2023. — 416 с. ISBN 978-5-89155-353-8.

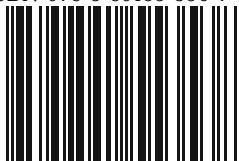
Третья часть сборника включает в себя 1097 задач, в основном по квантовой физике атомов и молекул, ядерной физике, физике элементарных частиц и физике излучения. Все задачи, авторами которых являются преподаватели кафедры общей физики МФТИ, предлагались студентам МФТИ на письменных экзаменах и олимпиадах. Свыше 20% задач снабжены подробными решениями, так что задачник в какой-то мере является одновременно и учебником. Книга содержит также большую подборку разнообразных (в том числе комплексных) задач, предлагавшихся студентам на заключительном (Государственном) экзамене по общей физике. В конце книги помещен традиционный справочный материал, а также некоторые теоретические приложения. В целом Сборник представляет собой уникальное издание, не имеющее аналогов в мировой практике.

Для студентов физических специальностей вузов, а также преподавателей физики высшей и средней школы.

Интернет-магазин специализированной литературы www.fizmatkniga.org

Уважаемые читатели! Наше издательство постоянно работает над улучшением качества издаваемых книг. Если вы заметили в нашей книге опечатку или ошибку, напишите нам об этом по электронной почте publishers@mail.mipt.ru или в группу vk.com/fizmatkniga.

ISBN 978-5-89155-353-8 (Ч. 3)
ISBN 978-5-89155-350-7



9 78589 1553538

© В. А. Овчинкин, 2023

© Физматкнига, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	6
От составителей	7
Задачи Ответы	
АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА	
§1. Фотоны. Фотоэффект. Эффект Комптона	10 188
§2. Волны де Броイラ. Соотношение неопределенностей	16 197
§3. Уравнение Шредингера. Квантование. Потенциальные барьеры	26 210
§4. Атом водорода и водородоподобные атомы	37 227
§5. Ширина линий. Спектры молекул. Рентгеновское излучение	46 238
§6. Спин. Атом в магнитном поле. Эффект Зеемана. Магнитный резонанс	53 248
§7. Ядерные модели. Радиоактивность. Эффект Мессбауэра	66 270
§8. Нейтроны. Ядерные реакции	80 289
§9. Деление ядер. Реакторы. Термоядерный синтез	94 304
§10. Элементарные частицы. Резонансы. Лептоны и кварки. Реакции при высоких энергиях	102 315
§11. Излучение	119 335
§12. Избранные задачи заключительного (Государственного) экзамена на МФТИ по общей физике	133 362
Приложения	394

*Посвящается светлой памяти
профессора Юрия Михайловича Ципенюка*

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание третьей части Сборника задач по общему курсу физики подверглось значительной доработке. Некоторые задачи были изменены, формулировки многих задач были заново отредактированы, а в ответы и решения внесены необходимые исправления и уточнения. Были включены и новые задачи. При этом нумерация задач везде была сохранена, за исключением § 12 (избранные задачи Заключительного (Государственного) экзамена МФТИ по общей физике). Кроме того, в этом издании полностью исключена вторая часть — «Строение вещества», которая выделена в отдельную книгу.

Отметим уникальность всего издания, не имеющего аналогов в мировой практике. Авторами всех задач являются преподаватели кафедры общей физики МФТИ. Все задачи составлялись для письменных семестровых контрольных работ и госэкзаменов.

Редактор Сборника выражает искреннюю благодарность составителей профессору А. В. Степанову, профессору Г. В. Слизкову, профессору В. А. Петухову, доцентам О. А. Судакову и Ю. В. Юрьеву. Своими замечаниями и предложениями они способствовали улучшению Сборника.

ОТ СОСТАВИТЕЛЕЙ

Эта книга является третьей частью Сборника задач по общему курсу физики. Этот Сборник в какой-то мере подводит итог семидесятилетней работы кафедры за все время существования МФТИ. Данная книга включает в себя два последних раздела курса общей физики: атомная и ядерная физика, а также физика элементарных частиц (квантовая микрофизика). Всего в этой части Сборника содержится 1097 задач. Почти все задачи предлагались студентам на письменных экзаменах и студенческих физических олимпиадах, их авторами являются преподаватели кафедры общей физики МФТИ. Часть задач (свыше 20% в данной книге) приведены с решениями. Для удобства в работе такие задачи помечены звездочкой. Эти задачи (их решения), бесспорно, являются очень важным методическим пособием в изучении физики. Большинство предложенных задач ориентированы на получение численного ответа, что само по себе важно как в плане формирования у студентов правильных представлений о масштабах изучаемых явлений, так и в плане запоминания физических констант и переводных коэффициентов из одной системы единиц в другую. В Сборнике используются единицы измерения не только из СИ и гауссовой системы, но и внесистемные единицы. Однако все-таки предпочтение отдается гауссовой системе (СГСЭ), и формулы записываются именно в ней (кроме особо оговоренных случаев).

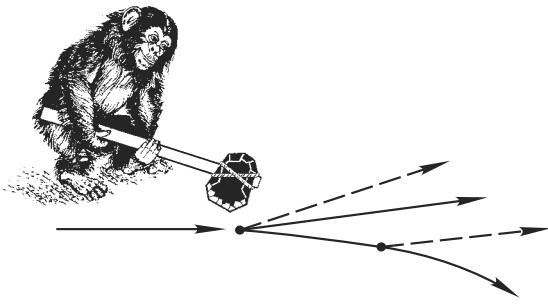
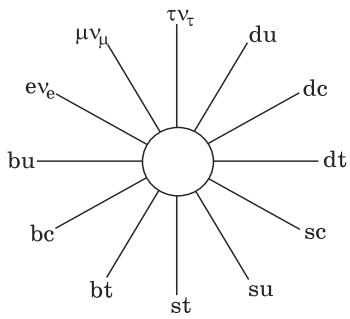
В конце этой части сборника приведено более трехсот задач, предлагавшихся студентам МФТИ на письменных государственных экзаменах по общей физике, которые проводятся, начиная с 1966 г. по настоящее время, на третьем курсе. Как правило, эти задачи посвящены не отдельным разделам физики, а совмещают в себе различные аспекты физических явлений, и, главное, в них отражены реальные эксперименты и достижения теории. В конце книги в помощь студентам помещены также приложения. В Приложении I изложена последовательность заполнения состояний в атомах и ядрах, а в Приложении II приведены таблицы мировых констант и величин.

Часть задач третьей книги уже была опубликована в ранее выходивших изданиях. Прежде всего, это «Сборник задач по физике» С. М. Козела, Э. И. Рашибы и С. А. Славатинского (М.: Наука, 1987), а также «Сборник задач по общему курсу физики», часть V — атомная физика, физика ядра и элементарных частиц, под ред. Д. В. Сивухина (М.: Наука, 1981), а также в «Сборнике задач по физике (Электричество, оптика и атомная физика)» под ред. С. М. Козела (М.: МФТИ, 1983) и «Сборнике задач по физике (Ядерная физика и физика твердого тела)» И. П. Крылова и др. (М.: МФТИ, 1983).

Над составлением задач трудилось большое количество преподавателей кафедры общей физики МФТИ, и, прежде всего, это В.Г.Аверин, Ю.В.Афанасьев, Г.С.Баронов, В.В.Бездудный, В.Е.Белонучкин, А.Д.Гладун, Л.Л.Гольдин, С.В.Гуденко, А.В.Гуденко, Д.Б.Диатроптов, А.С.Дьяков, Б.Г.Ерозолимский, Д.А.Заикин, В.Г.Зацепин, А.А.Иванов, А.П.Канавин, С.П.Капица, К.В.Караджев, А.С.Кингесен, Н.А.Кириченко, А.П.Кирьянов, С.Л.Кленов, С.М.Козел, П.Ф.Коротков, В.П.Коряевов, К.А.Котельников, М.Г.Кремлев, И.П.Крылов, К.М.Крымский, Е.П.Кузнецов, В.Г.Лейман, А.М.Леонтович, Г.Р.Локшин, Л.Б.Луганский, Е.З.Мейлихов, В.В.Можаев, А.И.Морозов, Е.Н.Морозов, В.Г.Никольский, М.Г.Никулин, В.А.Овчинкин, В.В.Окороков, А.Я.Паршин, В.А.Петухов, В.И.Плис, Э.В.Прут, А.О.Раевский, Э.И.Рашба, Е.Г.Рудашевский, С.Ю.Савинов, Э.П.Свириденков, М.В.Свиридов, Д.В.Сивухин, Г.В.Склизков, С.А.Славатинский, А.В.Степанов, А.Б.Струминский, О.А.Судаков, В.Н.Топников, Е.И.Тукиш, А.В.Францессон, Ю.М.Ципенюк, Ф.Е.Чукреев, А.В.Шеронов, И.Ф.Щеголев.

Особо следует отметить огромный редакторский труд лекторов и преподавателей, готовивших задачи к письменным экзаменам и студенческим олимпиадам. В разные годы это были Д.В.Сивухин, Л.Л.Гольдин, Б.Г.Еrozолимский, С.П.Капица, А.В.Степанов, Д.Б.Диатроптов, А.Д.Гладун, Д.А.Заикин, И.Ф.Щеголев, И.П.Крылов, А.П.Кирьянов, Л.Б.Луганский, Ю.М.Ципенюк, А.А.Иванов, А.О.Раевский, А.П.Канавин, А.Б.Струминский, В.А.Овчинкин, Е.И.Тукиш, Э.В.Прут.

Составители этой части сборника выражают особую признательность за плодотворные обсуждения текстов задач и их решений С.П.Аллилуеву, С.В.Гуденко, А.А.Иванову, А.М.Леоновичу, А.А.Лукьянину, В.В.Лобзину, Е.З.Мейлихову, Ю.В.Петрову, А.В.Степанову, С.Ю.Савинову, И.А.Фомину, А.В.Францессону, А.П.Кирьянову, А.П.Канавину, А.Б.Струминскому, Ю.В.Юрьеву.



Задачи

§ 1. Фотоны. Фотоэффект. Эффект Комптона

1.1. Найти импульс фотона видимого света ($\lambda = 500$ нм). Сравнить его с импульсом молекулы водорода при комнатной температуре.

1.2. При какой длине волны импульс фотона равен импульсу молекулы водорода при комнатной температуре?

1.3. Излучение гелий-неонового лазера мощностью $W = 1$ мВт сосредоточено в пучке диаметром $d = 0,5$ см. Длина волны $\lambda = 0,63$ мкм. Определить плотность потока j фотонов в пучке.

1.4* Согласно общей теории относительности (ОТО) энергия любого объекта в статическом гравитационном поле $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0(1 + 2\varphi/c^2)^{1/2}$, где \mathcal{E}_0 — энергия объекта в «пустом» (т. е. свободном от гравитационных полей) пространстве, а φ — гравитационный потенциал в точке нахождения объекта. Показать на основе этого соотношения, что разница энергий $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ между двумя состояниями объекта, расположенного на поверхности Земли и на высоте H от нее, оказывается эквивалентной разнице «гравитационных энергий» излученного объектом γ -кванта с энергией $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ и массой $m_\gamma = \mathcal{E}_\gamma/c^2$, как это было показано в опытах Паунда и Ребки с помощью эффекта Мессбауэра.

1.5. Как следует из общей теории относительности (ОТО), статическое гравитационное поле по отношению к своему воздействию на электромагнитные волны эквивалентно неоднородной среде с показателем преломления $n = (1 + 2\varphi/c^2)^{-1/2}$, где φ — гравитационный потенциал. Используя эту аналогию, найти угол отклонения δ луча света при прохождении его вблизи края Солнца. Масса Солнца $M = 1,99 \cdot 10^{33}$ г, радиус его фотосферы $R = 696\,000$ км.

1.6. Исходя из классического закона преломления света, показать, что при прохождении плоской границы двух прозрачных сред сохраняется тангенциальная компонента импульса фотонов.

1.7. Электромагнитная волна с круговой частотой $\omega = 2 \cdot 10^{16}$ с⁻¹ промодулирована по амплитуде синусоидой с круговой частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{15}$ с⁻¹. Найти энергию \mathcal{E} фотоэлектронов, выбиваемых этой волной из атомов водорода с энергией ионизации $\mathcal{E}_i = 13,6$ эВ.

1.8. Найти напряжение V на рентгеновской трубке, если известно, что в излучаемом ею сплошном спектре нет длин волн, меньших 0,0206 нм.

1.9. Шарик электроскопа облучается монохроматическим рентгеновским излучением. Листочки электроскопа перестают расходиться, когда потенциал шарика равен 8 кВ. Определить длину волны λ падающего излучения.

1.10. В центре посеребренного изнутри вакуумного стеклянного баллона шаровой формы помещен маленький шарик, покрытый никелем. Шарик освещается излучением ртутной лампы с длиной волны $\lambda = 230,2$ нм. Между внутренней поверхностью сферы и шариком приложена задерживающая разность потенциалов. Оказалось, что при увеличении этой разности до $V = 0,75$ В ни один из фотоэлектронов не попадает на посеребренную поверхность сферы. Контактная разность потенциалов между никелем и серебром равна $V_k = 1$ В. Вычислить максимальную скорость фотоэлектронов.

1.11. Уединенный цинковый шарик облучается ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda = 250$ нм. До какого максимального потенциала зарядится шарик? Работа выхода электрона для цинка $A = 3,74$ эВ.

1.12. При каких длинах волн λ облучающего света шарик в условиях предыдущей задачи заряжаться не будет?

1.13. Цинковый электрод вакуумного фотоэлемента освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 250$ нм. При наложении задерживающей разности потенциалов фототок уменьшается и обращается в нуль, когда она достигает значения $V = 2$ В. Определить внешнюю контактную разность потенциалов V_k между цинком и материалом, из которого изготовлен другой электрод фотоэлемента. Работа выхода электрона из цинка $A = 3,74$ эВ.

1.14. Вакуумный фотоэлемент имеет в режиме насыщения чувствительность к свету $K = 0,12 \text{ A/Bt}$. Какова относительная флуктуация α числа электронов, выбиваемых при падении на фотоэлемент светового потока мощностью $W = 1,3 \cdot 10^{-11} \text{ Bt}$? Время регистрации равно $t = 10^{-3}$ с.

1.15* К фотокатоду фотоэлектронного умножителя прижат сцинтиллятор (рис. 1). При пролете через сцинтиллятор релятивистского электрона молекулы сцинтиллятора возбуждаются, а затем испускают光子, переходя в основные состояния. В свою очередь,光子, попадая на тонкий ($\sim 10^{-5}$ см) фотокатод, выбивают из него электроны. Оценить, во сколько раз увеличится поток электронов из фотокатода, если сухой оптический контакт между фотоэлектронным умножителем и сцинтиллятором заменить на масляный контакт. Показатель преломления сцинтиллятора, стекла колбы и масла равен $n = 1,5$, $h = 2$ см, $D = 16$ см.

1.16* Показать, что свободный электрон в вакууме не может ни поглощать, ни излучать光子, а может лишь рассеивать их.

1.17. Какую минимальную длительность импульса фототока можно получить в вакуумном фотоэлементе, между анодом и като-

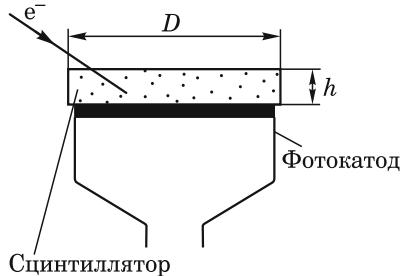


Рис. 1

дом которого приложено напряжение в несколько сотен вольт, при освещении фотокатода короткими ($< 10^{-11}$ с) импульсами света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Красная граница материала фотокатода $\lambda_{\text{кр}} = 1000$ нм, напряженность поля между анодом и фотокатодом $E = 300$ В/см.

1.18. По классической электромагнитной теории света поток световой энергии от источника непрерывно распространяется во все стороны. Через какой промежуток времени, согласно этой теории, отдельный атом tantalового катода может накопить столько энергии, чтобы стал возможен вылет фотоэлектрона, если катод находится на расстоянии $L = 10$ м от 25-ваттной лампочки? Работа выхода электрона для tantalа составляет $A = 4$ эВ. Считать, что фотоэлектрону передается вся энергия, накапливающаяся в атоме tantalа, диаметр которого можно считать равным $d = 0,3$ нм.

1.19* Исходя из представления о фотонах как о квантах света, вывести формулу для эффекта Доплера в предположении, что источник света движется с релятивистской скоростью.

1.20* То же, но для источника, движущегося с релятивистской скоростью.

1.21* В предыдущей задаче выяснить характер зависимости частоты v от угла между направлением скорости источника и направлением импульса испущенного фотона при $\beta = v/c \rightarrow 1$. Оценить угол θ , начиная с которого излучаемая частота мала по сравнению с частотой, излучаемой под углом $\theta = 0^\circ$.

1.22. На рис. 2 изображены результаты, полученные Комптоном при исследовании рассеяния рентгеновских лучей в графите. Наблюдения велись под углом $\theta = 135^\circ$ к направлению падающего пучка.

Определить длину волны λ_0 падающего излучения.

1.23. Фотон рентгеновского излучения с длиной волны λ в результате комптоновского рассеяния на неподвижном свободном электроне отклонился от первоначального направления на угол θ . Определить кинетическую энергию T_e и импульс p_e электрона отдачи. Дать численный ответ для $\lambda = 0,02$ нм и $\theta = 90^\circ$.

1.24* В предыдущей задаче определить угол φ между направлением первичного фотона и направлением движения электрона отдачи.

1.25. Определить изменение длины волны при эффекте Комптона, если наблюдение ведется перпендикулярно к направлению первично-го пучка излучения.

1.26* В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний получил импульс отдачи p . Определить, под какими углами по отношению к направлению падающего фотона мог вылететь электрон с таким импульсом.

1.27. В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний вылетел под углом $\varphi = 60^\circ$ к направлению падающего фотона. Какую максимальную кинетическую энергию T может приобрести электрон отдачи в этом случае?

1.28. В результате комптоновского рассеяния фотона на покоящемся электроне последний приобрел кинетическую энергию, равную его удвоенной энергии покоя. Под каким углом φ по отношению к направлению падающего фотона мог вылететь электрон?

1.29. Фотон ($\lambda_0 = 662$ нм) рассеивается на электроне, летящем перпендикулярно направлению движения фотона. Найти начальный импульс электрона p_0 , если длина волны λ_0 при рассеянии не измениется. Угол рассеяния $\theta = 60^\circ$.

1.30. Фотон с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 2m_e c^2$ при рассеянии на покоящемся электроне теряет половину своей энергии (m_e — масса электрона). Найти угол разлета α между рассеянным фотоном и электроном отдачи.

1.31. Фотон рассеивается на покоящемся протоне. Энергия рассеянного фотона равна кинетической энергии протона отдачи, а угол разлета между рассеянным фотоном и протоном отдачи равен 90° . Найти энергию \mathcal{E}_γ падающего фотона.

1.32. С какой скоростью v должен двигаться электрон, чтобы летящий ему навстречу фотон с длиной волны $\lambda = 0,0024$ нм не изменил свою энергию при 180° -рассеянии?

1.33. Оптический фотон с энергией $\hbar\omega_0$ рассеивается назад на электроне, движущемся ему навстречу с полной энергией \mathcal{E} и импульсом p . Какова энергия рассеянного фотона? Рассмотреть два предельных случая: а) $\frac{\mathcal{E}+pc}{mc^2} \cdot \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2} \gg 1$; б) $\frac{\mathcal{E}+pc}{mc^2} \cdot \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2} \ll 1$.

1.34. Определить энергию фотона $h\nu'$, рассеянного назад покоящимся электроном. Какова эта энергия, если энергия падающего фотона $h\nu$ удовлетворяет условию $h\nu \gg m_e c^2$ (m_e — масса электрона)?

1.35. Фотон от рубинового лазера ($\lambda = 0,6943$ мкм) испытывает лобовое соударение с электроном, имеющим кинетическую энергию $T = 500$ МэВ. Оценить энергию \mathcal{E}_γ фотона, образующегося в результате «обратного комптон-эффекта» (т. е. при 180° -рассеянии фотона на движущемся электроне). См. также задачу 4.51.

1.36*: Определить длину волны λ рентгеновского излучения, для которого комптоновское рассеяние на электроне на угол 90° удваивает длину волны.

1.37. При движении быстрой заряженной частицы в области пространства, заполненной изотропным электромагнитным излучением (например, светом Солнца и звезд), частица теряет энергию в результате взаимодействия с этим излучением. Считая частицу ультраквантитативистской (энергия $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$), а ее соударения с фотоном — лобовыми, найти изменение энергии частицы $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}$ и энергию фотона отдачи $\hbar\omega$. Энергию фотонов (до соударения) $\hbar\omega_0$ считать ма-

лой по сравнению с $\hbar\omega$. Чему равна энергия $\hbar\omega$, если движущейся частицей является электрон с энергией $\mathcal{E}_0 = 2,5 \text{ ГэВ}$ и $\hbar\omega_0 = 1 \text{ эВ}$?

1.38. Электрон с энергией $\mathcal{E}_0 \gg mc^2$ рассеивается на фотоне с энергией $\hbar\omega_0 \ll mc^2$. При каком условии энергия этого фотона в системе отсчета, в которой электрон покоятся, удовлетворяет условию $\hbar\omega \ll mc^2$?

1.39* При прохождении γ -квантов через вещество образуются две группы быстрых электронов: одна в результате фотоэффекта, а другая — в результате комптоновского рассеяния. Каково должно быть энергетическое разрешение регистрирующей аппаратуры, чтобы отличать фотоэлектроны от комптоновских электронов с максимальной энергией? Энергия γ -квантов известна: $\mathcal{E}_\gamma = 5 \text{ МэВ}$.

1.40* Фотоны с длиной волны $\lambda = 1,4 \text{ \AA}$ испытывают комптоновское рассеяние на угол $\varphi = 60^\circ$ к первоначальному направлению. Фотоны попадают в рентгеновский спектрограф, работающий по методу интерференционного отражения Брэгга–Вульфа. При какой минимальной толщине D кристаллической пластинки спектрографа можно обнаружить изменение длины волны рассеянного излучения (комптоновское смещение) в первом порядке, если постоянная кристаллической решетки $d = 1 \text{ \AA}$?

1.41. В рентгеновском спектрографе, работающем по методу интерференционного отражения Брэгга–Вульфа, применяется кристаллическая пластинка толщиной D . При какой минимальной толщине этой пластинки можно обнаружить комптоновское смещение при рассеянии фотонов под углом $\theta = 90^\circ$ к первоначальному направлению их движения? Длина волны исходного рентгеновского излучения $\lambda = 0,07 \text{ нм}$. Рассеянное излучение падает на кристалл спектрографа под углом скольжения $\varphi = 30^\circ$.

1.42* Показать, что в вакууме рождение пары e^+e^- γ -квантами невозможно.

1.43. При взаимодействии с веществом высоконергетичный фотон ($\mathcal{E} > 2m_e c^2$, где m_e — масса электрона) может родить электрон–позитронную пару. Показать, что этот процесс невозможен для фотона, испытавшего рассеяние строго назад (на угол 180°) при комптоновском эффекте на неподвижном электроне.

1.44. Найти максимальный угол θ_{\max} рассеяния γ -квантов при комптон-эффекте на неподвижных электронах, вне которого рассеянный квант не может родить электрон–позитронную пару при последующем взаимодействии с веществом. Рождение электрон–позитронной пары возможно, если энергия γ -кванта превышает $2m_e c^2$ (m_e — масса электрона).

1.45. При трехфотонной аннигиляции ортопозитрония оказалось, что один из фотонов имеет энергию $\mathcal{E}_1 = (1/2)\mathcal{E}_0$, а другой — $\mathcal{E}_2 = (2/3)\mathcal{E}_0$ (\mathcal{E}_0 — энергия покоя электрона). Найти углы θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} между направлениями вылета фотонов. Считать, что ортопозитроний покоялся.

Указание. Ортопозитроний представляет собой атомную систему, состоящую из электрона и позитрона, спины которых направлены в одну сторону.

1.46. При трехфотонной аннигиляции ортопозитрония оказывается, что углы между направлениями вылета фотонов $\theta_{12} = 120^\circ$ и $\theta_{13} = 150^\circ$. Найти энергию фотонов. Считать, что ортопозитроний вначале покоился.

Указание. См. указание к предыдущей задаче.

1.47* Показать, что представление о фотонах позволяет получить формулу для продольного доплер-эффекта из преобразования Лоренца для энергии.

1.48. Возбужденное ядро с энергией возбуждения $\Delta\mathcal{E} = 1 \text{ МэВ}$ с $A = 100$ движется с кинетической энергией $T = 100 \text{ эВ}$ и испускает гамма-квант. Под каким углом к направлению движения ядра сдвиг γ -кванта по энергии будет равен нулю?

1.49. Рассматривая процесс рождения фотона с энергией $\hbar\omega$ при прохождении в веществе с показателем преломления n релятивистской частицы массой m со скоростью v (эффект Вавилова–Черенкова), показать, что обычно приводимое условие возможности этого процесса $v > v_\phi = c/n$ справедливо только при определенном ограничении на отношение Λ/λ (Λ — комптоновская длина волны частицы, λ — длина волны фотона). Найти явное выражение этого ограничения в зависимости от релятивистского фактора γ и n .

1.50. По современным представлениям в спектре солнечных нейтрино должна существовать достаточно интенсивная монохроматическая линия с энергией $\mathcal{E}_v = 0,86 \text{ МэВ}$, что обусловлено идущей на Солнце реакцией ${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$. Для регистрации этих нейтрино был создан детектор BOREXINO с жидким сцинтиллятором, в котором регистрируются электроны по реакции рассеяния (ν, e^-) . Какова максимальная кинетическая энергия регистрируемых электронов?

1.51* Гамма-кванты с энергией $\mathcal{E} = 661 \text{ кэВ}$ от источника ${}^{117}\text{Cs}$ рассеиваются в воде. Каково должно быть относительное энергетическое разрешение $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ гамма-спектрометра, чтобы можно было по 90° -рассеянию гамма-квантов обнаружить примесь тяжелой воды D_2O ?

1.52* В системе глобального позиционирования (GPS) используется высокоточный цезиевый генератор, установленный на спутнике. Определить высоту полета спутника, если при прохождении над приемником на Земле регистрируемая частота совпадает с частотой генератора. Учесть, что энергии квантовых уровней любой системы зависят от гравитационного потенциала в месте нахождения системы. Вращение Земли не учитывать. (См. также задачу 1.4.)

1.53. Фотон с энергией $\epsilon = 0,511 \text{ МэВ}$ рассеивается на покоящемся электроне. При каком угле рассеяния составляющая импульса электрона, перпендикулярная первоначальному импульсу фотона, будет максимальной?

1.54. Межзвездная среда состоит в основном из нейтрального водорода с концентрацией $n \sim 10^3 \text{ см}^{-3}$. Фотоны с энергией $\mathcal{E}_0 = 40 \text{ кэВ}$ из источников рентгеновского излучения, попадая в межзвездную среду, теряют свою энергию за счет комптоновского рассеяния, сечение которого можно принять равным $\sigma = 0,665 \text{ бн}$ (томсоновское сечение) и не зависящим от частоты. Оценить, за какое время такие фотоны охладились бы до энергии $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0/10$. Рассеяние на все углы считать равновероятным.

1.55. Гамма-кванты с энергией $\mathcal{E} = 10 \text{ МэВ}$ рождают электрон-позитронные пары в мишенях из $^{10}_5\text{B}$. Найти максимальную энергию, приобретаемую ядрами бора в таком процессе.

§ 2. Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей

2.1. При каких кинетических энергиях электрона и протона их длины волн де Бройля близки к размеру протона $r_p \approx 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$?

2.2. Определить кинетическую энергию T электрона, при которой его дебройлевская и комптоновская длины волн равны между собой.

2.3. Протон с дебройлевской длиной волны $\lambda = 0,001 \text{ нм}$ упруго рассеялся под углом $\pi/2$ на первоначально покоявшейся α -частице. Определить дебройлевскую длину волны λ' рассеянного протона.

2.4.* В опытах по распространению радиоволн с длиной волны $\lambda = 300 \text{ м}$ было установлено, что скорость u их распространения в вакууме совпадает со скоростью света c с точностью до 0,05%. Оценить на основе этих результатов верхнюю границу массы фотона.

2.5. В опытах при измерении расстояния между Землей и Луной ($L = 3,8 \cdot 10^5 \text{ км}$) локацией ее поверхности оказалось, что результаты в оптическом и радиодиапазоне ($\lambda_1 = 20 \text{ см}$) не совпадают. Отличие в результатах измерений объяснялось попаданием излучения в разные точки лунной поверхности, которые могли отличаться по высоте на $\Delta L = \pm 100 \text{ м}$. С другой стороны, этот результат можно интерпретировать как результат отражения фотона с ненулевой массой от ровной поверхности. Принимая это, оценить возможную верхнюю границу массы фотона m_γ (в эВ). (См. также задачу 12.234.)

2.6. Найти выражение для показателя преломления n электронных волн через работу выхода $A_0 = eV_0$ (V_0 — внутренний потенциал кристалла).

2.7. Показать, что при преломлении электронной волны соблюдается закон преломления $\sin\varphi/\sin\varphi' = n$.

Указание. При проникновении в кристалл меняется лишь нормальная компонента скорости электрона.

2.8. Как нужно изменить формулу Брэгга–Бульфа, чтобы учесть преломление волн на поверхности кристалла? Считать, что отражающая плоскость параллельна поверхности кристалла.

2.9. Пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $V = 150 \text{ В}$, падает на поверхность серебра, внутренний потенциал ко-

торого $V_0 = 15$ В. Найти показатель преломления электронных волн в серебре.

2.10* Электроны с кинетической энергией $T = 100$ эВ падают под углом $\varphi = 30^\circ$ к нормали на систему, состоящую из двух параллельных сеток, между которыми создана разность потенциалов $V_1 = 36$ В (рис. 3). Полагая, что потенциал нижней сетки выше, чем верхней, найти относительный показатель преломления n сред, расположенных по обе стороны от сеток. При какой разности потенциалов V_2 произойдет полное отражение электронов от второй сетки?

2.11. Пучок электронов падает перпендикулярно на поликристаллическую пластинку P из хлористого натрия, постоянная решетки которого $a = 0,56$ нм. В результате брэгговского рассеяния пучка на фотопластинке Φ , расположенной на расстоянии $L = 25$ см от пластины P , возникают концентрические дифракционные кольца (рис. 4). Определить энергию электронов, зная, что радиус первого кольца равен $R = 0,5$ см.

2.12* На рис. 5 приведена кривая, полученная в опытах Дэвиссона и Джермера по рассеянию электронов от монокристалла никеля, падающих под углом скольжения 80° .

По оси абсцисс отложено значение \sqrt{V} , где V — энергия электронов в вольтах, по оси ординат — относительная интенсивность рассеянных электронов. При больших порядках отражения t максимумы эквидистанты (расстояние между ними $3,06 \text{ B}^{1/2}$), а при малых эта закономерность, показанная стрелками, нарушается. Оценить немонохроматичность используемых электронов и показатель преломления никеля для волны де Броиля электронов, соответствующих 3-му, 4-му и 5-му максимумам, которые наблюдаются при \sqrt{V} , равном соответственно $8,16$, $11,42$ и $14,68 \text{ B}^{1/2}$. Найти межплоскостное расстояние d никеля.

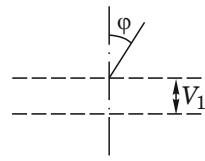


Рис. 3

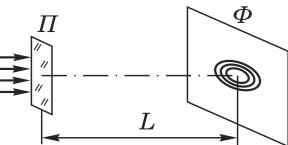


Рис. 4

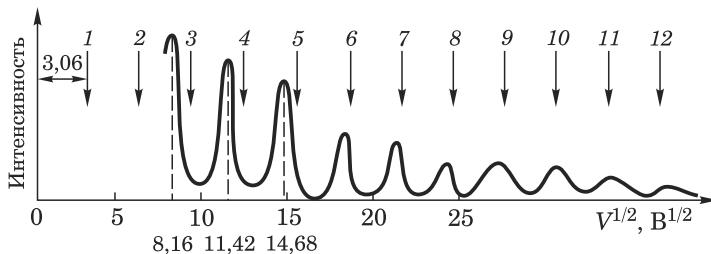


Рис. 5

2.13. Параллельный пучок моноэнергетических нерелятивистских нейтронов, движущихся со скоростью v , падает на плоскую поверх-

ность кристалла под углом скольжения θ_0 и испытывает на ней брэгговское отражение n -го порядка. Кристалл приводят в движение с постоянной скоростью и в направлении нормали к отражающей плоскости (рис. 6). Под каким углом θ к отражающей плоскости надо направить пучок таких же нейтронов, чтобы наблюдалось брэгговское отражение их от движущегося кристалла в прежнем порядке n ? При какой скорости u такое отражение возможно?

2.14. При пропускании пучка нейтронов от ядерного реактора через блок поликристаллического графита все нейтроны с длинами волн де Броиля короче $\lambda = 0,67$ нм испытывают интерференционное

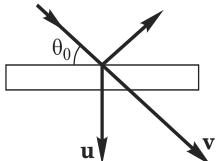


Рис. 6



Рис. 7

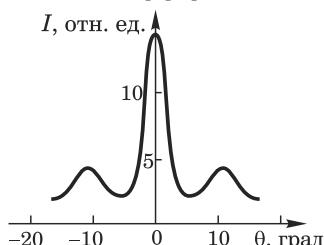


Рис. 8

отражение Брэгга–Вульфа. Проходят через блок только медленные, так называемые холодные нейтроны. Определить максимальную температуру, соответствующую самым коротким волнам де Броиля нейтронов, пропускаемым графитом, а также вычислить постоянную d решетки графита.

2.15* Чтобы получить пучок нейтронов, обладающих заданной энергией $\mathcal{E} = 1$ эВ, используют брэгговское отражение первого порядка от кристалла LiF, для которого расстояние между плоскостями кристаллической решетки $d = 2,32$ Å (рис. 7). На кристалл падает пучок нейтронов с различными энергиями. Оценить разброс нейтронов по энергиям $\Delta\mathcal{E}$ в отраженном пучке, если угловая ширина этого пучка $\Delta\varphi = 0,1^\circ$. Какую толщину кристалла D следует выбрать в этом эксперименте? Кристалл вырезан так, что отражающие плоскости параллельны поверхности кристалла.

2.16* На рис. 8 представлены результаты опыта Штерна и Эстермана (1930 г.) по дифракции молекул водорода на кристаллических плоскостях решетки хлористого лития, отстоящих друг от друга на расстояние $d = 1,65$ Å. В опыте использовались молекулы, которые вылетали из окошка печи и, пройдя отверстие коллиматора, падали узким пучком на поверхность кристалла под углом скольжения θ к рассеивающей плоскости кристалла. Определить, пользуясь рис. 8, температуру T печи, считая распределение молекул по скоростям в пучке максвелловским.

2.17. В одном из способов монохроматизации медленных нейтронов применяются два диска из кадмия (кадмий практически не пропускает медленные нейтроны), насаженные на общую ось (рис. 9).

На периферии дисков на одинаковых расстояниях R от оси сделаны два малых круглых отверстия диаметром a . Отверстия повернуты относительно друг друга на угол φ вокруг оси прибора, и в этом положении диски хорошо закреплены на оси. Диски равномерно вращаются вокруг той же оси с угловой скоростью Ω . Определить длину

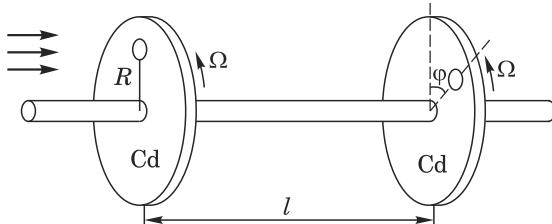


Рис. 9

волны де Броиля λ , а также степень монохроматичности нейтронов, пропускаемых таким монохроматором, если расстояние между дисками равно l . Произвести численный расчет для $l = 1$ м, $R = 10$ см, $\Omega = 300$ рад/с, $\varphi = 4^\circ$, $a = 5$ мм.

2.18. Один из способов монохроматизации медленных нейтронов состоит в следующем: в цилиндре радиусом $R = 10$ см и длиной $l = 1$ м делается винтовой паз шириной $b = 1$ см с поворотом на угол $\varphi = 30^\circ$ (рис. 10). Цилиндр вращается с частотой $n = 3000$ об/мин.

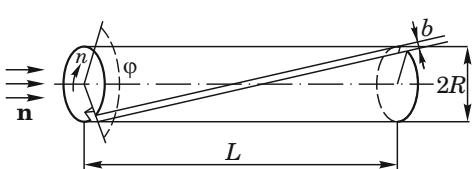


Рис. 10

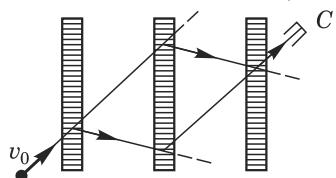


Рис. 11

Определить длину волны λ нейтронов, пропускаемых таким монохроматором, и оценить степень их монохроматизации $\Delta\lambda/\lambda$. Пучок нейтронов направлен вдоль оси цилиндра. Оценить оптимальную ширину паза, при которой достигается максимальная монохроматичность пучка.

2.19. Нейтроны со скоростью $v_0 = 5 \cdot 10^5$ см/с падают на брэгговский интерферометр, состоящий из трех тонких монокристаллических пластинок, вырезанных перпендикулярно главным кристаллическим плоскостям. На каждой из пластинок волна де Брояля разделяется на прошедшую и отраженную (рис. 11). Результат интерференции фиксируется счетчиком нейтронов C , скорость счета которого зависит от разности фаз в плечах интерферометра. В одном из плеч с помощью электродов (не показанных на рис. 11) на участке длиной $l = 1$ см создается электрическое поле с разностью потенциалов $V = 300$ В. Если бы у нейтрона был электрический заряд, то включ-

чение поля изменило бы скорость счета счетчика C . Найти, какой предельный заряд q нейтрона может быть обнаружен в таком опыте, если чувствительность интерферометра к сдвигу фаз составляет $\Delta\varphi = 0,1$ рад.

2.20* Нейтроны со скоростью $v_0 = 5 \cdot 10^5$ см/с падают на брэговский интерферометр, описанный в задаче 2.19. В одном из плеч интерферометра с помощью электродов (не показанных на рис. 11) на участке длиной $l = 1$ см создается электрическое поле $E = 3 \cdot 10^4$ В/см. Если бы у нейтрона был электрический дипольный момент d , то включение поля повлияло бы на скорость счета счетчика. Найти, какая предельная величина d может быть обнаружена в таком опыте, если поле E параллельно предполагаемому направлению дипольного момента, а чувствительность интерферометра к сдвигу фаз $\Delta\varphi$ составляет 0,1 рад.

2.21* Коллимированный пучок электронов с кинетической энергией $T = 1,65$ кэВ пропускается через резонатор лазера, работающего на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм. При некоторых углах падения пучка относительно оси резонатора, близких к прямому, может наблюдаться брэговское рассеяние электронов на стоячей электромагнитной волне (эффект Капицы–Дираха). Оценить возможные углы отклонения электронов.

2.22* Исходя из требования, чтобы групповая скорость u волн де Броиля равнялась скорости движения v частицы, и пользуясь формулой Рэлея, связывающей фазовую и групповую скорости, определить фазовую скорость w этих волн, а также найти связь между энергией частицы \mathcal{E} и частотой v .

2.23* Движение электрона описывается плоской монохроматической волной де Броиля. Электрон в таком состоянии обладает вполне определенным импульсом, но его координата совершенно не определена. Для определения x -координаты электрона на пути волны перпендикулярно к направлению ее распространения ставится непрозрачный экран с щелью. Пусть координатная плоскость XY расположена в плоскости экрана, причем ось X направлена перпендикулярно к щели. Показать, что в результате дифракции на щели возникает состояние электрона, в котором неопределенности координаты электрона x и импульса p_x удовлетворяют соотношению Гейзенberга.

2.24* В мысленном опыте Гейзенберга положение электрона определяется с помощью микроскопа при освещении электрона светом. Показать, что при таком методе измерения координата x и импульс p_x электрона не могут быть определены более точно, чем требует соотношение неопределенностей Гейзенберга.

2.25* Скорость макроскопического тела измеряется по доплеровскому изменению частоты световой волны при отражении от этого тела (зеркала). Показать, что соответствующие неточности измерений импульса и положения тела удовлетворяют соотношению неопределенностей Гейзенберга.

2.26. Какова должна быть кинетическая энергия T электронов (протонов) для исследования распределения заряда и ядерной материи внутри ядра с точностью $l \sim 1$ фм (10^{-13} см), и структур с линейными размерами $l \sim 10^{-4}$ фм, что соответствует радиусу слабого взаимодействия?

2.27. Из ускорителя через щель выводится короткий сгусток протонов с энергией $\mathcal{E} = 100$ кэВ. Оценить минимально достижимую ширину пучка протонов на расстоянии $L = 100$ м от выходной щели.

2.28. Пучок протонов из ускорителя выводится через отверстие диаметром d . Используя соотношение неопределенностей, найти минимальный размер пучка на экране, расположенному на расстоянии $L = 1$ м от отверстия, если радиус орбиты в ускорителе $r = 10$ см, а величина магнитного поля в момент вывода $B = 300$ Гс.

2.29. Оценить минимальный диаметр d пятна, создаваемого на экране пучком электронов, если время пролета от коллиматора до экрана равно 10^{-8} с.

2.30. Оценить минимально достижимый диаметр d пятна, которое можно создать на детекторе пучком атомов серебра, испускаемых печью с температурой $t = 1200^\circ\text{C}$. Расстояние от выходной щели печи до детектора равно $L = 1$ м. Расчет произвести: 1) исходя из волновой природы частиц в приближении Фраунгофера; 2) исходя из соотношения неопределенностей. Убедиться в эквивалентности обоих подходов.

2.31* Предполагая, что ядерные силы между нуклонами обусловлены обменом квантами ядерного поля — виртуальными пионами, оценить радиус Δr действия ядерных сил, если известно, что энергия покоя пионов $m_\pi c^2 \approx 140$ МэВ.

2.32. Оценить кинетическую энергию \mathcal{E} электрона, локализованного в области пространства, радиус которого $r \sim 10^{-8}$ см (атом) и $r \sim 10^{-12}$ см (атомное ядро).

2.33* Оценить, при какой напряженности E электрического поля лазерного излучения может произойти пробой вакуума, т. е. разрыв виртуальных электрон-позитронных пар.

2.34. Определить теоретическое минимально разрешимое расстояние d электронным микроскопом при ускоряющем напряжении $V = 100$ кВ и числовой апертуре $A = 0,1$.

2.35. Мезоатомы водорода (связанные состояния протона и мюона) исследуются с помощью электронного микроскопа с ускоряющим напряжением $V = 3$ МВ. При какой числовой апертуре микроскопа можно определить размер мезоатома? Энергия покоя электрона $\mathcal{E}_0 = 0,511$ МэВ, масса мюона $m_\mu \approx 200 m_e$.

2.36. В новых сверхпроводящих материалах расстояние d между соседними атомами около 4\AA . Определить, какую апертуру должен иметь электронный микроскоп с ускоряющим напряжением $V = 50$ кВ, чтобы можно было получить изображение кристаллической решетки этих материалов.

2.37. У оптического микроскопа угловая апертура порядка 1, а у электронного она равна 10^{-4} . При каком напряжении, ускоряющем электроны, разрешающая сила этих приборов будет одинакова?

2.38. Электрон притягивается к поверхности жидкого гелия электростатическими силами изображения, потенциальная энергия которых, как известно, равна

$$U(x) = -\frac{e^2}{4x} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1},$$

где x — кратчайшее расстояние от электрона до поверхности, e — заряд электрона, $\epsilon = 1,057$ — диэлектрическая проницаемость гелия (рис. 12). В то же время медленный электрон не может проникнуть внутрь гелия из-за отталкивания (так называемое отрицательное сродство гелия к электрону). Поэтому можно считать, что на поверхности ($x = 0$) потенциальная энергия испытывает бесконечный

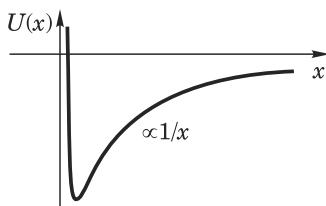


Рис. 12

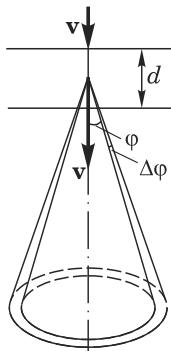


Рис. 13

скачок и электрон оказывается в потенциальной яме (рис. 12). Пользуясь этой моделью и соотношением неопределенностей, оценить по порядку величины среднее расстояние $\langle x \rangle$ электрона от поверхности гелия в основном состоянии и энергию связи $E_{\text{св}}$ электрона вблизи поверхности гелия.

2.39* Оценить энергию основного состояния частицы массой m и характерный размер области локализации частицы в потенциальном поле, равном

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ kx, & x > 0. \end{cases}$$

Сравнить с задачами 3.5 и 3.6.

2.40* Электрон движется со скоростью v в плоскопараллельном слое вещества толщиной d с показателем преломления n перпендикулярно к ограничивающим плоскостям (рис. 13). Скорость электрона $v > c/n$, так что наблюдается излучение Вавилова–Черенкова. Определить угловую расходимость $\Delta\phi$ излучения, обусловленную конечной толщиной слоя.

2.41* Показать, что представление о классическом движении электрона в атоме водорода по первой боровской орбите противоречит соотношению неопределенностей Гейзенберга, т. е. неопределенность положения электрона порядка радиуса его орбиты.

2.42. Показать, что в водородоподобных атомах на круговой стационарной боровской орбите укладывается целое число длин волн де Бройля. Определить длину волны де Бройля на круговой орбите с главным квантовым числом n .

2.43* Оценить на основании соотношения неопределенностей радиус атома водорода в основном состоянии и энергию связи электрона в том же состоянии. Определить на основании таких же оценок размер двухатомной молекулы и энергию ее основного состояния, рассматривая молекулу как одномерный гармонический осциллятор с собственной частотой ω_0 и приведенной массой μ .

2.44* Действие силы на свободно движущуюся частицу массой m можно обнаружить, наблюдая изменение ее координат во времени. Оценить в соответствии с квантово-механическими законами, какую минимальную силу, действующую по направлению движения частицы, можно обнаружить таким способом за время наблюдения τ .

2.45* Силу можно измерить по изменению энергии пробного тела массой m до и после действия силы. Оценить в соответствии с квантово-механическими законами, какую минимальную силу, действующую по направлению движения частицы, можно обнаружить таким способом за время наблюдения τ , если начальная энергия пробного тела, равная \mathcal{E}_0 , много больше приращения энергии.

2.46* Желание измерить координату x электрона с хорошей точностью путем уменьшения длины волны λ измерительного фотона, т. е. локализация его в размере λ , приводит к тому, что появляется вероятность рождения виртуальных $(e^- e^+)$ -пар. В силу неразличимости электронов мы не можем отличить исходный электрон от электрона рожденной пары. Оценить, к какой погрешности координаты Δx , которая практически определяет размер электрона, это приводит.

2.47. Соотношение неопределенностей между энергией и временем имеет два различных содержания: одно из них относится к нестационарным состояниям — оно определяет естественную ширину энергетического распределения излучения с энергией \mathcal{E} , проходящего за время τ , а другое относится к измерению — оно определяет время τ , необходимое для измерения энергии \mathcal{E} с заданной точностью $\Delta \mathcal{E}$. Используя обе эти стороны соотношения неопределенностей, оценить минимальное время $t_{\text{изм}}$, необходимое для определения того, находится ли ядро ^{57}Fe в первом возбужденном состоянии с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 14,4 \text{ кэВ}$, или оно уже претерпело γ -распад и находится в основном состоянии. Какова будет ширина измеряемого при этом энергетического распределения γ -лучей.

2.48* Рассмотрим опыт по дифракции электронов на двух щелях в незакрепленном экране. Определив место попадания частицы (положение максимума 1-го порядка) и измерив x -компоненту импульса

отдачи экрана со щелями Δp_x (рис. 14), можно, казалось бы, определить, через какую щель проходит электрон. Этот мысленный опыт Эйнштейн предлагал Бору в качестве аргумента против соотношения

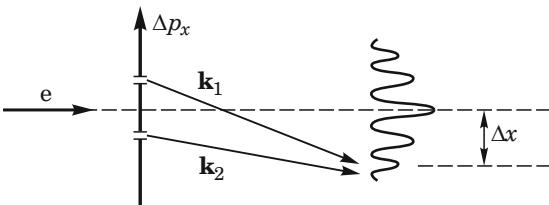


Рис. 14

неопределенностей. Показать, что измерение импульса отдачи экрана с необходимой точностью приводит к неопределенности в импульсе рассеянного электрона и тем самым к размытию интерференционной картины в полном соответствии с соотношением неопределенностей.

2.49* Согласно принципу дополнительности Бора невозможно одновременное проявление микроскопическим объектом волновых и корпускулярных свойств. В 1995 г. в Массачусетском технологическом институте (США) был осуществлен эксперимент, направленный на проверку основ квантовой механики. Идея такого эксперимента обсуждалась Фейнманом в своих лекциях. Как показано на рис. 15,

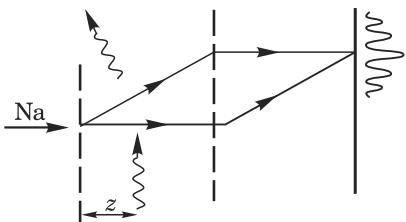


Рис. 15

пучок монохроматических атомов Na ($v = 1400 \text{ м/с}$) направлялся на дифракционную решетку с периодом $a = 200 \text{ нм}$, где он расщеплялся на прямой пучок и продифрактировавший в первый порядок. Затем второй решеткой пучки сводились, образовывалась интерференционная картина, контраст которой измерялся. На расстоянии z от первой решетки атомы Na возбужда-

лись лазером ($\lambda_\phi = 6000 \text{ \AA}$). При возвращении в исходное состояние атомы испускали фотоны, которые в принципе позволяют определить траекторию атома. На каких расстояниях z согласно принципу дополнительности происходило размытие интерференционной картины?

2.50. Пучок немонохроматических нейтронов с длиной волны от 2 до 6 \AA с концентрацией на единицу длины и на единицу интервала длин волн $n(v) = n_0/v$ (v — скорость нейтронов), падает на толстый кусок поликристаллического берилля, состоящего из большого числа ориентированных в различных направлениях маленьких кристаллов. Считая рассеяние нейтронов в образце однократным, вычислить силу, действующую на бериллий, если известно, что у Be межплоскостное расстояние $d \approx 2 \text{ \AA}$, а $n_0 = 10^6 \text{ см}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$?

2.51* В октябре 1999 г. в Венском университете был осуществлен эксперимент по дифракции очень массивных частиц — фуллеренов —

молекул углерода C_{60} . Пучок молекул направлялся на дифракционную решетку с периодом $d = 100$ нм, а затем на расстоянии $l = 1,25$ м от решетки измерялось пространственное распределение прошедших частиц. Как видно из приведенных на рис. 16 результатов эксперимента, кроме прямого пучка наблюдались еще два симметрично расположенных максимума на расстояниях $\Delta = \pm 25$ мкм. Какова была скорость фуллеренов в пучке?

2.52. Кластеры атомов или молекул получаются при расширении и, тем самым, охлаждении вылетающих из сопла монохроматических частиц.

В одном из экспериментов с кластерами гелия в 1994 г. в Геттингеме (Германия) на пути пучка была установлена дифракционная решетка с периодом $d = 200$ нм, и затем с помощью масс-спектрометра анализировался спектр частиц под различными углами в первом порядке

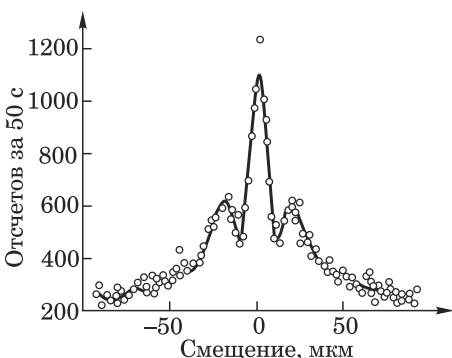


Рис. 16

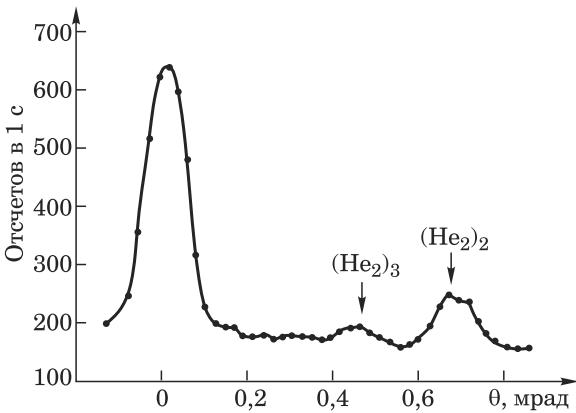


Рис. 17

интерференции (рис. 17). Определить скорость гелиевых кластеров: димеров, состоящих из четырех атомов гелия и обозначенных на рис. 17 как $(He_2)_2$ ($\theta = 0,69$ мрад), и тримеров, состоящих из шести атомов гелия $(He_2)_3$ ($\theta = 0,46$ мрад).

2.53. Оценить неопределенности отклонения от вертикали $\Delta\phi$ и момента импульса ΔL математического маятника, совершающего малые колебания в поле силы тяжести. Масса маятника равна m , длина — l .

2.54* Для гармонического осциллятора можно определить время как «движение» фазы осциллятора: $t = \varphi/\omega$. Используя соотношение неопределенностей энергия–время, найти связь между флуктуациями ΔN среднего числа N когерентных осцилляторов в системе и флуктуацией $\Delta\varphi$ их фазы φ .

2.55. В 1999 г. Дж. Стенгер с коллегами в МТИ (США) поместили атомы натрия при очень низкой температуре в поле специальной конфигурации, являющееся для атомов ловушкой размером $x_0 = 7$ мкм. В этих условиях образовывался так называемый бозе-энштейновский конденсат, когда все атомы обладают наименьшей возможной энергией. Затем ловушка «открывалась», и конденсатное

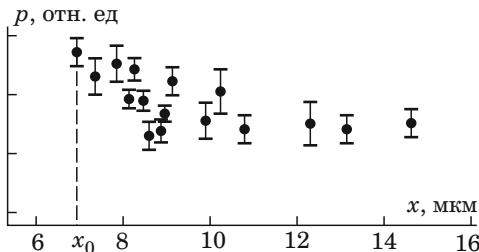


Рис. 18

облако атомов начинало расширяться. Как показано на рис. 18, импульс атомов натрия уменьшается с увеличением размера облака x . Оценить, за какое время облако расширилось вдвое, считая процесс расширения адиабатическим.

2.56. Предположим, что в схеме Юнга ставится эксперимент по интерференции волн де Броиля наночастиц. Диаметр частиц $a = 0,1$ мкм, плотность $\rho = 1$ г/см³, скорость $v = 1$ м/с, расстояние между центрами щелей $d = 2a$. Оценить необходимое расстояние L от щелей до экрана. Можно ли уменьшить время пролета от щелей до экрана за счет увеличения скорости частиц?

§ 3. Уравнение Шредингера. Квантование. Потенциальные барьеры

3.1* Найти плотность потока вероятности для: а) плоской волны $\psi = \exp\left(i\frac{p_z}{\hbar}z\right) = \exp(ikz)$; б) сферической расходящейся волны $\psi = \frac{1}{kr} \exp(ikr)$; в) суммы расходящейся и сходящейся волн $\psi = \frac{1}{2kr}(se^{ikr} - e^{-ikr})$.

3.2. Волновая функция частицы массой m , совершающей одномерное движение, имеет вид $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$. Найти потенциал $U(x)$, в котором двигается частица, и ее энергию \mathcal{E} , если известно, что при $x = 0 \quad U(x) = 0$.

3.3. Волновая функция частицы массой m , совершающей одномерное движение в поле с потенциалом $U(x)$, есть

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax^2 \exp(-x/a) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Оценить с помощью соотношения неопределенностей среднюю кинетическую энергию $\langle T \rangle$ частицы и сравнить с результатом точного расчета. Найти $U(x)$ при $x > 0$ и полную энергию частицы, если известно, что $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

3.4. Волновая функция частицы массой m , совершающей одномерное движение в поле с потенциалом $U(x)$, есть

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax \exp(-x/a) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Оценить с помощью соотношения неопределенностей среднюю кинетическую энергию $\langle T \rangle$ частицы и сравнить с результатом точного расчета. Найти среднее значение координаты $\langle x \rangle$, а также $U(x)$ при $x > 0$ и полную энергию \mathcal{E} , если известно, что $U(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

3.5. Частица массой m находится в одномерном потенциале

$$\psi(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ kx & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Оценить энергию основного состояния частицы в этом потенциале, используя в качестве волновой функции $\psi = x \exp(-ax)$. В качестве оценки взять минимум среднего значения полной энергии частицы. Сравнить с задачей 2.39.

3.6. Используя правило квантования Бора–Зоммерфельда, найти закон квантования энергии частицы массой m при больших значениях главного квантового числа n (в квазиклассическом приближении) в одномерном потенциале

$$\psi(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ kx & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Указание. Правило квантования Бора–Зоммерфельда

$$\oint \mathbf{p} d\mathbf{l} = nh.$$

3.7. В кулоновском поле простейшим сферически симметричным решением уравнения Шредингера является волновая функция $\psi = A \exp(-ar)$. Какой энергии (в эВ) соответствует это состояние для электрона в кулоновском поле ядра с зарядом $Z = 10$? Чему равна a ?

3.8.* Взаимодействие между нуклонами в дейтроне может быть описано потенциалом Юкавы $U(r) = -U_0 \frac{\exp(-r/a)}{r/a}$, где r — относительное расстояние, a — радиус взаимодействия ядерных сил, $U_0 = 40$ МэВ. Если аппроксимировать волновую функцию основного состояния как водородоподобную $\psi(r, a) = \sqrt{\frac{a^3}{8\pi a^3}} \exp\left(-\frac{ar}{2a}\right)$, где a — вариационный параметр, при котором достигается минимальная энергия основного состояния, то энергия связи оказывается равной $E_0 = -1,08$ МэВ. Определить величину a .

Указание. Уравнение $\frac{x^3(x-1)}{1+x} = 0,108$ имеет корень $x = 1,5$.

3.9. Взаимодействие между нуклонами в дейтроне может быть описано потенциалом $U(r) = -U_0 \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, где $U_0 = 32,7$ МэВ,

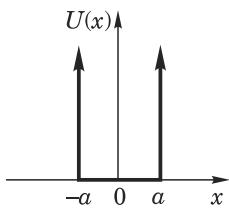


Рис. 19

$a = 2,2$ фм, r — расстояние между нуклонами. Аппроксимируя волновую функцию основного состояния водородоподобной $\psi(r, a) = \sqrt{\frac{a^3}{8\pi a^3}} \exp\left(-\frac{ar}{2a}\right)$, где a — параметр, при котором достигается минимум энергии основного состояния, найти энергию связи дейтрона.

Указание. Уравнение $\frac{(1+x)^4}{x} = 22,6$ имеет корень $x = 1,35$.

3.10.* Волновая функция трехмерного изотропного осциллятора, характеризуемого классической частотой ω и приведенной массой μ , имеет вид $\psi = A(1+\alpha r^2)e^{-\beta r^2}$, где A , α и β — некоторые константы. Определить величину констант α и β , энергию этого состояния и главное квантовое число. (См. также задачу 4.10.)

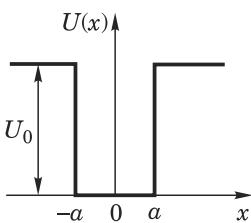


Рис. 20

3.11. Найти волновую функцию и уровни энергии стационарных состояний частицы массой m , локализованной в одномерной потенциальной яме прямоугольной формы с бесконечно высокими стенками (рис. 19). Ширина ямы равна $2a$.

3.12.* Найти волновую функцию и уровни энергии стационарных состояний частицы массой m , локализованной в симметричной одномерной потенциальной яме прямоугольной формы, глубина которой равна U_0 , а ширина $2a$ (рис. 20).

3.13. В одномерной потенциальной яме шириной b с бесконечными стенками находятся N электронов. Определить минимальное зна-

чение полной энергии \mathcal{E}_{\min} и силу F давления электронов на стенки ямы. Взаимодействием нейтронов пренебречь.

3.14. Поток свободно распространяющихся нейтронов падает на непроницаемую стенку толщиной L , в которой имеется канал прямоугольного поперечного сечения с высотой $d = 10^{-3}$ см и шириной $l \gg d$. Длина канала $L \gg l$ (рис. 21). При каких значениях скорости v нейтронов в падающем пучке нейтроны могут пройти сквозь канал? Чему равна минимальная скорость v_{\min} в случае квадратного сечения канала $d \times d$?

3.15. Поток нейтронов, летящих со скоростью $V_0 = 25$ см/с, падает на широкую щель с абсолютно отражающими стенками (рис. 22). Длина щели $l = 1$ см, высота $d = 10^{-4}$ см. Сколько времени нейtron будет находиться внутри щели, если он в нее попадет?

3.16: Частица локализована в трехмерной прямоугольной потенциальной яме (рис. 23). Это значит, что потенциальная энергия ча-

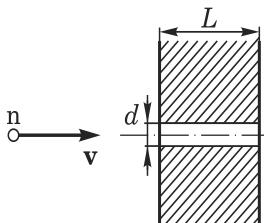


Рис. 21

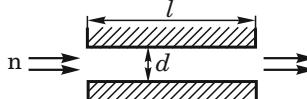


Рис. 22

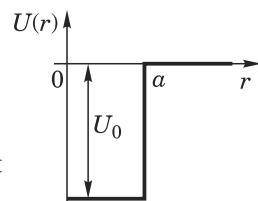


Рис. 23

стицы сферически симметрична относительно силового центра O , т. е. является функцией только расстояния r от силового центра:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0 & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Найти волновые функции и уровни энергии связанных стационарных состояний частицы, зависящие только от расстояния r . (В таких состояниях момент импульса частицы равен нулю.)

3.17. Частица массой m локализована в трехмерной потенциальной яме прямоугольной формы, радиус которой равен a . Определить минимальную глубину ямы U_0 , при которой появится первый уровень энергии. Чему равна энергия частицы \mathcal{E} на этом уровне?

3.18. Дейtron — это ядро дейтерия, состоящее из протона и нейтрона. Энергия связи дейтрана, измеренная экспериментально, равна $\mathcal{E} = 2,23$ МэВ. Аппроксимируя потенциальную энергию взаимодействия протона с нейтроном с помощью трехмерной прямоугольной потенциальной ямы, определить ее глубину U_0 , при которой возможно такое связанное состояние. Радиус потенциальной ямы $a = 1,6 \cdot 10^{-13}$ см.

3.19. Определить среднее значение квадрата импульса $\langle p^2 \rangle$ и среднее значение квадрата координаты $\langle x^2 \rangle$ частицы массой m , находящейся в одномерной «мелкой» ($U_0 \ll \hbar^2/ma^2$) симметричной потенциальной яме, изображенной на рис. 24. Проверить выполнение соотношения Гейзенберга в форме Вейля $\langle \Delta p_x^2 \rangle \langle \Delta x^2 \rangle \geq \hbar^2/4$.

3.20* Потенциальную энергию взаимодействия $U(z)$ атома гелия с плоской поверхностью твердого тела $z = 0$ можно аппроксимировать прямоугольной ямой некоторой глубины U_0 и шириной $a = 5\text{ \AA}$, причем $U(z = 0) = +\infty$ (рис. 25). Полагая, что волновая функция адсорбированного атома в основном состоянии достигает максимума при $z = 0,99a$, найти среднее значение координаты $\langle z \rangle$ для адсорбированных атомов в основном состоянии.

3.21. Энергия взаимодействия $U(z)$ атома водорода с твердой стенкой аппроксимируется прямоугольной потенциальной ямой глуби-

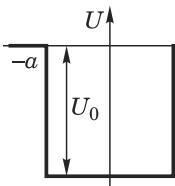


Рис. 24

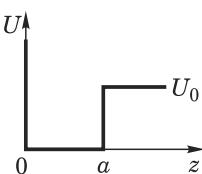


Рис. 25

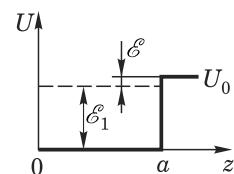


Рис. 26

биной U_0 , шириной $a = 6\text{ \AA}$ и $U(z = 0) = +\infty$ (рис. 26). Энергия адсорбции — это разность наименьших уровней свободного и прилипшего к стенке атома $\mathcal{E} = U_0 - \mathcal{E}_1 = 1\text{ К}$. Найти величину U_0 и среднее значение координаты $\langle z \rangle$ адсорбированных атомов.

Указание: $\varphi \operatorname{tg} \varphi = -1,21$ при $\varphi = 2\pi/3$.

3.22. Электрон находится в одномерной симметричной потенциальной яме размером $2a = 2\text{ \AA}$. Отношение волновой функции основного состояния на границе ямы к ее максимальному значению внутри ямы составляет $a = 1/2$. Найти глубину ямы и энергию ионизации электрона (в эВ).

3.23. Найти глубину ямы и энергию ионизации \mathcal{E} электрона (в эВ), находящегося в основном состоянии в одномерной яме шириной $a = 2\text{ \AA}$ с потенциалом $U_0 = \infty$, $U = -U_0$ при $0 < x < a$ и $U = 0$ при $x > a$, если известно, что отношение волновой функции на границе ямы ($x = a$) к ее максимальному значению в яме равно $\alpha = \sqrt{3}/2$.

3.24* Частица, находящаяся в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, излучает фотон, переходя из состояния с номером $n+1$ в состояние n . Найти связь частоты фотона с периодом колебаний между стенками ямы классической частицы с энергией \mathcal{E}_n .

3.25* Свободно движущаяся частица массой m с энергией \mathcal{E} подходит к границе раздела двух областей I и II, на которой потен-

циальная энергия частицы скачкообразно меняется от постоянного значения U_1 до постоянного значения U_2 (рис. 27). Определить коэффициенты отражения и пропускания частицы на этой границе по амплитуде (r и d) и по энергии (R и D). Исследовать случаи, когда: 1) $\mathcal{E} > U_2$ и 2) $\mathcal{E} < U_2$. Во втором случае определить среднюю глубину проникновения l частицы во вторую среду.

3.26. Электрон, находящийся в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной несколько сантиметров и глубиной несколько электронвольт, поглощает квант света с частотой $v = 1,01v_0$, где v_0 — предельная частота света, при которой электрон может вылететь из ямы. Определить среднее число отражений N от краев ямы, которые испытывает электрон, прежде чем покинуть ее. Считать, что время радиационного перехода электрона в основное состояние много больше времени вылета электрона из ямы.

3.27. Электрон, находящийся в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной $a = 4 \text{ \AA}$ и глубиной $U_0 = 10 \text{ эВ}$ (рис. 28) переведен в возбужденное состояние с энергией $\mathcal{E} \approx 10^{-2} \text{ эВ}$ (нуль

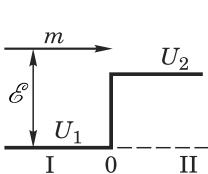


Рис. 27

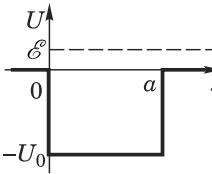


Рис. 28

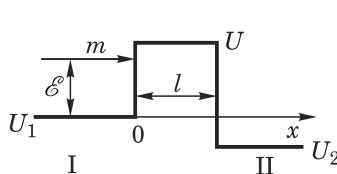


Рис. 29

отсчета энергии — состояние покоя вне ямы). Оценить время жизни возбужденного состояния, считая, что оно ограничивается вылетом электрона из ямы, а не переходом в основное состояние. Считать также, что после выхода из ямы состояние электрона описывается плоской волной, а стационарное состояние в виде суперпозиции падающей и отраженной волн образоваться не успевает.

3.28. Электрон, введенный в жидкий гелий, расталкивает атомы жидкости и образует в ней сферическую вакуумную полость, которая является для электрона потенциальной ямой с практически бесконечно высокой стенкой. Вычислить радиус полости, если поверхностное натяжение жидкого гелия равно 0,35 дин/см, а электрон занимает в полости наименьший квантовый уровень. Внешнее давление считать равным нулю. (См. также задачу 2.38.)

3.29. Пусть в задаче 3.25 частицей является электрон с энергией $\mathcal{E} = 2 \text{ эВ}$, $U_1 = 0$, $U_2 = 5 \text{ эВ}$. Вычислить среднюю глубину его проникновения в область II.

3.30* Частица массой m и энергией \mathcal{E} из области I проходит в область II через одномерный потенциальный барьер (или яму) прямоугольной формы с шириной l (рис. 29). Определить для случаев $\mathcal{E} > U$ и $\mathcal{E} < U$ амплитудные коэффициенты отражения r и пропускания d частицы на этом препятствии, предполагая, что потенциаль-

ные энергии частицы в областях I, II и внутри барьера постоянны и равны соответственно U_1 , U_2 , U .

3.31. В предыдущей задаче $U_1 = U_2$. При каком условии частица не будет отражаться от потенциального барьера (ямы)?

3.32. Найти энергию электрона, при которой он беспрепятственно пройдет над прямоугольным барьером высотой $U = 5$ эВ и шириной $l = 1$ Å.

3.33. В 1920 г. Рамзаэр обнаружил, что в сечении рассеяния σ_s медленных электронов на атомах криптона имеется глубокий минимум, свидетельствующий об увеличении проницаемости атомов при энергии $\mathcal{E} = 0,6$ эВ (рис. 30). Этот эффект обусловлен волновыми свойствами электронов. Считая, что для электрона потенциал атома является одномерной прямоугольной ямой глубиной $U = 2,5$ эВ, оценить радиус атома криптона. (См. также задачу 8.14.)

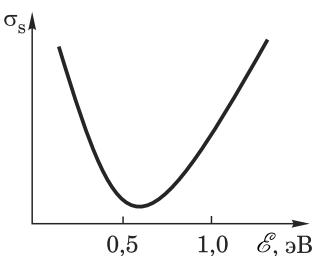


Рис. 30

какое время τ вероятность найти частицу в яме уменьшится в два раза? Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера пренебречь.

3.35. Электрон находится в одномерной потенциальной яме, изображенной на рисунке рис. 32. Энергия частицы равна $\mathcal{E} = 0,9999$ эВ,

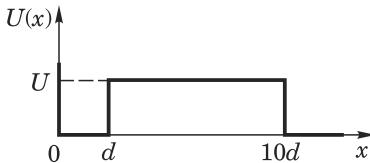


Рис. 31

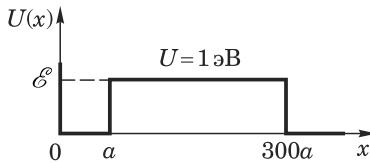


Рис. 32

а высота потенциального барьера $U = 1$ эВ. Найти ширину ямы, если уровень с указанным значением энергии является первым. Оценить время жизни τ частицы в яме. Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера следует пренебречь.

3.36* Вывести для α -распада закон Гейгера–Неттоля, связывающий период полураспада $T_{1/2}$ с энергией \mathcal{E} вылетающих частиц соотношением $\ln T_{1/2} = A + B/\sqrt{\mathcal{E}}$, где A и B – постоянные. Считать, что потенциальный барьер $U(r)$ имеет вертикальную стенку при $r=R$ (радиус ядра) и определяется законом Кулона при $r \geq R$ (рис. 33).

Энергия вылетающей α -частицы $\mathcal{E} \ll U_0$ (высоты барьера). Задачу считать одномерной.

3.37* В сканирующем тунNELьном микроскопе (изобретен Г. Биннингом и Г. Рорером в 1982 г.; Нобелевская премия 1986 г.) регистрируется тунNELьный ток электронов \mathcal{I} через вакуумный зазор между поверхностью проводящего образца и установленной перпендикулярно к ней острой металлической иглой. Оценить, как изменится тунNELьный ток, если игла при своем поступательном движении параллельно поверхности образца пройдет над ступенькой высотой $b = 1\text{ \AA}$. Работы выхода электронов из иглы $A_1 = 4,5\text{ эВ}$ и образца $A_2 = 4,0\text{ эВ}$. На иглу подано напряжение $V = +0,2\text{ В}$ относительно образца.

Указание. Считать, что до приложения напряжения уровни максимальной энергии электронов в материалах иглы и образца совпадают.

3.38. В сканирующем тунNELьном микроскопе регистрируется тунNELьный ток электронов \mathcal{I} через вакуумный зазор между поверхностью проводящего образца и установленной перпендикулярно к ней острой металлической иглой. Работы выхода электронов из иглы $A_1 = 3,0\text{ эВ}$ и образца $A_2 = 4,0\text{ эВ}$. На иглу подано напряжение $V = -0,5\text{ В}$ относительно образца. Оценить, во сколько раз изменится тунNELьный ток, если игла при своем поступательном перемещении параллельно поверхности образца пройдет над участком, работа выхода для которого больше на 15%. При оценках считать, что электроны туннелируют сквозь одномерный потенциальный барьер, а электрическое поле между игрой и образцом является однородным. Величина зазора $b = 10\text{ \AA}$. (См. указание к задаче 3.37.)

3.39. В сканирующем тунNELьном микроскопе регистрируется тунNELьный ток электронов \mathcal{I} через вакуумный зазор между поверхностью проводящего образца и установленной перпендикулярно к ней острой металлической иглой. Для повышения чувствительности микроскопа величина зазора модулируется посредством малых колебаний иглы вдоль ее оси с амплитудой колебаний $a = 0,2\text{ \AA}$. Работы выхода электронов из иглы $A_1 = 3,0\text{ эВ}$ и образца $A_2 = 2,0\text{ эВ}$. На иглу подано напряжение $V = +0,5\text{ В}$ относительно образца. Какова амплитуда колебаний тунNELьного тока $\delta\mathcal{I} = (\mathcal{I}_{\max} - \mathcal{I}_{\min})/2$, если $\mathcal{I}_{\max} = 1\text{ нA}$? При оценках считать, что электроны туннелируют сквозь одномерный прямоугольный потенциальный барьер. Поле между игрой и образцом можно считать однородным. (См. указание к задаче 3.37.)

3.40. В 1988 г. появилось сенсационное сообщение об осуществлении холдного ядерного синтеза дейтерия, растворенного в металлическом палладии. Можно считать, что при этом ядра дейте-

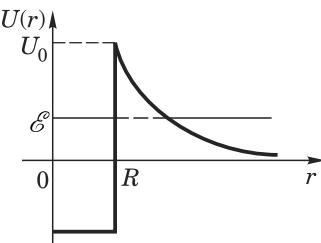


Рис. 33

рия взаимодействуют друг с другом по закону Кулона, если расстояние между ними r удовлетворяет условию $R_1 = 2 \cdot 10^{-13}$ см $< r \leq 5 \cdot 10^{-9}$ см $= R_2$. При большем расстоянии между ядрами энергия электрического отталкивания $U = 0$ за счет экранирования ядер дейтерия электронами проводимости. Определить вероятность реакции синтеза $d + d$ при столкновении дейtronов внутри палладия при комнатной температуре за счет туннельного эффекта. Считать, что реакция синтеза происходит при $r < R_1$.

3.41. Рассчитать коэффициент прозрачности барьера деления тяжелых ядер и выразить его через «квант» $\hbar\omega = \hbar\sqrt{-U''/m}$, соответ-

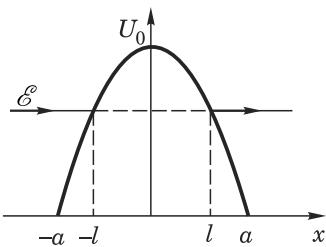


Рис. 34

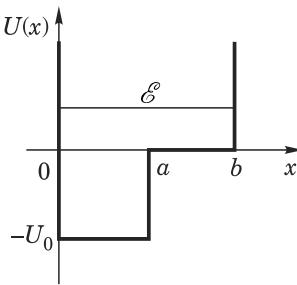


Рис. 35

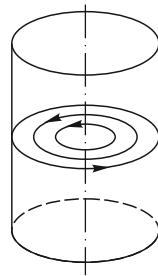


Рис. 36

ствующий кривизне барьера. Для описания формы барьера используется его параболическая аппроксимация

$$U = \begin{cases} U_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a. \end{cases}$$

(рис. 34). Энергия возбуждения ядра равна \mathcal{E} . (См. также задачи 9.41 и 9.42.)

3.42. Частица массой m находится в одномерной потенциальной яме $U(x)$ с непроницаемыми стенками $U(x)|_{x \leq 0} = \infty$ и «колодцем» на дне (рис. 35)

$$U = \begin{cases} -U_0 & \text{при } 0 < x < a, \quad U_0 > 0, \\ 0 & \text{при } a < x < b. \end{cases}$$

Для стационарных состояний с энергией $0 < \mathcal{E} \leq U_0$ определить отношение f максимально возможных плотностей вероятности нахождения частицы при $x < a$ и $a < x < b$. Найти в случае $U_0 \gg \mathcal{E}$ резонансные значения энергии, при которых величина f сильно возрастает.

3.43* При вращении сосуда со сверхтекучим гелием в объеме образуются линейные вихри (рис. 36). Скорость атомов гелия в вихре

K/r , где r — расстояние от оси, K — константа, называемая интенсивностью вихря. Найти минимальное численное значение интенсивности вихря.

3.44. В жидком гелии II при температуре ниже λ -точки могут существовать вихревые нити. Вокруг вихревой нити жидкость движется по окружностям, причем момент количества движения атомов гелия относительно оси вихревой нити подчиняется правилу квантования Бора. Найти поле скоростей вокруг вихревой нити.

3.45. При прохождении нерелятивистской частицы с энергией \mathcal{E} над прямоугольным барьером высотой $U = (3/4)\mathcal{E}$ коэффициент отражения по мощности оказался равным $R = 9/25$. Определить минимально возможную ширину барьера в единицах соответствующей ему дебройлевской длины волны.

3.46. При прохождении нерелятивистской частицы с энергией \mathcal{E} над одномерной прямоугольной ямой глубиной $U = 3\mathcal{E}$ коэффициент отражения по мощности оказался равным $R = 9/25$. Определить минимально возможную глубину ямы в единицах соответствующей ему дебройлевской длины волны.

3.47. Электрон находится в основном состоянии в одномерной симметричной прямоугольной потенциальной яме с шириной $2a = 10 \text{ \AA}$ с потенциалом $U(\pm\infty) = 0$. Отношение вероятностей обнаружить частицу внутри и вне ямы равно $\alpha = 0,1$. Считая, что изменение волновой функции внутри ямы мало, определить энергию связи электрона и глубину ямы (в эВ).

3.48. Нейтрон находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с шириной $a = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, ограниченной с одной стороны бесконечно высокой стенкой. При этом $U = 0$ при $0 < x < a$, а при $x \geq a$ потенциал U равен постоянной конечной величине U_0 . Отношение вероятностей обнаружить частицу внутри и вне ямы равно $\alpha = 0,1$. Считая, что максимум волновой функции достигается вблизи границы ямы, определить энергию связи нейтрона.

3.49. Микрочастица находится в прямоугольной потенциальной яме заданной ширины. Одна стенка бесконечная, а вторая — конечная, высотой U_0 . Энергия частицы в яме $\mathcal{E} = 3U_0/4$. Во сколько раз надо квазистатически «сжать» яму при неизменной высоте, чтобы частица стала свободной?

3.50. Микрочастица находится в одномерной потенциальной яме заданной ширины. Одна ее стенка бесконечно высокая, а вторая — конечной высоты U_0 . Энергия частицы в яме $\mathcal{E} = U_0/2$. Во сколько раз надо квазистатически изменить высоту ямы при неизменной ширине, чтобы частица стала свободной?

3.51. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $a = 4 \text{ \AA}$ ($U(0) = \infty$, $U(a) = U_0 = 1 \text{ эВ}$) в состоянии с энергией $\mathcal{E} = 0,88 \text{ эВ}$. На яму накладывается постоянное электрическое поле $E = 3 \cdot 10^5 \text{ В/см}$, направленное в отрицательную сто-

рону оси x . Оценить возникающую при этом ширину уровня энергии. Считать, что энергия уровня не меняется при наложении поля.

3.52. Электрон находится в одномерной симметричной прямоугольной потенциальной яме шириной $2a = 4 \text{ \AA}$ ($U(-a) = U(a) = U_0 = 1 \text{ эВ}$) в состоянии, энергия которого $\mathcal{E} = 0,8 \text{ эВ}$. На яму накладывается постоянное электрическое поле $E = 3 \cdot 10^5 \text{ В/см}$, направленное в отрицательную сторону оси x . Оценить время, через которое электрон покинет яму. Считать, что энергия уровня не меняется при наложении поля.

3.53. На одномерную прямоугольную потенциальную ступеньку высотой $U_0 > 0$, расположенную в точке $x = 0$, из области $x < 0$

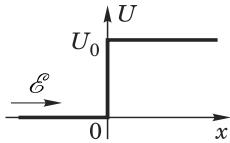


Рис. 37

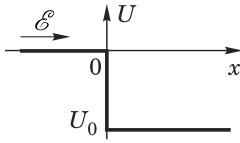


Рис. 38

падают микрочастицы с энергией $\mathcal{E} = U_0/4$ (рис. 37). На каком наименьшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Броиля) плотность вероятности обнаружить частицу будет максимальна и на каком — минимальна?

3.54. На одномерную прямоугольную потенциальную ступеньку высотой $U_0 < 0$, расположенную в точке $x = 0$, из области $x < 0$ падают микрочастицы с энергией $\mathcal{E} = |U_0|/3$ (рис. 38). На каком наименьшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Броиля) плотность вероятности обнаружить частицу будет максимальна и на каком — минимальна?

3.55. На одномерную прямоугольную потенциальную ступеньку высотой $U_0 > 0$, расположенную в точке $x = 0$, из области $x < 0$ падают микрочастицы с энергией $\mathcal{E} = 4U_0/3$ (рис. 39). На каком наименьшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Броиля) плотность вероятности обнаружить частицу будет максимальна и на каком — минимальна?

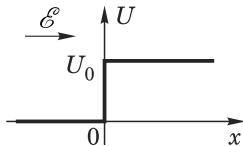


Рис. 39

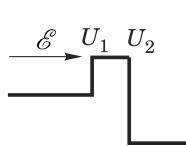


Рис. 40

меньшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Броиля) плотность вероятности обнаружить частицу будет максимальна и на каком — минимальна?

3.56. Какая доля электронов с энергией $\mathcal{E} = 1 \text{ эВ}$, падающих слева на прямоугольный несимметричный потенциальный барьер с параметрами $U_1 = \mathcal{E}$, $U_2 = 4U_1$ и шириной $l = 7,8 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, сможет его преодолеть (рис. 40)?

3.57. Какая доля электронов с энергией $\mathcal{E} = 1$ эВ пройдет через прямоугольный симметричный потенциальный барьер высотой $U = \mathcal{E}$ и шириной $l = 7,8 \cdot 10^{-8}$ см?

3.58. Найти ширину l прямоугольного симметричного потенциального барьера высотой U , при которой коэффициент пропускания электронов с энергией $\mathcal{E} = U = 1$ эВ равен $1/10$.

3.59*. Частица массой m находится в возбужденном пространственно-четном состоянии в одномерной симметричной прямоугольной потенциальной яме ($U(0) = 0$). Расстояние между двумя соседними точками, в которых плотность вероятности нахождения частицы максимальна, равно a и составляет $a = 3/8$ от ширины ямы. Найти энергию ионизации и номер возбужденного состояния.

3.60. Частица массой m находится во втором возбужденном состоянии ($n = 3$) в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной a ($U(0) = \infty$, $U = -U_0$ при $0 < x \leq a$ и $U = 0$ при $x > a$). Отношение амплитуды волновой функции на границе ямы ($x = a$) к ее максимальному значению равно 0,5. Найти энергию ионизации этого состояния.

3.61. Нейтрон находится в сферической прямоугольной потенциальной яме радиусом $R = 8 \cdot 10^{-13}$ см. Определить минимальную глубину ямы U , при которой в ней существует пятый s -уровень. Найти также энергию первого уровня \mathcal{E}_1 , отсчитанную от дна такой ямы.

3.62. Электрон находится в симметричной одномерной потенциальной яме шириной $2a = 3$ нм. Определить минимальную глубину ямы U , при которой в ней существует уровень с номером $n = 12$. Найти также энергию первого уровня \mathcal{E}_1 , отсчитанную от дна такой ямы.

3.63. Электрон находится в симметричной одномерной потенциальной яме шириной $2a = 3$ нм. Определить минимальную глубину ямы U , при которой в ней существует уровень с номером $n = 11$. Найти также энергию второго уровня \mathcal{E}_2 , отсчитанную от дна такой ямы.

3.64. На потенциальную ступеньку высотой U_0 падает поток мицрочастиц с энергией $\mathcal{E} > U_0$. Найти давление частиц на ступеньку, если концентрация частиц равна n_0 .

3.65. Движение электрона в твердом теле можно описывать как движение свободного электрона, но с массой, определяемой структурой твердого тела и называемой эффективной. Рассматривается структура из двух полупроводников с эффективными массами m_1 и $m_2 = 1,5m_1$. При этом можно считать, что на границе раздела $x = 0$ потенциальная энергия испытывает скачок $U_0 > 0$. Электрон с энергией $\mathcal{E} = 1,6U_0$ движется по нормали к границе. Найти коэффициент прохождения по мощности.

3.66*. Поток электронов с концентрацией $n_0 = 10^{18}$ см⁻³ и энергией $\mathcal{E} = 4$ эВ падает нормально на границу раздела двух сред, в результате чего его потенциальная энергия скачком увеличивается на $U = 3$ эВ. Найти давление электронов на границу раздела.

§ 4. Атом водорода и водородоподобные атомы

4.1.* Частица находится в центральном поле силового центра с потенциальной энергией $U = -C/r^s$, где C — положительная постоянная, а r — расстояние от силового центра. Исходя из соотношения неопределенностей, показать, что при $s > 2$ возможны стационарные состояния частицы со сколь угодно большими по абсолютной величине отрицательными собственными значениями полной энергии. Частица при этом условии будет переходить на нижележащие энергетические уровни — произойдет ее «падение» в точку $r=0$, т. е. на силовой центр. Если же $s < 2$, то наиболее низкий энергетический уровень будет иметь конечное значение полной энергии, т. е. падения на силовой центр не произойдет.

Пользуясь этими результатами, объяснить возможность существования атомов, например атома водорода.

4.2. Показать, что в пределе, когда главное квантовое число n в атоме водорода стремится к бесконечности, движение электрона переходит в классическое движение по круговой орбите.

4.3. Классические формулы следуют из квантовых в пределе высвобожденных состояний (т. е. при $n \rightarrow \infty$). В атоме водорода и в задаче Кеплера потенциальная энергия $U(r) \propto 1/r$. Исходя из квантовых формул для уровней энергии $\mathcal{E}_n = -Ry/n^2$ и радиусов расстояний $r_n = an^2$ электрона в атоме водорода, получить для больших n третий закон Кеплера.

4.4. Показать, что среди сферически симметричных решений уравнения Шредингера для водородоподобного атома, конечных при $r=0$ и обращающихся в нуль при $r=\infty$, имеется экспоненциальное e^{-ar} . Найти постоянную a и энергию атома в рассматриваемом состоянии. Что это за состояние?

4.5. Найти объемную плотность вероятности нахождения электрона в водородоподобном атоме для основного состояния*).

4.6. Найти радиальную плотность вероятности нахождения электрона в водородоподобном атоме для основного состояния. При каких значениях r эта величина достигает максимума?*).

4.7. Найти среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра в s -состоянии водородоподобного атома*).

4.8. Найти среднее значение обратного расстояния $\langle 1/r \rangle$ электрона от ядра в основном состоянии водородоподобного атома*).

4.9. Найти средние значения операторов потенциальной $\langle \widehat{U} \rangle$ и кинетической $\langle \widehat{T} \rangle$ энергий основного состояния водородоподобного атома*).

*) Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

4.10. Волновая функция одного из состояний атома водорода имеет вид $\psi = A(1 + \alpha r)e^{-\beta r}$, где A , α , β — некоторые константы. Определить величину констант α и β , энергию этого состояния и его квантовые числа. (См. также задачу 3.10.)

4.11. Определить разрешающую способность R спектрального прибора, необходимую для наблюдения изотопического сдвига спектральных линий дейтерия относительно линий водорода. Какова должна быть ширина b основания призмы из тяжелого флинта с дисперсией $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$ (в диапазоне красного света) в призменном спектрографе, применяемом для обнаружения изотопического сдвига головной линии серии Бальмера?

4.12. Серия Лаймана наблюдается в смеси атомарных водорода и трития (ядро атома трития состоит из протона и двух нейтронов). Определить разрешающую способность спектрального прибора, которая достаточна для разрешения изотопической структуры спектральных линий этой серии. Как меняется требуемая разрешающая способность при переходе к другим сериям (Бальмера, Пащена) той же смеси? Можно ли разрешить изотопическую структуру спектральных линий той же смеси в видимой области спектра с помощью стеклянной призмы с основанием $b = 1 \text{ см}$ и дисперсией показателя преломления $dn/d\lambda = 1000 \text{ см}^{-1}$? Каково должно быть эффективное число отражений $N_{\text{эфф}}$ и порядок m наблюдаемого спектра, чтобы разрешить и исследовать ту же структуру с помощью интерферометра Фабри–Перо?

4.13. Серия Бальмера наблюдается в смеси атомарных водорода и дейтерия. Определить разрешающую способность и число штрихов N дифракционной решетки, которые необходимы для разрешения во втором порядке изотопической структуры спектральных линий этой серии. Как меняется эта разрешающая способность с увеличением номера линии (т. е. с уменьшением длины волны) указанной серии?

4.14. В спектрах некоторых звезд наблюдается $m \approx 30$ линий водородной серии Бальмера. При каком наименьшем числе N штрихов дифракционной решетки можно разрешить эти линии в спектре первого порядка?

4.15. Кварцевая пластинка, расположенная между скрещенными поляроидами, образует поляризационный фильтр. Разрешенные направления пластинки составляют угол 45° с главными направлениями поляроидов. Какую минимальную толщину должна иметь пластинка, для того чтобы с помощью такого фильтра можно было отделить наиболее длинноволновую линию серии Бальмера для водорода ($\lambda = 656 \text{ нм}$) от той же линии дейтерия? Показатели преломления для обычного и необычного лучей в кварце $n_o = 1,5442$, $n_e = 1,5533$. Источником света является газоразрядная водородно–дейтериевая лампа.

4.16. Каково должно быть минимальное расстояние между зеркалами в интерферометре Фабри–Перо, чтобы по оптическому спектру

установить наличие двух изотопов калия ^{39}K и ^{40}K ? Коэффициент отражения зеркал по энергии $R = 0,9$, энергия ионизации атома калия $W = 4,3$ эВ.

4.17. Отрицательные мюоны могут захватываться ядром и заменять электроны в оболочке атома. Практически может замещаться лишь один электрон. Получающиеся в результате такой замены системы называются мезоатомами. Масса мюона $m_\mu = 207m_e$. Вычислить по теории Бора радиус первой круговой орбиты (K -орбиты) мюона в мезоатоме. Рассчитать энергетические уровни мезоатома. Какое излучение будет наблюдаться при переходе на K -орбиту мюона с более высоких орбит? Почему исследование такого излучения применяется для выявления структуры тяжелых атомных ядер? Массой мюона по сравнению с массой ядра пренебречь.

4.18. Позитроний представляет собой связанную систему из электрона и его античастицы — позитрона. Найти уровни энергии, энергию ионизации и длину волны резонансной линии позитрония. Резонансным называют переход из первого возбужденного состояния в основное.

4.19. Длина волны линии H_α водородной серии Бальмера равна $\lambda = 0,056$ мкм. Определить по этим данным энергию ионизации \mathcal{E}_i позитрония (система: (e^+, e^-)) и мюония (система: протон, мюон), находящихся в основном состоянии. Масса мюона $m_\mu = 207m_e$ (m_e — масса электрона).

4.20. Рассчитать энергию излучения $\Delta\mathcal{E}$, испускаемого в мезоатоме водорода (мюония) при переходе мюона с N - на M -оболочку. Как велик радиус 1-й боровской орбиты в этом случае?

4.21. Оценить скорость мюона μ^- в мезоатоме с зарядом ядра $Z = +10$. Найти радиус атома.

4.22. При переходе пиона π^- с $4f$ -оболочки на $3d$ -оболочку мезоатома с ядром фосфора ($Z = 15$) испускается рентгеновский квант с энергией $\mathcal{E} = 40$ кэВ. Определить массу пиона и радиус d -оболочки.

4.23. Какова была бы энергия связи и радиус водородоподобного атома из двух нейтронов при учете только силы гравитационного притяжения между ними?

4.24. Какой радиус имела бы $2p$ -оболочка атома из нейтрона и электрона, связанных между собой только силой гравитационного взаимодействия?

4.25. Найти потенциалы ионизации ионов He^+ и Li^{++} .

4.26. Определить наименьшую энергию, которую надо сообщить в основном состоянии трижды ионизованному атому берилля, чтобы возбудить полный спектр этого иона Be^{3+} .

4.27. Энергия ионизации атома Не равна 24,5 эВ. Определить энергию \mathcal{E} , необходимую для получения из нейтрального атома Не дважды ионизованного иона.

4.28. Ядро атома трития, находящееся в основном состоянии, испытывает β^- -распад. Считая, что за время вылета распадного элек-

трана состояние атомного электрона не успевает измениться, найти его полную энергию сразу после распада.

4.29* В 1989 г. в ЦЕРНе при пропускании медленных антипротонов через водородную камеру наблюдалось образование протониума — атома состава ($p\bar{p}$). Энергия излучения, соответствующая переходу протониума из состояния $2p$ в $1s$, оказалась равной 10,1 кэВ. Определить вклад сильного взаимодействия в разность энергий указанных уровней. Для какого из этих уровней вклад сильного взаимодействия оказывается наибольшим?

4.30. За счет сильного взаимодействия энергия основного состояния протониума (системы ($p\bar{p}$)) сдвигается на $\delta\mathcal{E} = 0,7$ кэВ относительно его «чисто кулоновского» значения. Считая, что сильное взаимодействие описывается потенциалом Юкавы $U(r) = -(g^2/r) \exp(-r/r_0)$, $r_0 = 0,8 \cdot 10^{-13}$ см, оценить величину константы сильного взаимодействия $g^2/(\hbar c)$ для системы ($p\bar{p}$). Волновая функция $1s$ -состояния протониума $\Psi = (\pi r_B^3)^{-1/2} \exp(-r/r_B)$, где r_B — боровский радиус протониума.

4.31. Фотон головной (наиболее длинноволновой) линии серии Лаймана иона гелия He^+ поглощается атомом водорода в основном состоянии и ионизует его. Определить кинетическую энергию T , которую при этом получит электрон.

4.32. Атом водорода, вначале находившийся в неподвижном состоянии, излучил квант света, соответствующий головной (наиболее длинноволновой) линии серии Лаймана. Определить относительное изменение частоты фотона $\Delta\nu/\nu_0$ из-за отдачи. Какую скорость принял атом за счет энергии отдачи?

4.33. С какой скоростью и в каком направлении должна двигаться светящаяся газоразрядная лампа, заполненная водородом, чтобы в ней происходило поглощение света, излучаемого неподвижной газоразрядной лампой, заполненной дейтерием? Рассмотреть движение вдоль прямой, соединяющей лампы.

4.34. При аннигиляции парапозитрона (суммарный спин системы равен нулю) образуются два γ -кванта, уносящие энергию покоя аннигилировавших частиц. Если бы электрон и позитрон перед аннигиляцией покоились, γ -кванты разлетались бы в строго противоположных направлениях. В реальном процессе аннигиляции замедленные в веществе позитроны сталкиваются с движущимися атомными электронами, и угол конуса разлета γ -квантов отличается от 180° . Оценить, на сколько этот угол отличается от развернутого, если аннигиляция происходит на электронах L -оболочки углерода.

4.35. Позитроний поглощает фотон, образовавшийся при переходе атомарного водорода из первого возбужденного состояния в основное. Определить скорости электрона и позитрона в случае их симметричного относительно направления движения фотона разлета. Атом позитрона в исходном состоянии считать неподвижным.

4.36* При комптоновском рассеянии квантов на атомных электронах явление осложняется тем, что электроны в атомах не наход-

дятся в покое. Оценить связанный с этим разброс в углах разлета электронов отдачи, выбиваемых из атомов водорода при рассеянии рентгеновских квантов ($\lambda = 1 \text{ \AA}$) строго назад.

4.37. Решить предыдущую задачу для электронов отдачи, выбиваемых с K -оболочки атомов свинца при рассеянии гамма-квантов с длиной волны $\lambda = 0,01 \text{ \AA}$ строго назад. Для свинца $Z = 82$.

4.38* Считая, что поправка на экранирование заряда ядра электронами на K -оболочке одинакова для атомов с $Z < 50$, найти кинетическую энергию T_e фотоэлектронов, вылетающих из K -оболочки атомов ^{30}Zn под действием K_α -излучения серебра ^{47}Ag с энергией 21,6 кэВ.

4.39. Во сколько раз отличаются средние длины свободного пробега атома водорода в основном и возбужденном состояниях ($n = 10$) в разреженном одноатомном газе при одинаковой концентрации?

4.40. В электрическом поле возможна спонтанная ионизация атомов. Оценить, при какой величине напряженности поля E (в В/см) окажется ионизованным атом водорода в состоянии с $n = 10$. Энергии уровней считать не зависящими от поля.

4.41* Задача об отыскании уровней энергии атомов обычно решается в предположении, что заряд ядра точечный. На самом деле ядро имеет размер, и радиусы ядер $R_y = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см, где A — атомная масса. Определить знак и оценить порядок величины относительной поправки $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ к энергии мюона на K -оболочке в мезоатоме неона ($Z = 10$, $A = 20$), связанной с тем, что часть времени мюон находится внутри ядра, т. е. в поле с потенциалом, отличным от Ze^2/r . Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты, масса мюона $m_\mu = 207 m_e$.

4.42. Задача об отыскании уровней энергии атома решается в предположении, что заряд ядра точечный. На самом деле ядро имеет размер, и радиусы ядер $R_y = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см, где A — атомная масса. Определить знак и оценить порядок величины относительной поправки $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ к энергии электрона на K -оболочке в атоме неона ($Z = 10$, $A = 20$), связанной с тем, что часть времени электрон находится внутри ядра, т. е. в поле, отличном от кулоновского. Нормированное выражение для волновой функции основного состояния электрона в атоме водорода $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

4.43. Положительно заряженный мюон ($m_\mu = 207 m_e$), образовавший вместе с электроном водородоподобный атом — мюоний, распался, причем продукты распада быстро разлетелись в разные стороны. Каково среднее значение кинетической энергии оставшегося после этого электрона, если в момент распада мюона мюоний находился в состоянии $1s$? Волновая функция основного состояния в атоме водорода $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

4.44. Рассчитать для этой же системы (см. задачу 4.43) среднее значение кинетической энергии оставшегося после этого электрона, если в момент распада мюона мюоний находился в состоянии $2s$. Волновая функция электрона, находящегося в $2s$ -состоянии в атоме водорода, $\psi = \frac{1}{\sqrt{8\pi r_1^3}} \left(1 - \frac{r}{2r_1}\right) e^{-r/2r_1}$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

4.45. В атоме гелия один из электронов замещен мюоном. Оценить энергию электронного ($3p-2s$)-перехода в таком атоме.

4.46. В сложных атомах электрическое поле, в котором движется электрон, формируется как ядром, так и другими электронами. Однако в щелочных металлах с достаточной точностью можно считать, что внешний электрон движется в поле ядра с эффективным зарядом $Z_{\text{эфф}}$. Оценить величину эффективного заряда для $3p$ -электрона Na , если известно, что потенциал ионизации натрия равен $U_0 = 5,1 \text{ эВ}$, а длина волны его яркой желтой линии $\lambda = 589 \text{ нм}$ (переход $3p-3s$).

4.47. Атом, пролетая через кристалл, подвергается воздействию периодического поля решетки кристалла, в результате чего возможно резонансное возбуждение его уровней (эффект Окорокова). Какова должна быть скорость двукратно ионизованного атома лития, чтобы при пролете его через кристалл золота возбуждался уровень с квантовым числом $n = 2$? Период решетки в направлении движения иона $a = 4,07 \text{ \AA}$. (См. также задачу 7.34.)

4.48.* Найти энергию основного состояния и первый потенциал ионизации атома He , использовав в качестве ψ -функций произведение ψ -функций основного состояния электрона в водородоподобном атоме $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$, где $a = r_{\text{Б}}/Z$, так что $\psi(r_1, r_2) = \psi_0(r_1)\psi_0(r_2)$. При вычислении энергии кулоновского расталкивания электронов воспользоваться теоремой Гаусса.

4.49. Атом водорода находится в состоянии с энергией $\mathcal{E} = -1,51 \text{ эВ}$, и при этом радиальная часть волновой функции ни разу не обращается в ноль на интервале $0 < r < \infty$. Что это за состояние?

4.50. Атом водорода находится в состоянии с энергией $\mathcal{E} = -3,4 \text{ эВ}$, и при этом радиальная часть волновой функции один раз обращается в ноль на интервале $0 < r < \infty$. Что это за состояние?

4.51.* Релятивистский пучок однократно ионизованных атомов гелия, находящихся в основном состоянии, движется навстречу лазерному излучению с длиной волны $\lambda_0 = 248 \text{ нм}$. Ионы поглощают это излучение, переходят в первое возбужденное состояние, а затем испускают кванты света при обратном переходе. Найти длину волны этого излучения (в направлении движения ионов) в ЛСО (лабораторной системе отчета), а также кинетическую энергию ионов.

4.52. Исходя из формулы, определяющей интенсивность дипольного излучения $I = \frac{2}{3c^3} \dot{\mathbf{d}}^2$, где \mathbf{d} — дипольный момент излучающей системы, оценить время жизни первого возбужденного уровня однократно ионизованного атома гелия. Считать атом гармоническим осциллятором.

4.53. Исходя из формулы, определяющей интенсивность дипольного излучения $I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2$, где \mathbf{d} – дипольный момент излучающей системы, оценить время жизни возбужденного состояния иона Be^{3+} по отношению к переходу с уровня $n = 10$ на уровень с $n = 9$. Считать атом гармоническим осциллятором.

4.54. Конечный размер атомных ядер приводит к смещению энергетических уровней K -электронов по сравнению с моделью точечного ядра. Например, согласно расчету в атоме неона этот сдвиг составляет $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} = 6 \cdot 10^{-7}$. Оценить эту величину для K -электронов атома свинца.

4.55. Оценить, какой радиус должна иметь звезда с массой, равной массе Солнца $M = 2 \cdot 10^{33}$ г, и магнитным полем на поверхности $B = 5$ кТл, чтобы на экваторе зезды могла происходить ионизация атома водорода межзвездного газа, падающего из бесконечности. Считать, что ионизация атома происходит, когда вершина возникающего для электрона потенциального барьера сравнивается с энергией основного состояния.

4.56. Оценить заряд ядра Z водородоподобного иона, начиная с которого невозможны стационарные электронные орбиты. Учесть, что для больших Z существенна релятивистская зависимость энергии от импульса.

4.57. С помощью дифракционной решетки, изготовленной из материала с линейным коэффициентом расширения $\alpha = 6 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$, студент исследовал одну из линий серии Бальмера водорода. На следующий день он исследовал ту же линию атомарного дейтерия. Оказалось, что положения линий совпали. Найти величину и знак изменения температуры в лаборатории.

4.58. Для повышения проводимости высокотемпературной плазмы МГД-генераторов в них добавили ионы меди. С помощью дифракционной решетки, изготовленной из материала с модулем Юнга $E = 70$ ГПа, изучают в оптическом диапазоне одну из линий водородоподобного иона $_{63}\text{Cu}^{28+}$. Если решетку подвергнуть небольшому продольному (поперек штрихов) сжатию, то положение линии иона изотопа меди $_{65}\text{Cu}^{28+}$ совпадет с положением линии $_{63}\text{Cu}^{28+}$ до сжатия. Найти величину напряжения сжатия.

4.59. С помощью дифракционной решетки, изготовленной из материала с пьезомодулем $\beta = 6 \cdot 10^{-10} \text{ м/В}$, студент исследовал одну из линий серии Бальмера атома дейтерия. На следующий день он изучал ту же линию атомарного трития, но в момент измерения решетка оказалась в однородном электрическом поле (поперек штрихов). Оказалось, что линия трития наблюдалась по тем же углом, что и линия дейтерия. Найти величину напряженности E возникшего электрического поля.

Указание. При обратном пьезоэффекте относительное изменение размеров кристалла $\Delta l/l = \beta E$.

4.60* Под действием облучения алюминиевой пластины происходит выбивание электрона с K -оболочки, а затем происходит электронный переход с L -оболочки на K -оболочку и последующее испускание другого электрона с L -оболочки в вакуум (KLL -переход) — оже-эффект. Энергия этого электрона $\mathcal{E}_1 = 1400$ эВ. При аналогичном LMM -переходе энергия электрона $\mathcal{E}_2 = 80$ эВ. Энергия ионизации K -электрона в алюминии $W_K = 1960$ эВ. Оценить по водородоподобной модели эффективный заряд ядра для M -оболочки. Работой выхода пренебречь.

4.61. Под действием облучения кремниевой пластины происходит выбивание K -электрона, а затем происходит электронный переход с L -оболочки на K -оболочку и последующее испускание другого электрона с L -оболочки в вакуум (KLL -переход) — оже-эффект. Энергия этого электрона $\mathcal{E}_1 = 1600$ эВ. Энергия ионизации K -электрона в кремнии $W_K = 2300$ эВ. Найти энергию электрона при LMM -переходе, если эффективный заряд ядра для M -оболочки в водородоподобной модели равен 9. Работой выхода пренебречь.

4.62. Под действием облучения магниевой пластины происходит выбивание K -электрона, а затем происходит электронный переход с L -оболочки на K -оболочку и последующее испускание другого электрона с L -оболочки в вакуум (KLL -переход) — оже-эффект.

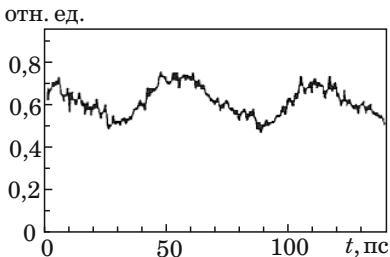


Рис. 41

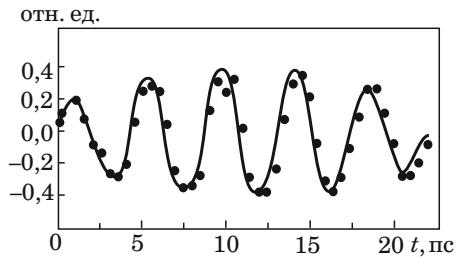


Рис. 42

Найти энергию электрона, если энергия ионизации K -электрона в магнии $W_K = 1600$ эВ. Эффективный заряд ядра для L -оболочки магния в водородоподобной модели равен 8,5. Работой выхода пренебречь.

4.63. В 2004 г. в университете Вирджиния (США) Х. Маеда и Т. Галлагер создали почти классический боровский атом лития, в котором электрон как точечная частица вращался вокруг ядра по круговой орбите. На рис. 41 приведены результаты измерения положения электрона (проекции на ось, лежащую в плоскости орбиты) от времени. Оценить энергию ионизации этого электрона.

4.64. В марте 2008 г. Б. Даннинг с коллегами (университет Райс, США) получили высоковозбужденные атомы калия, в которых внешний электрон как точечная частица вращался вокруг ядра по круговой орбите. На рис. 42 приведены результаты измерения положения

электрона (проекции на ось, лежащую в плоскости орбиты) от времени. Оценить величину главного квантового числа и радиус орбиты электрона.

§ 5. Ширина линий. Спектры молекул. Рентгеновское излучение

5.1. Среднее время жизни атома в возбужденном состоянии составляет $\tau \sim 10^{-8}$ с. При переходе атома в основное состояние испускается фотон, средняя длина волны которого равна $\lambda = 500$ нм. Оценить ширину $\Delta\lambda$ и относительную ширину $\Delta\lambda/\lambda$ излучаемой спектральной линии, если не происходит ее уширения за счет других процессов. (Такая ширина называется естественной шириной спектральной линии.)

5.2. В π -мезоатоме водорода роль электрона играет отрицательный пион π^- , энергия покоя которого составляет $m_\pi c^2 = 140$ МэВ. Оценить связанную с распадом пиона относительную ширину спектральной линии, соответствующей переходу пиона с L на K -оболочку. Время жизни пиона $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8}$ с.

5.3. Оценить минимальную ширину L_{\min} , которую должна иметь дифракционная решетка, чтобы с ее помощью можно было обнаружить естественную ширину линии, испускаемой атомами с временем жизни возбужденного состояния $\tau = 0,1$ нс. (Все условия постановки опыта предполагаются идеальными.)

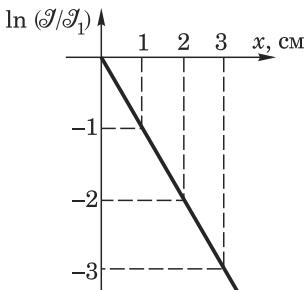


Рис. 43

логарифм отношения интенсивности света \mathcal{I} к интенсивности \mathcal{I}_1 , измеренной детектором, стоящим в 1-м оконке. Определить естественную ширину линии $\Delta\nu$, излучаемой атомами пучка.

5.5. Температуру газовых облаков в межзвездном пространстве можно оценить по доплеровскому уширению спектральных линий, испускаемых атомами, входящими в состав газа. Для этой цели обычно используют водородную линию с длиной волны $\lambda = 21$ см (см. также тексты задач 6.48 и 6.50, объясняющие природу этой линии). Оценить температуру T газового водородного облака, если испускаемая им водородная линия имеет полуширину $\Delta\nu = 5$ кГц.

5.6. На рис. 44 изображено распределение энергии в спектральной линии дважды ионизованного атома углерода ^{12}C (эту спектральную линию можно наблюдать в дуговом разряде в сильном магнитном поле). Уширение спектральной линии обусловлено движением излучающих атомов (эффект Доплера). Оценить температуру T излучающих атомов.

5.7. Изучается спектр излучения газа в разрядной трубке. Считая, что при столкновениях возбужденные атомы мгновенно переходят в нижележащие состояния, оценить соотношение между доплеровской шириной спектральных линий в диапазоне видимого света и их уширением за счет столкновений, если длина свободного пробега $l \approx 10^{-4}$ см.

5.8. Возбужденные атомы с временем жизни $\tau \sim 10^{-10}$ с и энергией ионизации $\mathcal{E}_i \sim 10$ эВ ионизуются излучением с длиной волны $\lambda \sim 100\text{\AA}$. Оценить относительный разброс фотоэлектронов по энергиям.

5.9. Одна из причин уширения спектральных линий атомов в газе связана со столкновениями, которые ограничивают время жизни возбужденного состояния. Оценить вклад этого механизма в относительную ширину линии перехода в неоне на длине волны $\lambda = 0,63$ мкм, используемой в гелий-неоновом газовом лазере, в условиях, когда коэффициент диффузии атомов неона $D = 100$ см²/с. Температуру газа принять равной $T = 400$ К.

5.10*: Молекула CO₂ имеет множество дискретных переходов, пригодных для генерации лазерного излучения вблизи 1000 см⁻¹ с расстоянием между линиями $\Delta q \approx 2$ см⁻¹. Для осуществления плавной перестройки частоты лазера пользуются повышенным давлением, когда ударное уширение приводит к слиянию этих линий в одну полосу. Оценить необходимое для этого давление P при температуре $T = 400$ К. Сечение столкновения молекул $\sigma \approx 10^{-15}$ см².

5.11. В опытах с разными молекулами измерялись энергии перехода между тремя последовательными уровнями энергии вращательной полосы двухатомной молекулы (рис. 45а и б). Найти квантовые числа l этих уровней и момент инерции I молекулы в случаях а и б.

5.12. Из опыта известно отношение длин волн электромагнитного излучения, соответствующего переходам и молекулах HCl и HI из ос-

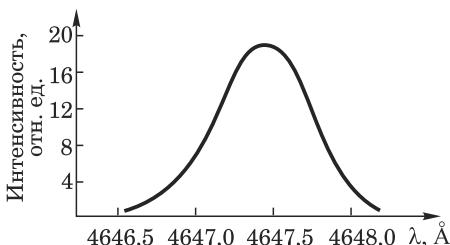


Рис. 44

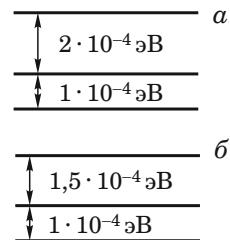


Рис. 45

новного в первое вращательное состояние: $a = \lambda_{\text{HCl}}/\lambda_{\text{H}_2}$. Определить отношение межъядерных расстояний в этих молекулах $x = r_{\text{HCl}}/r_{\text{H}_2}$.

5.13. Какова максимальная длина волны СВЧ-излучения, с помощью которой можно вызвать переход между ротационными уровнями молекул хлора? Расстояние между ядрами атомов в молекуле Cl_2 $a = 2 \cdot 10^{-8}$ см. Относительная атомная масса изотопа хлора $A = 35$.

5.14. Найти отношение частот линий поглощения наиболее длинноволновых вращательных переходов молекулы HCl для двух изотопов хлора ^{35}Cl и ^{37}Cl . Считать, что межатомные расстояния не зависят от изотопического состава молекулы. Вычисления произвести с точностью $10^{-2}\%$.

5.15. Найти отношение наименьших энергий переходов между вращательными уровнями газа, состоящего из смеси водорода идейтерия, в котором присутствуют молекулы H_2 , HD и D_2 . Считать, что межатомное расстояние не зависит от изотопического состава.

5.16. Дальний инфракрасный спектр молекулы HBr , обусловленный переходами между соседними вращательными уровнями молекул, состоит из ряда линий, отстоящих друг от друга на расстояние $\Delta = 1/\lambda = 17 \text{ cm}^{-1}$. Найти расстояние между ядрами в молекуле HBr .

5.17. Оценить в видимой области спектра ($\lambda = 6000 \text{ \AA}$) разрешающую способность R спектрального прибора, пригодного для исследования спектра молекулярного водорода (т. е. спектра, обусловленного переходами между электронно-вращательными уровнями молекулы вблизи основного электронного состояния). Момент инерции молекулы H_2 в основном электронном состоянии, равный $I = 0,46 \cdot 10^{-40} \text{ g} \cdot \text{cm}^2$, считать одинаковым во всех остальных состояниях.

5.18. При каких величинах периода вращения T песчинки с характерным размером $a = 0,1 \text{ мкм}$ начинает проявляться квантовый характер вращения, т. е. дискретность вращательного спектра? Плотность песчинки ρ принять равной $5 \text{ г}/\text{см}^3$.

5.19* При температурах ниже $T = 100 \text{ K}$ молярная теплоемкость C_V молекулярного водорода составляет $3R/2$, тогда как при комнатных температурах она равна $5R/2$ (R — универсальная газовая постоянная). Пользуясь этими данными, оценить момент инерции I молекулы водорода относительно оси, соединяющей атомы, из которых построена молекула. Оценить также частоты v и длины волн λ спектральных линий, возникающих при переходах между вращательными уровнями молекулы.

5.20. Оценить количество вращательных уровней молекулы HCl , возбуждаемых при комнатной температуре. Межъядерное расстояние у этой молекулы равно $d = 1,27 \text{ \AA}$.

5.21. Показать, что в основном состоянии гармонического осциллятора $\langle \Delta p^2 \rangle \langle \Delta x^2 \rangle = \hbar^2/4$, где $\langle \Delta p^2 \rangle$ и $\langle \Delta x^2 \rangle$ — среднеквадратичные отклонения импульса и координаты от их средних значений. Вол-

новая функция основного состояния гармонического осциллятора $\Psi_0(x) = (\alpha/\pi)^{1/4} \exp(-\alpha x^2/2)$, где $\alpha = m\omega/\hbar$. (См. также задачу 2.43.)

5.22. Показать, что уравнение Шредингера, описывающее одномерный гармонический осциллятор, помещенный в однородное электрическое поле \mathbf{E} , может быть сведено к уравнению гармонического осциллятора, т. е. движению в потенциале вида $U = m\omega^2 x^2/2$. Каковы уровни энергии частицы в этом случае?

5.23* В спектре испускания молекулярного азота имеются линии с длинами волн 3371 \AA , 3577 \AA и 3805 \AA . Можно ли интерпретировать эти линии как переходы с изменением колебательного квантового числа на 0, 1 и 2, если измерения сделаны с точностью 0,2%? Определить энергетическое расстояние между соответствующими уровнями молекулы азота. С помощью полученных результатов по формулам классической физики оценить жесткость k упругой связи атомов в молекуле азота.

5.24* Оценить отношение кванта колебаний молекул H_2 и O_2 к характерной энергии возбуждения валентных электронов \mathcal{E}_e , считая, что эффективный коэффициент упругости молекулярной связи $k = \mathcal{E}_e/a^2$, где a — межатомное расстояние. Выразить ответ через отношение массы электрона m к массе ядра M . Оценить средний квадрат смещения для нулевых колебаний молекул и выразить его через отношение m/M и a .

5.25. В угарном газе CO из-за возбуждения колебаний молекул наблюдается пик поглощения инфракрасного излучения на длине волны $\lambda = 4,61\text{ мкм}$. Определить амплитуду A_0 нулевых колебаний молекулы CO . Оценить также температуру, при которой возбуждаются колебательные уровни с $n = 1$.

5.26. Какова амплитуда колебаний молекулы кислорода O_2 при комнатной температуре, если известно, что расстояние между ее колебательными уровнями равно $\Delta\mathcal{E} = 0,25\text{ эВ}$?

5.27. На рис. 46 изображена часть графика зависимости энергии взаимодействия U атомов азота друг с другом от межатомного расстояния r . Считая яму параболической, найти отношение колебательного кванта к энергии возбуждения первого вращательного состояния в молекуле азота.

5.28. Пылинка с плотностью $\rho = 2\text{ г}/\text{см}^3$ и радиусом r прикреплена к неподвижной стенке невесомым стержнем длиной $l = 4r$ и диаметром $d = 2r = 1\text{ мкм}$ (рис. 47). Модуль Юнга стержня $E = 10^{11}\text{ Па}$. Определить энергию кванта колебаний пылинки вдоль нормали к стенке, а также длину электромагнитной волны, способной возбудить такие колебания, и амплитуду нулевых колебаний.

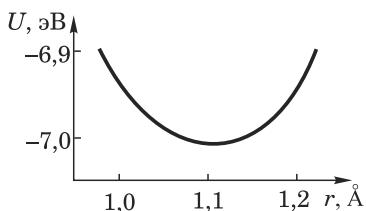


Рис. 46

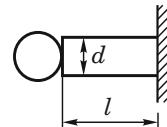


Рис. 47

5.29* Разность энергий диссоциации молекул D_2 и H_2 равна $\Delta\mathcal{E} = 0,08$ эВ, а потенциал взаимодействия атомов в этих молекулах одинаков. Каковы энергии нулевых колебаний этих молекул (в эВ)?

5.30. Оценить энергию нулевых колебаний атомов жидкого гелия (плотность $\rho = 0,145$ г/см³).

5.31: Определить, на сколько отличается от единицы отношение энергий возбуждения первого вращательного уровня молекулы азота в основном и первом возбужденном колебательном состояниях. Расстояние между атомами азота в основном состоянии молекулы $r_0 = 1,1$ Å, квант вибрационных возбуждений $\hbar\omega = 0,3$ эВ. (См. также задачу 5.57.)

5.32. Поле, в котором движется атом жидкого гелия, хорошо описывается потенциалом Леннард-Джонса

$$U(r) = \varphi \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right],$$

где $\varphi = 232$ К, а $r_0 = 3 \cdot 10^{-8}$ см. Найти энергию нулевых колебаний.

5.33. Потенциал взаимодействия атомов в двухатомной молекуле можно с достаточной точностью аппроксимировать потенциалом Морса

$$U(r) = D \left[\exp(-2\alpha(r-r_0)) - 2\exp(-\alpha(r-r_0)) \right].$$

У молекулы азота постоянная $\alpha = 4 \cdot 10^8$ см⁻¹, а коэффициент $D = 7,4$ эВ. Найти в этой модели расстояние между колебательными уровнями молекулы азота.

5.34. Смесь атомов двух видов А и В имеет уровни возбужденных состояний \mathcal{E}_A , \mathcal{E}_B , причем $\mathcal{E}_A - \mathcal{E}_B = \Delta\mathcal{E}$. При освещении излучением с частотой v такой, что $\hbar v = \mathcal{E}_A$, кроме последующего обратного излучения той же частоты в результате соударений атомов А и В появляется также излучение с частотой $v' = \mathcal{E}_B/h$ и происходит увеличение кинетической энергии атомов. Найти скорости атомов после соударений, если известны массы атомов m_A и m_B . Считать, что энергия теплового движения мала по сравнению с $\Delta\mathcal{E}$.

5.35. При лазерном разделении изотопов в газообразной фазе один из разделяемых изотопов ионизуется лазерным лучом и затем удаляется из смеси электростатическим полем. Такому разделению изотопов препятствует тепловое движение атомов. Определить, возможно ли подобное разделение изотопов ${}^6\text{Li}$ и ${}^7\text{Li}$ с помощью ультрафиолетового лазера, если известно, что энергия ионизации лития 5,4 эВ; газообразный литий может существовать при температуре $t^\circ \geq 800^\circ\text{C}$. Принять, что $Z_{\text{эфф}}$ для электрона незаполненной оболочки не зависит от массы изотопа.

5.36. В атоме тантала ($Z = 73$) совершается переход с M -слоя на L -слой. Определить длину волны λ испущенного фотона, если постоянная экранирования $\sigma = 5,5$.

5.37. Вычислить приближенно частоту и длину волны K_α -линии Mo, а также энергию кванта, соответствующую этой линии.

5.38. Найти приближенно минимальное напряжение V на рентгеновской трубке, при котором начинают появляться K_{α} -линии Mo, Cu, Fe.

5.39* Найти границу K -полосы излучения Mo, Cu, Fe.

5.40. Какие линии Ni возбуждаются K -излучением Co?

5.41. Известно, что длина волны K_{α} -линии одного элемента равна 0,0788 нм, а другого 0,0713 нм. Выяснить, стоят ли эти элементы рядом в таблице Менделеева. Какие это элементы?

5.42. Начиная с какого элемента появляется L -серия?

5.43. Определить напряжение V на рентгеновской трубке с никелевым анодом, если разность длин волн между K_{α} -линией и коротковолновой границей сплошного рентгеновского спектра равна $\Delta\lambda = 0,84 \text{ \AA}$.

5.44. Какой минимальной кинетической энергией должна обладать α -частица, чтобы при бомбардировке такими частицами атомов лития ${}^7\text{Li}$ эти атомы начали излучать полный спектр своего характеристического рентгеновского излучения?

5.45. Какова максимальная скорость v электронов, вырываемых из свинца характеристическим излучением железа?

5.46. У каких элементов характеристическое рентгеновское излучение длинноволновой границы K -серии может испытывать брэгговское отражение от кристалла LiF, постоянная решетки которого $d = 0,23 \text{ nm}$?

5.47. Какой потенциал V следует приложить к рентгеновской трубке, чтобы тормозное рентгеновское излучение могло испытывать брэгговское отражение от кристалла LiF, межплоскостное расстояние в котором составляет $d = 2,3 \text{ \AA}$?

5.48. Длина волны, соответствующая переходу между двумя соседними состояниями вращательного спектра молекулы HBr, равна $\lambda = 202 \text{ mkm}$. Определить, между состояниями с какими квантовыми вращательными числами происходит переход. Межъядерное расстояние $d = 1,41 \text{ \AA}$.

5.49. Оценить, при какой температуре отношение числа молекул NO, находящихся в чисто вращательных состояниях с квантовыми числами $l=1$ и $l=0$, составляет $\alpha = 0,1$. Межъядерное расстояние в молекуле $d = 1,15 \text{ \AA}$.

5.50. С какой относительной точностью $\Delta\lambda/\lambda$ надо измерить длинноволновую часть вращательного спектра CO, чтобы увидеть изотопическое расщепление спектра, появляющееся при наличии примеси ${}^{12}\text{C}{}^{17}\text{O}$ в обычном ${}^{12}\text{C}{}^{16}\text{O}$? Чему равна наибольшая длина волны вращательного кванта у молекул CO? Расстояние между ядрами C и O $d = 1,13 \text{ \AA}$.

5.51. Природный хлор представляет собой смесь двух изотопов — ${}^{35}\text{Cl}$ и ${}^{37}\text{Cl}$. С какой относительной точностью $\Delta\lambda/\lambda$ надо измерять длину волны колебательного кванта у молекулы HCl, чтобы увидеть изотопическое расщепление колебательного спектра?

5.52. Одномерный осциллятор находится в состоянии с главным квантовым числом $n = 10$. Оценить, какова вероятность обнаружить частицу вблизи положения равновесия в области размером порядка плюс-минус амплитуда его нулевых колебаний.

Указание. При больших квантовых числах движение частицы можно рассматривать как классическое.

5.53. Одномерный осциллятор находится в основном состоянии. Оценить вероятность нахождения частицы в классически разрешенной области. Волновая функция основного состояния $\psi = A \exp[-x^2/(2a_0^2)]$, где $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$.

Указание. Для оценки получающегося интеграла использовать разложение подынтегральной функции в ряд.

5.54. Для молекулы азота N_2 оценить число вращательных уровней, приходящихся на интервал между соседними колебательными уровнями.

5.55. Потенциальная энергия взаимодействия атомов в двухатомной молекуле не является чисто квадратичной (гармонической). При слабой ангармоничности уровни осциллятора можно представить в виде $\mathcal{E}_n = \hbar\omega(n + 1/2) - \alpha\hbar\omega(n + 1/2)^2$, где α — коэффициент ангармоничности, ω — частота осциллятора. Оценить в этой модели максимальное число колебательных уровней молекулы N_2 , у которой $\alpha = 0,006145$.

Указание. Для реальных состояний функция \mathcal{E}_n должна быть монотонно возрастающей.

5.56. Из-за конечного размера ядра энергетический уровень K -электрона претерпевает небольшое смещение $\delta\mathcal{E} \propto R^2$, где R — радиус ядра, который находится по формуле $R = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3}$ см, A — относительная атомная масса. Оценить величину изотопического сдвига $\delta(hv)_{205}$ границы характеристического рентгеновского K -излучения для ядра ^{205}Tl , если известно, что для ^{81}Tl этот сдвиг $\delta(hv)_{203} = -8,25$ эВ, так как энергия ионизации K -электрона уменьшается по сравнению со случаем точечного ядра.

5.57* Считая, что взаимодействие атомов в молекуле HCl описывается потенциалом Кратцера $U(r) = 2\epsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{r} \right)^2 - \frac{\sigma}{r} \right]$, определить относительное изменение частоты $\Delta\omega/\omega_0$ колебаний молекулы при возбуждении ее с вращательного уровня с $l = 0$ на уровень $l = 10$. В молекуле HCl $\epsilon = 4,62$ эВ, $\sigma = 1,27$ Å. Получить точное выражение для спектра молекулы.

5.58. Шарик массой $m = 1$ г подведен на пружинке длиной $l_0 = 10$ см, частота колебаний этого осциллятора $f_0 = 1$ кГц. Какова должна быть длина пружинки, чтобы частота осциллятора стала равной $f = 10$ кГц? При какой температуре у такого осциллятора будет возбуждаться преимущественно первое квантовое состояние?

5.59. Современная технология позволяет изготавливать микроминиатюрные механические осцилляторы, собственные частоты кото-

рых лежат в гигагерцевом диапазоне. Это открывает возможность наблюдать квантовый характер колебаний (дискретность низколежащих возбуждений). Какова должна быть чувствительность измерительного прибора, чтобы при температуре $T = 70$ мК обнаружить тепловые колебания одномерного осциллятора массой 0,1 мкг и частотой $f_0 = 1$ ГГц?

5.60. В спектре угольной дуги хорошо видны вращательные полосы молекулы CN. Если откладывать расстояние между вращательными уровнями (в см^{-1}) в порядке убывания длины волн перехода в зависимости от величины вращательного квантового числа, то все они укладываются на прямую линию с наклоном $\alpha = 3,8 \text{ см}^{-1}$. Найти межъядерное расстояние у этой молекулы.

5.61. Газоразрядная трубка наполнена водородом с небольшой примесью дейтерия. Каково должно быть относительное разрешение оптического спектрометра ($\alpha = \Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$), чтобы по исследованию электронно-колебательного перехода в спектре молекулы водорода определить наличие дейтерия? Жесткости и межъядерные расстояния у этих молекул одинаковы. Частота колебаний молекулы водорода $\omega_h = 8,25 \cdot 10^{14}$ рад/с. Считать что электронные возбуждения молекулы водорода соответствуют атомным состояниям $4p$ и $2s$. Изотопический сдвиг не учитывать.

5.62* Найти разность энергий основного состояния молекул ортовородора (суммарный спин протонов равен 1) и параводорода (суммарный спин протонов равен 0). Считать, что кривые потенциальной энергии для этих молекул практически одинаковы. Равновесное расстояние между ядрами для этих молекул считать одинаковым и равным $d_0 = 0,74 \text{ \AA}$.

Указание. При инверсии координат волновая функция частицы умножается на $(-1)^l$, где l — орбитальный момент количества движения.

§ 6. Спин. Атом в магнитном поле. Эффект Зеемана. Магнитный резонанс

6.1. Пучок циркулярно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм падает на зачерненный диск, подвешенный на тонкой нити так, что он может совершать крутильные колебания относительно оси. При этом измеряется установившийся угол поворота диска массой $m = 1$ г и радиусом $r = 5$ см. Найти период собственных колебаний диска T , если при мощности светового потока $N = 10$ Вт угол поворота диска составил $\alpha = 1''$.

6.2. Абсолютно черная пластинка площадью $S = 10 \text{ см}^2$ освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм, поляризованным по кругу. Интенсивность света равна $\mathcal{I} = 30 \text{ Вт/см}^2$. Какой вращающий момент M испытывает пластинка? Зависит ли M от

распределения интенсивности в пучке? Как изменится вращающий момент, если черную пластинку заменить на кристаллическую пластинку в $\lambda/4$? Какую надо взять кристаллическую пластинку, чтобы вращающий момент M удвоился?

6.3. Эллиптически поляризованный параллельный световой поток с длиной волны $\lambda = 600$ нм и интенсивностью $\mathcal{I} = 30 \text{ Вт}/\text{см}^2$ падает перпендикулярно на абсолютно черную пластинку. Площадь поперечного сечения светового потока $S = 10 \text{ см}^2$. Отношение длин главных полуосей эллипса поляризации в световом пучке составляет $a/b = 2$. Найти вращающий момент M , который испытывает пластинка при поглощении света.

6.4. Поляризованный по правому кругу световой поток с длиной волны $\lambda = 500$ нм, интенсивность которого составляет $\mathcal{I} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2)$ (такой интенсивностью обладает солнечное излучение на границе земной атмосферы), падает на двоякотрепломляющую пластинку в $\lambda/2$. Как будет поляризован свет после прохождения пластинки? Определить вращающий момент на единицу площади (M/S) такой пластинки.

6.5. На кварцевую пластинку в $\lambda/4$ перпендикулярно падает пучок линейно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 628$ нм и мощностью $N = 3 \text{ Вт}$. При каких условиях пластинка будет испытывать вращающий момент и каковы его значение и направление?

6.6. Некогерентная смесь естественного и линейно поляризованного света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и интенсивностью $\mathcal{I} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ эрг}/(\text{с} \cdot \text{см}^2)$ (такой интенсивностью обладает солнечное излучение на границе земной атмосферы) падает на двоякотрепломляющую пластинку в $\lambda/4$. Определить вращающий момент на единицу площади (M/S) такой пластинки, если направление колебаний в линейно поляризованном свете составляет угол 45° с главными направлениями пластинки. Известно, что при анализе падающего излучения с помощью поляризатора выполняется соотношение $\mathcal{I}_{\max}/\mathcal{I}_{\min} = 3$.

6.7* Параллельный пучок монохроматического излучения (длина волны в вакууме $\lambda = 496 \text{ мкм}$), поляризованного по кругу, падает нормально на решетку, изготовленную в виде натянутых проволочек с расстоянием между ними $d \ll \lambda$. При таких условиях решетка полностью пропускает излучение, поляризованное так, что электрический вектор направлен перпендикулярно проволочкам, и отражает излучение с поляризацией, повернутой на 90° . Найти вращающий момент M и силу F , действующих на решетку, если интенсивность потока в пучке $\mathcal{I} = 10 \text{ Вт}/\text{см}^2$, а облучаемая поверхность решетки $S = 10 \text{ см}^2$.

6.8. Пучок продольно поляризованных по спину электронов с током 100 А и кинетической энергией 100 кэВ поглощается цилиндром Фарадея. Определить силу и крутящий момент, действующие на цилиндр. Пучок электронов направлен параллельно оси цилиндра.

6.9. С какой угловой скоростью ω и в каком направлении должен начать вращаться цилиндр, подвешенный в магнитном поле B , на-

правленном параллельно его оси вертикально вверх, если изменить направление поля на обратное? Считать, что цилиндр намагничивается до насыщения. (Момент импульса электрона в атоме равен l , число атомов в цилиндре N , момент инерции цилиндра I .)

6.10. Какое значение для ω следует ожидать в упрощенном опыте Эйнштейна–де Гааза (предыдущая задача), если длина цилиндра $L = 1$ см, его масса $m = 1$ г, цилиндр сделан из железа и если предположить, что момент импульса каждого атома равен таковому для электрона на первой боровской орбите? Спин электрона не учитывать.

6.11. На сколько компонент расщепится при проведении опыта Штерна–Герлаха пучок атомов водорода, находящийся в основном состоянии?

6.12* Пучок атомов натрия, находящихся в основном состоянии, вылетает из печи, температура которой $T = 350$ К. Пучок расщепляется в поперечном неоднородном магнитном поле с градиентом $(dB/dx = 50 \text{ Тл/м}$ на пути $l = 1$ см. Детектор удален от магнита на расстояние $L = 6,5$ м. Найти расстояние s между пятнами на экране.

6.13. Пучок атомов лития, находящихся в основном состоянии с максимальной кинетической энергией $T = 0,1$ эВ, проходит через магнит типа Штерна–Герлаха длиной $l = 6$ см с градиентом поля $dB/dx = 5 \cdot 10^4 \text{ Гс/см}$. Сразу за магнитом расположена система из двух одинаковых диафрагм S диаметром d , находящихся на расстоянии $L = 1$ м одна от другой (рис. 48). При какой минимальной величине диаметра d_{\min} компоненты разделенного пучка пройдут через систему диафрагм?

6.14. Пучок атомов ванадия ($A = 50$), находящихся в состоянии ${}^4F_{3/2}$, пропускается через сильное неоднородное магнитное поле. На сколько компонент разобьется такой пучок? На какой угол разойдутся соседние компоненты пучка, если участок с неоднородным полем имеет протяженность $l = 25$ см, градиент поля в нем $dB/dx = 5 \cdot 10^4 \text{ Гс/см}$, а скорость атомов $v = 500 \text{ м/с}$?

6.15. Параллельный пучок нейтронов с энергией $T = 0,025$ эВ проходит через коллимирующую щель шириной $d = 0,1$ мм и затем через зазор в магните Штерна–Герлаха длиной $L = 1$ м. Оценить значение градиента поля dB/dx , при котором угол магнитного отклонения компонент пучка равен углу дифракционного уширения. Магнитный момент нейтрона $\mu_n = -9,66 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс.

6.16* В опытах Шалла (1968 г.) наблюдалось расщепление пучка нейтронов на два пучка при преломлении на границе однородного магнитного поля. Найти малый угол θ между направлениями преломления пучков. Однородное магнитное поле имеет индукцию $B = 2,5$ Тл. Нейтроны с дебориевской длиной волны $\lambda = 0,5$ нм падают под углом $\varphi = 30^\circ$ к достаточно резкой границе магнитного поля.

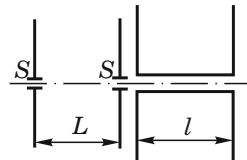


Рис. 48

6.17* Определить возможную мультиплетность атомов H, He, Li, Mg, Fe, Hg, U, Cl.

6.18. Какова возможная мультиплетность ионов Sr^+ , Li^+ , Ca^+ , C^{2+} , O^{4+} ?

6.19. Какова наивысшая мультиплетность атомов элементов третьей группы?

6.20. Желтый дублет Na возникает при переходе электронов $3^2P \rightarrow 3^2S$ и соответствует длинам волн $\lambda_1 = 5896 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 5890 \text{ \AA}$. Найти энергетическое расстояние $\Delta\mathcal{E}$ между соответствующими подуровнями терма 3^2P (мультиплетное расщепление). Оценить среднюю величину эффективного магнитного поля B , действующего на «оптический» электрон.

6.21* При переходе $P \rightarrow S$ из возбужденного состояния атома в основное испускается дублет $\lambda_1 = 455,1 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 458,9 \text{ нм}$. Какие линии, соответствующие переходу $^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{3/2}$, будут наблюдаться в спектре поглощения сильно разреженного газа, состоящего из таких атомов, при наложении магнитного поля 50 кГс при температуре $T = 0,5 \text{ К}$?

6.22. В отсутствие магнитного поля газ поглощает электромагнитное излучение с длиной волны $\lambda = 500 \text{ нм}$, соответствующее переходу из основного состояния $^2P_{1/2}$ в возбужденное $^2D_{3/2}$. Как изменится спектр поглощения этого газа в окрестности этой длины волны при наложении магнитного поля $B = 2 \text{ кГс}$ при температуре, близкой к комнатной? В спектре испускания этого газа в окрестности $\lambda = 500 \text{ нм}$ наблюдается дублет с $\Delta\lambda = 0,5 \text{ нм}$, соответствующий переходам $^2D_{3/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$, $^2D_{3/2} \rightarrow ^2P_{3/2}$.

6.23. На сколько компонент расщепится в слабом магнитном поле мультиплет с заданным полным моментом J ?

6.24. Найти энергетическое расщепление термов атомов группы щелочных металлов, помещенных в слабое магнитное поле.

6.25. На сколько компонент расщепится в слабом магнитном поле линия Na, отвечающая переходу $^2F_{7/2} \rightarrow ^2D_{5/2}$?

6.26. Найти число компонент сложного эффекта Зеемана линии Na, указанной в предыдущей задаче, которые поляризованы по магнитному полю.

6.27* Определить расщепление спектральной линии $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ в слабом магнитном поле. Для натрия эта линия является коротковолновой компонентой ($\lambda = 589,0 \text{ нм}$) двойной линии D с $\Delta\lambda = 0,6 \text{ нм}$. Какие магнитные поля в этом случае являются слабыми?

6.28. На сколько уровней расщепится в сильном магнитном поле терм с $L=3$ и $S=0$? Какова разность энергий соседних уровней?

6.29. На сколько компонент расщепится в магнитном поле спектральная линия, связанная с оптическим переходом $L=3 \rightarrow L=2$ (излучается E1-фотон), при простом эффекте Зеемана?

6.30.* В сильном магнитном поле **B** при наблюдении в направлении, перпендикулярном полю (поперечный эффект Зеемана), в спек-

трёх излучения имеются три линейно поляризованных линии: несмещённая спектральная линия с длиной волны λ и электрическим вектором, направленным вдоль магнитного поля, и две смещённые — с электрическим вектором $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Это излучение пропускается через два скрещенных поляризатора, между которыми находится анизотропная кристаллическая пластина с заданными Δn и d . Оптическая ось пластины составляет углы 45° с направлениями поляроидов. При какой величине магнитного поля в спектре излучения будут видны лишь две крайние линии?

6.31. Атомарный водород помещен в магнитное поле 2 Тл, много большее характерного поля атома, т. е. магнитного поля атома, действующего на электрон. Определить максимальную дополнительную энергию (в эВ), которую приобретает атом в состоянии с $n = 3$, и нарисовать картину расщепления этого уровня.

6.32. Наблюдается простой поперечный эффект Зеемана в магнитном поле $B = 5000$ Гс. Какова должна быть минимальная длина L дифракционной решетки, чтобы разрешить все линии зеемановского триплета?

6.33. При какой минимальной ширине L дифракционной решетки, имеющей $n = 600$ линий/мм, можно разрешить в первом порядке дублет простого эффекта Зеемана для спектральной линии $\lambda = 0,612$ мкм? Напряженность магнитного поля $B = 10$ кГс.

6.34* С помощью эшелона Майкельсона наблюдается зеемановское расщепление D -линий натрия в магнитном поле $B = 5000$ Гс (сложный эффект). Какова должна быть максимальная толщина d пластины, чтобы эшелон был пригоден для исследования расщепления? Показатель преломления материала пластины $n = 1,5$. Под D -линиями Na понимают две линии не расщепленного полем дублета $3^2P_{3/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$ и $3^2P_{1/2} \rightarrow 3^2S_{1/2}$.

6.35. Определить верхний предел расстояния L_{\max} между зеркалами интерферометра Фабри–Перо, чтобы с его помощью можно было исследовать (без перекрытия спектров разных порядков) простой эффект Зеемана в магнитном поле $B = 1$ Тл.

6.36. Какой эффект Зеемана — простой или сложный — наблюдается при расщеплении спектральной линии ${}^1D_2 \rightarrow {}^1F_3$ в магнитном поле $B = 10^4$ Гс? В каких пределах должно лежать расстояние L между зеркалами интерферометра Фабри–Перо, чтобы обнаружить и исследовать зеемановское расщепление рассматриваемой линии? Зеркала посеребрены так, что эффективное число отражений между ними $N_{\text{эфф}} = 20$.

6.37* Найти зеемановское расщепление $\Delta\omega$ спектральной линии ${}^2D_{3/2} \rightarrow {}^2P_{1/2}$. Указать число компонент в расщепленной линии.

6.38. Цезий принадлежит к числу щелочных металлов. При $P \rightarrow S$ -переходе в атомарном цезии испускается дублет, состоящий из двух линий: $\lambda_1 = 0,4555$ мкм и $\lambda_2 = 0,4593$ мкм. Найти расщепление термов этого дублета в магнитном поле. Какими формулами

описывается в этом случае расщепление линий в магнитном поле с индукцией $B = 3$ Тл: формулами для нормального или аномального эффектов Зеемана?

6.39. В спектре лития две первые линии главной серии принадлежат переходам $2^2P_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$ и $2^2P_{3/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$. Длины волн этих линий равны $\lambda_1 = 0,670780$ мкм и $\lambda_2 = 0,670795$ мкм. Оценить индукцию B магнитного поля, действующего на спиновый магнитный момент электрона, которое создает орбитальное движение электрона в атоме лития в состоянии $2P$.

6.40. Так как атом мюония (μ^+e^-) состоит из двух «точечных» частиц, то для него не нужно вводить при расчете уровней энергии никаких поправок на конечный размер ядра. В результате очень точных измерений частоты перехода $1^2S_{1/2} \rightarrow 2^2S_{1/2}$, проведенных в 1992 г., было получено значение $v = 2455\,529$ ГГц. Найти из этих данных отношение массы мюона к массе электрона.

6.41. Оценить расщепление уровня $n = 2, l = 1$ водорода из-за спин-орбитального взаимодействия.

Указание. Энергия взаимодействия спинового магнитного момента с полем, созданным его орбитальным движением, пропорциональна $\cos \mathbf{1s}$, где 1 — орбитальный и s — спиновый моменты.

6.42. Оценить дублетное расщепление первой линии серии Лаймана в спектре излучения водорода, предполагая, что состояние $n = 1$ не расщепляется, а состояние $n = 2$ расщеплено на величину, вычисленную в задаче 6.41.

6.43. Показать, учитывая спин-орбитальное взаимодействие, что интервалы между компонентами одного мультиплета (в шкале частот) относятся, как целые числа. Чему равны эти числа?

Указание. См. задачу 6.41.

6.44.* Оценить, какое минимальное магнитное поле B можно обнаружить у звезды типа Солнца (период вращения $\tau = 10^6$ с, радиус $R = 10^{10}$ см, температура поверхности Солнца $T = 6 \cdot 10^3$ К) с помощью эффекта Зеемана в оптической области спектра ($\omega_0 = 10^{15}$ с $^{-1}$).

6.45. Найти минимальную величину магнитного поля B , в котором происходит перекрытие крайних компонент магнитных подуровней атома водорода в возбужденных состояниях с главными квантовыми числами $n_1 = 10$ и $n_2 = 11$. Спиновый магнитный момент электрона не учитывать.

6.46. Оценить величину расщепления $2p$ -состояния позитрония, вызванного взаимодействием спиновых магнитных моментов позитрона и электрона.

6.47. Определить отношение интервалов между соседними подуровнями сверхтонкой структуры атомного мультиплета с заданным значением полного момента J . Спин ядра равен I .

Указание. Спином ядра принято называть его полный момент импульса.

6.48. Взаимодействие магнитных моментов протона и электрона в атоме водорода приводит к расщеплению энергетических уровней и возникновению сверхтонкой структуры. Излучение межзвездного атомарного водорода, находящегося в основном состоянии, вызвано переориентацией электронного спина, т. е. переходами между компонентами сверхтонкой структуры. Оценить длину волны λ этого излучения. Для оценки заменить истинное распределение плотности спинового магнитного момента электрона таким, которое дает однородно намагниченный шар радиусом r_B . Размагничивающий фактор шара $\beta = 4\pi/3$.

Указание. Магнитное поле внутри шара $\mathbf{H} = -\beta \mathbf{M}$, где \mathbf{M} — намагниченность. Магнитный момент покоящегося протона равен $\mu_p = g_{sp}\mu_{яд} s_p$, где $g_{sp} = 5,58$ — спиновый g -фактор протона, s_p — его спин, $\mu_{яд}$ — ядерный магнетон Бора.

6.49. Магнитное поле, создаваемое электроном с $l \neq 0$ в месте нахождения ядра, является суммой поля орбитального движения $\mathbf{B}_l = 2\frac{\mu_l}{r^3} = 2g_l\mu_B\frac{1}{r^3}$ и поля магнитного диполя, связанного с распределением спиновой плотности. Апроксимируя последнее как $\mathbf{B}_s = 2\frac{\mu_s}{r^3} = 2g_s\mu_B\frac{s}{r^3}$, оценить сверхтонкое расщепление уровня $2p_{3/2}$ в атоме водорода. Спиновые g -факторы частиц: для протона $g_{sp} = 5,58$, для электрона $g_s = -2$, $g_l = -1$.

6.50. Хорошо известно, что космическое излучение на длине волны $\lambda = 21$ см обусловлено сверхтонким расщеплением основного состояния атомарного водорода. Оценить на основе этих данных величину энергетического расщепления (в эВ) $2p$ -состояния позитрона.

6.51. Взаимодействие магнитных моментов нейтрона и электрона может формально привести к связанныму стабильному состоянию этих частиц. Каков получается характерный размер такой системы? Движение электрона считать нерелятивистским.

6.52. Система из двух тождественных нейтральных частиц со спином $1/2$ находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме шириной d с бесконечно высокими стенками. Каждая частица обладает массой m и магнитным моментом μ , направленным параллельно механическому моменту. Определить величину магнитного поля, которое необходимо приложить для намагничивания такой системы. Дипольным взаимодействием частиц пренебречь.

6.53. Атом водорода в основном состоянии помещен в магнитное поле \mathbf{B} . Оставаясь в рамках боровской модели атома водорода, оценить, при какой величине поля размеры атома в плоскости, перпендикулярной \mathbf{B} , начнут уменьшаться.

6.54. Найти энергию магнитного взаимодействия двух атомов водорода, находящихся на расстоянии $3 \cdot 10^{-6}$ см. Считать, что электроны в атомах движутся по первым боровским орбитам, а орбиты обоих атомов лежат в одной плоскости. Спиновый магнитный момент электрона не учитывать.

6.55. Свободные атомы могут обладать магнитным моментом, но не имеют дипольного электрического момента. Атомы, входящие в состав кристаллической решетки, при известных условиях могут иметь такой момент. В этом случае возможен паразелектрический резонанс, аналогичный парамагнитному. Найти дипольный момент атома $p_{\text{ат}}$, если известно, что резонансное поглощение электромагнитных волн с длиной волны $\lambda = 5$ мм наблюдается при напряженности постоянного электрического поля $E = 2,5 \cdot 10^3$ кВ/м. Оценить размер l атомного диполя.

6.56* Известно, что в сильных магнитных полях, когда магнитное расщепление μB превышает расстояние между линиями тонкой структуры ΔE_{SL} , в оптических спектрах, соответствующих $n^2P \rightarrow n^2S$ -переходам, наблюдаются три линии. Однако при измерениях с высокой разрешающей способностью видно большее число линий спектра. Их наличие обусловлено спин-орбитальным взаимодействием. Вклад этого взаимодействия в энергию атома можно рассматривать как малую добавку и считать его равным $A\langle(\mathbf{S}, \mathbf{L})\rangle$, где A — константа, \mathbf{S} , \mathbf{L} — спиновый и орбитальный моменты атома, а угловые скобки означают усреднение по направлению векторов \mathbf{S} и \mathbf{L} . Нарисовать истинную картину расщепления атомных уровней и результирующую структуру спектра при учете спин-орбитального взаимодействия. Чему равна величина тонкого расщепления спектра?

6.57. При наблюдении ЯМР на ядрах ^{25}Mg обнаружено резонансное поглощение излучения на частоте $v = 1,4$ МГц в поле $B = 5,4$ кГс. У ядра ^{25}Mg спин $I = 5/2$. Найти g -фактор и магнитный момент ядра (см. указание к задаче 6.47).

6.58. Для измерения магнитных полей $B \approx 0,1$ кГс используют метод ЯМР в проточной воде, в котором вода предварительно намагничивается пропусканием ее через область магнитного поля $B_0 = 10$ кГс. Время перемещения воды до измерительной ячейки гораздо меньше времени релаксации намагниченности. Оценить увеличение сигнала ЯМР в намагниченной воде по сравнению с сигналом для ненамагниченной воды.

Указание. В экспериментах обычно измеряют поглощение мощности (энергии) переменного поля. Поэтому сигнал — это поглощенная мощность (энергия), равная $h\nu N$, где N — число поглощенных квантов. Оно равно числу ядер (электронов), совершивших переход между двумя магнитными подуровнями, т. е. разности заселенностей двух (для простоты) уровней при данной температуре.

6.59. Как изменится величина сигнала ЯМР при увеличении резонансной частоты в 2 раза? Считать, что магнитная энергия ядра $\mu_{\text{яд}} B \ll kT$. (См. указание к задаче 6.58.)

6.60* В методе адиабатического размагничивания низкая температура получается при выключении внешнего магнитного поля за счет энергии, затрачиваемой на разориентацию атомных или ядерных магнитных моментов в теплоизолированном образце. Оценить

предельно низкую температуру, до которой можно охладить систему ядер ^{63}Cu таким методом. Спин ядра ^{63}Cu равен $I = 3/2$, среднее расстояние между ядрами в решетке меди $d = 2,5\text{\AA}$. Известно, что ядерный магнитный резонанс на ядрах ^{63}Cu наблюдается на частоте $\nu = 11,31 \text{ МГц}$ в поле $B = 10 \text{ кГс}$.

6.61* Электронная конфигурация трехвалентного иона иттербия представляет собой полностью заполненные оболочки $\text{Xe} + 4f^{13}$. На какой частоте наблюдается электронный парамагнитный резонанс на ионах Yb^{3+} солей трехвалентного иттербия в магнитном поле $B = 10^3 \text{ Гс}$?

Указание. По правилу Хунда в основном состоянии $J = |L - S|$, если заполнено меньше половины оболочки, и $J = L + S$, если больше половины.

6.62. Электронный парамагнитный резонанс (ЭПР) обусловлен переходами между подуровнями с различными проекциями магнитного момента. Найти частоту ЭПР для солей трехвалентного празеодима в магнитном поле $B = 0,1 \text{ Тл}$. Электронная конфигурация Pr^{3+} представляет собой полностью заполненные оболочки $\text{Xe} + 4f^2$. (См. указание к задаче 6.61.)

6.63. Определить намагниченность насыщения M_0 образца металлического диспрозия (плотность $\rho = 8,55 \text{ г}/\text{см}^3$) при температуре, близкой к абсолютному нулю. Полный момент иона диспрозия $\text{Dy}^{3+} J = 15/2$, а электронный парамагнитный резонанс на ионах диспрозия наблюдается в магнитном поле $B_{\text{рез}} = 1000 \text{ Гс}$ на частоте $\nu = 1,9 \cdot 10^9 \text{ Гц}$.

6.64. Определить намагниченность насыщения M_0 образца металлического эрбия (плотность $\rho = 9,07 \text{ г}/\text{см}^3$) при температуре, близкой к абсолютному нулю, если известно, что электронная конфигурация иона Er^{3+} представляет собой полностью заполненную оболочку $\text{Xe} + 4f^{11}$. На какой частоте ν наблюдается электронный парамагнитный резонанс на ионах эрбия в магнитном поле $B = 1000 \text{ Гс}$?

6.65. В атомах хлора, находящихся в основном состоянии ${}^2P_{3/2}$, один из электронов с $l_z = 1$ из $3p$ -оболочки переведен в $3d$ -оболочку. При этом полученная конфигурация обладает максимально возможными **L** и **S** и минимально возможным **J**. На сколько компонент расщепится пучок таких возбужденных атомов хлора, если его пропустить через прибор типа Штерна–Герлаха? Объяснить полученный результат на основе векторной модели.

6.66* Образец тефлона (полимера с химической формулой $(\text{CF}_2)_n$, где n – целое число) массой 50 г намагничивается в магнитном поле $B = 20 \text{ кГс}$ при температуре $T = 0,05 \text{ К}$. Намагничивание обусловлено расщеплением основного состояния ядра фтора ${}^{19}\text{F}$ (спин ядра $I = 1/2$, см. указание к задаче 6.47) в магнитном поле на два подуровня. При выключении поля образец получает момент импульса

$L = 24,2 \cdot 10^{-6}$ эрг · с (аналог эффекта Эйнштейна—де Гааза в ферромагнетиках). Определить величину магнитного момента ядра фтора.

6.67. В атоме гелия состояние 3S_1 отстоит от основного примерно на 20 эВ. Оценить, в какое магнитное поле нужно поместить атом гелия, чтобы выстроить спины его электронов параллельно.

6.68* Образование молекул водорода происходит только в том случае, если спины двух сталкивающихся атомов антипараллельны. В настоящее время предпринимаются попытки хранения атомарного водорода при низких температурах в сильных магнитных полях. Оценить степень деполяризации α атомарного водорода, определяемую отношением числа атомов с антипараллельными спинами к их полному числу, при температуре $T = 1$ К в магнитном поле $B = 10$ Тл.

6.69* Атомы, обладающие магнитным моментом, могли бы образовывать упорядоченную структуру за счет магнитного взаимодействия. Оценить, при какой максимальной температуре это еще возможно, если межатомное расстояние $a = 3\text{ \AA}$ (типичное значение постоянной решетки в твердом теле).

6.70* Электрон, движущийся с постоянной скоростью в плоскости, перпендикулярной силовым линиям однородного магнитного поля $B = 10^3$ Гс, совершает финитное движение. Согласно квантовой механике такое движение квантуется. Используя аналогию с классическими уравнениями движения Гамильтона, определить квантованные значения энергии электрона, соответствующие этому орбитальному расщеплению (уровни Ландау). Какова возможная минимальная энергия электрона? Как изменится спектр разрешенных энергий при учете спина электрона?

Указание. В присутствии магнитного поля связь между скоростью и импульсом заряженной частицы имеет вид $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}$,

где \mathbf{A} — векторный потенциал. Для постоянного магнитного поля \mathbf{B} , направленного по оси z , его можно взять в виде $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ — калибровка Ландау.

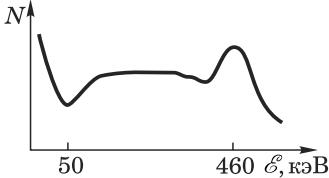


Рис. 49

на, найти минимальную площадь, описываемую электроном в координатном и импульсном пространстве.

Указание. Воспользоваться результатами задачи 6.70.

6.72* В рентгеновском спектре нейтронной звезды массой $M = 10^{33}$ г наблюдается провал (поглощение излучения) при энергии $\mathcal{E}_1 = 50$ кэВ и максимум при $\mathcal{E}_2 = 460$ кэВ (рис. 49). Поглощение при энергии \mathcal{E} связывают с квантовыми переходами между уровня-

ми свободных электронов в магнитном поле звезды (уровнями Landay), а максимум при \mathcal{E}_2 — с аннигиляцией электрон-позитронных пар. Учитывая смещение спектра в гравитационном поле звезды, оценить радиус звезды и величину ее магнитного поля.

6.73* В экспериментах Цзяньсин Ву с сотрудниками по наблюдению несохранения четности в слабых взаимодействиях изучался β -распад ядер, которые были внедрены в парамагнитную соль. Последняя служила для получения низких температур ($T = 0,01$ К) методом адиабатического размагничивания (см. задачу 6.60). Электроны парамагнитной соли создавали на ядрах кобальта магнитное поле $H = 10^5$ Э и тем самым поляризовали ядра по спину. Какова была бы в экспериментах такого рода степень поляризации ядер $P = (N^+ - N^-)/(N^+ + N^-)$, где N^+ , N^- — числа ядер со спинами по полю и против поля, если бы изучался β -распад из возбужденного состояния со спином $I = 1$, $g = 2$?

6.74* Атом водорода находится в состоянии с энергией $\mathcal{E} = -3,4$ эВ, и при этом радиальная часть волновой функции ни разу не обращается в нуль на интервале $0 < r < \infty$. На сколько подуровней расщепится данный энергетический уровень в сильном магнитном поле?

6.75. Атом водорода находится в состоянии с энергией $\mathcal{E} = -3,4$ эВ, и при этом радиальная часть волновой функции один раз обращается в нуль на интервале $0 < r < \infty$. На сколько линий расщепится данный уровень энергии в слабом и сильном магнитных полях?

6.76* В спектрах газовых туманностей наблюдаются линии, которые долго не могли приписать ни одному из известных элементов и поэтому приписывали их гипотетическому элементу «небулию» (nebula — туманность). Впоследствии выяснилось, что это — линии ионов кислорода и азота. Наиболее интенсивные линии «небулии» соответствуют переходам ${}^1D_2 \rightarrow {}^3P_2$ ($\lambda_1 = 5007$ Å) и ${}^1D_2 \rightarrow {}^3P_1$ ($\lambda_2 = 4959$ Å) иона O^{++} . Найти длину линии перехода ${}^3P_1 \rightarrow {}^3P_0$ в схеме Рассела–Саундерса (LS -схема).

Указание. Энергия спин-орбитального взаимодействия есть $\mathcal{E}_{SL} = A \langle (\mathbf{L}, \mathbf{S}) \rangle$, где A — константа (для иона O^{++} константа $A > 0$), а угловые скобки означают усреднение по направлению векторов орбитального момента \mathbf{L} и спина \mathbf{S} .

6.77. В спектрах солнечной короны наблюдаются линии, которые долго не могли приписать ни одному из известных элементов, поэтому их приписывали гипотетическому элементу «коронию». Впоследствии выяснилось, что это — в основном линии ионов железа и никеля. Среди наблюдавшихся линий «корония» есть линии, соответствующие переходам ${}^1D_2 \rightarrow {}^3P_2$ ($\lambda_1 = 2649$ Å) и ${}^1D_2 \rightarrow {}^3P_1$ ($\lambda_2 = 3987$ Å) иона железа Fe^{10+} . Найти длину волны линии перехода ${}^3P_0 \rightarrow {}^3P_1$ в схеме Рассела–Саундерса (LS -схема).

Указание. Энергия спин-орбитального взаимодействия есть $\mathcal{E}_{SL} = A\langle(\mathbf{L}, \mathbf{S})\rangle$, где A – константа (для иона Fe^{10+} константа $A < 0$), а угловые скобки означают усреднение по направлению векторов орбитального момента \mathbf{L} и спина \mathbf{S} .

6.78. Возбужденное состояние атома гелия $1s^1 2s^1$ может иметь полный спин электронной оболочки S как 1 (ортогелий), так и 0 (парамагелий). Энергии полной ионизации этих состояний $W_{\text{орт}} = 59,2 \text{ эВ}$ и $W_{\text{пара}} = 58,4 \text{ эВ}$. Кроме энергии взаимодействия с ядром, в эти энергии вносят вклад не зависящая от полного спина часть энергии кулоновского отталкивания электронов \mathcal{E}_k и зависящая от полного спина часть, называемая энергией обменного взаимодействия, $V = -\frac{A}{2}(1 + 4\langle\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\rangle)$, где A – константа, s_1, s_2 – спины электронов, $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, а угловые скобки означают усреднение по направлениям спинов. Найти A и \mathcal{E}_k , считая, что оба электрона находятся в поле ядра с $Z = 2$, т. е. не учитывая экранировку поля ядра электронами.

6.79. Атом хлора, находящийся в основном состоянии ${}^2P_{3/2}$, помещен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^4 \text{ Гс}$. Найти частоту переменного поля, при которой возникает резонансное поглощение энергии атомами хлора. Расстояние между подуровнями тонкой структуры атома хлора составляет 0,11 эВ. Угловой момент ядра не учитывать.

6.80. Пучок атомов, находящихся в основном состоянии, расщепляется в эксперименте типа Штерна–Герлаха на 9 компонент. Магнитный момент атома в этом состоянии равен $2,4\mu_B$. Найти орбитальный момент атома, если мультиплетность данного состояния равна 5.

Указание. Моментом в атомной физике называется величина его максимальной проекции.

6.81. В основном состоянии атома никеля его магнитный момент равен $5\mu_B$. На сколько компонент расщепится пучок таких атомов в эксперименте типа Штерна–Герлаха? Без учета спин-орбитального взаимодействия терм атома никеля был бы 3F .

Указание. Моментом в атомной физике называется величина его максимальной проекции.

6.82. В экспериментах Парселла, приведших к открытию ЯМР в 1945-м году, исследовалось поглощение радиоволн ($\lambda = 10 \text{ м}$) образцом парафина, помещенным в постоянное магнитное поле. В качестве источника поля использовался электромагнит, сделанный своими руками из деталей, собранных на свалке трамвайного депо г. Бостона. Электромагнит был плохо откалиброван, обнаружить сигнал от протонов не удавалось, и его заметили случайно, когда выключили питание электромагнита (примерно через $t_0 = 10 \text{ с}$). По результатам опытов было найдено, что величина магнитного момента протона $\mu = 2,75\mu_{\text{яд}}$. Считая, что сопротивление катушки электромагни-

та $R = 0,01$ Ом, а ее индуктивность $L = 1$ Гн, оценить, какое поле создавал электромагнит.

6.83. Найти все термы невозбужденного атома углерода, на внешней $2p$ -оболочке которого находятся два электрона (электронная конфигурация $1s^2 2s^2 2p^2$).

6.84. Одной из причин возникновения тонкой структуры уровней энергии в атоме водорода является спин-орбитальное взаимодействие, энергия которого есть $\mathcal{E}_{sl} = A\langle \mathbf{s}\mathbf{l} \rangle$ ($A = \text{const}$, угловые скобки означают усреднение по направлениям векторов \mathbf{s} и \mathbf{l}). При этом сдвиг подуровня $2p_{1/2}$ за счет этого взаимодействия совпадает по знаку с полным сдвигом и составляет $8/15$ от его величины. Найти величину и знак полного сдвига, если константа спин-орбитального взаимодействия для $2p$ -состояния атома водорода равна $A = \alpha^2 Ry/24$ ($\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры).

6.85. Одной из причин возникновения тонкой структуры уровней энергии в атоме водорода является спин-орбитальное взаимодействие, энергия которого есть $\mathcal{E}_{sl} = A\langle \mathbf{s}\mathbf{l} \rangle$ ($A = \text{const}$, угловые скобки означают усреднение по направлениям векторов \mathbf{s} и \mathbf{l}). При этом сдвиг подуровня $2p_{3/2}$ за счет этого взаимодействия противоположен по знаку полному сдвигу и составляет $4/3$ от его величины. Найти величину и знак дополнительного (не спин-орбитального) сдвига, если константа спин-орбитального взаимодействия для $2p$ -состояния атома водорода равна $A = \alpha^2 Ry/24$ ($\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры).

6.86* Оценить возникающую из-за конечности массы ядра поправку к магнитному моменту электрона в ионе ${}^4\text{He}^+$, находящемся в состоянии $2p_{3/2}$. Учесть, что орбитальный момент этого атомного состояния соответствует относительному движению электрона и ядра.

6.87. Атом ртути находится в высоковозбужденном состоянии с конфигурацией внешних электронов $6s14p$, имеющем наибольший возможный полный момент. Найти магнитный момент атома ртути в этом состоянии, которое описывается по схеме jj -связи, когда орбитальный и спиновый моменты каждого электрона складываются в его полный момент, а полные моменты всех электронов складываются в полный момент атома. Учесть, что сохраняющейся величиной является только полный момент состояния.

6.88. Ион меди Cu^{2+} , входящий в состав многих магнитных солей, имеет электронную конфигурацию внешней заполненной оболочки $3d^9$. 1) Определить, пользуясь правилами Хунда, квантовые числа свободного иона меди Cu^{2+} ; записать его спектроскопический символ и вычислить g -фактор. 2) В ионных кристаллах магнитный ион взаимодействует с электрическим полем своих соседей, поэтому его более нельзя считать свободным, и формула Ландэ становится неприменимой. В соли CuGeO_3 (магнитным моментом в этом соединении обладает только ион Cu^{2+}) в одной из ориентаций магнитного

поля относительно кристалла резонансное поглощение наблюдается на частоте $v = 36,5$ ГГц в поле $H = 11,48$ кЭ. Определить по этим данным эффективный g -фактор иона меди в этом кристалле.

6.89. В спектре полярных сияний самая интенсивная желто-зеленая линия с $\lambda = 5577$ Å (аигога borealis) соответствует переходу между состояниями 1S_0 и 1D_2 нейтрального атома кислорода. Определить тип перехода и оценить время жизни возбужденного состояния, считая, что размер атома кислорода равен $a = 1,25$ Å, а время электрических дипольных переходов составляет порядка $\tau_1 \sim 10^{-7}$ с.

6.90.* Современные технологии позволяют получать «закрученные» лазерные пучки, фотоны которых несут орбитальный угловой момент. Для экспериментальной проверки этого положения «закрученный» линейно-поляризованный лазерный пучок мощностью $P = 4$ мВт с длиной волны $\lambda = 633$ нм фокусировался на взвешенные в керосине частицы радиусом $r = 1$ мкм с коэффициентом поглощения $\alpha = 0,25$. При этом частицы вращались с постоянной частотой $f = 4$ Гц. Найти орбитальный угловой момент фотонов, если вязкость керосина $\eta = 1,6$ Пз.

Указание. При вращении с постоянной угловой скоростью Ω в жидкости с вязкостью η частица радиусом r испытывает действие момента вязких сил $M = 8\pi r^3 \eta \Omega$.

§ 7. Ядерные модели. Радиоактивность. Эффект Мессбауэра

7.1. Определить среднюю плотность ядерного вещества, полагая, что радиус ядра равен $R = 1,3 A^{1/3}$ фм, где A – массовое число (число нуклонов). Энергия связи на один нуклон $B = 8,5$ МэВ/нуклон. Средняя масса нуклона $m_N \approx 940$ МэВ/ c^2 .^{*})

7.2. Определить энергию \mathcal{E}_k кулоновского расталкивания протонов в ядре в предположении, что протоны распределены по ядру равномерно. Установить зависимость \mathcal{E}_k от числа нуклонов A и заряда ядра Z . Радиус ядра $R = 1,3 A^{1/3}$ фм.

7.3.* Поверхностная энергия атомного ядра $\mathcal{E}_{\text{пов}} = 17,8 A^{1/3}$ МэВ. Радиус атомного ядра $R = 1,3 A^{1/3}$ фм. Найти поверхностное натяжение σ ядерного вещества. Сравнить найденное значение с поверхностным натяжением ртути ($\sigma_{\text{Hg}} = 470$ эрг/см²).

7.4.* Энергия связи атомных ядер при заданном числе A нуклонов в ядре уменьшается с увеличением числа протонов Z из-за возрас-

^{*}) Радиус ядра определяется по формуле $R_a = r_0 A^{1/3}$. При этом коэффициент при r_0 в зависимости от способа определения (метода измерения) может принимать значения от 1,2 до $1,4 \cdot 10^{-13}$ см. В данном задачнике r_0 принимается равным $1,3 \cdot 10^{-13}$ см.

тания кулоновской энергии $|\mathcal{E}_k| = 0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ МэВ. С другой стороны, при отличии числа нейтронов от числа протонов энергия связи уменьшается на величину $\mathcal{E} = \frac{47,4(N-Z)}{2A}$ МэВ. Определить при заданном A оптимальное значение Z , при котором энергия связи ядра максимальна. Определить Z/A при $A=10; 50; 100; 150$ и 200 . Найти из справочных данных подходящие изотопы.

7.5. С помощью формулы Вайцзеккера найти заряд Z_0 наиболее устойчивого ядра-изобары при заданном нечетном значении A . Выяснить, каков характер активности у ядер ^{27}Mg , ^{29}P , ^{37}K , ^{67}Cu .

7.6.* Разница в энергиях связи ядер трития ^3_1H и гелия ^3_2He обусловлена энергией электростатического взаимодействия протонов. Оценить размеры ядра ^3_2He . Энергии связи ядер ^3_1H и ^3_2He равны соответственно $\mathcal{E}_{\text{H}} = 8,482$ МэВ, $\mathcal{E}_{\text{He}} = 7,718$ МэВ.

7.7.* Ядро $^{27}_{14}\text{Si}$ переходит в «зеркальное» ядро $^{27}_{13}\text{Al}$, испытывая β^+ -распад. Максимальная кинетическая энергия вылетевшего позитрона $\mathcal{E}_{\text{max}} = 3,48$ МэВ. Оценить по этим данным величину r_0 в формуле для радиуса ядра $R = r_0 A^{1/3}$.

7.8. Найти разность энергий связи для пар зеркальных ядер ($^{11}_{5}\text{B}$, $^{11}_{6}\text{C}$) и ($^{13}_{7}\text{N}$, $^{13}_{6}\text{C}$). Показать, что эта разность в значительной степени обусловлена кулоновским взаимодействием протонов в ядре. Энергию связи ядер взять из таблицы в конце сборника.

7.9. Ядро ^7Be «перегружено» протонами и испытывает превращение $^7\text{Be} \rightarrow ^7\text{Li}$. Массы этих атомов равны соответственно 7,0169 и 7,0160 а. е. м. Определить тип β -распада, обуславливающего это превращение.

7.10. В 1942 г. американский физик Аллен измерил максимальную энергию отдачи \mathcal{E}_0 атомов ^7Li , образующихся в результате K -захвата в ядре ^7Be , и она оказалась равной 50 эВ. Оценить на основе этих данных разность масс атомов ^7Be и ^7Li .

7.11. Определить энергию отдачи ядра атома лития, которое образуется в основном состоянии при поглощении электрона с K -оболочки ядром атома бериллия.

7.12.* Потенциальную энергию взаимодействия нуклонов в ядре можно аппроксимировать сферически симметричной прямоугольной ямой (см. задачи 3.16–3.18). При этом в системе центра масс волновая функция основного состояния имеет вне области ямы следующий вид: $\psi = Ae^{-\varkappa r}/r$, где $A = \text{const}$, $\varkappa = 2,3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-1}$. Найти красную границу реакции фоторасщепления дейтрона γ -квантами.

7.13.* Согласно гидродинамической модели ядра Штайнведеля–Енсена протоны и нейтроны образуют сжимаемые и свободно проникающие друг в друга жидкости, двигающиеся внутри жесткой оболочки исходного ядра. Гигантский дипольный резонанс (GDR) в ядрах соответствует возбуждению противофазных колебаний этих жидкостей, при которых протоны и нейтроны в ядре то пространствен-

но разделяются, то равномерно перемешиваются. Используя формулу Вайцзеккера, оценить энергию гигантского дипольного резонанса \mathcal{E}_{GR} по этой модели в сферическом ядре с $A=64$ ($Z=N$), который возникает при возбуждении волны с $kR=2,08$, где $k=2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, R — радиус ядра. Закон дисперсии этих волн считать линейным ($\omega=ku$, где u — скорость распространения колебаний, равная, как в любой жидкости, $u=\sqrt{K/M}$, где в данном случае K — жесткость ядра относительно смещений нуклонов, M — масса ядра).

7.14. Согласно оболочечной модели ядра нейтроны и протоны независимо заполняют потенциальную яму. Определить число нуклонов A , которые могут располагаться на трех первых ядерных оболочках, считая потенциальную яму трехмерной параболической.

7.15.* Простейшей оболочечной моделью ядра является трехмерный гармонический осциллятор. Считая, что потенциальная яма ядра имеет глубину $U_0=-70$ МэВ, а $U(R_0)=0$, где R_0 — радиус ядра, оценить энергию связи нуклона для ядра кислорода $^{16}_8O$.

7.16. Аппроксимируя ядерный потенциал трехмерной параболической ямой глубиной $U_0=-60$ МэВ, оценить энергию однонуклонного возбуждения в ядре $^{40}_{20}Ca$. Считать, что $U(R_0)=0$, где R_0 — радиус ядра.

7.17. У ядра дейтерия — дейтрона d — нет стационарных возбужденных состояний, а энергия связи нуклонов составляет $\mathcal{E}_{cb}=2,23$ МэВ. Аппроксимируя эффективный потенциал нуклон-нуклонного взаимодействия трехмерной сферически симметричной прямоугольной потенциальной ямой глубиной $U_0=-30$ МэВ, оценить радиус эффективного потенциала (см. также задачу 3.18).

7.18. У ядра дейтерия — дейтрона d — нет стационарных возбужденных состояний, а энергия связи нуклонов составляет $\mathcal{E}_{cb}=2,23$ МэВ.

Аппроксимируя эффективный потенциал нуклон-нуклонного взаимодействия трехмерной сферически симметричной прямоугольной потенциальной ямой, оценить среднеквадратичный радиус дейтрана, т. е. среднеквадратичное расстояние между нуклонами (см. задачи 7.12, 3.18 и 3.20). Считать, что глубина ямы велика по сравнению с энергией уровня.

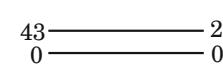


Рис. 50
Ответствуют возбуждению вращения ядра как целого относительно оси, перпендикулярной к оси симметрии ядра. Оценить из этих данных момент инерции J ядра.

7.20. Ядро $^{234}_{92}U$ является продуктом распада основного изотопа урана $^{238}_{92}U$. Определить период полураспада $^{234}_{92}U$, если его содержа-

ние в естественном уране в настоящее время составляет 0,0055%. Период полураствора $^{238}_{92}\text{U}$ $T_8 = 4,51 \cdot 10^9$ лет. Считать, что вначале «наработанного» $^{234}_{92}\text{U}$ не было.

7.21. В настоящее время в природном уране содержится $k_8 = 99,28\%$ $^{238}_{92}\text{U}$ и $k_5 = 0,72\%$ $^{235}_{92}\text{U}$. Какое соотношение между $^{238}_{92}\text{U}$ и $^{235}_{92}\text{U}$ было в момент образования Земли, если возраст Земли равен $4 \cdot 10^9$ лет? Периоды полураствора $T_5 = 0,713 \cdot 10^9$ лет; $T_8 = 4,51 \cdot 10^9$ лет. Вычислить возраст Земли в предположении, что в момент образования Земли содержание $^{235}_{92}\text{U}$ и $^{238}_{92}\text{U}$ было одинаковым.

7.22. Период полураствора $^{234}_{92}\text{U}$ равняется $T_4 = 2,48 \cdot 10^5$ лет. Остался ли хотя бы один атом $^{234}_{92}\text{U}$, который существовал в момент образования Земли — $4 \cdot 10^9$ лет тому назад? Как объяснить, что в природном уране содержится примесь $^{234}_{92}\text{U}$ в количестве 0,0055%?

7.23. Периоды полураствора $^{238}_{92}\text{U}$ и $^{235}_{92}\text{U}$ равны соответственно $T_8 = 4,51 \cdot 10^9$ лет и $T_5 = 0,713 \cdot 10^9$ лет. Определить средние времена жизни этих изотопов.

7.24. Полагая, что перед α -распадом в ядре образуется самостоятельная α -частица, оценить отношение интенсивностей I_1/I_2 двух групп α -частиц с кинетическими энергиями $\mathcal{E}_1 = 6,3$ МэВ и $\mathcal{E}_2 = 5,7$ МэВ, испускаемых ядрами с $Z = 86$ и $A = 220$. В обоих случаях частоту ударов о «стенку» потенциального барьера считать одинаковой.

7.25. Оценить период полураствора $T_{1/2}$ гипотетического радиоактивного ядра, испускающего α -частицы с энергией $\mathcal{E}_\alpha = 1$ МэВ, если ядро $^{239}_{90}\text{Th}$ имеет период полураствора $T_{1/2} = 1,4 \cdot 10^{10}$ лет и испускает α -частицы с энергией $\mathcal{E}_\alpha = 4$ МэВ, а для ядра $^{212}_{84}\text{Po}$ период полураствора равен $T_{1/2} = 3 \cdot 10^{-7}$ с и $\mathcal{E}_\alpha = 8,8$ МэВ.

7.26. Энергия α -частиц, испускаемых тяжелыми ядрами ($Z \sim 90$), равна $\mathcal{E}_\alpha \sim 4,5$ МэВ, а период их полураствора $T_\alpha \sim 7 \cdot 10^8$ лет. Оценить период полураствора такого же ядра по отношению к вылету протона той же энергии $\mathcal{E}_p = 4,5$ МэВ. Считать задачу одномерной, кулоновский потенциал на поверхности ядра высоким ($U \gg \mathcal{E}$), а предэкспоненциальный множитель в выражении для проницаемости барьера константой.

7.27. Исследование свойств α -радиоактивных ядер показало, что ядра в области $Z_1 \sim 90$ испускают α -частицы с энергией $\mathcal{E}_1 \sim 4$ МэВ (например, ядро $^{232}_{90}\text{Th}$), а в области редкоземельных элементов, где $Z_2 \sim 65$, — с энергией $\mathcal{E}_2 \sim 2$ МэВ. Оценить период полураствора редкоземельных ядер T_2 , если известно, что у тяжелых ядер он лежит в районе $T_1 \sim 10^{10}$ лет. Считать, что α -частицы при распаде ядра преодолевают высокий одномерный потенциальный барьер, т. е. $U \gg \mathcal{E}$, а предэкспоненциальный множитель в выражении для проницаемости барьера — константа.

7.28. Оценить высоту кулоновского барьера для α -частиц, испускаемых ядрами $^{222}_{86}\text{Rn}$. Какова у этих ядер ширина барьера (туннельное расстояние) для α -частиц с энергией $\mathcal{E} = 5,5 \text{ МэВ}$?

7.29* При радиоактивном распаде $^{60}_{27}\text{Co}$ испускается электрон, спин которого антипараллелен импульсу. Считая, что электроны вылетают из образца изотропно, оценить, на какой угол φ повернется диск, подвешенный на нити, если образец кобальта нанесен на одну из поверхностей диска. Толщина диска достаточна для полного поглощения в нем электронов, вылетающих в сторону диска. Активность препарата*) $dN/dt = 0,37 \text{ ТБк} = 0,37 \cdot 10^{12} \text{ расп/с}$, модуль кручения нити равен $f = 10^{-6} \text{ дин} \cdot \text{см}/\text{рад}$.

7.30. Содержание изотопа $^{235}_{92}\text{U}$ в природном уране сейчас составляет 0,72%. Свежеприготовленный препарат, содержащий 100 мг химически чистого природного урана, характеризуется α -активностью в 0,043 мКи. Такой же препарат урана, обогащенного до концентрации $^{235}_{92}\text{U}$ в 50%, имеет активность 0,150 мКи. Вычислить, сколько лет назад содержание $^{235}_{92}\text{U}$ составляло 50%. Сравнить полученный результат с возрастом Земли.

7.31.* Оценить по порядку величины время жизни возбужденного уровня ядра с радиусом $R = 4 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ при электрическом мультипольном (дипольном, квадрупольном и т. д.) излучении γ -кванта с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 1 \text{ МэВ}$.

Указание. Классическое выражение для интенсивности, т. е. энергии дипольного излучения заряженного осциллятора в единицу времени, есть $W = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2$, где $\ddot{\mathbf{d}}$ — вторая производная по времени дипольного момента.

7.32. Удельное содержание изотопа $^{14}_6\text{C}$, усвоенного деревом при его жизни**), затем после смерти уменьшается вследствие β -распада с периодом полураспада $T_{1/2} = 5730$ лет. Определить возраст t древянного предмета, обнаруженного при раскопках, если удельная

*) Для 1 распада в секунду установлено название 1 беккерель (1 Бк); 1 Ки (киюри) = $3,7 \cdot 10^{10} \text{ расп/с}$.

**) Суть радиоуглеродного метода определения возраста биологических объектов заключается в следующем. В атмосфере Земли постоянно образуется радиоактивный изотоп углерода $^{14}_6\text{C}$ из атмосферного азота при взаимодействии последнего с нейтронами космического излучения в верхних слоях атмосферы. Живые организмы потребляют его в той или иной форме наряду со стабильным углеродом $^{12}_6\text{C}$. В результате обмена веществ в живом организме, как полагают биологи, концентрация ^{14}C при жизни поддерживается постоянной и одинаковой во всех живых организмах. Полагают также постоянной и не меняющейся в течение тысяч лет концентрацию ^{14}C в атмосфере. После биологической смерти, когда обмен веществ прекращается, радиоуглерод начинает распадаться, и концентрация его уменьшается с временем. По активности препарата, изготовленного из объекта, и определяют его возраст.

активность ^{14}C этого предмета составляет 0,1 от удельной активности***) свежесрубленного дерева.

7.33. Удельное содержание изотопа $^{14}_6\text{C}$, усвоенного деревом при его жизни, уменьшается затем благодаря β -распаду с $T_{1/2} = 5700$ лет. Какой минимальный возраст дерева можно определить по активности $^{14}_6\text{C}$, если регистрируется $N = 10^4$ актов распада? Считать, что скорость образования $^{14}_6\text{C}$ за счет бомбардировки атмосферы космическими лучами от времени не зависит.

7.34. Ядро, пролетая через кристалл, подвергается воздействию периодического поля решетки кристалла, в результате чего возможно резонансное возбуждение ядерных уровней (эффект Окорокова, см. также задачу 4.47). Обусловлен этот эффект тем, что в системе покоя ядра возникает переменное электрическое поле. До какой полной энергии надо разогнать ядро $^{19}_9\text{F}$ фтора, чтобы при пролете через кристалл вольфрама в нем возбуждался уровень с энергией $\mathcal{E} = 110$ кэВ? Период решетки в направлении движения ядра $a = 3,2 \text{ \AA}$.

7.35* Угловой и магнитный момент ядра $^{13}_6\text{C}$ полностью определяются неспаренным нейтроном, находящимся в состоянии $1p_{1/2}$ над полностью заполненной подоболочкой $1p_{3/2}$. Определить магнитный момент μ ядра $^{13}_6\text{C}$ (в ядерных магнетонах Бора). Магнитный момент свободного нейтрона $\mu_n = g_{sn}\mu_{яд}s_n = -1,91\mu_{яд}$, где $g_{sn} = -3,82$ — спиновый g -фактор нейтрона, $s_n = 1/2$ — спин нейтрона.

Указание. Магнитным моментом атомов, ядер принято называть величину максимальной проекции магнитного момента на заданную ось.

7.36. Согласно оболочечной модели ядра в ядре $^{15}_7\text{N}$ неспаренный протон, определяющий его угловой и магнитный моменты, находится в состоянии $1p_{1/2}$ сверх полностью заполненной подоболочки $1p_{3/2}$. Определить величину магнитного момента μ этого ядра (в ядерных магнетонах Бора). Магнитный момент свободного протона $\mu_p = g_{sp}\mu_{яд}s_p = 2,79\mu_{яд}$, где $g_{sp} = 5,58$ — спиновый g -фактор протона, $s_p = 1/2$ — спин протона. (См. указание к задаче 7.35.)

7.37* При учете сверхтонкого взаимодействия интегралом движения является полный угловой момент атома $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$, где \mathbf{I} , \mathbf{J} — полные моменты ядра и электронной оболочки соответственно. Энергия сверхтонкого взаимодействия может быть записана в виде $E_{ct} = A\langle\boldsymbol{\mu}_e\boldsymbol{\mu}_я\rangle$, где $A = \text{const}$, а $\boldsymbol{\mu}_e$, $\boldsymbol{\mu}_я$ — магнитные моменты электрона и ядра соответственно, а угловые скобки означают усреднение

*** Активностью называется величина λN — число ядер (из общего числа N), распадающихся в единицу времени, λ — вероятность распада нестабильного ядра в единицу времени. Удельная активность — активность 1 г радиоактивного препарата. Величина λ называется также константой распада, так как по определению $dN/dt = -\lambda N$.

ние по направлениям векторов магнитных моментов. Найти отношение сверхтонких расщеплений основного состояния атомов водорода и дейтерия, т. е. расстояний между уровнями с разными значениями F . Спиновые g -факторы протона и нейтрона равны $g_{sp} = 5,58$ и $g_{sn} = -3,82$, спины нуклонов в дейтроне параллельны.

7.38*: Спин ядра атома лития (его полный угловой момент) $I = 3/2$. При учете сверхтонкого взаимодействия интегралом движения является полный момент атома $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ (\mathbf{J} — угловой момент электронной оболочки). Найти два возможных значения магнитного момента атома лития, находящегося в состоянии $2^2P_{1/2}$. Собственным магнитным моментом ядра пренебречь.

7.39. Известно, что при сверхнизких температурах (около 1 мК) достаточно небольшого магнитного поля, чтобы полностью поляризовать атомарный водород или его изотопы по спину. При этом вещество остается в состоянии сильно разреженного атомарного газа. В отсутствие магнитного поля в спектре поглощения атомарного трития наблюдается переход между подуровнями сверхтонкой структуры на частоте $f_0 = 1517$ МГц. Какими будут частоты переходов, если поместить газ в постоянное и однородное поле $B_0 = 50$ Гс? Полный угловой момент ядра трития $I = 1/2$. Энергия магнитного поля сверхтонкого взаимодействия имеет вид $A\langle\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}\rangle$, где $A > 0$ — постоянная, \mathbf{I} и \mathbf{J} — векторы полных угловых моментов ядра и электронной оболочки.

Указание. Энергией взаимодействия магнитного момента ядра с внешним полем можно пренебречь.

7.40. Известно, что при сверхнизких температурах (около 1 мК) достаточно небольшого магнитного поля, чтобы полностью поляризовать спин атомарного водорода или его изотопов. При этом вещество остается в состоянии сильно разреженного атомарного газа. В отсутствие магнитного поля в спектре поглощения атомарного водорода наблюдается переход между подуровнями сверхтонкой структуры на частоте $f_0 = 1420$ МГц. Какими будут частоты переходов, если поместить газ в постоянное и однородное поле $B_0 = 4,5$ Тл? Энергия магнитного поля сверхтонкого взаимодействия имеет вид $A\langle\mathbf{I}\cdot\mathbf{J}\rangle$, где $A > 0$ — постоянная, \mathbf{I} и \mathbf{J} — векторы полных угловых моментов ядра и электронной оболочки.

7.41*: Свободное покоящееся атомное ядро массой M переходит из возбужденного состояния в основное, испуская γ -квант. Найти энергию γ -кванта и энергию отдачи R , если энергия возбуждения равнялась \mathcal{E} . Получить числовой ответ для ${}^{191}_{77}\text{Ir}$, если $\mathcal{E} = 129$ кэВ.

7.42. В первых экспериментах Мессбауэра источником излучения служил радиоактивный изотоп ${}^{191}_{76}\text{Os}$, который в результате β -распада переходил в возбужденное состояние изотопа ${}^{191}_{77}\text{Ir}$. Испускаемые им γ -кванты с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 129$ кэВ поглощались иридиевой фольгой. Было обнаружено, что даже при комнатной температуре наблюдается значительный эффект резонансного поглощения. Вероятность эффек-

та Мессбауэра тем больше, чем меньше амплитуда колебаний атомов в кристалле. Поскольку при конечной температуре атомы в кристалле колеблются с разными частотами, то, усредняя по всем частотам, мы получим, что кристаллу можно поставить в соответствие некоторую эффективную температуру $T_{\text{эфф}}$. Тогда условие резонансного поглощения можно записать в виде $R \leq D$, где R — энергия отдачи, а $D = 2\sqrt{k_B T_{\text{эфф}} R}$ — уширение линии (ширина на полувысоте). Оценить эту эффективную температуру.

7.43. Если излучающее ядро находится в кристаллической решетке, то возможна ситуация (при температурах, много меньших так называемой дебаевской температуры, которая характеризует наибольшую возможную энергию колебаний атомов кристаллической решетки), когда излучение и поглощение γ -кванта с большой вероятностью происходит без возбуждения колебаний атомов. Вычислить, каково при этом изменение энергии γ -кванта для кристалла иридия конечного размера с массой $M = 100$ мг, испускающего γ -квант с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 129$ кэВ. Сравнить со случаем свободного ядра (задача 7.41).

7.44. Источник, содержащий ядра изотопа $^{57}_{26}\text{Fe}$, которые испускают γ -кванты с энергией $\mathcal{E} = 14,4$ кэВ и шириной линии $\Gamma = 4 \cdot 10^{-9}$ эВ, помещен в центр вращающегося диска, а поглотитель из того же материала — на диске на расстоянии $R = 1$ м от центра. С какой частотой Ω нужно вращать диск, чтобы смещение $\Delta\omega$ частоты поглотителя относительно излучателя равнялось $1/10$ ширины линии Мессбауэра?

7.45. С какой относительной скоростью v надо сближать кристаллический источник, содержащий возбужденные ядра $^{191}_{77}\text{Ir}$ (энергия возбуждения $\mathcal{E} = 129$ кэВ), с мишенью, содержащей свободные ядра $^{191}_{77}\text{Ir}$, чтобы наблюдать максимальное поглощение γ -квантов в мишени?

7.46. Используя эффект Мессбауэра, можно измерить гравитационное смещение частоты. Для этой цели были использованы γ -лучи, испускаемые возбужденным ядром $^{57}_{26}\text{Fe}$ (энергия γ -лучей $\mathcal{E}_\gamma = 14,4$ кэВ, ширина линии $\Gamma = 4 \cdot 10^{-9}$ эВ). При какой разности высот между приемником (поглотителем) и источником γ -линия смеется на 1% от ширины линии (при этом еще можно заметить изменение поглощения γ -лучей)? (См. задачу 1.4.)

7.47.* Ядра в решетке кристалла совершают тепловые колебания, что приводит в доплеровскому смещению частоты излучаемых квантов. Однако в направлении излучения продольный эффект Доплера при усреднении по времени дает ноль, так как время жизни ядра в возбужденном состоянии (порядка 10^{-7} с) много больше периода колебаний атомов в решетке (порядка 10^{-13} с). Поэтому остается только поперечный релятивистский эффект Доплера. Если эффективные температуры (см. задачу 7.42) источника и приемника различаются, то частоты излучения и поглощения смещаются по-разному.

Какой разности высот между источником и поглотителем в опытах с ^{57}Fe соответствует разность температур $\delta T_{\text{эфф}} = 1 \text{ K}$?

7.48. На какой высоте H надо поместить поглотитель относительно источника для проверки красного смещения, предсказываемого общей теорией относительности? Используется эффект Мессбауэра на изотопе ^{67}Zn , время жизни его возбужденного уровня с энергией $\mathcal{E} = 93 \text{ кэВ}$ равно $\tau = 10 \text{ мкс}$. Считать, что для достижения необходимой точности эффект смещения должен в 10 раз превышать ширину линии резонансного поглощения.

Указание: см. задачу 1.4.

7.49. Оценить минимальные массу m и размер b железной пылинки, при которых можно наблюдать эффект Мессбауэра с энергией перехода $\mathcal{E} = 14 \text{ кэВ}$ и временем жизни $\tau = 1 \text{ мс}$. Считать, что эффект еще наблюдаем, когда отдача пылинки приведет к доплеровскому смещению, равному собственной ширине линии. Плотность железа $\rho \approx 7,9 \text{ г/см}^3$.

7.50*. Исследование ядерных свойств $^{152}_{63}\text{Eu}$ на прецизионной установке TRISTAN в Гренобле (Франция) показало, что в результате электронного захвата и последующего испускания нейтрино это ядро переходит в возбужденное ядро $^{152}_{62}\text{Sm}$, а затем в основное состояние путем испускания γ -кванта с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 963 \text{ кэВ}$. Ширина этой линии оказалась равной $\Delta\mathcal{E} = 13 \text{ эВ}$, а время жизни возбужденного состояния $\tau = 40 \text{ фс}$. Оценить энергию вылетевшего нейтрино.

7.51. На спектрометре высокого разрешения GAMS4 в Гренобле (Франция) у изотопа ^{49}Ti зарегистрирован каскадный переход из высоковозбужденного в основное состояние с последовательным испусканием двух γ -квантов с энергиями $\mathcal{E}_1 = 5 \text{ МэВ}$ и $\mathcal{E}_2 = 1,5 \text{ МэВ}$. Прецизионные измерения формы линии \mathcal{E}_2 показали, что она имеет ширину $\Delta\mathcal{E} = 400 \text{ эВ}$. Оценить время жизни уровня с энергией \mathcal{E}_2 . Учесть, что детектор спектрометра регистрирует γ -излучение в узком телесном угле вблизи нормали к окну детектора.

7.52. Широко используемое в мессбауэровской спектроскопии ядро $^{57}_{26}\text{Fe}$ имеет спин и четность основного состояния $(1/2)^+$ (g -фактор равен 0,18), а первого возбужденного состояния $(3/2)^+$ ($g = -0,1$). Энергия перехода $\mathcal{E}_0 = 14,4 \text{ кэВ}$. На рис. 51 показан спектр резонанс-

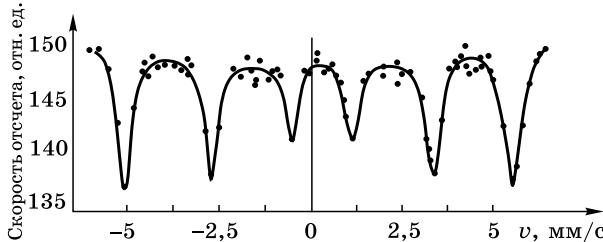


Рис. 51

ного поглощения этой нерасщепленной линии железа в металлическом железе, являющимся ферромагнетиком. Возбужденное ядро $^{57}_{26}\text{Fe}^*$ образуется в результате β -распада ядра $^{57}_{27}\text{Co}$, внедренного в нержавеющую сталь, не являющуюся ферромагнетиком, поэтому в стали не наблюдается расщепление указанной линии излучения. Расщепление линии обусловлено наличием внутреннего магнитного поля на ядрах магнитного железа (ядерный зееман-эффект). Образец железа приводят в движение со скоростью v . Определить тип излучаемых γ -квантов. Какова величина магнитного поля на ядрах железа?

7.53* Медленный мюон захватывается ядром свинца $^{208}_{82}\text{Pb}$. Оценить энергию основного состояния мюона. Слабое взаимодействие мюона с нуклоном не учитывать.

7.54. Медленный мюон захватывается ядром свинца $^{208}_{82}\text{Pb}$. Оценить область локализации мюона в основном состоянии. Слабое взаимодействие мюона с нуклоном не учитывать.

7.55. Радий-226 за счет последовательных радиоактивных распадов превращается в устойчивый изотоп свинца $^{206}_{82}\text{Pb}$. Какая масса M гелия выделится за время $t = 1$ месяц из $m = 1$ г радия, находящегося в равновесии со своими продуктами распада? Период полураспада $^{226}_{88}\text{Ra}$ составляет $T_{1/2} = 1600$ лет.

7.56. Радий был впервые выделен П. и М. Кюри из урановых месторождений в Богемии. Являясь продуктом распада $^{238}_{92}\text{U}$ (период полураспада $T_{\text{U}} = 4,51 \cdot 10^9$ лет), сам радий нестабилен, его период полураспада $T_{\text{Ra}} = 1600$ лет. Считая, что в цепочке превращения урана установилось равновесие и что эффективность выделения радия составляет 100%, оценить, какую массу урановой руды надо было переработать, чтобы выделить один грамм радия. Содержание урана в руде $\eta = 1$ масс%.

7.57* Нуклон из незаполненной оболочки ядра углерода $^{13}_6\text{C}$ поглощает $E1$ -фотон и переходит в возбужденное состояние с наименьшей энергией. Найти спин ядра в конечном состоянии и указать его спектроскопическое обозначение.

Указание. Последовательность расположения однонуклонных ядерных уровней: $N=0$ ($1s_{1/2}$); $N=1$ ($1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$); $N=2$ ($1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$, $1d_{3/2}$); $N=3$ ($1f_{7/2}$, ...)

7.58. Нуклон из незаполненной оболочки ядра кислорода $^{17}_8\text{O}$ поглощает $M1$ -фотон и переходит в возбужденное состояние с наименьшей энергией. Найти спин ядра в конечном состоянии и указать его спектроскопическое обозначение.

Указание. Последовательность расположения однонуклонных ядерных уровней: $N=0$ ($1s_{1/2}$); $N=1$ ($1p_{3/2}$, $1p_{1/2}$); $N=2$ ($1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$, $1d_{3/2}$); $N=3$ ($1f_{7/2}$, ...)

7.59. На одну сторону поглащающей пластинки нанесен слой α -активного $^{226}_{90}\text{Th}$ (период полураспада $T_{1/2} \approx 31$ мин). При каком

минимальном отношении масс тория и пластиинки возможна левитация системы в поле тяжести из-за отдачи, возникающей при испускании α -частиц ($\mathcal{E}_\alpha = 6,3 \text{ МэВ}$)? Самопоглощением α -частиц в ториевом слое пренебречь.

7.60*. Из-за нецентрального характера ядерных сил основное состояние дейтрона представляет собой суперпозицию состояний 3S_1 и 3D_1 . Каков был бы магнитный момент дейтрона, если бы он находился в «чистом» состоянии 3D_1 ? Спиновые g -факторы протона и нейтрона равны соответственно $g_{sp} = 5,58$ и $g_{sn} = -3,82$. Разницу масс нуклонов не учитывать. Рассмотреть случаи ls - и jj -связи.

7.61. В силу нецентрального характера ядерных сил основное состояние дейтрона представляет собой суперпозицию состояний 3S_1 и 3D_1 . Экспериментальное значение магнитного момента основного состояния дейтрона равно $0,86 \mu_{яд}$. Используя тот факт, что магнитный момент состояния дейтрона 3D_1 равен $0,31 \mu_{яд}$, определить вероятность нахождения дейтрона в этом состоянии. Спиновые g -факторы протона и нейтрона равны соответственно $g_{sp} = 5,58$, $g_{sn} = -3,82$.

7.62. В 1998 г. Я. Джоли с сотрудниками было осуществлено прецизионное измерение ширины линии γ -перехода между двумя возбужденными состояниями 1^- и 2^+ ядра $^{152}_{62}\text{Sm}$. Это ядро образовалось в результате K -захвата по схеме $^{152}_{63}\text{Eu} + e^- \rightarrow ^{152}_{62}\text{Sm} + \nu_e$. Выделяемая при этом энергия составила $Q = 962 \text{ кэВ}$. Энергия данного γ -перехода в неподвижном ядре $^{152}_{62}\text{Sm}$ равна $\mathcal{E}_\gamma = 841 \text{ кэВ}$. На сколько смещается линия \mathcal{E}_γ в результате отдачи излучающего ядра? Каково вызванное этим уширение линии? Оценить естественную ширину этой линии, если времена жизни ядра в состояниях 1^- и 2^+ составляют $\tau_1 = 29 \text{ фс}$ и $\tau_2 = 2 \text{ нс}$ соответственно.

7.63. В экспериментах Ф.Блоха по определению магнитного момента тритона использовался метод ЯМР на сверхтяжелой воде (80% T_2O и 20% H_2O). При фиксированной частоте переменного поля $v = 41,5 \text{ МГц}$ проводилось сканирование подмагничивающего поля. Были обнаружены два пика: при $B_1 = 9160 \text{ Гс}$ и $B_2 = 9770 \text{ Гс}$, причем первый пик был по величине примерно в четыре раза больше второго. Определить из этих данных магнитный момент тритона. Спин тритона рассчитывать по однонуклонной оболочечной модели.

Указание. В магнитном поле расположение подуровней энергии ядра трития аналогично таковому для протона.

7.64. В медицинской томографии внутренних органов используется метод ЯМР на протонах, входящих в состав воды, а для томографии легких — на ядрах газообразного Не-3 при его вдыхании. Определить разницу между экспериментальными и теоретическими значениями магнитного момента ядра ^3He , если сигнал резонанса наблюдается во внешнем поле $B = 1,5 \text{ Тл}$ на частоте $v = 48,75 \text{ МГц}$. Спин ядра и его магнитный момент вычислять по однонуклонной оболочечной модели.

Указание. В магнитном поле расположение подуровней энергии для ядра ^3_2He противоположно таковому для протона.

7.65. В угловом распределении электронов с энергией $\mathcal{E} = 750 \text{ МэВ}$, рассеянных на дважды магическом ядре кальция $^{40}_{20}\text{Ca}$, экспериментально наблюдается ряд последовательных дифракционных минимумов, как это показано на рис. 52. Оценить из положений трех отчетливых минимумов средний радиус ядра кальция, которое можно рассматривать в данной задаче как черный шарик, и среднюю величину r_0 в формуле для радиусов ядер.

7.66. В октябре 2012 г. элемент 116 Периодической системы получил официальное название «ливерморий» (Livermorium) в знак большого вклада ученых Ливерморской лаборатории (США) в синтез сверхтяжелых элементов. Время жизни этого ядра столь велико, что успевает образоваться одноэлектронный ион ливермория. Оценить в боровской модели энергию связи этого иона, считая электрон релятивистским.

7.67. В октябре 2012 г. элемент 114 Периодической системы получил официальное название «флеровий» (Flerovium) в честь Г. Н. Флерова, под руководством которого в Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ (Дубна) в течение многих лет успешно проводились работы по синтезу новых элементов. Оценить в боровской модели размер одноэлектронного иона флеровия, учитывая релятивизм электрона.

7.68. Для α -распада четно-четных ядер период полураспада $T_{1/2}$ (в секундах) зависит от энергии α -частицы \mathcal{E}_α (в МэВ) и заряда дочернего ядра Z по закону Гейгера–Нэттола

$$\lg T_{1/2} = 9,54 \cdot \frac{Z^{0,6}}{\sqrt{\mathcal{E}_\alpha}} - 51,37.$$

Рассматривая модель, в которой α -частица находится в потенциальной яме, созданной сильным и кулоновским взаимодействиями, найти отношение периодов полураспада ядер $^{238}_{92}\text{U}$ и $^{238}_{94}\text{Pu}$, если при распаде ядра плутония $\mathcal{E}_\alpha^{\text{Pu}} = 5,50 \text{ МэВ}$. Ядро считать однородно заряженным шаром радиусом $R = 0,855A^{1/3} \text{ фм}$, где A — массовое число ядра; α -частицу — точечным зарядом; плотность вероятности нахождения альфа частиц в ядре — постоянной.

7.69. Для α -распада четно-четных ядер период полураспада $T_{1/2}$ (в секундах) зависит от энергии α -частицы \mathcal{E}_α (в МэВ) и заряда

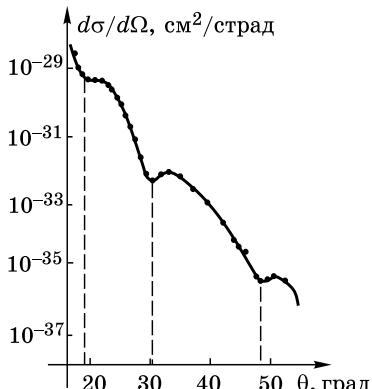


Рис. 52

дочернего ядра Z по закону Гейгера–Нэттола

$$\lg T_{1/2} = 9,54 \cdot \frac{Z^{0,6}}{\sqrt{\mathcal{E}_a}} - 51,37.$$

Используя капельную модель ядра, найти период полураспада ядра тория $^{226}_{90}\text{Th}$, если для ядра радиа $^{226}_{88}\text{Ra}$ $T_{1/2} = 1600$ лет. Для кулоновского и симметричного коэффициентов в формуле Вайцзеккера принять значения $C_{\text{кул}} = 0,71$ МэВ и $C_{\text{сим}} = 23,7$ МэВ.

7.70. Для α -распада четно-четных ядер период полураспада $T_{1/2}$ (в секундах) зависит от энергии α -частицы \mathcal{E}_a (в МэВ) и заряда дочернего ядра Z по закону Гейгера–Нэттола

$$\lg T_{1/2} = 9,54 \cdot \frac{Z^{0,6}}{\sqrt{\mathcal{E}_a}} - 51,37.$$

Для α -распадов ядер тория $^{226}_{90}\text{Th}$ и урана $^{232}_{92}\text{U}$ периоды полураспада составляют $T_{1/2}^{\text{Th}} = 14,05 \cdot 10^9$ лет и $T_{1/2}^{\text{U}} = 68,9$ лет. Рассматривая модель, в которой α -частица находится в потенциальной яме, созданной сильным и кулоновским взаимодействиями, найти радиус R этих ядер, считая его одинаковым для обоих ядер. Плотность вероятности нахождения α -частицы в ядре считать постоянной, α -частицу — точечным зарядом.

7.71. По некоторым предположениям, палестинский лидер Ясир Арафат был отравлен радиоактивным Ро-210, в результате чего в 2004 г. скончался. Проверка этой версии проводилась через 10 лет после смерти Я. Арафата, когда по настоянию вдовы его тело было эксгумировано и проведено измерение α -радиоактивности его останков. Период полураспада радиоактивного Ро-210 составляет $T_{1/2} = 138$ дней. Смертельная доза, т. е. начальная активность некоторого препарата, содержащего Ро-210, не менее $A_0 = 4 \cdot 10^8$ Бк. Можно ли обнаружить при эксгумации следы полония, если порог регистрации его активности $A_{\min} = 1$ Бк?

7.72. Полоний легко сорбируется на поверхностях твердых тел, и поэтому полностью отмыть их от него обычными методами трудно. Через какое максимальное время еще можно зарегистрировать α -распад Ро-210, если первоначально на чашку попал $m = 1$ нг этого изотопа? Считать, что минимально обнаруживаемое количество полония соответствует его активности $A = 1$ Бк. Период полураспада Ро-210 равен $T_{1/2} = 138$ дней.

7.73. Радиоизотоп ^{14}C , образующийся под действием космических лучей из атмосферного азота, усваивается как обычный углерод живыми биологическими объектами. Его удельная активность в живом организме постоянна и в 1 г углерода равна $n_0 = 15,6$ расп/мин. После биологической смерти начинается β -распад радиоуглерода с $T_{1/2} = 5730$ лет. Какое время потребуется, чтобы по интенсивности β -распада определить возраст образца $\tau = 2000$ лет с точностью

$\Delta\tau = 100$ лет? На момент «смерти» в образце содержалось $m = 1$ мг углерода. Считать, что ошибка измерений определяется только статистикой отсчетов, эффективность регистрации детектора 100%.

7.74. В 1988-м году тремя лабораториями мира производилось методом ускорительной масс-спектроскопии радиоуглеродное определение возраста Туинской Плащаницы. Оказалось, что ткань была изготовлена в 1304 ± 31 г. Какое время заняло бы определение возраста стандартным способом по интенсивности β -распада радиоуглерода ^{14}C , если в распоряжение экспериментаторов предоставляется кусочек матери с массой углерода $m = 1$ мг? Удельная активность ^{14}C в живом организме в 1 г углерода равна $n_0 = 15,6$ расп/мин, его $T_{1/2} = 5730$ лет. Считать, что ошибка измерения возраста ($\Delta\tau = 31$ г.) определяется только статистикой отчетов β -детектора, его эффективность регистрации 100%.

7.75. Во многих исследованиях в биомедицине, материаловедении, дефектоскопии в качестве источников монохроматического рентгеновского излучения используют нуклиды, претерпевающие K -захват с переходом в основное состояние дочернего ядра. В частности, одно из таких радиоактивных ядер является источником излучения с $\mathcal{E}_\gamma = 22,3$ кэВ. Определить, изотопом какого ядра является такой излучатель.

7.76*: Возбужденное ядро ^{57}Fe с энергией $\mathcal{E}_1 = 14,4$ кэВ переходит в основное состояние в результате электронной конверсии. Энергия конверсионного электрона равна $\mathcal{E}_k = 7,2$ кэВ. Определить эффективный заряд ядра, действующий на K -электрон атома железа.

7.77. Наличие быстрых нейтронов в реакторном канале тепловых нейтронов приводит к тому, что из $\text{Bi}-209$ в реакции радиационного захвата (n, γ) с последующим β -распадом образуется $\text{Po}-210$ ($T_{1/2} = 138$ дн). Из образующегося $\text{Po}-210$ в реакции ($n, 2n$) на быстрых нейтронах образуется изотоп $\text{Po}-209$ ($T_{1/2} = 102$ года). Какое количество $\text{Po}-209$ накопится в образце висмута массой $m = 105$ г при десятидневном облучении? Плотность потока тепловых нейтронов через образец $\Phi_{th} = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, а плотность потока быстрых нейтронов Φ_f в 10 раз меньше, сечение реакции $^{209}\text{Bi}(n, \gamma)^{210}\text{Po}$ равно $\sigma_{th} = 32$ мбн, а сечение реакции $^{210}\text{Po}(n, 2n)^{209}\text{Po}$ равно $\sigma_f = 120$ мбн. Распадом образующихся изотопов пренебречь.

7.78. В 2014 г. детектор BOREXINO впервые зарегистрировал солнечные нейтрино, образующиеся в pp-цикле при слиянии двух протонов в дейтрон. В 100 т сверхчистого сцинтиллятора, у которого $A/Z = 2$, где A , Z — атомные число и заряд ядра, регистрируется за день в среднем 145 актов рассеяния нейтрино на электронах. Оценить сечение рассеяния, если плотность потока нейтрино на поверхности Земли составляет $\Phi = 6,6 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}$. Энергия нейтрино намного больше энергии связи электронов сцинтиллятора.

7.79*: Ядро атома $^{72}_{32}\text{Ge}$, находящееся в первом возбужденном состоянии с энергией возбуждения $\mathcal{E}_\gamma = 690$ кэВ, переходит в основ-

ное состояние. Оба уровня характеризуются значениями спина ядра, равными нулю. Определить тип и минимально возможную энергию испускаемой при этом заряженной частицы. Граница линии поглощения рентгеновских лучей в основном состоянии атома германия составляет $\lambda_{\text{тр}} = 1,12 \text{ \AA}$.

7.80. Подземный нейтринный телескоп в Баксанском ущелье калибруют с помощью искусственного источника нейтрино на основе изотопа хрома $^{51}_{24}\text{Cr}$. Ядро хрома захватывает электрон с K -оболочки и в конечном счете образуется ядро ванадия $^{51}_{23}\text{V}$ в основном состоянии. Энергия изучаемого нейтрино $\mathcal{E}_v = 747 \text{ кэВ}$, разность масс нейтральных атомов $\Delta Mc^2 = [M(^{51}_{24}\text{Cr}) - M(^{51}_{23}\text{V})]c^2 = 752,6 \text{ кэВ}$. Определить по этим данным эффективный заряд ядра электронов K -оболочки в атоме ванадия.

§ 8. Нейтроны. Ядерные реакции

8.1. Нейtron упруго рассеивается на ядре. Какое минимальное отличное от нуля прицельное расстояние b может реализоваться для

нейтрона с энергией $\mathcal{E} = 100 \text{ кэВ}$ (рис. 53)?

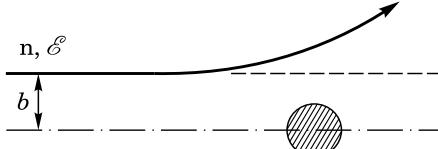


Рис. 53

8.2* Оценить отношение сечений образования компаунд-состояния (составного ядра) при бомбардировке ядер $^{40}_{20}\text{Ca}$ нейтронами и протонами с одной и той же начальной энергией $\mathcal{E}_0 = 10 \text{ МэВ}$.

8.3. Оценить полное сечение σ взаимодействия ультрарелятивистского нейтрона с ядром урана. Приняв для сечения нуклон-нуклонного взаимодействия величину $\sigma_{\text{NN}} \approx 40 \text{ мбн}$, оценить длину свободного пробега такого нейтрона в ядре.

8.4* Медленный нейтрон упруго рассеивается на свободном ядре со спином $I = 3/2$ в состоянии с орбитальным моментом $L = 0$. Определить вероятность рассеяния в состояниях с параллельной и антипараллельной взаимной ориентацией спинов нейтрона и ядра.

Указание. Учесть, что ядерные силы между нуклонами зависят от взаимной ориентации их спинов и поэтому сечение рассеяния зависит от полного углового момента сталкивающихся частиц, являющегося интегралом движения. Спином ядра называют его полный момент. В данном случае (при $L = 0$) спин ядра является «чистым» спином в традиционном его понимании.

8.5. Вплоть до энергий $T = 20 \text{ МэВ}$ угловое распределение рассеянных нейтронов в реакции $\text{pr} \rightarrow \text{pr}$ в лабораторной системе отсчета хорошо описывается формулой $d\sigma(\theta) = A \cos \theta d\Omega$. Как выглядит это распределение в системе центра инерции? Какая оценка для радиуса действия ядерных сил отсюда следует?

8.6* Тепловой нейтрон из реактора попадает по нормали в биологическую защиту (рис. 54), состоящую в основном из водорода, толщиной $l = 1$ м и плотностью ядер $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Сечение упругого рассеяния составляет $\sigma_{\text{рас}} = \sigma_0 = 20 \text{ бн}$, сечение поглощения — $\sigma_{\text{погл}} = \sigma_1 = 0,3 \text{ бн}$ и не зависит от энергии. Угловое распределение упруго рассеянных нейтронов в системе центра масс изотропно. Считая, что после рассеяния нейтрон пролетает в защите путь в $1/\langle \cos \theta \rangle$ раз больший, чем при прямом пролете, где θ — угол рассеяния, оценить вероятность того, что нейтрон пройдет через защиту, испытав лишь только одно упругое столкновение.*.) Здесь угловые скобки обозначают усреднение по углам вылета нейтрона.

8.7. Плотность потока нейтронов, выходящих из реактора, равна $j_0 = 10^{14} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Определить выход реакции в единицу времени (отношение числа актов реакции к числу частиц, упавших на единицу площади мишени в единицу времени) в мишени толщиной 1 см. Сечение реакции $\sigma = 1 \text{ мбн}$, плотность ядер мишени $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

8.8. Узкий пучок тепловых нейтронов проходит через слой воды толщиной 1 см. Определить доли первоначального потока нейтронов, выбывающих из пучка в результате поглощения и рассеяния. Сечение поглощения для воды $\sigma_{\text{погл}} = 0,66 \text{ бн}$, а сечение рассеяния $\sigma_{\text{рас}} = 69 \text{ бн}$.

8.9. Определить, во сколько раз уменьшается интенсивность узкого пучка тепловых нейтронов после прохождения пластиинки Al толщиной $d = 3$ см. На выходе из пластиинки регистрируется пучок первоначальной ширины. Сечение рассеяния для алюминия $\sigma_{\text{рас}} = 1,41 \text{ бн}$, а сечение поглощения $\sigma_{\text{погл}} = 0,23 \text{ бн}$.

8.10. Быстрые нейтроны, попав в воду, быстро замедляются до тепловых скоростей $v = 2,2 \text{ км/с}$ и диффундируют в ней, пока не захватятся ядрами водорода (захватом кислородом можно пренебречь). Оценить время жизни τ нейтронов в воде. Сечение захвата (поглощения) теплового нейтрона протоном $\sigma_{\text{погл}} = \sigma = 0,3 \text{ бн}$.

8.11. Исследование структуры жидкого или твердого ${}^3\text{He}$ с помощью пропускания нейтронов через слой вещества затруднено из-за большой величины сечения экзотермической реакции ${}^3\text{He}(n, p){}^3\text{H}$, и для нейтронов с энергией 300 К оно равно $\sigma_0 = 5400 \text{ бн}$. Определить энергию нейтронов, с помощью которых можно изучать слои

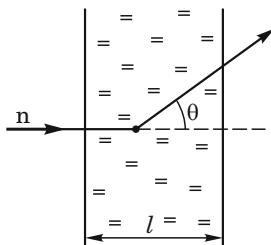


Рис. 54

*.) В этой и последующей задачах приняты следующие определения: $\sigma_{\text{реакции}} = \sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{неупр}} = \sigma_{\text{рас}} + \sigma_{\text{погл}} = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{захв}} + \sigma_{\text{дел}} + \dots$

^3He толщиной $d = 1$ мм, чтобы проходило не менее 10% от потока падающих нейтронов. Концентрация ядер ^3He $n = 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

Указание. Сечение указанной реакции для нейтронов с энергией до 1 МэВ носит нерезонансный характер.

8.12. Для регистрации медленных нейтронов широко используются счетчики, наполненные газообразным изотопом ^3He . Рассчитать долю ε регистрируемых частиц — эффективность счетчика, представляющего собой цилиндр диаметром $d = 25$ мм, наполненный газом при давлении $P = 10$ атм. Нейтроны при температуре $T = 300$ К летят вдоль диаметра цилиндра. В счетчике происходит реакция $^3\text{He}(\text{n}, \text{p})^3\text{H}$, сечение которой для регистрируемых нейтронов $\sigma = 5400$ бн.

8.13.* Для детектирования медленных нейтронов широко используются ионизационные счетчики, наполненные ^3He . Регистрация нейтронов производится по реакции $^3\text{He}(\text{n}, \text{p})^3\text{H}$. Показать на основе законов сохранения, что взаимодействие нейтронов с гелием-3 не может приводить к образованию ^4He по реакции $\text{n} + ^3\text{He} \rightarrow ^4\text{He}$. (См. также задачу 1.16.)

8.14. В сечении рассеяния нейтронов на ядрах может проявляться «волновой резонанс», когда интерференция нейтронных волн де Бройля приводит к «прозрачности» ядер (ядерный аналог эффекта Рамзауера). Оценить, при какой минимальной энергии нейтронов должны быть видны эти «резонансы проницаемости» на ядре $^{208}_{82}\text{Pb}$. Ядерный потенциал считать одномерной ямой, ширина которой равна диаметру ядра, глубина ямы $U = 40$ МэВ (см. задачу 3.33).

8.15.* Источник тепловых нейтронов установлен в центре большого графитового куба, и со временем нейтроны, многократно рассеиваясь на ядрах углерода и иногда поглощаясь, распространяются по всему объему. Оценить эффективный размер области, занимаемой в результате нейтронами, если эффективное сечение рассеяния нейтронов $\sigma_{\text{рас}} = 4,8$ бн, а поглощения — $\sigma_{\text{погл}} = 3$ мбн. Плотность графита $\rho = 2,2 \text{ г}/\text{см}^3$.

8.16. Поликристаллический бериллий слабо поглощает, но интенсивно рассеивает нейтроны (брэгговское отражение на кристаллах). На этом основано действие поликристаллического фильтра, пропускающего нейтроны с энергией $\mathcal{E} < \mathcal{E}_{\text{гр}}$. Найти $\mathcal{E}_{\text{гр}}$ для берилля, у которого межплоскостное расстояние $d = 2 \text{ \AA}$.

8.17. Поток нейтронов из реактора, имеющих максвелловское распределение по скоростям с температурой $T = 370$ К, пропускается через толстый поликристаллический фильтр из спрессованного порошка графита. Найти, какая доля нейтронов проходит через такой фильтр. Максимальное межплоскостное расстояние для решетки графита $a = 3,35 \text{ \AA}$.

8.18. Два цилиндрических стержня с одинаковыми диаметрами, один из графита, другой из висмута, совмещены основаниями. Графитовый стержень через открытый торец облучается параллельно

его оси потоком нейтронов, выходящих из замедлителя с комнатной температурой 300 К (рис. 55). Полагая рассеяние нейтронов в графите и висмуте брэгговским, оценить, во сколько раз средняя кинетическая энергия нейтронов \mathcal{E}_k , выходящих из висмутового цилиндра через его боковую поверхность, меньше энергии падающих нейтронов \mathcal{E}_0 . Максимальное расстояние между кристаллическими плоскостями для графита $d_C = 3,35 \text{ \AA}$ и для висмута $d_{Bi} = 4,05 \text{ \AA}$. Длина стержней много больше их диаметров, которые сравнимы со средним пробегом нейтронов.

8.19. Чему равна критическая скорость нейтронов, испытывающих полное отражение на границе вещества при произвольном угле падения? Число рассеивающих ядер в единице объема N и амплитуду рассеяния нейтронов f считать заданными.

8.20. Найти критический угол скольжения φ_0 для тепловых нейтронов с заданной длиной волны λ при отражении от материала с известными значениями N и f . При $\varphi < \varphi_0$ нейтроны полностью отражаются.

8.21. Вычислить коэффициент преломления нейтронов с энергией $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$ в металлическом Ве ($\rho \approx 1,85 \text{ г/см}^3$), если амплитуда рассеяния $f = -0,77 \cdot 10^{-12} \text{ см}$. Чему равен угол полного отражения нейтронов?

8.22. Максимальная скорость нейтронов, накапливаемых в ловушке в силу полного отражения от медных стенок, равна $v = 5,7 \text{ м/с}$. Определить амплитуду рассеяния нейтронов на ядрах меди.

8.23. После прохождения свинцовой пластинки толщиной $d = 2 \text{ см}$ интенсивность потока нейтронов с энергией $\mathcal{E} = 0,25 \text{ МэВ}$ уменьшилась и составила 70% от интенсивности падающего пучка. Показать, что это ослабление потока обусловлено преимущественно упругим изотропным s -рассеянием нейтронов ядрами свинца. Считая, что величина амплитуды рассеяния равна радиусу ядра, оценить размер ядра $^{208}_{82}\text{Pb}$. Плотность свинца $\rho = 11,3 \text{ г/см}^3$.

8.24. Ультрахолодные нейтроны выходят широким пучком из горизонтального нейтроновода и затем движутся свободно над горизонтально расположенной пластинкой, упруго от нее отражаясь и тем самым совершая периодическое движение, как показано на рис. 56. Это движение в гравитационном поле квантуется, и поэтому пройдут над пластинкой только те нейтроны, у которых высота движе-

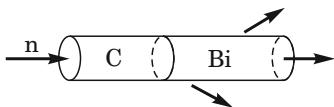


Рис. 55

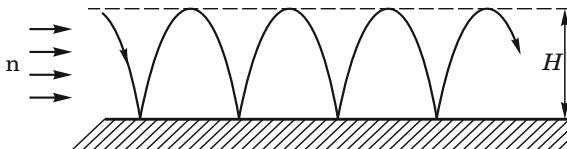


Рис. 56

ния H соответствует разрешенной энергии. Оценить на основе правила квантования Бора–Зоммерфельда, какова третья разрешенная высота. (См. задачу 3.6.)

8.25. Гравитационный рефрактометр (рис. 57) дает возможность определить амплитуду рассеяния медленных нейтронов атомными

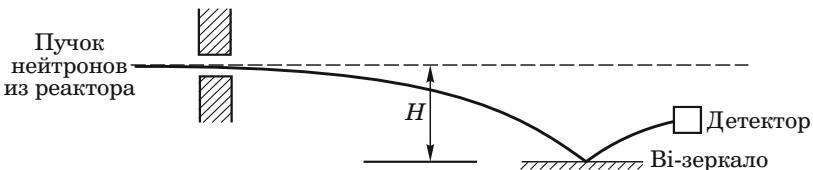


Рис. 57

ядрами, используя падение нейтронов в гравитационном поле Земли. Найти амплитуду рассеяния для $^{209}_{83}\text{Bi}$, если известно, что для него на высоте $H = 60$ см резко изменяется скорость счета. Плотность висмута $\rho = 9,8 \text{ г}/\text{см}^3$.

8.26* На рис. 58 показаны: реактор P , работающий на тепловых нейтронах, полая изогнутая труба (нейтроновод) и детектор нейтронов D . Распределение нейтронов в реакторе по скоростям максвелловское (при температуре $T = 400 \text{ K}$). Нейтроны, скорость v которых меньше граничной скорости ($v_{\text{гр}} \sim 10 \text{ м}/\text{с}$), называют ультрахолодными. Особенностью таких нейтронов является то, что они испытывают полное упругое отражение от стенок при любом угле падения. Найти зависимость скорости счета детектора от высоты колена H , полагая,

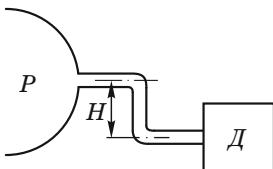


Рис. 58

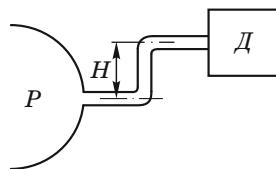


Рис. 59

что детектор одинаково эффективно регистрирует все ультрахолодные нейтроны. При каком значении H детектор не регистрирует ультрахолодные нейтроны?

8.27. В реакторах, работающих на тепловых нейтронах, имеются очень медленные ультрахолодные нейтроны (УХН). Особенностью УХН является то, что при скоростях $v < v_{\text{гр}}$ (обычно граничная скорость $v_{\text{гр}} \sim 10 \text{ м}/\text{с}$) нейтроны упруго отражаются от стенок при любых углах падения. Для вывода УХН из реактора используют полые трубы — нейтроноводы. На рис. 59 изображен реактор P , нейтроновод специальной формы и на его конце — детектор нейтронов D . Полагая, что распределение нейтронов по скоростям в реакторе максвелловское (при температуре $T \approx 400 \text{ K}$), найти, как зависит поток

нейтронов, доходящих до детектора, от высоты его поднятия H . Оценить высоту $H_{\text{гр}}$, на которой поток нейтронов исчезает.

8.28. В эвакуированном сосуде объемом $V = 1 \text{ л}$ находятся ультрахолодные нейтроны, отражающиеся от стенок с коэффициентом отражения, практически равным единице. В сосуде имеется отверстие площадью S , заклеенное фольгой, полностью прозрачной для ультрахолодных нейтронов. Какова должна быть площадь окошка S , если наблюдаемое время хранения нейтронов в ловушке в 2 раза меньше среднего времени жизни свободных нейтронов $\tau \sim 10^3 \text{ с}$? Считать, что скорость всех ультрахолодных нейтронов одинакова и равна $v = 5 \text{ м/с}$.

8.29. Вхождение нейтронов из вакуума в большинство веществ связано с преодолением энергетического барьера. Поэтому в замкнутой полости достаточно медленные нейтроны оказываются запертыми и могут накапливаться. Определить, какая доля из потока тепловых нейтронов, распределение по скоростям которых максвелловское, окажется запертой в медной камере. Предельный угол скольжения при полном «внешнем» отражении для нейтронов, движущихся со среднеквадратичной скоростью, составляет $i = 10 \text{ угл. мин}$. Соударения нейтронов со стенками камеры могут рассматриваться как упругие.

8.30* Монохроматические нейтроны с энергией $\mathcal{E} = 10^{-7} \text{ эВ}$ транспортируются к мишени из источника (медной сферы радиусом R) по длинному круглому алюминиевому нейtronоводу радиусом $r = 10 \text{ см} \ll R$. Концентрация нейтронов в источнике $n_0 = 1 \text{ см}^{-3}$ все время поддерживается постоянной, плотности алюминия и меди равны соответственно $2,7$ и $8,9 \text{ г/см}^3$, а их амплитуды когерентного рассеяния $-3,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}$ и $-7,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$. Вычислить поток нейтронов на мишени (распадом нейтронов пренебречь).

8.31. Параллельный пучок монохроматических нейтронов ($\lambda = 5 \text{ \AA}$) шириной $b = 2,5 \text{ см}$ попадает на вход длинного изогнутого нейtronовода прямоугольного сечения радиусом $R = 50 \text{ м}$ (рис. 60). Внутренняя поверхность нейtronовода покрыта слоем ^{56}Ni ($\rho = 8,9 \text{ г/см}^3$, амплитуда когерентного рассеяния $f = -10 \text{ фм}$). Определить, какая часть нейтронов пройдет по волноводу (распадом нейтронов пренебречь).

8.32. В конце 1980-х годов М. А. Кумахов предложил использовать тонкие полые стеклянные капилляры в качестве световодов для рентгеновских лучей и медленных нейтронов. Для нейтронов с длиной волны $\lambda = 2,4 \text{ \AA}$ критический угол у стекла равен $\theta_{\text{кр}} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$. При каком минимальном радиусе кривизны стеклянной трубки диаметром $d = 0,1 \text{ мм}$ будет полностью передаваться попадающий на ее вход параллельный пучок нейтронов с энергией $\mathcal{E} = 25 \text{ мэВ}$?

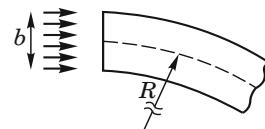


Рис. 60

8.33. В рентгеновской и нейтронной физике широко применяется так называемая «ораге optics» (непрозрачная оптика). Например, цилиндрической линзой может служить цилиндрический канал в сплошном веществе. Рас

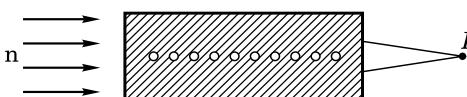


Рис. 61

считать для нейтронов с энергией $E = 25 \text{ мэВ}$ фокусное расстояние составной никелевой линзы, образованной 10 отверстиями диаметром $2R = 200 \text{ мкм}$, как это показано на рис. 61. Длина коге-

рентного рассеяния нейтронов в никеле естественного состава $a = 10^{-12} \text{ см}$, плотность никеля $\rho = 8,9 \text{ г/см}^3$.

8.34* Образец иода $^{127}_{53}\text{I}$ облучается нейтронным потоком такой интенсивности, что за 1 с образуется 10^7 атомов радиоактивного иода $^{128}_{53}\text{I}$, период полураспада $T_{1/2}$ которого 25 мин. Найти число атомов $^{128}_{53}\text{I}$ и активность препарата через 1, 10, 25, 50 мин после начала облучения. Каковы максимальные числа атомов $^{128}_{53}\text{I}$ и активность препарата при долгом облучении (т. е. при облучении до насыщения)?

8.35* При облучении образца золота в потоке тепловых нейтронов плотностью $j = 10^{14} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ в реакторе в результате реакции $^{197}\text{Au}(n, \gamma)^{198}\text{Au}$ (сечение $\sigma_1 = 96 \text{ бн}$) образуется β^- -активный нуклид $^{198}_{79}\text{Au}$, переходящий в ^{198}Hg с периодом полураспада $T_{1/2} = 2,7 \text{ сут}$. В то же время сечение реакции $^{198}\text{Au}(n, \gamma)^{199}\text{Au}$ очень велико и равно $\sigma_2 = 26000 \text{ бн}$, так что изотоп $^{198}_{79}\text{Au}$ активно поглощает нейтроны (вторичная активация). На сколько уменьшается при учете вторичной реакции число образующихся ядер ^{198}Hg при времени облучения $t = 10T_{1/2}$?

8.36. Образец золота $^{197}_{79}\text{Au}$ массой $m = 10 \text{ мг}$ облучали в потоке тепловых нейтронов плотностью $j = 10^{12} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ дважды: в течение первого дня с 9 до 17 ч и в то же время на следующий день. Найти число образовавшихся радиоактивных ядер $^{198}_{79}\text{Au}$ ($T_{1/2} = 2,7 \text{ сут}$, сечение активации, т. е. радиационного захвата нейронов ядрами $^{197}_{79}\text{Au}$, $\sigma = 96 \text{ бн}$) к концу облучения во второй день. За какое время это же количество ядер $^{198}_{79}\text{Au}$ может быть получено при непрерывном облучении?

8.37. Образец алюминия облучается дейtronами с энергией 7 МэВ, в результате чего происходит реакция $^{27}\text{Al}(\text{d}, \text{p})^{28}\text{Al}$. Период полураспада ^{28}Al равен $T_{1/2} = 2,24 \text{ мин}$. Облучение длится в течение $t_1 = 3,5 \text{ мин}$, какое-то время t_2 уходит на перенос образца к детектору, а затем в течение времени $t_3 = 6 \text{ мин}$ производится измерение активности образца. Какую часть распадов регистрирует детектор от максимально возможного при том же времени переноса образца?

8.38. Распространенность группы легких элементов Li, Be, B в Земле, Солнце, метеоритах намного меньше, чем более тяжелых C, N, O, однако в космических лучах содержание группы легких элементов Li, Be, B относительно группы C, N, O равно $\alpha = 0,34$. Это объясняется фрагментацией (развалом) C, N, O при прохождении через межзвездную среду, состоящую в основном из водорода. Оценить в $\text{г}/\text{см}^2$ количество водорода, которое должны при этом пройти высокогенергетичные ядра C, N, O. Сечение деления (фрагментации) тяжелых элементов с образованием легких $\sigma_{\phi} = 90 \text{ мбн}$, полное сечение их взаимодействия с водородом $\sigma_0 = 200 \text{ мбн}$, фрагментацией легких элементов пренебречь.

8.39. Сосуд объемом $V = 1 \text{ л}$ помещен в активную зону реактора на тепловых нейтронах с плотностью потока $j = 10^{12} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Считая, что сосуд не возмущает пространственное максвелловское распределение нейтронов с $T = 300 \text{ К}$, найти количество протонов, накопившееся в сосуде за счет распада нейтронов в течение $t = 6 \text{ мес}$.

8.40. Один из методов определения времени жизни нейтронов по отношению к β -распаду состоит в измерении числа протонов, образующихся при пролете медленных нейтронов через промежуток a фокусирующей системы детектора протонов D (рис. 62). Найти число протонов N_p , поступающих на детектор, если длина промежутка, в котором протоны распадаются, равна $a = 20 \text{ см}$. Плотность потока медленных нейтронов $j_n = 10^{13} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, скорость нейтронов $v = 2 \text{ км}/\text{с}$, эффективность сбора протонов 100%.

8.41.* Найти среднее по энергии эффективное сечение σ реакции $\alpha + {}^{27}\text{Al} \rightarrow p + {}^{30}\text{Si}$. Известно, что при облучении толстой алюминиевой мишени α -частицами с энергией 8 МэВ выход протонов*) равен $\eta = 8 \cdot 10^{-6}$. Длина пробега α -частиц в воздухе равна $l_b = 7,0 \text{ см}$.

8.42. Толстая мишень, содержащая n_0 ядер/ см^3 , облучается α -частицами. Зависимость дифференциального выхода η исследуемой реакции от энергии**) α -частиц в интервале $1 \div 10 \text{ МэВ}$ оказалась кубической: $d\eta/d\mathcal{E} = c\mathcal{E}^3$. Определить приближенно характер

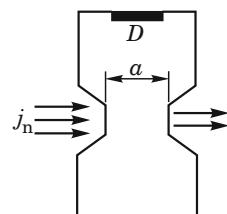


Рис. 62

*) Выходом ядерной реакции называется отношение полного числа рожденных в мишени частиц к полному числу частиц, попавших на мишень.

**) В толстом слое вещества поток частиц будет изменяться как вследствие ядерных реакций, так и вследствие ионизационного торможения заряженных частиц. В случае реакций, вызванных заряженными частицами, ионизационные потери существенно изменяют энергию этих частиц, и поэтому выход реакции —

$$\text{это } \eta = \frac{N}{N_0} = n_0 \int_0^{\mathcal{E}} \frac{\sigma(\mathcal{E}') d\mathcal{E}'}{|d\mathcal{E}' / dx|_{\text{иониз}}}, \text{ где } n_0 \text{ — концентрация ядер мишени.}$$

зависимости эффективного сечения реакции от энергии $\sigma(\mathcal{E})$. Принять, что тормозные потери обратно пропорциональны энергии, т. е. $d\mathcal{E}/dx = A/\mathcal{E}$, где $A = \text{const}$.

8.43. В одном из экспериментов со встречными пучками электронов используются два одинаковых накопительных кольца, в которых пучки ультрарелятивистских частиц движутся в противоположных направлениях, сталкиваясь друг с другом на длине взаимодействия

$l = 0,5 \text{ м}$ (рис. 63). Система счетчиков, окружающих область взаимодействия, установлена так, что она регистрирует одно из 10 событий ($\epsilon = 0,1$) взаимодействия частиц. Площадь сечения циркулирующих пучков в кольцах равна $S = 5 \text{ мм}^2$, эффективное сечение взаимодействия двух соударяющихся частиц $\sigma = 10^{-5} \text{ бн}$. Найти циркулирующий ток \mathcal{I} , который нужно накопить в каждом кольце, чтобы системой счетчиков регистрировалось за 1 с не менее $K = 10 \text{ с}^{-1}$ событий. Считать, что плотность числа частиц вдоль орбиты постоянна.

8.44. При распаде ядра $^{60}_{27}\text{Co}$ одновременно (в каскаде) образуются два γ -кванта с энергиями $\mathcal{E} = 1,17 \text{ МэВ}$ и $\mathcal{E}_2 = 1,33 \text{ МэВ}$ соответственно. Определить, как изменится отношение потоков этих γ -квантов после их прохождения через свинец толщиной d , и вычислить это отношение при $d = 5 \text{ см}$. Коэффициенты ослабления потока γ -квантов в свинце равны соответственно $\mu_1 = 0,7 \text{ см}^{-1}$, $\mu_2 = 0,62 \text{ см}^{-1}$.

8.45. При просвечивании детали монохроматическими тепловыми нейтронами с длиной волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$ на изображении было обнаружено слабое темное пятно, свидетельствующее о наличии внутри детали инородного включения. Контраст изображения (отношение интенсивностей прошедших нейтронов в области включения к соседним однородным областям) был равен 1,26. Какова должна быть длина волны нейтрона, чтобы контраст возрос до 2? Считать, что сечение взаимодействия нейтронов с веществом носит нерезонансный характер.

8.46. Оценить, какая доля ультрарелятивистских протонов космического излучения дойдет до поверхности Земли, не испытав ядерного взаимодействия.

8.47. Оценить длины свободного пробега l_p и l_N ультрарелятивистских протонов и ядер азота в жидковородной камере. Радиус протона $r_p = 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, плотность жидкого водорода $\rho_H = 0,07 \text{ г}/\text{см}^3$.

8.48. Для создания пучков быстрых нейтронов часто используют взаимодействие релятивистских дейtronов с тяжелыми ядрами, когда в результате периферийного взаимодействия протон поглоща-

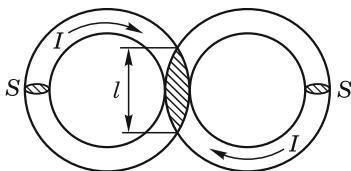


Рис. 63

копить в каждом кольце, чтобы системой счетчиков регистрировалось за 1 с не менее $K = 10 \text{ с}^{-1}$ событий. Считать, что плотность числа частиц вдоль орбиты постоянна.

8.44. При распаде ядра $^{60}_{27}\text{Co}$ одновременно (в каскаде) образуются два γ -кванта с энергиями $\mathcal{E} = 1,17 \text{ МэВ}$ и $\mathcal{E}_2 = 1,33 \text{ МэВ}$ соответственно. Определить, как изменится отношение потоков этих γ -квантов после их прохождения через свинец толщиной d , и вычислить это отношение при $d = 5 \text{ см}$. Коэффициенты ослабления потока γ -квантов в свинце равны соответственно $\mu_1 = 0,7 \text{ см}^{-1}$, $\mu_2 = 0,62 \text{ см}^{-1}$.

8.45. При просвечивании детали монохроматическими тепловыми нейтронами с длиной волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$ на изображении было обнаружено слабое темное пятно, свидетельствующее о наличии внутри детали инородного включения. Контраст изображения (отношение интенсивностей прошедших нейтронов в области включения к соседним однородным областям) был равен 1,26. Какова должна быть длина волны нейтрона, чтобы контраст возрос до 2? Считать, что сечение взаимодействия нейтронов с веществом носит нерезонансный характер.

8.46. Оценить, какая доля ультрарелятивистских протонов космического излучения дойдет до поверхности Земли, не испытав ядерного взаимодействия.

8.47. Оценить длины свободного пробега l_p и l_N ультрарелятивистских протонов и ядер азота в жидковородной камере. Радиус протона $r_p = 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, плотность жидкого водорода $\rho_H = 0,07 \text{ г}/\text{см}^3$.

8.48. Для создания пучков быстрых нейтронов часто используют взаимодействие релятивистских дейtronов с тяжелыми ядрами, когда в результате периферийного взаимодействия протон поглоща-

ется ядром — так называемая реакция срыва. Оценить сечение $\sigma_{\text{погл}}$ такого процесса, когда мишенью служит абсолютно поглощающее нуклоны ядро свинца $^{208}_{82}\text{Pb}$. Среднее расстояние между нуклонами в дейтроне равно $2R_d = 3,6$ фм.

8.49. Определить кинетические энергии T_n нейтрона и T_y ядра ^3Li , образующихся при фоторасщеплении ядра ^7Li под действием γ -кванта с энергией $\mathcal{E} = 15$ МэВ, если нейtron вылетает «вперед», т. е. по направлению пучка γ -квантов. Энергии связи ядер ^6Li и ^7Li равны соответственно $\mathcal{E}_1 = 32$ МэВ и $\mathcal{E}_2 = 39,2$ МэВ.

8.50. При какой кинетической энергии T_p налетающего протона на покоящийся протон в реакции $p + p \rightarrow d + \pi^+$ кинетическая энергия пиона в лабораторной системе координат равна нулю?

8.51* Хорошо сколлинированный пучок γ -квантов с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 250$ МэВ падает на мишень, содержащую дейтерий. Вследствие фоторасщепления дейтерия вторичный пучок содержит нуклоны. Оценить угол разлета φ нуклонов после реакции. Среднее расстояние между нуклонами в ядре дейтерия принять равным $2R_d \approx 4$ фм.

8.52. Ядра кислорода $^{16}_8\text{O}$ облучаются пучком протонов с импульсом $p = 10$ ГэВ/с. Отбираются такие события, когда в результате реакции $p + ^{16}_8\text{O} \rightarrow ^{16}_8\text{O}^* + p$ возбужденные ядра кислорода $^{16}_8\text{O}^*$ с энергией возбуждения, равной $\mathcal{E} = 1$ МэВ, вылетают в направлениях, практически перпендикулярных пучку, и испускают монохроматические γ -кванты вдоль своей траектории (рис. 64). Детектор γ -квантов регистрирует две линии, расстояние между которыми $\Delta\mathcal{E} = 200$ кэВ. Оценить импульс p_{O^*} вылетевших ядер кислорода и малый угол α , на который отклоняются протоны.

8.53. Реакция $^7\text{Li}(p, n)^7\text{Be}$ является удобным источником монохроматических нейтронов в интервале $0,2 \div 1,5$ МэВ. Для изменения энергии нейтронов можно менять как энергию первичных протонов, так и угол наблюдения. Найти: а) выделение энергии в реакции $^7\text{Li}(p, n)^7\text{Be}$, зная массу атомов ^7Li , ^7Be , ^1H и нейтрона в атомных единицах; б) при какой минимальной энергии протонов возможна эта реакция. Какова связь между энергиями нейтрона и протона в лабораторной системе и системе центра масс?

8.54. Сечение взаимодействия (поглощения ядром железа) нейтрино с энергией, превышающей 5 МэВ, составляет $\sigma = 10^{-43}$ см². Какова вероятность у такого нейтрино поглотиться при пролете по диаметру гипотетического железного шара с радиусом R , равным одной астрономической единице ($1,5 \cdot 10^8$ км — среднее расстояние от Солнца до Земли)? Шар считать несжимаемым с плотностью $\rho = 7,8$ г/см³.

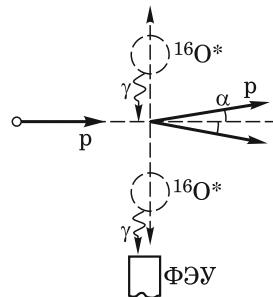


Рис. 64

8.55. Считая, что сечение взаимодействия (поглощения) нейтрино с нуклонами σ (в см^2) зависит от энергии \mathcal{E} нейтрино (в ГэВ) как $\sigma = A\mathcal{E}$, где коэффициент $A = 10^{-38} \text{ см}^2/\text{ГэВ}$, оценить энергию нейтрино, необходимую для его эффективного поглощения Землей. Радиус Земли принять равным $R = 6400 \text{ км}$, ее среднюю плотность $\rho = 5,5 \text{ г}/\text{см}^3$.

8.56. Оценить, на сколько толща Земли ослабляет поток нейтрино, приходящих с противоположной стороны земного шара. Усредненное по энергетическому спектру сечение поглощения нейтрино на нуклонах равно $\sigma \approx 10^{-35} \text{ см}^2$, средняя плотность Земли $\rho = 5,5 \text{ г}/\text{см}^3$, эффективная относительная атомная масса $A = 50$.

8.57* Для объяснения загадки тунгусского метеорита привлеклась гипотеза, что он состоял из антивещества. Оценить, может ли подобный «гость» долететь к нам от удаленных на несколько десятков миллионов световых лет галактик, поскольку ближе антивещества нет из-за отсутствия характерного аннигиляционного излучения. В самых «пустых» частях Вселенной обычно все же не бывает менее одного протона в 1 см^3 .

8.58. Ядерные реакции, проходящие на Солнце, можно изучать, измеряя поток нейтрино от Солнца. Нейтрино с энергией в несколько МэВ (эти нейтрино образуются при распаде ядер ${}^5\text{B}$ на заключительной стадии превращения водорода в гелий) детектируются в реакции $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$. Сечение такой реакции, усредненное по энергетическому спектру рассматриваемых нейтрино, $\sigma = 1,4 \cdot 10^{-42} \text{ см}^2$. Считая, что в секунду Солнце испускает число нейтрино $N_\nu = 3 \cdot 10^{33} \text{ с}^{-1}$, определить, какова должна быть масса M четыреххлористого углерода CCl_4 (естественной смеси изотопов), чтобы в нем за время $t = 1 \text{ год}$ произошло $n = 100$ актов образования ядер ${}^{37}\text{Ar}$. В естественной смеси изотопов хлора содержится $\eta = 25\%$ (по массе) ядер ${}^{37}\text{Cl}$.

8.59* Время жизни ядра ${}^{37}\text{Ar}$ из-за K -захвата составляет $t_0 = 32 \text{ сут}$. На основе этого факта оценить эффективное сечение σ слабого взаимодействия в реакции $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$.

8.60. Мюон μ , попав в свинцовую пластинку, очень быстро теряется, после чего захватывается на K -оболочку ядра ${}^{208}\text{Pb}$, на которой он живет $\tau = 7 \cdot 10^{-8} \text{ с}$. Это время примерно в 30 раз меньше времени жизни свободного мюона. Сравнить размер мюонной оболочки с размерами ядра Pb. Взаимодействие с каким из нуклонов ограничивает время жизни мюона? Написать соответствующую реакцию и оценить ее эффективное сечение.

8.61* При комнатной температуре примерно $f = 20\%$ γ -распадов ${}^{119}_{50}\text{Sn}$ в соединении BaSnO_3 происходит без возбуждения колебаний атомов решетки (бесфононный переход). Такой процесс называется эффектом Мессбауэра. Оценить, какой должна быть толщина источника, чтобы в нем не происходило заметного самопоглощения

мессбауэровских γ -квантов, носящего упругий характер. Плотность $\text{BaSnO}_3 \rho = 3 \text{ г/см}^3$, содержание изотопа ^{119}Sn в естественной смеси $\epsilon = 8\%$, энергия γ -квантов $\mathcal{E}_\gamma = 24 \text{ кэВ}$.

8.62. По современным расчетам плотность потока высокоэнергетических солнечных нейтрино на Земле должна быть равной $j = 5,6 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Нейтрино регистрируются детектором, содержащим $M = 615 \text{ т}$ перхлорэтилена C_2Cl_4 . В естественной смеси изотопов хлора содержится 25 массовых процентов изотопа ^{37}Cl , на ядрах которого происходит реакция, обратная K -захвату. Среднее сечение захвата ядрами ^{37}Cl таких нейтрино составляет $\sigma = 1,06 \cdot 10^{-42} \text{ см}^2$. Период полураспада $T_{1/2}$ образующегося ядра ^{37}Ar равен 35 суткам. Какое максимальное количество ядер ^{37}Ar можно выделить из вещества детектора после экспозиции в течение времени $t = T_{1/2}$?

8.63. По современным расчетам плотность потока низкоэнергетических солнечных нейтрино на Земле должна быть равной $j = 6,07 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Нейтрино регистрируются детектором, содержащим $M = 75,5 \text{ т}$ хлорида галлия GaCl_3 . В естественной смеси изотопов галлия содержится 40 массовых % изотопа ^{71}Ga , на ядрах которого происходит реакция, обратная K -захвату. Среднее сечение этой реакции составляет $\sigma = 11,8 \cdot 10^{-46} \text{ см}^2$. Период полураспада $T_{1/2}$ образующегося ядра ^{71}Ge равен 11,4 сут. Какое максимальное количество ядер ^{71}Ge можно извлечь из вещества детектора через время экспозиции $t = T_{1/2}$?

8.64. Оценить, во сколько раз сечение поглощения атомом натрия резонансной линии, соответствующей его $(3S-3P)$ -переходу, рассматриваемому как неупругий процесс, отличается от геометрического поперечного сечения атома.

8.65. Коллимированный пучок монохроматических нейтронов проходит через пластинку из железа толщиной $d = 5 \text{ мм}$, для которого эффективные сечения поглощения и рассеяния нейтронов данной энергии равны соответственно $\sigma_{\text{погл}} = 2,5 \text{ бн}$ и $\sigma_{\text{рас}} = 11 \text{ бн}$. Определить относительные доли падающего потока нейтронов, выбывших из пучка, в результате поглощения и рассеяния. Плотность железа $\rho = 7,9 \text{ г/см}^3$.

8.66. А. Мак-Рейнольдс (1951 г.) измерил зависимость интенсивности отражения медленных нейтронов, падающих под малым углом скольжения на границу раздела азот (газ) – этиленгликоль (жидкость), от давления газа P при температуре $T = 300 \text{ К}$ (рис. 65). Нейтроны падают из азота (I) на границу раздела с эти-

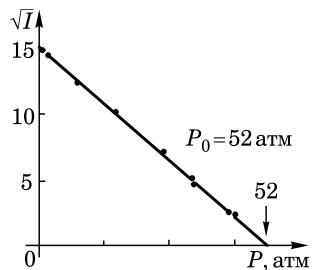


Рис. 65

ленгликолем (2). Показать, что действительно должна наблюдаться зависимость $\sqrt{\Gamma} \propto P$. Найти величину σ_1 сечения когерентного рассеяния нейtronов на ядрах азота, если известно, что у этиленгликоля плотность ядер равна $N_2 = 1,13 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, среднее сечение когерентного рассеяния равно $\sigma_2 = 5,5 \text{ мбн}$. В эксперименте коэффициент отражения нейtronов $R = \text{const} \cdot (n_2^2 - n_1^2)^2$; n_1, n_2 — показатели преломления соответственно азота и этиленгликоля. Это выражение получается из формул Френеля при малых углах скольжения и близких к единице показателей преломления.

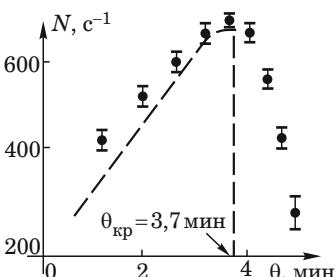


Рис. 66

8.67. На рис. 66 точками показаны результаты Д. Юза с сотрудниками, которые измерили зависимость от угла скольжения θ (в угловых минутах) интенсивности отражения нейtronов с длиной волны $\lambda = 6,7 \text{ \AA}$ от границы раздела между висмутом и жидким кислородом. Нейtronы падают из висмута (1) на границу с кислородом (2).

Штриховой линией показана следующая из измерений угловая зависимость интенсивности отражения для монохроматического параллельного пучка. В отражении нейtronов участвуют независимо как ядра, так и электроны. Найти длину рассеяния $a_{\text{эл}}$ на электронах, если плотности и длины рассеяния на ядрах висмута и жидкого кислорода равны $\rho_1 = 9,8 \text{ г}/\text{см}^3$, $a_1 = 8,64 \text{ фм}$; $\rho_2 = 1,13 \text{ г}/\text{см}^3$, $a_2 = 5,77 \text{ фм}$.

8.68. При облучении ядра $^{115}_{49}\text{In}$ нейtronами с энергией $\mathcal{E} = 1,44 \text{ эВ}$ происходит их резонансное поглощение. Распад составного ядра происходит по двум каналам — радиационному (с испусканием γ -квантов) и упругому (с вылетом нейтрона). Полное сечение этой реакции равно $\sigma_{\text{полн}} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ бн}$. Ширина нейтронного канала распада $\Gamma_n = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$. Оценить среднее время жизни составного ядра относительно испускания γ -квантов, считая, что $\Gamma_\gamma \gg \Gamma_n$. Частицы считать бесспиновыми.

8.69*. При захвате тяжелым ядром медленного нейтрона с энергией \mathcal{E} образуется составное ядро. Снятие возбуждения происходит либо путем упругого испускания нейтрона, либо путем испускания γ -квантов. Найти отношение сечений испускания нейтрона при $\mathcal{E} = 1 \text{ эВ}$ и $\mathcal{E} = 10 \text{ кэВ}$. Вероятность радиационного распада много больше вероятности вылета нейтрона. Считать потенциал ядра прямоугольной потенциальной ямой, а процессы поглощения и испускания нейтронов нерезонансными.

8.70. Пучок монохроматических нейtronов попадает на алмазный спектрометр площадью $S = 9 \text{ мм}^2$ и толщиной $d = 0,3 \text{ мм}$. Взаимодействие нейtronов с ядрами углерода происходит по реакции $n + ^{12}_6\text{C} \rightarrow ^9_4\text{Be} + \alpha$, сечение которой $\sigma = 0,07 \text{ мбн}$, порог этой реакции

$\mathcal{E}_{\text{поп}} = 6,2$ МэВ. За время $t = 1$ с зарегистрировано $N = 15$ импульсов с амплитудой, соответствующей суммарной энергии продуктов реакции $\mathcal{E} = 9,1$ МэВ. Найти энергию падающих нейтронов и плотность потока. Плотность алмаза $\rho = 3,5$ г/см³.

8.71. Детектором ионизирующих частиц служит пластинка из монокристалла алмаза толщиной $d = 300$ мкм с напыленными на боковые поверхности электродами, при соединенными к усилителю (рис. 67). На этот детектор падает пучок α -частиц, которые рождают электронно-дырочные пары со средней энергией образования пары $\mathcal{E}_0 = 13$ эВ. Пробег α -частиц соответствует поверхностной плотности $\rho_s = 4$ мг/см², плотность алмаза $\rho = 3,5$ г/см³. На входном сопротивлении усилителя $R = 50$ Ом от одной α -частицы возникает прямоугольный импульс длительностью $\tau = 5$ нс и амплитудой $V = 1,3$ мВ. Определить энергию α -частиц.

8.72. В коллимированный неменохроматический пучок реакторных нейтронов плотностью $n_0 = 10^{12}$ см⁻³ помещена тонкая пластинка из диспрозия $^{164}_{66}\text{Dy}$. При захвате нейтрона образуется радиоактивный изотоп $^{165}_{66}\text{Dy}$ с периодом полураспада $T_{1/2} = 140$ мин. Эта реакция в широком диапазоне энергий носит нерезонансный характер. Определить, через какое время после начала облучения активность (скорость распада $^{165}_{66}\text{Dy}$) будет максимальна. Сечение радиационного захвата нейтрона ядром $^{164}_{66}\text{Dy}$ при скорости нейтронов $v_0 = 2200$ м/с (энергия 0,025 эВ) равно 5000 бн.

8.73. На рис. 68 показан спектр пучка реакторных нейтронов, состоящего из тепловых и резонансных (надтепловых) нейтронов. Этим пучком облучается тонкая пластинка из $^{164}_{66}\text{Dy}$ и образуется радиоактивный изотоп $^{165}_{66}\text{Dy}$ по (n, γ) -реакции, сечение которой для всех нейтронов подчиняется законам Бете. Измеряется кадмиевое отношение R_{Cd} — отношение активности пластины без и с кадмиевым экраном, облучаемой одно и то же время (кадмий полностью поглощает тепловые нейтроны). Найти отношение плотности тепловых и резонансных нейтронов, если $R_{\text{Cd}} = 5$. Считать, что число исходных ядер $^{164}_{66}\text{Dy}$ за время облучения практически не изменяется.

8.74. Неполяризованный пучок ультрахолодных нейтронов (УХН) падает по нормали к поверхности тонкой однородно намагниченной железной пластинки, вектор остаточной намагниченности которой \mathbf{M}

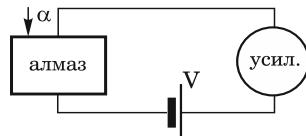


Рис. 67

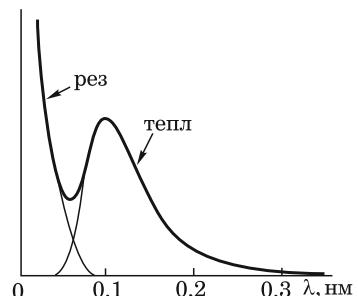


Рис. 68

лежит в плоскости пластины и по величине равен $M = 850$ Гс. В каком диапазоне длин волн нейтронов такая пластина будет работать как поляризатор, пропуская нейтроны только одной поляризации? Длина когерентного рассеяния нейтронов ядрами железа равна $a = 9,9$ фм, плотность железа $\rho = 7,87$ г/см³. Краевыми эффектами пренебречь.

8.75. При отражении от ферромагнетика граничная энергия нейтронов зависит от их поляризации. Это дает возможность при малых углах скольжения получать при отражении почти полностью поляризованные нейтроны. Найти максимальный угол скольжения, при котором тепловые нейтроны ($\mathcal{E}_{\text{теп}} = 0,025$ эВ), отраженные от намагниченного в плоскости кобальтового зеркала (остаточная индукция $B = 18$ кГс), будут практически полностью поляризованы. Граничная энергия нейтронов при рассеянии на ядрах кобальта равна $\mathcal{E}_{\text{рп}} = 0,585 \cdot 10^{-1}$ эВ.

8.76* Для когерентного разделения нейтронного пучка ($\lambda = 2,7$ Å) используется амплитудная отражающая дифракционная решетка, представляющая собой слои ^{58}Ni , нанесенные на стеклянную пластинку, период структуры $d = 0,021$ мм. Какое максимальное угловое расстояние между максимумами 0-го и +1-го порядков может быть достигнуто? При каком минимальном периоде структуры максимум +1-го порядка будет вообще существовать? Длина когерентного рассеяния нейтронов ядрами никеля $a = 14,4$ фм, плотность никеля $\rho = 8,8$ г/см³.

§ 9. Деление ядер. Реакторы. Термоядерный синтез

9.1.* Кулоновские силы способствуют делению атомного ядра, а силы поверхностного натяжения препятствуют. Определить отношение кулоновской \mathcal{E}_k и поверхностной \mathcal{E}_n энергий атомного ядра, при котором деление на два равных осколка энергетически выгодно. Выразить то же условие через параметр деления Z^2/A , пользуясь формулой Вайцзеккера для энергий \mathcal{E}_k и \mathcal{E}_n . Четности A и Z не учитывать.

9.2. С помощью полуэмпирической формулы Вайцзеккера найти минимальное значение параметра Z^2/A , при котором становится энергетически возможным деление ядра с четным A и четным Z на две одинаковые части. Рассмотреть три случая: 1) $A/2$ — нечетное, $Z/2$ — произвольное; 2) $A/2$ — четное, $Z/2$ — нечетное; 3) $A/2$ — четное, $Z/2$ — четное.

9.3.* Предполагая, что форма ядра является сферической, получить критерий устойчивости ядер по отношению к малым статическим деформациям формы. Ядерную материю считать несжимаемой. Проверить по полученному критерию устойчивость тяжелых естественных ядер. Как можно объяснить явления спонтанного деления?

Указание. Площадь поверхности вытянутого эллипсоида вращения с полуосами a и b

$$S = 2\pi ab \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right).$$

Энергия равномерно заряженного по объему эллипсоида с зарядом Q равна

$$\mathcal{E} = \frac{3}{10} \frac{Q^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

9.4*: Оценить эффективное сечение деления ядра $^{235}_{92}\text{U}$ нейтронами с энергиями 0,025 эВ (тепловые нейтроны) и 10 кэВ. Считать, что сечение деления равно сечению образования составного ядра. Ядерный потенциал аппроксимировать прямоугольной одномерной потенциальной ямой глубиной 40 МэВ.

9.5. Сечение деления $^{238}_{92}\text{U}$ быстрыми нейтронами с энергией $\mathcal{E} = 5$ МэВ равно $\sigma(n, f) = \sigma_{\text{дел}} = 0,5$ бн. Какова относительная вероятность этого нерезонансного процесса по отношению ко всем процессам, идущим через компаунд-состояние? Глубину одномерной прямоугольной потенциальной ямы ядра урана принять равной $U = 50$ МэВ.

9.6. Размножение нейтронов в делящейся среде можно условно представить как смену поколений. Существовавшие в некоторое время нейтроны будут все рано или поздно поглощены ядрами. На смену «умершему» поколению нейтронов появится новое поколение нейтронов, которое опять через некоторое время «умрет», чтобы дать «жизнь» следующему поколению. Конечно, время жизни нейтронов неодинаково, но можно ввести среднее время жизни одного поколения, точно так же, как это делается для человеческих поколений. Отношение числа нейтронов второго поколения к числу нейтронов первого поколения в делящейся среде называется коэффициентом размножения k_∞ . Если $k_\infty < 1$, то говорят, что система находится в подкритическом состоянии. Число нейтронов в такой системе будет уменьшаться во времени. Пусть в подкритической бесконечной системе в некоторый момент времени появилось N_0 нейтронов. Определить общее число нейтронов, образующихся в системе, если исходное их число равнялось N_0 .

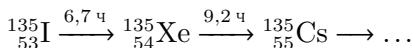
9.7. Показать, что в системе из чистого $^{238}_{92}\text{U}$ нельзя достигнуть $k_\infty > 1$ (см. задачу 9.6). Для энергии нейтронов больше 1,1 МэВ сечение поглощения не превышает величины 1 бн: $\sigma_{\text{погл}} = \sigma_{\text{дел}} + \sigma_{\text{захв}} < 1$ бн, где $\sigma_{\text{дел}}$ — сечение деления, а $\sigma_{\text{захв}}$ — сечение радиационного захвата. В то же время сечение упругого рассеяния, при котором нейtron теряет относительно большую часть своей энергии, $\sigma_{\text{рас}} \approx 3$ бн.

9.8. Реактивностью реактора называют величину $\rho = \frac{k-1}{k}$, где k — коэффициент размножения нейтронов; если $|k-1| \ll 1$, то $\rho \approx k-1$. Найти в этом приближении изменение мощности $W(t)$ реактора в надкритическом режиме, когда $k > 1$. Определить характерное время T реактора, т. е. время возрастания мощности W в e раз. Среднее время жизни одного поколения нейтронов равно τ .

9.9. При каких значениях реактивности реактора ρ , определенного в предыдущей задаче, запаздывающие нейтроны определяют зависимость мощности от времени? Доля запаздывающих нейтронов $\beta = 0,0064$.

9.10* Активная зона ядерного реактора заполнена смесью урана и графита, имеющей при бесконечных размерах коэффициент размножения нейтронов $k_\infty = 1,05$. Среднее расстояние, проходимое нейтроном от места рождения до поглощения, $L = 50$ см. Оценить критический радиус реактора R , при котором полное число нейтронов остается постоянным, считая, что плотность нейтронов изменяется линейно по радиусу и равна нулю на границе.

9.11* В работающем ядерном реакторе в числе многих элементов из урана все время образуются изотопы иода $^{135}_{53}\text{I}$, претерпевающие следующую последовательность бета-распадов (периоды полураспада указаны)



Так как ядра $^{135}_{54}\text{Xe}$ обладают очень большим сечением поглощения нейтронов, в работающем реакторе накопления этого изотопа не происходит. Однако при остановке реактора ксенон начинает накапливаться, тем самым уменьшается коэффициент размножения нейтронов и сразу же повторный запуск реактора затрудняется (образуется так называемая йодная яма). Через какое время после остановки реактора количество ядер $^{135}_{54}\text{Xe}$ будет максимальным? Считать, что в момент остановки реактора ядер ксенона в нем нет.

9.12* Один из способов утилизации оружейного плутония (почти чистый $^{239}_{94}\text{Pu}$) состоит в его облучении в реакторе, где за счет захвата (поглощения) нейтронов $^{239}_{94}\text{Pu}$ либо делится, либо переводится в $^{240}_{94}\text{Pu}$, который, в свою очередь, переходит в $^{241}_{94}\text{Pu}$. Сечения этих реакций равны $\sigma_{f1} = 741$ бн, $\sigma_{n1} = 267$ бн, $\sigma_{n2} = 290$ бн. Плутоний считается непригодным для создания ядерного оружия, если содержание в нем $^{240}_{94}\text{Pu}$ составляет 40% от $^{239}_{94}\text{Pu}$. Определить время, необходимое для достижения этой концентрации $^{240}_{94}\text{Pu}$ в образце оружейного плутония в реакторе с массой $M = 2,75$ т $^{235}_{92}\text{U}$ и мощностью $W = 3500$ МВт. Сечение деления $^{235}_{92}\text{U}$ равно $\sigma_{f3} = 579$ бн, в одном акте деления выделяется энергия $\epsilon = 180$ МэВ.

9.13. Под действием нейтронной компоненты космического излучения на поверхности Земли из $^{238}_{92}\text{U}$ образуется $^{239}_{94}\text{Pu}$. Считая, что плотность потока космических нейтронов равна $j_n = 10^{-4} \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$

и эффективное сечение захвата (поглощения) нейtronов ядром урана равно $\sigma = 3 \text{ бн}$, определить отношение концентрации $^{239}_{94}\text{Pu}$ и $^{238}_{92}\text{U}$ при временах $t \gg T_{1/2}$ от начала облучения ($T_{1/2} = 2,4 \cdot 10^4$ лет — период полураспада plutония).

9.14. Много лет тому назад в урановом месторождении в Около (Габон, Африка) «работал» природный ядерный реактор на $^{235}_{92}\text{U}$. Из массы $M = 200 \text{ т}$ имевшегося там урана выделилась энергия $\mathcal{E} = 10^{11} \text{ кВт} \cdot \text{ч}$. Оценить, какая часть массы $^{235}_{92}\text{U}$ $\Delta M/M$ была при этом израсходована, если его начальная концентрация составляла $n_0 = 3,5\%$. Время «работы» реактора много меньше периода полураспада урана. Энергию \mathcal{E}_0 , выделяющуюся при делении ядра $^{235}_{92}\text{U}$, принять равной 200 МэВ .

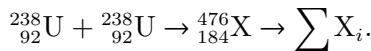
9.15. Естественный уран состоит из $99,3\%$ изотопа $^{238}_{92}\text{U}$ и $0,7\%$ $^{235}_{92}\text{U}$. При обогащении смеси изотопов $^{235}_{92}\text{U}$ до 3% возможна цепная реакция деления. Какое время t тому назад такой природный реактор мог «загореться»?

9.16. В урановом реакторе мощностью $W = 1 \text{ МВт}$ образуется в среднем $N = 6$ антинейтрино на один акт деления ядра урана. Энергия антинейтрино $\mathcal{E} = 1,5 \text{ МэВ}$. Реактор окружен биологической защитой (бетон). Оценить плотность потока антинейтрино j за биологической защитой на расстоянии $L = 5 \text{ м}$ и долю энергии η , уносимой антинейтрино из реактора. Считать, что реактор имеет сферическую форму.

9.17.* При спонтанном делении тяжелых элементов (тория, урана) внутри Земли выделяется мощность $W \approx 15 \text{ ТВт}$. Делящиеся элементы являются источниками антинейтрино (≈ 6 антинейтрино на акт распада). Предполагая распределение элементов в Земле равномерным, оценить плотность потока антинейтрино на ее поверхности. Сечение поглощения антинейтрино нуклоном принять равным $\sigma = 10^{-43} \text{ см}^2$.

9.18. Во всем мире в 1978 г. была выработана тепловая энергия, эквивалентная сжиганию около 10^{10} т условного топлива. Условное топливо имеет тепловыделение 7000 кал на 1 г. Какое количество естественного урана потребовалось бы взамен сжигания 10^{10} т условного топлива для получения такого же количества тепловой энергии? Считать, что в реакторах коэффициент воспроизведения «ядерного горючего» $k_b = 0,8$ (k_b — это отношение числа атомов созданного «горючего» к числу атомов затраченного). За один акт деления выделяется 200 МэВ энергии. В естественном уране содержится $0,714\% 235_{92}\text{U}$.

9.19. Один из перспективных методов получения новых изотопов — синтез сверхтяжелых ядер с их последующим распадом. Найти пороговую скорость v ядер урана, бомбардирующих урановую мишень, для реакции

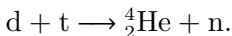


9.20* В термоядерном реакторе концентрация дейтерия $n_d = 2,5 \cdot 10^{15}$ ядер/ см^3 поддерживается на постоянном уровне с помощью внешнего источника дейтронов, который обеспечивает поступление q ядер/($\text{с} \cdot \text{см}^3$). Принимая во внимание только реакции (d, d) и (d, t), найти: 1) установившуюся концентрацию n_1 трития t ; 2) величину q ; 3) мощность W , выделяемую в 1 см^3 плазмы. При температуре плазмы $T = 60 \text{ кэВ}$ усредненные по максвелловскому распределению произведения сечений реакций на относительную скорость частиц равны $\overline{\sigma v_{dd}} = 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$; $\overline{\sigma v_{dt}} = 10^{-15} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$.

9.21. Каково количество термоядерных реакций, происходящих в 1 см^3 в 1 с , если известно сечение реакции $\sigma(v)$, где v — относительная скорость реагирующих дейтронов, а n — число дейтронов в 1 см^3 ?

9.22. Какая плотность тепловой мощности W [$\text{эрж}/(\text{с} \cdot \text{см}^3)$] создается термоядерными реакциями в чисто дейтериевой плазме с концентрацией ядер $n_d = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $\overline{\sigma v_{dd}} = 10^{-17} \text{ см}^3/\text{с}$, что соответствует температуре плазмы $4,6 \cdot 10^8 \text{ К}$ или 40 кэВ в энергетических единицах? При вычислениях учитывать лишь энергию реакций $d + d$.

9.23. В первом поколении термоядерных реакторов предполагается использовать реакцию дейтерия с тритием:



Теплота реакции $Q = 17,6 \text{ МэВ}$. Предполагая, что квазинейтральная плазма содержит равное количество ядер дейтерия и трития при плотности электронов $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, рассчитать плотность тепловой мощности W , а также полную мощность N термоядерной установки. Объем плазмы $V = 500 \text{ м}^3$. Для данной реакции

$$\overline{\sigma v_{dt}} = \begin{cases} 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ см}^3/\text{с} & \text{при } kT = 1 \text{ кэВ}, \\ 6 \cdot 10^{-17} \text{ см}^3/\text{с} & \text{при } kT = 10 \text{ кэВ}. \end{cases}$$

9.24. Термоядерная реакция называется самоподдерживающейся, если выделяемая энергия полностью уходит на разогрев плазмы (ядер дейтерия, трития и электронов) до необходимой температуры T . Исходя из этого, найти минимально необходимое время t удержания квазинейтральной дейтериево-тритиевой плазмы с полной концентрацией частиц $n_d + n_t = n$. Для данной реакции при данной температуре величины Q_{dt} и $\overline{\sigma v_{dt}}$ считать заданными.

П р и м е ч а н и е. Время удержания плазмы определяется в первую очередь различными неустойчивостями, а также процессами диффузии и излучения.

9.25. Согласно критерию Лоусона в равнокомпонентной смеси дейтерия и трития при $kT = 10 \text{ кэВ}$ термоядерная реакция будет са-

моподдерживающейся, если $n\tau = 10^{14}$ с/см³, где n — плотность электронов, τ — время удержания плазмы (см. задачу 9.24). Какова для этого случая должна быть плотность тепловой мощности, выделяемой в реакторе, если $n = 10^{14}$ см⁻³.

Причина. Такой режим работы называют режимом нулевой мощности.

9.26. Экономически выгодным считается такой термоядерный реактор, в котором выделяемая энергия втрое превышает затраты на разогрев плазмы. Это связано с тем, что часть выделяемой мощности должна идти на поддержание работы различных вспомогательных устройств. Показать, что для квазинейтральной равнокомпонентной дейтериево-тритиевой плазмы при $kT = 10$ кэВ критерий Лоусона имеет вид $n\tau > 3 \cdot 10^{14}$ с/см³. Здесь n — плотность электронов, τ — время удержания плазмы (см. задачу 9.24). Для данной реакции при заданной температуре $\overline{\sigma v}_{dt} = 6 \cdot 10^{-17}$ см³/с, а $Q_{dt} = 17,6$ МэВ.

9.27. Оценить радиус плазменного дейтериевого шара, для которого термоядерная реакция станет самоподдерживающейся при $kT = 10$ кэВ. Плазму можно рассматривать как абсолютно черное тело, непрозрачное для излучения, и считать, что основные потери энергии связаны с излучением через поверхность шара. Концентрация дейтерия равна $n_d = 3,0 \cdot 10^{20}$ см⁻³; при данной температуре величина $\overline{\sigma v}_{dd} = 10^{-18}$ см³/с. Учитывать только реакции (d, d) и (d, t) (см. задачу 9.20). Концентрации дейтерия и трития считать стационарными.

9.28* При классическом рассмотрении реакция термоядерного синтеза (d, d) может произойти только тогда, когда кинетическая энергия сталкивающихся дейtronов достаточна для преодоления кулоновского барьера $U_{кул} = 0,5$ МэВ. Однако благодаря туннельному эффекту эта реакция возможна и при меньших энергиях. Оценить, во сколько раз увеличивается скорость реакции при квантовом рассмотрении по сравнению с классическим. Температура дейтериевой плазмы $T_0 = 10^8$ К.

9.29* Реакция термоядерного синтеза $d + t \rightarrow n + \alpha$ при низких энергиях идет преимущественно в состоянии с полным моментом импульса сталкивающихся ядер $I = 3/2$. Во сколько раз изменится среднее сечение этой реакции, если дейтериево-тритиевая плазма помещена в магнитное поле, полностью поляризующее спины взаимодействующих ядер? Спины ядер дейтерия и трития равны соответственно $S_d = 1$ и $S_t = 1/2$. (См. указание к задаче 8.4.)

9.30* В морской воде примерно на каждые 6000 молекул обычной воды приходится одна молекула тяжелой воды D₂O. Учитывая четыре основные реакции синтеза, возможные в дейтериевой плазме, определить, какая энергия выделится в термоядерном реакторе при сжигании всего дейтерия, содержащегося в 1 л морской воды. Какому количеству бензина эквивалентен по энергии 1 л воды, если при сжигании 1 кг бензина выделяется 13 кВт · ч энергии?

9.31. Оценить запас термоядерной энергии \mathcal{E} в 1 м^3 морской воды, если использовать 10%дейтерия, содержащегося в воде, для осуществления реакции $d + d$. Число атомов дейтерия в природной смеси изотопов равно 0,015%.

9.32. Определить отношение начальной кинетической энергии частиц дейтериевой плазмы, нагретой до $T = 10^9 \text{ К}$, к энергии, выделившейся после «выгорания» всего дейтерия в результате реакции термоядерного синтеза. Учитывать только реакции (d, d) и (d, t) .

9.33* На рис. 69 изображена предполагаемая схема термоядерной электростанции. В реактор вводится подогретое до необходимой температуры топливо — дейтериевая плазма. Часть частиц покидает

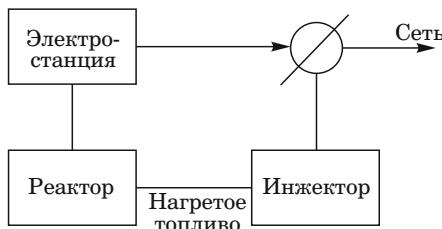


Рис. 69

зону реакции, не испытав ядерного взаимодействия. Часть энергии заряженных частиц, которая бесполезно излучается из зоны реакции за счет тормозного излучения, с помощью системы отражателей возвращается обратно в реактор. Коэффициент преобразования выделенной энергии в электрическую (КПД станции) $\eta = 30\%$. Температура дейтериевой плазмы $T = 10^9 \text{ К}$. Найти $n_d \tau$ — произведение концентрации ядер дейтерия на время удержания дейтериевой плазмы в зоне реакции, необходимое для протекания самоподдерживающейся реакции. Принять во внимание только реакции (d, d) и (d, t) . При заданной температуре $\overline{\sigma v_{dd}} = 2,5 \cdot 10^{17} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Считать, что за единицу времени из единицы объема плазмы уходит в среднем n_d / τ частиц. Интенсивность тормозного излучения единицы объема $W_{изл} = 1,5 \cdot 10^{-34} n_d^2 \sqrt{T} \text{ Вт/см}^3$. Для упрощения расчета принять, что доля β мощности потерь из-за тормозного излучения, возвращенная обратно в реактор отражателями, равна КПД станции, т. е. $\beta = \eta$.

9.34. Согласно современным представлениям на Солнце осуществляется звездный углеродный цикл, в результате которого из четырех протонов образуется α -частица. Конечной реакцией этого цикла является реакция $p + {}_{7}^{15}\text{H} \rightarrow {}_{6}^{12}\text{C} + {}_{2}^{4}\text{He}$. Оценить, какая доля энергии η от полной энергии цикла выделяется в указанной реакции.

9.35. Под действием медленных нейтронов из литиевой мишени, состоящей из изотопа ${}_{3}^{6}\text{Li}$, вылетают тритоны. Они, в свою оче-

редь, попадают в дейтериевую мишень и могут приводить к реакции $t + d \rightarrow n + \alpha$. Какова при этом максимальная кинетическая энергия вторичных нейтронов?

9.36. Основная реакция в водородной среде в центрах звезд $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$ обусловлена слабым взаимодействием. Этот процесс можно промоделировать в лабораторных условиях. Рассчитать, какой ток \mathcal{I} протонов с энергией 1 МэВ должен падать на водородную мишень, чтобы за $t = 1$ ч произошла одна такая реакция. Пробег протонов данной энергии в мишени до взаимодействия $l = 8 \cdot 10^{-4}$ г/см², сечение взаимодействия при данной энергии $\sigma = 10^{-47}$ см².

9.37* В центре Солнца плотность ядер водорода $\rho \approx 160$ г/см³, температура $T = 1,5 \cdot 10^7$ К ($kT \approx 1$ кэВ). Рассчитать время выгорания 50% ядер водорода в центре Солнца за счет реакции $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$. Считать, что все протоны в центре Солнца имеют скорость, равную скорости при данной температуре, а сечение их взаимодействия $\sigma = 10^{-51}$ см².

9.38. Сечение деления ядер $^{238}_{92}\text{U}$ γ -квантами с энергией 3 МэВ составляет $\sigma = 0,1$ нбн (10^{-34} см²). Какова должна быть плотность потока j [см⁻² · с⁻¹] падающих на мишень γ -квантов, чтобы можно было заметить вынужденное деление в $t = 1$ мг урана на фоне спонтанного деления ($T_{1/2} = 10^{15}$ лет) при продолжительности эксперимента $t_0 = 100$ час?

9.39. Оценить критический радиус и массу шара из металлического урана-235 плотностью $\rho = 18,7$ г/см³ (заряда ядерной бомбы), если известно, что среднее сечение деления ядер рождающимися нейтронами $\sigma = 1,5$ бн, среднее число рождающихся в одном акте деления нейтронов $v = 2,5$. Всеми другими каналами реакции, кроме делительного, пренебречь. Плотность потока нейтронов считать однородной.

9.40. В бесконечной среде, состоящей из металлического урана-235, самопроизвольно разделилось одно ядро. Коэффициент размножения нейтронов $k_\infty = 1,001$, средняя энергия делительных нейтронов $\mathcal{E} = 1,6$ МэВ, сечение деления этими нейтронами $\sigma = 1,5$ бн. Оценить, за какое время в среде выделится энергия $W = 5$ МДж. Плотность урана $\rho = 18,7$ г/см³, неупругими процессами пренебречь.

9.41* Высота и форма барьера деления $U(\mathcal{E})$ зависят от спина (полного момента) и четности делающегося ядра (рис. 70). Так, например, у ядра $^{238}_{92}\text{U}$ основное состояние есть 0^+ , высоты барьеров деления для возбужденных состояний ядра 2^+ и 1^- равны 5,2 и 5,7 МэВ соответственно. Найти отношение β вероятностей деления ядра через эти состояния под действием

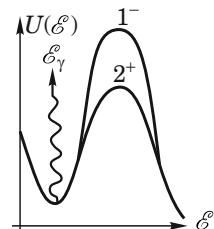


Рис. 70

γ -квантов с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 6,0 \text{ МэВ}$. Как изменится вероятность деления через состояние 2^+ , если поместить ядра в поле интенсивного лазерного излучения (т. е. в случае, когда ядро практически одновременно поглощает γ -квант и фотон)?

9.42. Высота и форма барьера деления $U(\mathcal{E})$ зависят от спина (полного момента) и четности делящегося ядра (рис. 70). Так, например, у ядра $^{240}_{94}\text{Pu}$ основное состояние есть 0^+ , высота барьеров деления для возбужденных состояний ядра 2^+ и 1^- равны соответственно 5,2 и 5,7 МэВ. Оценить отношение вероятностей деления ядра через эти состояния под действием γ -квантов с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 5,4 \text{ МэВ}$. Форму барьера деления для состояния можно аппроксимировать «перевернутой параболой» с характерным квантом $\hbar\omega = 1,3 \text{ МэВ}$. (См. также задачу 3.41.)

9.43. Источником питания находящегося на околоземной орбите спутника является ядерный реактор мощностью $W = 3 \text{ кВт}$. Оценить, на каком максимальном расстоянии от спутника можно обнаружить наличие реактора с помощью γ -телескопа. Считать, что сигнал надежно регистрируется, если он вдвое превышает γ -фон неба $\Phi_0 = 10^{-2} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. В каждом акте деления в среднем испускается $k = 7$ γ -квантов, защита реактора поглощает $\alpha = 95\%$ образующегося излучения. Считать, что угловое разрешение телескопа равно угловому размеру спутника.

§ 10. Элементарные частицы. Резонансы. Лептоны и кварки. Реакции при высоких энергиях

10.1. При рождении и распаде частиц выполняется (помимо законов сохранения энергии, импульса и момента импульса) ряд точных законов сохранения (тильда сверху в обозначении частицы является знаком античастицы):

1) закон сохранения электрического заряда;

2) закон сохранения барионного заряда (барионный заряд равен 1 для барионов, т. е., например, для нуклонов (n , p) и гиперонов (Λ , Σ , Ξ); -1 для антибарионов, т. е., например, для антинуклонов (\bar{n} , \bar{p}) и антигиперонов ($\bar{\Lambda}$, $\bar{\Sigma}$, $\bar{\Xi}$); 0 для всех остальных типов частиц);

3) законы сохранения электронного лептонного заряда L_e , мюонного лептонного заряда L_μ и таонного лептонного заряда L_τ . Для электрона (e^-) и электронного нейтрино (ν_e) принято, что $L_e = 1$, а для позитрона и электронного антинейтрино $L_e = -1$. Для всех остальных частиц $L_e = 0$. Аналогично, L_μ отлично от нуля только для четырех частиц: μ^- , ν_μ , μ^+ , $\bar{\nu}_\mu$ (мюонов и мюонных нейтрино), причем для первых двух частиц $L_\mu = 1$, а для последних двух

$L_\mu = -1$. Аналогично вводятся лептонные заряды и для сверхтяжелого лептона τ^- .*)

Указать, какие из приведенных ниже реакций запрещены перечисленными законами сохранения:

- | | |
|--|--|
| 1. $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. | 5. $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$. |
| 2. $p \rightarrow n + e^+$. | 6. $K^- + n \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$. |
| 3. $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$. | 7. $\pi^+ + n \rightarrow \Lambda^0 + K^+$. |
| 4. $K^+ \rightarrow \pi^- + 2e^+$. | 8. $\pi^+ + n \rightarrow K^+ + K^0$. |

10.2. Рассмотреть приведенные ниже распады и реакции и указать, какие из них запрещены:

- | | |
|--|--|
| 1. $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. | 6. $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + e^+$. |
| 2. $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_e$. | 7. $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + \mu^+$. |
| 3. $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_e + \bar{\nu}_e$. | 8. $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$. |
| 4. $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$. | 9. $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$. |
| 5. $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$. | 10. $\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. |

10.3. Взаимодействие и распад частиц происходят в результате сильного, электромагнитного или слабого взаимодействий. Вероятность процессов при слабом взаимодействии на много порядков меньше, чем при сильном. Сильное взаимодействие может происходить только между адронами. При сильном и электромагнитном взаимодействиях сохраняется квантовое число S (страница). При слабом взаимодействии страница не сохраняется. Принято приписывать страницу S частицам следующим образом:

$S = 0$ для нуклонов, антинуклонов, π -мезонов;

$S = -1$ для Λ^0 , Σ^+ , Σ^- , K^- , $\bar{\Sigma}^0$, \bar{K}^0 (K -мезонов, Σ -гиперонов, Λ -частицы);

$S = -2$ для Ξ^- , Ξ^0 (каскадных гиперонов);

$S = -3$ для Ω^- (гиперона);

$S = +1$ для $\bar{\Lambda}^0$, $\bar{\Sigma}^+$, $\bar{\Sigma}^-$, $\bar{\Sigma}^0$, K^+ , K^0 ;

$S = +2$ для $\bar{\Xi}^-$, $\bar{\Xi}^0$;

$S = +3$ для Ω^+ .

При изменении страницы на 1 вероятность процесса уменьшается в $10^{10} \div 10^{12}$ раз по сравнению со случаем сильного взаимодействия, а при изменении S на 2 реакция фактически не наблюдается, если возможна реакция с изменением S только на 1. При существующей интенсивности частиц, генерируемых в ускорителях, реакции

*) Строго говоря, сохраняется только суммарный лептонный заряд. Связано это с осцилляциями нейтрино. (См. задачу ??.)

между ними с нарушением странности практически ненаблюдаются. Однако распады частиц с нарушением закона сохранения странности наблюдаются всегда.

Выяснить, какие из перечисленных реакций и распадов разрешены по закону сохранения S , какие не наблюдаются:

- | | |
|--|---|
| 1. $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0.$ | 8. $\pi^+ + n \rightarrow \Lambda^0 + K^+.$ |
| 2. $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0.$ | 9. $K^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^+.$ |
| 3. $\Lambda \rightarrow p + \pi^-.$ | 10. $p + \bar{\Sigma}^+ \rightarrow K^+ + \pi^+.$ |
| 4. $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-.$ | 11. $p + \bar{\Sigma}^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+.$ |
| 5. $\Xi^- \rightarrow 2\pi^- + p.$ | 12. $\pi^- + p \rightarrow \Xi^- + \Xi^+ + n.$ |
| 6. $\pi^+ + \bar{p} \rightarrow \bar{\Sigma}^+ + K^-.$ | 13. $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + K^-.$ |
| 7. $\pi^+ + \bar{p} \rightarrow \bar{\Sigma}^+ + \pi^-.$ | 14. $\pi^- + p \rightarrow \Xi^- + K^+ + K^0.$ |

10.4. При распадах странных адронов (барионов и мезонов), приводящих к рождению лептонов, существует эмпирическое правило, управляющее вероятностью распада. Если изменение странности адрона ΔS (конечная минус начальная) при реакции не равняется изменению заряда адронов ΔZ (конечная минус начальная), то такой распад не наблюдается. Например, наблюдается распад



но не наблюдается распад



Существование первого и отсутствие второго из этих распадов можно рассматривать как подтверждение кварковой структуры адронов. Определить, какие из перечисленных ниже распадов разрешены по правилу $\Delta Z = \Delta S$, а какие запрещены:

- | | |
|---|--|
| 1. $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e.$ | 6. $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + e^- + \bar{\nu}_e.$ |
| 2. $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^- + e^+ + \nu_e.$ | 7. $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^- + e^+ + \nu_e.$ |
| 3. $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + e^- + \bar{\nu}_e.$ | 8. $K^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \pi^0.$ |
| 4. $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + e^- + e^+.$ | 9. $K^+ \rightarrow \pi^+ + \mu^+ + \mu^-.$ |
| 5. $\Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$ | 10. $K^- \rightarrow \pi^- + \pi^- + e^+ + \nu_e.$ |

10.5. Все частицы естественным образом разбиваются на группы с близкими значениями масс (отличие масс в группе порядка 1%). Группу частиц с близкими массами называют изотопическим мультиплетом (синглетом, дублетом, триплетом, квартетом). Частицы мультиплета можно трактовать как различные состояния одной фиктивной частицы, отличающиеся значениями проекции нового квантового числа — изотопического спина T . Как и обычный спин (момент

импульса), изотопический спин имеет $2T+1$ проекций на ось квантования в фиктивном изотопическом пространстве. Число проекций изотопического спина совпадает с числом частиц в мультиплете, т. е. $N = 2T+1$. При этом проекция изотопического спина на ось квантования T_3 связывается с электрическим зарядом члена мультиплета $T_3 = Z - Y/2$, где Y — квантовое число, одинаковое для всех членов мультиплета, называемое гиперзарядом (или унитарным спином). Поскольку $\Sigma T_3 = 0$, то $Y = 2\frac{Z}{N+1} = Z_{\text{ср}}$ — удвоенный средний заряд мультиплета. Оказалось, что странность S (см. задачу 10.3) связана с гиперзарядом Y и барионным зарядом B простым соотношением: $S = Y - B$. Пользуясь приведенными равенствами, определить S , T , T_3 и Y для Λ^0 , Σ , Ξ , Ω^- , π , K , η -частиц.

П р и м е ч а н и е. Для античастиц все заряды (электрический, барионный, лептонный, гиперзаряд) противоположны зарядам частиц. Противоположны также странность S и проекция изотопического спина T_3 . Массы, времена жизни, спины и изотопические спины T у частиц и античастиц совпадают. Частицы, у которых все заряды равны нулю, называются истинно нейтральными.

10.6. Строгие законы сохранения (см. задачу 10.1) ограничивают число типов реакций и распадов. Нестрогие законы сохранения ограничивают типы взаимодействий. Какие из приведенных ниже реакций и распадов разрешены законами сохранения, какие строго запрещены, какие практически ненаблюдаемы? (См. задачу 10.3.)

- | | |
|---|---|
| 1. $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$. | 4. $\mu^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$. |
| 2. $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \gamma$. | 5. $K^+ + n \rightarrow \Sigma^+ + \pi^0$. |
| 3. $\pi^0 \rightarrow e^- + e^+ + \gamma$. | 6. $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. |

10.7. Указать, какие из перечисленных ниже реакций и распадов невозможны или практически ненаблюдаемы из-за нарушения законов сохранения:

- | | |
|--|---|
| 1. $\Sigma^+ \rightarrow \pi^+ + n$. | 5. $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + K^+$. |
| 2. $\Sigma^- + p \rightarrow \pi^0 + \tilde{K}^0$. | 6. $\Sigma^0 \rightarrow \Delta^0 + \gamma$. |
| 3. $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \tilde{K}^0$. | 7. $\Sigma^- \rightarrow \Lambda^0 + e^- + \bar{\nu}_e$. |
| 4. $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + K^-$. | 8. $\Sigma^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$. |

По какому типу взаимодействия происходят процессы 1, 5, 6, 7?

10.8. Рассмотреть приводимые ниже реакции и распады и определить тип взаимодействия:

- | | |
|--|--|
| 1. $K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$. | 4. $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$. |
| 2. $\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$. | 5. $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. |
| 3. $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$. | 6. $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0$. |

10.9* Как отличаются друг от друга значения квантовых чисел K^0 -мезона и \bar{K}^0 -мезона и как это сказывается на поглощении K^0 и \bar{K}^0 -мезонов веществом? Возможны ли переходы этих частиц друг в друга?

10.10. Определить типы взаимодействий при следующих реакциях и распадах:

- | | |
|--|---|
| 1. $K^- + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_2^3\text{He} + \Lambda^0 + \pi^-$. | 5. ${}_2^4\text{He} + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_3^6\text{Li} + {}_1^2\text{H} + \pi^0$. |
| 2. ${}_1^2\text{H} + {}_1^2\text{H} \rightarrow {}_2^4\text{He} + \pi^0$. | 6. $\Omega^- \rightarrow K^- + \Lambda^0$. |
| 3. $p + {}_2^4\text{He} \rightarrow {}_2^3\text{He} + {}_1^2\text{H}$. | 7. $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. |
| 4. ${}_2^3\text{He} + {}_1^3\text{H} \rightarrow {}_2^4\text{He} + {}_1^2\text{H}$. | 8. $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. |

10.11. Возможны ли следующие схемы распада частиц, и если нет, то по какой причине?

- | | |
|--|--|
| 1. $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$. | 4. $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_\mu$. |
| 2. $\Xi^- \rightarrow n + \pi^-$. | 5. $p \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$. |
| 3. $n \rightarrow p + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. | 6. $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \mu^-$. |

10.12. Какая частица обязана образоваться одновременно с K^0 -мезоном при соударении π^- -мезона с протоном? Реакция идет по сильному взаимодействию.

10.13. «Экспериментом века» были названы опыты по определению времени жизни протона. Теория великого объединения предсказывает, что протон распадается на пион и лептоны со временем жизни $\tau \sim 10^{31}$ лет. Оценить, какую массу вещества необходимо использовать, чтобы за время эксперимента $t = 1$ год произошло $N = 10$ таких распадов.

10.14. Определить время жизни мюона, образовавшегося при распаде положительно заряженного каона. До распада каон покоялся.

10.15. Определить время жизни ипсилон-частицы Υ по ширине ее резонанса $\Delta\mathcal{E}$, взятой на половине высоты и равной 25 кэВ.

10.16* Найти, какие из самых тяжелых ядер и антиядер могут образоваться в реакции $p + p$ при соударении протона с энергией $\mathcal{E}_p = 3 \cdot 10^{12}$ эВ с неподвижным протоном и на встречных пучках протонов, ускоренных до такой же энергии.

10.17* В 1976 г. Нобелевская премия по физике была присуждена за открытие новой элементарной частицы — джи-мезона (ныне: J/ψ -мезон). Открытие было сделано практически одновременно и независимо в двух разных лабораториях. В одной из них опыт был поставлен на встречных пучках электронов и позитронов, ускоренных до одинаковой энергии $\mathcal{E}_{\text{см}}$ ($\mathcal{E}_{\text{см}}$ — энергия сталкивающихся частиц в системе центра масс). Полученные в этом эксперименте ре-

зультаты показаны на рис. 71. Определить энергию покоя и оценить нижнюю границу времени жизни джи-частицы.

10.18. В 1984 г. появилось сообщение, впоследствии не подтвержденное, об открытии ξ -частицы как продукта распада Υ -частицы

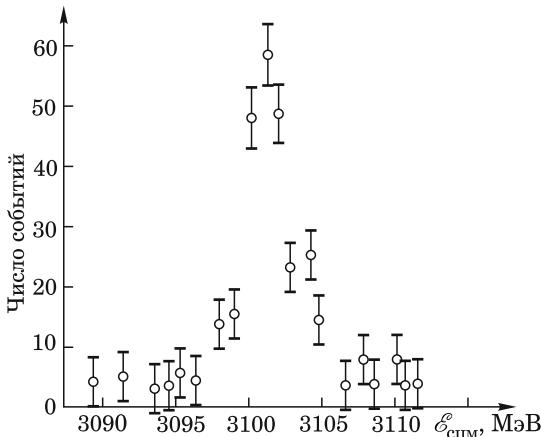


Рис. 71

в реакции $\Upsilon \rightarrow \xi + \gamma$. Определить энергию покоя и скорость гипотетической ξ -частицы в системе покоя Υ -частицы, если энергия γ -кванта в этой системе оказалась $E_\gamma = 1072$ МэВ. Энергия покоя Υ -частицы равна $m_\Upsilon c^2 = 9460$ МэВ.

10.19. В 1974 г. была открыта элементарная частица J/ψ , названная впоследствии чармонием. В одном из опытов были зарегистрированы продукты ее распада «на лету»: $J/\psi \rightarrow e^+ + e^-$. Найти массу и скорость чармоная, если энергии и электрона, и позитрона были равны $E = 3,1$ ГэВ, а угол между направлениями разлета электрона и позитрона составил $\theta = 60^\circ$.

10.20. В 1976 г. были получены первые указания о существовании заряженной «очарованной» $\tilde{\Lambda}_c^-$ -частицы, распадающейся по схеме

$$\tilde{\Lambda}_c^- \rightarrow \tilde{\Lambda}^0 + \pi^- + \pi^+ + \pi^-.$$

Найти кинетическую энергию, уносимую продуктами распада $\tilde{\Lambda}_c^-$ -частицы в ее системе покоя.

10.21. Определить, выше какой минимальной энергии E_{\min} встречных электрон-позитронных пучков, имеющих одинаковую энергию, могут рождаться частицы из семейства «красивых» (В-мезоны). Энергия покоя В-мезона $m_B c^2 \approx 5279$ МэВ.

10.22. Определить пороговую энергию $E_{\text{пор}}$ рождения пары Σ -гиперонов при облучении протонами жидкводородной мишени.

10.23. Найти, чему равно наибольшее количество заряженных или нейтральных пионов, которое может быть образовано при столкновении протона с энергией $\mathcal{E}_p = 5$ ГэВ с покоящимся протоном.

10.24. Определить минимальную (пороговую) кинетическую энергию нейтрона, при столкновении которого с ядром водорода в жидковородной мишени образуется лямбда-частица.

10.25. Найти минимальную (пороговую) кинетическую энергию налетающего протона, необходимую для рождения пары барионов ($\Xi^0\bar{\Xi}^0$), имеющих энергию покоя по 1315 МэВ каждый, в (pp)-соударениях в жидковородной камере.

10.26. Определить максимальную энергию \mathcal{E}_{\max} электрона, образующегося при распаде покоящегося мюона.

10.27. Определить в лабораторной системе отсчета минимальную и максимальную энергию электрона, образованного при распаде мюона с энергией $\mathcal{E}_{\mu} = 10,5$ ГэВ.

10.28. Нейтральный пion распался на два γ -кванта с энергиями $\mathcal{E}_1 = 3,1$ и $\mathcal{E}_2 = 2,0$ ГэВ. Найти угол разлета θ между γ -квантами.

10.29. Оценить, при какой энергии \mathcal{E} ультрарелятивистского зараженного пиона его пробег до распада равен пробегу в воздухе при плотности $\rho = 10^{-5}$ г/см³. Собственное время жизни и энергия покоя пиона равны $\tau_0 = 2,6 \cdot 10^{-8}$ с и $m_{\pi}c^2 = 140$ МэВ.

10.30. Нейтральный пion π^0 с энергией покоя $m_{\pi}c^2 = 135$ МэВ распадается на лету на два одинаковых γ -кванта, разлетающихся под углом $\alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ рад по отношению к направлению движения пиона. Какова кинетическая энергия пиона π^0 ? Чему равна неопределенность энергии покоя пиона π^0 и каково его время жизни в лабораторной системе координат, если в собственной системе он живет $\tau_0 = 0,84 \cdot 10^{-16}$ с?

10.31. D⁰-мезон распадается на лету на K⁻- и π^+ -мезоны. Расстояние от точки его рождения до точки распада равно $L = 350$ мкм. Импульсы каона и пиона равны $p_K = 3,6$ ГэВ/с и $p_{\pi} = 1,9$ ГэВ/с и направлены под углами $\theta_K = 13^\circ 30'$ и $\theta_{\pi} = 27^\circ 50'$ к направлению импульса D⁰-мезона. Определить энергию покоя, скорость и время жизни D⁰-мезона.

10.32* При распаде «на лету» Ω^- -гиперона ($\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$) измерены импульсы частиц распада $p_{\Lambda} = 5,7$ ГэВ/с и $p_K = 2,0$ ГэВ/с и угол разлета между ними $\theta = 28,5^\circ$. Определить энергию покоя Ω^- -гиперона.

10.33. За распадом остановившегося в ядерной фотоэмulsionии K⁺-мезона по схеме $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ последовал распад нейтрального пиона π^0 по схеме $\pi^0 \rightarrow \gamma^+ + e^+ + e^-$, причем точка рождения пары e^+e^- находилась на расстоянии $L = 0,04$ мкм от места остановки K-мезона. Оценить собственное время жизни нейтрального пиона π^0 .

10.34. Какова средняя длина пути L до распада Λ^0 -гиперона в воздухе, если его энергия $\mathcal{E}_\Lambda = 7 \text{ ГэВ}$?

10.35* Коллимированный монохроматический пучок заряженных пионов, энергия которых $\mathcal{E}_\pi = 10 \text{ ГэВ}$, вследствие распада постепенно превращается в пучки мюонов и нейтрино. На каком расстоянии L от области формирования пучка число образовавшихся мюонов в три раза превышает число пионов?

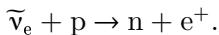
10.36. Оценить примесь мюонов в пучке заряженных каонов на расстоянии $L = 10 \text{ м}$ от места формирования пучка каонов. Каоны в пучке имеют энергию $\mathcal{E} = 3 \text{ ГэВ}$. Выходом мюонов из пучка в процессе распада пренебречь.

10.37. При рождении π^+ - и K^+ -мезонов в мишени ускорителя с импульсами $p_\pi = p_K = p = 2 \text{ ГэВ}/c$ их числа относятся как $100 : 1$. Найти это отношение на расстоянии $L = 50 \text{ м}$ от мишени.

10.38. Заряженный пион, имеющий энергию $\mathcal{E}_\pi = 420 \text{ МэВ}$, распадается на лету на мюон и антинейтрино. Определить энергию мюона в лабораторной системе, если в системе покоя пиона мюон вылетел под углом 90° к направлению полета пиона.

10.39* Для получения пучков заряженных пионов на ускорителях на пути пучка ускоренных протонов ставится тонкая мишень. Определить число заряженных пионов N_π , образовавшихся в мишени в секунду, если на расстоянии $L = 5 \text{ м}$ от мишени интенсивность пионов равна $n = 5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-2}\text{s}^{-1}$. Регистрация осуществляется детектором, площадь которого равна $S = 100 \text{ см}^2$. Кинетическая энергия пионов $T = 500 \text{ МэВ}$. Считать, что из мишени пионы вылетают изотропно, т. е. равновероятно под любыми углами в лабораторной системе координат.

10.40. Определить пороговую энергию $\mathcal{E}_{\text{пор}}$ для реакции на покоящемся протоне



10.41. Какова наибольшая энергия электрона, образованного при распаде покоящегося τ -лектона на мюон и два нейтрино, а мюона в свою очередь на электрон и два нейтрино?

10.42. В результате облучения жидкводородной мишени нейтронами в реакции $n + p \rightarrow d + \pi^0$ наблюдаются гамма-кванты от распада $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, разлетающиеся в строго противоположных направлениях в лабораторной системе отсчета. Какова кинетическая энергия нейтронов облучения?

10.43. При какой энергии налетающего протона на покоящийся протон в реакции $p + p \rightarrow d + \pi^+$ кинетическая энергия дейтрана в лабораторной системе координат может быть равна нулю?

10.44. Взаимодействие протонов космического излучения с рентгеновскими фотонами (средняя энергия квантов $\epsilon \sim 10^{-3} \text{ эВ}$, а плотность $n = 400 \text{ см}^{-3}$) может, в частности, приводить к реакции $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$, порог которой (кинетическая энергия) при бомбардировке покоящегося протона равен $T = 140 \text{ МэВ}$, а сечение —

$\sigma \approx 10^{-4}$ бн. При какой минимальной энергии протона \mathcal{E} этот процесс идет в космосе? Каково время жизни τ протона до взаимодействия?

10.45. Взаимодействие высокоэнергетических γ -квантов космического излучения с реликтовыми фотонами (средняя энергия квантов $\varepsilon \sim 10^{-3}$ эВ, а плотность $n = 400 \text{ см}^{-3}$) может приводить к образованию электрон-позитронных пар. Определить пороговую энергию γ -квантов T (эВ) в этом процессе. Каково время жизни τ надпорогового γ -кванта до взаимодействия, если сечение этого процесса $\sigma = 1 \text{ бн}$?

10.46. Мюоны космических лучей образуются, в основном, в стратосфере Земли под действием первичного космического излучения. Оценить энергию мюона, достигающего поверхности Земли, если он образовался на высоте $H = 40 \text{ км}$. Потерями энергии мюона на ионизацию воздуха пренебречь.

10.47. Мюоны космических лучей образуются в верхнем слое атмосферы Земли. Оценить, какую наименьшую энергию \mathcal{E}_{\min} должен иметь мюон, чтобы достигнуть Земли, если он образовался на высоте $H = 40 \text{ км}$. Потери энергии мюонов на ионизацию воздуха составляют $\alpha = 1,8 \text{ МэВ} \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{см}^2$.

10.48. В настоящее время экспериментально установлено, что верхняя граница энергии покоя мюонного нейтрино равна 0,17 МэВ. С какой относительной точностью нужно измерять кинетическую энергию мюона, возникающего при распаде покоящегося pione, чтобы довести границу до более низкого значения, равного 0,1 МэВ?

10.49. На вход распадного канала длиной 1 км из ускорителя попадают заряженные пионы с энергией 0,9 ТэВ. В результате распада пионов ($\pi \rightarrow \mu\nu$) в канале рождаются нейтрино с энергией порядка 100 ГэВ. Каков относительный выход нейтрино? Какой вклад в поток нейтрино дает распад родившихся мюонов? Нейтрино и антинейтрино считать одинаковыми частицами.

10.50. На Землю непрерывно приходят от Солнца нейтрино с энергиями в диапазоне $0,1 \div 15 \text{ МэВ}$. Детектором регистрируются возникающие в его материале под действием этих нейтрино электроны отдачи с кинетическими энергиями выше $T_e = 5 \text{ МэВ}$. Какой минимальной энергии нейтрино соответствует этот порог регистрации для свободных электронов? (См. задачу 1.50.)

10.51. На Землю непрерывно приходят от Солнца нейтрино с энергиями в диапазоне $0,1 \div 15 \text{ МэВ}$. Детектором регистрируются возникающие в его материале под действием этих нейтрино электроны отдачи с кинетическими энергиями выше $T_e = 5 \text{ МэВ}$. Каков максимальный угол рассеяния свободных электронов от нейтрино максимальной энергии? (См. задачу 1.50.)

10.52. Под действием протонов космических лучей в атмосфере Земли генерируются заряженные пионы. По мере прохождения к поверхности Земли они распадаются с образованием мюонов, которые также нестабильны. Какая должна быть зарегистрирована у поверхности Земли величина отношения потоков мюонных и электронных

нейтрино, родившихся в результате распадов этих частиц? Нейтрино считать безмассовыми частицами. Частицы и античастицы в эксперименте не различаются.

10.53. В 1983 г. были открыты переносчики слабого взаимодействия — бозоны W^+ и W^- . В одном из первых обнаруженных распадов $W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ наблюдался след электрона с энергией $\mathcal{E} = 58,5$ ГэВ и углом вылета его относительно направления движения распадной частицы $\theta = 45^\circ$. Какова может быть минимальная энергия покоя W^- -бозона в этом процессе?

10.54. Чему равно для электрона — продукта распада ультрарелятивистского τ -лептона — максимальное значение проекции импульса на направление, перпендикулярное импульсу τ -лептона?

10.55. В 1983 г. был открыт нейтральный Z -бозон. При анализе его распада $Z \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ найдены два следа мюонов с импульсами $p = 85$ ГэВ/с при угле разлета $\theta = 70^\circ$. Найти энергию покоя Z -бозона.

10.56. На рис. 72 представлена экспериментальная зависимость эффективного сечения реакции $e^+ + e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow$ адроны, идущей через виртуальный фотон γ^* , от энергии $\mathcal{E}_{\text{сум}}$ частиц в системе центра масс. Она свидетельствует о существовании резонанса (ψ -частицы, состоящей из пары кварк-антикварк, возникающей при распаде виртуального фотона) с энергией покоя $M_\psi c^2 = 3,10$ ГэВ. Наблюдаемая при энергиях, превышающих массу покоя резонанса, асимметрия графика объясняется существованием процессов рождения ψ -частицы вместе с фотоном. Оценить, пользуясь графиком, минимальную длину волны фотонов, зарегистрированных в опыте.

З а м е ч а н и е. На самом деле реакция на встречных электрон-позитронных пучках идет через аннигиляцию в виртуальный γ -квант, который затем распадается на пару кварк-антикварк ($c\bar{c}$) или ($b\bar{b}$) (см. задачи 10.59 и 10.60). Так как центры масс этих пар покоятся, то на некоторое время они образуют связанную систему, которая затем аннигилирует в реальные адроны и γ -кванты.

10.57. При распаде покоящегося K^+ -мезона возникает мюон ($K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$). Определить ориентацию спина мюона относительно его импульса. Найти путь, пройденный мюоном до момента своего распада. Исходя из кварковой модели, начертить схему распада K^+ -мезона.

10.58. Взяв радиус дейтрана (среднее расстояние между нуклонами) $R_d \sim 10^{-13}$ см и воспользовавшись соотношением неопределеностей, оценить безразмерную константу $g^2 = q^2/(\hbar c)$ нуклон-

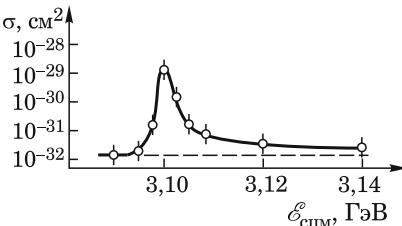


Рис. 72

нуклонного взаимодействия в области малых энергий. Здесь q — «заряд» нуклонов по отношению к сильному взаимодействию.

10.59* Мезоны J/ψ (1^3S_1) и ψ' (2^3S_1) с энергиями покоя $\mathcal{E}_1 = 3,1 \text{ ГэВ}$ и $\mathcal{E}_2 = 3,7 \text{ ГэВ}$ можно считать соответственно основным и первым возбужденным состояниями чармония — системы квarkов ($c\bar{c}$). Пользуясь нерелятивистским приближением и считая, что потенциал взаимодействия квarkов $U = -q^2/r$, где q — «цветовой заряд», оценить характерный радиус J/ψ -мезона.

10.60. Резонансы Υ (1^3S_1) и Υ' (2^3S_1) с энергиями покоя $\mathcal{E}_1 = 9,46 \text{ ГэВ}$ и $\mathcal{E}_2 = 10,02 \text{ ГэВ}$ (ипсилон-мезоны) можно считать соответственно основным и первым возбужденным состояниями боттомона — пары квarkов ($b\bar{b}$). Пользуясь нерелятивистским приближением и считая, что потенциал взаимодействия квarkов $U = -q^2/r$, где q — «цветовой заряд», оценить массу b -квarkа M_b и безразмерную константу $g^2 = q^2/(\hbar c)$ сильного взаимодействия.

10.61. В 1983 г. были обнаружены переносчики слабого взаимодействия W -бозоны, энергия покоя которых оказалась равной примерно $m_W c^2 \approx 80 \text{ ГэВ}$. Оценить радиус действия слабого взаимодействия.

10.62. В полном сечении реакции $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ при $T_\pi = 190 \text{ МэВ}$ наблюдается резонанс с полной шириной $\Gamma = 120 \text{ МэВ}$, называемый Δ^{++} -изобарой. Определить время жизни и энергию покоя этой частицы.

10.63* В сечении рассеяния пионов π^+ на ядрах водорода наблюдается резонанс, соответствующий образованию Δ^{++} (1232) с энергией покоя 1232 МэВ. Оценить сечение этой реакции. Радиус протона $r_p \approx 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$. Экспериментальное значение $\sigma_{\text{полн}}^{\text{эксп}} \approx 200 \text{ мбн}$.

Резонанс с энергией покоя 1232 МэВ образуется также и в реакции $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$. Полное сечение этой реакции $\sigma_{\text{полн}} = 68 \text{ мбн}$. Указать неупругий канал распада этого резонанса (Δ^0 -изобара) и найти сечение этого процесса.

10.64. Пользуясь квarkовой моделью, определить, из каких квarkов состоят протон, нейтрон, Ω^- -гиперон.

10.65. Определить квакровый состав положительно заряженного пиона и положительно заряженного каона.

10.66. Определить квакровый состав нейтрального каона.

10.67. Определить квакровый состав Ξ^0 и Λ^0 -гиперона.

10.68. В результате аннигиляции квarkов $u + \bar{u}$ возможно образование пары мюонов $\mu^+ + \mu^-$. При соударении каких заряженных мезонов с протонами можно ожидать появление мюонных пар?

10.69* В реакциях при больших энергиях ($\sim 100 \text{ ГэВ}$) известны полные сечения σ_1 и σ_2 соответственно для реакций $K^+ + \Sigma^+$ и $K^+ + \Xi^0$. Определить на основе квакровой модели сечение σ_3 для реакции $K^+ + \Omega^-$.

10.70. При больших энергиях полное сечение протон-протонного рассеяния примерно постоянно и равно $\sigma(pp) = 39$ мбн. Принимая во внимание кварковую структуру протона и пиона, оценить, какой будет в этих условиях величина полного сечения рассеяния $\sigma(\pi p)$. Считая, что для каон-нуклонного рассеяния $\sigma(KN) = 19$ мбн, оценить из всех приведенных данных сечения рассеяния $\sigma(\Lambda N)$, $\sigma(\Xi N)$ и $\sigma(\Omega N)$.

10.71. В области больших энергий полные сечения пион-нуклонного и каон-нуклонного взаимодействий равны соответственно 26 и 19 мбн. Учитывая кварковую структуру адронов, оценить из этих данных сечения процессов (ΛN) , (ΞN) и (ΩN) .

10.72. Разница энергий покоя Λ -гиперона и протона равна $\Delta = -175$ МэВ. Исходя из кварковой структуры гиперонов, оценить энергию покоя Ξ -частицы.

10.73. Исходя из законов сохранения, дописать следующие реакции:



Найти отношение эффективных сечений этих реакций, нарисовать кварковые схемы реакций.

10.74* В теории «великого объединения», призванной объединить электрослабое и сильное взаимодействия, предполагаются прямые превращения пары кварков в пару антителтон-антикварк за счет испускания очень тяжелого X -бозона, существующего в течение 10^{-38} с. Такие процессы будут приводить к нарушению законов сохранения барионного и лептонного зарядов. Найти энергию покоя $M_X c^2$ (выразить в ГэВ) и заряд бозона, обеспечивающего распад протона $p \rightarrow \pi^0 + e^+$. Указать схему превращения кварков в этом процессе.

10.75. В ряде теоретических работ предполагается существование тяжелых Y -бозонов с энергией покоя $M_Y c^2 = 10^{15}$ ГэВ. Обмен таким бозоном предположительно обусловливает взаимодействие, в результате которого два кварка превращаются в антителтон и антикварк. Оценить радиус этого гипотетического взаимодействия. Указать схему преобразования кварков и найти заряд Y -бозона при распаде протона на π^+ -мезон и антинейтрино.

10.76. В 1985 г. в ЦЕРНе в фотоэмulsionи были зарегистрированы треки (рис. 73), на которых видны рождение (вершина 1) и последующий распад (вершина 2) тяжелого B^- -мезона с предполагаемым кварковым составом ($b\bar{u}$). Определить тяжелый продукт распада X , не оставивший следа в фотоэмulsionи, но затем распавшийся в вершине 3. Какие возможны продукты нелептонного распада X ?

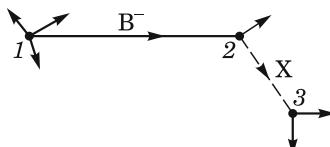


Рис. 73

10.77. В 1964 г. в США на брукхейвенском синхротроне Р.Шаттом с сотрудниками в жидководородной камере, облучаемой пучком отрицательных К-мезонов, был зарегистрирован процесс рождения новой частицы X, схематически показанной на рис. 74. В этой реакции одновременно образовалось три частицы — одна нейтральная (штриховая линия) и две заряженные (сплошные линии). Неизвест-

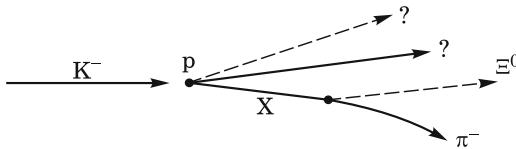


Рис. 74

ная частица X распалась на Ξ^0 и π^- . Определить, рождение какой частицы было зарегистрировано и какие еще две частицы при этом образовались. Реакция $K^- + p$ идет по сильному взаимодействию.

10.78* Исходя из квarkовой модели, найти странность электрически нейтрального адрона с проекцией изотопспина $T_3 = -1/2$ и барионным зарядом $B = 0$. Что это за частицы?

10.79. На основе квартковой модели найти странность электрически нейтрального адрона с проекцией изотопического спина $T_3 = 1/2$ и барионным зарядом $B = -1$. Что это за частица?

10.80. На основе квартковой модели найти странность и гиперзаряд адрона с электрическим зарядом $Q = -1$, проекцией изоспина $T_3 = 0$ и барионным зарядом $B = +1$. Что это за частица?

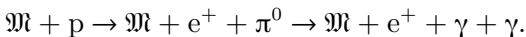
10.81. На основе квартковой модели найти странность и гиперзаряд электрически нейтрального адрона с проекцией изоспина $T_3 = +1/2$ и барионным зарядом $B = +1$. Что это за частица?

10.82. Магнитные моменты квартков пропорциональны их электрическим зарядам, причем для квартков I поколения коэффициент пропорциональности численно равен магнитному моменту протона. Каков магнитный момент резонанса Δ^{++} ?

10.83. Магнитные моменты квартков в нерелятивистском приближении определяются, как и для электрона, формулой $\mu_q = \frac{e\hbar}{2m_q c} Q_q$, где m_q и Q_q — соответственно масса и зарядовое число квартка. Каков магнитный момент бариона Ω^- ?

10.84* В современных теориях великого объединения электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий необходимо существование магнитного монополя \mathfrak{M} с массой $M = 10^{16}$ ГэВ/ c^2 и магнитным зарядом $\mu = \frac{c\hbar}{2e} = \frac{c\hbar}{2e^2} e = \frac{e}{2a}$. Если такие монополи существуют, то они рождены на ранних стадиях развития Вселенной, имеют энергию \mathcal{E} около 10^{12} ГэВ, обладают высокой проникающей способностью

и могут «пожирать материю», инициируя распад протона



Оценить, какое количество таких монополей, находящихся внутри Солнца, могло бы полностью обеспечить светимость Солнца $L_C \approx 4 \cdot 10^{33}$ эрг/с, если на пути 1 см в воде монополь инициирует около одного распада протона. Считать, что вся масса Солнца сосредоточена в протонах.

10.85*. При столкновении встречных протон-антипротонных пучков возможно рождение W-бозонов. Написать эту реакцию на кварковом уровне. Оценить пороговую энергию протонов, если известно, что импульс нуклона распределяется между кварками и глюонами в соотношении 0,45 : 0,55. Энергия покоя W-бозона $M_W c^2 = 80,6$ ГэВ.

10.86. При столкновении встречных протон-антипротонных пучков возможно рождение Z-бозонов. Написать эту реакцию на кварковом уровне. Оценить пороговую энергию протонов, если известно, что импульс нуклона распределяется между кварками и глюонами в соотношении 0,45 : 0,55. Энергия покоя Z-бозона $M_Z c^2 = 91,2$ ГэВ.

10.87. Красивый夸克 (b -кварк) был экспериментально обнаружен в 1983 г. в (e^+e^-) -соударениях на Корнельском электронном накопительном кольце (США). Проверке подвергалась гипотеза о том, что ипсилон-мезон $\Upsilon(4S)$ является возбужденным состоянием боттомония (пары кварков (b, \bar{b})). Нарисовать на кварковом уровне цепочку распада (b, \bar{b}) , ведущую к рождению наблюдавшейся в эксперименте пары мезонов B^+ , B^- , а затем распада B^- на мезоны D^0 и π^- с последующим образованием K^- , π^+ -мезонов.

10.88. Самый тяжелый t-кварк был открыт в 1995 г. в экспериментах на встречных протон-антипротонных пучках в лаборатории им. Ферми в США. Оказалось, что кварки пары (t, \bar{t}) распадаются раньше, чем могут образоваться t-мезоны и t-барионы. В результате распада рождающейся при столкновении (t, \bar{t}) -пары образуется пара мезонов B^+ , B^- , позитрон и π^- -мезон. Нарисовать на кварковом уровне последовательность распада (t, \bar{t}) -пары, ведущую к образованию указанных частиц. Какие реальные частицы образовались на каждом этапе?

10.89. Нарисовать на кварковом уровне диаграмму распада очарованного бариона $\Lambda_c^+ \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$. Время жизни Λ_c^+ равно $2 \cdot 10^{-13}$ с.

10.90. Нарисовать на кварковом уровне диаграмму распада очарованного бариона $\Lambda_c^+ \rightarrow p^+ + \bar{K}_0$. Время жизни Λ_c^+ равно $2 \cdot 10^{-13}$ с.

10.91. Тяжелая вода D_2O используется для регистрации нейтрино с энергиями, меньшими 15 МэВ, в реакции, обратной K-захвату. Детектор регистрирует образующиеся заряженные лептоны. Какой тип нейтрино регистрируется и какие ядра захватывают нейтрино? Найти пороговую энергию регистрируемых нейтрино. Энергии по-

коя ядер: $p - 938,23 \text{ МэВ}$, $d - 1875,6 \text{ МэВ}$, $^{16}_8\text{O} - 14895 \text{ МэВ}$, $^{16}_9\text{F} - 14910 \text{ МэВ}$.

10.92. Обыкновенная вода H_2O используется для регистрации нейтрино по реакции, обратной K -захвату. Регистрируются вторичные заряженные лептоны. Какова пороговая энергия регистрируемых таким детектором нейтрино? При какой энергии нейтрино возможна регистрация как электронных, так и мюонных нейтрино? Энергии покоя ядер: $^{16}_8\text{O} - 14895 \text{ МэВ}$, $^{16}_9\text{F} - 14910 \text{ МэВ}$.

10.93* Выразить в единицах ядерного магнетона Бора магнитные моменты протона и нейтрона, используя антисимметричность волновой функции тождественных фермионов, зная, что спины нуклонов и кварков равны $1/2$, кварки внутри нуклонов находятся в состоянии с нулевым орбитальным моментом и предполагая, что гиромагнитное отношение для кварка выражается через его заряд и массу аналогично случаю электрона. Считать, что масса кварка в нуклоне (конституентного кварка) равна $1/3$ массы нуклона.

10.94. Какую энергию надо затратить на переворот спина одного из кварков в нуклоне?

10.95. Позитроний (система $\{\text{e}^+, \text{e}^-\}$) аннигилирует, если расстояние между электроном и позитроном меньше комптоновской длины волны электрона $\Lambda_e = \hbar/(m_e c)$. Оценить время жизни основного состояния парапозитрона 1S_0 .

Указание. При аннигиляции вероятность одновременного излучения в единицу времени n фотонов с частотой ω порядка $w_n \approx \alpha^n \omega$, где $\alpha = e^2/(\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры.

10.96. Протониум (система (p, \bar{p})) распадается преимущественно за счет аннигиляции на пионы. Полагая, что распад происходит тогда, когда протон и антипротон находятся на расстоянии порядка радиуса сильного взаимодействия, оценить время жизни основного состояния протониума.

10.97* В простейшем варианте модели «мешков» считается, что энергия покоя нуклона $m_N c^2 \approx 940 \text{ МэВ}$ складывается из энергии безмассовых кварков, заключенных в непроницаемую сферу, и энергии глюонного поля в этой сфере. Полагая, что плотность энергии глюонного поля постоянна, определить радиус нуклона и величину энергии глюонного поля.

Указание. Считать, что волновая функция безмассового кварка удовлетворяет уравнению $\Delta\psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$.

10.98. Сечение неупругого взаимодействия нейтрино с ядром можно описать $\sigma(\mathcal{E}) = \frac{\sigma_c(\mathcal{E})t}{\tau(\mathcal{E})}$, где $\sigma_c(\mathcal{E})$ — геометрическое сечение процесса, t — характерное время взаимодействия, а вероятность β -процесса в единицу времени $\frac{1}{\tau(\mathcal{E})} \propto \mathcal{E}^5$ (Б. М. Понтекорво, 1946). Оценить отношение сечений при энергиях нейтрино $\mathcal{E} = 1$ и 10 МэВ .

10.99. В августе 2008 г. группа BABAR Collaboration сообщила о регистрации $\eta_b(1S)$ -мезона — основного состояния боттомониума, соответствующего антипараллельной ориентации спинов пары (b, \bar{b}) (так называемый паработтомониум в состоянии 1^1S_0). На встречных (e^-, e^+) -пучках при суммарной энергии $\mathcal{E} = 10355$ МэВ рождался $\Upsilon(3S)$ -мезон, соответствующий возбужденному состоянию системы (bb) с параллельными спинами (так называемый ортоботтомониум в состоянии 3^3S_1). Рожденный мезон распадался на мезон $\eta_b(1S)$ и γ -квант: $\Upsilon(3S) \rightarrow \eta_b(1S) + \gamma$. Определить массу $\eta_b(1S)$ -мезона и типа испускаемого γ -кванта, если энергия γ -кванта $\mathcal{E}_\gamma = 921,2$ МэВ. Какова разница в энергиях основных состояний орто- и паработтомониума, определяемая переворотом спина одного из кварков? Масса основного состояния ортоботтомониума $m_{\Upsilon(1S)} = 9460,4$ МэВ/ c^2 . (См. также задачи 10.56, 10.59 и 10.60.)

10.100. Найти максимальную и минимальную энергию мюонов, образующихся при распаде боттомониума ($\Upsilon \rightarrow \mu^+ + \mu^-$), движущегося с кинетической энергией $T = 10$ ГэВ. Масса боттомониума $M = 9,46$ ГэВ/ c^2 .

10.101. В экспериментах 2011–2012 гг. на большом адронном коллайдере (ЦЕРН, Женева) в протон-протонных столкновениях была открыта частица, напоминающая по своим свойствам бозон Хиггса, предсказанный в 1964 г. В соответствии с выводами Стандартной модели был обнаружен распад бозона Хиггса на два фотона, причем энергии этих фотонов оказались равными $\mathcal{E}_1 = 70$ ГэВ и $\mathcal{E}_2 = 92$ ГэВ. Угол разлета фотонов составил $\alpha = 103^\circ$. Найти массу распавшейся частицы.

10.102. Мюонное нейтрино ν_μ , попав в жидколоводородную камеру, рождает промежуточный бозон W^+ ($m_W = 81$ ГэВ/ c^2). Найти минимальную энергию ν_μ для такого события.

10.103. Источником энергии Солнца являются термоядерные реакции pp-цикла, в результате которого происходит слияние четырех протонов с образованием α -частицы. При этом выделяется энергия $\mathcal{E} = 26,73$ МэВ. Определить плотность потока нейтрино на Земле, если поток солнечного излучения у ее поверхности составляет $J_C = 0,137$ Вт/ см^2 . Энергией нейтрино можно пренебречь.

10.104. В 2014 г. детектор BOREXINO впервые зарегистрировал солнечные нейтрино, образующиеся в pp-цикле при слиянии двух протонов в дейтрон. Какова максимальная кинетическая энергия образования нейтрино? Энергия покоя протона 938,272 МэВ, дейтрона 1875,612 МэВ, электрона 0,511 МэВ.

10.105. Один из способов оценки массы нейтрино состоит в измерении задержки прихода нейтрино по сравнению с фиксацией вспышки света при взрыве сверхновых. Как следует из изучения осцилляций нейтрино, его масса может быть порядка $0,01$ эВ/ c^2 . Определить, каким временным разрешением Δt должен обладать нейтринный телескоп.

лескоп, чтобы зарегистрировать нейтрино с такой массой, если энергия нейтрино, испускаемого при взрыве сверхновой, расположенной на расстоянии 170000 световых лет от Земли, в среднем составляет $\mathcal{E} = 10$ МэВ.

10.106. Для регистрации мюонных антинейтрино используется реакция $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$. Определить минимальную энергию антинейтрино, необходимую для того, чтобы мюон вызвал черенковское излучение в воде. Коэффициент преломления воды $n = 1,33$. Энергии отдачи нейтрона пренебречь. Энергия покоя протона равна 938,3 МэВ, нейтрона — 939,5 МэВ, мюона — 105,7 МэВ.

Указание. Черенковское излучение возникает, если скорость заряженной частицы больше фазовой скорости света в среде.

10.107. В ряде расширений Стандартной модели вводят новые массивные нейтрино (так называемые стерильные нейтрино). Их массу можно измерять по реакции K -захвата в атома берилля $^{7}_{4}\text{Be} + e^- \rightarrow {}^{6}_{3}\text{Li} + \nu$, где ν может быть как электронным, так и стерильным нейтрино. В случае существования последнего в спектре отдачи атомов лития будут наблюдаться два пика: один соответствует электронным нейтрино с массой, примерно равной нулю, а второй — стерильным нейтрино. Каким разрешением по энергии $\Delta\mathcal{E}$ должен обладать спектрометр, чтобы различить эти два пика, если бы энергия покоя стерильного нейтрино была бы равна $m_\nu c^2 = 10$ кэВ?

10.108. 22 сентября 2011 г. появилось сенсационное сообщение, что мюонные нейтрино с энергией вплоть до $\mathcal{E}_0 = 50$ ГэВ, испущенные из ЦЕРНа (Женева), достигли расположенного на расстоянии 730 км нейтринного детектора в подземной лаборатории в Гран-Сассо вблизи Рима со скоростью, превышающей скорость света*) в вакууме ($\delta = (v_\nu/c)^2 - 1 \approx 5 \cdot 10^{-5}$). По опубликованным данным энергии нейтрино, регистрируемых детектором, не изменились. Как указали вскоре Коэн и Глэшоу, сверхсветовое нейтрино должно терять энергию, излучая электрон-позитронную пару (аналог эффекта Чerenкова), при этом потери энергии нейтрино на единицу длины пути $d\mathcal{E}/dx = -A\mathcal{E}^6\delta^3$, где $A = 6,46$ ($\text{ГэВ}^5 \cdot \text{м})^{-1}$. Показать, что энергия нейтрино, достигающих детектора, не должна превышать при этом 12,3 ГэВ.

10.109. 22 сентября 2011 г. появилось сенсационное сообщение, что мюонные нейтрино с энергией $\mathcal{E} = 17,5$ ГэВ, испущенные из ЦЕРНа (Женева), достигли расположенного на расстоянии 730 км нейтринного детектора в подземной лаборатории в Гран-Сассо вблизи Рима со скоростью, превышающей скорость света в вакууме ($\delta = (v_\nu/c)^2 - 1 \approx 5 \cdot 10^{-5}$). Как указали вскоре Коэн и Глэшоу, этот

*) В мае 2012 г. авторы сенсации были вынуждены признать, что ими была допущена инструментальная ошибка при определении скорости. Поэтому проблема сверхсветовых нейтрино на сегодняшний день закрыта.

результат вызывает сомнение, так как сверхсветовое нейтрино должно терять энергию, излучая в основном электрон-позитронные пары (аналог эффекта Черенкова). Для сверхсветовых нейтрино закон дисперсии записывается в виде $\mathcal{E}^2 = p^2 c^2 - (mc^2)^2$. Исходя из приведенных данных, найти массу сверхсветового нейтрино m_ν и оценить угол, на которой оно отклонится, потеряв на излучение одной пары $\Delta \mathcal{E}/\mathcal{E} = 0,01$ долю первоначальной энергии. Массой электрон-позитронной пары пренебречь.

10.110* 22 сентября 2011 г. появилось сенсационное сообщение, что мюонные нейтрино с энергией вплоть до $\mathcal{E}_0 = 50$ ГэВ, испущенные из ЦЕРНа (Женева), достигли расположенного на расстоянии 730 км нейтринного детектора в подземной лаборатории в Гран-Сассо вблизи Рима со скоростью, превышающей скорость света ($v/c = 1 + 2,5 \cdot 10^{-5}$). Как указал вскоре Кун, этот результат может быть связан с вращением Земли, что не учитывалось при обработке результатов. Оценить связанную с этим величину поправки к скорости нейтрино, рассматривая его движение в инерциальной системе координат. Считать, что направление ЦЕРН–Гран-Сассо составляют угол $\theta = 45^\circ$ с плоскостью меридiana, проходящего через ЦЕРН, географическая широта ЦЕРНа $\varphi = 45^\circ$.

Указание. Считать, что для нахождения скорости вылетающих из ускорителя в ЦЕРН нейтрино можно пользоваться релятивистским законом сложения скоростей.

10.111* Согласно современным представлениям нейтрино (антинейтрино) рождается и исчезает как частица определенного типа ν_e , ν_μ или ν_τ , но при этом является суперпозицией состояний ν_1 , ν_2 , ν_3 с определенными массами. В упрощенной модели (пренебрегая разницей между ν_1 и ν_2) можно выразить состояния ν_e и ν_μ как $\nu_e = \cos\theta \nu_1 + \sin\theta \nu_2$; $\nu_\mu = -\sin\theta \nu_1 + \cos\theta \nu_2$, где θ – константа, называемая углом смешивания. В реакторном эксперименте Kamland наблюдались осцилляции потока нейтронных антинейтрино, испускаемых ядерным реактором. Эксперимент показал, что вероятность зарегистрировать электронное антинейтрино с энергией $\mathcal{E} = 3$ МэВ осциллирует с расстоянием до реактора с периодом $L \approx 100$ км. Найти разность квадратов энергий покоя антинейтрино типов 1 и 2 (в эВ²), предполагая, что она мала по сравнению с \mathcal{E} и что в начальный момент времени импульсы антинейтрино типов 1 и 2 совпадали.

§ 11. Излучение

11.1* а) Рассматривая равновесное тепловое излучение как идеальный газ фотонов, содержащихся в вакуумированной полости с неподвижными непрозрачными стенками, имеющими постоянную температуру, получить формулу $P = \rho/3$, связывающую плотность энергии теплового излучения ρ с давлением излучения P . б) Найти связь между энергетической светимостью R (интегральной излучательной

способностью) абсолютно черного тела и плотностью энергии теплового излучения $\rho(T)$.

11.2* Используя тот факт, что плотность энергии теплового излучения ρ не зависит от объема системы, а также формулу $P = \rho/3$ (см. задачу 11.1), найти с помощью законов термодинамики зависимость P и энтропии s единицы объема от температуры T .

11.3. Найти изменение энтропии равновесного теплового излучения абсолютно черного тела при расширении объема, занятого излучением, от V_1 до V_2 при постоянной температуре T .

11.4. Используя формулы для энергии и энтропии равновесного теплового излучения, показать, что свободная энергия излучения может быть представлена в виде $\Psi = -AVT^4$, где V — объем, T — температура. Воспользовавшись законом Стефана–Больцмана, выразить A через постоянную Стефана–Больцмана σ . Пользуясь термодинамическими формулами, определить по найденному Ψ теплоемкость c_V фотонного газа в расчете на единицу объема и давление излучения P . Сравнить ее с теплоемкостью $c_V^{\text{ид}}$ единицы объема идеального одноатомного газа при одинаковых значениях P и T . Вычислить значение термодинамического потенциала Гиббса $\Phi = \Psi + PV$.

11.5. Найти работу, которую совершают в цикле Карно равновесное тепловое излучение абсолютно черного тела, полагая известными температуры «горячей» и «холодной» изотерм T_1 и T_2 , а также максимальный и минимальный объемы V_2 и V_1 системы на изотерме T_1 .

11.6. Газообразный неон находится в замкнутом сосуде постоянного объема в равновесии с тепловым излучением. При каком давлении P неона его теплоемкость равна теплоемкости теплового излучения в том же объеме при $T = 500$ К?

11.7. Найти теплоемкость C_P и уравнение адиабаты фотонного газа, заключенного в сосуд с переменным объемом.

11.8. При какой температуре T давление равновесного теплового излучения равно $P = 1$ атм?

11.9. При какой концентрации n молекул газа газокинетическое давление равно давлению равновесного теплового излучения при той же температуре $T = 300$ К?

11.10. При расчете теплоемкости C_V идеального газа, находящегося в равновесии с тепловым излучением в замкнутом сосуде постоянного объема, обычно пренебрегают вкладом равновесного излучения в теплоемкость системы. Найти отношение теплоемкостей C_V одноатомного газа и равновесного излучения, когда их давления одинаковы.

11.11* Цилиндрический сосуд разделен на две части теплонепроницаемым поршнем, который может свободно перемещаться вдоль цилиндра герметично и без трения. В одной части сосуда находится идеальный газ, а в другой — равновесное тепловое излучение при температуре $T = 10^3$ К. Найти концентрацию атомов газа, если при малых изменениях температуры в обеих частях сосуда на одну и ту

же величину направление смещения поршня не зависит от знака этой величины. Чему была равна начальная температура газа T_Γ ?

11.12*. Над плоскостью, зачерненной с обеих сторон, на высоте h расположен центр шара радиусом $a \ll h$, являющегося источником равновесного теплового излучения с температурой T_0 . Найти стационарное распределение температуры на плоскости. Считать, что система находится в вакууме, фон теплового излучения отсутствует и теплопроводностью вдоль плоскости можно пренебречь.

11.13. Решить предыдущую задачу, считая источником теплового излучения бесконечный круглый цилиндр радиусом a . Ось цилиндра параллельна плоскости и находится на расстоянии h от нее.

11.14. Над плоскостью, зачерненной с обеих сторон, на высоте h расположен круглый диск радиусом a , являющийся источником равновесного теплового излучения с температурой T_0 . Радиус диска $a \ll h$, диск расположен параллельно плоскости. Найти стационарное распределение температуры $T = T(r)$ на плоскости, где r — расстояние от проекции центра диска. Считать, что система находится в вакууме, фон теплового излучения отсутствует и теплопроводностью вдоль плоскости можно пренебречь.

11.15. Имеются два полых тела, абсолютно отражающих снаружи и абсолютно черных внутри. Оба тела имеют отверстия радиусом r и расположены на расстоянии R ($R \gg r$). Первое тело имеет температуру T_1 и является единственным источником тепла для второго тела. Найти температуру второго тела T_2 при различных наклонах нормалей к плоскостям отверстий по отношению к соединяющей их прямой. На сколько изменится T_2 при изменении угла наклона второго тела от 0 до 45° ?

11.16. Два одинаковых абсолютно черных шарика расположены в вакууме на расстоянии $2l = 8$ см друг от друга. Посередине между двумя шариками помещена линза диаметром $D = 6$ см, собирающая излучение одного из шариков на поверхность другого. Один из шариков раскален до температуры $T_1 = 2000$ К. Определить температуру другого шарика, пренебрегая фоном теплового излучения и потерями в линзе.

11.17. В сферической оболочке диаметром D имеется отверстие диаметром $d \ll D$. Внутренняя поверхность оболочки рассеивает излучение диффузно по закону Ламберта с коэффициентом рассеяния $\rho < 1$. Определить коэффициент поглощения A , характеризующий отверстие для внешнего наблюдателя. При каком отношении диаметров d/D коэффициент поглощения A будет отличаться от 1 меньше, чем на 0,1%, если $\rho \approx 1$?

11.18*. Линза со светосилой 1 : 16 (это отношение D^2/F^2) собирает солнечный свет на поверхность черного шарика, помещенного в вакуум. До какой температуры T может нагреться шарик, диаметр которого равен диаметру изображения Солнца? Считать Солнце абсолютно черным телом с температурой $T_C = 6000$ К.

11.19. Объектив диаметром $D = 5$ см и фокусным расстоянием $F = 5$ см фокусирует солнечный свет на абсолютно черный шар диаметром $d = 1$ мм, обладающий высокой теплопроводностью и находящийся в высоком вакууме вне Земли, на ее орбите. Определить температуру T шара. Принять, что плотность потока солнечной энергии равна $J_C = 0,14 \text{ Вт}/\text{см}^2$, температура стенок сосуда $T_0 = 300 \text{ К}$. Потерями энергии в объективе пренебречь. Угловой размер Солнца, т. е. угол, под которым с Земли виден диаметр Солнца, $\alpha_C = 0,01 \text{ рад}$.

11.20. Найти отношение плотностей потоков энергии корпускулярного и электромагнитного излучения Солнца в околоземном пространстве. Считать, что корпускулярный поток представляет собой нейтральную плазму из протонов и электронов с концентрацией $n = 5 \text{ см}^{-3}$ частиц каждого сорта и скоростью потока $v = 300 \text{ км}/\text{с}$, а Солнце — источник равновесного теплового излучения с температурой $T = 6000 \text{ К}$. Выразить результат через угловой размер α_C Солнца (т. е. угол, под которым с Земли виден диаметр Солнца, $\alpha_C = 0,01 \text{ рад}$).

11.21. Солнечная постоянная J_C означает мощность излучения, падающего на единицу площади, помещенной перпендикулярно солнечным лучам за пределами земной атмосферы на расстоянии от Солнца, равном среднему расстоянию между Землей и Солнцем $L = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}$. Принимая $J_C = 0,14 \text{ Вт}/\text{см}^2$ и радиус Солнца $R_C = 7 \cdot 10^5 \text{ км}$, определить радиационную температуру $T_{\text{рад}}$ излучающей поверхности Солнца.

11.22. Спектр излучения космического рентгеновского источника соответствует спектру излучения абсолютно черного тела. Максимум плотности излучения $\rho(\lambda)$ наблюдается на длине волны $\lambda_{\text{max}} = 2 \text{ \AA}$, а суммарная по спектру (интегральная) плотность потока на Земле $j = 10^{-11} \text{ Вт}/\text{м}^2$. Расстояние от Земли до источника $L = 1,3 \cdot 10^4$ световых лет. Оценить диаметр источника.

11.23. Абсолютно черное тело подвешено в вакуумной установке так, что через оптическое окно на него падает солнечный свет. Если стенки установки охладить до температуры $T_{\text{ст1}} = 77 \text{ К}$, то тело будет иметь $T_1 = 275 \text{ К}$. Найти температуру тела T_2 при $T_{\text{ст2}} = 295 \text{ К}$. Теплопроводностью остаточных газов и подвески пренебречь.

11.24. На графитовый шарик радиусом $r = 1 \text{ см}$, подвешенный точно в центре сферы с зеркальными стенками, находящейся в околоземном пространстве, с помощью линзы фокусируется изображение Солнца (рис. 75). Радиус сферы $R = 0,25 \text{ м}$, диаметр линзы $D = 2,5 \text{ см}$, фокусное расстояние линзы $F = 0,25 \text{ м}$, угловой размер Солнца $\alpha_C = 10^{-2} \text{ рад.}$, температура поверхности Солнца $T_C = 6 \cdot 10^3 \text{ К}$. Считая графит абсолютно черным телом, найти установившуюся температуру шарика T .

11.25. Хорошо теплопроводящий шар с зачерненной поверхностью находится в космическом пространстве на некотором расстоянии r

от центра Солнца. Найти температуру шара, если он находится от Солнца на расстояниях, равных радиусам орбит Венеры, Земли, Марса и Юпитера, равных (в млн км) $R_V = 108$, $R_Z = 150$, $R_M = 228$, $R_{J_0} = 780$. Солнце считать источником равновесного теплового излучения с температурой $T_C = 6000$ К и радиусом $R_C = 7 \cdot 10^5$ км. Сравнить полученные величины с радиоастрономическими данными: средние температуры освещенной части поверхностей планет Венеры, Земли, Марса и Юпитера оцениваются, соответственно, как $T_V = 735$ К, $T_Z = 275$ К, $T_M = 235$ К и $T_{J_0} = 135$ К. Чем можно объяснить большое расхождение рассчитанной таким образом и полученной в измерениях температуры поверхности Венеры?

11.26. Оценить температуру Солнца, исходя из его видимого углового размера $\alpha_C = 0,01$ рад и температуры земной поверхности ($T_Z \approx 300$ К).

11.27. Космонавт оказался в свободном пространстве в тени Земли. Считая что его организм в процессе нормальной жизнедеятельности выделяет мощность $W = 100$ Вт, оценить скорость изменения температуры космонавта. Коэффициент отражения скафандра $\varepsilon = 0,95$.

11.28. Межпланетная станция имеет оболочку в форме шара диаметром $2r = 1$ м. На борту станции находится радиопередатчик мощностью $N = 200$ Вт с КПД $\eta = 50\%$. Станция заполнена теплообменным газом. Аппаратура станции может работать в интервале температур $t = -50 \div 100^\circ\text{C}$. Определить, при каких удалениях L от Солнца станция может работать: 1) при кратковременных включениях; 2) в непрерывном режиме. Какова должна быть отражательная способность α поверхности станции, чтобы станция могла работать при сколь угодно большом удалении от Солнца? Радиус Солнца $R_C = 7 \cdot 10^5$ км. Считать, что оно излучает как абсолютно черное тело с температурой $T_C = 6000$ К.

11.29.* В свободном пространстве находится железная пластина, одна поверхность которой абсолютно черная, а другая — идеально отражающая. В начальный момент пластина покоялась и ее температура была равна $T = 10^3$ К. До какой максимальной скорости v_{\max} может разогнаться пластина при остывании? Теплоемкость пластины считать подчиняющейся закону Дюлонга–Пти.

11.30. В настоящее время мощность всех промышленных источников энергии на Земле составляет $W \approx 10^{13}$ Вт, в то время как средняя мощность солнечной энергии, поступающей на Землю, $\bar{W} \approx 10^{17}$ Вт. К какому перегреву ΔT поверхности Земли приводят промышленные источники? Оценить максимальное значение W_{\max} ,

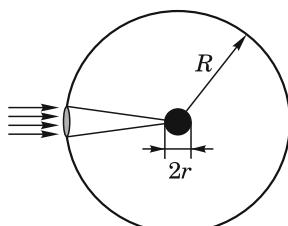


Рис. 75

если предельный перегрев, допустимый из экологических соображений, составляет примерно 1 К.

11.31. Считая Землю абсолютно черным телом, а орбиту Земли круговой с радиусом $R = 1,5 \cdot 10^{11}$ м, оценить среднюю температуру земной поверхности, если светимость Солнца $L_C = 3,83 \cdot 10^{26}$ Вт. Исходя из экологических оценок, согласно которым величина допустимого перегрева планеты Земля составляет $\Delta T \approx 1$ К, определить допустимый предел уменьшения радиуса земной орбиты ΔR . (См. также задачи 11.25 и 11.26.)

11.32. Оценить, до какой максимальной температуры может разогреться в космосе сферический кусочек металлического урана-238 массой $m = 4$ г за счет естественной радиоактивности, считая, что продукты распада не покидают его. Плотность урана $\rho = 18,7$ г/см³, период спонтанного деления $T_{1/2}^{\text{сп}} = 10^{16}$ лет, характеристики α -распада: $T_a^a = 10^9$ лет, $\mathcal{E}_a = 4,2$ МэВ.

Влиянием солнечной радиации и космических лучей пренебречь.

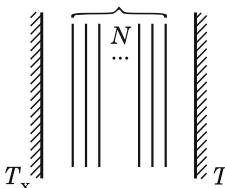


Рис. 76

11.33. В криогенной технике для уменьшения теплопотерь, связанных с тепловым излучением, в вакуумный промежуток между более холодной (T_x) и более нагретой (T_g) стенками вводят систему тепловых экранов (рис. 76). Считая обе стенки, как и все экраны, бесконечно протяженными и абсолютно черными, найти уменьшение радиационного теплообмена между стенками за счет введения N экранов в стационарных условиях. Рассчитать установившиеся температуры экранов.

11.34.* При напряжении на диоде $V = 500$ В температура анода равна 800 К. Оценить температуру анода при напряжении 1000 В для двух вариантов:

1) уже при напряжении 500 В анодный ток достигает насыщения;

2) в интервале напряжений 500–1000 В насыщения нет, а сила тока определяется законом трех вторых: $\mathcal{J} \propto V^{3/2}$. Основные потери тепла происходят за счет теплового излучения анода. По сравнению с ними все прочие потери могут считаться пренебрежимо малыми. При оценке анод считать абсолютно черным телом.

11.35. Вакуумный диод с термокатодом, расположенным внутри цилиндрического анода, включен в цепь с ЭДС 10 кВ и нагрузкой 10 кОм. В нормальном режиме при мощности накала 100 Вт на диоде падает 100 В, а температура анода равна 300 °C. Оператор уменьшил мощность накала до 50 Вт. При этом уменьшилась эмиссия и ток стал равным 0,5 А. Оценить установившуюся температуру анода, считая его абсолютно черным телом.

11.36. Межгалактическое пространство заполнено в основном протонами с концентрацией $n = 1$ протон/м³, а также пронизано рентгеновым тепловым излучением с температурой $T = 3$ К. Определить

отношение плотности энергии этого излучения к плотности энергии покоя вещества.

11.37. Межгалактическое пространство пронизано постоянным магнитным полем с индукцией $B \approx 2 \cdot 10^{-6}$ Гс, а также реликтовым тепловым излучением с температурой $T = 3$ К. Определить отношение плотности энергии этого излучения к плотности магнитной энергии.

11.38. Напряжение в сети возросло на 5%. На сколько процентов увеличится освещенность, создаваемая вакуумной лампой накаливания с температурой нити 1500 К на длине волны 500 нм? Нить считать абсолютно черным телом. Рассмотреть случаи, когда сопротивление нити $R = \text{const}$ и когда $R = R(T) = R_0 + \alpha(T - T_0)$.

11.39* В откаченной до высокого вакуума лампе накаливания с диаметром колбы 2 см температура нити равна $T_0 = 2500$ К. Оценить, на сколько процентов изменится яркость лампы на длине волны $\lambda = 5000$ Å, если из-за дефекта изготовления в колбу попал наружный воздух при температуре $T_1 = 300$ К и в ней установилось давление $P = 6 \cdot 10^{-2}$ мм рт. ст. Молекула азота N_2 имеет межъядерное расстояние $d = 0,77$ Å, энергию диссоциации 9,74 эВ, квант колебательной энергии $\hbar\omega = 0,29$ эВ.

11.40* Кварцевая пластина расположена в вакууме перпендикулярно солнечным лучам. В этих условиях полностью поглощающая

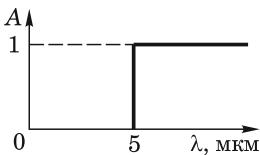


Рис. 77

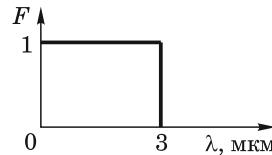


Рис. 78

пластина нагревается до $T_1 = 300$ К. Найти температуру кварца T_2 . Спектральную зависимость коэффициента поглощения A кварцевой пластины можно аппроксимировать ступенчатой функцией, изображенной на рис. 77. Излучением окружающих тел пренебречь, считать $e^x \approx 1 + x$ вплоть до $x \approx 0,5$, а температуру поверхности Солнца $T_C = 6000$ К.

11.41. В оптическом криостате круглое окно диаметром $d = 2$ см изготовлено из стекла. Коэффициент прозрачности стекла F в зависимости от длины волны можно аппроксимировать ступенчатой функцией, изображенной на рис. 78. Определить поток тепла, идущий внутрь криостата за счет теплового излучения из комнаты с температурой $T = 295$ К. Стекло охлаждается жидким гелием и поэтому его излучением можно пренебречь.

11.42. Слой вещества поглощает практически все фотоны солнечного спектра с энергией $\mathcal{E} \geq 0,2$ эВ и полностью прозрачен для фотонов с меньшей энергией. Оценить, какую долю x солнечной энергии

пропускает вещество. Считать спектр Солнца планковским с температурой $T = 6000$ К.

11.43. Слой вещества поглощает практически все фотоны солнечного спектра с энергией $\mathcal{E} \geq 12$ эВ и полностью прозрачен для фотонов с меньшей энергией. Оценить, какую долю солнечной энергии пропускает вещество. Считать спектр Солнца планковским с температурой $T = 6000$ К.

11.44. Поверхность некоторого тела приготовлена таким образом, что коэффициент поглощения электромагнитного излучения $A = 1$ для частот $\omega \leq \omega_0$ и $A = 0$ при $\omega > \omega_0$. Это тело помещено в вакуум и в отсутствие других источников излучения нагревается за счет внутреннего источника энергии до температуры T . Определить эту температуру, если известно, что для такого же тела с абсолютно черной поверхностью в тех же условиях равновесная температура $T^* = 300$ К. Границчная частота соответствует температуре $\theta = \hbar\omega_0/k_B = 300$ К.

11.45. Частотная зависимость коэффициента поглощения A некоторого тела, имеющего внутренний источник энергии, изображена на рис. 79. Это тело помещено в космическом пространстве вдали от источников излучения. Такое же тело, но с абсолютно черной поверхностью, нагревается там до температуры $T^* = 100$ К. Определить температуру тела, если величины ω_1 и ω_2 соответствуют энергиям квантов 0,015 эВ и 0,6 эВ.

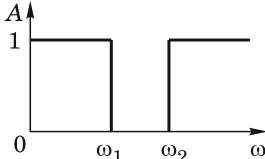


Рис. 79

11.46. Однородный слой плазмы находится в равновесии с излучением. С помощью монохроматора выделяется спектральная составляющая собственного излучения плазмы на некоторой длине волн, наблюдение ведется в направлении, перпендикулярном плоскости слоя. При какой толщине d слоя интенсивность такой составляющей окажется равной 90% интенсивности равновесного излучения? Линейный коэффициент поглощения данной

длины волны $\kappa = 0,1 \text{ см}^{-1}$. Показатели преломления плазмы и окружающей среды считать при этом одинаковыми.

11.47. Излучение Солнца регистрируется селективным приемником на длине волны $\lambda = 300$ нм с относительной шириной области чувствительности $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-3}$ за промежутки времени $\tau = 10^{-3}$ с. Найти относительную среднеквадратичную флуктуацию принимаемого сигнала. Солнце считать абсолютно черным телом с температурой $T = 6000$ К и видимым угловым размером $a_C = 0,01$. Площадь приемной площадки равна $S = 1 \text{ мм}^2$.

Указание. Так как энергия кванта $\hbar\omega \gg k_B T$, то среднее планковское число заполнения (среднее число фотонов) $\bar{n}_\infty \ll 1$, и поэтому к фотонам с частотой ω можно применять классическую статистику, как для идеального газа.

11.48. Радиоизлучение из межзвездного пространства (реликтовое излучение) регистрируется приемником с фиксированной относительной полосой пропускания $\Delta v/v = \text{const}$. Оказалось, что при переходе от приема на длине волны $\lambda_1 = 3$ см к приему на длине волны $\lambda_2 = 0,3$ см величина сигнала возросла в 400 раз, причем при дальнейшем небольшом уменьшении λ увеличилась незначительно. Исходя из этих данных, определить температуру реликтового излучения, считая его равновесным тепловым излучением. Во сколько раз изменится величина сигнала при переходе от $\lambda = 3$ см к $\lambda = 30$ см?

Указание. Корнем уравнения $e^x - 2,5x = 1$, которое возникает при решении задачи, является $x \approx 1,62$.

11.49* Лазер на рубине излучает в импульсе длительностью $\tau = 0,5$ мс энергию $\mathcal{E} = 10$ Дж в виде почти параллельного светового пучка сечением $S = 1$ см². Рабочая длина волны лазера $\lambda = 6943$ Å, ширина линии $\Delta\lambda = 0,01$ Å. Определить по спектральной плотности излучаемой энергии эффективную температуру $T_{\text{эфф}}^{*}$) в лазерном пучке: а) до фокусировки; б) при максимально возможном сужении пучка (в фокусе).

11.50* Определить температуру абсолютно черного тела, спектральная яркость излучения которого равна яркости лазерного излучения с энергией в импульсе $\mathcal{E} = 1$ Дж. Считать, что расходимость лазерного пучка определяется только дифракцией на выходном отверстии, а немонохроматичность — длительностью импульса.

11.51. При какой температуре интенсивность излучения поверхности абсолютно черного тела в соответствующем спектральном интервале (энергия, уносимая с единицы поверхности в единицу времени в единицу телесного угла) сравнятся с интенсивностью лазера с плотностью потока энергии $j = 1$ мВт/см² и относительной стабильностью частоты $\Delta v/v = 10^{-12}$, работающего на длине волны $\lambda = 6900$ Å? Диаметр пучка принять равным $d = 1$ см.

11.52. Оценить эффективную температуру гелий-неонового лазера, генерирующего в непрерывном режиме свет с шириной спектральной линии $\delta v = 10^4$ Гц. Мощность излучения лазера $W = 1$ мВт.

11.53* Измерение интенсивности реликтового излучения Вселенной производится радиотелескопом вблизи $\lambda = 3$ см. Его антенный тракт находится при температуре $T = 300$ К и поглощает $a = 1\%$ поступающей мощности. Какой эффективной температуре абсолютно черного тела $T_{\text{эфф}}$ соответствует тепловой шум антенного тракта в области данной длины волны?

11.54* Атом Na находится в пучке лазерного света с плотностью потока энергии j и длиной волны $\lambda = 0,59$ мкм, совпадающей с од-

*) В задачах 11.49–11.53 под эффективной температурой лазерного излучения $T_{\text{эфф}}$ понимается такая температура абсолютно черного тела, при которой оно дает излучение той же удельной интенсивности I_ω на частоте ω , что и лазер.

ной из спектральных линий Na. Время спонтанного испускания Na для этой линии $\tau = 16$ нс. При больших плотностях потока $j > j_0$ ускорение a , приобретаемое атомом за счет давления света, перестает зависеть от j . Оценить значение плотности потока насыщения j_0 . Определить также предельную величину a . Доплеровским сдвигом частоты при излучении движущегося атома пренебречь.

11.55. Возбужденный атом с энергией возбуждения $\mathcal{E} = 1$ эВ находится в поле равновесного излучения с температурой $T = 300$ К. Найти отношение вероятностей индуцированного и спонтанного излучений атома. Найти аналогичное отношение для электронного спина в магнитном поле с индукцией $B = 10^3$ Гс.

11.56. Определить диапазон частот излучения, при котором вероятность спонтанного перехода более чем в 100 раз превосходит вероятность индуцированного перехода под влиянием равновесного излучения с температурой $T = 293$ К.

11.57. Система, состоящая из атомов, имеющих два невырожденных уровня энергии \mathcal{E}_1 , и $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$, находится в тепловом равновесии. Выразить коэффициент поглощения света $\kappa(T, \omega)$ этой системой на частоте $\omega = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/\hbar$ через его значение κ_0 при $T = 0$. Рассмотреть два предельных случая: 1) $k_B T \gg \hbar\omega$ и 2) $k_B T \ll \hbar\omega$.

11.58* Оценить вероятность $W_{\text{сп}}$ спонтанного излучения молекулы при переходе с возбужденного уровня \mathcal{E}_n на уровень \mathcal{E}_m в случае, когда молекула помещена внутрь объемного резонатора, настроенного на частоту $\omega = (\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_m)/\hbar$. Соответствующая вероятность спонтанного излучения в свободном пространстве равна $W_{\text{сп}}^0$. Объем резонатора равен V , его добротность — Q . Считать, что ширина Γ молекулярных уровней все время остается меньше ширины ω/Q линии резонатора: $\Gamma < \omega/Q$. Сделать численную оценку для случаев: 1) $V = 1$ см³, $\lambda = 1$ см, $Q = 10^4$ и 2) $V = 1$ см³, $\lambda = 1$ мкм, $Q = 10^6$.

11.59. Резонатор лазера с кристаллом рубина имеет одно зеркало со 100%-м отражением, а другое — с коэффициентом пропускания $\tau = 0,1$ на длине волны, отвечающей генерации лазера. Длина кристалла $l = 12$ см. Известно, что коэффициент поглощения света в невозбужденном кристалле рубина в максимуме рабочей линии равен $k_p = 0,4$ см⁻¹. Найти, какую часть атомов хрома нужно перевести в возбужденное состояние, чтобы лазер начал работать. Рассеянием света в кристалле пренебречь.

11.60. В спектре энергетических уровней молекулы воды есть два уровня A и B с разностью энергий \mathcal{E}_0 , между которыми разрешены оптические переходы. Создавая в разреженном водяном паре при температуре $T = 300$ К тлеющий разряд, не нагревающий пар, можно получить инверсную заселенность этих уровней. На этом основана работа лазера, в котором электромагнитная волна с частотой $v_0 = \mathcal{E}_0/h = 8,48 \cdot 10^{11}$ Гц усиливается по мощности на длине резонатора в $\beta_0 = 1,04$ раз. Расстояние между зеркалами резонатора можно слегка менять, регулируя тем самым собственную частоту резонато-

ра. Коэффициент отражения каждого из зеркал $R = 0,99$. Определить возможную перестройку частоты излучения лазера, принимая во внимание эффект Доплера, обусловленный тепловым движением молекул.

11.61. Реликтовое межгалактическое излучение могло бы служить «абсолютной» системой отсчета для измерения скорости космических объектов. Оценить, с какой точностью надо измерять принимаемую мощность излучения, чтобы заметить сдвиг спектрального распределения при изменении направления наблюдения вдоль «абсолютной» скорости на 180° . Считать, что «абсолютная» скорость наблюдателя на Земле близка к скорости движения Солнца относительно центра Галактики $v = 220$ км/с.

Указание. Максимумы функции $\left| x \frac{d}{dx} \frac{x^3}{e^x - 1} \right|$: $x_1 = 1,51$ и $x_2 = 5,23$.

11.62. Вселенная, возраст которой $t_1 \sim 10^{10}$ лет, заполнена равновесным реликтовым излучением, температура которого в настоящее время равна $T_1 \approx 3$ К. Начиная с эпохи, когда его температура составляла $T_0 \approx 3000$ К и образовались нейтральные атомы, излучение слабо взаимодействовало с веществом, расширяясь вместе со Вселенной. Как указывают все космические данные, этот процесс расширения можно считать адиабатическим. Оценить возраст Вселенной t к моменту образования нейтральных атомов. Скорость линейного расширения Вселенной считать постоянной.

11.63. Оценить световое давление внутри ядерной урановой бомбы в момент ее взрыва, предполагая, что излучение — равновесное, а температура внутри бомбы $T = 10$ кэВ. Каково при этом газокинетическое давление? Плотность урана $\rho = 18,7$ г/см³. Для оценки считать, что степень ионизации атомов урана равна 25%.

11.64. Звезда 51 в созвездии Пегас — почти двойник нашего Солнца. Предполагается, что около этой звезды находится планета с атмосферой, схожей с атмосферой Земли. Ее период обращения по орбите составляет около $\tau_{\text{пл}} = 4$ сут. Оценить температуру поверхности планеты $T_{\text{пл}}$.

11.65. Для уничтожения в нижних слоях атмосферы старого космического аппарата — шара радиусом $R = 1$ м — с Земли запускают ракету, которая летит прямо навстречу цели. При спуске шар раскалился, причем температура его поверхности $T = T_0 \cos^2 \theta$ ($T_0 = 1000$ К, угол θ отсчитывается от направления его движения). С какого наибольшего расстояния L головка самонаведения ракеты начнет регистрировать тепловое излучение шара, если ее чувствительность $j = 5 \cdot 10^{-7}$ Вт/м²?

11.66. В центре сферической полости радиусом $R = 1$ м с матовой поверхностью, коэффициент диффузного отражения которой равен 1, подведен абсолютно черный шарик радиусом $r = 1$ см, обладающий высокой теплопроводностью. В стенке полости имеется круглое отверстие диаметром $d = 1$ см, через которое солнечное излучение по-

падает точно на шарик. Оценить установившуюся температуру шарика T , предполагая, что в полости устанавливается однородное изотропное излучение. Угловой размер Солнца $\alpha_C = 10^{-2}$, температура его поверхности $T_C = 6000$ К.

11.67. В замкнутом вакуумированном объеме, стенки которого нагреты до температуры $T = 1000$ К, подвешены два черных шарика радиусом $a = 1$ см, охлаждаемые до низких температур. Расстояние между шариками $L = 1$ м. Оценить направление и величину силы, действующей на каждый из шариков. Дифракционными эффектами пренебречь.

11.68. Оценить расстояние от наблюдателя до источника первичных космических лучей (протонов) с энергией $\mathcal{E} = 10^{22}$ эВ, считая, что оно определяется пробегом частиц до взаимодействия с фотонами реликтового излучения с температурой $T = 2,7$ К. Сечение рассеяния $\sigma = 10^{-4}$ барн.

11.69. Полый резонатор электромагнитных волн изготовлен из листа меди и имеет форму куба со стороной $a = 32$ см. Оценить, на каких частотах пропадут его резонансные свойства, т. е. в спектре колебаний уже нельзя будет различить отдельные пики. Добротность резонатора $Q = a/(2l_{\text{ск}})$, где $l_{\text{ск}}$ — склоновая глубина проникновения. Проводимость меди во всем диапазоне частот считать постоянной и равной $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$ с⁻¹. Плотность мод колебаний поля в резонаторе считать равной плотности мод в свободном пространстве.

11.70. Зеркальный металлический прямоугольный волновод с по-перечным сечением 34×72 мм и длиной $L = 10$ м замкнут накоротко с обоих концов и через малое отверстие соединен с абсолютно черной полостью, нагретой до температуры $T = 600$ К. Оценить плотность электромагнитной энергии в волноводе (в эрг/Гц) в диапазоне длин волн 10 см.

11.71. Как показал в 1974 г. С. Хокинг, «черная дыра» массой M за счет квантовых эффектов и конечных размеров излучает как абсолютно черное тело с температурой $T(M) = \hbar c^3 / (8\pi k_B M)$. Оценить время жизни черной дыры с массой $M = 10^{15}$ г до ее полного испарения.

11.72. Яркая желто-зеленая линия полярного сияния (аигога borealis) возникает при возбуждении атомов кислорода в верхних слоях атмосферы под действием солнечного ветра (потока быстрых электронов и протонов). Время жизни возбужденного состояния атома кислорода относительно спонтанного перехода составляет $\tau \approx 0,74$ с. Однако столкновения атомов кислорода с молекулами атмосферы могут снять это возбуждение безызлучательным способом. Эффективное сечение этого процесса $\sigma \approx 7 \cdot 10^{-15}$ см². Оценить, на какой высоте над Землей «загорается» эта линия. Атмосферу считать изотермической с $T = 240$ К.

11.73* Рекомбинация ионов и электронов в межзвездной среде приводит к образованию атомов в высоковозбужденных состояни-

ях с главным квантовым числом $n \gg 1$ (ридберговских атомов). При переходах с $\Delta n = 1$ очень высоковозбужденные атомы излучают радиоволны, что было обнаружено в 1964 г. радиотелескопом РТ-22 в г. Пущино. В межзвездной среде есть и изотропное магнитотормозное излучение со спектральной интенсивностью в коротковолновом радиодиапазоне $I(\omega) = 2 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}}$. Оценить максимально возможное n для атома водорода в этих условиях. Спонтанное время жизни высоковозбужденных состояний атома водорода в вакууме ($c n \sim 10^3$) равно $\tau_{\text{сп}}(n) \simeq 6 \cdot 10^{-12} n^5$ с.

11.74* Взаимодействие электрона в атоме водорода с нулевыми колебаниями электромагнитного поля в вакууме, приводящее, в частности, к расщеплению по энергии состояний $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ («лэмбовский сдвиг») можно в интервале частот (Ry/\hbar , $2mc^2/\hbar$) рассматривать как взаимодействие свободного электрона с однородным переменным электромагнитным полем, которое приводит к случайным смещениям электрона на орбите. Оценить величину среднеквадратичного смещения электрона.

11.75* Какой вклад вносит в величину расстояния от Земли до Солнца радиационное давление излучения Солнца? Температура поверхности Солнца $T_C = 6000$ К, его радиус $R_C = 7 \cdot 10^5$ км, масса $M_C = 2 \cdot 10^{33}$ г. Масса Земли $M_3 = 6 \cdot 10^{27}$ г, радиус Земли $R_3 = 6,4 \cdot 10^3$ км. Орбиту Земли считать круговой, поверхность Земли — абсолютно поглощающей.

11.76. На сколько изменится из-за теплового излучения Солнца период обращения Земли вокруг Солнца за $\tau = 10^6$ лет? Температуру поверхности Солнца $T_C = 6000$ К и его радиус $R_C = 7 \cdot 10^5$ км считать постоянными, а массу $M_C = 2 \cdot 10^{33}$ г — мало меняющейся за указанное время. Орбиту Земли считать круговой.

11.77* Космическая станция покоятся относительно центра Солнца на расстоянии $R_0 = 50$ млн км от него, удерживаемая ориентированным к нему зеркальным солнечным парусом. Кратковременное включение двигателя придает станции скорость $v_0 = 20$ см/с, направленную от Солнца. На каком расстоянии R от Солнца станция остановится? Масса Солнца $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Влиянием солнечного ветра (поток ионизованных частиц — протонов, ядер гелия и др.) пренебречь.

11.78. Космическая станция покоятся относительно центра Солнца на расстоянии $R_0 = 50$ млн км от него, удерживаемая ориентированным к нему зеркальным солнечным парусом. Кратковременное включение двигателя придает станции скорость v_0 , направленную от Солнца. Каково минимальное значение v_0 , при котором станция может улететь на бесконечность? Масса Солнца $M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Влиянием солнечного ветра (поток ионизованных частиц — протонов, ядер гелия и др.) пренебречь.

11.79. Космическая станция покоится относительно центра Солнца на расстоянии $R_0 = 50$ млн км от него, удерживаемая ориентированным к нему зеркальным солнечным парусом. Кратковременное включение двигателя придает станции скорость $v_0 = 20$ см/с, направленную к Солнцу. На каком расстоянии R от Солнца станция остановится? Масса Солнца $M_{\text{С}} = 2 \cdot 10^{30}$ кг. Влиянием солнечного ветра (поток ионизованных частиц — протонов, ядер гелия и др.) пренебречь.

11.80* Абсолютно черная идеально теплопроводящая пластинка движется в направлении нормали к поверхности со скоростью $v = 300$ км/с в поле равновесного теплового излучения. Найти относительное отличие температуры пластинки от температуры излучения T . В системе, связанной с пластинкой, плотность потока энергии излучения в интервале частот $d\omega$ в телесном угле $d\Omega$ при наблюдении под углом θ к вектору скорости \mathbf{v} имеет вид

$$J(T, \omega, \Omega) d\omega d\Omega = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega(1-\beta\cos\theta)}{k_B T}\right] - 1} d\omega d\Omega,$$

где $\beta = v/c$.

11.81. Найти силу, действующую на абсолютно черную идеально теплопроводящую пластинку площадью $S = 1$ см², движущуюся в направлении нормали к поверхности со скоростью $v = 300$ км/с в поле равновесного теплового излучения с температурой $T = 3$ К. В системе, связанной с пластинкой, плотность потока энергии излучения в интервале частот $d\omega$ в телесном угле $d\Omega$ при наблюдении под углом θ к вектору скорости \mathbf{v} имеет вид

$$J(T, \omega, \Omega) d\omega d\Omega = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \frac{\hbar\omega}{\exp\left[\frac{\hbar\omega(1-\beta\cos\theta)}{k_B T}\right] - 1} d\omega d\Omega,$$

где $\beta = v/c$.

11.82. Рождение электрон-дырочной пары в полупроводнике возможно, если энергия кванта излучения превысит некоторую величину Δ . Оценить максимальную долю η энергии солнечного излучения, которая может быть преобразована в полезную работу в полупроводниковой солнечной батарее, если $\Delta = 1,35$ В. Считать, что от каждого кванта, рождающего пару, в полезную работу переходит только энергия, равная Δ . Атмосферу считать прозрачной для всех частот, а Солнце — абсолютно черным телом с температурой $T = 6 \cdot 10^3$ К.

11.83. Рождение электрон-дырочной пары в некотором полупроводнике возможно, если энергия кванта излучения превысит величину $\Delta = 1,35$ В. Солнечную батарею из этого материала накрыли защитным стеклом, поглощающим коротковолновое излучение с $\lambda < \lambda_0 = 400$ нм. Найти максимальную долю η энергии падающего солнечного излучения, которая может быть преобразована в полезную работу. Считать, что от каждого кванта, рождающего пару, в полезную работу переходит только энергия, равная Δ . Атмосферу считать прозрачной, а Солнце — абсолютно черным телом с температурой $T = 6 \cdot 10^3$ К.

§ 12. Избранные задачи заключительного (Государственного) экзамена МФТИ по общей физике

12.1. Столкновение атома A с двухатомной молекулой BC можно рассматривать как столкновение двух свободных частиц A и B (рис. 80). Показать, что при этом передаваемая энергия перераспределяется поровну между вращательным движением молекулы и поступательным движением ее центра масс. (1996 г.)

12.2. Показать, что при лобовом столкновении легкой частицы массой m с неподвижной тяжелой частицей массой M относительная потеря энергии не зависит от скорости. Предполагая, что быстрый нейтрон в среде испытывает только лобовые упругие столкновения, определить, сколько соударений потребуется нейtronу с энергией 1 МэВ, чтобы замедлиться в графите до тепловой скорости. (1996 г.)

12.3. В 1932 г. Дж. Чедвик, облучая нейтронами малых (по сравнению с энергией покоя) энергий парафин $(\text{CH}_2)_n$ и воздух, обнаружил, что максимальная скорость отдачи протонов равна $3,3 \cdot 10^9$ см/с, а ядер азота — $4,7 \cdot 10^8$ см/с. На основе этих экспериментов Чедвик впервые определил массу нейтрона. Какое отношение массы нейтрона к массе протона он получил? Тогда было известно из масс-спектроскопических измерений, что масса атома азота с точностью порядка 1% в 14 раз больше массы атома водорода. (2000 г.)

12.4. Пучок атомов гелия (плотность атомов в пучке $n = 10^{15}$ см $^{-3}$, энергия $\mathcal{E} = 1$ кэВ, сечение пучка $S = 0,1$ см 2) падает нормально на движущуюся навстречу зеркальную стенку с начальной скоростью $u_0 = 10$ см/с и массой $M = 1$ г. Через какое время t стенка остановится? (1992 г.)

12.5. При какой минимальной кинетической энергии атомов неона ($A = 20$) при столкновении их с неподвижными атомами кальция ($A = 40$) сможет произойти ионизация последних? Энергия ионизации кальция $W = 6,1$ эВ. (1972 г.)

12.6. Может ли произойти ионизация атома цезия ударом атома кислорода с кинетической энергией $\mathcal{E}_k = 4$ эВ? Энергия ионизации атомов цезия $W = 3,9$ эВ, относительная атомная масса $A = 133$. (1972 г.)

12.7. С какой скоростью атом аргона должен двигаться навстречу атому неона, обладающему кинетической энергией $\mathcal{E}_k = 1$ эВ, чтобы при их упругом рассеянии под произвольным углом модуль скорости атома неона не изменился? (1975 г.)

12.8. В цилиндре может без трения двигаться поршень массой M . Между поршнем и неподвижными стенками колеблются легкие шарики массой $m \ll M$ (рис. 81). В равновесном положении

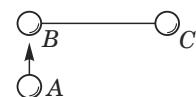


Рис. 80

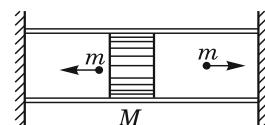


Рис. 81

поршня посередине цилиндра частота столкновений каждого шарика с поршнем равна v [Гц]. Найти частоту $f \ll v$ малых медленных колебаний поршня. Движение шариков считать одномерным, удары — абсолютно упругими. (1986 г.)

12.9. Столкиваются две упругие параллельно ориентированные пластины с одинаковой массой m . Первая пластина имеет скорость V , направленную под углом φ к поверхности, вторая — покается. Коэффициент трения между их поверхностями равен k . Найти скорость первой пластины после удара и угол φ , при котором работа сил трения при ударе максимальна. (1966 г.)

12.10. С каким угловым ускорением $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ будет вращаться мельничка Крукса (рис. 82), если на центр ее лопасти падает пучок электронов с силой тока $\mathcal{I} = 3,3$ мА, ускоренных потенциалом

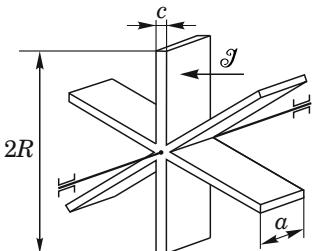


Рис. 82

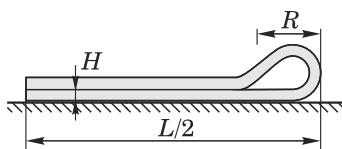


Рис. 83

$V = 900$ В? Колесо мельнички радиусом $R = 10$ мм состоит из шести алюминиевых лопастей шириной $a = 10$ мм и толщиной $c = 0,05$ мм. Отражением электронов и вторичной электронной эмиссией из лопастей мельнички и трением в подшипниках пренебречь. (1966 г.)

12.11* На горизонтальном столе лежит гибкая нерастяжимая лента длиной $L = 1$ м, сложенная вдвое (рис. 83). Между лентой и столом коэффициент трения $k = 1$, а между поверхностями ленты трения нет. Полагая размеры в области сгиба $R \ll L$, определить время T , за которое лента распрямится. Толщина ленты $H = 1$ мм. (1990 г.)

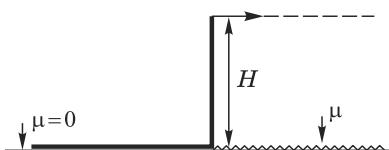


Рис. 84

верхности. Масса веревки $m = 0,5$ кг, длина $L = 1$ м, коэффициент трения веревки о шероховатую поверхность $\mu = 0,5$. (2006 г.)

Указание. Рассмотреть проекции сил, касательные к элементу длины висящей веревки.

12.12. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы перетащить мягкую веревку с абсолютно гладкой на шероховатую поверхность, медленно перемещая верхний конец веревки горизонтально на высоте $H = 0,5$ м (рис. 84). Вначале веревка находилась на гладкой

12.13. Получить, например из соображений размерностей, выражение для плотности энергии гравитационного поля вблизи Земли и оценить, во сколько раз ее значение отличается от значения для плотности энергии геомагнитного поля $B \approx 0,5$ Гс. (1974 г.)

12.14. Оценить допустимые уровни напряженности внешнего электрического и неоднородности (градиент) магнитного полей, от которых следует экранировать установку, чтобы можно было измерить ускорение свободного падения протона в поле тяжести Земли. (1976 г.)

12.15. Можно ли измерить гравитационную постоянную γ с точностью $\delta = 10\%$, подкатывая свинцовый шар к пробному грузу, подвешенному к чашке пружинных аналитических весов с относительной чувствительностью $\eta = 0,1$ мг/кг? (1966 г.)

12.16. Существует ли принципиальная возможность определить ускорение ракеты чисто электрическим методом, т.е. имея кусок проводника? Провести численные оценки для $a = 10g$ и длины проводника $L = 10$ м. Внешними электрическими и магнитными полями пренебречь. (1966 г.)

12.17. На каком расстоянии от Солнца плотность энергии солнечного света станет равной плотности энергии межзвездного магнитного поля $B = 2 \cdot 10^{-10}$ Тл? Солнечная постоянная $J_C \approx 1,4 \cdot 10^3$ Вт/м² (плотность потока энергии солнечного излучения вблизи Земли). (1968 г.)

12.18. Межгалактическое пространство, содержащее вещество в количестве 1 протон на м³, пронизано постоянным магнитным полем $2 \cdot 10^{-10}$ Тл и реликтовым тепловым излучением с температурой 3 К. Определить отношение плотностей энергии реликтового излучения, постоянного магнитного поля и энергии покоя вещества $w_{\text{изл}} : w_{\text{маг}} : w_{\text{вещ}}$. Оценить гравитационный радиус Вселенной с указанной плотностью материи и выразить его в световых годах. (1968 г.)

12.19. Самые точные современные гравиметры (приборы для измерения ускорения свободного падения) измеряют g по времени падения пробного тела в вакууме, и при этом достигается точность измерений порядка 0,04 мкм/с² на базе $h = 20$ см. Какую ошибку при измерении на поверхности Земли вносит неоднородность g ? (2003 г.)

12.20. Нефтяные месторождения в России расположены, как правило, в области вечной мерзлоты, где часто на глубине около 5 м появляются плоские слои расплавившегося льда толщиной порядка $h = 3$ м. Это создает большие опасности при разведке и бурении скважин. Современный метод обнаружения таких водяных прослоек — картирование местности с помощью гравиметров. Какова должна быть точность этих приборов? Плотность льда $\rho_l = 0,917$ г/см³. (2003 г.)

12.21. На поверхности Земли производится измерение ускорения свободного падения с точностью 10^{-8} м/с². Оценить, на сколько должно измениться атмосферное давление (по сравнению с обыч-

ным), чтобы это сказалось на точности измерений. Атмосферу считать изотермической, кривизну земной поверхности и изменение ускорения свободного падения с высотой не учитывать. Изменение давления происходит только за счет изменения локальной плотности атмосферы на поверхности Земли. (2002 г.)

12.22. Экспериментально установлено, что период малых колебаний математического маятника в шахте глубиной $h = 500$ м на $\delta = 0,0025\%$ меньше, чем у поверхности Земли. Оценить на основе этих данных среднюю плотность земной коры в пятисантметровом слое, считая Землю шаром с плотностью, зависящей только от расстояния до центра. Средняя плотность Земли $\rho_0 = 5,6 \text{ г}/\text{см}^3$. (2007 г.)

12.23. При движении в очень разреженных слоях атмосферы метеорит испаряется за счет столкновений с молекулами воздуха, которые передают веществу метеорита всю свою кинетическую энергию, но к поверхности не прилипают. Определить скорость метеорита v при уменьшении его массы в 10 раз. Начальная скорость $v_0 = 40 \text{ км}/\text{с}$, энергия, необходимая для нагрева и испарения вещества метеорита, $q = 8 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$. (1991 г.)

12.24. При движении в верхних слоях атмосферы сферический метеорит испытывает неупругие столкновения с молекулами воздуха, в результате чего он равномерно прогревается до температуры $T = 1000 \text{ К}$. Оценить скорость метеорита v , считая ее постоянной. Давление и температура воздуха: $P = 0,001 \text{ Па}$, $T_0 = 200 \text{ К}$. (2005 г.)

12.25. Определить мощность фотонной ракеты, движущейся за пределами Солнечной системы с нерелятивистской скоростью и постоянным ускорением $a = 10 \text{ м}/\text{с}^2$. Масса ракеты $M = 1 \text{ т}$. Сравнить мощность ракеты с мощностью Братской ГЭС (4,5 млн кВт). (1968 г.)

12.26. При вертикальном взлете космического корабля кратность перегрузки на старте равнялась $k_0 = (g + a_0)/g = 1,25$. Оценить, чemu будет равна кратность перегрузки $k = (g + a)/g$ в момент времени, когда скорость корабля относительно Земли станет равной скорости истечения газов относительно корабля. Расход горючего считать постоянным. (2006 г.)

Указание. Учесть, что к интересующему нас моменту времени значительная часть горючего будет израсходована.

12.27. При вертикальном взлете космического корабля космонавт испытывает перегрузку $k_0 = (g + a_0)/g = 1,25$, которая во время взлета возрастает и в некоторый момент становится равной $k = (g + a)/g = 8$. Во сколько раз в этот момент скорость космического корабля относительно Земли больше скорости истечения газов относительно ракеты? Расход горючего считать постоянным. (2006 г.)

12.28. Непосредственно под дном океана в районе Бермудского треугольника находится металлический метеорит в виде шара радиусом $R = 2 \text{ км}$. Глубина океана $H = 6 \text{ км}$. Оценить прогиб поверхности океана в этом месте. Плотность пород, образующих дно океана, принять равной $\rho_{\text{п}} = 2,5 \text{ г}/\text{см}^3$, плотность вещества метеорита $\rho_{\text{м}} = 7,5 \text{ г}/\text{см}^3$. (1977 г.)

12.29. Старые айсберги иногда опрокидываются, поворачиваясь на 90° . Оценить, через какое время айсберг в форме параллелепипеда с начальными размерами $L \times L \times H = 3 \times 3 \times 2 \text{ км}^3$ потеряет устойчивость. При таянии размеры айсберга меняются, но он всегда сохраняет форму параллелепипеда. Считать, что айсберг обменивается теплом с водой океана, а вода, образовавшаяся в результате таяния, быстро удаляется. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 335 \text{ кДж/кг}$, скорость теплообмена считать пропорциональной разности температур воды и льда $\Delta T = 5 \text{ К}$ с коэффициентом пропорциональности $a = 250 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. (2007 г.)

12.30. В течение своей «жизни» айсберги несколько раз опрокидываются, поворачиваясь на 90° . Для моделирования этого процесса был проделан следующий опыт: тающий кусок льда в форме параллелепипеда размером $a \times b \times h = 10 \times 10 \times 8 \text{ см}^3$ опускался в ванну с водой при температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$. В процессе таяния такой «айсберг», оставаясь параллелепипедом, изменялся в размерах, и через $t_0 = 20 \text{ мин}$ опрокидывался. Оценить на основе этого опыта время опрокидывания айсберга с размерами $500 \times 500 \times 300 \text{ м}^3$ в океане с температурой воды $t = 5^\circ\text{C}$. Считать, что теплоподвод происходит только по воде и скорость таяния пропорциональна разности температур льда и воды. (2007 г.)

12.31. Предельная высота гор на Венере $H_{\text{В}} \sim 10 \text{ км}$, на Земле $H_{\text{З}} \sim 9 \text{ км}$, отношение радиусов Венеры и Земли $R_{\text{В}}/R_{\text{З}} = 0,949$. Оценить массу Венеры и средние плотности планет, считая, что плотность горного вещества каждой из планет постоянна и что максимальная высота гор определяется пределом упругости пород. (1994 г.)

12.32. Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелящуюся круговую орбиту, в момент наибольшего сближения включают тормозной двигатель, выбрасывающий газы со скоростью $u = 4 \text{ км/с}$ относительно корабля в направлении его движения. Какую часть общей массы должно составить израсходованное горючее? Оценить температуру горения, если удельная теплоемкость выбрасываемых газов c_p составляет $2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$. (1966 г.)

12.33. Орбита космической станции массой $m = 100 \text{ т}$ расположена в верхних слоях атмосферы на высоте $h = 250 \text{ км}$. Если орбиту не корректировать, то за счет торможения станция снижается на величину $\Delta h = 100 \text{ м}$ в сутки. Оценить, какой требуется расход топлива (кг/сутки), чтобы поддерживать высоту орбиты станции. Скорость истечения отработавших газов относительно станции при работе двигателей $u = 3 \text{ км/с}$. (2001 г.)

12.34. Найти минимальную скорость удара о поверхность Луны неуправляемого космического аппарата, выпущенного с Земли по траектории, соединяющей центры Земли и Луны. (1966 г.)

12.35. Крупный метеорит массой $m = 10^6 \text{ т}$ летит по направлению к центру Земли. Чтобы избежать катастрофы, запускается ракета

с водородной бомбой, которая попадает в метеорит по нормали к его траектории и взрывается. Предполагая, что при взрыве из метеорита вылетает $\alpha = 10^{-3}$ часть его массы перпендикулярно траектории и вся энергия бомбы перешла в кинетическую энергию отброшенного вещества, оценить, на каком расстоянии R_0 от Земли ракета должна встретить метеорит, чтобы он пролетел на расстоянии радиуса Земли $R_3 = 6400$ км от ее поверхности. Скорость метеорита на бесконечности равна нулю, удар центральный, тротиловый эквивалент бомбы $W = 10$ Мт, энергия взрыва 1 кг тротила равна 4,2 МДж. (1995 г.)

12.36. Сейсмический датчик, установленный советским космическим аппаратом на Луне, зарегистрировал временную вариацию плотности налетающего на нее метеоритного облака. Было выдвинуто предположение, что вызвано это гигантским спутником Юпитера Ио, мимо которого пролетал стационарный метеоритный поток. Оценить, какой период временной вариации показаний сейсмодатчика зарегистрирован. Масса Юпитера $M = 1,9 \cdot 10^{27}$ кг, расстояние Ио от Юпитера $L = 422000$ км. (2003 г.)

12.37. Известно, что для сбивания спутника с орбиты достаточно приложить к нему импульс, много меньший собственного импульса, если правильно выбрать направление воздействия. Существует проект сбивания спутников за счет отдачи, возникающей при испарении материала спутника под действием мощного лазерного излучения. Найти минимальную энергию лазерного излучения, необходимую для перевода спутника массой $m = 100$ кг с круговой орбиты на высоте $H = 200$ км на орбиту, касающуюся поверхности Земли. Импульс отдачи спутника, возникающий при воздействии излучения мощностью 1 Дж, равен $\alpha = 3$ дин·с/Дж. Изменением массы спутника пренебречь. (2000 г.)

12.38. Как показали спектроскопические исследования, спутник Сатурна Титан содержит атмосферу, состоящую из метана и аммиака. Вычислить и сравнить вторые космические скорости для Луны и Титана и оценить температуру поверхности Титана. Объяснить, почему Луна лишена атмосферы, а Титан еще сохранил ее. Радиус Титана $R_{\text{Т}} = 2570$ км, радиус Луны $R_{\text{Л}} = 1740$ км. Масса Титана равна $1/45$, а Луны — $1/81$ массы Земли. Радиус орбиты Сатурна превосходит радиус земной орбиты в 9,54 раза. (1969 г.)

12.39. Земля ближе всего подходит к Солнцу 1 января, причем расстояние между ними $R_1 = 147$ млн км, а 1 июля это расстояние $R_2 = 152$ млн км. Угол наклона земной оси к плоскости эклиптики $\theta = 66,5^\circ$. Определить разницу δT в длительности солнечных суток в указанные дни. Их отличием от дней зимнего и летнего солнцестояния (22 декабря и 22 июня) можно пренебречь. (1990 г.)

12.40. Дни летнего и зимнего солнцестояния (22 июня и 22 декабря) делят год пополам, а летний период между днями весеннего и осеннего равноденствия $T_{\text{Л}}$ (с 21 марта по 23 сентября) продолжительнее зимнего T_3 на 7 дней. Оценить эксцентриситет земной орбиты. (2004 г.)

12.41. В романе А. Толстого «Аэлита» полет на Марс начинается в момент противостояния, когда Солнце, Земля и Марс находятся на прямой. При каком угле Земля–Солнце–Марс (рис. 85) следует на самом деле стартовать с Земли, чтобы расход топлива был минимальным при кратковременной работе двигателя? Считать орбиты Земли и Марса круговыми, лежащими в одной плоскости, притяжением между ракетой и планетами в межпланетном перелете пренебречь. Период обращения Марса равен 1,88 года. (1988 г.)

12.42. Каким должен быть угол Марс–Солнце–Земля (рис. 85), при котором становится энергетически выгодным перелет с Марса на Землю при кратковременной работе стартового двигателя? Для упрощения расчетов считать орбиты планет Земля и Марс круговыми, лежащими в одной плоскости, притяжением между ракетой и планетами при перелете пренебречь. Радиус орбиты Марса принять равным 1,5 радиуса земной орбиты. (1988 г.)

12.43. Звезда 51 в созвездии Пегас практически является двойником нашего Солнца. Изучение ее оптических спектров показало

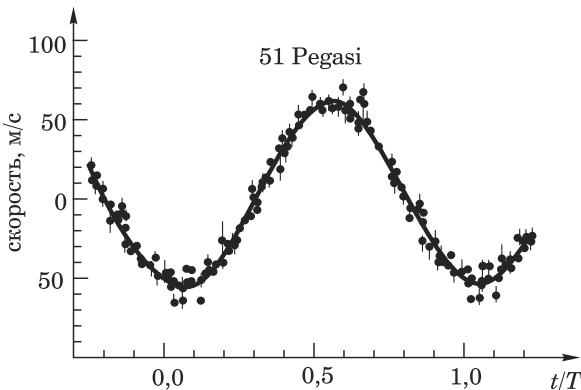


Рис. 86

регулярное изменение скорости звезды по закону $u = u_0 \sin(2\pi t/T)$ (сплошная линия на рис. 86) с периодом $T = 4,23$ суток и амплитудой $u_0 = 56$ м/с. Предполагается, что эти временные вариации излучения обусловлены вращением вокруг нее намного более легкой планеты. По какой траектории движется планета и какова должна быть ее масса? (2002 г.)

12.44. Ледяная комета движется в Солнечной системе в плоскости орбиты Юпитера с периодом T_k . Если она пролетает близко от Юпитера, она разрушается за счет приливных сил (из-за градиента гравитационного поля). Оценить число оборотов вокруг Солнца, которое может совершить комета размером $r_0 = 10$ км, не разрушаясь. Прочность ядра ледяной кометы $\sigma_0 = 10^5$ дин/см², период обраще-

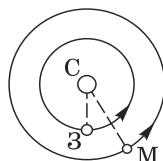


Рис. 85

ния Юпитера вокруг Солнца $T_{\text{JO}} = 12$ лет $\ll T_{\text{k}}$, его масса составляет $\eta = 10^{-3}$ массы Солнца. (2000 г.)

12.45. Космонавт А. Леонов, выйдя из корабля в открытый космос, бросил крышку фотоаппарата по направлению к центру Земли со скоростью $v_0 = 0,5$ м/с относительно корабля. Спустя некоторое время он с удивлением обнаружил, что крышка возвращается к кораблю. Описать периодическое движение крышки относительно корабля, определив период и параметры ее относительного движения. Считать, что корабль движется по круговой орбите с радиусом $R_0 = 7000$ км. (1982 г.)

12.46. Спутник массой $m = 200$ кг, запущенный на круговую околоземную орбиту, тормозится в верхних слоях атмосферы. Сила трения $F = Cv^3$ ($C = 3 \cdot 10^{-16}$ кг·с/m²). С какой радиальной скоростью спускается спутник? (1999 г.)

12.47. Космический корабль сферической формы движется равномерно со скоростью v в области космической пыли плотностью ρ , ко-

торая прилипает к кораблю. КПД реактивного двигателя корабля η . Оценить установившуюся температуру обшивки корабля T , считая ее черным телом. Изменением массы корабля вследствие налипания пыли и расхода топлива пренебречь. (1999 г.)

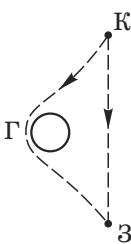


Рис. 87

12.48. В 1979 г. открыли два квазара-«близнеца» с абсолютно одинаковыми спектральными характеристиками. Предполагается, что это сам квазар и его изображение — мираж, создаваемый удаленной галактикой (Γ), расположенной между квазаром (K) и Землей (3) (рис. 87). Угловое расстояние между квазарами «близнецами» равно $6''$. Принимая во внимание, что отклонение луча света вблизи Солнца равно $1,75''$, оценить массу галактики в единицах массы Солнца. Считать, что радиус галактики $2 \cdot 10^5$ св. лет, радиус Солнца равен $7 \cdot 10^5$ км. (1988 г.) (См. задачу 1.5.)

12.49. Согласно одной из гипотез пульсар является нейтронной звездой, образующейся в результате гравитационного сжатия (коловрата). Оценить по порядку величины, с каким периодом будет вращаться Солнце, если оно превратится в нейтронную звезду. Масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг, радиус $R = 7 \cdot 10^5$ км, период вращения $T = 2,2 \cdot 10^6$ с. (1971 г.)

12.50*: Оценить время τ , за которое нейтронная звезда может потерять свое магнитное поле.

Указание. Рассмотреть следующую модель: нейтронная звезда — металлический шар с радиусом $R \sim 10^6$ см, удельная проводимость вещества звезды $\sigma \sim 10^{30}$ с⁻¹. (1966 г.)

12.51. Звезда с массой $m = 2 \cdot 10^{33}$ г и начальным радиусом $r_0 = 7 \cdot 10^{10}$ см сжимается и в результате превращается в белый карлик со средней плотностью $\rho \approx 10^7$ г/см³, а затем в нейтронную звезду

с $\rho \approx 10^{14}$ г/см³. Характерное магнитное поле звезды (например, поле у полюса) в начальном состоянии $B_0 \sim 1$ Гс. Найти характерное магнитное поле белого карлика и нейтронной звезды. (1979 г.)

12.52. Оценить, какую величину магнитного поля звезды типа Солнца (период вращения $T = 10^6$ с, радиус $R = 10^{10}$ см, температура поверхности $T = 6 \cdot 10^3$ К) можно обнаружить в оптической области спектра ($\omega = 10^{15}$ с⁻¹) на основании измерения эффекта Зеемана. (1974 г.)

12.53.* Для звездного скопления определить среднее время между столкновениями двух звезд типа Солнца ($M_C \approx 2 \cdot 10^{33}$ г), если их средняя относительная скорость $u = 60$ км/с, а число звезд в кубическом световом годе $N \sim 10^4$. Уточнить понятие столкновения, которым вы пользуетесь. (1968 г.)

12.54. Астероиды — малые планеты с радиусом $r \simeq 5$ км в количестве $N \simeq 10^4$, их возраст 4,5 млрд лет. Они движутся между орбитами Юпитера и Марса, образуя пояс астероидов толщиной $h \simeq 10^6$ км, простирающийся от $R_1 = 2,5 \cdot 10^8$ км до $R_2 = 7 \cdot 10^8$ км. В результате возмущения их орбит планетами они все время изменяют траектории и могут сталкиваться, что приводит к их дроблению и возникновению метеоритов. Относительная скорость астероидов $v = 5$ км/с. Оценить, сколько раз за свою историю астероиды сталкивались между собой. (2005 г.)

12.55. Согласно астрономическим наблюдениям мы живем в расширяющейся Вселенной, причем скорость расширения v пропорциональна ее текущему радиусу R : $v(R) = HR$, где постоянная $H = 2,4 \cdot 10^{-18}$ с⁻¹ называется постоянной Хаббла. Оценить критическую плотность сферически симметричной Вселенной, при которой расширение никогда не сменится сжатием. (1996 г.)

12.56. Для черной дыры гравитационное притяжение столь велико, что ни луч света и ни одна частица не могут вырваться за ее пределы. Оценить радиус черной дыры, имеющей массу Солнца $M = 2 \cdot 10^{33}$ г. (См. также задачу 11.71.) (1982 г.)

12.57. По современным представлениям звезды могут переходить в гравитационно неустойчивые состояния, в которых силы тяготения при стремлении радиуса звезды к определенному пределу (называемому гравитационным радиусом) стремятся к бесконечности, в то время как давление внутри звезды остается конечным. Это приводит к катастрофическому сжатию (релятивистскому коллапсу) звезды. Для полного описания такого процесса закон всемирного тяготения Ньютона неприменим. Пользуясь формулой Эйнштейна для энергии покоя $\mathcal{E} = Mc^2$, найти условие применимости ньютона закона тяготения. Сделать численную оценку для звезды, масса которой равна массе Солнца $M = 2 \cdot 10^{33}$ г. (1969 г.)

12.58. Оценить размер пылинки, при котором она будет выдуваться из Солнечной системы световым давлением Солнца. (1984 г.)

12.59. В космическом излучении из источника Лебедь-Х3, находящегося от нас на расстоянии $L = 40000$ св. лет, с интервалом

в $T = 1$ с было зарегистрировано несколько событий, обусловленных частицами с энергией $\mathcal{E} = 10^{16}$ эВ. Это можно интерпретировать как излучение из вращающегося там объекта. Оценить верхнее значение энергии покоя этих частиц и размер излучающей области, при которых такая временная структура излучения может наблюдаться на Земле, считая, что разброс по энергии рождающихся частиц $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E} = 0,1$. (1993 г.)

12.60. При взрыве сверхновой 27 февраля 1987 г. в Малом Магеллановом облаке, находящемся от Земли на расстоянии $L = 180000$ св. лет, были зарегистрированы две группы нейтрино с интервалом в $\Delta t = 1$ ч. Согласно одной из гипотез, эти две группы нейтрино родились одновременно, но обусловлены разными процессами и соответственно имеют нулевую и ненулевую (около 20 эВ) энергию покоя. Оценить энергию второй группы нейтрино, при которой такое объяснение возможно. (1993 г.)

12.61. Согласно некоторым прогнозам тенденция к общему потеплению нашей планеты грозит таянием приполярных льдов в Арктике и Антарктиде. Оценить, на сколько изменится продолжительность земных суток, если подъем уровня мирового океана составит 40 м. (1992 г.)

12.62. Длина разбега самолета МиГ-29К до отрыва от земли при полной массе $m_1 = 22,4$ т составляет $L_{01} = 195$ м. Найти длину разбега того же самолета с меньшим запасом топлива при полной массе $m_2 = 17,7$ т. Аэродинамику самолета для разных масс считать одинаковой; силу тяги двигателей — одинаковой и равной $T = 171$ кН.

Сопротивление и подъемную силу считать пропорциональными квадрату скорости: $F_c = \alpha V^2$, $F_p = \beta V^2$, $\alpha = 46$ кг/м. (2009 г.)

12.63. 14 сентября 2015 г. установками LIGO была зарегистрирована гравитационная волна, рожденная в процессе слияния двух черных дыр, вращавшихся вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Временная зависимость сигнала, пропорционального амплитуде

туда волны, изображена на рис. 88. В момент слияния (обозначен штриховой линией) излучение прекращается. Оценить массу возникшей черной дыры, рассматривая исходные черные дыры как точечные массы m_1 и m_2 , взаимодействующие по закону Ньютона и обращающиеся по круговым орбитам вокруг центра масс. В момент слияния расстояние между ними равно $r_s = 2\gamma(m_1 + m_2)/c^2$ (радиус Шварцшильда), где γ — гравитационная постоянная, c — скорость света. Период гравитационной волны, равный половине периода обращения системы, оценивать в области максимальной амплитуды сигнала на графике. (2017 г.)

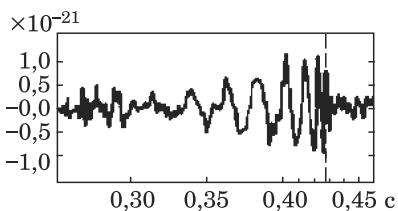


Рис. 88

Указание. Движение черных дыр рассматривать в нерелятивистском приближении.

12.64. 14 сентября 2015 г. установками LIGO была зарегистрирована гравитационная волна, рожденная в процессе слияния двух черных дыр с массами примерно $29M_{\odot}$ и $36M_{\odot}$ ($M_{\odot} = 2,0 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца). Оценить энергию излученных гравитационных волн, рассматривая черные дыры как точечные массы, взаимодействующие по закону Ньютона и обращающиеся по круговым орбитам вокруг общего центра масс. Считать, что слияние происходит, когда расстояние между ними становится равным $r_s = 2\gamma M/c^2$ (радиус Шварцшильда), где γ — гравитационная постоянная, c — скорость света, и M — сумма масс двух исходных черных дыр. (2017 г.)

Указание. Движение черных дыр рассматривать в нерелятивистском приближении.

12.65. Основным элементом кистевого тренажера «Торнео» является цилиндрический маховик, жестко наложенный на ось, которая может скользить с трением в круговом желобе, расположенном по экватору внутренней поверхности сферического корпуса (рис. 89). Предварительно раскрученный маховик затем разгоняется до высоких оборотов за счет создания кистью руки приложенного к корпусу крутящего момента пары сил F . Оценить, до какой максимальной частоты вращения можно раскрутить маховик, если сила $F \leq 30$ Н. Диаметр маховика $D = 3$ см, масса $m = 200$ г, радиус оси маховика $r = 1$ мм, ее длина (диаметр желоба) $l = 5$ см. (2014 г.)

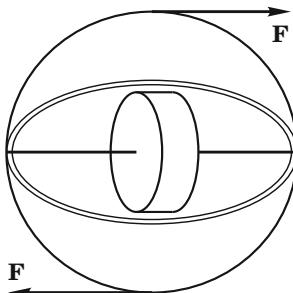


Рис. 89

12.66. Медленно вращающееся приподнятое переднее колесо с педалями трехколесного велосипеда можно разогнать до больших скоростей, поворачивая руль на небольшой угол влево-вправо в определенные моменты времени. Оценить минимальное время разгона колеса от начальной частоты вращения $v_0 = 5$ Гц до значения $v = 10$ Гц. Считать, что масса колеса $M = 2,5$ кг сосредоточена в его ободе радиусом $R = 25$ см; педали, жестко связанные с осью колеса, отстоят от плоскости колеса на расстояние $l = 10$ см и врачаются по радиусу $r = 10$ см. Размах угла поворота руля составляет $\varphi = 5^\circ$. Педали считать точечными массами по $m = 150$ г каждая. (2014 г.)

12.67. Современные железнодорожные пути укладывают без стыков, соединяя концы рельсов сварными швами. Рельсы прочно закреплены на шпалах, вкопанных в гравий. При $t_1 = +30^\circ\text{C}$ натяжение в рельсах равно нулю. Найти силу, необходимую для удерживания шпалы неподвижно в грунте на криволинейном участке пути с радиусом поворота $R = 350$ м при понижении температуры до $t_2 = -30^\circ\text{C}$. Расстояние между шпалами $d = 50$ см. Характеристики

рельсов: плотность $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент линейного теплового расширения $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹, погонная масса рельса $m = 65$ кг/м. (2019 г.)

12.68. Современные железнодорожные пути укладывают без стыков, соединяя концы рельсов сварными швами. Рельсы прочно прикреплены к шпалам, вкопанным в гравий. При $t_1 = +30^\circ\text{C}$ напряжение в рельсах отсутствует, а при понижении температуры рельсы оказываются в натянутом состоянии. Каждая шпала способна выдержать без смещения горизонтальное усилие до $F_{\max} = 5$ кН, а при большем усилии «ползет», так что сопротивление грунта остается равным F_{\max} . Найти смещение Δl конца длинного прямолинейного участка пути при $t_2 = -30^\circ\text{C}$. Характеристики материала рельсов: плотность $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, коэффициент линейного теплового расширения $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹, масса рельса $m = 65$ кг/м, расстояние между шпалами $d = 50$ см. (2019 г.)

12.69. Графен, за исследования свойств которого выпускникам МФТИ А. Гейму и К. Новоселову в 2010 г. присуждена Нобелевская премия, представляет собой моноатомный слой графита толщиной $h = 0,335$ нм. Графен обладает уникально высокой прочностью

и упругостью. Опыт по исследованию упругих свойств графена ставится следующим образом: алмазный зонд в виде «ножа» атомно-силового микроскопа оказывает давление на середину графеновой полоски размером $2l_0d = 1 \times 0,5$ мкм², закрепленной по узким сторонам (рис. 90). Для прогиба центра полоски на величину $x = 100$ нм потребовалась сила $F = 1,6$ мкН. Оценить модуль Юнга графена. Графен считать абсолютно мягким в попереч-

ном направлении материалом, а его коэффициент Пуассона равным нулю. Изначально пленка не натянута. (2011 г.)

12.70. В системе американской противоракетной обороны предполагалось с помощью мощных лазеров сбивать межконтинентальные баллистические ракеты сразу после их выхода за пределы атмосферы. Корпус ракеты представляет собой длинный цилиндр из алюминиевого сплава радиусом $R = 1$ м и толщиной стенок $h = 5$ мм, наддувый изнутри до давления $P = 2$ атм. Мощность излучения лазера $W = 10$ МВт, длительность импульса $\tau = 1$ с, длина волны $\lambda = 2,7$ мкм. Оценить: 1) на какую температуру нужно локально подогреть лазером корпус ракеты для того, чтобы механическое напряжение в нем превысило предельную прочность на растяжение алюминия ($\sigma_{\text{разр}} = 10^8$ Па); 2) максимальное расстояние, на котором можно поразить в вакууме ракету за счет локального разогрева корпуса с его последующим разрушением. Модуль Юнга сплава $E = 7 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$, температурный коэффициент объ-

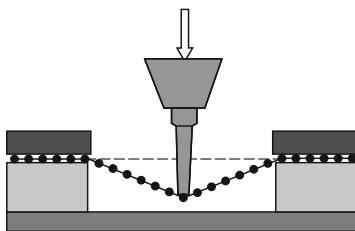


Рис. 90

емного расширения $\alpha = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$. Удельная теплоемкость сплава $c = 920 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$, плотность $\rho = 2,7 \text{ г}/\text{см}^3$. Напряжение на разрыв считать термодинамической функцией объема и температуры. Уходом тепла из области лазерного пятна на корпусе пренебречь. (2016 г.)

12.71* При запуске (остановке) машин с быстро вращающимся ротором при приближении к резонансным частотам под влиянием периодической центробежной силы, вызванной неизбежным эксцентрикитетом тяжести, происходит резонансная раскачка поперечных колебаний, что может привести к поломкам системы, как это было на Саяно-Шушенской ГЭС. Один из способов перехода через критическую скорость — сделать этот переход достаточно быстрым: при этом амплитуда вынужденных колебаний не успевает возрасти до опасных размеров. Оценить, с каким угловым ускорением следует разгонять (или останавливать) турбину, чтобы колебания не успели достичь опасной резонансной амплитуды, если ротор турбины представляет собой механическую колебательную систему с резонансной частотой $v_0 = 10 \text{ Гц}$ и добротностью $Q = 100$. (2010 г.)

12.72. При запуске (остановке) машин с быстро вращающимся ротором при приближении к резонансным частотам поперечных колебаний может произойти поломка ротора, как это было на Саяно-Шушенской ГЭС. Это связано с тем, что вращающийся с угловой скоростью ω ротор массой m совершает вынужденные поперечные колебания на упругом валу с жесткостью k под влиянием периодической силы $F = m\omega^2 a_0 \cos \omega t$, вызванной смещением центра тяжести ротора относительно оси вращения на величину a_0 . Этого можно избежать, если ввести демпфирующие силы $f = -\beta v$ (v — скорость поперечных вибраций). Оценить величину минимального коэффициента демпфирования β , при котором амплитуда вынужденных колебаний при медленном разгоне ротора $m = 16 \text{ т}$ не превысит величину эксцентриситета a_0 . Критическая скорость вращения (резонансная) $v_0 = 2000 \text{ об}/\text{мин}$. (2010 г.)

12.73. Ротор мощной турбины, обладая массой в десятки и сотни тонн, в рабочем режиме делает порядка тысячи оборотов в минуту (например, ротор турбины Саяно-Шушенской ГЭС имел массу около тысячи тонн). Изготовление таких роторов — сложнейшая технологическая задача. Однако, как бы точно ни работали машиностроители, невозможно избежать хотя бы небольшой асимметрии. В результате центр тяжести ротора оказывается смещенным относительно оси вала на некоторую величину a_0 (рис. 91). При вращении возникают огромные силы, способные сломать вал и «разнести» турбину. Оценить допустимый при изготовлении эксцентриситет ротора a_0 , при котором даже для высоких частот вращения нагрузка на вал не превышает силу, равную силе тяжести ротора. Высокой считается частота, значительно превышающая частоту собственных поперечных механических колебаний.

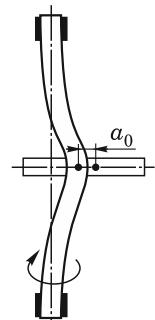


Рис. 91

ний ротора на валу $v_0 = 30$ Гц, которая определяется массой ротора и жесткостью вала. (2010 г.)

Укаzанie: Следует оценить значение деформации вала в положении равновесия в пределе высоких скоростей вращения $v \gg v_0$.

12.74. Из точки A (рис. 92) на спутник, летящий со скоростью \mathbf{v} , падает лазерный луч с частотой ω_0 . Отраженный луч регистрируется в точке B . Чему будет равна частота принимаемого света? Оценить разрешающую способность регистрирующего спектрального прибора, необходимую для обнаружения релятивистской поправки к смещению частоты. (1966 г.)

12.75. Луч света от импульсного лазера попадает на зеркало массой $m = 1$ г, расположенное под углом $\varphi = 30^\circ$ к лучу (угол между направлением луча и нормалью к поверхности зеркала). Коэффициент отражения зеркала (по энергии) $R = 0,5$. Зеркало полностью непрозрачно. Определить скорость зеркала после облучения его импульсом лазера с энергией $\mathcal{E} = 300$ Дж. (1972 г.)

12.76.* На плоскую поверхность стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1,5$ из вакуума падает перпендикулярно к поверхности световой пучок интенсивностью $I = 10$ Вт/см². Найти величину и направление силы, действующей на единицу площади поверхности раздела сред. (1995 г.)

12.77. Линейно поляризованная световая волна с направлением электрического вектора в плоскости падения и с интенсивностью $I = 1$ Вт/см² падает из вакуума под углом Брюстера на круглую плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d = 3$ мм и диаметром $D = 10$ см. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Найти момент сил, действующий на пластинку. В какую сторону будет разворачиваться пластинка? (1995 г.)

12.78. На четвертьволновую кварцевую пластинку падает нормально пучок плоскополяризованного света с длиной волны $\lambda = 6280$ Å мощностью $W = 3$ Вт. При каких условиях пластинка будет испытывать крутящий момент и какова его величина и направление? (1966 г.) (См. задачу 12.257.)

12.79. Горизонтальный диск радиусом R и массой m подвешен в атмосфере некоторого газа на упругой нити с модулем кручения f на расстоянии h ($h \ll R$) от горизонтальной неподвижной поверхности. Найти коэффициент внутреннего трения η в газе по результатам измерения логарифмического декремента затухания d крутильных колебаний. Движение воздуха между диском и неподвижной поверхностью считать ламинарным; краевыми эффектами пренебречь. (1966 г.)

12.80. Оценить частоту, затухание и добротность малых колебаний ртути в U -образной трубке с площадью поперечного сечения $S = 1$ см² и высотой столба $L = 50$ см. Вязкость ртути $\eta = 0,0155$ П, краевыми эффектами пренебречь. (1995 г.)

12.81. Два цилиндра, оси которых параллельны друг другу, находятся в водном потоке, скорость которого $v = 10$ см/с перпендикулярна осям цилиндров. Оценить, с какой силой притягиваются цилиндры радиусом $R = 1$ см и длиной $L = 10$ см, если зазор между ними $a = R$. (1993 г.)

12.82* В бассейне испытывается модель корабля в 1/100 натуральной величины. Проектная скорость корабля равна 36 км/ч. С какой скоростью и надо буксировать модель, чтобы картина гравитационных волн была подобна натуре? (1966 г.)

12.83* Оценить методом размерностей фазовую скорость гравитационных волн на поверхности жидкости, пренебрегая влиянием поверхностного натяжения и конечной глубины. Найти соотношение между фазовой и групповой скоростями этих волн. (1967 г.)

12.84. Морские волны при подходе к берегу выстраиваются параллельно береговой линии. Рассчитать, под каким углом к нормали к прямолинейному берегу подойдут волны, если далеко в море на большой глубине, где длина волн $\lambda = 50$ м, а фазовая скорость $v_0 = \sqrt{g\lambda}/(2\pi)$, они движутся под углом $\alpha_0 = 15^\circ$. Глубина моря постепенно уменьшается до $h \approx 0,5$ м, где скорость волн $v = \sqrt{gh}$. (2008 г.)

12.85* Если глубина H и ширина l ($l \gg H$) канала много меньше длины гравитационных волн на поверхности жидкости в нем, то скорость этих (длинных) гравитационных волн $v = \sqrt{gH}$. Рассмотреть отражение и прохождение волн при резком изменении глубины канала. Как изменится амплитуда проходящей волны при изменении глубины в 4 раза? (1966 г.)

12.86. В воздухе при нормальных условиях распространяется очень сильная звуковая волна, вызывающая боль в ушах. Ее относительная интенсивность $B = I/I_0 = 150$ дБ, где $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² — минимальная интенсивность звука, которую слышит человек. Оценить отношение удельной звуковой энергии к плотности тепловой энергии воздуха. (2006 г.)

12.87. Для создания подземного нефтехранилища в полости с начальным объемом V_0 производят взрыв, при котором высвобождается энергия $Q = 4,2$ ГДж. Образовавшиеся газообразные продукты взрыва, расширяясь адиабатически, в доли секунды образуют хранилище. При каком начальном объеме полости увеличение ее объема будет максимальным? Взрыв производится на глубине $H = 100$ м, плотность грунта $\rho = 3$ г/см³. Для оценки считать грунт несжимаемой жидкостью, а продукты взрыва — двухатомным газом. (1985 г.)

12.88. В большом сосуде с идеальным газом, поляризуемость молекул которого $\alpha = 10^{-24}$ см³, находится плоский конденсатор с напряженностью поля $E = 3 \cdot 10^4$ В/см. Температура газа 300 К. Найти относительные разности концентраций n и давлений P газа в конденсаторе и вне его. Где давление больше? (1968 г.)

12.89. В результате импульсного разряда конденсатора через разреженный газ (водород) происходит нагревание газа до тем-

пературы T . Оценить величину T , предполагая, что вся энергия разряда пошла на нагревание газа. Напряжение на конденсаторе $U = 30 \text{ кВ}$, емкость $C = 18 \text{ мкФ}$, газ занимал объем 10 л при давлении $10^{-2} \text{ мм рт. ст.}$ и температуре до разряда $T_0 = 293 \text{ К}$. (1971 г.)

12.90. В холодильнике сломался выключатель, и внутренняя лампочка продолжала гореть при закрытой дверце. Считая, что вся мощность лампочки ($N = 25 \text{ Вт}$) переходит в тепло, определить, на сколько изменилась потребляемая холодильником мощность. Обычно при комнатной температуре $T_2 = 295 \text{ К}$ внутри холодильника поддерживается температура $T_1 = 275 \text{ К}$. Холодильник считать идеальным. (2000 г.)

12.91. Найти максимальную мощность гипотетической тепловой машины, у которой нагреватель — пластина площадью $S = 1 \text{ м}^2$, одна из поверхностей которой зеркальная, а другая — полностью поглощающая. Холодильником служит корпус орбитальной станции с фиксированной температурой $T_x = 300 \text{ К}$. Солнце считать абсолютно черным телом с $T_C = 6000 \text{ К}$ и угловым диаметром $\alpha = 0,01 \text{ рад}$. Теплопроводность рабочего тела считать очень большой.

Указание. Уравнение для нахождения оптимальной температуры решать методом подбора. (2007 г.)

12.92. Найти максимальную мощность гипотетической тепловой машины, у которой нагревателем является корпус орбитальной станции с фиксированной температурой $T_h = 500 \text{ К}$, а холодильником — полностью поглощающая пластина площадью $S = 1 \text{ м}^2$. Теплопроводность рабочего тела считать очень большой. (2007 г.)

12.93. Рабочее вещество тепловой машины совершает цикл Карно между изотермами с температурами T и T_1 . Теплообмен между рабочим веществом и холодильником при температуре $T_2 = 200 \text{ К} < T$

осуществляется вследствие теплопроводности по закону $\alpha(T - T_2)$, где $\alpha = 1 \text{ кВт/К}$. Теплообмен рабочего вещества с нагревателем происходит при температуре $T_1 = 800 \text{ К}$. Полагая, что длительности изотермических процессов одинаковы, а адиабатических весьма малы, найти температуру T , при которой мощность N , развиваемая тепловой машиной, максимальна. Найти также величину N_{\max} . (1987 г.)

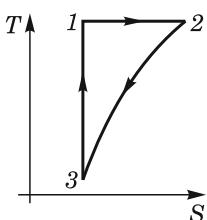


Рис. 93

12.94. Измерение теплоемкости серебра осуществляется путем проведения показанного на рис. 93 термодинамического цикла. Какова величина удельной теплоемкости при температуре $T_0 = 15 \text{ К}$, если к образцу массой $m = 0,1 \text{ г}$ на изотермическом участке подводится тепловая энергия $Q_{12} = 4,75 \text{ мДж}$, $T_1 = 24 \text{ К}$, а температура в конце второго участка $T_3 = 11 \text{ К}$? (2001 г.)

12.95. В одном из двух теплоизолированных сосудов находится 1 кг льда при температуре $t_l = 0^\circ\text{C}$, а в другом — 1 кг воды при 0°C . В воду опущен нагреватель, замыкающий цепь термопары

(рис. 94), один спай которой опущен в лед, а другой поддерживается при температуре $t_k = 27^\circ\text{C}$. Пренебрегая сопротивлением проводов и спаев по сравнению с сопротивлением нагревателя и теплопроводностью проводов, определить, на сколько градусов нагреется вода, когда в другом сосуде полностью растает лед. Теплоемкость воды $c = 4,2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ и теплоту плавления льда $q = 80 \text{ ккал}/\text{кг}$ считать не зависящими от температуры. (1981 г.)

12.96. В холодильной машине Клоуда газ поступает при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$ и под постоянным давлением в цилиндр с поршнем (детандер), где он адиабатически расширяется до фиксированного конечного давления. При этом газ совершает работу и охлаждается на ΔT . Во сколько раз уменьшится ΔT , т. е. насколько менее эффективным оказывается этот способ охлаждения, если при том же давлении начальная температура будет равна $T_2 = 50 \text{ К}$? Теплоемкость газа считать постоянной. (1996 г.)

12.97. Тепловая машина работает по циклу $ABC A$, состоящему из изотермы AB , адиабаты BC и политропы CA с отрицательной теплоемкостью. Определить КПД тепловой машины, если ее рабочее тело неизвестно, температуры в точках A и C относятся как $T_A/T_C = 4$. (2018 г.)

12.98. Холодильная машина работает по циклу $1-2-3-1$, состоящему из изотермы $1-2$, адиабаты $2-3$ и политропы с положительной теплоемкостью $3-1$. Вычислить эффективность ψ холодильной машины, если ее рабочее тело неизвестно, а отношение температур в точках $3-1$ равно $T_3/T_1 = 3$. (2018 г.)

12.99*: Как изменится частота малых колебаний поршня в вертикальном цилиндре с водородом после его изобарического охлаждения, в результате которого объем газа уменьшился в 7 раз? Начальная температура газа $T = 280 \text{ К}$. Частота колебаний атомов в молекуле водорода $v_H = 1,28 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$, среднее расстояние между ними $a = 0,75 \text{ \AA}$. Теплообменом с окружающей средой и трением в процессе колебаний пренебречь. Газ считать идеальным. (2015 г.)

12.100. Одноатомный газ Ван-дер-Ваальса сжимают в политропическом процессе $C = \text{const}$, уменьшая его объем от $V_0 = 3V_{\text{кр}}$ до $V_1 = 2V_{\text{кр}}$, а затем расширяют в вакуум до исходного объема. Начальная температура газа $T_0 = 1,5T_{\text{кр}}$, конечная $T_2 = 2,275T_{\text{кр}}$. Определить молярную теплоемкость газа в политропическом процессе. (2011 г.)

12.101. Потенциал парного межмолекулярного взаимодействия в благородных газах (в модели твердых сфер) можно описать сле-

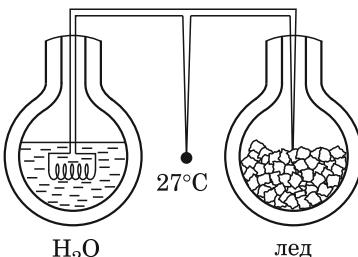


Рис. 94

дующим образом:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \infty, & r < d, \\ \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}, & r \geq d, \end{cases}$$

где A , B — константы потенциала, диаметр молекулы d связан с параметром b в уравнении Ван-дер-Ваальса соотношением $b = \frac{2\pi}{3} N_A d^3$, (N_A — число Авогадро). Оценить величину критической температуры аргона, полагая

$$\frac{A}{kd^{12}} - \frac{B}{kd^6} = 500 \text{ K},$$

где k — постоянная Больцмана. (2013 г.)

Указание: Суммирование по частицам можно заменить интегрированием.

12.102* В опыте по демонстрации окологранических состояний нагревается запаянная ампула, заполненная жидким эфиром и его парами. В начальном состоянии при температуре T_0 жидкость занимает 60% объема ампулы, а ее плотность $\rho_{ж}(T_0) = 0,42 \text{ г/см}^3$. При нагревании жидкость заполняет всю ампулу, а ее плотность при этом уменьшается до $\rho_{ж}(T') = 0,28 \text{ г/см}^3$. Найти величину T_0 , если критическая температура эфира $T_{kp} = 467 \text{ K}$, критическая плотность $\rho_{kp} = 0,265 \text{ г/см}^3$. Считать, что и в жидком, и в газообразном состояниях эфир описывается моделью Ван-дер-Ваальса. (2019 г.)

Указание: Использовать приведенное уравнение Ван-дер-Ваальса.

12.103. В воздухе главной физической аудитории МФТИ при температуре $t_0 = 18^\circ\text{C}$ и относительной влажности $\varphi = 90\%$ содержится в виде паров $m = 7 \text{ кг}$ воды. Какова будет относительная влажность воздуха в этой аудитории при температуре $t = 30^\circ\text{C}$, если содержание паров воды в ней составляет $m = 10 \text{ кг}$. Удельную теплоту испарения воды считать постоянной и в этих условиях равной $\lambda = 2420 \text{ кДж/кг}$. (2013 г.)

12.104. В некоторый день прогноз Гидрометцентра предсказывает температуру воздуха 20°C и относительную влажность $\varphi = 60\%$. Оценить высоту нижней кромки облаков при этих условиях. В модели «Международная стандартная атмосфера» принято, что в тропосфере ($H \leq 11 \text{ км}$) температура воздуха уменьшается с высотой по линейному закону с коэффициентом $\alpha = 6,49 \text{ К/км}$. Давление насыщенных водяных паров при $T_0 = 293 \text{ K}$ составляет $P_{н.п.} = 2,34 \cdot 10^3 \text{ Па}$? Удельную теплоту испарения воды считать не зависящей от температуры и равной $\lambda = 2,54 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$. (2017 г.)

Указание: Использовать условие $aH \ll T_0$.

12.105. Одноатомный идеальный газ находится под поршнем в адиабатически изолированном цилиндре. Масса груза на поршне, определяющая давление газа, внезапно увеличилась вдвое. На сколько возросла энтропия, приходящаяся на одну молекулу газа, после установления нового равновесия? (1983 г.)

12.106. Определить максимальную работу, которую можно получить от двух находящихся в адиабатической оболочке сосудов с одинаковыми одноатомными идеальными газами. Начальные давления и числа частиц N в сосудах одинаковы, но у них разные объемы и температуры T_1 и T_2 . (2002 г.)

12.107. Одним из геологических процессов является просачивание воды сквозь пористые породы из областей с высоким давлением $P = 1000$ атм в полости, находящиеся при атмосферном давлении P_0 . Оценить долю x испарившейся при этом воды, если начальная ее температура $t_0 = 90^\circ\text{C}$. Теплообменом с горными породами пренебречь, удельную теплоту парообразования λ принять равной 2260 Дж/г. (1986 г.)

12.108. В стальной оболочке находится вода при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$ и давлении $P = 1000$ атм. Оболочка внезапно теряет жесткость, и давление воды адиабатически быстро падает до 1 атм. Найти конечную температуру t_k воды. Теплоемкостью оболочки пренебречь. Плотность воды имеет максимум при температуре $t_m = 4^\circ\text{C}$, причем разность плотностей при 4°C и 0°C $\Delta\rho = 0,13 \text{ мг}/\text{см}^3$. (1989 г.)

12.109* Определить тремя разными методами удельную теплоемкость при постоянном объеме c_V для этилового спирта при температуре $T = 300$ К, используя: а) закон равномерного распределения энергии по степеням свободы; б) соотношение Майера; в) точное термодинамическое соотношение. Считать известными $c_P = 2,42 \text{ Дж}/(\text{г}\cdot\text{К})$ и плотность этилового спирта $\rho = 0,79 \text{ г}/\text{см}^3$, а также термодинамические коэффициенты: объемного расширения $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, изотермическую сжимаемость $\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = 7,6 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{Н}$. Сопоставить полученные результаты. (1966 г.)

12.110. Неон вытекает в вакуум из теплоизолированного сосуда через отверстие, размер которого мал по сравнению с длиной свободного пробега неона. Определить его температуру, когда в сосуде останется половина количества газа. Начальные его условия нормальные. Теплоемкостью стенок пренебречь. (1987 г.)

12.111. Современная полупроводниковая технология требует для изготовления полупроводниковых микросхем очень чистых поверхностей кристаллов. Какой должен быть создан вакуум в системе, чтобы можно было работать с атомно-чистыми поверхностями, т. е. когда за время изготовления микросхемы $t = 1$ ч на поверхности «нарастет» лишь моноатомный слой газа? Считать, что все молекулы газа, достигающие поверхности, прилипают к ней в виде отдельных атомов; $T = 300$ К. (2001 г.)

12.112. Одноатомный идеальный газ находится между двумя непроницаемыми стенками, причем дебройлевская длина волны молекул газа много больше расстояния между ними. Газ адиабатически сжимают, так что объем газа уменьшается вдвое. Найти конечную температуру, если начальная температура газа $T_0 = 300$ К. (1997 г.)

12.113. Во сколько раз отличаются средние свободные пробеги атома водорода в основном и возбужденном состояниях (главное квантовое число возбужденного состояния $n = 10$) в разреженном одноатомном газе при одинаковой концентрации? (1967 г.)

12.114. Для получения свободных молекул при низкой температуре широко применяется их охлаждение при адиабатическом истечении газа через небольшое отверстие в вакуум. Оценить предельную температуру струи молекулярного водорода $T_{\text{пред}}$, если газ первоначально находился при нормальных условиях. Диаметр отверстия $d = 0,3$ мм, сечение столкновения молекул водорода друг с другом $\sigma = 2,4 \cdot 10^{-15}$ см². Для оценки принять, что на расстоянии x от отверстия диаметр струи $d \approx x$, скорость струи считать постоянной. (2001 г.)

12.115. По распространению радиоактивных газов после ядерных взрывов известно, что благодаря турбулентности время перемещивания по всей земной атмосфере составляет около одного года. Во сколько раз быстрее происходит процесс турбулентного перемещивания в условиях земной атмосферы по сравнению с молекулярной диффузией? (1967 г.)

12.116. При наблюдении за поведением капли жидкости, несущей на себе единичный электрический заряд q , в камере, наполненной водородом, было обнаружено, что сила тяжести, действующая на каплю, может быть уравновешена электрическим полем с напряженностью $E = 10^4$ В/см. Наблюдение за каплей при включенном поле показало, что за время $\tau = 100$ с она передвигалась по сложной траектории и отошла от своего первоначального положения на расстояние $R = 10^{-2}$ см. Найти скорость установившегося падения капли при выключенном поле. Давление водорода в камере $P = 1$ атм, плотность $\rho = 0,09$ г/л. (1966 г.)

12.117. Оценить температуру T электронов, двигающихся под действием электрического поля напряженностью $E = 100$ В/см в воздухе при нормальных условиях. Концентрация электронов мала, сечение столкновения их с молекулами воздуха $\sigma = 10^{-15}$ см². (1989 г.)

12.118. В ультрафиолетовых лучах ($\lambda = 1000$ Å) производится фотографирование биомолекулы, находящейся в растворе. Оценить максимальное время экспозиции, при которой на фотографии еще может быть получено предельное разрешение. Температура раствора $T = 300$ К, подвижность молекулы $B = 10^4$ см/(с · дин). (1999 г.)

12.119. Зная, что средняя длина свободного пробега однозарядного иона аргона-40 в некотором газе равна $\Lambda = 10^{-5}$ см, оценить среднюю скорость дрейфа v иона в этом газе под действием однородного электрического поля $E = 300$ В/см. Температура газа комнатная. (1972 г.)

12.120. При прохождении быстрых заряженных частиц через камеру Вильсона, наполненную аргоном при давлении $P = 1$ атм и насыщенными парами воды, происходит образование ионов аргона, яв-

ляющихся центрами конденсации паров воды. Считая, что движение ионов обусловлено только диффузией, оценить ширину следа частиц, если конденсация наступает через $\tau = 0,01$ с после пролета частиц. Эффективное сечение рассеяния ионов аргона на атомах $\sigma = 10^{-15}$ см 2 . Температура газа $T = 300$ К. (1981 г.)

12.121. Оценить размер алюминиевой частицы, взвешенной в жидкости с плотностью $\rho_0 = 1$ г/см 3 и коэффициентом динамической вязкости $\eta = 1$ П, для которой скорость вязкого падения сравняется со скоростью теплового движения при комнатной температуре. Будут ли такие частицы выпадать в осадок в алюминиевой краске? (1968 г.)

12.122. Оценить максимальный размер водяной капли, падение которой в воздухе может быть еще описано законом Стокса. (2005 г.)

12.123. Какова наибольшая скорость u сферических частиц радиусом $r = 50$ мкм, выносимых топочным газом из дымовой трубы? Скорость газа на оси трубы $v = 30,5$ см/с, коэффициент динамической вязкости $\eta = 2,6 \cdot 10^{-5}$ Па·с, плотность газа $\rho_g = 7,2 \cdot 10^{-4}$ г/см 3 , плотность частиц $\rho_q = 1,2$ г/см 3 . Найти число Рейнольдса для движущихся частиц. (2008 г.)

12.124. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинаами $d = 1$ см подключен к батарее и заполнен азотом. Вблизи одной пластины создаются ионы азота N^+ , которые движутся к другой пластине и увлекают молекулы газа, что приводит к появлению разности давлений $\Delta P = 0,01$ мм рт. ст. при плотности тока ионов $j = 1$ мкА/см 2 . Определить подвижность μ ионов, которую измеряют обычно в см 2 /(В·с). (1984 г.)

12.125. Пучок атомов аргона ^{40}Ar из сосуда, находящегося при комнатной температуре, попадает в пары гелия ^3He , имеющие температуру $T = 0,4$ К и давление $P = 0,03$ мм рт. ст. Найти расстояние R , на котором атомы аргона отдаут $a = 0,9$ своей энергии. Длина свободного пробега атомов аргона-40 в парах гелия-3 при нормальных условиях $l = 1$ мкм. (1989 г.)

12.126. В сосуде с гелием (радиус атома гелия $r = 1,2$ Å, энергия ионизации $W_i = 24,5$ эВ) при давлении $P = 2$ мм рт. ст. находится проволочная катушка, состоящая из $N = 10$ витков радиусом $R = 5$ мм и длиной $l = 5$ см, по которой протекает переменный ток с частотой $v = 10$ МГц. Оценить, при какой силе тока \mathcal{J}_0 в катушке наступит пробой газа. Считать, что для пробоя электрон должен набрать на длине свободного пробега энергию, достаточную для ионизации атомов. (1984 г.)

12.127. Для защиты от газообразных радиоактивных продуктов распада ториевую руду засыпают песком. При этом радиоактивный газ торон $^{220}_{86}\text{Rn}$, выделяемый рудой, во время прохождения через песок в значительной мере распадается. Вычислить расстояние, на котором концентрация торона падает в 10^5 раз. Период полураспада то-

рона $T = 54,5$ с, коэффициент диффузии его в песке $D = 0,04$ см²/с. Диффузию можно считать одномерной. (1975 г.)

12.128. По теплоизолированной трубке, разность давлений на концах которой равна 100 атм, течет вода. Температура воды на входе $t_1 = 20^\circ\text{C}$. На сколько градусов повысится ее температура на выходе? (1995 г.)

12.129. Чтобы уменьшить поток тепла в криостат по механической подвеске, экспериментатор решил сделать тепловой замок в виде уточнения на высокотемпературном конце (рис. 95а). Однако затем ему посоветовали перевернуть подвес, т. е. уточнение сделать на низкотемпературном конце, где меньше коэффициент теплопроводности (рис. 95б). Показать, что на самом деле теплопритоки в обоих

случаях одинаковы. Зависимость коэффициента теплопроводности κ от температуры считать известной, длины и площади поперечного сечения тонкой и толстой частей соответственно равны l_1 , S_1 и l_2 , S_2 , температуры равны T_1 , T_2 . (1995 г.)

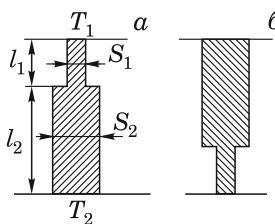


Рис. 95

12.130. Небольшая уединенная планета покрыта тонким слоем льда с температурой наружной поверхности $T_s = 60$ К. Тепло подводится к поверхности льда из недр планеты за счет теплопроводности льда. Считая теплоту плавления и коэффициент теплопроводности $\kappa = 2 \cdot 10^5$ эрг/(см · с · К) не зависящими от температуры и коэффициент серости льда $\epsilon = 0,75$, оценить максимально возможную толщину ледяной корки такой планеты. (1998 г.)

12.131. Внутри Земли вследствие радиоактивных превращений выделяется тепло со скоростью Q [эрг/(г · с)], в результате чего ниже глубины h от поверхности земные породы плавятся. Оценить величины Q и h , считая Землю однородным шаром. Средняя плотность Земли $\rho = 5,5$ г/см³, коэффициент теплопроводности пород $\kappa = 3,5 \cdot 10^5$ эрг/(см · с · К) не зависит от температуры, температура плавления пород $T_{\text{пл}} = 2000$ К при давлении $P = 1,2 \cdot 10^{12}$ дин/см². (2000 г.)

12.132. Внутри сферы радиусом R помещен шарик из плутония радиусом r_0 ($r_0 \ll R$). Вследствие радиоактивного распада Ри температура поверхности шарика постоянна и равна $T_0 = 300$ К. Температура сферы также поддерживается постоянной и равной $T_R = 290$ К. Коэффициент теплопроводности воздуха, заполняющего пространство между шариком и сферой, $\kappa = 2500$ эрг/(см · с · К). Считая поверхности шарика и сферы абсолютно черными, оценить величину радиуса шарика r_0 , при котором поток тепла от него за счет излучения будет равен потоку тепла за счет теплопроводности. (2000 г.)

12.133. Температура поверхности шарика из плутония вследствие радиоактивного распада Ри поддерживается постоянной при $T_0 = 350$ К. На большом расстоянии от шарика температура воздуха

$T_\infty = 300$ К, при $T = 300$ К коэффициент теплопроводности воздуха $\kappa = 2500$ эрг/(см·с·К). Считая поверхность шарика абсолютно черной, оценить минимальный радиус шарика r_0 , при котором поток тепла от шарика за счет излучения оказывается равным потоку тепла за счет теплопроводности. При решении учесть зависимость κ от температуры. (2000 г.)

12.134. На длинный сапфировый стержень радиусом $r = 1$ см, находящийся в космосе вдали от каких-либо тел, нанесена тонкая пленка толщиной $a = 0,2$ мм с удельным сопротивлением $\rho = 1$ мкОм·см, а затем слой диэлектрика толщиной $b = 0,2$ мм, его коэффициент теплопроводности $\kappa = 2 \cdot 10^3$ эрг/(с·см·К). По пленке пропускается ток плотностью $j = 100$ А/см². Считая диэлектрический слой абсолютно черным телом, оценить температуру внешней и внутренней поверхностей диэлектрической пленки. (1998 г.)

12.135. Тонкая проволока, охватывающая петлей бруск льда, под действием нагрузки способна пройти сквозь лед. Полагая, что скорость движения проволоки v определяется скоростью подвода тепла через проволоку от области над проволокой, где вода замерзает, к области под проволокой, где плавится лед, оценить величину скорости v . Теплопроводностью льда пренебречь. Температура льда 0°C; теплота плавления $q = 335$ Дж/г; плотность льда $\rho = 0,917$ г/см³. Диаметр проволоки $d = 0,1$ мм; коэффициент теплопроводности $\kappa = 130$ Вт/(м·К); давление P , создаваемое под проволокой, принять равным 10 атм. (1986 г.)

12.136. Оценить максимальное давление, при котором водяной пар может оставаться пересыщенным при температуре 100°C, находясь в сосуде с несмачиваемыми стенками. Принять, что минимальная устойчивая капля воды содержит 10^5 молекул, а коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 70$ дин/см. (1985 г.)

12.137. Переохлажденный водяной пар находится при давлении $P_0 = 1$ атм и температуре $t_0 = 99$ °C в сосуде с несмачиваемыми стенками. Каков минимальный размер капли, которая должна образоваться, чтобы произошла конденсация пара? Коэффициент поверхностного натяжения воды принять равным $\sigma = 70$ дин/см, удельная теплота испарения $\lambda = 2,3$ кДж/г. (1985 г.)

12.138. Под действием внешних звуковых волн в воде рождаются пузырьки из растворенного в ней воздуха радиусом $r = 10$ мкм с концентрацией $N = 10^6$ см⁻³. Найти скорость звука в воде с пузырьками, если в воде она равна $s_0 = 1500$ м/с. (2008 г.)

12.139. Небольшое облако, состоящее из водяных капель диаметром $d = 0,1$ мкм, постепенно сконденсировалось в одну каплю массой $M = 1$ г. Считая процесс адиабатическим, вычислить изменение энтропии и температуру капли. Температура облака $t = 27$ °C, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 70$ дин/см, а $d\sigma/dT = -0,15$ дин/(см·К). (1986 г.)

12.140. Растяжение нитевидного бездефектного кристалла Ni (вискера) приводит к образованию гладкой поверхности разрыва при

натяжении $T = 3 \cdot 10^{10}$ дин/см². Оценить удельную поверхностную энергию U этого материала. (2005 г.)

12.141* Известно, что точка кипения неоднородной системы, помещенной в стакане (рис. 96) и состоящей из слоев несмешивающихся жидкостей — «четыреххлорки» CCl_4 и воды H_2O — равна $t = 66^\circ\text{C}$, что ниже точки кипения воды, равной $t_1 = 100^\circ\text{C}$, и чистой «четыреххлорки», равной $t_2 = 76,7^\circ\text{C}$. Эти данные относятся к нормальному давлению. Как изменится точка кипения такой системы, если внешнее давление возрастет на 10%? Теплота парообразования воды равна $\Lambda_1 = 40,5$ кДж/моль, «четыреххлорки» — $\Lambda_2 = 29$ кДж/моль. (1990 г.)

12.142. Определить теплоту испарения жидкого гелия при $T \rightarrow 0$, считая, что гелий подчиняется уравнению Ван-дер-Ваальса. Известно, что для гелия критическая температура $T_{\text{кр}} = 5,2$ К. (1991 г.)

12.143. В 1911 г. Г. Камерлинг-Оннес при измерении сопротивления ртути, охлаждаемой жидким гелием, обнаружил, что при откачке паров гелия из криостата сопротивление ртути исчезает, и так было открыто явление сверхпроводимости. Вычислить, до какого давления надо было откачивать пары гелия, если температура кипения Не при давлении 1 атм $T_{\text{кип}} = 4,22$ К, молярная теплота испарения при этом давлении $\Lambda = 84$ Дж/моль, а критическая температура сверхпроводящего перехода ртути $T_c = 4,15$ К. (1997 г.)

12.144. Газообразный азот, находящийся при температуре $T_1 = 100$ К в объеме $V_1 = 1$ л при давлении $P_1 = 10$ атм, однократно адиабатически расширяется до давления $P_2 = 1$ атм. Какое максимальное количество жидкого азота (в см³) может быть получено при этом? Теплота испарения азота $\lambda = 160$ Дж/см³, температура кипения $T_2 = 77$ К. (1997 г.)

12.145. Кривая плавления изотопа ^3He при очень низких температурах имеет минимум и далее — отрицательный наклон $dP/dT < 0$. При увеличении внешнего давления в камере, содержащей жидкий и твердый ^3He , часть жидкости затвердевает с поглощением тепла, что используется иногда для получения еще более низких температур. Определить конечную температуру смеси и долю x затвердевшего ^3He при адиабатическом увеличении давления на $\Delta P = 1$ атм. Начальная температура $T_0 = 0,04$ К, давление $P_0 = 33$ атм. Разность молярных объемов жидкой и твердой фаз $V_{\text{ж}} - V_{\text{т}} = 1,31$ см³/моль можно считать постоянной. Теплоемкость жидкого ^3He в нужном диапазоне линейно растет с температурой $C_{\text{ж}} = 4,6RT$. Энтропия твердого ^3He обусловлена лишь наличием спина 1/2 у ядра ^3He и равна постоянной величине $R \ln 2$. Теплоемкостью стенок и возможным тепловыделением при сдавливании пренебречь. Считать, что в начальный момент в камере находится только жидкий ^3He . (1975 г.)

12.146. При конечной температуре в результате флуктуаций могут самопроизвольно возникнуть колебания математического маятника

ника. Каково при этом изменение энтропии маятника (температура поддерживается неизменной)? (1999 г.)

12.147. За какое время электрон притягивается к бесконечной пластины из металла? Вначале он покоялся на расстоянии $a = 1$ мм. Потерями энергии из-за токов проводимости в металле пренебречь. (1987 г.)

12.148. Найти, какую максимальную разность потенциалов можно поддерживать между проводами бесконечной двухпроводной линии, если напряженность пробоя воздуха $E = 30$ кВ/см, диаметр проводов $d = 1$ см и расстояние между центрами проводов $L = 5$ м. (1977 г.)

12.149. На высоте $H = 1$ см над плоскостью горизонтально лежащего металлического листа расположен равномерно заряженный диск радиусом $R = 1$ см с полным зарядом $Q = 10^{-9}$ Кл. Плоскость диска параллельна плоскости листа. Найти плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на поверхности листа непосредственно под центром диска. (1982 г.)

12.150. Для измерения напряженности электрического поля у поверхности Земли используют две проводящие пластины, расположенные горизонтально с небольшим зазором между ними (рис. 97). Верхняя пластина заzemлена и вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через край пластины, делая $n = 1200$ об/мин и периодически закрывая нижнюю пластину. При этом перезарядка нижней пластины вызывает падение напряжения на сопротивлении $R = 10^7$ Ом, соединяющем нижнюю пластину с Землей. Найти среднее по модулю значение V , если напряженность электрического поля у поверхности Земли $E = 1,5$ В/см. Считать, что нижняя пластина успевает полностью перезарядиться за один цикл вращения. Площадь пластины $S = 600$ см 2 . (1978 г.)

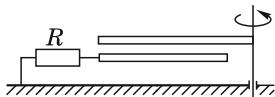


Рис. 97

12.151. В танталовых электролитических конденсаторах роль одной из обкладок играет пористый tantal, поверхность которого можно представить как совокупность спеченных шариков с суммарной площадью $S = 1$ м 2 (в объеме 1 см 3). Для получения диэлектрического слоя всю поверхность окисляют, а поры заполняют проводящим диоксидом марганца, который играет роль второй обкладки. Толщина окисла $d = 0,1$ мкм, $\epsilon = 27$. Какого размера L должен быть такой конденсатор в форме куба, чтобы его емкость равнялась 1 Ф? Оценить также радиус шариков. (2008 г.)

12.152. В вакууме расположен шар радиусом $R = 2$ см с температурой $T = 450$ К. На расстоянии $r = 4$ см от центра шара находится практически покоящийся атом цезия в основном состоянии. Найти среднее значение и направление силы, действующей на атом вследствие его поляризации электрическим полем теплового излучения. Поляризуемость атома $\alpha = 7,5 \cdot 10^{-22}$ см 3 . Эффектом радиационного давления пренебречь, силу тяжести не учитывать. (2018 г.)

12.153. Студент на лекции по электричеству в Главной физической аудитории обратил внимание на то, что за время около 20 мин угол отклонения лепестка электроскопа стал таким, как при уменьшении заряда шара электроскопа два раза. Считая, что уменьшение заряда шара электроскопа происходит по воздуху, оценить удельное сопротивление воздуха. (2016 г.)

12.154* Бытовой аэрозольный антистатик снимает статический заряд с одежды за счет увеличения напряженности электрического поля у поверхности распыляемых капелек, как бы уменьшая пробивное напряжение воздуха. Оценить напряженность пробоя воздуха, содержащего большое количество мелких взвешенных капелек воды, если пробой в сухом воздухе происходит при напряженности поля $E_{\text{пр}} = 30 \text{ кВ/см}$, а статическая диэлектрическая проницаемость воды $\epsilon = 81$. Для радиуса капелек r и их концентрации n выполняется условие $nr^3 \ll 1$. (2009 г.)

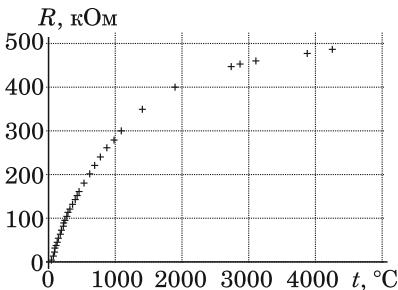


Рис. 98

чением времени (см. рис. 98). Найти из этой зависимости сопротивление утечки r конденсатора и его емкость C .

Указание. В режиме омметра измеряется падение напряжения U_x на неизвестном сопротивлении R_x при фиксированном токе I_0 . На дисплей прибора выводится значение $R_x = U_x/I_0$. (2016 г.)

12.156. Длинный постоянный магнит в виде бруска насажен на ось, проходящую через центр тяжести перпендикулярно грани $a \times b = 24 \times 8 \text{ мм}^2$. При вертикальном положении оси период малых крутильных горизонтальных колебаний такого магнита $T_\Gamma = 1,18 \text{ с}$, а при горизонтальном положении оси минимальный период крутильных колебаний в вертикальной плоскости $T_\text{в} = 0,62 \text{ с}$. Масса магнита $m = 9 \text{ г}$, магнитный момент (вдоль длинной оси бруска) $\mathfrak{M} = 903 \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$. Найти величину магнитного поля Земли и угол, который оно образует с горизонтом (магнитное наклонение). Опыт проводился в Долгопрудном (56° с. ш.). (2009 г.)

12.157. Маленькая стрелка компаса с остаточным магнитным полем $B_0 = 1 \text{ Тл}$ представляет собой тонкий длинный цилиндр длиной $l = 1 \text{ мм}$. Компас помещается в вертикальное однородное магнитное поле \mathbf{B} , перпендикулярное вектору магнитного момента \mathfrak{M} . Оценить, в каких полях B можно наблюдать регулярную прецессию стрелки. Считать, что регулярная прецессия наблюдается, если момент

импульса L_Ω , связанный с прецессией, значительно меньше величины механического момента импульса стрелки L , обусловленного намагниченностью, т. е. $L_\Omega \ll L$ (гироскопическое приближение). При каких размерах магнитной стрелки можно наблюдать ее прецессию в поле $B_3 = 0,1$ Гс (порядка поля Земли)? Плотность материала магнита $\rho = 8$ г/см³. Считать магнетизм стрелки чисто спиновым. (2012 г.)

12.158. На замкнутый контур, в котором может циркулировать ферромагнитная жидкость (ФМЖ), надет постоянный магнит (рис. 99). Вблизи магнита создан перепад температур, так что с одной его стороны температура ниже точки Кюри (температуры фазового перехода между ферромагнитным и парамагнитными состояниями), а с другой — выше. Область перехода соответствует центру магнита, где напряженность поля $H = 100$ Э. Пренебрегая потерями на вязкость, оценить установившуюся скорость течения v , если работа турбины в расчете на единицу объема жидкости равна $A = \beta v$, где $\beta = 10^6$ г/(см²·с). Восприимчивость ФМЖ в ферромагнитном состоянии считать постоянной: $\chi = 200$ (ед. СГС). (2019 г.)

12.159. Ишигока, Шимицу, Ниномая и Кога в 1997 г. предложили способ резонансного возбуждения СП-соленоида (рис. 100). В эксперименте $L = 23,3$ мГн, $C = 290$ мкФ, добротность LC -контура $Q = 1000$. Во сколько раз ток через соленоид будет превышать ток источника через $t = 5$ мин после включения источника переменного напряжения, обеспечивающего ток $\mathcal{I}_0 = 0,1$ А? (СПК — сверхпроводящий ключ, переводящий соленоид в короткозамкнутый режим работы.) (2010 г.)

12.160. В рамках американской программы СОИ рассматривалась космическая пушка, представляющая собой короткий и широкий соленоид, в центр которого помещают небольшие сверхпроводящие шарики, выталкиваемые полем вдоль его оси. Оценить максимальное ускорение шарика плотностью $\rho = 1$ г/см³ в процессе разгона, полагая, что в центре соленоида длиной $L = 1$ см и диаметром $2R = 1$ м создано и поддерживается постоянное поле $H_0 = 10^4$ Э. (2015 г.)

12.161. В результате удара молнии на расстоянии $l = 1$ м от центра золотого проволочного кольца диаметром $D = 20$ см и толщиной $\delta < 0,5$ мм кольцо нагрелось на $\Delta T_k = 20$ К. Найти минимальный перенесенный молнией заряд. Считать, что зависимость тока молнии от времени t имеет вид $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0(e^{-t/T} - e^{-t/\tau})$ с па-

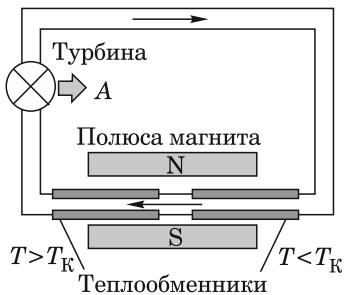


Рис. 99



Рис. 100

раметрами $\tau = 8 \cdot 10^{-6}$ с и $T = 10^4$ с. Теплоемкость единицы объема золота $c_V = 2600$ кДж/(К·м³), его удельное сопротивление $\rho = 2 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. (2017 г.)

12.162. Для плавки чистых металлов в вакууме используются индукционные печи. Какой должна быть амплитуда B_0 индукции переменного магнитного поля частотой $f = 400$ Гц для того, чтобы за время $t = 100$ с нагреть до температуры плавления тонкое золотое кольцо диаметром $D = 20$ мм, высотой $h = 3$ мм и толщиной $d = 1$ мм? Считать, что кольцо лежит в хорошо теплоизолирующей диэлектрической форме с малой теплоемкостью. Самоиндукцией пренебречь. Начальная температура $T_0 = 300$ К, температура плавления $T_{\text{пл}} = 1300$ К. При температурах выше комнатной теплоемкость единицы объема золота можно считать постоянной: $c_V = 2600$ кДж/(К·м³), а его удельное сопротивление — пропорциональным температуре: $\rho = \rho_0 T/T_0$, где $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. (2017 г.)

12.163. Плоская электромагнитная волна нормально падает на тонкую проводящую пленку. Пленка изготовлена из графена, поверхностная проводимость которого $\sigma = e^2/(4\hbar)$. Определить коэффициенты отражения, прохождения и поглощения волны (по интенсивности). Толщина пленки много меньше длины волны. (2018 г.)

Указание. Поверхностная проводимость есть произведение удельной проводимости на толщину пленки.

12.164. Генератором с частотой $f = 10$ ГГц возбуждают стационарные колебания в прямоугольном резонаторе с размерами $a \times b \times l$, где $a = 23$ мм, $b = 10$ мм. Медленное увеличение мощности генератора до значения $P = 28$ кВт приводит к пробою воздуха в двух точках, расположенных на одинаковых расстояниях от торцов. Определить добротность резонатора, считая, что пробой воздуха наступает при напряженности $E_{\text{пр}} = 30$ кВ/см. (2013 г.)

12.165. В отражательном кластроне — генераторе высокочастотных колебаний — электроны, ускоряясь под действием напряжения

$V_0 = 500$ В, пролетают через сетчатые пластины конденсатора C , который является частью квазистационарного СВЧ-резонатора, и попадают в область постоянного тормозящего поля, которое возвращает их обратно (см. рис. 101) На обкладках конденсатора C резонатора, настроенного на частоту $f = 1$ ГГц, имеется переменное поле $E = E_0 \sin(2\pi ft)$, которое группирует из электронного пучка сгустки с центром, соответствующим фазе СВЧ-поля $\varphi = \pi$ (электроны, проходящие в тормозящее поле с фазой $\varphi > \pi$ замедляются, а «отстающие» $\varphi < \pi$ — ускоряются). При каких напряженностях возвращающего поля E_1 электронные сгустки будут, тормозясь, отдавать в резонатор максимальную энергию? (2011 г.)

12.166. В циклотроне ионы закручиваются магнитным полем и получают ускорение в цепи между двумя скользящими электродами — дуантами (рис. 102). Для резонансного ускорения частота обращения иона и частота ускоряющего поля, которая поддерживается постоянной, должны совпадать. Однако по мере ускорения этот синхронизм начинает нарушаться. До какой максимальной энергии ускорятся в циклотроне протоны, если инжекция частиц произошла при максимальном поле между дуантами? (2011 г.)

12.167. В микротроне — ускорителе электронов — частицы движутся в постоянном и однородном магнитном поле по раскручивающимся траекториям, в общей точке которых расположен ускоряющий

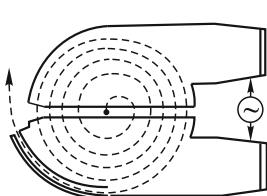


Рис. 102

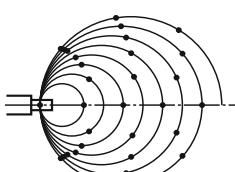


Рис. 103

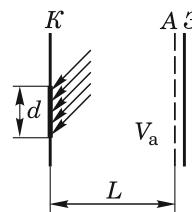


Рис. 104

резонатор (рис. 103). Частота ускоряющего поля постоянна и равна $f_0 = 3 \text{ ГГц}$. Чему должен быть равен минимальный прирост энергии при каждом проходе ускоряющего резонатора, чтобы все время сохранялся синхронизм ускорения электронов, т. е. электроны проходят ускоряющий резонатор в одной и той же фазе? Чему равно при этом расстояние между орбитами вдоль их общего диаметра? (2011 г.)

12.168. Оценить силу, действующую на атом, находящийся на расстоянии $l = 200 \text{ \AA}$ от поверхности острия металлической иглы с радиусом закругления $R = 100 \text{ \AA}$. Потенциал на игле равен $V = 10 \text{ кВ}$. Поляризуемость атома α — порядка его объема. (1973 г.)

12.169. На фотокатод K электронно-оптического преобразователя (рис. 104), имеющего работу выхода $A = 2 \text{ эВ}$, падает излучение аргонового лазера $\lambda \approx 0,5 \text{ мкм}$. Диаметр светового пятна на фотокатоде $d = 0,1 \text{ мм}$. На ускоряющий плоский анод A преобразователя, расположенный на расстоянии $L = 30 \text{ мм}$, подано напряжение $V_a = 4 \text{ кВ}$. Определить диаметр пятна на экране \mathcal{E} , расположенным вблизи анода. (1973 г.)

12.170. Действие времязаполетного масс-спектрометра основано на разделении ионов по времени пролета ими определенного расстояния. Но из-за разброса Δv начальных скоростей даже одинаковые ионы должны приходить к приемнику с некоторым разбросом Δt по времени. Для устранения этого недостатка используется электростатический отражатель, на выхо-

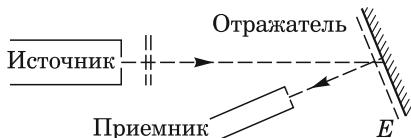


Рис. 105

де которого указанный разброс компенсируется (рис. 105). Оценить напряженность E поля отражателя, необходимую для точной регистрации однозарядных ионов, прошедших путь $L \approx 10$ см с начальной энергией $\mathcal{E} \approx 1$ кэВ. Угол отражения считать малым. (1984 г.)

12.171. Поверхностное натяжение сферического мыльного пузыря $\sigma = 50$ дин/см, радиус $r = 1$ см, наружное атмосферное давление $P = 10^6$ дин/см². Какой заряд Q надо сообщить пузырю, чтобы его радиус увеличился вдвое? При каких размерах пузыря поверхностное натяжение практически не влияет на результат и при каких оно является определяющим? (1969 г.)

12.172. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых квадратных пластин, расположенных в вакууме вертикально на расстоянии $d = 1$ мм друг от друга. Одна из пластин закреплена, а другая может двигаться без трения по гладким вертикальным направляющим. При какой начальной разности потенциалов V между пластинами подвижная пластина не упадет вниз? Масса подвижной пластины $M = 1$ г, сторона квадрата $a = 10$ см. (1986 г.)

12.173. В цилиндрическом пропорциональном счетчике пучок частиц образует объемную ионизацию. Оценить время τ собирания ионов в таком счетчике, заполненном аргоном при нормальном давлении. Радиус катода $R = 1$ см, радиус анода $r = 0,02$ см, разность потенциалов между анодом и катодом $V = 2500$ В, подвижность положительных ионов аргона $\mu = 1,4$ см²/(В·с). (1974 г.)

12.174. В пространстве между пластинами плоского конденсатора, заполненного газом и подсоединенном к батарее, образуется пара ионов с зарядами $\pm e$ (e — заряд электрона). Какой заряд протечет в цепи в результате движения ионов? Дать график зависимости тока от времени. Считать подвижность ионов в газе постоянной. (1983 г.)

12.175. Основная трудность в методе коллективного ускорения тяжелых положительно заряженных частиц заключается в создании плотных электронных сгустков. Рассмотреть сферически симметричный сгусток радиусом $r_0 = 1$ см, содержащий $N = 10^{13}$ электронов; в начальный момент электроны неподвижны. Под действием сил кулоновского отталкивания сгусток начинает расширяться. Найти кинетическую энергию T и скорость внешних электронов v при увеличении радиуса сгустка в два раза. Оценить время расширения сгустка. (1977 г.)

12.176. Электронный пучок линейного ускорителя представляет собой последовательность сгустков, следующих друг за другом с периодом $T = 3 \cdot 10^{-10}$ с. Для измерения электрического тока ускоренных частиц используется цилиндр Фарадея (рис. 106), полностью поглощающий пучок. Цилиндр Фарадея заземлен через сопротивление $R = 100$ Ом, сигнал с которого подается через кабель на вход регистрирующего прибора с большим входным сопротивлением ($R_{\text{вх}} \gg R$), который шунтируется емкостью кабеля $C = 200$ пФ (эквивалентная схема измерительной цепи дана на рисунке). Опре-

делить число электронов в сгустке, если показание регистрирующего прибора $U = 1$ В. При решении воспользоваться тем, что регистрирующий прибор является инерционным ($R_{\text{вх}}C \gg RC \gg T$). (1974 г.)

12.177. В мысленном опыте, предложенном А. Д. Сахаровым, сверхсильные магнитные поля получались взрывным сжатием отрезка проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создавалось начальное магнитное поле B_0 . Определить магнитное поле B в момент максимального сжатия трубы. Начальный внутренний радиус трубы $R = 5$ см, а в момент максимального сжатия $r = 0,5$ см; на-

Цилиндр Фарадея

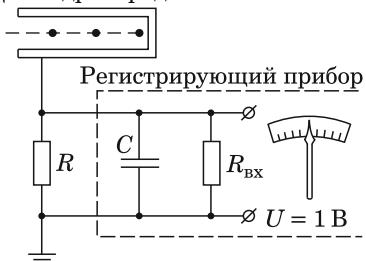


Рис. 106

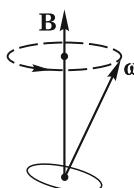


Рис. 107

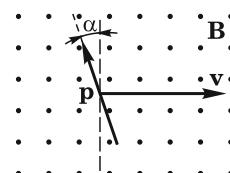


Рис. 108

чальное магнитное поле $B_0 = 50000$ Гс. Оболочку, окружающую магнитное поле, считать идеально проводящей. Определить также давление P , необходимое для получения такого сжатия. (1969 г.)

12.178. Сверхсильные магнитные поля получаются взрывным сжатием отрезка проводящей трубы, в которой заключено начальное магнитное поле. Найти индукции полей до и после взрыва, если известно, что радиус трубы уменьшился в 10 раз при давлении от взрыва в 10^6 атм. (1971 г.)

12.179. Тонкое металлическое кольцо быстро вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его диаметр и перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией $B = 100$ Гс. Пренебрегая трением в оси, найти время τ , за которое угловая скорость вращения уменьшается в e раз. Плотность материала кольца $\rho = 9$ г/см³, проводимость $\sigma = 5 \cdot 10^5$ Ом⁻¹ · см¹. Потери энергии за один оборот считать малыми. (1980 г.)

12.180. Однородно заряженное зарядом q непроводящее тонкое кольцо массой m быстро вращается вокруг своей оси во внешнем однородном магнитном поле B (рис. 107). Найти угловую скорость прецессии Ω . (1971 г.)

12.181. Электрический диполь движется в однородном магнитном поле \mathbf{B} со скоростью \mathbf{v} , перпендикулярной \mathbf{B} . Дипольный момент \mathbf{p} составляет малый угол с направлением $[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ (рис. 108). Найти угловую частоту малых колебаний диполя ω_0 , считая известными его момент инерции I_0 , скорость \mathbf{v} , дипольный момент \mathbf{p} и магнитную индукцию \mathbf{B} . (1971 г.)

12.182. Тонкостенный металлический стакан радиусом $R_1 = 1$ см, длиной $l = 10$ см и массой $M = 1$ г и расположенный внутри такой же длины и массы цилиндр радиусом $R_2 = 1,5$ см подвешены в вакууме на тонкой нити в направленном вдоль их осей магнитном поле $B = 10^4$ Гс (рис. 109). Цилиндр и стакан заряжены разноименными и одинаковыми по величине зарядами до разности потенциалов $V = 3000$ В. В какой-то момент внутренний цилиндр касается дна наружного стакана, и разность потенциалов падает до нуля. В результате система (цилиндр-стакан) начинает поворачиваться. На какой угол повернется система за 1 ч? (1997 г.)

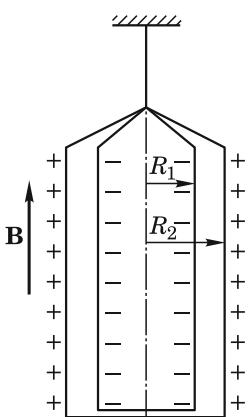


Рис. 109

12.183. По двум горизонтальным параллельным проводам, находящимся на расстоянии $2a = 1$ см друг от друга, текут одинаковые по величине, но противоположно направленные токи силой $\mathcal{I} = 10^3$ А. Точно посередине между проводами находится шарик с диамагнитной восприимчивостью $\kappa = -10^{-5}$ и плотностью $\rho = 2,0$ г/см³. Найти период T малых колебаний шарика в горизонтальной плоскости. Считать, что вертикальное движение шарика отсутствует, трения при его движении нет. (1986 г.)

12.184*. Чтобы заставить левитировать каплю воды в атмосфере кислорода, эту систему помещали в неоднородное магнитное поле с градиентом $\frac{1}{2} \frac{dB^2}{dz} = B \frac{dB}{dz} = 4,2 \cdot 10^8$ Гс²/см (Я. Икезоэ, Н. Хирота, Дж. Накагава и К. Китазава; 1998 г.). Найти, при каком давлении P_x кислорода возможна левитация. Кислород является парамагнетиком с магнитной восприимчивостью $\kappa(O_2) = 1,54 \cdot 10^{-7}$ при давлении $P_0 = 1$ атм и температуре 20°C, а вода — диамагнетиком с восприимчивостью $\kappa(H_2O) = -0,72 \cdot 10^{-6}$. Плотность кислорода при этих условиях $\rho(O_2) = 1,43 \cdot 10^{-3}$ г/см³. Температуру считать постоянной, размагничивающие поля (влияние формы) не учитывать. (2004 г.)

12.185. На оси кругового витка радиусом $r = 1$ см на расстоянии $L = 10$ см от него в некоторый момент времени оказывается точечный магнитный диполь, параллельный оси витка и движущийся вдоль нее со скоростью $v = 1$ км/с. Оценить силу тока \mathcal{I} в витке, если его сопротивление $R = 0,001$ Ом, а величина магнитного момента диполя $\mu = 0,1$ эрг/Гс. (1986 г.)

12.186. Найти относительное изменение частоты регулярной прессии намагниченного тяжелого гироскопа в поле тяжести, если приложить магнитное поле с индукцией $B = 1$ кГс, направленное вертикально вверх. Намагниченность I считать постоянной, однородной и направленной по оси гироскопа, причем величина $4\pi I = 2$ кГс, плотность материала гироскопа $\rho = 8$ г/см³, а расстояние от точки опоры до центра масс гироскопа $l = 2$ см. (1980 г.)

12.187. Некоторый ферромагнитный материал имеет остаточную намагниченность $I_0 = 500 \text{ Гс}$, коэрцитивную силу $H_0 = 500 \text{ Э}$, причем кривая намагниченности $I(H)$ представляет собой четверть окружности (рис. 110). Из этого материала изготовлен постоянный магнит, представляющий собой тор квадратного сечения с поперечным разрезом. Внутренний радиус тора $r_1 = 1,5 \text{ см}$, внешний — $r_2 = 2,5 \text{ см}$, ширина разреза $d = 5 \text{ мм}$. Определить величину магнитного поля в зазоре. Рассеянием магнитного поля пренебречь. (1972 г.)

12.188. В торцевых плоскостях на оси длинного соленоида помещают одинаковые магнитики объемом $V = 1 \text{ см}^3$ и намагниченностью $4\pi I = 12,5 \text{ кГс}$, повернутые друг к другу разноименными полюсами. Магнитики отпускают, и они затем слипаются в центре соленоида, замкнутого на сопротивление $R = 1 \text{ Ом}$. Какой заряд Q протечет при этом в цепи соленоида, витки которого намотаны с плотностью $n = 10^3 \text{ см}^{-1}$? (1990 г.)

12.189. Определить период малых крутильных колебаний магнитного бруска ($S = 1 \text{ мм}^2$, $l = 10 \text{ см}$), подвешенного горизонтально за середину на неупругом подвесе в магнитном поле Земли (горизонтальная составляющая $B_0 = 0,2 \text{ Гс}$). Плотность стали $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$, остаточная индукция $B = 10 \text{ кГс}$. (1968 г.)

12.190. Компас располагают под проводом, по которому течет постоянный ток, на расстоянии $R = 10 \text{ см}$ от оси провода. Найти ток, при котором стрелка приподнимется над своей опорой. Остаточная индукция стали стрелки равна индукции насыщения $B = 20 \text{ кГс}$. Плотность стали $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$. (1968 г.)

12.191. Одним из методов обнаружения гипотетического элементарного магнитного заряда — монополя Дирака, величина которого в гауссовой системе единиц $g_0 = hc/(2e)$, может быть регистрация электрического тока, возникающего в сверхпроводящем кольце после прохождения сквозь него монополя. Оценить величину тока в кольце индуктивностью $L = 0,1 \text{ мкГн}$.

Указание. Гипотеза П. Дирака приводит к симметризации уравнений Максвелла, так что одно из них преобразуется к виду

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathcal{J}_m,$$

где \mathcal{E} — ЭДС, возникающая в контуре, Φ — поток магнитной индукции, \mathcal{J}_m — магнитный ток монополя, или магнитный заряд, протекающий в единицу времени через площадку, ограниченную контуром. (1983 г.)

12.192. Монополь Дирака (элементарная частица массой M , обладающая магнитным зарядом b) находится строго посередине зазора между пластинами незаряженного разомкнутого плоского конденсатора, изготовленными из идеального сверхпроводника. Оценить

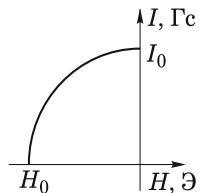


Рис. 110

частоту малых колебаний монополя в направлении нормали к плоскостям. При каком расстоянии между пластинами d эти колебания будут затухающими? Все размеры конденсатора много больше расстояния между пластинами. (1993 г.)

12.193. Над сверхпроводящей плоскостью параллельно ей на расстоянии $h = 40$ см находится сверхпроводящий длинный провод диаметром $d = 2$ см, по которому течет ток $\mathcal{I} = 2$ А. Провод находится под напряжением $V = 1$ кВ относительно плоскости. Вычислить силу взаимодействия единицы длины провода с плоскостью. Силой тяжести пренебречь. (2007 г.)

12.194. Точечный магнитный диполь с магнитным моментом $M = 1000 \text{ Гс} \cdot \text{см}^3$ висит над поверхностью сверхпроводника I рода (температура $T \approx 0$ К), у которого критическое магнитное поле $H_c = 500$ Э. Каков максимально допустимый вес диполя? Ось диполя перпендикулярна плоскости сверхпроводника. (1999 г.)

12.195. Частичка пыли радиусом $r = 10^{-5}$ см взвешена в воздухе при комнатной температуре. Оценить магнитный момент частички (в ядерных магнетонах Бора), который возникает в результате «броуновского» вращательного движения. Заряд частички $q = 10e$, плотность $\rho = 2 \text{ г}/\text{см}^3$. (2004 г.)

12.196. Сепаратор частиц устроен следующим образом: на вход цилиндрического конденсатора с внешним и внутренним радиусами

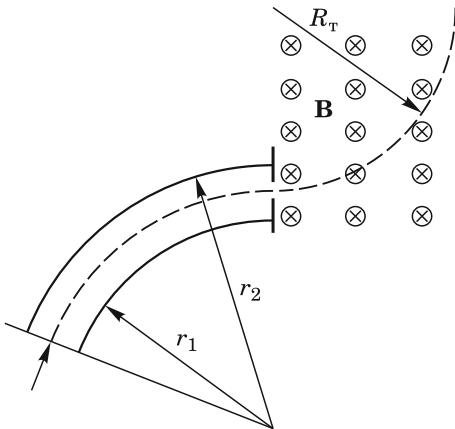


Рис. 111

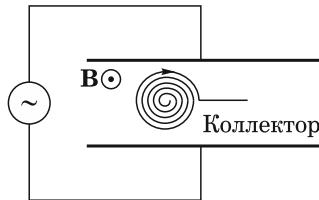


Рис. 112

r_2 и r_1 попадают ионы разных масс и, двигаясь по окружности, попадают затем в магнитное поле B (рис. 111). Каково отношение M/q массы иона к его заряду, если он прошел этот сепаратор при напряжении на конденсаторе V , а радиус его траектории в магнитном поле равен R_t ? (1996 г.)

12.197. В омегатроне (приборе для исследования газового состава в каком-либо объеме) ион остаточного газа раскручивается по спи-

рали (рис. 112) в скрещенных переменном электрическом поле с амплитудой $E = 1$ В/см и постоянном магнитном поле $B = 3$ кГс. Найти частоту, при которой ионы N_2^+ будут достигать коллектора. При этой частоте радиус спиралей будет возрастать до тех пор, пока ион не достигнет коллектора на радиусе $R = 1$ см. Если частоту немногого изменить, то ион будет некоторое время раскручиваться, а потом начнет скручиваться обратно к источнику. Оценить, на сколько надо изменить частоту, чтобы ток на коллектор прекратился. (1968 г.)

12.198. По цилиндрическому проводнику протекает ток, плотность которого j однородна по сечениюю. Концентрация электронов проводимости n . Пренебрегая сопротивлением и учитывая поле Холла, определить величину и направление вектора Пойнтинга в проводнике в зависимости от расстояния r до оси. Величины $\epsilon = \mu = 1$. (1991 г.)

12.199. Одна из металлических пластин плоского конденсатора соединена с жесткой стенкой через пружину, а к другой (неподвижной) подводится переменное напряжение $V_\sim = V_0 \cos(\omega t/2)$, где $\omega = 100$ с⁻¹ — резонансная частота механических колебаний пластины добротностью $Q = 100$ (рис. 113). Найти амплитуду x_0 колебаний пластины конденсатора. Расстояние между пластинами $d = 1$ мм, площадь пластины $S = 5$ см², ее масса $M = 1$ г, а $V_0 = 100$ В. (1997 г.)

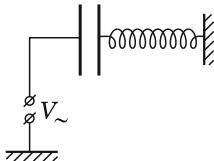


Рис. 113

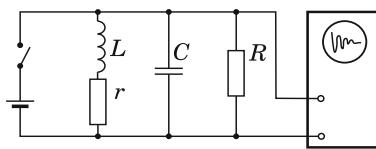


Рис. 114

12.200. При измерении добротности Q резонансного контура из параллельно включенных катушки с индуктивностью $L = 0,1$ Гн и сопротивлением $r = 30$ Ом и конденсатора с емкостью $C = 30$ пФ поступили следующим образом. Контур подключили к клеммам осциллографа и, включая и выключая ЭДС постоянного тока, наблюдали затухающие электрические колебания в контуре (рис. 114). Сравнить добротности контура при разомкнутой цепи батареи в случае, когда входное сопротивление R осциллографа очень велико и когда оно конечно и равно 100 кОм. (1977 г.)

12.201. Конденсатор, заполненный сегнетоэлектриком, подключен к розетке переменного тока с частотой $f = 50$ Гц и напряжением $U = 220$ В. Через конденсатор с сопротивлением утечки $R = 10$ кОм течет ток $\mathcal{I} = 1$ А. Зависимость электрического смещения D от напряженности E электрического поля в сегнетоэлектрике, объем которого $V = 100$ см³, представляет собой петлю гистерезиса с площадью $S = 12,5$ мДж/см³. Найти активное сопротивление r_C и емкость C конденсатора. (1988 г.)

12.202. Дроссель подключен к розетке сети переменного тока с частотой $f = 50$ Гц и напряжением $U = 220$ В. Через обмотку с омическим сопротивлением $r = 1$ Ом течет ток $\mathcal{I} = 1$ А. Мощность, выделяемая токами Фуко в пластинах сердечника, равна $N = 10$ Вт. Зависимость индукции B от напряженности H магнитного поля в ферромагнетике сердечника, объем которого $V = 100$ см³, представляет собой петлю гистерезиса с площадью $S = 25$ кГс·Э. Найти

активное сопротивление R и индуктивность L дросселя. Считать, что сердечник набран из тонких пластин и поле внутри сердечника однородное. (1988 г.)

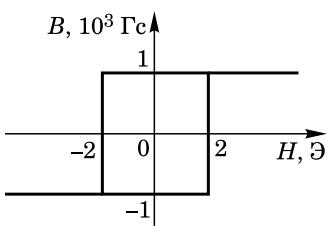


Рис. 115

12.203. Сердечник трансформатора изготовлен из пермаллоя (магнитомягкий сплав Ni с Fe, средняя атомная масса $A \approx 57$), его гистерезисная кривая, показанная на рис. 115, хорошо аппроксимируется прямоугольной петлей. Плотность пермаллоя $\rho = 8$ г/см³, обмотка создает в сердечнике поле $H = H_0 \sin(2\pi ft)$

с амплитудой $H_0 = 3$ Э, частота $f = 50$ Гц. Считая теплоемкость материала классической, оценить скорость нагрева сердечника, пренебрегая тепловыми потерями. (1999 г.)

12.204. Тонкая серебряная трубка с толщиной стенки $h = 0,1$ мм помещена в однородное высокочастотное ($f = 1,5$ ГГц) поле СВЧ-печки с амплитудой $B_0 = 10$ Гс. Ось трубки направлена вдоль линий магнитного поля. Оценить время, через которое температура трубки достигнет температуры плавления серебра $t_{\text{пл}} = 961^\circ\text{C}$. Удельное сопротивление серебра $\rho = 1,6 \cdot 10^{-6}$ Ом·см и его удельную теплоемкость $C = 0,235$ Дж/(г·К) считать не зависящими от температуры. Плотность серебра $\rho_{\text{Ag}} = 10,5$ г/см³. (2007 г.)

12.205. Определить добротность катушки, намотанной на тонкостенную медную трубку с внешним диаметром $D = 2$ см и толщиной стенок $\delta = 0,05$ см. Удельное сопротивление меди $\rho = 1,8 \cdot 10^{-6}$ Ом·см. Катушка подключена к цепи переменного тока с частотой $f = 50$ Гц. Длины трубки и катушки считать одинаковыми и гораздо большими диаметра. (1974 г.)

12.206. Индуктивностью резонансного контура ($f_0 = 10$ МГц) служит длинная однослойная катушка диаметром $D = 10$ мм. На сколько изменится резонансная частота контура, если внутрь катушки вставить на всю длину латунный цилиндр диаметром $D/2$? Удельное сопротивление латуни $\rho = 8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. (1993 г.)

12.207. По оси длинного короткозамкнутого сверхпроводящего соленоида пролетает с постоянной скоростью $v = 10^5$ см/с намагниченный ($I = 800$ Гс) стальной цилиндр. Оценить максимальную силу тока \mathcal{I}_m в соленоиде. Внутренний диаметр соленоида $D_c = 10,4$ см, его длина $l_c = 50$ см, число витков $N = 100$. Диаметр

стального цилиндра $D_{\text{ц}} = 10$ см, длина $l_{\text{ц}} = 60$ см, проводимость стали $\sigma = 0,8 \cdot 10^{17}$ с⁻¹. Учесть, что на частотах, больших 10^3 Гц, магнитная проницаемость железа в полях, больших 10^4 Э, практически равна единице. (2002 г.)

12.208. По оси длинного короткозамкнутого сверхпроводящего соленоида с током $\mathcal{I}_0 = 3 \cdot 10^3$ А пролетает медный цилиндр с постоянной скоростью $v = 10^5$ см/с. Оценить максимальную силу тока $\mathcal{I}_{\text{м}}$ в соленоиде. Внутренний диаметр соленоида $D_{\text{с}} = 10,4$ см, его длина $l_{\text{с}} = 50$ см, число витков $N = 100$. Диаметр медного цилиндра $D_{\text{ц}} = 10$ см, длина $l_{\text{ц}} = 60$ см, проводимость меди $\sigma = 5,1 \cdot 10^{17}$ с⁻¹. (2002 г.)

12.209. Катушка колебательного контура имеет добротность $Q = 100$. Если один виток катушки замкнуть накоротко, то ее индуктивность почти не меняется, а добротность уменьшится вдвое. Определить по этим данным число N витков катушки. (1985 г.)

12.210. Параллельный колебательный контур подключен, как показано на рис. 116, через сопротивление $R = 10$ кОм к источнику переменного напряжения. Активное сопротивление катушки $r = 5$ Ом. Для измерения добротности колебательного контура к сопротивлению R подключили параллельно такое же сопротивление (замкнув ключ K). При этом амплитуда колебаний напряжения на контуре при резонансе токов увеличилась в 1,5 раза. Чему оказалась равной добротность контура, если известно соотношение между параметрами контура $L/C \gg r^2$? (2001 г.)

12.211. Для поддержания незатухающих колебаний в LCR -контуре ($L = 4 \cdot 10^{-3}$ Гн, $C = 10^{-10}$ Ф, $R = 1$ Ом) емкость конденсатора быстро изменяют на величину ΔC каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время $\tau = 6,4 \cdot 10^{-8}$ с возвращают в исходное состояние. Определить величину и знак ΔC . (1993 г.)

12.212* Через конденсатор колебательного контура с резонансной частотой $\omega_0 = 10^7$ с⁻¹ параллельно пластинам пропускается электронный пучок, полностью заполняющий пространство между ними (ток $\mathcal{I} = 1$ мА, энергия $\mathcal{E} = 1$ кэВ, сечение пучка $S = 100$ см²). На сколько изменится резонансная частота? (1992 г.)

12.213* Телезритель, желая дать возможность супруге спокойно смотреть нескончаемый мексиканский сериал, купил второй телевизор и подключил его с помощью кабеля к разрезу такого же кабеля, идущего от антенны к первому телевизору. Оба телевизора оказались включеными параллельно. Считая, что до переделки кабель был согласован как с телевизором, так и с антенной (отраженных волн в кабеле не было), найти, во сколько раз уменьшилась после переделки амплитуда сигнала на входе телевизора. (1997 г.)

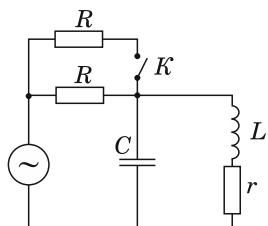


Рис. 116

12.214. Генератор электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda = 8$ мм и мощностью $N = 1$ Вт настроен на основную моду прямоугольного резонатора с металлическими стенками, объем которого $V = 0,2$ см³ и добротность $Q = 10^3$. Система соединения генератора и резонатора обеспечивает полное поглощение энергии генератора внутри резонатора. Определить максимальную напряженность электрического поля в резонаторе. (1988 г.)

12.215. Прямоугольный сверхпроводящий резонатор высотой $h = 3$ см имеет в плане форму квадрата со стороной $a = 10$ см. Изнутри резонатор покрыт сверхпроводником, критическое магнитное поле H_c которого в условиях опыта равно 1 кЭ. Во избежание пробоя воздуха напряженность E электрического поля всюду не должна быть больше $E_0 = 30$ кВ/см. Измеренная на низшей резонансной частоте добротность резонатора Q оказалась равной 10^6 . Какую мощность N можно подводить непрерывно к резонатору на этой частоте, чтобы поддерживать колебания с максимально допустимой амплитудой? (1990 г.)

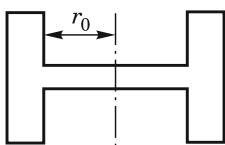


Рис. 117

12.216. Тороидальный квазистационарный СВЧ-резонатор, показанный на рис. 117, изготовлен из сверхпроводника I рода, критическое магнитное поле которого равно $H_c = 500$ Э. Какая максимальная напряженность электрического поля может быть получена между его емкостными обкладками радиусом $r_0 = 3$ см? Резонансная частота $\omega_0 = 6 \cdot 10^9$ с⁻¹. (1999 г.)

12.217. В качестве дилатометра — прибора для измерения смещений — В. М. Пудалов и М. С. Хайкин в 1968 г. использовали коаксиальный резонатор ($\lambda = 3$ см), являвшийся частью автогенератора. Нижняя стенка резонатора может легко перемещаться. Оценить, какое минимальное смещение может быть зарегистрировано, если величина зазора между подвижной стенкой резонатора и центральным стержнем $d = 2$ мкм, а нестабильность частоты автогенератора $\Delta f = 500$ Гц. Радиус внутреннего стержня $r \gg d$ (рис. 118). (2005 г.)

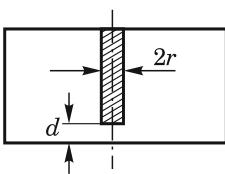


Рис. 118

12.218. В 1963 г. П. Л. Капица осуществил измерение амплитуды электромагнитного поля в объемном резонаторе при помощи полого металлического шарика радиусом $a = 10$ мм и массой $m = 1$ г, подвешенного на нити длиной $h = 125$ мм. Подвес вместе с шариком можно было перемещать вдоль оси резонатора длиной $2l = 20$ см. В резонаторе возбуждались колебания E -типа, при которых амплитуда аксиального поля на оси резонатора изменялась по закону $E_z(z, t) = E_0 \cos \frac{\pi z}{2l} \cos \omega t$, $E_0 = 3000$ В/см, $H = 0$. Найти максимальное отклонение шарика. Координата z здесь отсчитывается от левого торца резонатора (рис. 119). (2006 г.)

12.219. В 1963 г. П. Л. Капица осуществил измерение амплитуды электромагнитного поля в объемном резонаторе при помощи полого металлического шарика радиусом $a = 10$ мм и массой $m = 1$ г, подвешенного на нити длиной $h = 125$ мм (рис. 120). Подвес вместе с шариком можно было перемещать вдоль оси резонатора длиной $2l = 20$ см. В резонаторе возбуждались колебания H -типа, при которых

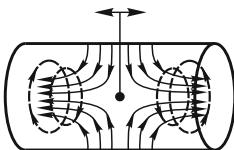


Рис. 119

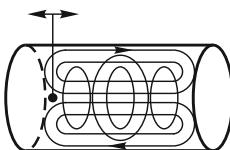


Рис. 120

амплитуда аксиального поля на оси резонатора изменялась по закону $H_z(z, t) = H_0 \sin \frac{\pi z}{2l} \cos \omega t$, $E = 0$. Найти H_0 , если максимальное отклонение шарика было равно $\Delta = 0,5$ мм. Считать, что толщина скин-слоя много меньше толщины стенки шарика. Координата z здесь отсчитывается от левого торца резонатора. (2006 г.)

12.220. Подводная лодка, находящаяся на глубине $L = 50$ м, принимает сигнал на частоте $f = 1$ кГц. Чувствительность приемника $E = 1$ мкВ/см. Найти амплитуду сигнала в воде у поверхности моря. В объеме $V = 1$ л морской воды содержится $m = 35$ г NaCl. Степень диссоциации соли равна $\eta = 0,5$, подвижность ионов: $u(\text{Na}^+) = 5,2 \cdot 10^{-4}$ см²/(В·с) и $u(\text{Cl}^-) = 8 \cdot 10^{-4}$ см²/(В·с). (2006 г.)

12.221. Непрерывное лазерное излучение ($\hbar\omega = 10$ эВ) фокусируется на плоскую поверхность металла в вакууме. Работа выхода металла $A = 4$ эВ. В результате фотоэффекта вблизи поверхности металла образуется стационарное облако фотоэлектронов, а сама поверхность заряжается положительно, т. е. возникает двойной слой. Толщина двойного слоя $a \ll r_f$ ($r_f = 1$ см — радиус пятна в фокусе). Определить дипольный момент d двойного слоя. (1994 г.)

12.222. Непрерывное лазерное излучение ($\hbar\omega = 10$ эВ) с плотностью потока $j = 10^6$ Вт/см² падает на плоскую поверхность металла в вакууме. Работа выхода металла $A = 4$ эВ. В результате фотоэффекта вблизи поверхности металла образуется стационарное облако фотоэлектронов, а сама поверхность заряжается положительно, т. е. возникает двойной слой. Считая, что электроны вырываются из металла с одинаковой скоростью и что скорость фотоэлектронов в каждой точке облака направлена перпендикулярно поверхности, найти концентрацию электронов в точке, где потенциал двойного слоя уменьшается вдвое. Вероятность поглощения фотона электроном металла $\alpha = 10^{-3}$. (1994 г.)

12.223. Непрерывное лазерное излучение ($\hbar\omega = 10$ эВ) фокусируется на плоскую поверхность металла в вакууме. Работа выхода металла $A < \hbar\omega$, поэтому в результате фотоэффекта вблизи по-

верхности металла образуется стационарное облако фотоэлектронов, а сама поверхность заряжается положительно, т. е. возникает двойной слой. Полагая, что радиус пятна в фокусе $r_f = 1$ см $\gg a$ (a — толщина двойного слоя), найти работу выхода A , если дипольный момент двойного слоя $d = 1,5$ В·см². (1994 г.)

12.224. Оценить, с какого расстояния можно видеть раздельно свет от двух фар автомобиля. (1981 г.)

12.225. Фотографирование пейзажа во время снегопада произвело сь с фотовспышкой. На фотографии (рис. 121) оказались видны многочисленные резко очерченные круги различного диаметра. На каком расстоянии от объектива с фокусным расстоянием $f = 38$ мм находилась снежинка, которая на фотографии 10×15 см выглядит в виде круга диаметром $D = 5$ мм? Фотоаппарат считать однолинзовым, диаметр зрачка фотоаппарата $d = 5$ мм, размер фотокадра 24×36 мм. (2005 г.)

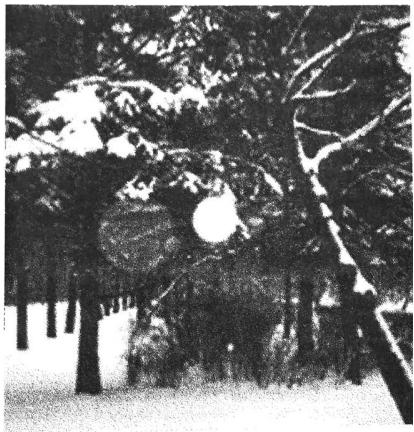


Рис. 121

12.226. Излучение фтористоводородного лазера, работающего в одномодовом режиме на длине волны $\lambda = 3$ мкм, формируется зеркалами диаметром $D = 3$ м. На каком максимальном расстоянии L может находиться мишень, чтобы плотность потока энергии на ней была практически равна плотности потока на зеркале? (1986 г.)

12.227. Положение летящего самолета определяется радиолокатором, излучающим импульсы

длительностью 3 мкс. Диаметр антенны $D = 4$ м. С какой точностью можно определить высоту полета самолета, если расстояние до самолета $L = 100$ км, длина волны радиоизлучения $\lambda = 10$ см. При каком размере антенны достигается минимальная погрешность в определении высоты и чему она равна? (2004 г.)

12.228. Для подавления систем управления в космосе посредством электромагнитного индукционного воздействия на полупроводниковые приборы средняя напряженность E электрической компоненты поля излучения должна быть, по оценкам, $E \approx 100$ В/см. Оценить мощность источника миллиметрового излучения (длина волны $\lambda \approx 1$ мм), проходящего сквозь атмосферу практически без поглощения, чтобы с поверхности Земли можно было нарушить работу системы управления на расстоянии $L \approx 1000$ км, если излучение направляется антенной с зеркалом диаметром $D \approx 10$ м. (1989 г.)

12.229. Нобелевская премия по физике 2018 г. присуждена А. Эшкому за создание «лазерного пинцета» — устройства, позволяющего

удерживать и перемещать прозрачные микроскопические объекты с помощью света. Параллельный пучок света от лазера проходит через собирающую линзу L и падает на частицу M , которую можно также считать собирающей линзой. Точка f — их общий фокус (см. рис. 122). Интенсивность света в пучке $I = 1 \text{ мкВт}/\text{см}^2$, радиус

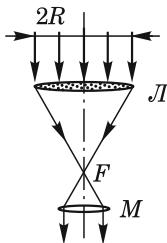


Рис. 122

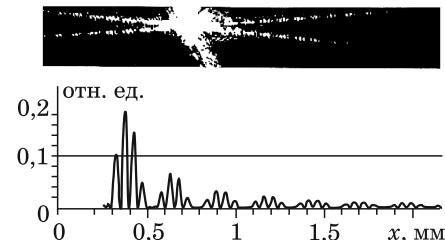


Рис. 123

пучка $R = 1 \text{ см}$, фокусное расстояние линзы L равно $F = 10 \text{ см}$. Пренебрегая дифракционными эффектами, найти величину и направление действующей на микрочастицу силы F , обусловленной преломлением света. За какое время под действием только этой силы частица сместится на расстояние порядка своего размера $l \sim 10 \text{ мкм}$, если ее масса $m \sim 1 \text{ нг}$? Поглощением и отражением света на поверхностях линз пренебречь. (2019 г.)

12.230. На рис. 123 приведена дифракционная картина от цилиндрической спиральной пружины, состоящая из двух скрещенных под углом $2\alpha = 12,5^\circ$ линейных дифракционных полосок. Спираль освещается лазером ($\lambda = 650 \text{ нм}$), и возникающая картинка дифракции регистрируется фотоаппаратом, настроенным на бесконечность (см. рис. 123). Там же показано распределение интенсивности изображения $I(x)$ вдоль одной из полос картины дифракции. Найти по рисунку следующие параметры пружины: диаметр d проволоки, из которой она изготовлена, шаг спирали P , а также диаметр спирали D . Луч лазера падает перпендикулярно оси пружины и экрану. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $f = 80 \text{ мм}$. (2016 г.)

12.231. Для контроля скорости вращения компакт-диска (CD-R) при записи и чтении информации спиральные дорожки диска имеют периодическую вдоль дорожек модуляцию с периодом l . Лежащий на столе диск освещается лучом красного лазера ($\lambda = 650 \text{ нм}$), падающим

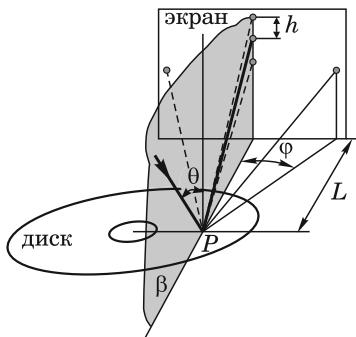


Рис. 124

вдоль дорожек под углом $\theta = 45^\circ$ к нормали (см. рис. 124). На вертикальном экране, находящемся на расстоянии $L = 50$ см от точки P падения луча на диск, наблюдается двумерная дифракционная картина. В плоскости падения β ближайшие к зеркально отраженному лучу дифракционные пятна смещены на расстояние $h = 2$ см, в перечном направлении которых наблюдаются дифракционные пятна, проекции направлений из точки падения на эти пятна на горизонтальную плоскость составляют угол $\varphi = \pm 29^\circ$ с плоскостью падения. Найти расстояние между дорожками d и период модуляции вдоль дорожек l . (2016 г.)

12.232. В оптическом ($\lambda = 6280 \text{ \AA}$) резонаторе Фабри–Перо длиной $L = 10$ см одно из зеркал массой $m = 0,1$ г укреплено на пружине. В результате тепловых колебаний зеркала ($T = 300$ К) происходит модуляция частоты оптического резонатора. Частота возбуждения резонатора смещена относительно резонансной так, что колебания зеркала приводят к максимальной амплитудной модуляции высокочастотных колебаний. Какова при этом глубина амплитудной модуляции? Частота колебания зеркала $f_0 = 10$ Гц, добротность оптического резонатора $Q = 10^8$. (2012 г.)

12.233. Оценить, какая минимальная плотность мощности накачки необходима для поддержания инверсной заселенности лазера в рентгеновской области ($\lambda_1 = 0,5$ нм), если известно, что в видимом диапазоне ($\lambda_0 = 500$ нм) она составляет $W_0 = 10^3$ Вт/см³. Считать, что в обоих случаях системы уровней, на которых работают лазеры, подобны и у них одинаковые спины и четности. (2012 г.)

12.234. Затмение в системе двойной звезды, расположенной в созвездии Большой Медведицы на расстоянии $L = 510$ световых лет от Земли, наблюдалось в красном ($\lambda_1 = 6500 \text{ \AA}$) и синем ($\lambda_2 = 4500 \text{ \AA}$) свете. Момент затмения определяется с точностью $\Delta t = 1$ с. Оценить на основе этих данных верхний предел для массы фотона по отношению к массе электрона. (2009 г.)

12.235. Локатором обнаружен самолет, летящий над ним на высоте $L = 10$ км. Частота радиосигнала $v_0 = 3$ ГГц, длительность импульса $\tau = 1$ мкс. С точностью до $\Delta t = 10$ нс длительность отраженного импульса совпадала с исходной. Оценить на основе этих данных верхний предел для массы фотона по отношению к массе электрона. (2009 г.)

12.236. Радиолокатор посылает прямоугольный импульс длительностью $\tau = 1$ мкс на несущей частоте $f = 100$ МГц вертикально вверх. Сигнал отражается от искусственного спутника Земли на высоте $H = 1000$ км и возвращается в точку приема. Оценить относительное увеличение длительности принимаемого импульса $\Delta\tau/\tau$. Считать, что сигнал все время распространяется в ионосфере со средней концентрацией электронов $N_e = 10^5$ см⁻³. (2010 г.)

12.237. При постоянном расстоянии l между удаленным источником и приемником электромагнитных волн в результате внешнего

воздействия (например, вспышки космического излучения) меняется со временем со скоростью n показатель преломления среды. Найти вызванное этим относительное смещение $\Delta\omega/\omega$ частоты регистрируемого приемником сигнала. Какой скорости v источник найденное смещение может быть по ошибке приписано? (2013 г.)

12.238. В море на глубине $H_1 = 5$ км в результате землетрясения зародились плоские волны цунами высотой $a_1 = 3$ м. Оценить высоту волн цунами у берега, где глубина моря $H_2 = 15$ м. Из-за дисперсионных свойств среды фазовая скорость волн цунами $v \propto \sqrt{H}$. Энергия единицы длины фронта цунами по пути к берегу практически не теряется. (2009 г.)

12.239. Источником света является торец газоразрядной трубки диаметром $d = 6$ мм, средняя длина волны $\lambda = 0,6$ мкм, ширина доплеровского контура линии излучения $\Delta f = 1,5$ ГГц. Оценить расстояние от торца трубки, при котором длина когерентности излучения сравнима с радиусом поперечной когерентности.

Указание. Если за источником света поместить экран с двумя малыми отверстиями, то интерференционная картина за экраном пропадает, когда расстояние между отверстиями равно радиусу поперечной когерентности света. (1999 г.)

12.240. Оценить объем когерентности видимой части спектра солнечного света вблизи поверхности Земли. Угловой диаметр Солнца $\psi = 10^{-2}$ рад. (2002 г.)

12.241. Для записи голограммы Френеля предмета используется плоская монохроматическая волна с $\lambda = 7000$ Å. Восстановление изображения производится вначале той же волной, а затем волной с $\lambda = 3500$ Å. Как изменится при этом минимально разрешимый поперечный размер деталей изображения?

Указание. Масштабные изменения удобно анализировать на примере голограммы точечного источника. (2002 г.)

12.242. Радиолокационная станция принимает сигнал, отраженный от Луны, поднимающейся из-за горизонта. После усиления сигнал смешивается в детекторе с опорным сигналом излучаемой частоты 10 ГГц, а затем с детектора подается на вход усилителя низкой частоты. Какая частота может наблюдаться на выходе этого усилителя? Считать, что станция установлена на экваторе, плоскость орбиты Луны совпадает с плоскостью экватора. (1988 г.)

12.243. Дифракционная решетка шириной $a = 3$ см с числом штрихов $N = 10^4$ освещается параллельным пучком света от натриевой лампы L (рис. 125). Пучок формируется с помощью щели S шириной $\delta = 0,05$ мм, помещенной в фокусе линзы L с фокусным

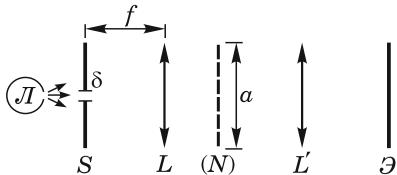


Рис. 125

расстоянием $f = 10$ см. Далее следует стандартное фраунгоферово расположение. В каком порядке спектра на экране \mathcal{E} может быть разрешен желтый дублет натрия (588,996 и 589,593 нм)? (1992 г.)

12.244. Дифракционная решетка шириной a освещается параллельным пучком света от натриевой лампы, при этом $a\delta l \gg \lambda^2$, где λ — средняя длина волны, а δl — расстояние между линиями дублета. Далее на расстоянии l помещена линза L диаметром D , а в ее фокальной плоскости — экран \mathcal{E} наблюдения (рис. 126). Какому условию должно удовлетворять расстояние l , чтобы желтый дублет натрия (588,996 и 589,593 нм) разрешился на экране? (1992 г.)

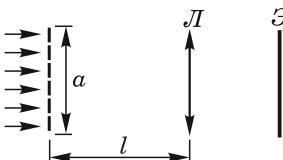


Рис. 126

кие длины волн могут излучаться под углом θ к нормали решетки в результате взаимодействия электрона с решеткой (эффект Смита–Парселла)? (1969 г.)

12.246. Монохроматический источник света заданной частоты движется равномерно по нормали к дифракционной решетке длиной $L = 5$ см и периодом $d = 10^{-3}$ см. Какую минимальную нерелятивистскую скорость источника можно обнаружить, наблюдая дифракцию первого порядка? (2007 г.)

12.247. Наблюдается фраунгоферова дифракция монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм на плоской амплитудной решетке. Как изменятся расстояние между дифракционными максимумами и интенсивность нулевого максимума, если каждую вторую щель закрыть полимерной пленкой толщиной $d = 13,5$ мкм, показатель преломления которой $n = 1,1$? Отражением света от пленки пренебречь. (1985 г.)

12.248. Параллельный пучок импульсного лазера с длительностью импульсов 1 пс падает нормально на дифракционную решетку с высоким разрешением. Излучение, дифрагированное под углом 45° к оси падающего пучка, регистрируется быстродействующим фотоприемником, установленным в фокусе удаленного от решетки объектива диаметром $D = 3$ см. Оценить длительность импульсов, регистрируемых фотоприемником. Считать, что оптическая плоскость объектива установлена перпендикулярно оси дифрагированного пучка, разрешение определяется дифракцией на объективе. (1988 г.)

12.249. Лазер испускает световые импульсы с центральной длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм, длительностью $\tau_1 = 1$ пс и скважностью (отношение периода повторения импульсов к длительности каждого из них) $Q_1 = 10^3$. Это излучение пропускается через монохроматор с разрешающей способностью $R = 5 \cdot 10^4$. Оценить скважность импульсов Q по выходе из монохроматора. (1988 г.)

12.250. Для дифракционной решетки с числом штрихов $N = 500$ штрих/мм предел разрешения в спектре первого порядка отвечает линиям с разностью длин волн $\delta\lambda = 1 \text{ \AA}$ при средней длине волн $\lambda = 0,6 \text{ мкм}$. Изображение спектра получается на экране с помощью линзы. Определить минимальный допустимый диаметр линзы D , при котором изображение спектра может быть разрешено. (1979 г.)

12.251. На дифракционную решетку с числом щелей $N = 10^5$, ширина которых равна половине периода, нормально падает плоская волна. Дифракционная картина фокусируется линзой на фотопластинку. Оценить допустимые изменения атмосферного давления в лаборатории во время экспозиции, чтобы можно было полностью использовать разрешающую способность решетки. Показатель преломления воздуха n связан с атмосферным давлением P (в паскалях) соотношением $n - 1 = 3 \cdot 10^{-9} P$. (1996 г.)

12.252. При измерении угловых размеров удаленных источников методом Физо перед объективом телескопа, имеющего фокусное расстояние F , устанавливается экран с двумя параллельными щелями шириной D , расположенными на расстоянии d друг от друга. Расчитать распределение интенсивности $I(x)$ в фокальной плоскости объектива для случая точечного источника, испускающего свет длиной волны λ , и определить, сколько интерференционных полос можно наблюдать в пределах главного интерференционного максимума. (1996 г.)

12.253. С помощью интерферометра Фабри–Перо исследуется выделенный системой фильтров участок спектра шириной $\Delta\lambda = 2 \text{ \AA}$. Минимальная разность длин волн соседних спектральных линий $\delta\lambda = 0,01 \text{ \AA}$. Оценить максимальное значение коэффициента пропускания $\tau = 1 - \rho$ (где ρ – коэффициент отражения зеркал по энергии), при котором разрешаются соседние линии. (1979 г.)

12.254. Полупроводниковый лазер на длину волны $\lambda = 1 \text{ мкм}$ представляет собой кристалл полупроводника, на грани которого нанесены зеркала, образующие резонатор Фабри–Перо. Определить расстояние между модами колебаний лазера $\Delta\lambda$. Длина резонатора $L = 6 \cdot 10^{-2} \text{ см}$, показатель преломления полупроводника в рабочей области длин волн $n = 3,1$, а дисперсия $dn/d\lambda = -1,2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$. (2001 г.)

12.255. В одно из плеч радиоинтерферометра Майкельсона вместо отражающего зеркала помещена непоглощающая пластина с полупрозрачной передней и зеркальной задней стенками (рис. 127). Толщина пластины $d = 2 \text{ мм}$, показатель преломления $n = 5$, спектр падающего излучения простирается от 0 до 110 ГГц . При перемещении зеркала во вто-

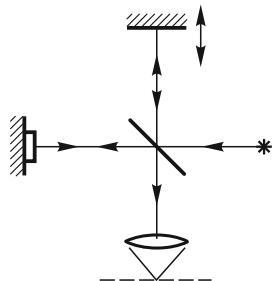


Рис. 127

ром плече детектор регистрирует ряд пиков интенсивности излучения. Каково расстояние между пиками в единицах длины перемещения зеркала? (1993 г.)

12.256. Кварцевая пластинка $\lambda/2$ используется как анализатор степени поляризации лазерных импульсов. Оценить минимальную длительность лазерных импульсов, для которых еще можно пользоваться таким анализатором, если длина волны света $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$, а коэффициенты преломления для обыкновенного и необыкновенного лучей в кварце $n_o = 1,5442$ и $n_e = 1,5533$ соответственно. Дисперсией показателей преломления пренебречь. (1986 г.)

12.257. В опытах Р. Бета (1936 г.) впервые был измерен угловой момент фотона. В этих экспериментах (рис. 128) линейно поляризованный свет, направление поляризации которого показано стрелкой, интенсивностью $I_0 = 1 \text{ Вт}/\text{см}^2$ и длиной волны $\lambda = 5000 \text{ \AA}$

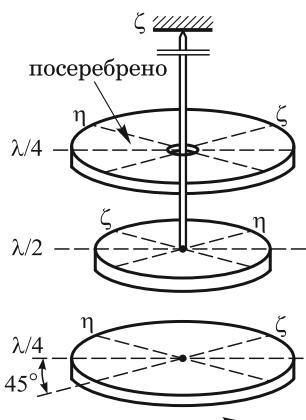


Рис. 128

$F/D = 1$. Оценить мощность лазера W , при которой в электрическом поле фокуса системы электроны смогут приобретать энергию $\sim mc^2$. Как W зависит от длины волны λ ? Какова будет при этом величина магнитного поля в фокусе? (1968 г.)

12.260. Солнечное излучение фокусируется линзой диаметром $D = 5 \text{ см}$ и фокусным расстоянием $F = 10 \text{ см}$. Оценить напряженность электрического поля в фокусе. Солнечная постоянная $J_C = 1,37 \text{ кВт}/\text{м}^2$, угловой диаметр Солнца $a_C = 10^{-2} \text{ рад}$. (1997 г.)

12.261. Лазерный пучок ($\lambda = 0,532 \text{ мкм}$) диаметром $D = 2,5 \text{ мм}$ фокусируется линзой с фокусным расстоянием $F = 25 \text{ см}$. Оценить продольные и поперечные размеры области фокальной перетяжки пучка. В качестве длины перетяжки считать расстояние, на котором в приближении геометрической оптики радиус пятна равен радиусу перетяжки. (2005 г.)

проходил снизу вверх через нижнюю пластинку $\lambda/4$, затем через подвешенную на торсионном маятнике пластинку $\lambda/2$, у которой оси повернуты на 90° , попадал на пластинку $\lambda/4$ с посеребренным верхом, отражался и проходил в обратном направлении. Какой вращательный момент передавался пластинке $\lambda/2$ площадью $S = 5 \text{ см}^2$? Поглощением света пренебречь. (2001 г.)

12.258. Параллельный монохроматический пучок света проходит через диафрагму, а затем фокусируется линзой. Во сколько раз увеличится напряженность поля электромагнитной волны в фокальной плоскости линзы, если площадь диафрагмы увеличить вдвое? (2007 г.)

12.259. Луч лазера фокусируется идеальной оптической системой со светосилой

12.262. Для защиты от механических повреждений стекла современных очков покрывают алмазной пленкой. Какая часть падающего светового потока отражается от пленки на длине волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$, если толщина пленки равна $d = 625 \text{ \AA}$, показатель преломления стекла $n_2 = 1,7$, алмазной пленки $n_1 = 2,4$? (1997 г.)

12.263. На поверхность стеклянной пластинки нанесена просветляющая в желтой области спектра ($\lambda_{\text{ж}} = 6000 \text{ \AA}$) пленка минимальной толщины с коэффициентом преломления $n_{\text{п}} = 1,3$. Какая доля падающего по нормали к пластинке фиолетового света ($\lambda_{\phi} = 4000 \text{ \AA}$) отразится? Коэффициенты преломления не зависят от длины волны. (2006 г.)

12.264. На тонкую плосковыпуклую линзу с фокусным расстоянием $f = 10 \text{ см}$ со стороны плоской части с радиусом $R = 2 \text{ см}$ нормально падает параллельный поток монохроматического излучения с интенсивностью $I = 10 \text{ кВт/см}^2$. На линзу нанесено просветляющее покрытие. Найти силу, действующую на линзу. Стекло считать идеальным (без потерь). (2004 г.)

12.265. На плоскопараллельную прозрачную пластинку с показателем преломления n падает нормально плоская монохроматическая электромагнитная волна. Толщина пластинки равна длине волны в пластинке. Найти амплитудный коэффициент отражения r от пластинки. (1966 г.)

12.266. Импульс излучения неодимового лазера ($\lambda = 1,05 \text{ мкм}$) с длительностью $\tau = 10^{-8} \text{ с}$ и диаметром лазерного пучка $D = 0,5 \text{ см}$ фокусируется линзой с фокусным расстоянием $F = 10 \text{ см}$ на поверхность образца из алюминия. Оценить энергию лазерного импульса, необходимую для нагрева алюминия до температуры плавления. Коэффициент теплопроводности алюминия $\kappa = 2,1 \text{ Вт}/(\text{см} \cdot \text{К})$, температура плавления $t_{\text{пл}} = 2200^\circ\text{C}$, плотность $\rho = 2,7 \text{ г}/\text{см}^3$, коэффициент поглощения $\alpha = 10\%$. (1996 г.)

12.267. Для увеличения производительности установки для лазерной резки, в которой излучение фокусируется линзой на поверхность металла, используются лазерные сборки — устройства, объединяющие группу лазерных трубок, излучающих синхронизированные (когерентные) между собой световые пучки. Оценить, во сколько раз изменится производительность установки при переходе от одной лазерной трубки диаметром d к сборке с общим диаметром $D = 10d$. Коэффициент заполнения (отношение суммарной площади лазерных трубок к общей площади сборки) $k = 0,8$, распределение интенсивности в поперечном сечении лазерных пучков считать однородным. Считать, что все падающее на металл излучение поглощается. (2002 г.)

12.268. Параллельный пучок рентгеновских лучей с длиной волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$ падает на тонкую двояковыпуклую линзу из бериллия (плотность материала $\rho = 1,85 \text{ г}/\text{см}^3$) с поверхностями одинакового радиуса $R = 40 \text{ см}$. Диаметр линзы считать равным $D = 9 \text{ см}$. Найти угол расхождения φ пучка после линзы. (1981 г.)

12.269. Зеркало в виде сильно вытянутого параболоида вращения фокусирует мягкие рентгеновские лучи благодаря полному внутреннему отражению при скользящих углах падения на далекие от вершины части параболоида (рис. 129).

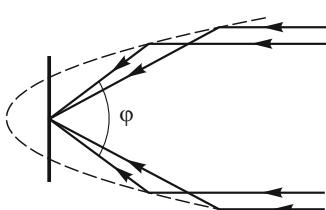


Рис. 129

Оценить угол схождения параллельного пучка лучей φ в фокусе параболоида для рентгеновских лучей с энергией $\mathcal{E} = 2 \text{ кэВ}$, если зеркало изготовлено из берилля (плотность берилля $\rho = 1,85 \text{ г}/\text{см}^3$). (1970 г.)

12.270. Импульсное излучение пульсара CP 1919 + 21 на частоте $v_1 = 80 \text{ МГц}$ достигает Земли на $\Delta t = 7 \text{ с}$ позже, чем соответствующий импульс на частоте $v_2 = 2000 \text{ МГц}$. Оценить расстояние L до

пульсара, если известно, что средняя плотность электронов в межзвездном пространстве $N \simeq 0,05 \text{ см}^{-3}$. (1975 г.)

12.271. С какой точностью должна быть стабилизирована температура одномодового лазерного резонатора, установленного на платформе из инвара, чтобы за счет флуктуации неменохроматичность излучения была порядка теоретической ширины лазерной линии $\Delta\omega/\omega = 10^{-14}$? Температурный коэффициент расширения инвара $\alpha = 10^{-6} \text{ К}^{-1}$. (2000 г.)

12.272. Лазер на CO₂ излучает две близкие частоты v_1 и v_2 (средняя длина волны $\lambda = 10,6 \text{ мкм}$). Излучение такого лазера смешивают в нелинейном кристалле с излучением лазера на Nd ($\lambda_3 = 1,06 \text{ мкм}$). Анализ излучения на комбинационных частотах ($v_1 + v_3$ и $v_2 + v_3$) показал, что соответствующие им длины волн отличаются на $\delta\lambda = 5 \text{ \AA}$. Определить разность длин волн $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ излучения лазера на CO₂. (1978 г.)

12.273. Найти время распространения электромагнитного импульса заданной частоты вдоль основания стеклянной призмы с разрешающей силой $R = 10^4$. Длина волны в веществе $\lambda = 9,35 \cdot 10^{-5} \text{ см}$. «Оптическая длина» основания призмы составляет $L = 17 \text{ см}$. (2003 г.)

12.274. При прохождении света через среду наряду с упругим происходит и неупругое рассеяние фотонов, связанное, в частности, с их взаимодействием с колебательными степенями свободы молекул — комбинационное рассеяние. Оценить отношение интенсивностей фиолетового и красного спутников в спектре рассеянного монохроматического излучения от молекул четыреххлористого углерода CCl₄ при температуре $t = 27^\circ\text{C}$, если известно, что для соответствующих гармонических колебаний величина $1/\lambda = 217 \text{ см}^{-1}$. (1993 г.)

12.275. В методе внутрирезонаторной лазерной спектроскопии (ВРЛС), предложенном и реализованном в 1970 г. А. Ф. Сучковым и Э. А. Свириденковым, непосредственно в резонатор широкополосного лазера вносится кювета с поглощающим веществом. Отношение

длины кюветы к длине резонатора $\alpha = 0,9$. Спектр поглощения исследуемых линий проявляется в виде провалов глубиной ΔI в спектре выходного излучения I_0 . Оценить минимальное значение коэффициента поглощения κ , которое возможно зарегистрировать методом ВРЛС при длительности генерации $\tau = 200$ мс. Считать, что минимально регистрируемое поглощение $\Delta I/I_0$ составляет 5%. (2004 г.)

12.276. Резонансное поглощение света было обнаружено впервые Р. Вудом в 1904 г. Может ли наблюдаться резонансное поглощение атомами ^{39}K оптического излучения от ^{41}K ? Температура паров капли равна $t = 200^\circ\text{C}$. (1999 г.)

12.277. Лазерное разделение изотопов основано на селективном возбуждении изотопов одного сорта. Для эффективного разделения необходимо, чтобы изотопический сдвиг линии поглощения был не менее полуширины линии. Оценить максимальную температуру паров натрия, чтобы можно было таким способом выделить изотоп ^{22}Na из смеси изотопов ^{22}Na и ^{23}Na . (1999 г.)

12.278. Энергия возбуждения ядра может быть измерена по изомерному сдвигу частоты спектральной линии атома за счет утяжеления возбужденного ядра на величину $\Delta M = \mathcal{E}_{\text{яд}}/c^2$ (В. С. Летохов, 1972). При измерении частоты спектральной линии паров атомов при температуре T для этого необходимо, чтобы изомерный сдвиг был больше доплеровского уширения. При какой температуре это условие будет выполнено для атома с $A=100$ и энергии изомерного уровня ядра $\mathcal{E}_{\text{яд}}=0,3$ МэВ? (1999 г.)

12.279. В ионосфере Земли (на высоте ~ 100 км), где концентрация свободных электронов $N = 10^5 \text{ см}^{-3}$ и постоянное магнитное поле $B = 0,5 \text{ Гс}$, вдоль силовых линий магнитного поля могут распространяться электромагнитные волны (так называемые геликоны, или свистящие атмосферники) с законом дисперсии вида $k^2 = 4\pi Ne\omega/(cB)$, где k — волновое число, ω — угловая частота. Найти фазовую и групповую скорости таких волн, если $\omega = 10^6 \text{ см}^{-1}$. (1990 г.)

12.280. Коэффициент преломления n для электромагнитных волн с частотой v , распространяющихся в чистых полупроводниках вдоль магнитного поля \mathbf{B} , выражается формулой $n^2 = 2Ne\omega/(vB)$, где N — концентрация электронов. Оказалось, что на частоте $v = 33 \text{ ГГц}$ при изменении поля B следующие друг за другом резонансы стоячих волн в пластине полупроводника толщиной $d = 1 \text{ мм}$ наблюдаются при $B_1 = 3,6 \text{ кГс}$ и $B_2 = 8,1 \text{ кГс}$. Найти концентрацию электронов. (1990 г.)

12.281. Плазма заполняет полупространство $x > 0$, причем концентрация электронов растет вглубь по закону $N(x) = \mu x$; $\mu = \text{const}$. Перпендикулярно границе $x = 0$ падает электромагнитный волновой пакет со средней частотой ω , уходит в плазму, отражается от зоны критической плотности и через некоторое время τ регистрируется при $x = 0$. Определить время τ . (1992 г.)

12.282. При изучении прохождения плоской электромагнитной волны с частотой $v = 8 \text{ МГц}$ через плоские однородные слои плазмы с концентрацией свободных электронов $N = 10^6 \text{ см}^{-3}$ найдено, что энергетические коэффициенты пропускания волны отличаются в 10 раз для слоев плазмы, толщины которых отличаются в два раза. Пренебрегая интенсивностью волны, отраженной от задней границы каждого слоя, найти их толщины d_1 и d_2 . (1980 г.)

12.283. Ракета-зонд, на борту которой установлен передатчик радиосигналов с частотой $f_0 = 10 \text{ МГц}$, движется вертикально вверх со скоростью $v = 0,6 \text{ км/с}$. При прохождении верхних слоев атмосферы

принимаемый на Земле сигнал оказался смещенным по частоте на $\Delta f = 10 \text{ Гц}$. Оценить плотность электронов в верхних слоях атмосферы. (2005 г.)

12.284. Плоский слой плазмы толщиной d нагревается мощным лазерным излучением (рис. 130). Длина свободного пробега фотона (по отношению к поглощению) $l_\omega \propto \omega^3 T^{1/2} / n^2$ где ω — частота лазерного излучения,

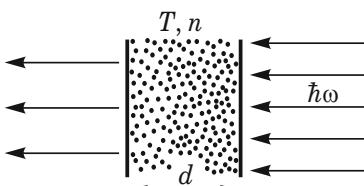


Рис. 130
 n и T — концентрация и температура плазмы. Определить зависимость установившейся температуры плазмы от n , d , ω , если в процессе нагрева слой не разлетается, $\hbar\omega \ll kT$, продольный размер слоя много больше d . Нагрев плазмы в установившемся состоянии компенсируется потерями. (1994 г.)

12.285. Найти проводимость плазмы σ с концентрацией электронов n_e и числом столкновений в единицу времени v_e , предполагая, что электрон при столкновении с ионом полностью теряет направление своего импульса. (1996 г.)

12.286. Плазменный шнур удерживается с помощью магнитного поля, параллельного оси шнура, вследствие того, что поле не проникает внутрь плазмы. Оценить величину магнитного поля, необходимого для удержания плазмы, если концентрация частиц плазмы $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, а ее температура $T = 10^8 \text{ К}$. (1973 г.)

12.287. Z -пинч представляет собой плазменный шнур, вдоль оси которого течет ток \mathcal{J} . В равновесии давление его собственного магнитного поля уравновешивает газокинетическое давление плазмы. В одной из моделей плазма считается нейтральной с однородным распределением плотностей частиц и тока по поперечному сечению шнура. Оценить температуру плазмы на оси шнура. Принять, что внешний радиус шнура $R = 5 \text{ см}$, сила тока $\mathcal{J} = 400 \text{ кА}$, плотность частиц $n = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, магнитная проницаемость плазмы $\mu = 1$. (1987 г.)

12.288. Рельсотроном называют два параллельных проводника, закороченных свободно лежащей на них медной проволочкой. При пропускании по системе импульса тока со средней силой $\mathcal{J} = 1 \text{ МА}$

проводочки испаряется, а образующаяся проводящая плазма разогревается магнитным полем тока, толкая перед собой непроводящий снаряд массой $M = 1$ г. Оценить его конечную скорость v . Длина рельсотрона $l = 1$ м, линейные размеры снаряда равны примерно расстоянию между проводниками. (1989 г.)

12.289. Плазменной пушкой Бостика называют систему коаксиальных проводников, между которыми приложено высокое напряжение. При вспрыскивании в один из концов системы порции водорода возникает разряд и образуется проводящая плазма, которая разогревается магнитным полем тока. Оценить конечную скоростью облака плазмы. Длина пушки $l = 1$ м, внешний диаметр $D_1 = 5$ см, внутренний $D_2 = 2,5$ см, средняя сила тока в импульсе $\mathcal{I} = 0,1$ МА, плотность водорода $\rho = 0,1$ мг/см³. Линейные размеры облака плазмы равны примерно внутреннему диаметру пушки. (1989 г.)

12.290. Оценить показатель преломления неполярного диэлектрика со статической диэлектрической проницаемостью $\epsilon(0) = 1,5$ на частоте, равной удвоенной частоте собственных колебаний электронов. Считать поле, действующее на атом, равным внешнему. (1984 г.)

12.291* Пучок электронов, проходя через воздух, порождает чerenковское излучение под углом $\alpha = 3^\circ$ к направлению движения электронов. Считая показатель преломления воздуха при нормальных условиях равным 1,0003, оценить минимальное давление воздуха (при нормальной температуре), для которого возможен указанный процесс. (2005 г.)

12.292. Пучок протонов, полная энергия которых $\mathcal{E} = 5$ ГэВ, направляется в контейнер с углекислым газом. При каком давлении газа возникнет чerenковское излучение? Известно, что при нормальном давлении $n_0 - 1 = 0,00045$ (n_0 — показатель преломления газа). (1983 г.)

12.293. Определить кинетическую энергию T протона, если при движении в азоте он вызывает свечение Вавилова—Черенкова при давлении $P = 50$ атм и выше. Показатель преломления азота при нормальном давлении равен $n = 1,0003$. (1973 г.)

12.294. Пи-мезоны и мюоны с импульсами $p = 140$ МэВ/с проходят через прозрачное вещество. Найти диапазон показателей преломления этого вещества, при которых только мюоны будут создавать свечение Вавилова—Черенкова. Энергии покоя пионов и мюонов равны соответственно $m_\pi c^2 \approx 140$ МэВ, $m_\mu c^2 \approx 106$ МэВ. (1970 г.)

12.295. На плоскую границу раздела двух сред падает под некоторым углом ψ световой импульс из плоских волн (рис. 131). Он об разует на плоскости раздела бегущий световой «зайчик». Показать, что направления преломленной и отраженной волн совпадают с направлениями образующих конуса чerenковского излучения электро-

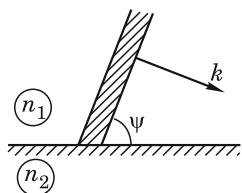


Рис. 131

на, движущегося вдоль поверхности раздела с той же скоростью, что и световой «зайчик». (1977 г.)

12.296* В жидким гелием вокруг электрически заряженной частицы, например иона He^+ , образуется область повышенного давления, и в непосредственной близости от заряда гелий затвердевает. Причиной повышения давления является притяжение атомов гелия к электрическому заряду за счет поляризуемости их электронной оболочки. Найти радиус R образовавшегося шарика из твердого гелия, если плотность твердого гелия $\rho = 0,145 \text{ г}/\text{см}^3$, молярная поляризуемость $\alpha N_A = 0,125 \text{ см}^3/\text{моль}$, а давление затвердевания $P_{\text{тв}} = 25 \text{ атм}$. Пренебречь сжимаемостью гелия. Внешнее давление отсутствует. Считать, что размер шарика значительно превышает атомный размер. (1966 г.)

12.297* Определить, на какую высоту втянется в магнитное поле с индукцией $B = 1 \text{ Тл}$ жидкий кислород при $T = 80 \text{ К}$. На внешней оболочке молекулы O_2 находятся два электрона в состоянии с нулевым орбитальным моментом и параллельными спинами. (1967 г.).

12.298. В Серпуховском протонном ускорителе частицы ускорялись до энергии 76 ГэВ, двигаясь в течение двух секунд в нарастающем магнитном поле по замкнутой кольцевой орбите радиусом $R = 194 \text{ м}$. Оценить минимальную мощность генераторов, необходимую для питания магнитов ускорителя, если площадь между полюсами магнитов составляет $S = 16 \times 40 \text{ см}^2$. (1979 г.)

12.299. Рассмотрим эксперимент по измерению круговой поляризации γ -излучения. Ожидаемая степень поляризации равна 10^{-7} . (Такое слабо поляризованное γ -излучение получается, например, в результате реакции $n + p = {}_1^2d + \gamma$ вследствие несохранения пространственной четности при слабых взаимодействиях). Измерение производится с помощью поляриметра, в котором разделяются потоки γ -квантов с разным знаком круговой поляризации. Какое минимальное время потребуется для измерения примеси круговой поляризации с точностью 10%, если имеется источник излучения с интенсивностью $10^{12} \text{ квантов}/\text{с}$? (1970 г.)

12.300. При поглощении поляризованного пучка электронов веществом происходит их полная деполяризация. Найти изменение энтропии вследствие деориентации спинов пучка, содержащего 10^6 электронов. (1970 г.)

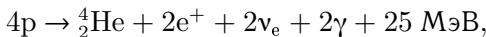
12.301. Оценить, при какой плотности потока лазерного излучения может произойти пробой вакуума, т. е. разрыв виртуальных электрон-позитронных пар? (1992 г.)

12.302. Оценить, какую минимальную энергию должен иметь импульсный лазер ($\lambda = 1,25 \text{ мкм}$, $\tau = 100 \text{ фс}$), чтобы движение электрона в поле излучения было релятивистским. (2005 г.)

12.303* Оценить отношение потоков нейтрино и фотонов на поверхности звезды, в которой происходит превращение водорода в гелий. Нейтрино образуется в реакции $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$. Остальная

энергия, выделяющаяся при синтезе ${}^4\text{He}$ из водорода, в конечном счете переходит в энергию электромагнитного излучения. Считать горение звезды стационарным, а температуру на поверхности звезды $T = 5000$ К. (1980 г.)

12.304. Считая, что основным источником энергии Солнца являются термоядерные реакции водородного цикла в конечном виде:



оценить плотность потока нейтрино j_ν вблизи Земли. Принять, что температура поверхности Солнца $T = 6000$ К, угловой диаметр его, видимый с поверхности Земли, $\alpha = 0,01$ рад. (1989 г.)

12.305* Согласно П. Дираку энергия электрона в вакууме может принимать значения как от mc^2 до $+\infty$, так и от $-\infty$ до $-mc^2$, однако все состояния с отрицательной энергией заполнены, и это «море Дирака» реально не проявляется в физических процессах. При переходе электрона из «моря» отрицательных значений в состояние с $\mathcal{E} > mc^2$ рождается пара электрон + «дырка», т. е. электрон-позитронная пара. Оценить в квазиклассическом приближении вероятность такого процесса в однородном статическом электрическом поле с напряженностью $E \approx 10^{15}$ В/см (такое поле имеется у поверхности тяжелых ядер). (2000 г.)

12.306* Советский физик Г. А. Аскарьян предложил использовать в качестве сверхмощных импульсных источников нейтронов ядерные микровзрывы миллиграммовых количеств делящихся веществ. Для перевода делящегося вещества в критическое состояние он предлагал сжимать такие микродозы импульсным лазерным излучением. Оценить, во сколько раз нужно уменьшить радиус шарика из ${}^{235}\text{U}$ массой 50 мг, чтобы началось размножение нейтронов. Какое давление развивается в веществе непосредственно перед началом цепной реакции, если процесс сжатия считать адиабатическим? Валентность урана принять равной 2. Для быстрых нейтронов деления $\sigma(n, f) = 2$ бн; $\sigma(n, \gamma) = 0,1$ бн; плотность урана $\rho = 18,7$ г/см³. (2000 г.)

12.307. На расстоянии $L = 20 \pm 0,01$ м от полихроматического импульсного источника нейтронов расположен поликристаллический образец. Упруго рассеянные нейтроны регистрируются через время t , намного большее длительности нейtronной вспышки, после нейtronной вспышки детектором, расположенным под углом $\theta = 60^\circ$, и по этому событию восстанавливается межплоскостное расстояние в кристалле. Какова должна быть точность измерения времени прихода нейтронов t , чтобы обеспечить относительную точность измерений межплоскостных расстояний 10^{-3} ? Угловое разрешение детектора $\Delta\theta = 0,06^\circ$. (2003 г.)

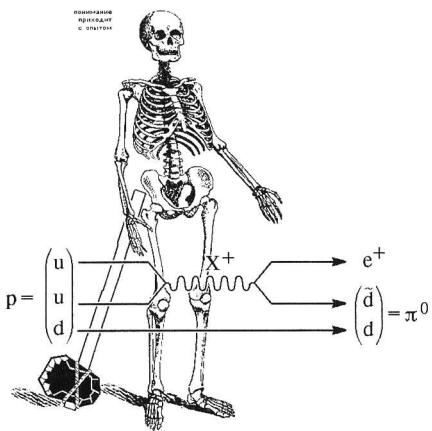
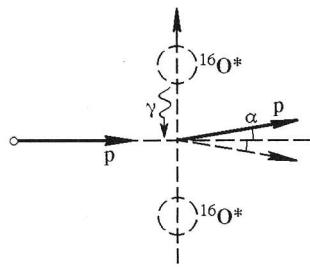
12.308. Воздух при условиях, близких к нормальным, медленно течет по закрытой с одной стороны стеклянным окном нагретой трубе диаметром $D = 1$ см и длиной $L = 10$ м, так что у стенок трубы температура на $\delta T = 10$ К больше, чем на оси. Для света, распро-

страняющегося в трубе вдоль ее оси и выходящего через окно, система представляет собой линзу. Определить форму волнового фронта на выходе трубы и оценить фокусное расстояние такой линзы. При нормальных условиях коэффициент преломления воздуха равен $n_0 = 1,0003$. Преломлением света на выходе из трубы пренебречь. (2003 г.)

12.309. На нелинейную среду толщиной $L = 1$ см с показателем преломления n , зависящим от интенсивности I проходящего света как $n = n_0 - \chi I$ ($\chi = 2,5 \cdot 10^{-8}$ см 2 /Вт), падает пучок света $\lambda = 452$ нм с плоским волновым фронтом и распределением интенсивности в поперечном сечении $I(r) = I_0 \exp(-r^2/w^2)$, где $I_0 = 5 \cdot 10^3$ Вт/см 2 , $w = 1 \cdot 10^{-3}$ см. В результате взаимодействия света со средой в дальней зоне возникает устойчивая интерференционная картина в виде системы колец. Определить число интерференционных колец в наблюдаемой картине. (2003 г.)

12.310. На нелинейную среду толщиной $L = 1$ см с показателем преломления n , зависящим от интенсивности I проходящего света как $n = n_0 - \chi I$ ($\chi = 2,5 \cdot 10^{-8}$ см 2 /Вт), падает пучок света с плоским волновым фронтом и распределением интенсивности в поперечном сечении $I(r) = I_0 \exp(-r^2/w^2)$, где $I_0 = 5 \cdot 10^3$ Вт/см 2 , $w = 1 \cdot 10^{-3}$ см. В дальней зоне возникает устойчивая интерференционная картина в виде системы колец. Определить форму волнового фронта непосредственно за образцом и максимальную угловую расходимость наблюдаемой картины. (2003 г.)

12.311. В магнитных компьютерных дисках запись информации происходит за счет намагничивания мелких ферромагнитных частиц. Для поворота вектора магнитного момента такой частицы необходимо преодолевать энергетический барьер, величина которого $\Delta\mathcal{E} \approx \alpha V$, где $\alpha = 10^7$ эрг/см 3 — постоянная анизотропии, V — объем частицы. Оценить предельное значение поверхностной плотности записи информации (в бит/см 2), которое ограничивается тепловыми флуктуациями ориентации магнитного момента. (2001 г.)



Ответы и выбранные решения

АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

§ 1. Фотоны. Фотоэффект. Эффект Комптона

1.1. Импульс фотона $p = \hbar\omega/c = 2\pi\hbar/\lambda \approx 1,3 \cdot 10^{-22}$ г · см/с. Среднеквадратичный импульс молекулы водорода $p = \sqrt{3kTM} \approx 5,4 \cdot 10^{-19}$ г · см/с.

1.2. $\lambda \approx 0,12$ нм.

1.3. $j = \frac{2W\lambda}{\hbar c \pi^2 d^2} \approx 1,6 \cdot 10^{16}$ $\frac{\text{фотон}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}$.

1.4* Решение. Рассмотрим атом (ядро) в статическом гравитационном поле. Согласно условию задачи разность энергий $\Delta\mathcal{E}$ между основным и возбужденным состояниями зависит от положения атома (ядра) в гравитационном поле Земли

$$\Delta\mathcal{E}(r) = \mathcal{E}_2(r) - \mathcal{E}_1(r) = (\mathcal{E}_2^0 - \mathcal{E}_1^0) \left(1 + \frac{2\varphi(r)}{c^2}\right)^{1/2}. \quad (1)$$

где \mathcal{E}_2^0 и \mathcal{E}_1^0 — энергии уровней в «пустом» пространстве. Таким образом, наблюдатель на поверхности Земли обнаружит, что энергия излучения атома (ядра), находящегося на высоте H над поверхностью Земли, не совпадает с таковой у поверхности, и наоборот. Именно это и было обнаружено в экспериментах Паунда и Ребки. При этом

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}(R_3 + H) &= \Delta\mathcal{E}(R_3) \sqrt{\frac{1 + 2\varphi(R_3 + H)/c^2}{1 + 2\varphi(R_3)/c^2}} \approx \\ &\approx \Delta\mathcal{E}(R_3) \left(1 - \frac{\varphi(R_3) - \varphi(R_3 + H)}{c^2}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь мы учли, что гравитационный потенциал Земли слабый:

$$\left| \frac{2\varphi(R_3)}{c^2} \right| = \frac{2\gamma M_3}{R_3 c^2} = 2 \cdot 10^{-9} \ll 1.$$

Наивное (но неверное, хотя и часто используемое) объяснение наблюдаемого эффекта смещения уровней состоит в том, что γ -кванту (фотону) с энергией \mathcal{E} приписывается гравитационная масса $m_\gamma = \mathcal{E}/c^2$, после чего для фотона применяется нерелятивистская формула $\Delta\mathcal{E} = -m_\gamma \Delta\varphi$ (так же, как для какого-нибудь тела). Фотон (как и тело) ускоряется; относительное изменение его энергии

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = -\frac{\Delta\varphi}{c^2}. \quad (3)$$

Это полностью совпадает с результатом (2):

$$\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \approx \frac{\Delta\varphi}{c^2} = \frac{\gamma M_3}{c^2 R_3} H = \frac{gH}{c^2}.$$

Следует подчеркнуть, что согласно ОТО ход времени зависит от величины гравитационного потенциала. Иначе говоря, если ввести мировое время τ_0 , измеряемое часами в отсутствие гравитационных полей, то в точке с по-

тенциалом $\varphi(r)$ ход часов меняется:

$$\tau = \tau_0 \left(1 + \frac{2\varphi(r)}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Это означает, что наблюдатель в точке с нулевым потенциалом видит, что частота света в любом месте одинакова, а скорость света меняется, и статическое гравитационное поле эквивалентно среде с показателем преломления n (см. задачу 1.5). Для наблюдателя, находящегося в ненулевом потенциале, частота (т. е. прошедшее мимо него за единицу времени число «горбов», являющееся инвариантом) изменилась. Однако скорость света в его системе равна c .

Отметим, что можно говорить о «красном смещении» фотона по отношению к наблюдателю в точке с нулевым гравитационным потенциалом, если относить это не к частоте, а к длине волны (импульсу) фотона.

1.5. $\delta = \frac{4\gamma M}{Rc^2} \approx 0,84 \cdot 10^{-5}$ рад = $1,75''$.

Гравитационный потенциал Солнца на расстоянии r от него $\varphi(r) = -\gamma M/r$. Если обозначить через α угол падения луча света, т. е. угол между лучом света, упавшим на слой «среды» толщиной dr , и радиальным направлением к центру Солнца, то согласно закону Снеллиуса

$$\frac{\sin(\alpha - d\alpha)}{\sin \alpha} = \frac{n(r - dr)}{n(r)},$$

где $\alpha - d\alpha$ — угол преломления луча света гравитационным полем. Отсюда следует, что $\operatorname{ctg} \alpha d\alpha = \frac{d}{dr} \ln n(r)$. В силу того, что гравитационный потенциал Солнца мал, легко установить, что $\ln n(r) \approx \frac{2\gamma M}{c^2 r}$ и $dr = -\frac{R \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} d\alpha$. Таким образом, искомый угол поворота луча света δ равен удвоенному углу отклонения на пути из бесконечности ($\alpha = \pi/2$) до R ($\alpha = 0$) (в силу обратимости световых лучей):

$$\delta = -\frac{4\gamma M}{c^2 R} \int_{\pi/2}^0 \sin \alpha d\alpha,$$

откуда и следует ответ. (См. также задачу 12.48.)

1.7. $\mathcal{E} = \hbar(\omega + \Omega) - \mathcal{E}_i \approx 0,9$ эВ.

1.8. $V = 60$ кВ.

1.9. $\lambda = 0,154$ нм.

1.10. $v_{\max} = \sqrt{\frac{2e(V + V_k)}{m_e}} = 784$ км/с.

1.11. $V = \frac{(hc/\lambda) - A}{e} = 1,23$ В.

1.12. $\lambda > 2\pi\hbar c/A \approx 331$ нм.

1.13. $V_k = \frac{(2\pi\hbar c/\lambda) - A}{e} - V \approx -0,79$ В. Отрицательный знак означает, что при контакте цинка с материалом второго электрода фотоэлемента потенциал цинка окажется ниже.

1.14. $\alpha = \sqrt{\frac{e}{WKt}} = 10^{-2}$, где e — заряд электрона.

1.15* $\Phi_2/\Phi_1 \approx 3$.

Решение. При «сухом» контакте потери на отражение от границы сцинтиллятор–фотокатод составляют несколько процентов, и ими можно пренебречь. Гораздо большую величину составляют потери на полное отражение при выходе из сцинтиллятора.

При «сухом» контакте на фотокатод попадают фотоны, идущие под углами $\theta_1 < \arcsin \frac{1}{n}$. Когда оптический контакт заполнен маслом — под углом $\theta_2 < \arctg \frac{D}{2h}$. Поскольку в сцинтилляторе фотоны испускаются изотропно, то отношение потоков равно

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\int\limits_0^{\theta_2} d\Omega}{\int\limits_0^{\theta_1} d\Omega} = \frac{2\pi \int\limits_0^{\theta_2} I_0 \sin \theta d\theta}{2\pi \int\limits_0^{\theta_1} I_0 \sin \theta d\theta} = \frac{1 - \cos \theta_2}{1 - \cos \theta_1} \approx 3.$$

1.16* Решение. Рассмотрим сначала случай поглощения фотона нерелятивистским электроном. Выберем такую систему отсчета, в которой электрон сначала покоялся. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\hbar\omega = \frac{mv^2}{2}; \quad \frac{\hbar\omega}{c} = mv.$$

Из написанных равенств следует $v=2c$, что невозможно. Релятивистское рассмотрение приводит к следующей системе уравнений:

$$\hbar\omega + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда следует $\frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1$, т. е. либо $\beta=0$, либо $\beta=1$. Первое условие означает, что поглощения не произошло, а второе — нереализуемо для массивной частицы. Таким образом, показано, что свободный электрон не способен поглотить квант энергии. На частном случае показано, что трехчастичные реакции, т. е. реакции типа $a+b \rightarrow c$ невозможны (см. также задачу 8.13). Лишь при участии в реакции четвертой частицы законы сохранения могут быть соблюдены.

Так как процессы поглощения и испускания обратимы по времени, то из невозможности прямого процесса следует невозможность обратного. Конечно, невозможность такого процесса можно показать и прямым вычислением, как это было сделано выше для случая поглощения.

1.17. Длительность импульса определяется разбросом времени пролета электронов, вылетевших из фотокатода в направлении к аноду с различными направлениями начальной скорости, т. е. с величиной продольной составляющей скорости от нуля до максимально возможной. Если обозначить времена движения до анода t_1 и t_2 , то

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{1}{eE} \sqrt{2mhc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{kp}} \right)} = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

1.18. $t \geq 16 \frac{A}{N} \frac{L^2}{d^2} = 455$ с, где N — мощность лампочки.

1.19* Решение. Пусть M — масса источника, а v — его скорость (рис. 132). Энергия источника слагается из кинетической энергии $Mv^2/2$ и внутренней энергии \mathcal{E} возбужденных атомов. При испускании одного фотона внутренняя энергия \mathcal{E} изменяется на вполне определенную величину (энергия квантуется!) $\mathcal{E} - \mathcal{E}' = h\nu_0$, где ν_0 — частота фотона, испускаемого неподвижным источником. При испускании фотона тело испытывает отдачу, и его скорость меняется. По закону сохранения энергии

$$\frac{1}{2}Mv^2 + \mathcal{E} = \frac{1}{2}Mv'^2 + \mathcal{E}' + h\nu,$$

где ν — частота фотона, излучаемого движущимся источником. Написав закон сохранения импульса и спроектировав его на направление скорости \mathbf{v} и на перпендикулярное направление, получим

$$Mv = Mv' \cos \alpha + \frac{h\nu}{c} \cos \theta, \quad 0 = Mv' \sin \alpha - \frac{h\nu}{c} \sin \theta,$$

где θ и α — углы между направлением скорости v и направлениями импульсов испущенного фотона и источника после испускания. Исключая v' и α , найдем

$$2Mh(v - \nu_0) - 2Mv \frac{h\nu}{c} \cos \theta + \frac{h^2 v^2}{c^2} = 0.$$

Если масса источника M достаточно велика, то можно пренебречь последним членом, и мы получим (учитывая, что по условию $v/c \ll 1$)

$$v = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta} \approx \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right).$$

1.20* Решение. Пусть \mathcal{E} и \mathcal{E}' — полные энергии тела до и после излучения. Соответственно, \mathcal{E}_0 и \mathcal{E}'_0 — энергии покоя, а \mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы. Обозначим также энергию и импульс излученного фотона как ϵ и \mathbf{q} и запишем законы сохранения:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \epsilon; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{q}.$$

Возведем эти уравнения в квадрат и вычтем, предварительно домножив второе соотношение на c^2 . Учитывая, что $\epsilon = qc$, а $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = \mathcal{E}_0^2$ и $\mathcal{E}'^2 - p'^2 c^2 = \mathcal{E}'_0^2$, получим

$$\mathcal{E}'_0^2 = \mathcal{E}_0^2 - 2\mathcal{E}\epsilon + 2c^2 pq.$$

Релятивистский импульс тела $p = \mathcal{E}\beta/c$, где $\beta = v/c$. Подставляя это в полученное уравнение, находим

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0 = \frac{2\mathcal{E}\epsilon}{\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}'_0} (1 - \beta \cos \theta).$$

где θ — угол между импульсом тела \mathbf{p} и направлением вылета фотона (рис. 132). Для массивного тела $Mc^2 \gg h\nu$, откуда $\mathcal{E}'_0 \approx \mathcal{E}_0$, и тогда

$$\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0 \approx \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \epsilon (1 - \beta \cos \theta), \quad \text{или} \quad (\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0) \sqrt{1 - \beta^2} = \epsilon (1 - \beta \cos \theta).$$

Поскольку $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}'_0 = h\nu$, а $\epsilon = h\nu'$, то получим искомую связь частот, излучаемых неподвижным и движущимся источниками,

$$v' = v \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta}.$$

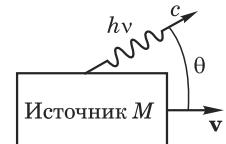


Рис. 132

При $\theta = \frac{\pi}{2}$ смещение частоты $\Delta\nu = v_0 \frac{v^2}{2c^2}$, а при $\beta \ll 1$ принимаемая частота $v \approx v_0(1 + \frac{v}{c} \cos \theta)$ и $\Delta\nu = \frac{v}{c} \cos \theta$.

1.21* Решение. При $\theta = 0$ $v(0) = v_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta}$. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ эта частота $v(\pi/2) = v_0 \sqrt{1 - \beta^2}$. Если $\beta \rightarrow 1$, то $v(0) \gg v(\pi/2)$. Отсюда ясно, что в узкой окрестности угла $\theta = 0$ частоты излучаемого света особенно велики. Найдем угол θ , для которого $v(\theta) = \alpha v(0)$, где $\alpha < 1$. Для этого угла нетрудно получить

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} = \frac{1 - (1 - \beta)/\alpha}{1 - (1 - \beta)} \approx 1 - \frac{1 - \alpha}{\alpha} (1 - \beta),$$

откуда

$$\theta^2 = 2 \frac{1 - \alpha}{\alpha} (1 - \beta).$$

Так как $\sqrt{1 - \beta^2} = mc^2/\mathcal{E}$, где \mathcal{E} — полная энергия частицы, то $1 - \beta \approx \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2$. Это дает

$$\theta = \sqrt{\frac{1 - \alpha}{\alpha}} \frac{mc^2}{\mathcal{E}}.$$

При $\alpha = 1/2$ получаем $\theta = mc^2/\mathcal{E}$, иначе говоря, частота излучения падает вдвое под углом $\theta = mc^2/\mathcal{E} = \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma^{-1}$.

1.22. $\Delta\lambda = \Lambda_e(1 - \cos \theta) = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_0 = 4 \cdot 10^{-3}$ нм.

Здесь $\Lambda_e = 2,4263 \cdot 10^{-3}$ нм — комптоновская длина волны электрона.

1.23. $T_e = \frac{2hc}{\lambda} \frac{\Lambda_e \sin^2(\theta/2)}{\lambda + 2\Lambda_e \sin^2(\theta/2)}$, $(pec)^2 = T_e^2 + 2m_e c^2 T_e$. При $\theta = 90^\circ$ $T_e = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Lambda_e}{\lambda + \Lambda_e} = 0,108 \frac{hc}{\lambda} = 0,67 \cdot 10^4$ эВ, $cpe = 8,3 \cdot 10^4$ эВ, т. е. фотон передал электрону около 10% своей энергии, а импульс электрона отдачи по абсолютной величине оказался больше импульса первичного фотона.

1.24* Решение. Как видно из рис. 133, из закона сохранения импульса следует

$$p_e \cos \varphi = \frac{hv}{c} - \frac{hv'}{c} \cos \theta, \quad p_e \sin \varphi = \frac{hv'}{c} \sin \theta.$$

Почленным делением находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{v/v' - \cos \theta}.$$

Отсюда с учетом соотношения $\frac{v}{v'} - 1 = \frac{2hv}{m_e c^2} \sin^2 \theta$ легко получить

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{ctg}(\theta/2)}{1 + \frac{hv}{m_e c^2}}.$$

При $\theta = 90^\circ$ $\operatorname{tg} \varphi = 0,8916$, $\varphi = 41^\circ 43'$.

1.25. $\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2,4263 \cdot 10^{-3}$ нм.

1.26* $0 \leq \varphi < \arccos \left(\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p} \right)^2} - \frac{mc}{p} \right)$.

Решение. Запишем закон сохранения импульса: $\mathbf{p}'_\gamma = \mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}$, откуда по теореме косинусов

$$\left(\frac{h\nu'}{c}\right)^2 = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - \frac{2h\nu}{c} p \cos\varphi + p^2.$$

Закон сохранения энергии:

$$\mathcal{E}'_\gamma = \mathcal{E}_\gamma - T = \mathcal{E}_\gamma - \mathcal{E} + mc^2,$$

т. е.

$$h\nu' = h\nu - \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} + mc^2.$$

Исключая $h\nu'$, получим

$$h\nu = \frac{(pc)^2 - T^2}{2(pc \cos\varphi - T)}.$$

Определим знак числителя:

$$(pc)^2 - T^2 = (pc)^2 - \left((pc)^2 + (mc^2)^2 - 2\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \cdot mc^2 + (mc^2)^2 \right) = \\ = 2mc^2 \left(\sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \right) > 0$$

всегда. Так как $h\nu > 0$, то и знаменатель полученной дроби тоже положителен: $pc \cos\varphi - T > 0$, откуда $\cos\varphi > \frac{T}{pc} = \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2} - \frac{mc}{p}$. Таким образом, угол, под которым мог вылететь электрон с заданным импульсом, лежит в пределах

$$0 \leq \varphi < \arccos \left(\sqrt{1 + \frac{m^2 c^4}{p^2}} - \frac{mc}{p} \right).$$

1.27. $T < 2mc^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi = 0,34 \text{ МэВ}$.

1.28. $0 \leq \varphi < 45^\circ$.

1.29. $p_0 = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_0} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \approx 6 \cdot 10^{-23} \text{ г} \cdot \text{см}/\text{с}$.

1.30. $\alpha = 90^\circ$.

1.31. $\mathcal{E}_\gamma = 2m_p c^2 \approx 1,9 \text{ ГэВ}$, где m_p — масса протона.

1.32. $v = \frac{c}{\sqrt{1 + (\lambda/\Lambda_e)^2}} \approx \frac{c}{\sqrt{2}}$, где $\Lambda_e = \frac{\hbar}{mc} = 0,0024 \text{ нм}$ — комптоновская длина волны электрона.

1.33. $\hbar\omega' = \hbar\omega_0 \frac{\left(\frac{\mathcal{E} + pc}{mc^2}\right)^2}{1 + \frac{2\hbar\omega_0}{mc^2} \frac{\mathcal{E} + pc}{mc^2}}$, где p — импульс электрона.

Случай а) $\hbar\omega' = \frac{\mathcal{E} + pc}{2} \approx \mathcal{E}$.

Ультраквантитативистский электрон ($\mathcal{E} \approx pc$) передает фотону всю свою энергию (штриховая линия на рис. 134).

Случай б) $\hbar\omega' = \hbar\omega_0 \left(\frac{\mathcal{E} + pc}{mc^2} \right)^2 \approx 4\gamma^2 \hbar\omega_0$, где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Таким образом, в этом случае $\hbar\omega' \propto \gamma^2$ (см. рис. 134).

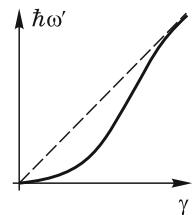


Рис. 134

1.34. $h\nu' = \frac{h\nu}{1 + \frac{2h\nu}{m_e c^2}}$. Если $h\nu \gg m_e c^2$, то $h\nu' \approx m_e c^2/2$.

1.35. При условии $T \gg \hbar\omega_0$ ответ имеет вид

$$\mathcal{E}_\gamma \approx \hbar\omega_0 \frac{\frac{2T}{(m_e c^2)^2}}{\frac{2T}{2T} + 2\hbar\omega_0}$$

(кинетическая энергия электрона $T \gg m_e c^2$, поэтому полная его энергия $\mathcal{E}_0 \approx T$). Здесь возможны два случая:

1) $\hbar\omega_0 \ll m_e c^2 \frac{m_e c^2}{T}$. Тогда $\mathcal{E}_\gamma \approx \hbar\omega_0 \left(\frac{2T}{m_e c^2}\right)^2 \approx 6,85 \text{ МэВ}$ (этот случай и реализуется в задаче);

2) $\hbar\omega_0 \gg m_e c^2 \frac{m_e c^2}{T}$. Тогда $\mathcal{E}_\gamma = \hbar\omega \approx T$. В задаче этот случай не выполняется.

Задачу можно также решить, рассмотрев два последовательных перехода: в систему покоя электрона и обратно в лабораторную систему. Оба раза частота γ -кванта будет меняться за счет эффекта Доплера.

1.36. $\lambda = 2,4 \text{ пм.}$

$$\mathbf{1.37.} \Delta\mathcal{E} = \hbar\omega = \left(\frac{2\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2 \frac{\hbar\omega_0}{1 + \frac{4\mathcal{E}\hbar\omega_0}{m^2 c^4}}.$$

Если $\mathcal{E}_0 \ll mc^2 \frac{mc^2}{4\hbar\omega_0}$, то $\hbar\omega \approx \left(\frac{2\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2 \hbar\omega_0 \ll \mathcal{E}_0$. В противоположном предельном случае $\hbar\omega \approx \mathcal{E}_0$. В приведенном примере $\hbar\omega = 10^8 \text{ эВ}$.

1.38. По формуле для эффекта Доплера

$$\omega_0 = \frac{\omega \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}$$

(фотон и электрон считаются движущимися навстречу друг другу, причем скорость электрона равна v). В ультраквантитативистском случае отсюда следует, что $\omega_0 = \omega mc^2/(2\mathcal{E}_0)$, и условие $\hbar\omega \ll mc^2$ принимает вид

$$\mathcal{E}_0 \ll \frac{(mc^2)^2}{2\hbar\omega_0}.$$

1.39* $\frac{\Delta T}{T_\Phi} = \left(1 + \frac{2\mathcal{E}}{m_e c^2}\right)^{-1} = 0,05$, где T_Φ и T_k — кинетические энергии электронов фотоэффекта и эффекта Комптона, $\Delta T = T_\Phi - T_k$.

Решение. Запишем закон Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = \mathcal{E}_{\text{ион}} + A + T_\Phi,$$

где T_Φ — кинетическая энергия фотоэлектрона, A — работа выхода вещества, $\mathcal{E}_{\text{ион}}$ — энергия ионизации электрона атома. Поскольку для самых глубоких К-электронов $\mathcal{E}_{\text{ион}} \leq 0,13,6 \cdot Z^2 \text{ [эВ]}$, где Z — заряд ядра, то даже для $Z \sim 10^2$ $\mathcal{E}_{\text{ион}} \leq 0,136 \text{ МэВ} \ll h\nu$. Величина работы выхода, как правило, не превышает 10 эВ, поэтому под действием γ -квантов (высокоэнергетичных фотонов) при фотоэффекте $T_\Phi \approx \mathcal{E}_\gamma$. При комптон-эффекте $\mathcal{E}_\gamma + m_e c^2 = \mathcal{E}'_\gamma + m_e c^2 + \mathcal{E}_{\text{ион}} +$

+ T_k . Следовательно,

$$T_k \approx \mathcal{E}_\gamma - \mathcal{E}'_\gamma = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{hc}{\lambda} \frac{\Delta\lambda}{\lambda + \Delta\lambda}.$$

Энергия электрона в эффекте Комптона максимальна, когда фотон рассеивается назад, т. е.

$$\Delta\lambda = \Lambda_e(1 - \cos\varphi); \quad \Delta\lambda_{\max} = 2\Lambda_e = 2 \frac{h}{m_e c}.$$

Таким образом,

$$T_k = \frac{hc}{\lambda} \frac{2h}{m_e c \lambda} \frac{1}{1 + \frac{2h}{m_e c \lambda}} = \mathcal{E}_\gamma \frac{2\mathcal{E}_\gamma}{m_e c^2} \frac{1}{1 + \frac{2\mathcal{E}_\gamma}{m_e c^2}}.$$

Введем разрешение аппаратуры по энергии как $\Delta T = T_\Phi - T_k$. Тогда

$$\frac{\Delta T}{T_\Phi} \approx \frac{\mathcal{E}_\gamma - T_k}{\mathcal{E}_\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{2\mathcal{E}_\gamma}{m_e c^2}} \simeq 0,05 \text{ (5%).}$$

1.40* $D = \frac{\lambda dm_e c}{2\pi\hbar \sin^2(\varphi/2)} = 11,4 \text{ нм.}$

Решение. Требуемая разрешающая способность спектрографа

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = Nm,$$

где N — число отражающих слоев, m — порядок интерференции. По условию $m=1$, а $N = D/d$. Изменение длины волны (комптоновское смещение)

$$\delta\lambda = 2\pi\Lambda_e(1 - \cos\varphi) = 4\pi\Lambda_e \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \text{где } \Lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = 3,86 \cdot 10^{11} \text{ см.}$$

Таким образом,

$$R = Nm = \frac{D}{d} \frac{2d \cos\theta}{\lambda} = \frac{\lambda}{4\pi\Lambda_e \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Отсюда

$$D = \frac{\lambda^2}{4\pi\Lambda_e \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin\theta} = \frac{\lambda dm_e c}{2\pi\hbar \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = 11,4 \text{ нм.}$$

1.41. $D_{\min} = \frac{\lambda^2}{4\Lambda_e \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin\varphi} = 2 \text{ нм, } \Lambda_e = 0,0024 \text{ нм} — \text{комптоновская длина волны электрона.}$

1.42* Решение. Перейдем в систему центра масс пары. На пороге рождения скорость продуктов реакции равна нулю. Но γ -квант и в этой системе движется со скоростью света, что противоречит закону сохранения импульса. Раз процесс невозможен в системе центра масс, то он невозможен и в других инерциальных системах, т. е. невозможен вообще.

1.44. $\theta_{\max} = 60^\circ$.

1.45. $\theta_{12} = 90^\circ; \theta_{13} = \pi - \arctg \frac{4}{3} \approx 127^\circ; \theta_{23} = \pi - \arctg \frac{3}{4} \approx 143^\circ$.

1.46. $\mathcal{E}_1 = 0,85\mathcal{E}_0 = 432 \text{ кэВ}; \mathcal{E}_2 = \frac{2}{3+\sqrt{3}}\mathcal{E}_0 \approx 216 \text{ кэВ}; \mathcal{E}_3 = \sqrt{3}\mathcal{E}_2 \approx 374 \text{ кэВ.}$

1.47. Решение. Преобразование Лоренца для энергии частицы \mathcal{E} , импульс которой p ,

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{E} - vp \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где v — скорость штрихованной (движущейся) системы отсчета, а θ — угол в неподвижной системе между направлением движения фотона и скоростью источника. Энергия фотона $\mathcal{E} = h\nu = pc$, тогда

$$v' = v \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Здесь v — частота света в неподвижной системе отсчета, v' — в движущейся вместе с источником. Переписывая ее в общепринятом виде, получим

$$v = v' \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}.$$

$$\mathbf{1.48.} \cos \theta = \frac{\Delta \mathcal{E}}{2\sqrt{2Tm_{яд}c^2}} = 0,116, \theta = 83,3^\circ; \text{ где } m_{яд}c^2 = A \cdot 931,5 \text{ МэВ.}$$

$$\mathbf{1.49.} \frac{\Delta}{\lambda} \leq \left(\frac{nv}{c} - 1\right) \frac{2\gamma}{n^2 - 1} < \frac{2\gamma}{n^2 - 1}.$$

$$\mathbf{1.50.} T_e^{\max} = \mathcal{E}_v \frac{\Delta \lambda^{\max}}{\lambda + \Delta \lambda^{\max}} = 663 \text{ кэВ, где } \Delta \lambda^{\max} = \lambda' - \lambda = 2\Lambda_e; \lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}_v} \text{ (комптон-эффект при рассеянии нейтрино на электронах).}$$

1.51* Длина волны γ -квантов от источника равна $\lambda = 1,88 \cdot 10^{-10}$ см $\gg R_{яд}$, поэтому комптоновское рассеяние идет не на нуклонах ядра, а на ядре в целом (но не на молекуле, так как $\lambda \ll R_{мол} \approx 3 \text{ \AA}$ для H_2O). Комптон-эффект на протоне $\Delta \lambda_H$ отличается от соответствующего эффекта на дейтроне $\Delta \lambda_D$. Таким образом,

$$\left| \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right| = \frac{|\Delta \lambda_H - \Delta \lambda_D|}{\lambda} = \frac{\mathcal{E}}{2m_p c^2} = 3,6 \cdot 10^{-4}.$$

$$\mathbf{1.52*} H = \frac{R_3}{2} \approx 3200 \text{ км.}$$

Решение. Если считать Землю шаром, то гравитационный потенциал на поверхности Земли $\varphi_1 = -\gamma \frac{M}{R_3} = -v_1^2$, где v_1 — первая космическая скорость. На расстоянии r от центра Земли гравитационный потенциал $\varphi_2 = -\gamma \frac{M}{r}$.

Фотон, испущенный на спутнике, имеет энергию

$$\hbar \omega_2 = \hbar \omega_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\varphi_2}{c^2}} \approx \hbar \omega_0 \left(1 + \frac{\varphi_2}{c^2}\right).$$

где ω_0 — частота генератора в нулевом поле.

Из-за движения спутника (вследствие поперечного эффекта Доплера) на Земле этот сигнал будет иметь частоту

$$\omega'_2 = \omega_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{\varphi_2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right).$$

где $v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}$ — скорость спутника. Расстояние между энергетическими уровнями приемника на Земле

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\Phi_1}{c^2}} \approx \hbar\omega_0 \left(1 + \frac{\Phi_1}{c^2}\right).$$

Сдвига частоты не будет, если $\omega_1 = \omega_2'$, откуда

$$\frac{\Phi_2}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} = \frac{\Phi_1}{c^2}, \quad \text{или} \quad \frac{\Phi_2}{c^2} - \frac{\Phi_1}{c^2} = \frac{v^2}{2c^2}.$$

Подставляя значения, получим $-\gamma \frac{M}{r} + \gamma \frac{M}{R_3} = \gamma \frac{M}{2r}$, откуда $r = \frac{3}{2}R_3$.

Как видно, для спутников GPS-системы, летающих на высотах $h \gtrsim H$, поправка к частоте имеет разные знаки.

1.53. Угол рассеяния $\theta = \pi/3$.

1.54. $t = \frac{N}{n\sigma c} = 1,8 \cdot 10^5$ лет, где $N \approx 120$ — количество актов рассеяния, необходимое для охлаждения фотонов.

1.55. $\mathcal{E}_{\text{отд}}^{\max} = 2\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} = 21,5$ кэВ.

§ 2. Волны де Броия. Соотношение неопределенностей

2.1. $T_p \approx 880$ МэВ; $T_e \approx pc \approx 1550$ МэВ.

2.2. $T = mc^2(\sqrt{2}-1) = 0,212$ МэВ.

2.3. $\lambda' = \sqrt{5/3} \lambda = 0,00129$ нм.

2.4.* $m_\gamma \lesssim 2 \cdot 10^{-43}$ г; $m_\gamma c^2 \lesssim 1,1 \cdot 10^{-10}$ эВ.

Решение. Допустим, что фотон (квант электромагнитной энергии) имеет энергию покоя $m_\gamma c^2$. Тогда согласно релятивистской формуле его полная энергия

$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2 c^2 + m_\gamma^2 c^4},$$

где p — релятивистский импульс фотона. Скорость фотона

$$u = \frac{dp}{dp} = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m_\gamma^2 c^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 + (m_\gamma c \lambda/h)^2}}, \quad \frac{u}{c} = \left[1 + \left(\frac{m_\gamma c \lambda}{h}\right)^2\right]^{-1/2} \geqslant 1 - \delta.$$

В этом выражении $\lambda = h/p$ — дебройлевская длина волны фотона. Заметим что скорость фотона в вакууме зависит от длины волны λ , т. е. в этом случае должна наблюдаться дисперсия электромагнитных волн в вакууме.

По условию задачи $\delta = 5 \cdot 10^{-4}$, поэтому $m_\gamma \lesssim \frac{2h^2 \delta}{c^2 \lambda^2} \approx 2 \cdot 10^{-43}$ г.

2.5. Как следует из решения задачи 2.4, если у фотона ненулевая масса, то его энергия покоя $m_\gamma c^2 \leq \frac{2hc}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\Delta L}{L}} \approx 0,6 \cdot 10^{-8}$ эВ.

2.6. $n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{\mathcal{E} + A_0}{\mathcal{E}}} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}$ (\mathcal{E} и V соответственно энергия электрона в вакууме и разность потенциалов, пройденная им).

2.8. $2d\sqrt{n^2 - \cos^2 \theta} = m\lambda_0$, где λ_0 — длина волны в вакууме, n — показатель преломления волн де Броиля, θ — угол скольжения.

$$\mathbf{2.9.} n = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}} = 1,05.$$

$$\mathbf{2.10*} n = \sqrt{\frac{T + |e|V_1}{T}} = 1,17; V_2 = -\frac{3}{4} \frac{T}{|e|} = -75 \text{ В}, \text{ где } e \text{ — заряд электрона.}$$

Решение. Очевидно, что полная энергия электрона, преодолевающего потенциальный барьер, сохраняется: $\mathcal{E} = T + U = \text{const}$, откуда $T = T_1 + eV_1$, где T и T_1 — кинетическая энергия до и после барьера. При этом

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2}{2m},$$

p_{\perp} и p_{\parallel} — нормальная и касательная к границе раздела компоненты импульса. Поскольку скачок U связан с силами, действующими перпендикулярно к границе (электрического поля), то $p_{\parallel} = \text{const}$; откуда $p \sin \varphi = p_1 \sin \varphi_1$. Относительным коэффициентом преломления сред является величина

$$n = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{h/p}{h/p_1} = \frac{p_1}{p} = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_1} = \sqrt{\frac{T - eV_1}{T}} = \sqrt{1 + \frac{|e|V_1}{T}}.$$

Полное отражение электронов произойдет, когда $\sin \varphi_1 = 1$ (при этом разность потенциалов равна V_2), т. е.

$$\sin \varphi_1 = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + |e|V_2/T}} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{1}{4} = 1 + \frac{|e|V_2}{T},$$

откуда и следует второй ответ.

$$\mathbf{2.11.} \mathcal{E} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{L}{Ra} \right)^2 \approx 1,2 \cdot 10^4 \text{ эВ.}$$

2.12* Решение. Для нерелятивистского электрона $\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \propto \frac{1}{\lambda^2}$. Поэтому искомую немонохроматичность электронов $\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$ легко оценить по числу наблюдаемых отражений $m_{\max} = 12$, откуда следует $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} \approx \frac{\lambda}{12}$. И далее $\left| \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right| = 2 \left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = \frac{1}{6}$.

Вне металла скорость электрона $v_1 \propto \sqrt{V}$, внутри металла $v_2 \propto \sqrt{V_0 + V}$, где V_0 — внутренний потенциал металла. Таким образом, показатель преломления металла

$$n = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}.$$

Эквидистантное расположение максимумов интенсивности отраженных электронов наблюдается, когда внутренний потенциал металла $V_0 \ll V$. Это соответствует показателю преломления кристалла $n = 1$ (для $m \geq 6$). В этом случае в соответствии с формулой Брэгга–Вульфа (рис. 135)

$$2d \sin \varphi = m\lambda; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meV}}; \quad \sqrt{V} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda\sqrt{2me}}.$$

Последнее соотношение обычно записывают как

$$\sqrt{V} = \frac{12,26}{\lambda[\text{\AA}]} = \frac{12,26m}{2d \sin \varphi},$$

где d следует подставлять в ангстремах [\AA], а результат \sqrt{V} получается в $\text{B}^{1/2}$. В нашем случае при $m=1$ $\sqrt{V}=3,06 \text{ B}^{1/2}$, и поэтому межплоскостное расстояние $d=2,03 \text{ \AA}$. Из рис. 5 и условия задачи следует, что при $m < 6$ максимумы интенсивности незквидистанты. Это означает, что при соответствующих энергиях показатель преломления отличается от 1.

Закон преломления волн де Броиля идентичен классическому закону Снеллиуса:

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \psi} = n; \quad \cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi}.$$

По формуле Брэгга–Вульфа $n \cdot 2d \sin \theta = m\lambda$, или $n \cdot 2d \cos \psi = m\lambda$, откуда следует

$$2d \sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi} = m\lambda.$$

Обозначим через V' ускоряющий потенциал, соответствующий энергиям электронов, когда $n \neq 1$. Тогда

$$\sqrt{V'} = \frac{12,26}{\lambda[\text{\AA}]} = \frac{12,26m}{2d \sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi}}.$$

Из соотношения $\sqrt{\frac{V}{V'}}$ мы и определим n : $\sqrt{\frac{V}{V'}} = \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \varphi}}{\sin \varphi}$, откуда $n = \left(\frac{V}{V'} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \right)^{1/2}$.

Для $m=5$; $\sqrt{V'}=14,68 \text{ B}^{1/2}$; $\sqrt{V}=15,3 \text{ B}^{1/2}$; $n=1,04$.

Для $m=4$; $\sqrt{V'}=11,42 \text{ B}^{1/2}$; $\sqrt{V}=12,24 \text{ B}^{1/2}$; $n=1,07$.

Для $m=3$; $\sqrt{V'}=8,16 \text{ B}^{1/2}$; $\sqrt{V}=9,18 \text{ B}^{1/2}$; $n=1,12$.

2.13. $\sin \theta = \sin \theta_0 \pm (u/v)$, где знак \pm определяет направление движения кристалла ($\langle + \rangle$ — вниз, $\langle - \rangle$ — вверх). Отражение возможно при скоростях u , удовлетворяющих соотношению $|\sin \theta_0 \pm \frac{u}{v}| \leq 1$.

2.14. $T = \frac{h^2}{3mk\lambda^2} = 14 \text{ K}$, $d = \frac{\lambda}{2} = 0,335 \text{ nm}$.

2.15* $D \geq \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} = 82 \text{ \AA}$.

Решение. Согласно условию Брэгга–Вульфа первый порядок ($m=1$) отражения соответствует углу

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{2d}.$$

Длина волны, соответствующая энергии нейтрона $\mathcal{E}=1 \text{ эВ}$, равна $0,287 \text{ \AA}$, поэтому $\frac{\lambda}{2d} \approx 0,06$. Это означает, что $\sin \varphi \approx \varphi \approx 0,06$. Очевидно, что $\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$.

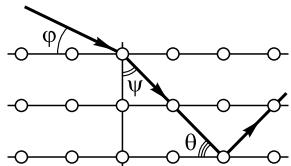


Рис. 135

Дебройлевская длина волны $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} \propto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}$. Поэтому $\left| \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right|$, откуда

$$\Delta\mathcal{E} = 2\mathcal{E} \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\mathcal{E} \frac{\Delta\varphi}{\varphi} \approx 0,057 \text{ эВ.}$$

Толщину кристалла D выберем из тех соображений, что разрешающая способность такой системы $R = mN \geq \lambda/\Delta\lambda$, т. е. при $m=1$ и числе интерферирующих пучков, равном числу слоев, $N=D/d$:

$$\frac{D}{d} \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\lambda}{2d\Delta\varphi},$$

откуда

$$D \geq \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} \approx 82 \text{ \AA}.$$

Приведем *другое решение* этой задачи. Рассмотрим бесконечную решетку в направлении оси X (рис. 136). Волновая функция всей решетки представляется собой плоскую волну $A \exp(i \frac{p_x x}{\hbar})$, где p_x — импульс решетки в направлении

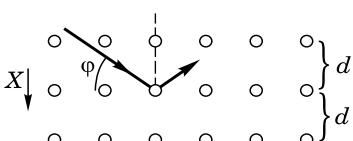


Рис. 136

оси X . При смещении всей решетки вдоль X на период d волновая функция умножается на $\exp(i \frac{p_x d}{\hbar})$ и переходит сама в себя. Отсюда $p_x d = 2\pi m \hbar$, т. е. импульс, передаваемый решетке, квантован! При упругом отражении $p_x = 2p \sin \varphi$, откуда следует $2d \sin \varphi = m \frac{h}{p} = m\lambda$. Таким образом, мы получили условие Брэгга–Бульфа.

Если же решетка ограничена по x , то передаваемый по X решетке импульс приобретает неопределенность $\delta p_x \geq h/D$. С другой стороны, $\delta p_x = 2p \delta(\sin \varphi) = 2p \cos \varphi \delta\varphi$. Поскольку $\cos \varphi \approx 1$, то

$$\delta\varphi = \frac{\delta p_x}{2p} \gtrsim \frac{h}{D \cdot 2p} \approx \frac{\lambda}{2D}.$$

Таким образом, искомая толщина кристалла $D \geq \frac{\lambda}{2\delta\varphi}$. Полагая $\delta\varphi \approx \Delta\varphi = 0,1^\circ$, получим ответ.

$$2.16^*: T \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{5kmd^2 \theta^2} \approx 470 \text{ К.}$$

Решение. Под интенсивностью пучка молекул понимается плотность потока молекул с размерностью $[1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})]$. Плотность потока молекул, если считать их распределение по скоростям максвелловским, в интервале скоростей от v до $v+dv$ равна

$$dj(v) \propto v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv. \quad (2.1)$$

Далее пучок молекул испытывает рассеяние на кристаллических плоскостях LiCl. По условию Брэгга–Бульфа $2d \sin \theta = \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}$, где согласно графику порядок интерференции равен 1, а m — масса молекулы водорода. Отсюда следует $v = \frac{\pi\hbar}{md \sin \theta}$. Из пучка шириной $d\theta$ дифракционное рассеяние испытывают молекулы из интервала скоростей dv , при этом

$$2d \cos \theta d\theta = -\frac{2\pi\hbar}{mv^2} dv,$$

откуда $dv \propto v^2 \cos\theta(v) d\theta$. Подставляя dv в (*), получим выражение для полного числа актов рассеяния молекул (плотность потока) в угол $d\theta$, имеющих скорость из заданного интервала скоростей, с точностью до известных констант

$$dN_{v,0} \propto v^3 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) mv^2 \cos\theta(v) d\theta.$$

Из графика на рис. 8 примем, что $\theta \approx 11^\circ$. Полагая, что $\cos\theta \approx 1$, $d\theta = \text{const}$, найдем экстремум этой функции:

$$\frac{d}{dv} \left[v^5 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \right] = 0, \quad \text{откуда} \quad mv_{\max}^2 = 5kT.$$

Таким образом,

$$T = \frac{m}{5k} \left(\frac{\pi\hbar}{md \sin\theta} \right)^2 \approx \frac{\pi^2 \hbar^2}{5kmd^2 \theta^2} \approx 470 \text{ К.}$$

2.17. $\lambda = \frac{h\varphi}{m\Omega R} = 0,92 \text{ нм}$, $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{a}{l\varphi} = 0,072$.

2.18. $\frac{\hbar\varphi}{mLn} = 0,6 \text{ нм}$; $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{b}{R\varphi} = 0,2$; $b_{\text{оптим}} = \sqrt{\lambda L} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ (заметим, что этот численный ответ зависит от того, в какой форме взять соотношение неопределенностей: $\Delta p \approx \hbar$ или h).

2.19. $q < \frac{\Delta\varphi\hbar v_0}{Vl} \approx 5 \cdot 10^{-23} \text{ ед. СГСЭ.}$

2.20* $d < \frac{\Delta\varphi\hbar v_0}{lE} \approx 5 \cdot 10^{-25} \text{ ед. СГСЭ, или } d < e \cdot 10^{-15} \text{ см, где } e \text{ — заряд электрона в ед. СГСЭ.}$

Решение. Без поля сдвиг фаз на участке длиной l (разность хода!) $\varphi_0 2\pi l/h = lp_0/\hbar$, где p_0 — импульс частицы. При включенном поле импульснейтрана должен измениться на Δp , и появится сдвиг фаз $\varphi_1 = l(p_0 + \Delta p)/\hbar$. Разность сдвигов фаз $\varphi_1 - \varphi_0 = \Delta\varphi = l\Delta p/\hbar$. Изменение импульса найдем из закона сохранения энергии (работа поля равна изменению кинетической энергии)

$$\frac{(p_0 + \Delta p)^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} = Ed.$$

Из этого уравнения следует, что

$$\Delta p = -p_0 + \sqrt{p_0^2 + 2mEd} \approx \frac{mEd}{p_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{mEd}{p_0} \right)^2 > Ed/v_0.$$

Отсюда получим $\Delta\varphi > \frac{l}{h} \frac{Ed}{v_0}$ и дипольный момент $d < \frac{\Delta\varphi\hbar v_0}{lE}$.

2.21* $\theta \approx m \frac{2h}{\sqrt{2m_e T \lambda}} \approx m \cdot 10^{-4} \text{ рад, где } m = 1, 2, 3, \dots$

Решение. В резонаторе лазера устанавливается стоячая волна типа $E(x, t) \propto \sin kx e^{-i\omega t}$ (рис. 137a). Электронная дебройлевская волна рассеивается на пучностях поля \mathbf{E} стоячей волны, которые отстоят друг от друга на $\lambda/2$. Это и есть период структуры. От этих «плоскостей» происходит зеркальное отражение. Условие Брэгга–Вульфа (рис. 137б) $2d \sin\varphi = m\lambda_{dB}$; $\lambda_{dB} = h/p$.

Поскольку кинетическая энергия электронов $T \ll m_e c^2$, то их можно считать нерелятивистскими. Поэтому $T = p^2/(2m_e)$ и $p = \sqrt{2m_e T}$. По условию угол скольжения $\varphi \ll 1$, таким образом,

$$\varphi \approx m \frac{\lambda_{\text{ДБ}}}{2d} = m \frac{h}{\lambda \sqrt{2m_e T}}.$$

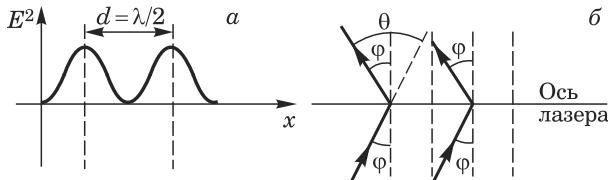


Рис. 137

Искомые углы отклонения

$$\theta = 2\varphi = m \frac{2h}{\lambda \sqrt{2m_e T}} \approx m \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

$$2.22^*: w = \frac{v}{2} + \frac{\text{const}}{v}, \quad h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + \text{const}.$$

Решение. По формуле Рэляя групповая скорость $u = w - \lambda dw/d\lambda$. Полагая здесь $\lambda = h/p = h/(mv)$, $u = v$ и рассматривая движение с нерелятивистскими скоростями, получим

$$v = w + v \frac{dw}{dv} = \frac{d}{dv}(wv),$$

откуда

$$wv = \frac{v^2}{2} + \text{const}, \quad w = \frac{v}{2} + \frac{\text{const}}{v}.$$

Далее,

$$v = \frac{w}{\lambda} = \frac{v/2 + \text{const}/v}{h/(mv)} = \frac{mv^2/2 + \text{const}}{h}.$$

Во всех явлениях произвольные постоянные, входящие в выражениях для v и w , не играют роли. Их можно положить равными нулю.

Разумеется, решение можно распространить и на движения с релятивистскими скоростями. Тогда, если отбросить не играющие роли постоянные интегрирования, формулы примут вид

$$w = \frac{c^2}{v}, \quad h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

2.23* Решение. Если электрон прошел через щель, то в плоскости самой щели координата x будет фиксирована с точностью $\Delta x \sim d$, где d — ширина щели. Однако в результате дифракции на щели волновая функция ψ электрона будет иметь максимумы и минимумы. Электрон может быть обнаружен в любом месте, где $\psi \neq 0$. Наиболее интенсивным получится максимум нулевого порядка. Его угловая ширина равна 2θ , причем $d \sin \theta = \lambda$. Практически достаточно принять во внимание именно этот максимум. В этом приближении после прохождения через щель неопределенность Δp_x импульса

электрона получится порядка $\Delta p_x = p \sin \theta = (h/\lambda) \sin \theta = h/d$. Таким образом, $\Delta x \Delta p_x \sim h$. Более определенное неравенство, которому должны удовлетворять Δx и Δp_x , с помощью этих соображений указать нельзя, поскольку не указан точный смысл самих величин Δx и Δp_x .

2.24* При рассеянии фотона на электроне рассеянный фотон может попасть в любую точку плоскости изображения. Дифракционная картина в этой плоскости состоит из концентрических светлых и темных колец с центральным светлым кружком, называемым кружком Эйри, радиус которого равен $R \approx \lambda/\beta$ (рис. 138). Практически рассеянный фотон может быть зафиксирован только внутри кружка, поскольку интенсивность там наибольшая. В этом приближении положение точки попадания фотона в плоскости изображения может быть определено с точностью порядка R . Неточность положения Δx электрона в предметной плоскости найдется из условия синусов Аббе $R\beta = \Delta x \sin \alpha$, т. е. $\lambda = \Delta x \sin \alpha$. При рассеянии фотона на электроне последний испытывает отдачу, в результате чего импульс электрона получает неконтролируемое приращение $\Delta p_x \sim (h/\lambda) \sin \alpha$. Таким образом, $\Delta x \Delta p_x \sim h$.

2.25* Решение. Пусть телом является идеально отражающее зеркало, а свет падает нормально на его поверхность. На основании законов сохранения энергии и импульса

$$\hbar\omega_0 + \frac{1}{2}Mv_0^2 = \hbar\omega + \frac{1}{2}Mv^2, \quad \frac{\hbar\omega_0}{c} + Mv_0 = -\frac{\hbar\omega}{c} + Mv,$$

где M — масса тела, v_0 и v — его скорости до и после отражения света, ω_0 , и ω — частоты падающего и отраженного фотонов. Переписав эти уравнения в виде

$$M(v^2 - v_0^2) = 2\hbar(\omega - \omega_0), \quad M(v - v_0) = \frac{\hbar}{c}(\omega + \omega_0), \quad (*)$$

почленным делением находим

$$v + v_0 = 2c \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega}. \quad (**)$$

Для массивного зеркала $Mv^2/2 \gg \hbar\omega$. Поэтому $v \approx v_0$, и тогда

$$v \approx v_0 = c \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0 + \omega}.$$

Измерив частоты ω_0 и ω , можно по этой формуле вычислить скорость зеркала v . Частоту ω_0 можно считать измеренной точно. Тогда ошибка Δv в значении скорости будет определяться неточностью измерения частоты ω . Чтобы измерить ω с точностью $\Delta\omega$, надо производить измерение в течение времени Δt , удовлетворяющего условию $\Delta\omega\Delta t \sim 2\pi$. На основании (**)

$$\Delta v = -c \frac{2\omega_0 \Delta\omega}{(\omega_0 + \omega)^2} \approx -c \frac{\Delta\omega}{2\omega_0}.$$

Так как моменты отражения фотона известны с ошибкой Δt , то неточность в значении скорости v приведет к ошибке Δx в определении коорди-

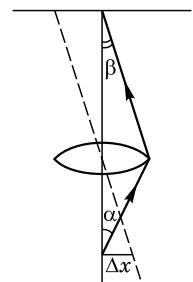


Рис. 138

наты зеркала:

$$\Delta x \sim |\Delta v \Delta t| \sim \frac{c}{2\omega_0} |\Delta \omega \Delta t| \sim \frac{\pi c}{\omega_0}.$$

Согласно (*) при взаимодействии с фотоном зеркало получает неконтролируемое изменение импульса $\Delta p \sim 2\omega_0 \hbar/c$. Следовательно, $\Delta x \Delta p \sim 2\pi \hbar/c$ и

$$\Delta x \Delta p \sim 2\pi \hbar = h.$$

2.26. Условие разрешения объекта с характерным размером l : $\lambda_{\text{дБ}} \leq l$ или $h/p \leq l$, откуда $T > mc^2 \sqrt{1 + (\Lambda/l)^2} - mc^2$, где $\Lambda = h/(mc)$ — комптоновская длина волны электрона (протона).

Для электрона: $T \gtrsim 1,24 \text{ ГэВ}$ ($l \sim 10^{-13} \text{ см}$) и $T \gtrsim 12,4 \text{ ТэВ}$ ($l \sim 10^{-17} \text{ см}$).

Для протона: $T \gtrsim 620 \text{ МэВ}$ ($l \sim 10^{-13} \text{ см}$) и $T \gtrsim 12,4 \text{ ТэВ}$ ($l \sim 10^{-17} \text{ см}$).

2.27. $d_{\min} = 2 \sqrt{\frac{2Lh}{\sqrt{2m_p \mathcal{E}}}} \approx 8,5 \text{ мкм.}$

2.28. $b = d + \frac{2hcl}{derB}$, откуда $b_{\min} = 2 \sqrt{\frac{2hcl}{erB}} \approx 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$

2.29. $d_{\min} = 2 \sqrt{\frac{2h\tau}{m_e}} = 7,6 \text{ мкм.}$

2.30. $d \approx 2 \sqrt{\frac{2hL}{\sqrt{3mkT}}} \approx 7,5 \text{ мкм.}$

2.31* $\Delta r \sim 2 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$

Решение. Обмен «виртуальными» частицами — основной язык описания взаимодействия между реальными частицами в квантовой теории поля. Виртуальная частица — это частица, время жизни которой определяется соотношением неопределенностей, а не какими-либо другими физическими процессами. У виртуальной частицы есть энергия \mathcal{E} , импульс p , масса m . Однако для нее не выполняется обычное релятивистское соотношение, и поэтому $\mathcal{E} \neq \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$. Например, виртуальный фотон может обладать энергией и покоиться! Одна и та же частица, в зависимости от ситуации, может быть либо реальной, либо виртуальной. В связи с возникновением такой частицы в системе возникает неопределенность энергии $\Delta \mathcal{E}$, которая определяет время жизни виртуальной частицы $\tau \sim \hbar/\Delta \mathcal{E}$. Через время $\tau \sim \hbar/\Delta \mathcal{E}$ она поглощается либо самой испустившей ее реальной частицей, либо другой реальной частицей, и энергетический баланс в системе восстанавливается. В процессах испускания и поглощения выполняется закон сохранения импульса (хотя направление импульса может и не совпадать с классическим).

При рассмотрении низкоэнергетических процессов, когда $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 \ll (mc^2)^2$, можно считать, что $\Delta \mathcal{E} \approx mc^2$, и тогда $\tau \sim \hbar/(mc^2)$. За это время частица может пройти расстояние $l \approx c\tau \sim \hbar/(mc) = \Lambda_K$ — т. е. расстояние, равное комптоновской длине волны частицы. Это и есть радиус взаимодействия, обусловленный обменом виртуальными квантами ядерного поля, т. е. пионами, комптоновская длина волны которых $\Lambda_\pi \approx 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, т. е. исходное $\Delta r \sim 2 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$

2.32. $\mathcal{E} \gtrsim \hbar^2/(8mr^2)$. Для электрона в атоме $\mathcal{E} \gtrsim 1 \text{ эВ}$, для электрона в атомном ядре $\mathcal{E} \gtrsim 10^{10} \text{ эВ} = 10^4 \text{ МэВ}$. Электрон, будучи лептоном, может бытьдержан в ядре только кулоновскими силами. Однако энергия взаимодействия $\sim Ze^2/R_{\text{яд}} \sim 1 \text{ МэВ} \ll \mathcal{E} \sim 10^4 \text{ МэВ.}$

2.33* Решение. В полях такой напряженности из-за рождения виртуальных пар вакуум становится «поляризованной средой», а уравнения Максвелла теряют свойство линейности. Виртуальная пара живет время $\tau \sim \frac{\hbar}{\Delta \mathcal{E}} \sim \frac{\hbar}{2mc^2}$. Чтобы виртуальные частицы стали реальными, на длине c (на комптоновской длине волн) за счет работы электрического поля E должна набираться энергия большая, чем $2mc^2$, т. е. $2mc^2 \approx eE\tau \sim \frac{eE\hbar}{2mc}$, откуда $E \sim \frac{4m^2c^3}{e\hbar} \approx 2 \cdot 10^{14}$ ед. СГСЭ = $6 \cdot 10^{16}$ В/см.

$$\mathbf{2.34. } d = 0,61 \frac{h}{A\sqrt{2meV}} = 0,024 \text{ нм.}$$

2.35. $A = 0,83$ (в нерелятивистском приближении $A = 1,73$). Числовая апертура A определяется из соотношения для минимально разрешаемого микроскопом расстояния $l \geq 0,61\lambda_e/A$, где $l = \hbar^2/(m_\mu e^2)$ — размер мезоатома, $\lambda_e = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{(eV)^2 - (m_e c^2)^2}}$ — дебройлевская длина волны электрона.

$$\mathbf{2.36. } A \approx \frac{h}{d\sqrt{2meV}} = 1,37 \cdot 10^{-2}.$$

$$\mathbf{2.37. } V = \frac{h^2}{2m_e e} \frac{1}{\lambda_{\text{опт}}^2} \left(\frac{\sin u_{\text{опт}}}{\sin u_{\text{эл}}} \right)^2 \approx 450 \text{ В, где } u \text{ — угловая апертура.}$$

2.38. $\langle x \rangle \approx \frac{4(\epsilon+1)}{\epsilon-1} r_1 \approx 76 \text{ \AA}$, где $r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см — радиус первой боровской орбиты в атоме водорода. Энергия связи

$$\mathcal{E}_{\text{св}} \approx -\frac{me^4}{32\hbar^2} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \right)^2 = -\mathcal{E}_{\text{ион}} \frac{1}{16} \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \right)^2 \approx -6,5 \cdot 10^{-4} \text{ эВ,}$$

где $\mathcal{E}_{\text{ион}} = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ эВ}$ — энергия ионизации атома водорода.

$$\mathbf{2.39*} \mathcal{E}_0 \approx 1,5 \left(\frac{k^2 \hbar^2}{m} \right)^{1/3}, \quad l \approx \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{km}}.$$

Решение. В n -м стационарном состоянии квантовой системы, как следует из уравнений Шредингера, средние значения кинетической и потенциальной энергии удовлетворяют соотношению

$$\langle \widehat{T}_n \rangle + \langle \widehat{U}_n \rangle = \mathcal{E}_n,$$

где $\widehat{T} = \frac{\widehat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$; $\widehat{U} = U(x)$; \mathcal{E}_n — полная энергия системы, а угловые скобки означают квантово-механическое усреднение по состоянию с заданной волновой функцией. Таким образом, $\frac{\langle \widehat{p}^2 \rangle}{2m} + k\langle x \rangle = \mathcal{E}_n$. Для оценки энергии основного состояния воспользуемся тем, что в основном состоянии ($n=0$) неопределенность координаты $\delta x \sim \langle x \rangle$, а неопределенность импульса $\delta p \sim \langle \widehat{p} \rangle$ и $\langle \widehat{p} \rangle^2 \sim \langle \widehat{p}^2 \rangle$. Согласно соотношению неопределенностей получаем $\langle \widehat{p} \rangle \langle x \rangle \sim \hbar$, откуда (выражая, например, $\langle x \rangle$ через $\langle \widehat{p} \rangle$) получим

$$\frac{\langle \widehat{p} \rangle^2}{2m} + \frac{k\hbar}{\langle \widehat{p} \rangle} = \mathcal{E}_0.$$

В основном состоянии энергия системы минимальна. Поэтому $\frac{\partial \mathcal{E}_0}{\partial \langle \widehat{p} \rangle} = 0$, т. е.

$$\frac{\langle \widehat{p} \rangle}{m} - \frac{k\hbar}{\langle \widehat{p} \rangle^2} = 0,$$

откуда $\langle \hat{p} \rangle = p_0 = \sqrt[3]{km\hbar}$, а размер области локализации частицы в данной яме $l = \langle x \rangle = \frac{\hbar}{p_0} = \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{km}}$. Для энергии основного состояния получаем

$$\mathcal{E}_0 = \frac{3}{2m}(km\hbar)^{2/3} = 1,5 \left(\frac{k^2 \hbar^2}{m} \right)^{1/3}.$$

Приведем для сравнения точный результат, полученный из решения уравнения Шредингера для данного потенциала: $\mathcal{E}_0 = 1,856 \left(\frac{k^2 \hbar^2}{m} \right)^{1/3}$. Видно, что точность нашего приближенного подхода составляет примерно 20%.

2.40* Решение. Угол φ между направлением полета частиц и направлением излучения определяется из равенства

$$\cos \varphi = \frac{c}{nv}.$$

Дифференцируем это выражение и заменяем дифференциалы конечными приращениями:

$$\sin \varphi \Delta \varphi = \frac{c}{nv^2} \Delta v = \frac{c}{nm_e v^2} \Delta p.$$

Электрон, находясь в слое вещества толщиной d , имеет неопределенность импульса $\Delta p \approx \hbar/d$, откуда следует неопределенность угла

$$\Delta \varphi \approx \frac{c\hbar}{dnm_e v^2 \sin \varphi}.$$

2.41* Решение. Чтобы имело смысл представление о классическом движении электрона по первой боровской орбите, необходимо выполнение соотношения $\Delta r \ll r_1$, где $r_1 = \hbar^2/(me^2)$ — радиус этой орбиты, а Δr — неопределенность положения электрона по радиусу. Но тогда по соотношению неопределенностей соответствующая неопределенность в импульсе будет

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta r} \gg \frac{\hbar}{r_1} = \frac{me^2}{\hbar}.$$

т. е. равна самому импульсу электрона $p = me^2/\hbar$. Однако по мере увеличения орбиты (увеличения квантового числа n), движение становится все более «классическим», что и постулируется принципом соответствия Бора.

$$\mathbf{2.42.} \quad \frac{l_n}{\lambda} = n; \quad \lambda = \frac{\hbar^2 n}{2\pi m e^2 Z} = 3,32 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{n}{Z} \text{ см.}$$

2.43* Решение. В стационарном состоянии квантово-механические средние значения кинетической и потенциальной энергий системы связаны соотношением

$$\langle \hat{T} \rangle + \langle \hat{U} \rangle = \mathcal{E},$$

где \mathcal{E} — полная энергия системы.

$$B \text{ случае атома водорода} \quad \hat{U} = -\frac{e^2}{r}; \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu}.$$

Если атом находится в основном состоянии, то $\Delta p \sim p$; $\Delta r \sim r$. Так как $\Delta p \Delta r \sim \hbar$, то $\mathcal{E} \gtrsim \frac{\hbar}{2\mu r^2} - \frac{e^2}{r}$. Правая часть достигает минимума при

$$r = \frac{\hbar^2}{\mu e^2},$$

чем и определяется порядок величины размера атома водорода в основном состоянии. Соответствующая энергия

$$\mathcal{E} \gtrsim -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}.$$

В случае двухатомной молекулы (если не учитывать ее вращение)

$$\langle \widehat{T} \rangle = \frac{\widehat{p}_x^2}{2\mu}; \quad \langle U \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 \langle x^2 \rangle,$$

причем в силу соотношения неопределенностей в форме Вейля

$$(\langle \widehat{p}_x^2 \rangle - \langle \widehat{p}_x \rangle^2)(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2) \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

В силу симметрии потенциальной ямы $\langle \widehat{p}_x \rangle = \langle x \rangle = 0$, и тогда

$$\langle \widehat{p}_x^2 \rangle \langle x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E} \geq \frac{\hbar^2}{8\mu \langle x^2 \rangle} + \frac{1}{2} \mu \omega_0^2 \langle x^2 \rangle.$$

Правая часть достигает минимума при $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega_0}$. Следовательно,

$$\mathcal{E} \geq \frac{1}{2} \hbar \omega_0.$$

Основное состояние — это состояние с минимально возможной энергией, и для него

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0, \quad \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}}.$$

Среднеквадратичное смещение атома в основном состоянии — квантовый аналог амплитуды нулевых колебаний молекулы: $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega_0}}$.

$$\mathbf{2.44^*:} \sqrt{\frac{4\hbar m}{\tau^3}}.$$

Решение. Минимальная сила, действие которой может быть определено по отклику свободной частицы (пробного тела) определяется квантово-механическими особенностями пробного тела и временем действия силы. При обнаружении малого внешнего воздействия на пробную квантово-механическую частицу требуются как минимум два измерения: начальной координаты и конечной (через время τ). При этом мы не рассматриваем «снос» частицы $x = v_0 t$, где v_0 — скорость свободной частицы, поскольку он не влияет на ответ.

Под действием силы частица движется с ускорением a и за время τ переместится на расстояние $l = at^2/2 = F\tau^2/(2m)$. Этот результат справедлив и в квантовой механике. Зная координату частицы $x(0)$, т. е. в момент $t=0$, мы могли бы знать положение частицы в момент $t=\tau$: $x(\tau) = x(0) + l$. Следовательно, по крайней мере одно измерение координаты нам было бы необходимо.

Согласно основным представлениям квантовой механики при измерении вносится неконтролируемая неопределенность $\langle \Delta x_0^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. В результате после измерения координаты возникает разброс в значении импульса $\langle \Delta p_x^2 \rangle$, который можно найти из соотношения неопределенностей в форме

Вейля:

$$\langle \Delta x_0^2 \rangle \langle \Delta p_x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}, \quad \text{откуда} \quad \langle \Delta p_x^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4 \langle \Delta x_0^2 \rangle}.$$

Через время τ это приводит к неопределенности в пройденном расстоянии (конечную координату мы можем измерить сколь угодно точно)

$$\langle \Delta x_\tau^2 \rangle = \frac{\langle \Delta p_x^2 \rangle \tau^2}{m^2} \geq \frac{\hbar^2 \tau^2}{4m^2 \langle \Delta x_0^2 \rangle}.$$

Складывая обе дисперсии, в силу их статистической независимости получим

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \langle \Delta x_0^2 \rangle + \langle \Delta x_\tau^2 \rangle \geq \langle \Delta x_0^2 \rangle + \frac{\hbar^2 \tau^2}{4m^2 \langle \Delta x_0^2 \rangle}.$$

Минимизируя полученное выражение по $\langle \Delta x_0^2 \rangle$, определяем неопределенность первого измерения координаты, которая обеспечит минимальную неопределенность пройденного за время τ пути $\langle \Delta x_0^2 \rangle_{\min} = \hbar \tau / (2m)$. Это соответствует $\langle \Delta x^2 \rangle_{\min} = \hbar \tau / m$.

Силу можно будет зарегистрировать, если смещение l под действием силы окажется больше неопределенности пути:

$$\frac{F \tau^2}{2m} \geq \sqrt{\frac{\hbar \tau}{m}},$$

откуда

$$F_{\min} = \frac{2m}{\tau^2} \sqrt{\frac{\hbar \tau}{m}} = \sqrt{\frac{4m\hbar}{\tau^3}}.$$

$$\mathbf{2.45^*} F_{\min} = \sqrt{\frac{8\hbar^2 m}{\mathcal{E}_0 \tau^4}}.$$

Решение. В этом случае мы измеряем энергию частицы до действия силы и после. Первое измерение дает значение начальной энергии. Точность $\Delta \mathcal{E}$ такого измерения зависит от длительности измерения τ_1 , т. е. $\Delta \mathcal{E} = \hbar / \tau_1$ (в принципе, при достаточно большом τ_1 она может быть сделана сколь угодно малой). Поскольку полное время наблюдения ограничено величиной τ , то часть этого времени должна быть затрачена на измерение начальной энергии, а в оставшуюся часть времени $\tau - \tau_1$ будет происходить изменение энергии за счет работы силы F .

За время $\tau - \tau_1$ при условии $F \tau_1 \ll p_0$ изменение энергии

$$\Delta \mathcal{E}_0 = \frac{p_0 \Delta p}{m} = p_0 \frac{F(\tau - \tau_1)}{m}.$$

Это изменение энергии можно обнаружить, если $\Delta \mathcal{E}_0 > \Delta \mathcal{E} = \hbar / \tau_1$, откуда

$$F \geq \frac{\hbar m}{p_0 \tau_1 (\tau - \tau_1)}.$$

Вводя $\mathcal{E}_0 = \frac{p_0^2}{2m}$ и минимизируя по τ_1 , получаем

$$\tau_1 = \frac{\tau}{2} \quad \text{и} \quad F_{\min} = \frac{\hbar}{\tau^2} \sqrt{\frac{8m}{\mathcal{E}_0}}.$$

Заметим, что при подобных измерениях необходимо уменьшить все флуктуации энергии неквантовой природы (например, тепловые) до уровня меньше квантовых.

2.46* Пороговая энергия рождения пары $\mathcal{E}_\text{п} = 2m_e c^2$. Эта энергия «появляется» при попытке локализовать электрон в размере $\Lambda_e/2$, где $\Lambda_e = \frac{\hbar}{2m_e c}$ — комптоновская длина волны электрона. Действительно, при $\Delta x \approx \frac{\Lambda_e}{2} = \frac{\hbar}{2m_e c}$ возникает неопределенность в энергии $\Delta \mathcal{E} = \frac{\hbar^2}{2m_e (\Delta x)^2}$, которая равна $2m_e c^2$. Таким образом, в области $\sim \Lambda_e/2$ электрон не может рассматриваться как «точечный» объект.

$$\mathbf{2.47.} t_{\text{изм}} \approx \frac{\hbar}{\mathcal{E}_\gamma} = 4 \cdot 10^{-20} \text{ с}; \Delta \mathcal{E} \approx \frac{\hbar}{t_{\text{изм}}} = 15 \text{ кэВ.}$$

2.48* Решение. Условие возникновения первого максимума $S_1 - S_2 = \lambda_{\text{дБ}}$. Из геометрии разность хода (рис. 139)

$$S_1 - S_2 = \sqrt{\left(\frac{D}{2} + \Delta x\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(\Delta x - \frac{D}{2}\right)^2 + L^2} \approx \frac{D \Delta x}{L},$$

где использовано обычное условие эксперимента $L \gg D, \Delta x$.

Если электрон прошел через щель 1, то изменение импульса экрана

$$|\Delta p_{x1}| = p \frac{\Delta x + D/2}{\sqrt{(\Delta x + D/2)^2 + L^2}},$$

а если через щель 2, то

$$|\Delta p_{x2}| = p \frac{\Delta x - D/2}{\sqrt{(\Delta x - D/2)^2 + L^2}}.$$

Чтобы определить по измерению импульса, через какую щель прошел электрон, нужно суметь различить по величине $|\Delta p_{x1}|$ и $|\Delta p_{x2}|$, т. е. точность измерений импульса должна быть лучше, чем

$$\Delta p_x = |\Delta p_{x1}| - |\Delta p_{x2}| \approx p \frac{\Delta x + D/2}{L} - p \frac{\Delta x - D/2}{L} = p \frac{D}{L}.$$

Согласно соотношению неопределенностей

$$\delta x \delta p_x \sim h, \quad \text{откуда} \quad \delta x \sim \frac{h}{\delta p_x} \geq \frac{h}{\Delta p_x} = \frac{hL}{pD} = \frac{\lambda_{\text{дБ}} L}{D}.$$

Так как $\lambda_{\text{дБ}} = \frac{D \Delta x}{L}$, то $\delta x \geq \Delta x$. Тем самым неопределенность в положении щелей (обе щели смещаются как целое вместе с экраном) будет больше, чем масштаб интерференционного расщепления, и картина размоется.

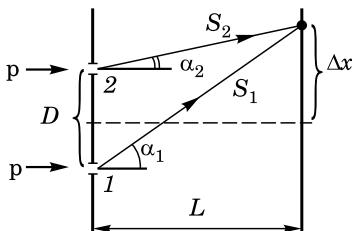


Рис. 139

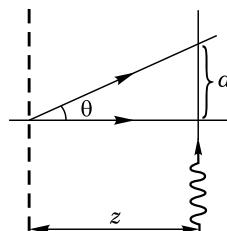


Рис. 140

2.49* Решение. Пока расстояние d между расщепленными пучками меньше $0,61\lambda_\phi$ (результат, хорошо известный в оптике как предельное раз-

решение двух светящихся точек), определить, каким путем движется атом, невозможно. Поэтому первое размытие картины произойдет при $d=0,61\lambda_{\phi}$. Так как угол дифракции мал, то, как следует из рис. 140, размытие интерференционной картины произойдет при расстоянии между пучками

$$d \approx z\theta = z \frac{\lambda_{\text{dB}}}{a} = \frac{z}{a} \frac{h}{p}.$$

Поэтому

$$z = 0,61\lambda_{\phi} \frac{a}{\lambda_{\text{dB}}} = \frac{0,61\lambda_{\phi} a M v}{h} = 6 \text{ мм.}$$

Следует отметить, что при таком способе измерения координат атомов из-за их большой массы значение Δp_{\perp} , возникающее из соотношения неопределенностей, очень мало.

2.50. $F = \frac{n_0 h}{4d^2} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \approx 5 \cdot 10^{-21}$ дин, где $\lambda_2 = 4 \text{ \AA}$ и $\lambda_1 = 2 \text{ \AA}$ (упруго рассеиваться будут все нейтроны с длиной волны $\lambda \leq 4 \text{ \AA}$).

2.51. $v = \frac{h}{M\lambda} = 2,77 \cdot 10^4 \text{ см/с, где } \lambda = \frac{d\Delta}{l}$ — длина волны фуллеренов.

2.52. Скорость тримеров и димеров одинакова: $v = \frac{h}{\Theta M N d} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ см/с, где } N$ — число атомов гелия в кластере.

2.53. $\Delta\varphi \simeq \sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{m^2 l^3 g}}$; $\Delta L \simeq (\hbar^2 m^2 g l^3)^{1/4}$. Легко проверить, что $\Delta\varphi \Delta L \simeq \hbar$.

2.54* Решение. Флуктуация энергии в системе осцилляторов $\Delta\mathcal{E} = \Delta N \hbar \omega$; в свою очередь, $\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$. Поэтому $\frac{\Delta\mathcal{E}\Delta t}{\hbar} = \Delta N \Delta\varphi = 1$.

2.55. $t = \frac{3mx_0^2}{2\hbar} = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ с.}$

2.56. $L > \frac{2a^2 mv}{h} = 16 \text{ м.}$ Поскольку $t_{\text{нр}} = \frac{L}{v} \propto \frac{\rho a^5}{h}$, то зависимости от скорости нет.

§ 3. Уравнение Шредингера. Квантование. Потенциальные барьеры

3.1* Решение. Плотность потока вероятности вычисляется по формуле

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi),$$

или в одномерном случае

$$j_z = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial z} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (*)$$

а) В случае плоской волны $\psi(z) = e^{ikz}$ плотность потока вероятности определим прямой подстановкой волновой функции в (*):

$$j_z = \frac{\hbar k}{m} = v,$$

т. е. равна скорости частицы v .

б) В случае сферической расходящейся волны $\psi(r) = \frac{1}{kr} e^{ikr}$, очевидно, вектор плотности потока вероятности \mathbf{j} направлен по радиус-вектору \mathbf{r} . Кроме того, будем считать $kr \gg 1$. Поэтому

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{(kr)^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{v}{(kr)^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{v}}{(kr)^2}.$$

В последнем равенстве учтено, что $\mathbf{k} \parallel \mathbf{r} \parallel \mathbf{v}$. Можно было бы воспользоваться декартовыми координатами, направив ось z по радиус-вектору. Естественно, ответ получился бы таким же:

$$j_z = \frac{v_z}{(kr)^2}.$$

в) Для суммы сходящейся и расходящейся волновых функций приведем только ответ:

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{v}}{(2kr)^2} (|s|^2 - 1).$$

3.2. $U(x) = \frac{2\alpha^2 \hbar^2}{m} x^2$ (гармонический осциллятор), $\mathcal{E} = \frac{\alpha \hbar^2}{m}$.

Указание. В задачах 3.2, 3.3, 3.4 предпочтительнее не интегрировать по частям, а наоборот — дифференцировать по параметру α определенный интеграл $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$.

3.3. $\langle \widehat{T} \rangle \approx \frac{\hbar^2}{32ma^2}$ (точное значение $\langle \widehat{T} \rangle = \frac{\hbar^2}{6ma^2}$); $U(x) = \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{ax} \right)$; $\mathcal{E} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}$ (см. указание к задаче 3.2).

3.4. $\langle \widehat{T} \rangle \approx \frac{\hbar^2}{8ma^2}$ (точное значение $\langle \widehat{T} \rangle = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$); $\langle x \rangle = \frac{3}{2}a$; $U(x) = -\frac{\hbar^2}{max}$; $\mathcal{E} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}$ (см. указание к задаче 3.2).

3.5. $\mathcal{E}_0 \approx \frac{3}{2} \left(\frac{9}{4} \frac{\hbar^2 k^2}{m} \right)^{1/3}$, параметр $a = \left(\frac{3mk}{2\hbar} \right)^{1/3}$. (См. также задачу 2.39.) Полученный ответ совпадает с точным решением с точностью 6%.

3.6. $\mathcal{E}_n = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\hbar^2 \pi^2 \hbar^2}{m}} n^{2/3}$.

3.7. $\mathcal{E} = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2} = -1,36$ кэВ; $a = \frac{\hbar^2}{Zme^2} = 0,053$ Å.

3.8* $a = \hbar \sqrt{\frac{(1+a)^3}{2\mu U_0 \alpha (\alpha+3)}}$ $\approx 1,54 \cdot 10^{-13}$ см.

Решение. Учитывая сферическую симметрию задачи, запишем

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle \widehat{T} + \widehat{U} \rangle = \int_0^\infty \psi^* \left(\frac{\widehat{p}^2}{2\mu} + U(r) \right) \psi dV.$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$; $\mu = m_N/2$ — приведенная масса дейтрона. Оператор

$$\widehat{p}^2 = -\hbar^2 \Delta_r = -\hbar^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right).$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\hbar^2 a^2}{8\mu a^2} - U_0 \frac{a^3}{(1+a)^2}.$$

Основное состояние соответствует минимуму энергии:

$$\frac{d\langle \mathcal{E} \rangle}{da} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{(1+\alpha)^3}{\alpha(3+\alpha)} = \frac{2\mu a^2 U_0}{\hbar^2}.$$

Далее находим

$$\mathcal{E}_0 = \langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\alpha^3(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3} \frac{U_0}{4} \quad \text{или} \quad \frac{\alpha^3(1-\alpha)}{(1+\alpha)^3} = -0,108.$$

Используя указание к задаче, находим, что $\alpha = 1,5$. Таким образом,

$$a = \hbar \sqrt{\frac{(1+\alpha)^3}{2\mu U_0 \alpha (\alpha+3)}} \approx 1,54 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

3.9. $\langle \mathcal{E}(\alpha) \rangle = \frac{\hbar^2 a^2}{8\mu a^2} - U_0 \frac{\alpha^3}{(1+\alpha)^3} \approx -2,2 \text{ МэВ, где } \alpha = 1,35.$

- 3.10.*** 1) $\alpha = -\frac{2}{3} \frac{\mu\omega}{\hbar}$; $\beta = \frac{\mu\omega}{2\hbar}$; $\mathcal{E} = \frac{7}{2} \hbar\omega$, поскольку $\mathcal{E}_N = \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2}\right)$, то $N = 2$.
2) $\alpha = 0$; $\mathcal{E} = \frac{3}{2} \hbar\omega$, $N = 0$.

Решение. В трехмерном случае в сферических координатах (r, θ, φ) лапласиан Δ имеет вид

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi}.$$

Поскольку ψ -функция не зависит от углов (сферически симметричный случай, изотропный осциллятор), то лапласиан в нашей задаче сводится к радиальной части Δ_r :

$$\Delta = \Delta_r \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}.$$

Дифференцируя исходную ψ -функцию, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dr} &= 2Ae^{-\beta r^2} \left[(\alpha - \beta)r - \alpha\beta r^3 \right]; \\ \frac{d^2\psi}{dr^2} &= 2Ae^{-\beta r^2} \left[2\alpha\beta^2 r^4 - \beta(5\alpha - 2\beta)r^2 + (\alpha - \beta) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{\mu\omega^2}{r^2} \psi = \mathcal{E}\psi,$$

или

$$-6\beta + 4\beta^2 r^2 - 14\alpha\beta r^2 + 4\alpha\beta r^4 + 6\alpha - \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2} r^2 - \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2} r^4 \alpha = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \mathcal{E} - \frac{2\mu}{\hbar^2} \mathcal{E} ar^2.$$

Поскольку энергия $\mathcal{E} = \text{const}$ и не может зависеть от r , то сумма коэффициентов при всех степенях r должна давать 0.

$$\begin{aligned} r^0: \quad & 6(\alpha - \beta) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \mathcal{E} = 0, \\ r^2: \quad & -14\alpha\beta + 4\beta^2 - \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2} + \frac{2\mu\mathcal{E}}{\hbar^2}\alpha = 0, \\ r^4: \quad & 4\alpha\beta^2 - \frac{\mu^2\omega^2}{\hbar^2}\alpha = 0. \end{aligned}$$

Из этой системы и следуют искомые значения α , β и N , приведенные в ответе.

3.11. $\psi = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a} & (n=1, 3, 5, \dots), \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a} & (n=2, 4, 6, \dots), \end{cases}$ $\mathcal{E} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2}n^2$ в обоих случаях.

Вследствие симметричности потенциала решения подразделяются на четные и нечетные. В силу граничных условий ($\psi(\pm a) = 0$) на ширине ямы должно укладываться целое число полуволн де Броиля, как это имеет место для электромагнитных волн в случае интерферометра Фабри–Перо или волновода с идеальными металлическими стенками.

3.12* Решение. Примем за начало координат центр дна ямы O (см. рис. 20 к условию задачи). Тогда уравнение Шредингера для связанных состояний внутри ямы будет

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad (1)$$

а вне ямы

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha^2\psi = 0, \quad (2)$$

где введены обозначения

$$k = \sqrt{\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{2m(U_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2}}. \quad (3)$$

Внутри ямы общее решение имеет вид

$$\psi = A \cos kx + B \sin kx.$$

Вне ямы решение, удовлетворяющее условиям на бесконечности $\psi(\pm\infty) \rightarrow 0$, будет

$$\psi = Ce^{-\alpha x} \quad \text{при } x > a.$$

$$\varphi = De^{\alpha x} \quad \text{при } x < -a.$$

Из соображений симметрии следует, что плотность вероятности $|\psi|^2$ должна быть симметричной функцией x относительно начала координат. Следовательно, должно быть $C^2 = D^2$, т. е. возможны два случая: $C = D$ и $C = -D$. Постоянные A , B , C , D надо выбрать так, чтобы на краях ямы функция ψ и ее производная $d\psi/dx$ были непрерывны. На границе $x = +a$ это дает

$$A \cos ka + B \sin ka = Ce^{-\alpha a},$$

$$-kA \sin ka + kB \cos ka = -aCe^{-\alpha a},$$

а на границе $x = -a$

$$A \cos ka - B \sin ka = De^{-\alpha a},$$

$$kA \sin ka + kB \cos ka = \alpha D e^{-\alpha a}.$$

Отсюда

$$2A \cos ka = (C + D) e^{-\alpha a}, \quad 2kA \sin ka = \alpha(C + D) e^{-\alpha a},$$

$$2B \sin ka = (C - D) e^{-\alpha a}, \quad 2kB \cos ka = -\alpha(C - D) e^{-\alpha a}.$$

Если $A \neq 0$ и $C = D$, то

$$k \operatorname{tg} ka = \alpha. \quad (4)$$

Если же $B \neq 0$ и $C = -D$, то

$$k \operatorname{ctg} ka = -\alpha. \quad (5)$$

Эти условия не могут быть удовлетворены одновременно, так как в противном случае получилось бы $k^2 = -\alpha^2$, а это невозможно ввиду вещественности k и α . Решение, когда все коэффициенты A, B, C, D равны нулю, физического смысла не имеет. Таким образом, все возможные решения разделяются на два класса: решения с четной волновой функцией, когда $A \neq 0, B = 0, C = D$ и решения с нечетной волновой функцией, когда $A = 0, B \neq 0, C = -D$.

Уровни энергии найдутся путем графического или численного решения уравнения (4) или уравнения (5), в которых положительные величины k и α определяются выражениями (3). Для графического решения удобно ввести безразмерные величины

$$\xi = ak, \quad \eta = \alpha a. \quad (6)$$

Тогда

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mU_0a^2}{\hbar^2}. \quad (7)$$

причем для решений с четной волновой функцией

$$\eta = \xi \operatorname{tg} \xi, \quad (4a)$$

а для решений с нечетной волновой функцией

$$\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi, \quad (5a)$$

На рис. 141 a построены кривые $\eta = \xi \operatorname{tg} \xi$ (4a), на рис. 141 b — кривые $\eta = -\xi \operatorname{ctg} \xi$. Вертикальными штриховыми линиями изображены асимптоты этих кривых. Ввиду положительности ξ и η нужны только участки этих кривых, расположенные в положительном квадранте ($\xi > 0, \eta > 0$). Пересечем эти кривые окружностью (7), радиус которой $\sqrt{2mU_0} a / \hbar$ должен считаться известным. Координаты точек пересечения этой окружности с кривыми (4a) и (5a) дадут возможные значения ξ и η . После этого по формулам (3) легко

найти значения \mathcal{E} . Число уровней всегда конечно и определяется глубиной U_0 и шириной $2a$ потенциальной ямы. Например, если радиус окружности равен 7, то получается пять уровней. Точкам пересечения 1, 3, 5 соответствуют

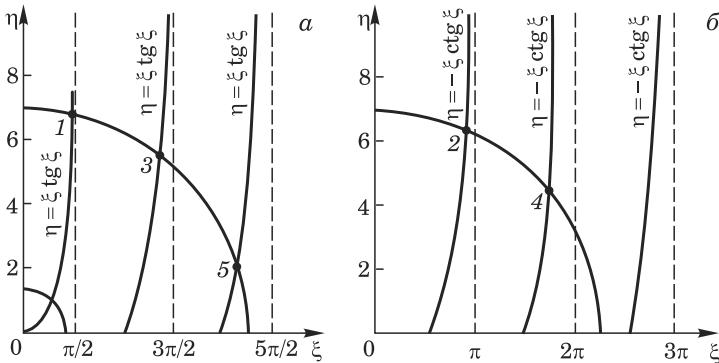


Рис. 141

четные, а точкам 2, 4 – нечетные волновые функции. Если $0 \leq U_0 a^2 \leq \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m}$, то имеется только одна точка пересечения, которой соответствует четная волновая функция. Следует еще раз подчеркнуть, что в симметричной одномерной яме при любой ее глубине и ширине всегда есть хотя бы один уровень, отвечающий четной ψ -функции. Аналогично обстоит дело в двумерном случае. Принципиально по-другому обстоит дело в случае трехмерной потенциальной прямоугольной ямы (задача 3.16), где уровень есть *не всегда*.

Дадим также другой способ решения уравнений (4) и (5).

Рассмотрим четное решение $k \operatorname{tg} ka = \alpha$, откуда $1 + \operatorname{tg}^2 ka = \frac{\alpha^2 + k^2}{k^2}$;

$$\frac{1}{\cos^2 ka} = \frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2} \frac{1}{(ka)^2}; \quad |\cos ka| = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0 a^2} ka}.$$

При этом (так как $\operatorname{tg} ka > 0$) годятся те четверти, где $\sin ka$ и $\cos ka$ имеют одинаковые знаки.

Для нечетного решения получаем $|\sin ka| = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0 a^2} ka}$, и так как $\operatorname{ctg} ka < 0$, то годятся те четверти, где $\sin ka$ и $\cos ka$ имеют разные знаки. Графическое решение полученных уравнений изображено на рис. 142а, б.

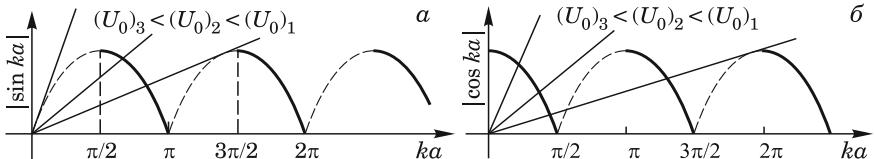


Рис. 142

Видно, что в зависимости от величины U_0 (при данном a) или a (при данном U_0) в случае четной ψ -функции хотя бы одно решение есть всегда! Это будет иметь место при

$$\sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0a^2}} > \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi},$$

или $U_0a^2 < \frac{\pi^2\hbar^2}{8m}$. При дальнейшем уменьшении U_0 уровень поднимается к потолку ямы (рис. 143), но частица из ямы не вылетает!

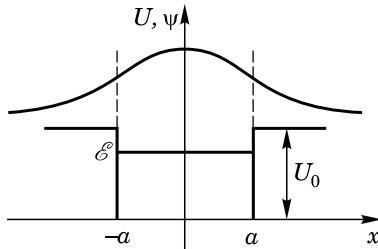


Рис. 143

3.13. $\mathcal{E}_{\min} = \frac{\pi^2\hbar^2}{4mb^2} = \frac{N(N+2)(N+1)}{6}$; $F = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mb^3} \frac{N(N+2)(N+1)}{6}$.

3.14. Вообще $v > \frac{\pi\hbar}{mdl} \sqrt{d^2 + l^2}$. При $d \ll l$ $v_{\min} = \frac{\pi\hbar}{md} \approx 2$ см/с. При $d=l$ (квадратное сечение канала) $v_{\min} = \frac{\sqrt{2}\pi\hbar}{md} \approx 2,8$ см/с.

3.15. $t = 0,065$ с.

3.16* Решение. В сферической системе координат уравнение Шредингера для стационарных состояний с волновыми функциями, зависящими только от r , имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{E} - U(r)) \psi = 0. \quad (1)$$

Решение этого уравнения должно быть конечным при $r=0$ и достаточно быстро убывать при $r \rightarrow +\infty$ (чтобы $\int |\psi|^2 dV$ сходился). Введем новую функцию $\chi = r\psi$. Тогда

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [\mathcal{E} - U(r)] \chi = 0. \quad (2)$$

Надо найти решения этого уравнения, убывающие при $r \rightarrow +\infty$ и обращающиеся в нуль при $r=0$. Это будут

$$\begin{aligned} \chi &= B \sin kr && \text{при } r \leq a, \\ \chi &= C e^{-ar} && \text{при } r \geq a, \end{aligned}$$

где

$$k = +\sqrt{\frac{2m(\mathcal{E} + U_0)}{\hbar^2}}, \quad a = +\sqrt{-\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}}. \quad (3)$$

Задача свелась к задаче об одномерной потенциальной яме — уровнянья энергии определяются точно так же, надо только отбросить состояния с четными и сохранить лишь состояния с нечетными волновыми функциями.

3.17. Решение задачи сводится к решению трансцендентного уравнения

$$|\sin ka| = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0a^2}} ka, \text{ где } k^2 = \frac{2m(U_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2} \quad (\text{см. рис. 144}).$$

Минимальная «мощность» U_0a^2 ямы, при которой появляется первый уровень, $U_0a^2 = \pi^2\hbar^2/(8m)$. При этом энергия уровня ($ka = \pi/2$) равна $\mathcal{E} = 0$, т. е.

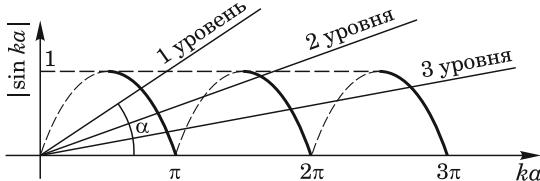


Рис. 144

уровень лежит на «потолке» ямы. При увеличении U_0 или a уровень опускается в яму. Из рис. 144 видно, что второй уровень появится при $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3\pi}$; третий — при $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5\pi}$ и т. д. Итак, $U_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2}$.

3.18. $U_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8\mu a^2} + \mathcal{E} \approx 42 \text{ МэВ}$, где $\mu = m_p/2$. Это довольно грубая оценка.

Точное решение трансцендентного уравнения дает $U_0 \approx 53 \text{ МэВ}$. (См. задачу 3.17.)

3.19. $\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar^4}{8m^2a^2U_0^2}$; $\langle \hat{p}_x^2 \rangle = \frac{4m^2a^2U_0^2}{\hbar^2}$; $\langle \hat{p}_x^2 \rangle \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2} > \frac{\hbar^2}{4}$.

3.20* $\langle z \rangle \approx \frac{2a}{\pi^2\delta} \approx 20a \approx 100 \text{ \AA}$, где $\delta = 0,01$ (точное значение $\langle z \rangle = \frac{2\sqrt{2}a}{\pi^2\delta} \approx 140 \text{ \AA}$).

Решение. Разобъем область нахождения атома гелия на две части: I — внутри потенциальной ямы ($0 < z \leq a$) и II — вне ее при $z > a$. В области I:

$$\psi_I'' + k^2\psi_I = 0, \quad \text{где } k = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}}}{\hbar}. \quad (1)$$

Решение этого дифференциального уравнения очевидно:

$$\psi_I(z) = \sin kz,$$

поскольку при $z=0$ должно быть $\psi_I(0)=0$.

В области II:

$$\psi_{II}'' - \kappa^2\psi_{II} = 0, \quad \text{где } \kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - \mathcal{E})}. \quad (2)$$

Решение последнего уравнения

$$\psi_{II}(z) = Ae^{-\kappa z},$$

где A — нормировочная константа. Заметим, что формальным решением этого уравнения могла бы быть положительная экспонента $\propto \exp(\kappa z)$. Но тогда при $z \rightarrow \infty$ $\psi(z) \rightarrow \infty$, что не имело бы физического смысла.

На границе областей, т. е. при $z=a$, необходима гладкая сшивка ψ -функций:

$$\Psi_I(a) = \Psi_{II}(a), \quad \text{т. е.} \quad \sin ka = Ae^{-\kappa a};$$

$$\Psi'_I(a) = \Psi'_{II}(a), \quad \text{т. е.} \quad k \cos ka = -A\kappa e^{-\kappa a},$$

откуда следует

$$\operatorname{ctg} ka = -\frac{\kappa}{k}. \quad (3)$$

По условию волновая функция адсорбированного атома в основном состоянии достигает максимума при $z=z^*=0,99a=(1-\delta)a$, где $\delta=0,01$. Максимум лежит в области I, т. е.

$$\Psi_I(z^*) = \sin kz^* = 1, \quad \text{т. е.} \quad kz^* = \frac{\pi}{2},$$

и откуда уже определим k :

$$k = \frac{\pi}{2z^*} = \frac{\pi}{2(1-\delta)a} \approx \frac{\pi}{2a}(1+\delta).$$

Вычислим

$$\operatorname{ctg} ka = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi\delta}{2}\right)} = -\operatorname{tg}\frac{\pi\delta}{2} \approx -\frac{\pi\delta}{2}.$$

Из соотношения (3) определим κ :

$$\kappa = -k \operatorname{ctg} ka \approx k \frac{\pi\delta}{2} = \frac{\pi^2\delta}{4a} \approx 5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}.$$

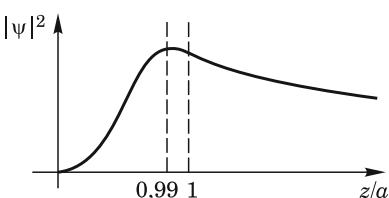


Рис. 145

По определению

$$\langle z \rangle = \frac{\int_0^a z \sin^2 kz dz + \int_a^\infty A^2 e^{-2\kappa z} z dz}{\int_0^a \sin^2 kz dz + \int_a^\infty A^2 e^{-2\kappa z} dz}.$$

Но интегралами по области I можно пренебречь в силу их малого вклада, одновременно расширив область интегрирования в области II до 0. Действительно-

но, $\frac{\int_0^\infty ze^{-2\kappa z} dz}{\int_0^\infty e^{-2\kappa z} dz} = \frac{1}{2\kappa}$, но $\frac{\int_a^\infty ze^{-2\kappa z} dz}{\int_a^\infty e^{-2\kappa z} dz} = \frac{1+2\kappa a}{2\kappa}$. Так как $2\kappa a \approx 10^{-2}$, то это очень близкие выражения. Поэтому

$$\langle z \rangle \approx \frac{\int_0^\infty ze^{-2\kappa z} dz}{\int_0^\infty e^{-2\kappa z} dz} = \frac{1}{2\kappa} = \frac{2a}{\pi^2\delta} \approx 20a = 100 \text{ \AA}.$$

На рис. 145 приведен график зависимости $|\psi(z)|^2$. Хотя максимум ψ -функции и лежит внутри потенциальной ямы, но среднее значение координаты

$\langle z \rangle$ — далеко за ее пределами, поскольку ψ -функция крайне медленно спадает при $z > a$. Точное интегрирование дает

$$\langle z \rangle = \frac{2\sqrt{2}a}{\pi^2 \delta} \approx 140 \text{ \AA}.$$

3.21. $U_0 = 4 \text{ K}$, $\langle z \rangle \approx \frac{\pi}{2k} + \frac{1}{2\chi} \approx 7 \text{ \AA}$. Здесь $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}_1}$; $\chi = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - \mathcal{E}_1)} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}}$; $\mathcal{E}_1 = U_0 - \mathcal{E}$. Точный расчет показывает, что $\langle z \rangle \approx 5,4 \text{ \AA}$, т. е. «в среднем» атом находится не вне ямы, а все-таки внутри нее.

3.22. $U_0 = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{9ma^2} = 16,6 \text{ эВ}$; $\mathcal{E} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{6ma^2} = 12,45 \text{ эВ}$.

3.23. $U_0 = \frac{8\pi^2 \hbar^2}{27ma^2} = 5,53 \text{ эВ}$; $\mathcal{E} = \frac{U_0}{4} = 1,38 \text{ эВ}$.

3.24* Решение. Энергия частицы m , находящейся в одномерной потенциальной яме шириной a , квантуется:

$$\mathcal{E}_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2.$$

При переходе частицы из состояния $n+1$ в состояние n излучается квант энергии с частотой

$$\omega_{n+1, n} = \frac{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n}{\hbar} = \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2} (2n+1).$$

Классическая частица колеблется в яме с частотой $\omega_{\text{кл}} = 2\pi/T$, где $T = 2a/v$, где в свою очередь v — скорость частицы при движении от стенки к стенке — определяется ее энергией. Для сравнения примем значение энергии равным \mathcal{E}_n . Тогда

$$v = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_n}{m}} = \frac{\pi \hbar n}{ma}; \quad \omega_{\text{кл}} = \frac{\pi v}{a} = \frac{\pi^2 \hbar n}{ma^2}.$$

Теперь сравним $\omega_{n+1, n}$ с $\omega_{\text{кл}}$:

$$\frac{\omega_{n+1, n}}{\omega_{\text{кл}}} = 1 + \frac{1}{2n} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Эта задача является иллюстрацией принципа соответствия Бора. При больших значениях квантовых чисел квантово-механическое поведение системы переходит в классическое.

3.25* Решение. Запишем уравнение Шредингера в виде

$$\frac{d^2 \Psi}{dx^2} + k^2 \Psi = 0, \tag{1}$$

где

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{E} - U). \tag{2}$$

В области I волновая функция частицы состоит из падающей волны

$$\Psi_1 = e^{i(k_1 x - \omega t)}$$

и отраженной

$$\psi'_1 = re^{-i(k_1 x + \omega t)},$$

а в области II — из прошедшей волны

$$\psi_2 = de^{i(k_2 x - \omega t)},$$

где индексами 1 и 2 отмечены волновые векторы в областях I и II соответственно. Амплитуда падающей волны принята равной единице, что, очевидно, не нарушает общности получаемых ниже результатов. Волновая функция и ее производная по x на границе раздела должны быть непрерывны. Это приводит к соотношениям

$$1 + r = d, \quad k_1 - k_1 r = k_2 d,$$

из которых находим

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad d = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}. \quad (3)$$

1) Если $\mathcal{E} > U_2$, то волна ψ_2 однородна, так же как падающая волна ψ_1 и отраженная ψ'_1 . Вычислим плотности потоков вероятностей для отраженной волны

$$j_r = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi_1 \frac{d\Psi_1^*}{dx} - \Psi_1^* \frac{d\Psi_1}{dx} \right) = \frac{i\hbar}{2m} (r^2 i k_1 + r^2 i k_1) = -r^2 \frac{\hbar k_1}{m}$$

и для прошедшей волны

$$j_d = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi_2 \frac{d\Psi_2^*}{dx} - \Psi_2^* \frac{d\Psi_2}{dx} \right) = d^2 \frac{\hbar k_2}{m}.$$

Плотность потока вероятностей для падающей волны $j_e = \hbar k_1 / m = v_1$ (равна скорости частицы, налетающей на барьер). Вычислим энергетические коэффициенты отражения R и прохождения D :

$$R = \left| \frac{j_r}{j_e} \right| = | -r^2 | = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2; \\ D = \left| \frac{j_d}{j_e} \right| = \frac{k_2}{k_1} d^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)}. \quad (4)$$

Величины этих коэффициентов находятся в согласии с законом сохранения энергии: $R + D = 1$.

2) Если $\mathcal{E} < U_2$, то k_2 — чисто мнимое, т. е. волна во второй области неоднородна. В этом случае $R = 1$, т. е. отражение полное. Полагая $k_2 = ia$, для волны во второй области получим

$$\psi_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} e^{-ax} e^{-i\omega t}, \quad (5)$$

т. е. амплитуда волны в области II экспоненциально затухает при удалении от границы раздела областей.

Глубина проникновения l определяется как расстояние, на котором плотность потока энергии убывает в e раз. Для нее получаем

$$l = \frac{1}{2}a = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_2 - \mathcal{E})}}. \quad (6)$$

3.26. $N \approx \frac{1}{D} \approx \frac{1}{4} \sqrt{\frac{v_0}{v - v_0}} = 2,5$, где D — коэффициент прохождения.

П р и м е ч а н и е. Видно, что число ударов очень мало, т. е. здесь состояние «практически нестационарное», и обычно используемое выражение для числа ударов через коэффициент отражения плоской волны от барьера в данном случае является очень грубой оценкой, дающей представление лишь о порядке величины числа отражений.

3.27. $\tau \approx (nD)^{-1} \approx \frac{a}{4} \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \sim 10^{-15}$ с, где $n = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2U_0}{m}}$ — частота ударов о стенки ямы; $D = 4 \frac{\sqrt{\mathcal{E}(U_0 + \mathcal{E})}}{(\sqrt{U_0 + \mathcal{E}} + \sqrt{\mathcal{E}})^2} \approx 4\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{U_0}}$ — коэффициент прохождения.

(См. также примечание к ответу предыдущей задачи.)

3.28. $R = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{8\sigma m}} \approx 20$ Å. (См. также решение задачи 3.16.)

3.29. $l = 0,56$ нм.

3.30* Решение. В области I ($x < 0$) $\Psi_I = e^{ik_1 x} + r e^{-ik_1 x}$, где $k_1^2 = 2m(\mathcal{E} - U_1)/\hbar^2$. В области барьера ($0 < x < l$) $\Psi = a e^{ikx} + b e^{-ikx}$, где $k^2 = 2m(\mathcal{E} - U)/\hbar^2$. В области II ($x > l$) $\Psi_{II} = d e^{ik_2 x}$, где $k_2^2 = 2m(\mathcal{E} - U_2)/\hbar^2$.

Сшивая волновые функции и их производные в точках $x=0$ и $x=l$, получим систему уравнений относительно r , d , a и b :

$$1 + r = a + b; \quad a e^{ikl} + b e^{-ikl} = d e^{ik_2 l};$$

$$k_1 - k_1 r = k a - k b; \quad k a e^{ikl} - k b e^{-ikl} = k_2 d e^{ik_2 l}.$$

Отсюда получаем

$$r = \frac{(k_1 - k)(k + k_2) + (k_1 + k)(k - k_2)e^{2ikl}}{(k_1 + k)(k + k_2) + (k_1 - k)(k - k_2)e^{2ikl}};$$

$$d = \frac{4k_1 k e^{-i(k_2 - k)l}}{(k_1 + k)(k + k_2) + (k_1 - k)(k - k_2)e^{2ikl}}.$$

В случае, когда энергия частицы ниже высоты барьера, т. е. $\mathcal{E} < U$, волновая функция в области барьера имеет вид $\Psi = a e^{-ix} + b e^{ix}$, где $x^2 = 2m(U - \mathcal{E})/\hbar^2$, и в этом случае в формулах для r и d нужно провести замену $k \rightarrow ix$. Таким образом, поскольку в области II мы по-прежнему имеем прошедшую плоскую волну, то получаем важный вывод — квантово-механическая частица может проходить сквозь барьер даже в том случае, когда ее энергия меньше высоты барьера («туннельный эффект»).

3.31. Полная энергия \mathcal{E} должна быть больше потенциальной энергии U частицы внутри барьера (ямы). Толщина барьера (ямы) должна быть $l = \lambda/2$, λ , $3\lambda/2$, 2λ , $5\lambda/2$, ..., где $\lambda = h/\sqrt{2m(\mathcal{E} - U)}$ — длина волны де Броиля частицы в области барьера (ямы), или, иначе, $l = \pi\hbar n/\sqrt{2m(\mathcal{E} - U)}$ и одновременно $\mathcal{E} = U + \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$, где $n = 1, 2, \dots$, т. е. энергия частицы должна совпадать с одним из собственных значений энергии в бесконечно глубокой потенциальной яме, дно которой расположено на высоте барьера.

3.32. $\mathcal{E}_n = U + \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$, или в числах $\mathcal{E}_n = (5 + 37,62n^2)$ эВ.

3.33. $R \approx \frac{h}{4\sqrt{2m(\mathcal{E} + U)}} \approx 1,7 \text{ \AA}$. (Табличное значение $R = 1,98 \text{ \AA}$.)

3.34. $U = \frac{\mathcal{E}}{\sin^2 kd} = 1,65 \text{ эВ}$, где $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\mathcal{E}} = 6,27 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}$. $D \approx \exp(-18\kappa d) \approx 2,3 \cdot 10^{-5}$, где $\kappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U - \mathcal{E})} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}$; $\tau = \frac{\ln 2}{nD} \approx 2,5 \cdot 10^{-12} \text{ с}$, где $n = \frac{1}{2d}\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} \approx 1,21 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-1}$.

3.35. $\tau = \frac{1}{nD} \approx 1,2 \cdot 10^{-11} \text{ с}$, где $D \approx \exp(-598a\kappa) \approx 8,3 \cdot 10^{-5}$, $\kappa = \frac{\sqrt{2m(U - \mathcal{E})}}{\hbar} \approx 5,08 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$, $a = 3 \text{ \AA}$.

3.36* Решение. На рис. 146 обозначен подбарьерный переход α -частицы с энергией \mathcal{E} . Так как заряд α -частицы $Z_\alpha = 2$, то оставшаяся часть ядра имеет заряд $Z' = Z - Z_\alpha = Z - 2$. $U(r) = Z'Z_\alpha e^2/r$. По условию $\mathcal{E} \ll U(R)$. Вычислим коэффициент прозрачности барьера по известной формуле

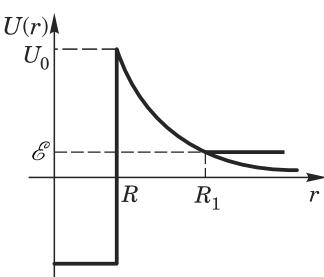


Рис. 146

$$D \approx \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_1} \sqrt{2m \left(\frac{Z'Z_\alpha e^2}{r} - \mathcal{E} \right)} dr \right).$$

В подынтегральном выражении можно пренебречь \mathcal{E} в силу указанного в условии неравенства. Вычислим этот интеграл:

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_1} \sqrt{2m \frac{Z'Z_\alpha e^2}{r}} dr = -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m Z' Z_\alpha e^2} \int_R^{R_1} r^{-1/2} dr = \\ &= -\frac{4}{\hbar} \sqrt{2m Z' Z_\alpha e^2 R_1} \left(1 - \sqrt{\frac{R_1}{R}} \right). \end{aligned}$$

Из рис. 146 видно, что $Z'Z_\alpha e^2/R_1 = \mathcal{E}$, откуда $R_1 = Z'Z_\alpha e^2/\mathcal{E}$. Подставляя это в формулу для I , получаем

$$I \approx -\frac{4}{\hbar} Z' Z_\alpha e^2 \sqrt{\frac{2m}{\mathcal{E}}},$$

где использовано очевидное неравенство $R_1 \gg R$, справедливое в силу заданного условия $\mathcal{E} \ll U(R)$. Таким образом,

$$D \approx \exp\left(-\frac{4}{\hbar} Z' Z_\alpha e^2 \sqrt{\frac{2m}{\mathcal{E}}}\right) = \exp\left(-\frac{B}{\sqrt{\mathcal{E}}}\right).$$

Для приближенной оценки вероятности распада в единицу времени (постоянной распада) λ необходимо прежде всего оценить число столкновений α -частицы с потенциальной стенкой за 1 с: $n \approx v/(2R)$, где v — скорость α -частицы внутри ядра, которую оценим из соотношения неопределенностей:

$$v = \frac{p}{m_\alpha} \approx \frac{\hbar}{m_\alpha R}; \quad n \approx \frac{v}{2R} \approx \frac{\hbar}{2m_\alpha R^2}.$$

Вероятность распада в единицу времени

$$\lambda \approx nD \approx \frac{\hbar D}{2m_\alpha R^2}.$$

Период полураспада $T_{1/2}$ ядра, как известно, равен

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{2m_\alpha R^2 \ln 2}{\hbar D} \approx a \exp\left(-\frac{b}{\sqrt{\mathcal{E}}}\right).$$

где a и b — очевидные константы. Прологарифмировав это выражение, получим закон Гейгера–Неттоля

$$\lg T_{1/2} \approx A + \frac{B}{\sqrt{\mathcal{E}}}.$$

3.37* Решение. Оценка изменения туннельного тока может быть проведена при рассмотрении одномерной задачи (рис. 147). Обратим внимание, что на такой энергетической диаграмме потенциальная энергия электронов возрастает снизу вверх, а потенциал поля — наоборот.

Очевидно, что туннельный ток пропорционален прозрачности барьера, изображенного на рис. 147,

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^d \sqrt{2m(A_2 + eEx)} dx\right),$$

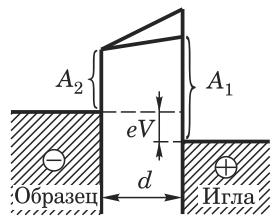


Рис. 147

где напряженность электрического поля $E = (A_1 - A_2 - eV)/d$. Интеграл в показателе экспоненты легко вычисляется:

$$\frac{2}{\hbar} \int_0^d \sqrt{2m(A_2 + eEx)} dx = \frac{4}{3\hbar} \frac{\sqrt{2m}}{eE} \left((A_2 + eEd)^{3/2} - A_2^{3/2} \right).$$

Следовательно, прозрачность барьера

$$D = D_0 \exp \left(-\frac{4}{3\hbar} \frac{\sqrt{2m}d}{A_1 - A_2 - eV} \left((A_1 - eV)^{3/2} - A_2^{3/2} \right) \right).$$

При перемещении иглы над ступенькой высотой b в полученном выражении следует заменить d на $d-b$. Таким образом, ток \mathcal{J} возрастет в

$$\frac{\mathcal{J}(d-b)}{\mathcal{J}(d)} = \exp \left(\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar(A_1 - A_2 - eV)} \left((A_1 - eV)^{3/2} - A_2^{3/2} \right) b \right) = e^{2,08} \approx 8 \text{ раз.}$$

3.38. Ток уменьшится: $\mathcal{J}'/\mathcal{J} = e^{-0,82} \approx 0,44$.

3.39. $\delta\mathcal{J} = 0,27 \text{ нА}$.

3.40. $D \approx \exp \left(-\frac{4e}{\hbar} \sqrt{2\mu R_2} \right) \approx e^{-234,7} \approx 10^{-102}$, где $\mu = m_{\text{D}}/2 = m_{\text{p}}$ — приведенная масса системы из двух дейtronов.

3.41. $D \approx \exp \left(-\frac{2\pi a \sqrt{2m}(U_0 - \mathcal{E})}{\hbar \sqrt{U_0}} \right) = \exp \left(-4\pi \frac{U_0 - \mathcal{E}}{\hbar \omega} \right)$, где \mathcal{E} — энергия возбуждения ядра, a — координата классической точки поворота.

3.42. $f = \left| \frac{A_1}{A_2} \right|^2 = \frac{1}{1 + (U_0/\mathcal{E}) \cos^2 k_1 a}$, где $k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (\mathcal{E} + U_0)$, A_1 — максимальное значение ψ -функции в области $0 < x \leq a$; A_2 — в области $a \leq x < b$.

При $U_0 \gg \mathcal{E}$ величина $f \rightarrow 0$ при всех \mathcal{E} , кроме «резонансных» значений (когда $\cos k_1 a = 0$). При этом $\mathcal{E}_n = \frac{(2n+1)^2 \pi^2 \hbar^2}{8ma^2} - U_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, а $f = 1$.

3.43* Решение. Атом гелия участвует во вращательном движении. Момент импульса этого движения квантуется:

$$m_{\text{He}} v r = nh, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

По условию, если v — скорость атомов He в вихре, то $vr = K$ — интенсивность вихря, откуда

$$K = \frac{\hbar}{m_{\text{He}}} n; \quad K_{\min} = \frac{\hbar}{m_{\text{He}}} = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}.$$

3.44. $v(r) = \frac{n\hbar}{m_{\text{He}} r}$.

3.45. $L_{\min} = \lambda/4$.

3.46. $L_{\min} = \lambda/4$.

3.47. Энергия связи $\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{8ma^2} = 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}$, $U - \mathcal{E} = \frac{\hbar^2 \alpha}{4ma^2} = 7,63 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$. Глубина потенциальной ямы $U = (U - \mathcal{E}) + \mathcal{E} = \frac{\hbar^2 \alpha}{4ma^2} \left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2} \right) = 8 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}$.

3.48. $\mathcal{E}_{\text{cb}} = U_0 - \mathcal{E} = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2ma^2} = 123 \text{ кэВ}$.

3.49. $\frac{a}{a'} = \frac{8}{3\sqrt{3}} \approx 1,54$, где a' — ширина «сжатой» ямы.

3.50. $\frac{U_0}{U'_0} = \frac{9}{2} = 4,5$, где U'_0 — измененная высота ямы.

3.51. $\Gamma \simeq \frac{\hbar D}{2a} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}} = 3,6 \cdot 10^{-5}$ эВ, где проницаемость возникающего барьера треугольной формы (рис. 148) при условии, что величина $eEa = 0,012$ эВ $\ll U_0 - \mathcal{E} = 0,12$ эВ, равна

$$D \simeq \exp\left(-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m(U_0-\mathcal{E})}}{\hbar e E} (U_0 - \mathcal{E})\right) \simeq 7,8 \cdot 10^{-5}.$$

Параметры задачи подобраны так, что в яме есть только один уровень:
 $\sin ka = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0a^2}} ka = 0,488ka$, откуда $ka = 1,92$.

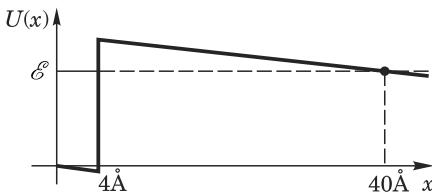


Рис. 148

3.52. $\tau \simeq \frac{4a}{vD} = \frac{4a}{D} \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}}} \simeq 10^{-6}$ с, где проницаемость возникающего барьера треугольной формы при условии, что величина $eEa = 0,003$ эВ $\ll U_0 - \mathcal{E} = 0,2$ эВ, равна

$$D \simeq \exp\left(-\frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m(U_0-\mathcal{E})}}{\hbar e E} (U_0 - \mathcal{E})\right) \simeq 1,45 \cdot 10^{-9}.$$

Параметры задачи подобраны так, что в яме есть только один четный уровень: $\cos ka = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mU_0a^2}} ka = 1,94ka$, откуда $ka = 0,46$.

3.53. $x_{\max} = -\lambda/6$, $x_{\min} = -5\lambda/12$, где λ — дебройлевская длина волны падающих микрочастиц.

3.54. $x_{\max} = -\lambda/4$, $x_{\min} = -\lambda/2$, где λ — дебройлевская длина волны падающих микрочастиц.

3.55. $x_{\max} = -\lambda/2$, $x_{\min} = -\lambda/4$, где λ — дебройлевская длина волны падающих микрочастиц.

3.56. Искомая доля равна коэффициенту прохождения барьера $D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2 + k_1^2 k_2^2 l^2} = \frac{8}{73} = 0,11$, где $k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}} = 5,1 \cdot 10^7$ см⁻¹; $k_2 = 2k_1$.

3.57. Искомая доля равна коэффициенту прохождения барьера (см. задачу 3.56) $D = 1/5$.

3.58. $\frac{6\hbar}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} = 11,7$ Å.

3.59* $\mathcal{E}_{\text{ион}} = 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$; $n = 1$. Частица находится во втором возбужденном состоянии, поскольку основное состояние — четное.

Решение. Для четных состояний волновая функция в области ямы имеет вид

$$\psi = A \cos kx, \quad \text{где } k^2 = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2},$$

$\mathcal{E} > 0$ — уровень энергии в яме. Вне ямы волновая функция имеет вид

$$\psi = Be^{-\kappa|x|}, \quad \text{где } \kappa^2 = \frac{2m(U_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2},$$

$U_0 > 0$ — высота ямы. Дисперсионное уравнение для четных состояний имеет вид $k \operatorname{tg} kd = \kappa$ при условии $\operatorname{tg} kd > 0$. Здесь $2d = a/a$ — ширина ямы. Расстояние между ближайшими максимумами плотности вероятности есть расстояние между максимумом и минимумом волновой функции и равно половине длины волны де Бройля частицы в области ямы, т. е. $ka = \pi$, или $kd = \pi/(2a) = 4\pi/3$. Следовательно, $k\sqrt{3} = \kappa$, или $3\mathcal{E} = U_0 - \mathcal{E}$, откуда $U_0 = 4\mathcal{E}$. Энергия ионизации

$$\mathcal{E}_{\text{ион}} = U_0 - \mathcal{E} = 3\mathcal{E} = 3 \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = 3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

Условие существования уровня

$$\pi n \leq kd \leq \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

или $\pi n \leq \frac{4\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n$, откуда $n = 1$. Таким образом, частица находится во втором возбужденном состоянии, так как основное состояние четное, следующее — нечетное, далее опять четное и т. д. (см. задачу 3.12).

3.60. $\mathcal{E}_{\text{ион}} = \frac{289\pi^2 \hbar^2}{24ma^2}$.

3.61. $U = \frac{\pi^2 \hbar^2 (n-0,5)^2}{2mR^2} = 64,7 \text{ МэВ}; \quad \mathcal{E}_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mR^2(1+\gamma)^2} = 2,79 \text{ МэВ}, \quad \text{где } \gamma = \frac{2}{\pi(2n-1)} = 0,0707.$

3.62. $U = \frac{\pi^2 \hbar^2 (6-0,5)^2}{2ma^2} = 5,06 \text{ эВ}; \quad \mathcal{E}_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8ma^2(1+\gamma)^2} = 0,037 \text{ эВ}, \quad \text{где } \gamma = \frac{1}{5,5\pi} = 0,058.$ (См. решение задачи 3.12. При $n = 1, 3, 5, \dots$ ψ -функции четные, а при $n = 2, 4, \dots$, наоборот, нечетные.)

3.63. $U = \frac{\pi^2 \hbar^2 5^2}{2ma^2} = 4,2 \text{ эВ}; \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2(1+\gamma)^2} = 0,15 \text{ эВ}, \quad \text{где } \gamma = \frac{1}{5\pi} = 0,064.$ (См. решение задачи 3.12. При $n = 1, 3, 5, \dots$ ψ -функции четные, а при $n = 2, 4, \dots$, наоборот, нечетные.)

3.64. $P = 4\mathcal{E}n_0 \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$, где $k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\mathcal{E}}$ и $k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(\mathcal{E} - U_0)}$. Если ввести относительный показатель преломления $n = k_1/k_2$, то при $k_1 > k_2$ слева — оптически более плотная среда («вакуум»). Поэтому сила толкает плотную среду (аналог в оптике — стекло) вправо, в «вакуум». При движении частиц справа налево сила будет действовать в ту же сторону — эффект, известный в оптике.

$$\mathbf{3.65.} T = \frac{4k_1 m_2 / (k_2 m_1)}{\left(k_1 m_2 / (k_2 m_1) + 1 \right)^2} = \frac{8}{9}, \text{ где } k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_1 \mathcal{E}} \text{ и } k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_2 (\mathcal{E} - U_0)}.$$

$$\mathbf{3.66^*} P = 4n_0 \mathcal{E} \frac{\sqrt{\mathcal{E}} - \sqrt{\mathcal{E} - U}}{\sqrt{\mathcal{E}} + \sqrt{\mathcal{E} - U}} = 0,02 \text{ атм.}$$

Решение. Фактически мы имеем дело с падением на потенциальную ступеньку. По определению давление есть плотность потока импульса $P = j p = n v \hbar k$. При прохождении границы падающий пучок разбивается на прошедший $j_{\text{прош}} = T j_{\text{пад}}$ и отраженный $j_{\text{отр}} = R j_{\text{пад}}$, где $T = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$ и $R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$ — коэффициенты прохождения и отражения по мощности.

Здесь $k_1^2 = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}$, $k_2^2 = \frac{2m(\mathcal{E} - U)}{\hbar^2}$.

Учитывая направление потоков, можно записать

$$j_{\text{пад}} \hbar k_1 = -j_{\text{отр}} \hbar k_1 + j_{\text{прош}} \hbar k_2 + P,$$

или

$$P = j_{\text{пад}} \hbar [k_1 (1 + R) - T k_2] = 2n \frac{\hbar^2 k_1^2}{m} \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = 4n_0 \mathcal{E} \frac{\sqrt{\mathcal{E}} - \sqrt{\mathcal{E} - U}}{\sqrt{\mathcal{E}} + \sqrt{\mathcal{E} - U}}.$$

Подставляя числа, получаем

$$P = 10^8 \cdot 4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \frac{\sqrt{4} - \sqrt{4 - 3}}{\sqrt{4} + \sqrt{4 - 3}} \approx 2,1 \cdot 10^4 \text{ дн/см}^2 = 0,02 \text{ атм.}$$

Если ввести относительный показатель преломления $n = \frac{k_1}{k_2}$, то $P = 4\mathcal{E} n_0 \frac{n-1}{n+1}$. Если $k_1 > k_2$, то слева расположена оптически более плотная среда («стекло»), а справа — оптически менее плотная среда («вакуум»). Как видно из формулы, давление направлено из области 1 в область 2, т. е. сила толкает полупространство стекла вправо, в область вакуума. Если же частицы будут падать справа налево (из вакуума в стекло), то сила будет действовать в эту же сторону, что и в первом случае: толкать «стекло» на встречу потоку частиц. (См. задачу 12.76.)

§ 4. Атом водорода и водородоподобные атомы

4.1* **Решение.** Пусть частица локализована вблизи силового центра внутри сферы, радиус которой r . Ее потенциальная энергия будет порядка $-C/r^s$. Неопределенность координаты будет порядка r , а следовательно, неопределенность импульса — порядка \hbar/r . Такого же порядка будет и сам импульс. Следовательно, средняя кинетическая энергия будет порядка $\hbar^2/(mr^2)$,

$$\mathcal{E} \sim \frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{C}{r^s}.$$

Если $s > 2$, то \mathcal{E} может принимать сколь угодно большие отрицательные значения. Но в таком случае должны существовать и уровни энергии

со сколь угодно большими по абсолютной величине отрицательными значениями \mathcal{E} — произойдет падение частицы на силовой центр. Если же $s < 2$, то сколь угодно большие по абсолютной величине значения \mathcal{E} невозможны, поэтому невозможно падение на силовой центр и возможно образование связанного состояния с $\mathcal{E} < 0$.

4.3. $\frac{r^3}{T^2} = \frac{e^2}{4\pi^2 m} = \text{const.}$ (Классический закон Кеплера в системе Солнце–Земля $\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M_C}{4\pi^2} = \text{const.}$)

4.4. $\psi \propto e^{-\alpha r}$, где $\alpha = \frac{mZe^2}{\hbar^2} = \frac{1}{r_1}$, r_1 — радиус первой боровской орбиты водородоподобного атома, а функция ψ — с точностью до нормировочной константы — описывает основное состояние водородоподобного атома $(\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1})$. $\mathcal{E}_1 = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2}$.

4.5. $|\psi|^2 = \frac{q^2}{4\pi} e^{-qr}$, где $q = \frac{2mZe^2}{\hbar^2}$.

4.6. $4\pi r^2 |\psi|^2 = q^3 r^2 e^{-qr}$, где $q = \frac{2mZe^2}{\hbar^2}$. Эта величина максимальна при $r = \frac{2}{q} = \frac{\hbar^2}{mZe^2} = r_1$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

4.7. $\langle r \rangle = \frac{3}{2} r_1$.

4.8. $\langle \frac{1}{r} \rangle = \frac{1}{r_1}$.

П р и м е ч а н и е. Здесь можно обойтись без интегралов. Достаточно использовать теорему вириала для кулоновского поля

$$2\langle \widehat{T} \rangle = -\langle \widehat{U} \rangle,$$

откуда

$$\mathcal{E}_n = \langle \widehat{T} \rangle + \langle \widehat{U} \rangle,$$

и при $n = 1$

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{e^2}{2r_1} = -\frac{1}{2}\langle \widehat{U} \rangle = e^2 \left(\frac{1}{r_1} \right).$$

Таким образом,

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{r_1}.$$

4.9. $\langle \widehat{U} \rangle = -\frac{Ze^2}{r_1}; \langle \widehat{T} \rangle = \frac{Ze^2}{2r_1} = -\frac{\langle \widehat{U} \rangle}{2}$. (См. примечание к ответу задачи 4.8.)

4.10. $\alpha = -\frac{me^2}{2\hbar^2}; \beta = \frac{me^2}{2\hbar^2}; \mathcal{E} = -\frac{me^4}{8\hbar^2}$, откуда $n = 2$.

Поскольку $\psi = \psi(r)$, то $l = 0$. Это $2s$ -состояние. Если $\alpha = 0$, то это основное состояние $1s$; при этом $\beta = \frac{1}{r_1} = \frac{me^2}{\hbar^2}; n = 1; \mathcal{E} = -\frac{me^4}{2\hbar^2}$. (См. также решение задачи 3.10.)

4.11. $R > 2 \frac{m_{\text{H}}}{m_e} \approx 3700; b > \frac{R}{dn/d\lambda} \approx 3,7 \text{ см.}$

4.12. Разрешающая способность должна быть не меньше $\frac{3}{2} \frac{m_p}{m_e} \approx 2800$. Она одинакова для всех линий спектральных серий смеси. Разрешающая способность призмы $b \frac{dn}{d\lambda} = 1000$, т. е. недостаточна для разрешения. Для ин-

терферометра Фабри–Перо должны выполняться неравенства:

$$m < \frac{3}{2} \frac{m_p}{m_e} < N_{\text{эфф}} m.$$

4.13. Требуемая разрешающая способность $\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{\omega}{\delta\omega} = \frac{2m_p}{m_e} \approx 3700$. Она одинакова для всех линий серии, $N > \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 1850$.

4.14. $N \approx \frac{m^3}{8} \approx 3400$ штрихов.

4.15. $d_{\min} = \frac{\lambda_H \lambda_D}{2(\lambda_D - \lambda_H)} \frac{1}{n_e - n_o} \approx \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} \frac{1}{n_e - n_o} = 13,24 \text{ см}$, $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx \frac{2m_p}{m_e} \approx 3700$.

4.16. $L_{\min} = \frac{M_1 M_2}{(M_2 - M_1)m_e} \frac{\hbar c}{W} \frac{1-R}{\sqrt{R}} = 1,37 \text{ см}$.

4.17. $r_1(\mu) = \frac{\hbar^2}{e^2 m_\mu Z} = \frac{m_e}{m_\mu} r_1(e) \approx \frac{1}{Z} \cdot 0,0026 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, что примерно в 200

раз меньше соответствующего значения r_1 для водородоподобного иона с тем же значением заряда ядра Z . Результат получен в предположении, что K -оболочка мюона проходит вне ядра. Электронная оболочка практически не оказывает влияния на этот результат, так как из-за сферической симметрии электронного облака создаваемое им электрическое поле в месте нахождения мюона считается равным нулю. Действительно, радиус орбиты мюона более чем на два порядка меньше первого боровского радиуса водородоподобного иона, поэтому вероятность обнаружить там $1s$ -электроны составляет примерно 10^{-7} . В том же предположении

$$\mathcal{E}_n = -\frac{m_\mu e^4}{2\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} \approx -2810 \frac{Z^2}{n^2} \text{ эВ.}$$

Отсюда видно, что излучение, возникающее при переходе мюона на K -оболочку с более высоких орбит, будет расположено в рентгеновской области спектра, а при больших Z — в области γ -лучей. При больших Z K -оболочка мюона проходит внутри ядра атома. В этом случае приведенные выше формулы становятся неприменимыми. Результаты сильно зависят от распределения электрического заряда в ядре, с чем и связана возможность использования мезоатомов для изучения распределения электрического заряда в атомном ядре.

4.18. $\mathcal{E}_n = -\frac{\hbar c}{2n^2} R_\infty$; $\mathcal{E}_n = -\mathcal{E}_1 = \frac{\hbar c}{2} R_\infty = 6,80 \text{ эВ}$; $\lambda_{\text{рез}} = \frac{8}{3R_\infty} = 243,0045 \text{ нм}$, где постоянная Ридберга $R_\infty = 109737,3 \text{ см}^{-1}$.

4.19. $\mathcal{E}_n = 6,8 \text{ эВ}$ (для позитрония); $\mathcal{E}_n = 2,6 \text{ кэВ}$ (для мюония).

4.20. $\Delta\mathcal{E} = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \right) \approx 125 \text{ эВ}$, где $\mu = \frac{m_\mu m_p}{m_\mu + m_p}$ — приведенная масса мезоатома; $r_\mu = \frac{m_e}{m_\mu} r_1 = 2,8 \cdot 10^{-11} \text{ см}$, где $r_1 = 0,53 \text{ \AA}$ — радиус первой боровской орбиты в атоме водорода.

4.21. $v_\mu \approx \frac{Ze^2}{\hbar} = Z\alpha c = 2,3 \cdot 10^9 \text{ см/с}$; $r_\mu = \frac{m_e}{(m_\mu)_{\text{прив}}} Z r_1 \approx 2,8 \cdot 10^{-12} \text{ см}$, где $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры.

4.22. $\mu_\pi c^2 \approx 137$ МэВ, где $\mu_\pi = \frac{m_\pi m_\text{я}}{m_\pi + m_\text{я}} \approx m_\pi$ — приведенная масса мезоатома, m_π — масса пиона, $m_\text{я}$ — масса ядра, $r_{\pi 3} \approx \frac{9m_e}{m_\pi Z} r_1 \approx 1,2 \cdot 10^{11}$ см.

$$\mathbf{4.23.} |\mathcal{E}_1| = \frac{\gamma^2 m_n^5}{4\hbar^2} \sim 10^{-83} \text{ эрг}, r_1 = \frac{2\hbar^2}{\gamma m_n^3} \sim 10^{28} \text{ см.}$$

Размер «бинейтронного атома» так велик, что неучет действия других масс Вселенной, очевидно, совершенно недопустим.

4.24. $r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{m_e^2 \gamma m_n}$; $r_2 \approx 4 \cdot 10^{31}$ см, где $n = 1, 2, 3, \dots$ — главное квантовое число.

$$\mathbf{4.25.} V_{\text{He}} = 4V_{\text{H}} = 54,4 \text{ эВ}; V_{\text{Li}} = 9V_{\text{H}} = 122,4 \text{ эВ.}$$

$$\mathbf{4.26.} \mathcal{E}_{\text{Be}} = Z^2 e V_{\text{H}} = 217,6 \text{ эВ.}$$

$$\mathbf{4.27.} \mathcal{E} = 78,9 \text{ эВ.}$$

4.28. $\langle \mathcal{E}_2 \rangle = \langle \widehat{T} \rangle + \langle \widehat{U}_2 \rangle = -40,8 \text{ эВ}$, где $\langle \widehat{T} \rangle = 13,6 \text{ эВ}$, $\langle \widehat{U}_2 \rangle = -\left\langle \frac{2e^2}{r} \right\rangle = -\frac{2e^2}{r_{\text{B}}} = -54,4 \text{ эВ}$. Здесь усреднение идет по волновой функции атома трития.

$$\mathbf{4.29*} \text{ Вклад сильного взаимодействия } \Delta \mathcal{E} = 0,7 \text{ кэВ.}$$

Решение. Прежде всего, найдем энергию излучения протониума, определяемую исключительно кулоновским взаимодействием, возникающим между протоном p и антiproтоном \bar{p} . Связанная система $(p\bar{p})$ аналогична позитронию. Поэтому для расчета кулоновского взаимодействия можно использовать результат задачи 4.18 с заменой массы электрона на массу протона. Это дает уровни энергии протониума

$$\mathcal{E}_n = -\frac{\mu_p e^4}{2\hbar^2 n^2} = -Ry \frac{m_p}{m_e} \frac{1}{2n^2} \approx -12,5 \frac{1}{n^2} \text{ кэВ.}$$

где μ_p — приведенная масса.

Следовательно, вклад кулоновского взаимодействия в энергию перехода $2p \rightarrow 1s$ в атоме протониума составляет

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} = 12,5 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \approx 9,4 \text{ кэВ.}$$

Расхождение с экспериментальным значением обусловлено вкладом сильного взаимодействия. Таким образом,

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{сил}} = \Delta \mathcal{E}_{\text{эксп}} - \Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} = 10,1 - 9,4 \approx 0,7 \text{ кэВ.}$$

В силу короткодействия ядерных сил их влияние на положение $2p$ -состояния незначительно по сравнению с $1s$ -состоянием, поскольку в кулоновском потенциале вероятность частице в $2p$ -состоянии попасть в окрестность начала координат близка к нулю.

$$\mathbf{4.30.} \frac{g^2}{\hbar c} = \frac{r_{\text{B}}^3 |\delta \mathcal{E}|}{4\hbar c r_0^2} \approx 0,27. \text{ (Сравните с 10.59 и 10.60.)}$$

$$\mathbf{4.31.} T = 2\mathcal{E}_i = 27,2 \text{ эВ, где } \mathcal{E}_i \text{ — энергия ионизации атома водорода.}$$

$$\mathbf{4.32.} \frac{v_0 - v}{v_0} = \frac{\hbar v_0}{2m_{\text{ат}}} c^2 = \frac{3}{16} \frac{m_e}{m_{\text{ат}}} \alpha^2 = 5,44 \cdot 10^{-9}; v = \frac{3}{8} \frac{m_e}{m_{\text{ат}}} \alpha^2 c = 326 \text{ см/с, где } \alpha = e^2 / (\hbar c) = 1/137 \text{ — постоянная тонкой структуры.}$$

4.33. Водородная лампа должна удаляться от дейтериевой со скоростью $v \approx 82$ км/с.

4.34. Угол конуса разлета γ -квантов отличается от развернутого на $\alpha \approx 1,2 \cdot 10^{-2}$ рад.

$$\mathbf{4.35.} v_e = v_{\bar{e}} = \frac{e^2}{2\sqrt{2}\hbar} \approx 8 \cdot 10^7 \text{ см/с (угол разлета } \approx 180^\circ).$$

$$\mathbf{4.36*} \Delta\varphi = \frac{m_e e^2 \lambda}{4\pi\hbar^2} \approx 0,15 \text{ рад} \approx 10^\circ.$$

Решение. Разброс в углах разлета электронов происходит из-за наличия перпендикулярно направленной импульсу фотона составляющей импульса электрона; ее наличие связано с движением электронов в атоме. Полный импульс электрона $p = \sqrt{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}$.

Перпендикулярную составляющую p_{\perp} , обеспечивающую максимальное отклонение, легко оценить из соотношения неопределенностей:

$$\Delta p \Delta r \sim \hbar, \quad \text{где } \Delta p \approx p_{\perp}, \quad \Delta r = r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2}.$$

Таким образом,

$$p_{\perp} \approx \frac{me^2}{\hbar} = mac,$$

где $\alpha = e^2/(\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры. Для нахождения составляющей импульса p_{\parallel} , направленной вдоль движения электрона, достаточно написать закон сохранения импульса:

$$\frac{h}{\lambda} = p_{\parallel} - \frac{h}{\lambda + \delta\lambda}.$$

Величина комптоновского смещения $\delta\lambda$ определяется по известной формуле

$$\delta\lambda = 4\pi\Lambda_e \approx 0,0485 \text{ \AA} \ll \lambda = 1 \text{ \AA}.$$

Таким образом,

$$p_{\parallel} \approx \frac{2h}{\lambda}.$$

Максимальный угол отклонения электрона

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} \approx \frac{mc\alpha}{2h/\lambda} = \frac{mc^2\lambda}{4\pi\hbar^2} = 0,15; \quad \text{т. е. } \varphi \approx 0,15 \text{ рад} \approx 8,6^\circ.$$

Заметим, что для получения ответа можно было бы воспользоваться и законом сохранения энергии:

$$\frac{hc}{\lambda} + \mathcal{E}_{\text{эл}} = \frac{hc}{\lambda + \delta\lambda} + \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}.$$

Энергия электрона $\mathcal{E}_{\text{эл}} = mc^2 - |\mathcal{E}_{\text{cb}}|$. Для водорода очевидно, что $|\mathcal{E}_{\text{cb}}| \ll mc^2$, т. е. $\mathcal{E}_{\text{эл}} \approx mc^2$. Энергия рентгеновского кванта $hc/\lambda = 12,4$ кэВ. Поэтому

$$mc^2 \gg \frac{hc}{\lambda} \gg |\mathcal{E}_{\text{cb}}|.$$

Кроме того, $p_{\perp} \ll p_{\parallel}$, что выясняется простым подсчетом. Поэтому

$$\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \approx \sqrt{m^2c^4 + p_{\parallel}^2c^2} \approx mc^2 + \frac{p_{\parallel}^2}{2m}.$$

Подставив все это в закон сохранения энергии, получим

$$\frac{hc}{\lambda} \approx \frac{hc}{\lambda + \delta\lambda} + \frac{p_{\parallel}^2}{2m}, \quad \text{откуда} \quad p_{\parallel} \approx \sqrt{\frac{2mhc\delta\lambda}{\lambda^2}} = \frac{2h}{\lambda}, \quad \text{где} \quad \delta\lambda = \frac{2h}{mc}.$$

$$4.37. \Delta\varphi = \frac{Zm_e e^2 \lambda}{2\pi\hbar^2} \approx 0,25 \text{ рад} \approx 14^\circ.$$

$$4.38^*. T_e = 10,2 \text{ кэВ.}$$

Решение. Согласно закону Мозли энергия кванта, излученного при переходе электрона с уровня n_2 на уровень n_1 (заряд ядра Z , а σ — поправка на экранирование заряда ядра электронами K -оболочки),

$$\mathcal{E} = \hbar\omega = Ry(Z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Для линии K_{α} $n_1 = 1$, $n_2 = 2$. Поскольку энергия такого кванта в спектре излучения серебра известна и равна $\mathcal{E} = 21,6$ кэВ, то из приведенной формулы найдем поправку σ на экранирование заряда ядра электронами на K -оболочке (в обоих случаях $Z < 50$)

$$\sigma = Z_{\text{Ag}} - \sqrt{\frac{4\mathcal{E}}{3Ry}} \approx 1.$$

Энергия, необходимая для освобождения электрона из K -оболочки атома ^{30}Zn (переход $n = 1$ в $n = \infty$), равна

$$(\hbar\omega)_{\text{Zn}} = Ry(Z_{\text{Zn}} - 1)^2 = 13,6 \cdot 29^2 = 11,4 \text{ кэВ},$$

а значит, кинетическая энергия T_e вылетевшего оттуда электрона равна

$$T_e = \mathcal{E} - (\hbar\omega)_{\text{Zn}} = 21,6 - 11,4 = 10,2 \text{ кэВ.}$$

4.39. Отличие в $n^4 = 10$ раз.

$$4.40. E = \frac{Ry^2}{4e^3 n^4} \approx 32 \text{ кВ/см.}$$

$$4.41^* \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \begin{cases} \frac{4}{3} \left(\frac{R_{\text{я}}}{r_{\mu 1}} \right)^2 = 2,53 \cdot 10^{-2} & \text{(ядро — заряженная сфера),} \\ \frac{4}{5} \left(\frac{R_{\text{я}}}{r_{\mu 1}} \right)^2 = 1,52 \cdot 10^{-2} & \text{(ядро — однородно заряженный шар),} \end{cases}$$

$$\text{где } r_{\mu 1} = \frac{\hbar^2}{m_{\mu} Ze^2}.$$

Решение. Считаем, что решение задачи об уровнях энергии в кулоновском поле точечного заряда известно: $\widehat{H}\varphi = \mathcal{E}\psi$, где $\widehat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$, $\mathcal{E} = -\frac{Z^2 me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$.

Рассмотрим $n = 1$, тогда $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-r/r_1}$. Истинный потенциал при $r \geq R_{\text{я}}$

совпадает с потенциалом точечного ядра и отличается от него при $r < R_{\text{я}}$. Если считать ядро равномерно заряженной по поверхности сферой, то

$U(r < R_{\text{я}}) = -\frac{Ze^2}{R_{\text{я}}}$; если равномерно заряженным шаром, то $U(r < R_{\text{я}}) = -\frac{3}{2} \frac{Ze^2}{R_{\text{я}}} \left(1 - \frac{r^2}{3R_{\text{я}}^2}\right)$ (рис. 149).

Представим истинный гамильтониан в виде

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} + \delta U,$$

где для шара

$$\delta U = \begin{cases} 0, & r \geq R_{\text{я}}, \\ \frac{Ze^2}{r} - \frac{3}{2} \frac{Ze^2}{R_{\text{я}}} \left(1 - \frac{r^2}{3R_{\text{я}}^2}\right), & r < R_{\text{я}} \end{cases}$$

и для сферы

$$\delta U = \begin{cases} 0, & r \geq R_{\text{я}}, \\ \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{R_{\text{я}}}, & r < R_{\text{я}}. \end{cases}$$

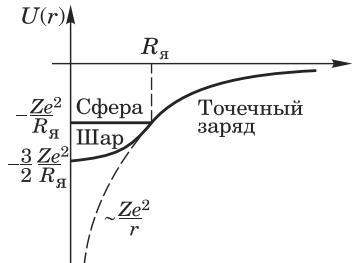


Рис. 149

Так как все отличие наблюдается при $r < R_{\text{я}} \ll r_1$, то рассматриваем δU как поправку. Среднее значение δU в основном состоянии и есть сдвиг уровня:

$$\langle \Psi_1 | \hat{H} | \Psi_1 \rangle = \left\langle \Psi_1 \left| \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \right| \Psi_1 \right\rangle + \langle \Psi_1 | \delta U | \Psi_1 \rangle = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2} + \Delta \mathcal{E}.$$

$$\Delta \mathcal{E} = \int dV \Psi_1^* \delta U \Psi_1 = \frac{1}{\pi r_1^3} 4\pi \int_0^{R_{\text{я}}} e^{-2r/r_1} \left(\frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{R_{\text{я}}} \right. \left. \frac{Ze^2}{r} - \frac{3}{2} \frac{Ze^2}{R_{\text{я}}} \left(1 - \frac{r^2}{3R_{\text{я}}^2}\right) \right) r^2 dr,$$

так как $\frac{R_{\text{я}}}{r_1} \lesssim \frac{3,5 \cdot 10^{-13}}{25,6 \cdot 10^{-13}} \sim 0,1$, то $e^{-2r/r_1} \simeq 1$. Тогда

$$\Delta \mathcal{E} \approx \frac{4}{r_1^3} \int_0^{R_{\text{я}}} \left\{ Ze^2 \left(r - \frac{r^2}{R_{\text{я}}} \right) \left[Ze^2 \left(r - \frac{3}{2} \frac{r^2}{R_{\text{я}}} \left(1 - \frac{r^2}{3R_{\text{я}}^2}\right) \right) \right] \right\} dr = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{Ze^2}{r_1} \left(\frac{R_{\text{я}}}{r_1} \right)^2 - \text{сфера,} \\ \frac{2}{5} \frac{Ze^2}{r_1} \left(\frac{R_{\text{я}}}{r_1} \right)^2 - \text{шар.} \end{cases}$$

Видно, что поправка положительна, следовательно, уровни сдвигаются вверх. Относительная поправка

$$\delta = \left| \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_1} \right| = \frac{\Delta \mathcal{E}}{\frac{Ze^2}{2r_1}} = \begin{cases} \frac{4}{3} \left(\frac{R_{\text{я}}}{r_1} \right)^2 - \text{сфера,} \\ \frac{4}{5} \left(\frac{R_{\text{я}}}{r_1} \right)^2 - \text{шар.} \end{cases}$$

Сделаем вычисления:

$$R_{\text{я}} = 3,53 \cdot 10^{-13} \text{ см}; \quad r_1 = r_{\mu_1} = \frac{\hbar^2}{m_{\mu} Z e^2} = \frac{m_e}{m_{\mu}} \frac{1}{Z} \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 25,6 \cdot 10^{-13} \text{ см};$$

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \begin{cases} 2,53 \cdot 10^{-2} - \text{сфера}, \\ 1,52 \cdot 10^{-2} - \text{шар}. \end{cases}$$

$$4.42. \quad \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \begin{cases} \frac{4}{3} \left(\frac{R_{\text{я}}}{a_{\text{Ne}}} \right) = 5,94 \cdot 10^{-7} & \text{ядро — заряженная сфера,} \\ \frac{4}{5} \left(\frac{R_{\text{я}}}{a_{\text{Ne}}} \right)^2 = 3,56 \cdot 10^{-7} & \text{ядро — однородно заряженный шар,} \end{cases}$$

где $a_{\text{Ne}} = r_1/Z$.

$$4.43. \langle T \rangle = \frac{e^2}{2r_1^*} \approx 14,5 \text{ эВ, где } r_1^* = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

$$4.44. \langle T \rangle = \frac{e^2}{8r_1^*} \approx 3,4 \text{ эВ, где } r_1^* = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

4.45. Так как радиус мюонной орбиты $r_{\mu} = \frac{\hbar^2}{Ze^2 m_{\mu}} \approx 10^{-11} \text{ см} \ll r_B$ — боровского радиуса ($0,53 \text{ \AA}$), то оставшийся электрон фактически движется в поле с зарядом $Z=1$ (водородоподобный атом). Энергия перехода между уровнями $n=3$ и $n=2$ равна (это линия H_{α})

$$\frac{1}{\lambda_{32}} = R_{\infty} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} R_{\infty} \approx 1,52 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}; \quad \lambda_{32} = 656 \text{ нм},$$

где $R_{\infty} = 109737,3 \text{ см}^{-1}$.

4.46. Энергия $3p$ -состояния находится из условия

$$\mathcal{E}_{3p} = \mathcal{E}_{3s} + \frac{hc}{\lambda} = -U_0 + \frac{hc}{\lambda} = -3 \text{ эВ.}$$

Поскольку $\mathcal{E}_{3p} = -\text{Ry} \frac{Z_{\text{эфф}}^2}{3^2}$, то $Z_{\text{эфф}}^2 \approx 2$; $Z_{\text{эфф}} \approx 1,4$.

$$4.47. v = \frac{3}{4} \frac{Z^2 a}{hn^2} \text{ Ry} = 9 \cdot 10^8 \text{ см/с.}$$

$$4.48^*. \mathcal{E}_{\text{осн}} \approx -\frac{e^2}{r_B} Z \left(Z - \frac{5}{8} \right) = -74,8 \text{ эВ; где } r_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,529 \text{ \AA}; \mathcal{E}_{\text{ион}} \approx \frac{me^4}{2\hbar^2} \times Z \left(Z - \frac{5}{4} \right) \approx 20,4 \text{ эВ, где } Z=2.$$

Решение. Вычислим энергию кулоновского расталкивания электронов в атоме гелия. Это интеграл

$$\mathcal{E}_{\text{кул}} = e^2 \iint_0^{\infty} \psi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = e^2 \iint_0^{\infty} |\psi_0(\mathbf{r}_1)|^2 |\psi_0(\mathbf{r}_2)|^2 \frac{d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Введем плотности зарядов

$$\rho(\mathbf{r}_1) = e |\psi_0(\mathbf{r}_1)|^2 \quad \text{и} \quad \rho(\mathbf{r}_2) = e |\psi_0(\mathbf{r}_2)|^2.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\text{кул}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \iint_0^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \rho(\mathbf{r}_1)\varphi(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1,$$

где $\varphi(\mathbf{r}_1) = \int_0^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_2$ — потенциал, создаваемый в точке \mathbf{r}_1 распределением заряда $\rho(\mathbf{r}_2)$, — аналог формулы $\frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$ (в силу симметрии можно было бы написать $\mathcal{E}_{\text{кул}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \rho(\mathbf{r}_2)\varphi(\mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_2$),

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \int_0^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}_2) 4\pi r_2^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_2.$$

Разобьем область интегрирования на две части: $\int_0^{\infty} = \int_0^{r_1} + \int_{r_1}^{\infty}$. Тогда первый интеграл есть потенциал, создаваемый сферически симметричным распределением заряда при $r_2 < r_1$. По теореме Гаусса он равен потенциалу точечного заряда, находящегося в центре сферы, т. е.

$$\begin{aligned} \int_0^{r_1} \frac{\rho(\mathbf{r}_2) 4\pi r_2^2 dr}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} &= \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} \rho(\mathbf{r}_2) 4\pi r_2^2 dr = \frac{4Z^3}{r_B^3} \frac{e}{r_1} \int_0^{r_1} \exp\left(-\frac{2Zr_2}{r_B}\right) r_2^2 dr_2 = \\ &= \frac{4e}{r_1} \left(\frac{Z}{r_B}\right)^3 \exp\left[-\frac{r_2^2 r_B}{2Z} - \frac{2r_2 r_B^2}{(2Z)^2} - \frac{2r_B^3}{2Z^3}\right] \exp\left(-\frac{2Zr_2}{r_B}\right) \Big|_0^{r_1} = \\ &= 4e \left(\frac{Z}{r_B}\right)^3 \frac{(-1)}{r_1} \left[\left(\frac{r_1^2 r_B}{2Z} + \frac{r_1 r_B^2}{4Z^2} + \frac{r_B^3}{8Z^3} \right) \exp\left(-\frac{2Zr_1}{r_B}\right) - \frac{r_B^3}{8Z^3} \right] = \\ &= -4e \left[\left(\frac{r_1 Z^2}{2r_B^2} + \frac{Z}{4r_B} + \frac{1}{8r_1} \right) \exp\left(-\frac{2Zr_1}{r_B}\right) - \frac{1}{8} \frac{1}{r_1} \right]. \end{aligned}$$

Для вычисления поля, создаваемого распределением заряда при $r_2 > r_1$, разбиваем всю область на вложенные друг в друга сферы толщиной dr с зарядом $dQ = \rho(r_2) \cdot 4\pi r_2^2 dr$ (рис. 150). По теореме Гаусса потенциал внутри сфе-

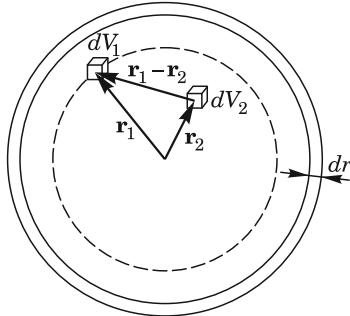


Рис. 150

ры равен потенциалу ее поверхности. Таким образом, $\frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \rightarrow \frac{1}{r_2}$ и

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{\infty} \rightarrow \int_{r_1}^{\infty} \frac{\rho(r_2) 4\pi r_2^2 dr_2}{r_2} &= 4 \left(\frac{Z}{r_B} \right)^3 e \int_{r_1}^{\infty} \left(-\frac{2Z}{r_B} r_2 \right) r_2 dr_2 = \\ &= 4 \left(\frac{Z}{r_B} \right)^3 e \cdot \exp \left(-\frac{2Z}{r_B} r_2 \right) \frac{r_B^2}{(2Z)^2} \left(-\frac{2Z}{r_B} r_2 - 1 \right) \Big|_{r_1}^{\infty} = \\ &= \left(\frac{Z}{r_B} \right)^3 e \cdot \exp \left(-\frac{2Z}{r_B} r_2 \right) \left(\frac{r_B}{Z} \right)^2 \left(2 \frac{Z}{r_B} r_1 + 1 \right) = \\ &= \frac{Z}{r_B} \cdot e \cdot \exp \left(-\frac{2Z}{r_B} r_1 \right) \left(2 \frac{Z}{r_B} r_1 + 1 \right). \end{aligned}$$

Складывая, получаем

$$\varphi(r_1) = \frac{e}{r_1} - e \left(\frac{Z}{r_B} + \frac{1}{r_1} \right) \exp \left(-\frac{2Z}{r_B} r_1 \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{кул}} &= \int_0^{\infty} \rho(\mathbf{r}_1) \varphi(r_1) dr_1 = \\ &= \frac{4\pi Z^3}{\pi r_B^3} e^2 \int_0^{\infty} \left(-\frac{2Z}{r_B} r_1 \right) \left[\frac{1}{r_1} - \left(\frac{Z}{r_B} + \frac{1}{r_1} \right) \exp \left(-\frac{2Z}{r_B} r_1 \right) \right] r_1^2 dr_1 = \\ &= 4 \left(\frac{Z}{r_B} \right)^3 e^2 \left[\int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{2Zr_1}{r_B} r_1 \right) dr_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Z}{r_B} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{4Z}{r_B} r_1 \right) r_1^2 dr_1 - \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{4Z}{r_B} r_1 \right) r_1 dr_1 \right] = \\ &= 4 \left(\frac{Z}{r_B} \right)^3 e^2 \left[\left(\frac{r_B}{2Z} \right)^2 \int_0^{\infty} e^{-y} y dy - \frac{Z}{r_B} \left(\frac{r_B}{4Z} \right)^3 \int_0^{\infty} e^{-y} y^2 dy - \left(\frac{r_B}{4Z} \right)^2 \int_0^{\infty} e^{-y} y dy \right]. \end{aligned}$$

Так как $\int_0^{\infty} e^{-y} y^n dy = \Gamma(n+1) = n!$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{кул}} &= 4e^2 \left(\frac{Z}{r_B} \right)^3 \left[\left(\frac{r_B}{2Z} \right)^2 \cdot 1! - \frac{1}{4^3} \left(\frac{r_B}{Z} \right)^2 \cdot 2! - \frac{r_B}{4^2 Z^2} \cdot 1! \right] = \\ &= 4e^2 \frac{Z}{r_B} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{64} - \frac{1}{16} \right) = 4e^2 \frac{Z}{r_B} \frac{16-2-4}{64} = \frac{5}{8} \frac{Ze^2}{r_B}, \\ \mathcal{E}_{\text{очн}} &= -2 \text{Ry} + E_{\text{кул}} = -Z \left(Z - \frac{5}{8} \right) \frac{e^2}{r_B} = -74,8 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

После ионизации, т. е. отрыва одного электрона, останется водородоподобный ион с зарядом +2. Энергия связи оставшегося электрона есть

$$\mathcal{E}_{\text{cb}} = -Z^2 \text{Ry} = -Z^2 \frac{e^2}{2r_{\text{B}}};$$

$$\mathcal{E}_{\text{ион}} = \mathcal{E}_{\text{cb}} - \mathcal{E}_{\text{осн}} = Z \left(Z - \frac{5}{8} \right) \frac{e^2}{r_{\text{B}}} - Z^2 \frac{e^2}{2r_{\text{B}}} = Z \left(Z - \frac{5}{4} \right) \frac{e^2}{2r_{\text{B}}} = 20,4 \text{ эВ.}$$

4.49. 3d-состояние.

4.50. 2s-состояние.

$$\mathbf{4.51^*:} \lambda' = 3,7 \text{ нм}; T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \approx 11,6 \text{ ГэВ.}$$

Решение. Частота лазерного излучения в ЛСО $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$. В системе отсчета ионов (где они неподвижны) эта же частота

$$\omega' = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Энергия перехода иона гелия из основного состояния в первое возбужденное $\mathcal{E}_{12} = \text{Ry} Z^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = 3 \text{ Ry} = \hbar\omega'$. Поскольку $\frac{(\hbar\omega')^2}{(\hbar\omega)^2} = \frac{1 + \beta}{1 - \beta}$, то $\beta = \frac{(\mathcal{E}_{12}/\hbar\omega_0)^2 - 1}{(\mathcal{E}_{12}/\hbar\omega_0)^2 + 1} \approx 0,97$. Здесь $\hbar\omega_0 = \frac{2\pi c \hbar}{\lambda_0} = 5 \text{ эВ.}$

Частота излучения в ЛСО (см. задачу 1.35)

$$\omega'' = \omega' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \omega_0 \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \left(\frac{\mathcal{E}_{12}}{\hbar\omega_0} \right)^2 \omega_0 \approx 66,6 \omega_0.$$

Эта частота соответствует длине волны

$$\lambda'' = \frac{\lambda_0}{66,6} \approx 3,7 \text{ нм.}$$

Кинетическая энергия ионов

$$T = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \approx 11,6 \text{ ГэВ.}$$

4.52. $\tau \approx \frac{\hbar\omega}{T} = \frac{3}{2} \frac{Z^2}{n^4} \alpha \hbar \frac{(mc^2)^2}{(\hbar\omega)^3} = 6,6 \cdot 10^{-12} \text{ с, где } \hbar\omega = \frac{3}{4} \text{Ry} Z^2 = 40,8 \text{ эВ,}$
 $Z=2, n=2, \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$

4.53. $\tau \approx \frac{\hbar\omega}{T} = \frac{3}{2} \frac{Z^2}{n^4} \alpha \hbar \frac{(mc^2)^2}{(\hbar\omega)^3} = 0,2 \cdot 10^{-7} \text{ с, где } \hbar\omega = \text{Ry} Z^2 \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{10^2} \right) = 0,51 \text{ эВ.}$

4.54. $\left(\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right)_{\text{Pb}} = \left(\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} \right)_{\text{Ne}} \frac{(Z^2 R_{\text{яд}}^2)_{\text{Pb}}}{(Z^2 R_{\text{яд}}^2)_{\text{Ne}}} = 1,92 \cdot 10^4.$

4.55. $R \leq 512 \frac{\gamma M}{c^2} \left(\frac{B r_1^2}{e} \right)^2 \approx 6500 \text{ км, где } r_1 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{e^2}{2 \text{Ry}} \approx 0,53 \text{ \AA} — \text{боровский радиус (см. задачу 4.40).}$

4.56. При больших Z выражение для полной энергии $\mathcal{E} \approx \sqrt{(\hbar c/r)^2 + m^2 c^4} - Ze^2/r$. Минимум этого выражения $d\mathcal{E}/dr = 0$ приводит к соотношению $(Z^2 \alpha^2 - 1) \left(\frac{\hbar c}{r} \right)^2 = -\frac{mc^2}{\alpha^2}$, где $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ — постоянная тонкой структуры. Полученное уравнение не имеет решений при $Z > 1/\alpha$, откуда $Z > 137$.

$$\mathbf{4.57. } \Delta T = -\frac{m}{2am_p} = -4 \text{ К.}$$

$$\mathbf{4.58. } \Delta P = \frac{2\mathcal{E}}{A(A+2)} \frac{m_e}{m_p} = 0,186 \cdot 10^5 \text{ Па} \approx 0,183 \text{ атм.}$$

$$\mathbf{4.59. } E = \frac{1}{\beta} \frac{m_e}{6m_p} \propto 1,5 \frac{\text{кБ}}{\text{см}}.$$

$$\mathbf{4.60*} Z_{\text{эф}} = 8,1.$$

Решение. Обозначим энергию электронов на K, L, M -оболочках через $\mathcal{E}_K, \mathcal{E}_L, \mathcal{E}_M$. Тогда для KLL -процесса можно записать

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_L - \mathcal{E}_K = 2\mathcal{E}_L - \mathcal{E}_K.$$

Для LMM -процесса $\mathcal{E}_2 = 2\mathcal{E}_M - \mathcal{E}_L$. Из этих уравнений получим

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{4} (\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_K).$$

Поскольку $W_K = -\mathcal{E}_K$, то $\mathcal{E}_M = -100 \text{ эВ}$. По водородоподобной модели

$$\mathcal{E}_M = -Ry \frac{Z_{\text{эф}}^2}{n^2}, \quad \text{где } n = 3,$$

$$\text{откуда } Z_{\text{эф}} = \sqrt{-\frac{n^2 \mathcal{E}_M}{Ry}} \approx 8,1.$$

$$\mathbf{4.61. } \mathcal{E}_{LMM} = 100 \text{ эВ. (См. задачу 4.60.)}$$

$$\mathbf{4.62. } \mathcal{E} = 1110 \text{ эВ.}$$

4.63. Фактически экспериментально реализовали классический атом Бора. Из графика период обращения $T_n = 56 \text{ пс}$, откуда квантовое число $n \approx 72$. $\mathcal{E}_{\text{ион}} = |\mathcal{E}_{72}| = Ry/72^2 = 2,6 \text{ мэВ}$.

$$\mathbf{4.64. } n \approx 307, r_n = r_1 n^2 \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ см} = 5 \text{ мкм.}$$

§ 5. Ширина линий. Спектры молекул. Рентгеновское излучение

$$\mathbf{5.1. } \Delta\lambda \sim \frac{\lambda^2}{c\tau} \sim 10^{-4} \text{ нм}, \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim \frac{\Delta\lambda}{c\tau} \sim 10^{-7}.$$

5.2. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\hbar}{\tau E_{21}} \approx 1,4 \cdot 10^{-11}$, где $E_{21} = \frac{3}{8} \mu c^2 \alpha^2$; $\mu = \frac{m_\pi m_p}{m_\pi + m_p}$; α — постоянная тонкой структуры.

$$\mathbf{5.3. } L_{\min} = c\tau = 3 \text{ см.}$$

$$\mathbf{5.4. } \Delta\nu \approx \tau^{-1} = 10 \text{ МГц, где } \tau = -\frac{\Delta x}{v \Delta (\ln \mathcal{J}/\mathcal{J}_1)}.$$

$$\mathbf{5.5. } T \approx \frac{m_p \lambda^2 (\Delta\nu)}{4k} \approx 33 \text{ К.}$$

5.6. $T = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \right)^2 \frac{\mu c^2}{4R} = 8 \cdot 10^5 \text{ К}$, где R — универсальная газовая постоянная, $\Delta\lambda$ — ширина на половине высоты резонансной кривой.

$$5.7. \frac{\Delta\lambda_d}{\Delta\lambda_{ct}} = \frac{2l}{\lambda} \approx 3,6.$$

$$5.8. \frac{\delta\mathcal{E}}{\hbar\omega - \mathcal{E}_{ion}} \approx \frac{\hbar/\tau}{\hbar c/\lambda - \mathcal{E}_{ion}} \approx 6 \cdot 10^{-8}.$$

$$5.9. \frac{\Delta v}{v} = \frac{kT\lambda}{m_{Ne}Dc} \approx 3,5 \cdot 10^{-8}.$$

$$5.10^*: P \approx \frac{2\pi c \Delta q}{\sigma} \sqrt{\frac{MkT}{3}} \approx 440 \text{ атм.}$$

Решение. Ударное уширение спектральных линий связано с тем, что при определенных давлениях газа время жизни атомов в возбужденном состоянии определяется временем между столкновениями молекул

$$\tau \sim \frac{l}{v_{CKB}} \approx \frac{1}{n\sigma v_{CKB}},$$

где l — длина свободного пробега молекул, v_{CKB} — среднеквадратичная скорость молекул, соответствующая температуре T , т. е. $v_{CKB} = \sqrt{3kT/M}$, n — концентрация, σ — сечение столкновений. Таким образом, необходимое давление

$$P = nkT \approx \frac{kT}{\sigma v_{CKB} \tau} = \frac{1}{\sigma \tau} \sqrt{\frac{MkT}{3}}.$$

С другой стороны, время жизни атомов в возбужденном состоянии, определяемое столкновениями атомов, и уширение спектральных линий связаны соотношением неопределенностей: $\Delta v_{CT} \tau \approx 1$ (или $\Delta\omega_{CT} \tau \approx 2\pi$).

Если расстояние между спектральными линиями (в обратных сантиметрах) Δq станет равным ударному уширению, то произойдет слияние этих линий, т. е.

$$\Delta v_{CT} \gtrsim \Delta v = \Delta \left(\frac{c}{\lambda} \right) = 2\pi c \Delta q, \quad \text{где } q = \frac{2\pi}{\lambda} \gg \Delta q.$$

Отсюда искомое время жизни $\tau^{-1} \approx 2\pi c \Delta q$. Окончательно необходимое для слияния линий давление

$$P = \frac{1}{\sigma \tau} \sqrt{\frac{MkT}{3}} \approx \frac{2\pi c \Delta q}{\sigma} \sqrt{\frac{MkT}{3}} \approx 440 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2 \approx 440 \text{ атм.}$$

$$5.11. \text{ а)} l = 0, 1, 2; I = 6,9 \cdot 10^{-39} \text{ г} \cdot \text{см}^2;$$

$$\text{б)} l = 1, 2, 3; I = 13,8 \cdot 10^{-39} \text{ г} \cdot \text{см}^2.$$

$$5.12. x = \sqrt{\alpha \frac{\mu_{HI}}{\mu_{HCl}}} \approx 1,01\sqrt{\alpha}, \text{ где } \mu \text{ — приведенная масса молекулы.}$$

$$5.13. \lambda_{max} = \frac{\pi c A m_p a^2}{\hbar} \approx 2,1 \text{ см.}$$

5.14. $\frac{\omega_{35}}{\omega_{37}} = \frac{I_{37}}{I_{35}} = 1,0015$, где индексы 35 и 37 относятся к изотопам хлора ^{35}Cl и ^{37}Cl , I — моменты инерции молекул относительно центра масс.

$$5.15. \mathcal{E}_{H_2} : \mathcal{E}_{HD} : \mathcal{E}_{D_2} = 2 : \frac{3}{2} : 1.$$

5.16. $r = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\mu_{HBr} c \Delta}} = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ см, где } \mu_{HBr} \approx m_p \text{ — приведенная масса молекулы HBr.}$

5.17. $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\omega}{\Delta\omega} = \frac{2\pi c I}{\hbar\lambda}$, т. е. требуемая разрешающая способность $R > 140$. Такое разрешение может быть получено в спектрометре, использующем призму.

$$\textbf{5.18. } T \geq \frac{\rho a^5}{\hbar} \approx 500 \text{ с.}$$

5.19* Решение. Теплоемкость молекулярного водорода $C_V = C_{\text{пост}} + C_{\text{вр}} + C_{\text{кол}}$. Поскольку расстояния между колебательными уровнями велики ($\Delta\mathcal{E}_{\text{кол}} \sim \sqrt{M/m}$ $\Delta\mathcal{E}_{\text{вр}} \approx 40\Delta\mathcal{E}_{\text{вр}}$), то при комнатных температурах колебательные уровни не возбуждены, а вращательные уровни возбуждены все, поскольку по условию $C_V = (5/2)R$. При $T = 100 \text{ К}$ вращательные уровни не возбуждены вовсе. Таким образом,

$$kT \lesssim \Delta\mathcal{E}_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{T}, \quad \text{откуда} \quad I \lesssim \frac{\hbar^2}{kT} \sim 10^{-40} \text{ г}\cdot\text{см}^2,$$

где k — постоянная Больцмана. Следовательно,

$$hv = \frac{\hbar^2}{2I} 2(l+1) \approx kT(l+1); \quad v = \frac{kT}{\hbar}(l+1), \quad \text{где} \quad l = 0, 1, 2, \dots;$$

$$v_{\min} \approx \frac{kT}{\hbar} \approx 2,1 \cdot 10^{12} \text{ Гц}; \quad \lambda_{\max} \approx 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ см} = 0,15 \text{ мм.}$$

Соответствующая линия лежит в далекой инфракрасной области спектра.

5.20. Количество вращательных уровней $l_{\max} = 4$.

$$\textbf{5.22. } \mathcal{E}_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{e^2 E^2}{2m\omega^2}, \quad \text{где} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

5.23* $\omega_1 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_3 = \Omega = 0,32 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1} = \sqrt{k/\mu}$, откуда вычисляем $k \approx 1,2 \cdot 10^6 \text{ дин}/\text{см}$.

Решение. Найдем частоты, соответствующие заданным переходам (рис. 151):

$$\omega_1 = \frac{2\pi c}{\lambda_1} = 5,59 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda_2} = 5,27 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_3 = \frac{2\pi c}{\lambda_3} = 4,95 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

При вычислении мы сделаем округление в третьем знаке. Это дает точность $(0,01/5) \cdot 100\% = 0,2\%$, что укладывается в интервал измерений ($0,2\%$ — по условию). Вычислим разности частот:

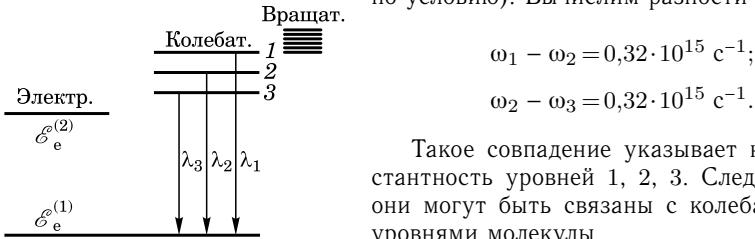


Рис. 151

Такое совпадение указывает на эквидистантность уровней 1, 2, 3. Следовательно, они могут быть связаны с колебательными уровнями молекулы

$$\omega_1 - \omega_2 = \omega_2 - \omega_3 = \Omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

где k — жесткость упругой связи, μ — приведенная масса молекулы N_2 . Таким образом, искомая жесткость

$$k = \mu\Omega^2 = 1,2 \cdot 10^6 \text{ дин/см}, \quad \text{где } \mu = 11,69 \cdot 10^{-24} \text{ г.}$$

Заметим, что найденный колебательный квант молекулы азота $\Delta\mathcal{E} = \hbar\Omega = 0,21$ эВ. Табличное значение 0,29 эВ.

$$5.24^*: \frac{\hbar\omega_0}{\mathcal{E}_e} \approx 2\sqrt{\frac{2m_e}{M}}; A \approx a\sqrt[4]{\frac{m_e}{M}}, \text{ где } M \text{ — масса атома.}$$

Решение. Двухатомную молекулу можно рассматривать как квантовый гармонический осциллятор. На рис. 152 изображен потенциал взаимодействия атомов в такой молекуле. Вблизи положения равновесия r_0 форма ямы приближенно параболическая. Однако из-за соотношения неопределенностей квантово-механическая система не может находиться на дне потенциальной ямы. В результате возникают нулевые колебания с полной энергией $\mathcal{E}_0 = \hbar\omega_0/2$, где ω_0 — частота колебаний двухатомной молекулы $\omega_0 = \sqrt{k/\mu} = \sqrt{2k/M}$, где k — коэффициент упругой молекулярной связи, μ — приведенная масса молекулы, M — масса атома в молекуле типа H_2 или O_2 . Далее идут эквидистантные уровни возбужденных состояний двухатомной молекулы с $\Delta\mathcal{E} = \hbar\omega_0$.

Согласно соотношению неопределенностей и теореме вириала для осциллятора можно записать $\mathcal{E}_e \sim 2\frac{p^2}{2m_e} \sim \frac{\hbar^2}{m_e a^2}$ (считаем, что область локализации электрона порядка межатомного расстояния). Отсюда искомое отношение

$$\frac{\hbar\omega}{\mathcal{E}_e} = \frac{\hbar\sqrt{2k/M}}{\mathcal{E}_e} = \sqrt{2\frac{\hbar^2}{a^2 m_e M \mathcal{E}_e} \frac{m_e}{M}} \sim 2\sqrt{\frac{2m_e}{M}} \approx \begin{cases} 0,035 & \text{для } H_2, \\ 0,01 & \text{для } O_2. \end{cases}$$

Для оценки амплитуды нулевых колебаний воспользуемся приведенным в условии соотношением $k = \mathcal{E}_e/a^2$. Как указывалось выше, энергия нулевых колебаний (A — амплитуда классического осциллятора с такой энергией>)

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} = \frac{kA^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad A^2 = \frac{\hbar\omega_0 a^2}{\mathcal{E}_e}.$$

Подстановкой найдем

$$A \approx a\sqrt[4]{\frac{m_e}{M}} \approx \begin{cases} 0,015a & \text{для } H_2, \\ 0,08a & \text{для } O_2. \end{cases}$$

Величина $k = \sqrt[4]{\frac{m_e}{M}}$ носит название параметра неадиабатичности (см. задачу 5.29).

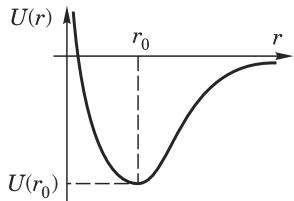


Рис. 152

$$5.25. A_0 = \sqrt{\frac{\hbar\lambda}{2\pi c\mu}} \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ см}; T \gtrsim 3100 \text{ К.}$$

5.26. Молекула O_2 находится в основном состоянии, так как $kT = 0,025 \text{ эВ} \ll \Delta\mathcal{E}$. Поэтому $A_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{\mu\Delta\mathcal{E}}} = 0,058 \text{ \AA}$, где μ — приведенная масса O_2 .

5.27. $\frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{кол}}}{\Delta\mathcal{E}_{\text{вр}}} = \frac{\mu r_0^2 \omega}{\hbar} \approx 180$, где μ — приведенная масса молекулы азота, r_0 — положение минимума кривой (берется из графика).

5.28. $\lambda = 2\pi c \sqrt{\frac{4lr\rho}{3\mathcal{E}}} \approx 31 \text{ см}; \hbar\omega = 4 \cdot 10^{-6} \text{ эВ}; A_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \sqrt{\frac{\hbar}{\pi r^2} \sqrt{\frac{3}{\mathcal{E}\rho}}} \approx 4 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$

$$5.29. \mathcal{E}_{0\text{H}} = \frac{\hbar\omega_{\text{H}}}{2} = \frac{\sqrt{2}\Delta\mathcal{E}}{\sqrt{2}-1} = 0,27 \text{ эВ}; \mathcal{E}_{0\text{D}} = \frac{\hbar\omega_{\text{D}}}{2} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\sqrt{2}-1} = 0,19 \text{ эВ.}$$

Решение. Поскольку масса электрона много меньше массы ядер, то скорости движения последних малы по сравнению со скоростями электронов. Тогда в первом приближении можно найти энергию электронов при неподвижных ядрах, а затем учесть движение ядер. Такой подход носит название адиабатического приближения.

Энергия молекулы с учетом движения ядер может быть записана как

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{эл}}(R) + \mathcal{E}_{\text{яд}}^{\text{кин}}.$$

При этом энергия электронов зависит от межъядерного расстояния как от параметра. В энергию $\mathcal{E}_{\text{эл}}(R)$ включена также энергия электростатического отталкивания ядер, поэтому \mathcal{E} фактически является полной энергией молекулы при фиксированном положении ядер. Полагая далее, что $R = R_0 + \delta R$, где R_0 — равновесное расстояние между ядрами, а δR — отклонение от него вследствие движения ядер, запишем

$$\mathcal{E}_{\text{эл}}(R) \approx \mathcal{E}_{\text{эл}}(R_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{\text{эл}}(R)}{\partial R^2} \Big|_{R=R_0} (\delta R)^2.$$

Второй член может быть отождествлен с потенциальной энергией ядер $U_{\text{яд}}^{\text{пот}}$, т. е. с усредненным потенциалом, создаваемым электронами. Вместе с кинетической энергией они образуют энергию колебаний $\mathcal{E}_{\text{яд}}^{\text{кин}} + U_{\text{яд}}^{\text{пот}} = \mathcal{E}_{\text{кол}}$. Если сюда добавить энергию вращения молекулы как целого $\mathcal{E}_{\text{вр}}$, то получим энергию молекулы в адиабатическом приближении $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{эл}}(R_0) + \mathcal{E}_{\text{кол}} + \mathcal{E}_{\text{вр}}$. Заменяя по принципу соответствия классические выражения двух последних членов их квантовыми аналогами, получим

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{\text{эл}}(R_0) + \hbar\omega_{\text{кол}} \left(n + \frac{1}{2} \right) + Bl(l+1),$$

где $B = \frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2}$ — постоянная вращения, μ — приведенная масса ядер, $\omega_{\text{кол}}^2 = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \mathcal{E}(R)}{\partial R^2} \Big|_{R=R_0}$ — квадрат частоты колебаний ядер. Можно показать, что $\mathcal{E}_{\text{эл}}(R_0) : \hbar\omega_{\text{кол}} : B = 1 : K^2 : K^4$ (см. задачу 5.24).

Энергия диссоциации — это разница между энергией основного состояния молекулы и энергией двух удаленных атомов водорода (дейтерия), принимаемой за нуль отсчета. Таким образом, $I = \mathcal{E}_0$. Энергия основного состояния

молекулы $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{\text{кол}}(R_0) + \frac{1}{2}\hbar\omega_{\text{кол}}$. Разность энергий диссоциаций молекул D₂ и H₂

$$\Delta\mathcal{E} = I_{\text{D}_2} - I_{\text{H}_2} = 2\mathcal{E}_{\text{D}} - 2\mathcal{E}_{\text{кол}, \text{D}}(R_0) - \frac{\hbar\omega_{\text{D}}}{2} - 2\mathcal{E}_{\text{H}} + 2\mathcal{E}_{\text{кол}, \text{H}}(R_0) + \frac{\hbar\omega_{\text{H}}}{2}.$$

Поскольку

$$\mathcal{E}_{\text{D}} - \mathcal{E}_{\text{H}} = \frac{e^4}{2\hbar^2}(\mu_{\text{D}} - \mu_{\text{H}}),$$

где $\mu = \frac{m_e M}{m_e + M} \approx m_e \left(1 - \frac{m_e}{M}\right)$ — приведенная масса электрона, то с учетом одинаковости потенциалов взаимодействия, получим

$$\Delta\mathcal{E} \approx \hbar \frac{\omega_{\text{H}} - \omega_{\text{D}}}{2} = \frac{\hbar\omega_{\text{D}}}{2} \left(\frac{\omega_{\text{H}}}{\omega_{\text{D}}} - 1 \right).$$

Отношение $\frac{\omega_{\text{H}}}{\omega_{\text{D}}} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{D}}}{\mu_{\text{H}}}} = \sqrt{2}$, откуда следует $\frac{\hbar\omega_{\text{D}}}{2} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\sqrt{2}-1} \approx 0,19 \text{ эВ}$ и $\frac{\hbar\omega_{\text{H}}}{2} = \sqrt{2} \frac{\Delta\mathcal{E}}{\sqrt{2}-1} \approx 0,27 \text{ эВ}$.

5.30. $\mathcal{E}_0 \approx \frac{3\hbar^2}{8mr^2} \approx 1,2 \cdot 10^{-16} \text{ эрг} = 0,75 \cdot 10^{-4} \text{ эВ}$. Здесь $2r \approx 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ — характерный размер области, занимаемый одним атомом в жидком гелии, $2r \approx \left(\frac{6\lambda}{\pi\rho N_A}\right)^{1/3}$.

$$5.31^* \frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{вр}}(n=0) - \Delta\mathcal{E}_{\text{вр}}(n=1)}{\Delta\mathcal{E}_{\text{вр}}(n=1)} = \frac{\hbar}{\omega\mu r_0^2} = 1,63 \cdot 10^{-3}.$$

Решение. С ростом номера колебательного возбуждения меняется средний квадрат расстояния между атомами в молекуле, и, следовательно, момент инерции молекулы (рис. 153) зависит от n .

Согласно теореме вириала $\mathcal{E}_{\text{кол}} = \langle K \rangle + \langle U \rangle = 2\langle U \rangle$. В то же время $\mathcal{E}_{\text{кол}} = \omega\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Поэтому

мы $2\langle U \rangle = 2\frac{\mu\omega^2}{2}\langle x_n^2 \rangle \rightarrow \langle x_n^2 \rangle = \frac{\hbar}{\mu\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)$, где μ — приведенная масса ядер. Средний момент инерции молекулы в n -м колебательном состоянии

$$\langle I_n \rangle = \mu\langle r_n^2 \rangle = \mu\langle (r_0 + 2x_n)^2 \rangle = \mu(r_0^2 + 4\langle x_n^2 \rangle).$$

Среднее значение вращательной энергии

$$\mathcal{E}_{\text{вр}} = \left(\frac{1}{2I_n}\right)\hbar^2 l(l+1) = \frac{\hbar^2}{2\mu} l(l+1) \left(\frac{1}{r_n^2}\right) \approx \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{l(l+1)}{\langle r_n^2 \rangle}.$$

Надо отметить, что усреднение ведется по заданному колебательному состоянию. В силу адабатичности $\mathcal{E}_{\text{вр}}$ — поправка к $\mathcal{E}_{\text{кол}}$.

Равенство $\langle 1/r_n^2 \rangle \approx 1/\langle r_n^2 \rangle$ справедливо, поскольку для небольших $n < 100$ справедливо соотношение $\langle x_n^2 \rangle \ll r_0^2$.

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{вр}}(n, l=1 \rightarrow l=0) = \frac{\hbar^2}{\mu\langle r_n^2 \rangle} = \frac{\hbar}{\mu(\langle r_0^2 + 4x_n^2 \rangle)},$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{вр}}(n=0) - \Delta\mathcal{E}_{\text{вр}}(n=1)}{\Delta\mathcal{E}_{\text{вр}}(n=1)} &= \\ &= \frac{r_0^2 + 4\langle x_1^2 \rangle}{r_0^2 + 4\langle x_0^2 \rangle} - 1 = \frac{r_0^2 + 3\hbar/(2\mu\omega)}{r_0^2 + \hbar/(2\mu\omega)} - 1 \approx \frac{\hbar}{\mu\omega r_0^2} = 1,63 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

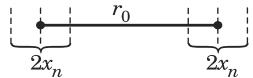


Рис. 153

Как видно из решения, существует взаимодействие между вращением и колебаниями ядер, что соответствует выходу за пределы адиабатического приближения (см. задачи 5.29 и 5.57).

$$5.32. \mathcal{E}_0 = \frac{3\hbar\omega}{2} = 3\hbar\sqrt{\frac{18\varphi}{mr_0^2}} = 1,94 \cdot 10^{-2} \text{ эВ} \approx 226 \text{ К.}$$

$$5.33. \Delta\mathcal{E}_{\text{кол}} = \hbar\alpha\sqrt{\frac{4D}{m}} \approx 0,38 \text{ эВ.}$$

$$5.34. v_A = \sqrt{\frac{2\Delta\mathcal{E}m_B}{m_A(m_A + m_B)}}, v_B = \sqrt{\frac{2\Delta\mathcal{E}m_A}{m_B(m_A + m_B)}}. \text{ Здесь } \Delta\mathcal{E} = \hbar(v - v').$$

5.35. Разность энергий ионизации атомов ${}^6\text{Li}$ и ${}^7\text{Li}$ $\Delta\mathcal{E} = 7 \cdot 10^{-5}$ эВ; ширина линии поглощения из-за эффекта Доплера $2\hbar\Delta\omega \approx \hbar\omega \frac{v}{c} \approx 4,4 \cdot 10^{-5}$ эВ; точнее, $5,17 \cdot 10^{-5}$ эВ*). Поскольку $\Delta\mathcal{E} > \hbar\Delta\omega$ (при $t \approx 800^\circ\text{C}$), разделение изотопов возможно.

$$5.36. \lambda = \frac{hc}{Ry(Z-\sigma)^2(1/n^2 - 1/m^2)} = 1,44 \cdot 10^{-8} \text{ см, где } n=2; m=3.$$

$$5.37. \mathcal{E} = hv = Ry(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \approx 17,15 \text{ кэВ; } v \approx 4,14 \cdot 10^{18} \text{ Гц, } \lambda_\alpha \approx 0,072 \text{ нм.}$$

Из экспериментальных данных известно, что для $20 < Z < 30$ постоянная экранирования $\sigma = 1,13$.

5.38. Чтобы появилась линия K_α , нужно выбить электрон из K -оболочки. В грубом приближении для этого требуется ионизовать атом. При этом $eV = Ry(Z-1)^2$. Таким образом, $V_{\text{Mo}} \approx 23$ кВ; $V_{\text{Cu}} \approx 10,6$ кВ; $V_{\text{Fe}} \approx 8,5$ кВ.

Эти результаты можно уточнить. Так, в атоме Mo структура незаполненных электронных оболочек $4d^5 5s^1$, т. е. есть свободные места в $4d$ -оболочке, откуда $eV_{\text{Mo}} = Ry(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right) \approx 21,4$ кэВ.

В атоме Cu структура внешних электронных оболочек $3d^{10} 4s^1$, при этом в $3d$ -оболочке мест нет и, следовательно, требуемый переход — в $4s$. Поэтому $V_{\text{Cu}} \approx 10$ кВ. Структура внешних электронных оболочек Fe $3d^6 4s^2$, поэтому $V_{\text{Fe}} \approx 7,55$ кВ.

5.39*. Решение. K -полоса образуется при переходах K -электронов на свободные места. При таких переходах наиболее вероятно излучение электродипольных, или $E1$ -фотонов. Самое коротковолновое излучение было бы при переходе внешнего электрона, т. е. $5s \rightarrow 1s$. Но такой переход с излучением $E1$ -фотона является $(0-0)$ -переходом и поэтому запрещен правилами отбора по L . Кроме того, для $E1$ -фотона этот переход запрещен еще и по закону сохранения четности. Таким образом, граница K -серии соответствуют переходу $4p$ -электрона (d -электроны не дают электродипольного излучения, потому что $\Delta L = 2$). Возможные и запрещенные переходы изображены на

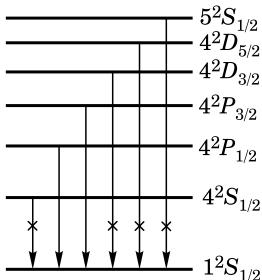


Рис. 154

чением $E1$ -фотона является $(0-0)$ -переходом и поэтому запрещен правилами отбора по L . Кроме того, для $E1$ -фотона этот переход запрещен еще и по закону сохранения четности. Таким образом, граница K -серии соответствуют переходу $4p$ -электрона (d -электроны не дают электродипольного излучения, потому что $\Delta L = 2$). Возможные и запрещенные переходы изображены на

*) С учетом коэффициента $2\sqrt{\ln 2}$, см. Д. В. Сивухин «Общий курс физики. Том 4. Оптика», формула (89.11).

рис. 154. Пренебрегая расщеплением уровней из-за спин-орбитального расщепления, получаем

$$\frac{hc}{\lambda_{\text{рп}}} = Ry(Z-1)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{4^2} \right),$$

откуда $\lambda_{\text{рп}} = 5,79 \cdot 10^{-9}$ см $\approx 0,058$ нм.

Для атома железа (Fe) конфигурация электронной оболочки имеет вид $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^1$ — все аналогично меди

$$\lambda_{\text{рп}} = 1,64 \cdot 10^{-9}$$
 см $\approx 0,016$ нм.

5.40. Электронная конфигурация атома Co $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^7 4s^2$. Учитывая, что для этого атома переход $4s-1s$ с излучением $E1$ -фотона запрещен, $\mathcal{E}_{K_{\text{рп}}}^{\text{Co}} \approx 8,172$ кэВ. Минимальная энергия для возбуждения K -излучения Ni (линия K_{α}) есть $\mathcal{E}_{K_{\alpha}}^{\text{Ni}} \approx 8,813$ кэВ. Поскольку $\mathcal{E}_{K_{\alpha}}^{\text{Ni}} > \mathcal{E}_{K_{\text{рп}}}^{\text{Co}}$, то K -серия атома Ni не возбуждается. Остальные линии возбуждаются.

5.41. Zr и Mo; между ними находится элемент Nb.

5.42. Na ($3S \rightarrow 2P$ -переходы).

5.43. $V = 15$ кВ.

5.44. $T_{\min} = \frac{m_e c^2 \alpha^2 (Z-1)^2}{2[1 - m_a/(m_{\text{Li}} + m_a)]} = 85,5$ эВ, где α — постоянная тонкой структуры.

5.45. $v \approx 5 \cdot 10^9$ см/с.

5.46. Минимальное значение Z находится из условия Брэгга–Вульфа $\lambda \leq 2d$ ($m=1$). Тогда $Z_{\min} = 18$.

5.47. $V \geq \frac{hc}{2ed}$; $V_{\min} = 2,7$ кВ.

5.48. Переход из $l=3$ в $l=2$.

5.49. $T = -\frac{\hbar^2}{k \mu d^2 \ln(\alpha/3)} = 1,4$ К. Здесь отношение заселенностей состояний записано с учетом их статистических весов (кратностей вырождения): $\alpha = \frac{N(l_1=1)}{N(l_2=0)} = \frac{2l_1+1}{2l_2+1} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}(l_1) - \mathcal{E}(l_2)}{kT}\right) = 3 \exp\left(-\frac{\hbar^2}{kT}\right)$.

5.50. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\mu}{\mu} = 2,5 \cdot 10^{-2}$, где μ — приведенная масса молекулы. Наибольшей длине волны соответствует переход из $l=1$ в $l=0$, откуда $\lambda = 2,65$ мм.

5.51. $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta\mu}{2\mu} = 7,7 \cdot 10^{-4}$, где μ — приведенная масса молекулы.

5.52. $w(0) = \frac{2}{\pi\sqrt{2n}} = 0,14$.

$$\int_{-\infty}^{x_0} e^{-x^2/x_0^2} dx$$

5.53. $w = \frac{\int_{-\infty}^{x_0} e^{-x^2/x_0^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/x_0^2} dx} \approx 0,865$.

5.54. $l_{\max} \approx \left[\sqrt[4]{\frac{4M_{\text{аз}}}{m_e}} \right] + 1 = 18$, где $M_{\text{аз}}$ — масса атома азота, m_e — масса электрона. Квадратные скобки здесь и в следующей задаче означают операцию взятия целой части числа.

5.55. $N_{\max} = [n_{\max}] + 1 = 81$, где $n_{\max} = \frac{1-\alpha}{2\alpha} \approx 80,9$.

5.56. $\delta\mathcal{E}_{205} - \delta\mathcal{E}_{203} = \delta\mathcal{E}_{203} \frac{2}{3} \frac{\Delta A}{A} \approx 0,05$ эВ. Тогда $\delta\mathcal{E}_{205} = \delta\mathcal{E}_{203} + 0,05 = -8,2$ эВ (энергия ионизации в атоме с ядром ^{205}Tl меньше, чем в атоме с ядром ^{203}Tl).

5.57* $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -0,046$.

Решение. Рассмотрим сначала нестрогое решение. Эффективный потенциал задачи

$$U_{\text{эфф}}(r) = U_{\text{нбез}}(r) + U(r) = \frac{A_l}{r^2} - \frac{B}{r},$$

где $A_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu} + \epsilon\sigma^2 = \epsilon\sigma^2 \left(1 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu\epsilon\sigma^2}\right) = \epsilon\sigma^2(1 + \delta_l)$, $B = 2\epsilon\sigma$. Минимум эффективного потенциала находится при $r_0 = \frac{2A_l}{B}$. Раскладывая потенциал вблизи минимума, получаем

$$U_{\text{эфф}}(r) \simeq U_{\text{эфф}}(r_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 U_{\text{эфф}}}{dr^2} \Big|_{r=r_0} (r - r_0)^2,$$

откуда находим выражение для коэффициента жесткости

$$k_l = \frac{1}{2} \frac{d^2 U_{\text{эфф}}}{dr^2} \Big|_{r=r_0} = \frac{B^4}{8A_l^3}.$$

Частота колебаний $\omega_l = \sqrt{\frac{k_l}{\mu}} = \left(\frac{B}{A_l}\right)^2 \sqrt{\frac{A_l}{8\mu}}$.

Поскольку $\delta_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu\epsilon\sigma^2} = 0,024 \ll 1$, то

$$\omega_l \approx \frac{4}{\sigma^2} (1 - 2\delta_l) \sqrt{\frac{\epsilon\sigma^2}{8\mu}} \left(1 + \frac{\delta_l}{2}\right) \approx \sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu\sigma^2}} \left(1 - \frac{3}{2}\delta_l\right).$$

Введем обозначение $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu\sigma^2}}$ — частота колебаний в основном состоянии.

Тогда

$$\omega_l = \omega_0 \left(1 - \frac{3}{2}\delta_l\right) \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{3}{2}\delta_l = -0,046.$$

(См. также решение задачи 5.31.)

Заметим, что квант колебаний $\hbar\omega_0 = \sqrt{2\epsilon \frac{\hbar^2}{\mu\sigma^2}} = 0,146$ эВ. Равновесное расстояние между атомами $r_0 \approx \sigma$.

Приведет теперь строгое решение задачи. Гамильтониан относительного движения атомов в молекуле имеет вид

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + \frac{\epsilon\sigma^2}{r^2} - 2\frac{\epsilon\sigma}{r},$$

где $\Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$ — радиальная часть лапласиана, $\mu = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} \approx m_H$ — приведенная масса. Если ввести обозначения $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + \frac{\epsilon\sigma^2}{r^2} = \frac{\hbar^2 l^*(l^*+1)}{2\mu r^2}$ и $2\epsilon\sigma = (e^*)^2$, то получим гамильтониан атома водорода. Используя известный результат, получаем полную энергию молекулы $\mathcal{E} = -\frac{\mu(e^*)^4}{2\hbar^2} \frac{1}{(n_r + l^* + 1)^2}$. Если $n_r, l \ll 2\mu\epsilon\sigma^2/\hbar^2 = 3,5 \cdot 10^3$, то полученную формулу можно разложить в ряд и получить

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = & -\epsilon + \hbar \sqrt{\frac{2\epsilon}{\mu\sigma^2}} \left(n_r + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2\mu\sigma^2} \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \\ & - \frac{3\hbar^2}{2\mu\sigma^2} \left(n_r + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3\hbar^3}{2\mu^2\sigma^4} \sqrt{\frac{\mu\sigma^2}{2\epsilon}} \left(n_r + \frac{1}{2}\right) \left(l + \frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Первые три члена этой формулы соответствуют электронной, колебательной и вращательной энергиям молекулы (задача 5.29). Четвертый член соответствует ангармонизму колебаний (задача 5.55), а пятый — взаимодействию колебаний и вращений ядер (задачи 5.31 и 5.57). Несмотря на свою простоту, которая позволяет получить аналитическое решение, потенциал Кратцера плохо описывает реальную форму потенциала взаимодействия: на малых расстояниях отталкивание атомов в молекулах сильнее, а на больших расстояниях — притяжение слабее. Поэтому в теории молекул обычно используют потенциал Морса (задача 5.33), а в теории конденсированных сред — потенциал Леннард-Джонса. (См. задачу 5.32.)

5.58. $l = l_0 \left(\frac{f_0}{f}\right)^2 = 1 \text{ мм}; T = \frac{\hbar\omega}{k_B \ln 2} \simeq 0,7 \text{ мК}.$

5.59. Среднее число $\langle n \rangle$ квантов, поглощаемых осциллятором, примерно 1. Значит, осциллятор, поглотив один квант, переходит в первое возбужденное состояние с энергией $3\hbar\omega/2$. Отсюда $\langle x^2 \rangle = \frac{3\hbar}{4\pi m f_0}$, т. е. $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 1,6 \cdot 10^{-5} \text{ см}$. Современные дилатометры способны измерять такие смещения.

5.60. $d^2 = \frac{\hbar^2}{\mu a \hbar c} = \frac{\hbar}{2\pi\mu a c} = 1,37 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2, d = 1,17 \text{ \AA}.$

5.61. $a = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = 0,06$, где $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{4p \rightarrow 2s} = \frac{3}{16} \text{ Ry} = 2,55 \text{ эВ}, \Delta\mathcal{E} = \hbar\omega_H \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,16 \text{ эВ}$.

5.62. Решение. Согласно принципу Паули полная волновая функция системы тождественных фермионов должна быть антисимметричной относительно перестановки двух любых частиц. Переставляя ядра, мы меняем местами их спины и координаты (т. е. мы меняем направление вектора относительного расстояния на обратное). Полная волновая функция системы ядер есть произведение спиновой волновой функции на орбитальную вращательную и колебательную. Последняя, поскольку мы рассматриваем основное состояние, имеет одинаковую симметрию как у ортовородора, так и у паравородора, и является четной относительно перестановки. У ортовородора полный спин протонов равен 1 и спиновая волновая функция симметрична относительно перестановки. У паравородора полный спин равен 0

и спиновая волновая функция антисимметрична относительно перестановки. Следовательно, у ортовородора пространственная волновая функция является антисимметричной, у паравородора — симметричной. Значит, вращающий момент молекулы (он и есть относительный вращательный момент частицы приведенной массы) у ортовородора может быть только нечетным, а у паравородора — четным. Таким образом, энергия основного состояния ортовородора есть $\mathcal{E}_{\text{орто}}(n=0, l=1) = -D_0 + \hbar\omega/2 + \hbar^2/I$, а у паравородора $\mathcal{E}_{\text{пара}}(n=0, l=0) = -D_0 + \hbar\omega/2$. Здесь $-D_0$ — энергия минимума потенциальной кривой, $\hbar\omega/2$ — энергия нулевых колебаний, $I = m_p d_0^2/2$ — момент инерции молекулы. Таким образом, энергия основного состояния молекулы ортовородора лежит выше основного состояния паравородора на величину

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2\hbar^2}{m_p d_0^2} = \frac{2 \cdot 1,1 \cdot 10^{-54}}{1,67 \cdot 10^{-24} \cdot 0,55 \cdot 10^{-16} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ.}$$

З а м е ч а н и е 1. Конечно, волновая функция молекулы включает в себя еще волновые функции электронов (орбитальную и спиновую). Однако перестановка ядер не затрагивает симметрию этих функций, и поэтому мы их не рассматриваем.

З а м е ч а н и е 2. Задачу можно переписать в виде: найти разницу энергии диссоциации молекул орто- и паравородора.

§ 6. Спин. Атом в магнитном поле. Эффект Зеемана. Магнитный резонанс.

6.1. $T = 2\pi r \sqrt{\frac{\pi amc}{N\lambda}} = 5 \text{ мин.}$

6.2. $M = \frac{\mathcal{I}S\lambda}{2\pi c} = 0,95 \cdot 10^{-6} \text{ дин}\cdot\text{см.}$ От распределения интенсивности в пучке M не зависит. Для пластинки в $\lambda/4$ вращающий момент такой же, как и для поглощающей пластинки. Вращающий момент удвоится, если взять пластинку в $\lambda/2$.

6.3. $M = \frac{\mathcal{I}S\lambda}{2\pi c} \frac{2ab}{a+b} = 0,76 \cdot 10^{-6} \text{ дин}\cdot\text{см.}$

6.4. Свет будет поляризован по левому кругу.

$$\frac{M}{S} = \frac{\mathcal{I}\lambda}{\pi c} = 7,7 \cdot 10^{-9} \text{ дин}/\text{см}.$$

6.5. Максимальный вращающий момент возникает, когда главные направления пластинки ориентированы под углом 45° к плоскости поляризации света,

$$M = \frac{N\lambda}{2\pi c} = 10^{-8} \text{ дин}\cdot\text{см.}$$

6.6. Из условия $\mathcal{I}_{\max}/\mathcal{I}_{\min} = 3$ следует, что линейно поляризованный свет переносит половину всей мощности,

$$\frac{M}{S} = \frac{\mathcal{I}\lambda}{4\pi c} = 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ дин}/\text{см}.$$

$$6.7^*: M = \frac{\mathcal{J}S\lambda}{2\pi c} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ дин}\cdot\text{см}; F = \frac{\mathcal{J}S}{c} \approx 0,03 \text{ дин.}$$

Решение. Момент импульса проходящей и отраженной волн равен нулю в силу линейной поляризации. Согласно закону сохранения момента импульса $\Delta L_{\text{реп}} = -\Delta L_{\text{фот}}$ (изменению момента импульса фотонов).

Вращающий момент

$$M = \frac{\Delta L_{\text{Фот}}}{\Delta t} = \frac{\hbar \mathcal{J} S \Delta t}{\hbar \omega \Delta t} = \frac{\mathcal{J} S}{\omega} = \frac{\mathcal{J} S \lambda}{2\pi c} \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ дин}\cdot\text{см.}$$

Сила давления F обусловлена изменением импульса той части потока, которая испытывает отражение. Поэтому

$$F = 2 \frac{\hbar \omega}{c} \frac{\mathcal{J} S}{2\hbar\omega} = \frac{\mathcal{J} S}{c} \approx 0,03 \text{ дин.}$$

$$6.8. F = p \frac{\mathcal{J}}{e} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ дин, где } p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)} = 1,78 \cdot 10^{-17} \text{ г}\cdot\text{см}/\text{с}; \\ M = \frac{\hbar \mathcal{J}}{2e} = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ дин}\cdot\text{см.}$$

6.9. $\omega = \frac{2Nl}{I}$, цилиндр закрутится против часовой стрелки (вектор ω направлен вверх).

6.10. $\omega = \frac{2N_A h}{Am} L \rho = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, где N_A — число Авогадро, A — атомная масса железа, ρ — его плотность.

6.11. На два ($2S+1=2$).

$$6.12^*: s = 2\mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l(L+l/2)}{3kT} \approx 0,4 \text{ см.}$$

Решение. В области магнита на атом действует постоянная сила

$$F_x = \mu_B \frac{dB}{dx},$$

где μ_B — проекция магнитного момента атома на направление поля B

$$\mu_B = m_J g \mu_B,$$

где $g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$ — фактор Ланде. В основном состоянии атома Na $L=0$, $S=1/2$, $J=1/2$, $g=2$ и $F_x = \pm \mu_B \frac{dB}{dx}$. За время $t = \frac{l}{v}$ смещение частицы $x_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{F_x}{2m} \frac{l^2}{v^2}$, а скорость на выходе $v_x = \frac{F_x}{m} \frac{l}{v}$ ($v_x \ll v$, в чем убедимся ниже). Вне магнита атом движется по инерции и $x_2 = x_1 + v_x \frac{L}{v} = \frac{F_x}{mv^2} l \left(\frac{l}{2} + L \right)$.

За время $t = l/v$ атомы приобретают скорость

$$v_x = \pm \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l}{mv} \approx \pm 20 \text{ см}/\text{с},$$

приводящую к смещению пучков на детекторе

$$x_2 = \pm \mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l(l/2 + L)}{mv^2}.$$

Средняя кинетическая энергия атомов в пучке равна $\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{3}{2}kT$, откуда $v_{\text{сKB}} \approx 600 \text{ м/с} \gg v_x$, а искомое расстояние между пятнами на детекторе

$$s = 2x_2 = 2\mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l(l/2 + L)}{3kT} \approx 4 \text{ мм.}$$

6.13. $d_{\min} = \mu_B \frac{db}{dx} \frac{lL}{T} \left(1 + \frac{l}{2L}\right) = 1,79 \text{ см.}$

6.14. Пучок разобьется на четыре компоненты. Угол между ними $\Delta\varphi = g\mu_B \frac{dB}{dx} \frac{l}{Am_p v^2} \approx 2 \cdot 10^{-2}$ рад $\approx 1,2^\circ$.

В области магнита на атом действует постоянная сила $F_x = \mu_B \frac{dB}{dx}$, где $\mu_B \frac{dB}{dx}$ — проекция магнитного момента атома на направление поля $B\mu_B = m_J g\mu_B$, где $g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$ — фактор Ланде. Из определения спектроскопического символа $^{2S+1}L_J$ имеем $S = 3/2$; $J = 3/2$ и $L = 3$, поэтому g -фактор (фактор Ланде) $g = 2/5$.

6.15. $\frac{dB}{dx} = \frac{4\pi\hbar}{\mu_n L d} \sqrt{\frac{T}{2m_n}} \approx 150 \text{ Гс/см.}$

6.16.* $\theta = \frac{1,91\mu_{\text{яд}}B\lambda^2}{2\pi^2\hbar^2} m_n \operatorname{tg}\varphi = 86 \text{ мкрад} \approx 3'$.

Решение. Выберем координатные оси таким образом: поле **B** направлено по оси Z, а нормаль к области поля есть ось X (рис. 155). Потенциальная энергия нейтрона в магнитном поле

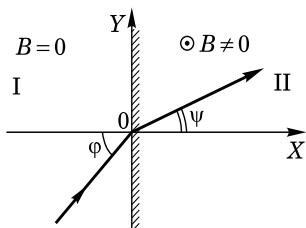


Рис. 155

$$U = -\mu \mathbf{B} = -\mu_{\text{яд}} B_z g_{sn} m_s,$$

где $\mu_{\text{яд}}$ — ядерный магнетон Бора, $g_{sn} = -3,82$ — спиновый g -фактор нейтрона (аналог фактора Ланде для свободного электрона), $m_s = \pm \frac{1}{2}$.

Поскольку потенциальная энергия однородна и различна в областях $x < 0$ и $x > 0$ (т. е. меняется скачком), то это приводит к силам, действующим на нейтрон на границе раздела в направлении по нормали к поверхности, а вдоль поверхности силы не действуют. Поэтому касательная компонента импульса нейтрона будет сохраняться ($m \equiv m_n$ — масса нейтрона):

$$mv_I \sin\varphi = mv_{II} \sin\psi, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{v_{II}}{v_I} = n.$$

Получили аналог оптического закона преломления. Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv_I^2}{2} = \frac{mv_{II}^2}{2} \pm U_0 \quad \text{получаем} \quad n = \sqrt{1 \mp \frac{2U_0}{mv_I^2}}.$$

Возможен *другой способ* получения выражения для показателя преломления нейтронов. На рис. 156 приведен график зависимости потенциальной

энергии нейтрона $U(x)$ от координаты x . Из рисунка видно, что данную задачу можно рассматривать как задачу о надбарьерном отражении нейтронной волны де Броиля. Волновая функция нейтрона $\psi = Ae^{ikr} = Ae^{ik_x x}$ ($k_y = \text{const}$ и $k_z = \text{const}$). Используя известный результат задачи 3.25, запишем коэффициент отражения

$$R = \left(\frac{k_{xI} - k_{xII}}{k_{xI} + k_{xII}} \right)^2 = \left(\frac{k_I \cos \varphi - k_{II} \cos \psi}{k_I \cos \varphi + k_{II} \cos \psi} \right)^2 = \left(\frac{\cos \varphi - (k_{II}/k_I) \cos \psi}{\cos \varphi + (k_{II}/k_I) \cos \psi} \right)^2.$$

Если сравнить это выражение с соответствующей формулой Френеля, то получим, что

$$n = \frac{k_{II}}{k_I} = \sqrt{1 \mp \frac{2mU_0}{\hbar^2 k_I^2}}.$$

При этом условие непрерывности ψ на границе соответствует условию непрерывности E_t , а условие непрерывности ψ'_x — условию непрерывности H_t . Плотность потока частиц соответствует плотности потока электромагнитной энергии (вектору Пойнтинга).

Оценим отличие n от 1:

$$\frac{2mU_0}{\hbar^2 k_I^2} \approx \frac{2m\mu_{яд}B}{4\pi^2 \hbar^2} \lambda^2 = \frac{e^2 B}{\hbar c} \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \approx 2 \cdot 10^{-13} \ll 1.$$

Здесь было подставлено значение $\mu_{яд} = \frac{e\hbar}{2mc}$. Таким образом,

$$n \approx 1 \mp \frac{mU_0}{4\pi^2 \hbar^2} \lambda^2.$$

Это значение, очевидно, разное для разных значений проекции спина нейтрона на направление магнитного поля.

$$\text{Для } m_s = \frac{1}{2} \quad n_+ = 1 - \frac{1,91\mu_{яд}B\lambda^2}{4\pi^2 \hbar^2} m.$$

$$\text{Для } m_s = -\frac{1}{2} \quad n_- = 1 + \frac{1,91\mu_{яд}B\lambda^2}{4\pi^2 \hbar^2} m.$$

Из закона преломления получим

$$\sin \psi_+ = \frac{\sin \varphi}{n_+}; \quad \sin \psi_- = \frac{\sin \varphi}{n_-},$$

или

$$\sin \psi_+ - \sin \psi_- = \sin \varphi \frac{n_- - n_+}{n_- n_+}.$$

При разложении разности синусов двух близких углов можно записать

$$|\psi_+ - \psi_-| \ll \varphi; \quad \psi_+ + \psi_- \approx 2\varphi; \quad n_+ n_- \approx 1.$$

Окончательно

$$\theta = \Delta\psi = \psi_+ - \psi_- = (n_- - n_+) \operatorname{tg} \varphi = \frac{1,91\mu_{яд}B\lambda^2}{2\pi^2 \hbar^2} m \operatorname{tg} \varphi.$$

Подстановка чисел дает $\theta \approx 86 \cdot 10^{-6}$ рад $\approx 3'$.

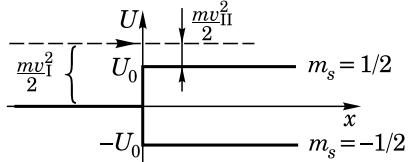


Рис. 156

6.17* H – 2; Li – 2; Fe – 1, 3, 5, 7, 9; Cl – 2, 4, 6, 8; He – 1, 3; Mg – 1, 3; Hg – 1, 3; U – 1, 3, 5, 7.

Решение. Рассмотрим в качестве примера атомы Fe и Cl. Электронная конфигурация основного состояния атома железа представляет собой заполненные оболочки, как у Ar, сверх которых имеются 8 электронов – $3d^64s^2$. Максимально возможный спин атома $S=1/2 \cdot 8=4$. Для этого один электрон из $3d$ -оболочки и один из $4s$ -оболочки должны перейти в $4p$ -оболочку (рис. 157). При этом мультиплетность $2S+1=2 \cdot 4 + 1 = 9$.

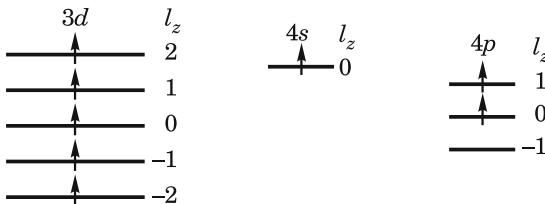


Рис. 157

Если из $4p$ -оболочки один электрон вернется в $4s$ - или $3d$ -оболочку, то он обязан «перевернуть» спин, и общий спин уменьшится на 1; получим $2S+1=2 \cdot 3 + 1 = 7$. Возврат второго электрона даст уменьшение еще на 1; получим $2S+1=5$.

Шесть электронов в d -оболочке могут дать суммарный спин 2, 1 и 0. Получаются мультиплетности 5, 3 и 1 (см. ответ).

Электронная конфигурация основного состояния атома Cl $1s^22s^22p^63s^23p^5$. Максимальный спин $S=7 \cdot 1/2=7/2$; мультиплетность $2S+1=8$. Это достигается переходом одного электрона в $4s$ -оболочку и двух – в $3d$ -оболочку и т. д.

6.18. Sr⁺ – 2; Li⁺ – 1, 3; Ca⁺ – 2; C²⁺ – 1, 3; O⁴⁺ – 1, 3.

6.19. 4.

$$\mathbf{6.20.} \Delta\mathcal{E}=2\pi\hbar c\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right) \approx 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}; B=\frac{\Delta\mathcal{E}}{2\mu_B} \approx 1,8 \cdot 10^5 \text{ Гс.}$$

6.21* $\Delta\mathcal{E}_B=\mu_B B\left\{\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; -1\right\}$ (три линии).

Решение. Для определения типа эффекта Зеемана (простой или сложный) необходимо сначала оценить величину спин-орбитального расщепления, пользуясь данными задачи,

$$\Delta U_{ls}=2\pi\hbar c\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right) \approx \frac{2\pi\hbar c}{\lambda^2} \Delta\lambda \approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ.}$$

Далее оценим произведение $\mu_B B \approx 2,9 \cdot 10^{-4}$ эВ. Сравнивая две полученные величины, мы видим, что $\mu_B B \ll \Delta U_{ls}$, т. е. поле является слабым.

Вычислим g -факторы состояний ${}^2P_{3/2}$ и ${}^2S_{1/2}$:

$$g_1=\frac{3}{2}+\frac{S(S+1)-L(L+1)}{2J(J+1)}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}-1 \cdot 2}{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}=\frac{4}{3};$$

$$g_0=2 \quad (\text{так как } L=0).$$

Определим возможные переходы по формуле

$$\Delta\mathcal{E}_B = \mu_B B(g_1 m_J^{(1)} - g_0 m_J^{(0)}).$$

Однако в силу очень низкой температуры ($T=0,5$ К) $kT \approx 4 \cdot 10^{-5}$ эВ $\ll 2\mu_B B$ (расщепление терма $^2S_{1/2}$). Таким образом, при этой температуре

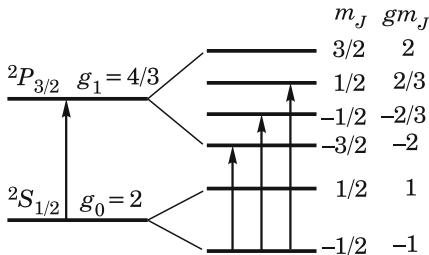


Рис. 158

заселен только нижний подуровень уровня $^2S_{1/2}$ ($m_J = -1/2$). Поэтому в спектре поглощения возможны только три линии (рис. 158):

$$\Delta\mathcal{E}_B = \mu_B B \begin{cases} \frac{2}{3} - (-1) = \frac{5}{3}; \\ -\frac{2}{3} - (-1) = \frac{1}{3}; \\ -2 - (-1) = -1. \end{cases}$$

6.22. В спектре поглощения газа в магнитном поле будут наблюдаться шесть компонент расщепленной линии $^2P_{1/2} \rightarrow ^2D_{3/2}$. Это сложный эффект Зеемана ($\mu_B B \ll U_{LS}$; $\mu_B B \ll kT \approx 0,026$ эВ).

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_B}{\mu_B B} = g_1 m_J^{(1)} - g_2 m_J^{(2)} = \left(\pm \frac{13}{15}; \pm \frac{11}{15}; \pm \frac{1}{15} \right).$$

6.23. $2J+1$.

6.24. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mu_B B g m_J$, где \mathcal{E} — энергия атома в магнитном поле, \mathcal{E}_0 — без поля, $g = \frac{2J+1}{2L+1}$; а $L = \begin{cases} L+1/2, & L \text{ — орбитальный момент валентного} \\ L-1/2, & \text{электрона, } m_J = -J, -J+1, \dots, +J. \end{cases}$

6.25. $\Delta\mathcal{E}_B = \mu_B B(g_1 m_J^{(1)} - g_2 m_J^{(2)})$, т. е.

$$\Delta\mathcal{E}_B = \left\{ \pm 1; \pm \frac{2}{7}; \pm \frac{39}{35}; \pm \frac{11}{7}; \pm \frac{6}{35}; \pm \frac{43}{45}; \pm \frac{51}{35}; \pm \frac{2}{35}; \pm \frac{47}{35} \right\} \mu_B B$$

(18 линий).

6.26. Это линии с $\Delta m_J = 0$ (колебания вдоль поля **B** не испытывают действие силы Лоренца): $\Delta\mathcal{E}_B = \left\{ \pm \frac{2}{7}; \pm \frac{6}{35}; \pm \frac{2}{35} \right\} \mu_B B$ — 6 линий. Такие линии называются π -линиями. Они видны при наблюдении поперек поля и не видны при наблюдении вдоль поля.

6.27* Решение. Множитель Ланде

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

Для состояния $^2P_{3/2}$ ($J=3/2$, $L=1$, $S=1/2$) этот множитель равен $g_1 = 4/3$; для состояния $^2S_{1/2}$ ($J=1/2$, $L=0$, $S=1/2$) $g_2 = 2$. Смещения расщепленных компонент мультиплета приведены в таблице.

$^2P_{3/2}$	m_J	-3/2	-1/2	+1/2	+3/2
	gm_J	-2	-2/3	+2/3	+2
$^2S_{1/2}$	m_J		-1/2	+1/2	
	gm_J		-1	+1	

Разрешенные переходы между компонентами мультиплетов (компонентами тонкой структуры) $^2P_{3/2}$ и $^2S_{1/2}$ удовлетворяют правилу отбора $\Delta m_J = m_J^{(1)} - m_J^{(2)} = 0, \pm 1$. Остальные переходы сильно подавлены. Разрешенные переходы и соответствующие им номера испускаемых спектральных линий с указанием поляризации (π или σ) приведены в таблице; σ -линии — это переходы с $\Delta m_J = \pm 1$.

Переходы $m_J^{(1)} \rightarrow m_J^{(2)}$	Поляризация	$(gm_J)^{(1)} - (gm_J)^{(2)}$	№ линии
$-3/2 \rightarrow +1/2$	подавлен		
$-3/2 \rightarrow -1/2$	σ	$-2 - (-1) = -1$	2
$-1/2 \rightarrow +1/2$	σ	$-2/3 - 1 = -5/3$	1
$-1/2 \rightarrow -1/2$	π	$-2/3 + 1 = 1/3$	4
$+1/2 \rightarrow +1/2$	π	$2/3 - 1 = -1/3$	3
$+1/2 \rightarrow -1/2$	σ	$2/3 + 1 = 5/3$	6
$3/2 \rightarrow +1/2$	σ	$2 - 1 = 1$	5
$3/2 \rightarrow -1/2$	подавлен		

Смешенные линии расположены симметрично относительно несмещенной: три линии смешены влево (1, 2, 3), остальные три — вправо (4, 5, 6). Всего получается шесть смешенных компонент.

Магнитное поле считается слабым, если ларморовская частота $\Omega = eB/(2m_e c)$ мала по сравнению с частотой $2\pi c\Delta\lambda/\lambda^2$. Это дает $B \ll \ll (4\pi m_e c^2 \Delta\lambda)/(e\lambda^2)$. В этом случае получается сложный эффект Зеемана. Для D -линий натрия должно быть $B \ll 3,7 \cdot 10^5$ Гс. В противоположном случае эффект Зеемана будет простым.

6.28. $\Delta\mathcal{E}_B = \mu_B B = \hbar\Omega = \hbar \frac{eB}{2mc}$; число уровней равно числу проекций \mathbf{L} на \mathbf{B} и равно $2L + 1 = 7$.

6.29. $\Delta\mathcal{E}_B = \mu_B B(\Delta m_L + 2\Delta m_S) = \pm\mu_B B, 0$; т. е., как и должно быть в сильном поле, произойдет расщепление на три компоненты, поскольку для электродипольных переходов $\Delta m_S = 0$, $\Delta m_L = \pm 1, 0$ (правила отбора).

$$\mathbf{6.30}^* B = \frac{2\pi m_e c^2}{ed\Delta n}.$$

Решение. Из трех линий спектра центральная несмещенная линия не пройдет, если пластина для нее имеет толщину $t\lambda$.

Боковые линии пройдут, если для их длин волн λ' и λ'' толщина пластиинки будет $m\lambda' + \lambda'/2$ и, соответственно, $m\lambda'' - \lambda''/2$. Таким образом, кристаллическая пластиинка с заданным d и Δn (рис. 159) должна удовлетворять условию

$$d\Delta n = m\lambda = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda' = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda''.$$

где $\lambda' = \frac{2\pi c}{\omega + \Omega}$, а $\lambda'' = \frac{2\pi c}{\omega - \Omega}$ и ларморовская частота $\Omega = \frac{eB}{2m_e c}$. Отсюда

$$m + \frac{1}{2} = \frac{d\Delta n}{2\pi c} (\omega + \Omega); \quad m - \frac{1}{2} = \frac{d\Delta n}{2\pi c} (\omega - \Omega).$$

Вычитая эти равенства, получим

$$1 = \frac{d\Delta n}{2\pi c} \cdot 2\Omega = \frac{d\Delta n}{2\pi c} \frac{eB}{2m_e c},$$

откуда найдем искомое магнитное поле

$$B = \frac{2\pi m_e c^2}{ed\Delta n}.$$

Ответ не зависит ни от длины волны исходной линии, ни от ориентации пластиинки относительно поля (рис. 159).

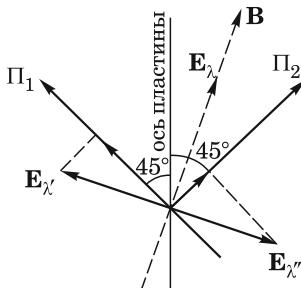


Рис. 159

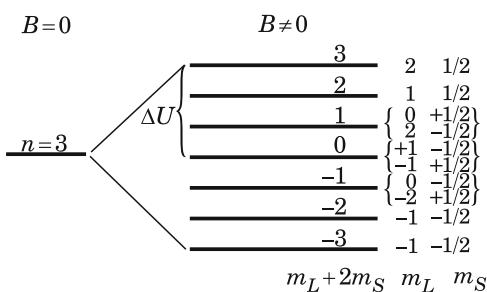


Рис. 160

6.31. В сильном магнитном поле $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mu_B B(m_L + 2m_S)$. Уровень расщепится на 7 подуровней (рис. 160). Максимальная дополнительная энергия $\Delta U = 3\mu_B B = 3,5 \cdot 10^{-4}$ эВ.

$$\mathbf{6.32.} L = \frac{4\pi m_e c^2}{eB} = 4,3 \text{ см.}$$

$$\mathbf{6.33.} L = \frac{\hbar c}{2n\lambda\mu_B B} = 2,8 \text{ см.}$$

6.34. Одна из линий дублета (${}^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$) расщепляется в магнитном поле на 6 компонент $(\pm 1; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{5}{3})\Omega$ с расстоянием между крайними компонентами

$$\Delta\omega = \frac{5}{3}\Omega - \left(-\frac{5}{3}\Omega\right) = \frac{10}{3}\Omega.$$

где $\Omega = eB/(2m_e c)$ — ларморовская частота. (Аналогично, но на 4 компоненты $(\pm \frac{2}{3}; \pm \frac{4}{3})\Omega$, расщепляется вторая линия дублета — переход ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$.)

Спектральный прибор для исследования расщепления должен не только разрешать расщепленные линии, но и не должен давать перекрытия порядков. Значит, область дисперсии $\Delta\lambda$ должна быть не меньше

$$\lambda \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{10}{3} \frac{eB}{2m_e c} = \frac{5}{6} \frac{\lambda^2 eB}{\pi m_e c^2}.$$

Подставляя сюда $\Delta\lambda = \lambda/m$, где $m = d(n-1)/\lambda$ — порядок спектра, получим $d \lesssim \frac{6\pi m_e c^2}{5eB(n-1)} \approx 2,6$ см.

$$6.35. L_{\max} = \frac{2\pi m_e c^2}{eB} \approx 1,1 \text{ см.}$$

6.36. Нормальный (простой), так как рассматриваемая линия — синглет. Разрешающая способность интерферометра $N_{\text{эфф}} t$ должна быть не меньше $\frac{\omega}{\delta\omega}$, где $\delta\omega = \Omega = \frac{eB}{2m_e c}$. Величина $\delta\lambda = \frac{2\pi c}{\omega^2} \delta\omega$ должна быть меньше дисперсионной области λ/m , где $m = L/\lambda$ — порядок спектра. Из этих условий получаем

$$\frac{2\pi m_e c^2}{eBN_{\text{эфф}}} < L < \frac{2\pi m_e c^2}{eB},$$

или в рассматриваемом случае $0,54$ мм $< L < 10,7$ мм.

$$6.37^*: \Delta\omega = \frac{eB}{2m_e c} (\pm \frac{13}{15}; \pm \frac{11}{15}; \pm \frac{1}{15}) \text{ (6 компонент).}$$

Решение. Определим g -факторы состояний ${}^2D_{3/2}$ и ${}^2P_{1/2}$. Квантовые числа состояния ${}^2D_{3/2}$ равны $J_1 = 3/2, L_1 = 2; S_1 = 1/2$. Квантовые числа состояния ${}^2P_{1/2}$ равны $J_2 = 1/2, L_2 = 1, S_2 = 1/2$. Тогда

$$g_1 = \frac{3}{2} + \frac{S_1(S_1+1) - L_1(L_1+1)}{2J_1(J_1+1)} = \frac{4}{5}.$$

Аналогично, $g_2 = 2/3$. Таким образом, состояние ${}^2D_{3/2}$ расщепляется в магнитном поле на 4 подуровня (рис. 161) по m_J . Состояние ${}^2P_{1/2}$ расщепляется

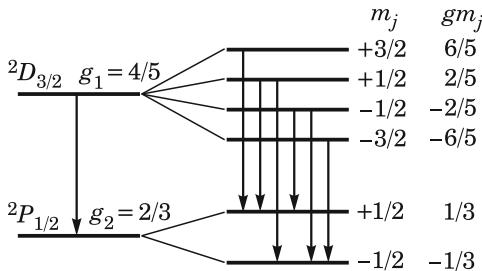


Рис. 161

по m_J на два подуровня. Поскольку $g_1 \neq g_2$, то спектральная линия расщепляется в магнитном поле B в соответствии с правилами отбора ($\Delta m_J = 0, \pm 1$) на шесть компонент. Это сложный эффект Зеемана. Общая формула для расчета расщепления

$$\omega = \omega_0 + \frac{\mu_B B}{\hbar} (g_1 m_{J1} - g_2 m_{J2}),$$

или

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \frac{eB}{2m_e c} (g_1 m_{J1} - g_2 m_{J2}) = \Omega \left(\pm \frac{13}{15}; \pm \frac{11}{15}; \pm \frac{1}{15} \right),$$

где Ω — ларморовская частота.

6.38. Расщепление в магнитном поле $\Delta\lambda_B = \frac{\Delta\mathcal{E}\lambda^2}{2\pi\hbar c} \sim \frac{\mu_B B \lambda^2}{2\pi\hbar c} \sim \sim 0,1 \text{ \AA} \ll \Delta\lambda = 38 \text{ \AA}$ (расщепление в результате спин-орбитального взаимодействия). Поэтому поле слабое, эффект аномальный (сложный). Одна линия дублета расщепится на шесть линий, другая — на четыре (см. задачу 6.34).

$$\mathbf{6.39.} B \approx \frac{\pi\hbar c \Delta\lambda}{\mu_B \lambda^2} \approx 3 \text{ кГс.}$$

$$\mathbf{6.40.} \frac{m_\mu}{m_e} = \left(\frac{3R_\infty}{4 \cdot 2\pi\hbar v} - 1 \right)^{-1} = 204,585.$$

$$\mathbf{6.41.} \Delta\mathcal{E}_{sl} \approx \frac{e^2 \hbar^2}{2m_e^2 c^2 n^6 r_1^3} ls \cos \hat{\mathbf{ls}} \approx 0,91 \cdot 10^{-17} \text{ эрг} \approx 0,57 \cdot 10^{-5} \text{ эВ.}$$

$\Delta\mathcal{E}_{sl}$ можно найти приближенно. Для этого надо перейти в систему координат, связанную с электроном. В этой системе врачающийся протон создает магнитное поле \mathbf{B} , с которым и взаимодействует спиновый магнитный момент $\mathbf{\mu}_s$. Для оценки достаточно считать, что векторы \mathbf{B} и $\mathbf{\mu}_s$ коллинеарны (точный расчет должен был бы учесть, что $\cos \hat{\mathbf{ls}} \neq 1$). Укажем, что

$$\frac{(\mathbf{ls})}{r^3} = |\mathbf{s}| \cdot |\mathbf{l}| \frac{\cos \hat{\mathbf{ls}}}{n^6 r_1^3}, \quad \text{где } |\mathbf{s}| = s; \quad |\mathbf{l}| = l; \quad \cos \hat{\mathbf{ls}} = \pm 1.$$

Тогда

$$\Delta\mathcal{E}_{sl} \approx \frac{e^2 \hbar^2}{4m_e^2 c^2 n^6 r_1^3} ls \cos \hat{\mathbf{ls}} \approx 0,91 \cdot 10^{-17} \text{ эрг} \approx 0,57 \cdot 10^{-5} \text{ эВ.}$$

При точном расчете

$$\Delta\mathcal{E}_{sl} = \frac{e^2 \hbar^2}{4m_e^2 c^2} \frac{1}{r_1^3} \frac{j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{n^3 l(l+\frac{1}{2})(l+1)} = \frac{\mu_B^2}{8r_1^3} = 4,53 \cdot 10^{-5} \text{ эВ.}$$

где $n=2$; $l=1$; $j_1=3/2$; $j_2=1/2$; $s=1/2$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты.

Отличие в 8 раз!

6.42. $\Delta\lambda = 2\pi\hbar c \left(\frac{1}{10,2-\Delta_2} - \frac{1}{10,2+\Delta_1} \right) \approx \frac{hc}{(10,2)^2} (\Delta_1 + \Delta_2) \approx 0,0004 \text{ нм}$, где 10,2 эВ — значение энергии кванта нерасщепленной первой линии серии Лаймана (переход $n=2 \rightarrow n=1$); $\Delta_1 = \frac{1}{32} \frac{\mu_B^2}{r_1^3}$; $\Delta_2 = \frac{2}{32} \frac{\mu_B^2}{r_1^3}$.

$$\mathbf{6.43.} \frac{\Delta\mathcal{E}_{se}|_{J+1,J}}{\Delta\mathcal{E}_{se}|_{J,J-1}} = \frac{J+1}{J}.$$

6.44.* Решение. Зеемановское расщепление должно быть больше до-пллеровского уширения за счет теплового движения атомов (в основном, вращения звезды, т. е.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\mu_B B}{\hbar\omega_0} \geq \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{\text{тепл}} + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{\text{вращ}} = \frac{v_{\text{тепл}}}{c} + \frac{v_{\text{вращ}}}{c} \approx \frac{v_{\text{тепл}}}{c}.$$

Окончательно получим

$$B \geq \frac{\hbar\omega_0}{2\mu_B c} \sqrt{\frac{2kT}{m_p}} \approx 1,8 \text{ кГс.}$$

6.45. $B = \frac{Ry}{\mu_B} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \frac{1}{n_1 + n_2 - 2} \approx \frac{Ry}{\mu_B} \frac{1}{n^4} \approx 2,3 \cdot 10^5 \text{ Гс, где } n \approx n_2 \approx n_1 = 10.$

6.46. $\Delta E \approx \frac{m_e c^2}{1024} \alpha^4 \approx 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ эВ.}$

6.47. $(J+I) : (J+I-1) : (J+I-2) : \dots$ — правило интервалов Ланде.

6.48. $\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{|\Delta E_{ct}|} = 28,1 \text{ см, где } E_{ct} = 2g_{sp}g_s \frac{\mu_{яд}\mu_B}{r_1^3}, g_s = -2$ — спиновый

g -фактор электрона. Экспериментальное значение $\lambda = 21 \text{ см}$. Этот результат получается и при теоретическом рассмотрении с учетом реального (неоднородного) распределения плотности спинового магнитного момента электрона.

Оператор энергии взаимодействия точечного магнитного диполя (протона) с намагниченным электронным шаром имеет вид

$$\widehat{U} = -\mu_p \mathbf{B}_e = -\mu_p (\mathbf{H}_e + 4\pi\mathbf{M}_e) - g_{sp}\mu_{яд}s_p(4\pi - \beta) \frac{3g_s\mu_B s_e}{4\pi r_1^3} = -2g_{sp}g_s \frac{\mu_{яд}\mu_B}{r_1^3} \mathbf{s}_p \mathbf{s}_e.$$

Усредняя этот оператор по направлениям векторов спинов, получаем выражение для энергии сверхтонкого расщепления

$$E_{ct} = -2g_{sp}g_s \frac{\mu_{яд}\mu_B}{r_1^3} \langle \mathbf{s}_p \mathbf{s}_e \rangle.$$

Поскольку $\mathbf{s}_p + \mathbf{s}_e = \mathbf{S}$, где $S = 0$ или 1 — полный спин атома водорода, получаем

$$\langle \mathbf{s}_p \mathbf{s}_e \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{S}^2 - \mathbf{s}_p^2 - \mathbf{s}_e^2 \rangle = \frac{1}{2} [S(S+1) - s_p(s_p+1) - s_e(s_e+1)] = \begin{cases} 1/2 \text{ при } S=1, \\ -3/2 \text{ при } S=0. \end{cases}$$

Поскольку $g_s = -2$, то видно, что ниже расположен уровень с $S=0$ (состояние 1S_0 : $S=0, L=0, J=0$), а выше — уровень с $S=1$ (состояние 3S_1 : $S=1, L=0, J=1$). Следовательно,

$$\Delta E_{ct} = E_{ct}(S=1) - E_{ct}(S=0) = 2g_{sp}|g_s| \frac{\mu_{яд}\mu_B}{r_1^3}.$$

Физическая причина того, что ниже расположен уровень с $S=0$, проста: ниже всегда расположено состояние, у которого магнитный момент протона, направленный вдоль его спина (заряд протона положителен), параллелен магнитному полю, создаваемому электроном. Последнее всегда направлено против спина электрона (заряд электрона отрицателен). В результате в основном состоянии спины частиц антипараллельны, т. е. суммарный спин атома равен нулю. Чтобы не запутаться, удобно считать, что g -факторы протона положительны, а электрона — отрицательны. Что касается нейтрона, то отрицательность его спинового g -фактора объясняется структурой нейтрона: его внутренность заряжена положительно, а наружная область — отрицательно.

Если собственный момент количества движения (спин) считать следствием вращения вокруг собственной оси, то вклад отрицательно заряженной области будет определяющим и магнитный момент будет направлен против спина.

6.49. $\Delta\mathcal{E}_{\text{ст}} = \mathcal{E}_{\text{ст}}(F=2) - \mathcal{E}_{\text{ст}}(F=1) = 4g_j g_{sp} \frac{\mu_{\text{яд}}\mu_B}{n^6 r_B^3} = 0,9 \cdot 10^{-7}$ эВ, где $n=2$, $g_j=4/3$ — фактор Ланде для электрона, $\mathbf{j}=1+\mathbf{s}$, $\mathbf{j}=3/2$.

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} + \mathbf{s}_p, F = \begin{cases} 3/2 + 1/2 = 2, \\ 3/2 - 1/2 = 1, \end{cases} \text{ — это полный угловой момент атома.}$$

6.50. $\Delta\mathcal{E}_H \approx 0,59 \cdot 10^{-5}$ эВ. Радиус позитрония в $2p$ -состоянии $r = 8r_1$, где r_1 — радиус первой боровской орбиты. Отношение частоты излучения позитрония к частоте излучения атомарного водорода

$$\frac{v_{\text{поз}}}{v_H} = \frac{m_p}{8^3 \cdot 2,79 m_e} \approx 1,285, \quad \text{откуда} \quad \Delta\mathcal{E}_{\text{поз}} \approx 0,76 \cdot 10^{-5}$$
 эВ.

6.51* Такое состояние невозможно. Если бы оно было возможно, то радиус электронной орбиты в таком «атоме» был бы много меньше комптоновской длины волн нейтрона.

Решение. При нерелятивистском рассмотрении полная энергия системы должна быть отрицательной:

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{\mu_e \mu_n}{r^3} < 0.$$

Из соотношения неопределенностей $pr \sim \hbar$ выразим импульс электрона через r и подставим в предыдущее неравенство:

$$\mathcal{E} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{\mu_e \mu_n}{r^3}.$$

Радиус стационарной орбиты электрона оценим из минимума энергии $\frac{d\mathcal{E}}{dr} = 0$, откуда $r = \frac{3\mu_e \mu_n}{\hbar^2} m_e \approx 8 \cdot 10^{-16}$ см $\ll \frac{\hbar}{m_n c} \approx 2 \cdot 10^{-14}$ см — комптоновской длины волны нейтрона. Последнее очевидное неравенство показывает неправомерность рассмотрения нейтрона в этой задаче как точечной частицы.

6.52. $B = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{4\mu m d^2}.$

6.53. $B \gtrsim \frac{m^2 c e^3}{\hbar^3} \approx 10^9$ Гс.

6.54. $\mathcal{E} \approx \pm \frac{\mu^2}{r^3} \approx 3,2 \cdot 10^{-24}$ эрг $= 2 \cdot 10^{-12}$ эВ.

6.55. $p_{\text{ат}} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda E} \approx 4,3 \cdot 10^{-18}$ ед. СГСЭ; $l = \frac{p_{\text{ат}}}{e} \approx 1 \text{ \AA}.$

6.56* Решение. Поскольку в сильных полях **LS**-связь разрывается, можно считать, что векторы **L** и **S** прецессируют вокруг вектора **B** независимо. Таким образом, сохраняющимися величинами являются L^2 , S^2 , L_z , S_z и

$$\mathcal{E}_{SL} = A \langle (\mathbf{S}\mathbf{L}) \rangle = A \langle (L_x S_x + L_y S_y + L_z S_z) \rangle = A \langle L_z S_z \rangle = A m_L m_S.$$

Расщепление линий показано штрихами на рис. 162. В спектре излучения π -линия не расщепляется (у нее $m_L = 0$), а σ -линии становятся дублетами, раздвинутыми на величину $A/\hbar [c^{-1}]$. Экспериментально эффект наблюдался на Li.

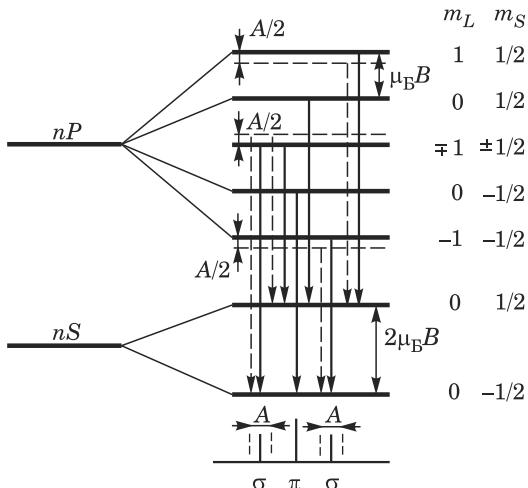


Рис. 162

$$6.57. g = 0.34; \mu = g\mu_{яд}I = 0.85\mu_{яд}.$$

6.58. Сигнал в магнитном поле пропорционален разности заселенностей подуровней $\Delta n \approx N \frac{\mu B}{kT}$. Увеличение сигнала $a = \frac{A_0}{A_1} = \frac{\Delta n_0}{\Delta n_1} \approx \frac{B_0}{B} = 100$.

6.59. Сигнал в резонансе $\propto (hv)_{\text{рез}}^2 \frac{N_0}{kT} \propto v^2$, т. е. увеличится в 4 раза.

$$6.60^*: T_{\min} \approx \frac{h^2 v^2 I^2}{B^2 k d^3} \approx 0.6 \cdot 10^{-7} \text{ К.}$$

Решение. В методе адиабатического размагничивания поле **B** переводит решетку в парамагнитное состояние, в котором магнитные моменты ядер ориентируются по полю **B**. При этом $kT_{\text{нач}} \ll \mu_{яд}B$. При снятии внешнего поля происходит разупорядочение системы и понижение ее температуры. Выделившееся тепло отводится, и процесс можно повторить. При полном разупорядочении можно получить $T \approx 0$ К. Однако этого не происходит, поскольку есть взаимодействие, приводящее систему к установлению антиферромагнитного упорядочения. В принципе, наличие энергии взаимодействия любой природы устанавливает предел на минимально достижимую температуру T_{\min} , определяемую условием

$$kT_{\min} \approx \mathcal{E}_{вз}.$$

Установление антиферромагнитного упорядочения в цепочке ядер ^{63}Cu (рис. 163) происходит за счет магнитного (диполь-дипольного) взаимодействия атомов. В приближении ближайших соседей энергия взаимодействия $\mathcal{E}_{вз} = \mu^2/d^3$. Из условия на ядерный магнитный резонанс следует, что магнитный момент ядра ^{63}Cu $\mu = g_I \mu_{яд} I$, где $g_I = \frac{h\nu}{\mu_{яд}B}$, откуда энергия взаимодействия

ствия атомов

$$\mathcal{E}_{\text{вз}} = \frac{g_I^2 \mu_{\text{яд}}^2 I}{d^3} = \left(\frac{hvI}{B} \right)^2 \frac{1}{d^3},$$

а также

$$T_{\min} = \left(\frac{hvI}{B} \right)^2 \frac{1}{kd^3} \approx 0,6 \cdot 10^{-7} \text{ К.}$$

6.61* $v_{\text{рез}} = 1,6 \text{ ГГц.}$

Решение. Поскольку электронные оболочки $5s$ и $5p$ полностью заполнены, то парамагнитные свойства иона определяются 13 электронами незаполненной $4f$ -оболочки. В соответствии с первым правилом Хунда эти электроны располагаются так, чтобы образовать максимальный спин (S_z)_{max}, и при

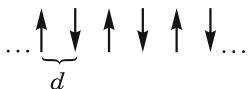


Рис. 163

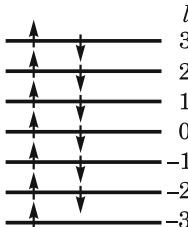


Рис. 164

данном (S_z)_{max} — максимальный орбитальный момент (L_z)_{max} (рис. 164). На f -оболочке ($l=3$) имеется $2(2l+1)=14$ мест, тринадцать из которых заняты. Поскольку в квантовой физике за величину момента принимают значение его максимальной проекции на заданную ось (в единицах \hbar), то

$$(S_z)_{\max} = \frac{1}{2}; \quad (L_z)_{\max} = 3 + 2 + 1 + 0 - 1 - 2 = 3.$$

В соответствии со вторым правилом Хунда

$$J = L + S = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}.$$

Вычислим g -фактор:

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = \frac{8}{7}.$$

Резонансную частоту ЭПР найдем по формуле

$$v_{\text{рез}} = \frac{g \mu_B B}{h} = 1,6 \text{ ГГц.}$$

6.62. $v = 1,12 \text{ ГГц}$ ($S = 1; L = 5; J = 4; g = 4/5$).

6.63. $M_0 = \frac{N_A \rho J h v}{B_{\text{рез}} A} = 2980 \text{ Гц}$, где A — атомная масса Ды.

6.64. $M_0 = \frac{N_A \rho}{A} g \mu_B J = 2723 \text{ Гц}$, где A — атомная масса эрбия Er, $v = \frac{g \mu_B B}{h} \approx 1,68 \text{ ГГц}$; $g = 6/5$.

6.65. Для полученной конфигурации атома $S_{\max} = 3/2$, $L_Z^{\max} = 2$, $J_{\max} = 1/2$, т. е. состояние ${}^4D_{1/2}$. При этом $g = 0$, что означает, что $\mu_{\text{сумм}} \perp \mathbf{J}$. Таким образом, $\mu_J = 0$, а значит, пучок не расщепится.

$$6.66^* \mu = \frac{LkT}{B\hbar N_A} = 2,62 \mu_{яд} = 13,25 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гс.}$$

Решение. Молярная масса тефлона $n \cdot 50$ г/моль, поэтому образец тефлона массой 50 г содержит $1/n$ молей тефлона. В этом образце в соответствии с химической формулой содержится $N_0 = 2N_A n \frac{1}{n} = 2N_A$ атомов фтора. На рис. 165 изображена схема расщепления уровней ядра фтора в магнитном поле. Так как спин ядра равен $1/2$, то получается двухуровневая система. Такое расположение подуровней в магнитном поле задается неспаренным

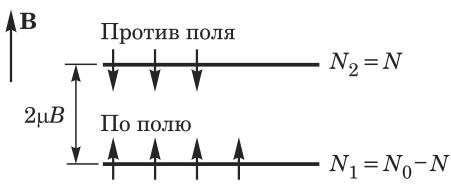


Рис. 165

протоном в ядре фтора. Из полного числа N_0 ядер на верхнем уровне находятся N_2 ядер фтора. Пусть $N_2 = N$. На нижнем уровне остается $N_1 = N_0 - N$ ядер. Разность $\Delta N = N_1 - N_2 = N_0 - 2N$. В соответствии с распределением Больцмана

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{N}{N_0 - N} = \exp\left(-\frac{\Delta\mathcal{E}}{kT}\right),$$

где $\Delta\mathcal{E} = 2\mu B$, μ — магнитный момент ядер фтора. Из этого следует

$$N = \frac{N_0 \exp\left(-\frac{\Delta\mathcal{E}}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{\Delta\mathcal{E}}{kT}\right)};$$

$$\Delta N = N_0 - 2N = N_0 \frac{1 - \exp\left(-\frac{\Delta\mathcal{E}}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{\Delta\mathcal{E}}{kT}\right)} \approx N_0 \frac{\frac{\mu B}{kT}}{1 - \frac{\mu B}{kT}} \approx \frac{\mu B}{kT} N_0.$$

Здесь мы учли, что $\frac{\mu_{яд} B}{kT} = 1,4 \cdot 10^{-6} \ll 1$, и поэтому разложили экспоненты в ряд. При снятии поля половина ядер из ΔN разориентируется, т. е. образец получит момент импульса

$$L = \frac{\Delta N}{2} \hbar = \frac{1}{2} \frac{\mu B \hbar}{kT} N_0 = \frac{\mu B \hbar N_A}{kT},$$

откуда и определим магнитный момент ядра фтора

$$\mu = \frac{LkT}{B\hbar N_A} = 13,25 \cdot 10^{-24} \text{ эрг/Гц} = 2,62 \mu_{яд.}$$

где $\mu_{яд.} = 5,05 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс — ядерный магнетон Бора. При написании этой формулы мы учли, что магнитный момент ядра ^{19}F определяется неспаренным протоном, находящимся в состоянии $2s_{1/2}$ (это один протон сверх заполненной оболочки из 8 протонов). Поскольку в этом состоянии орбитальный момент $l=0$, то у этого протона угловой момент является чисто спиновым и равен $\hbar/2$. При перевороте спина угловой момент изменяется на \hbar .

$$6.67. B > \frac{\Delta\mathcal{E}}{2\mu_B} = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Гс.}$$

6.68* $\alpha \approx 3 \cdot 10^{-6}$.

Решение. В магнитном поле атомы водорода поляризуются из-за того, что проекция их магнитного момента на направление поля принимает

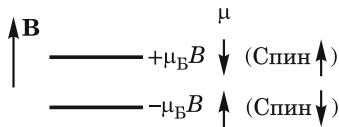


Рис. 166

два значения $\pm \mu_B$. Как в любой двухуровневой системе, полное число атомов $N_0 = N_\uparrow + N_\downarrow$. Отношение числа атомов водорода со спином по полю N_\uparrow к числу атомов со спином против поля N_\downarrow (рис. 166)

$$\frac{N_\downarrow}{N_\uparrow} = \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right),$$

отсюда

$$N_\uparrow = \frac{N}{1 + \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right)}, \quad N_\downarrow = \frac{N_0 \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right)}.$$

Поскольку $N_\downarrow < N_\uparrow$, то число атомов с антипараллельными спинами равно $2N_\downarrow$, а их относительное число

$$\alpha = \frac{2N_\downarrow}{N_0} = \frac{2 \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right)} \approx 2 \exp\left(-\frac{2\mu_B B}{kT}\right) \approx 3 \cdot 10^{-6}.$$

6.69* $T_{\max} \approx \frac{\mu_B^2}{ka^3} \approx 2 \cdot 10^{-2}$ К.

Решение. См. также задачу 6.60. Нагревание всегда разупорядочивает структуру. Поэтому $kT_{\max} \approx \mathcal{E}_{\text{вз}}$. Энергия магнитного взаимодействия атомов $\mathcal{E}_{\text{вз}} \approx \mu^2/a^3$. Для оценки магнитного момента атома разумно взять магнетон Бора, поскольку электронный магнитный момент $\mu \leq \mu_B$. Отсюда $T_{\max} \approx \mu_B^2/(ka^3) \approx 2 \cdot 10^{-2}$ К.

Эта оценка ясно показывает, что чисто магнитно-дипольное взаимодействие не может объяснить наблюдаемую величину температуры Кюри ферромагнетиков $T_K \sim 10 \div 1000$ К. Магнитное упорядочение у ферромагнетиков имеет другую природу — обменное взаимодействие, которое по своей сути является электростатическим (см. задачу 6.78). Величина электростатического взаимодействия двух электронов, находящихся на расстоянии a , порядка e^2/a , что соответствует температуре упорядочения $T \sim e^2/(ka) \approx 5 \cdot 10^4$ К. Так как обменное взаимодействие составляет обычно $0,01 \div 0,1$ долю электростатического, то видно, что это обеспечивает наблюдаемые T_K практически всех материалов.

6.70* $\mathcal{E}_n = \hbar\omega_C \left(n + \frac{1}{2}\right)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$; $\omega_C = \frac{eB}{m_e c}$ — циклотронная частота; $\mathcal{E}_0 = 5,8 \cdot 10^{-6}$ эВ.

Решение. В магнитном поле электрон движется по окружности с циклотронной частотой $\omega_C = \frac{eB}{m_e c}$. Такое движение можно описать изменением

только одной координаты — угла поворота. Тем самым задача сводится к задаче об одномерном осцилляторе с законом квантования $\mathcal{E}_n = \hbar\omega_c(n + 1/2)$.

Покажем, как это можно получить, используя уравнения Гамильтона. В магнитном поле соотношение между импульсом \mathbf{p} и скоростью \mathbf{v} частицы не имеет привычной формы $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Соотношение между \mathbf{p} и \mathbf{v} в присутствии магнитного поля можно получить двумя способами. Первый из них состоит в том, что когда частица из области $B=0$ попадает в область $B \neq 0$ (либо B как-либо меняется от нуля до B_0), то возникает вихревое электрическое поле \mathbf{E} . Согласно уравнению Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A},$$

откуда следует, что $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. За время возникновения поля оно меняет скорость частицы:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} = -\frac{q}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

откуда интегрированием получаем

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p}_0 - \frac{q}{c} \int \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} dt = \mathbf{p}_0 - \frac{q}{c} \mathbf{A}.$$

Отсюда следует, что $m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A} = \text{const}$, и эта константа не зависит от наличия поля. Эту константу можно рассматривать как эффективный импульс $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}$. Для электрона ($q = -e$) $\mathbf{p} = m\mathbf{v} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$.

Второй способ состоит в том, что полный импульс заряженной частицы складывается из двух частей: $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{кин}} + \mathbf{p}_{\text{пол}}$, где $\mathbf{p}_{\text{кин}} = m\mathbf{v}$, а $\mathbf{p}_{\text{пол}}$ — импульс электромагнитного поля, образованного электрическим (кулоновским) полем частицы и постоянным магнитным полем внешних источников:

$$\mathbf{p}_{\text{пол}} = \frac{1}{4\pi c} \int [\mathbf{E}\mathbf{B}] dV, \quad \text{где} \quad \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

\mathbf{r} — положение частицы (при $v \ll c$ ее можно считать покоящейся и не учитывать магнитное поле, создаваемое ею самой). Поскольку $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, то можно показать, что в этих предположениях $\mathbf{p}_{\text{пол}} = \frac{q}{c}\mathbf{A}$, т. е. $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c}\mathbf{A}$.

Энергия частицы в постоянном магнитном поле есть чисто кинетическая (без учета спина), поэтому гамильтониан

$$\mathcal{H} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2 = \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + (p_y - m\omega_c x)^2 + p_z^2 \right),$$

Мы рассматриваем общий случай $p_z \neq 0$. Классические уравнения движения Гамильтона

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}; \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}$$

дают

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{m}, \\ \dot{y} = \frac{p_y - m\omega_c x}{m}, \\ \dot{z} = \frac{p_z}{m}, \end{cases} \quad \text{а также} \quad \begin{cases} \dot{p}_x = -(p_y - m\omega_c x)\omega_c, \\ \dot{p}_y = 0, \\ \dot{p}_z = 0. \end{cases}$$

Видно, что p_y и p_z являются интегралами движения, а \dot{y} не является интегралом движения. Это есть проявление того факта, что в магнитном поле $B_0 \parallel OZ$ x - и y -компоненты скорости частицы не могут иметь одновременно определенных соотношений. Обозначим $p_y = p_{y0} = \text{const}$; $p_z = p_0 = \text{const}$. Поскольку по условию задачи $v \perp \mathbf{B}$, то $p_{z0} = 0$.

Тогда $\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_{y0} + m\omega_c x)^2)$.

Сделаем замену переменных $x' = x + \frac{p_{y0}}{m\omega_c}$. Тогда $p_x = p'_x$ и

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} p_{x'}^2 + \frac{m\omega_c^2}{2} x'^2.$$

Таким образом, мы свели гамильтониан частицы к гамильтониану одномерного гармонического осциллятора. Воспользовавшись результатами квантово-механической задачи о квантовом осцилляторе, запишем по аналогии энергию уровней, называемых уровнями Ландау:

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Это — система эквидистантных уровней. Каждый уровень имеет бесконечную кратность вырождения, так как энергия не зависит от p_y , $-\infty < p_y < +\infty$. При этом координата положения равновесия осциллятора $x' = 0$, т. е. $x = -\frac{p_{y0}}{m\omega_c}$, не определена.

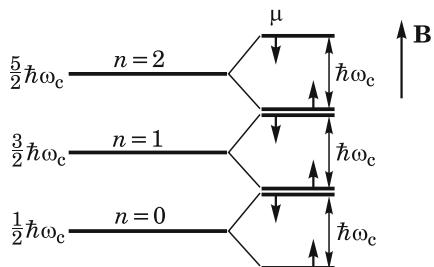


Рис. 167

Минимальная энергия электрона $\hbar\omega_c/2 = 5,8 \cdot 10^{-6}$ эВ. Учет спина электрона приводит к добавке ($\mu\mathbf{B}$) в энергию и спиновому расщеплению уровней $2m_s\mu_B B$, ($m_s = \pm 1/2$). Для свободного электрона $\mu_B B = \hbar\omega_c/2$. На рис. 167 изображено расщепление уровней. Стрелками изображено направление магнитных моментов электрона. Низшее состояние определяется тем, что $\mu \parallel \mathbf{B}$. При этом спин \mathbf{s} антипараллелен полю \mathbf{B} .

$$6.71^*: S_{\min}^{\mathbf{P}} = \frac{\pi \hbar e B}{c} \approx 1,66 \cdot 10^{-43} \text{ эрг}\cdot\text{г}; S_{\min}^{\mathbf{R}} = \frac{\pi \hbar c}{e B} = 6,56 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2.$$

Решение. Условие вращения электрона в магнитном поле по окружности

$$\frac{mv_\perp^2}{R} = \frac{e}{c} v_\perp B$$

дает в координатном пространстве (\mathbf{R} -пространстве) радиус ларморовского кружка

$$R = \frac{mc}{eB} v_\perp.$$

Преобразуем это выражение:

$$R^2 = \left(\frac{mc}{eB} \right)^2 v_\perp^2 = \frac{2mc^2}{e^2 B^2} \frac{mv_\perp^2}{2} = \frac{2mc^2}{e^2 B^2} \mathcal{E}_\perp,$$

где \mathcal{E}_\perp — кинетическая энергия поперечного движения частицы. Так как \mathcal{E}_\perp квантуется: $\mathcal{E}_\perp = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right)$, то квантуется и квадрат радиуса орбиты, т. е. площадь

$$S_n = \pi R_n^2 = 2\pi \frac{mc^2}{e^2 B^2} \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Запишем далее уравнение движения (\mathbf{R} — это проекция \mathbf{r} на плоскость, перпендикулярную \mathbf{B}):

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{mc} \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{B} \right].$$

Интегрируя и отбрасывая постоянную интегрирования, получаем $\mathbf{v} = \frac{e}{mc} [\mathbf{r}\mathbf{B}]$. Поскольку $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ и $\mathbf{r} \perp \mathbf{B}$, то $\mathbf{v}_\perp = \frac{eB}{mc} [\mathbf{Rz}]$.

Отсюда видно, что в импульсном пространстве (или пространстве скоростей) траектория получается умножением на $eB/(mc)$ и ее поворотом на 90° вправо (по часовой стрелке), если смотреть с конца вектора \mathbf{B} .

Таким образом, траектория электрона в пространстве скоростей — тоже окружность и

$$S_n^v = \pi v_\perp^2 = \pi R_n^2 \left(\frac{eB}{mc} \right)^2 = 2\pi \frac{\hbar\omega_c}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Минимальная площадь $S_0^v = \frac{\pi\hbar\omega_c}{m}$, или (в импульсном пространстве)

$$S_{\min}^p = S_0^p = m^2 v_\perp^2 \pi = \pi m \hbar \omega_c = \frac{\pi \hbar e B}{c} = 1,66 \cdot 10^{-43} \text{ эрг} \cdot \text{г.}$$

Минимальная площадь в \mathbf{R} -пространстве

$$S_{\min}^R = \pi \frac{mc^2}{e^2 B^2} \hbar \omega_c = \frac{\pi \hbar c}{eB} = 6,56 \cdot 10^{-11} \text{ см}^2.$$

Заметим, что из квантования площади в \mathbf{R} -пространстве следует *квантование магнитного потока*, пронизывающего орбиту электрона,

$$\Phi_n = \pi R_n^2 B = \Phi_0 \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

где $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{e} = \frac{2\pi e}{\alpha}$, где α — постоянная тонкой структуры, а Φ_0 — минимальный магнитный поток (квант магнитного потока).

$$\mathbf{6.72^*} R = \frac{\gamma M}{c^2 \ln(m_e c^2 / \mathcal{E}_2)} \approx 7 \text{ км}; B = \frac{\mathcal{E}_1 m_e c^2}{2\mu_B \mathcal{E}_2} = 4,77 \cdot 10^{12} \text{ Гц}.$$

Решение. Вблизи нейтронной звезды находится другая звезда (красный гигант), образующая с нейтронной звездой двойную систему. За счет сильного гравитационного поля происходит акреция, т. е. захват протонно-электронной плазмы красного гиганта и ее падение на нейтронную звезду. При этом непрерывное (тормозное) рентгеновское излучение уносит выделившуюся кинетическую энергию.

Магнитное поле у нейтронной звезды возникает в силу сохранения магнитного потока из первоначального поля звезды и ее «раскрутки». Предполагается, что исходной была звезда типа Солнца. На поверхности звезды «аннигиляционный» γ -квант имеет энергию, равную $m_e c^2 = 511$ кэВ. После «преодоления» гравитационного поля он «краснеет» (см. задачу 1.4) и на поверхности Земли имеет энергию $\mathcal{E}_2 = 460$ кэВ. Таким образом,

$$\ln \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_2} = \frac{\gamma M}{c^2 R},$$

откуда следует ответ

$$R = \frac{\gamma M}{c^2 \ln(m_e c^2 / \mathcal{E}_2)} \approx 7 \text{ км}.$$

В магнитном поле уровни энергии свободного электрона (уровни Ландау) $\mathcal{E}_n = \hbar\omega_c n = 2\mu_B B n$. Как и в первом случае, это излучение преодолевает гравитационное поле нейтронной звезды и на поверхности Земли имеет энергию $E_1 = 50$ кэВ. Таким образом,

$$\ln \frac{2\mu_B B}{\mathcal{E}_1} = \frac{\gamma M}{c^2 R}, \quad \text{откуда искомое поле } B = \frac{\mathcal{E}_1 m_e c}{2\mu_B \mathcal{E}_2} = 4,77 \cdot 10^{12} \text{ Гс.}$$

6.73*. $P = 0,3$.

Решение. В силу несохранения четности при β -распаде число электронов, вылетевших по и против спина ядра, будет различным. Но если число ядер со спином вверх и вниз будет одинаковым, то результирующая асимметрия вылета исчезнет, и эффект несохранения четности не проявится. Поэтому необходимо иметь преимущественную поляризацию ядер, что достигается в магнитном поле при низких температурах.

В магнитном поле уровень ядра с $I=1$ расщепляется на три подуровня, соответствующие значениям магнитного квантового числа $m_I = 1, 0, -1$, и расстояние между ними $\Delta\mathcal{E} = g\mu_{яд}H$. Отношение заселеностей подуровней

$$\frac{N(m_1)}{N(m_2)} = \exp\left(\frac{(m_1 - m_2)g\mu_{яд}B}{kT}\right) = e^\alpha, \quad \text{где } m_1 = +1, \quad m_2 = -1.$$

Искомая поляризация ядер

$$P = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha + 1} = 0,3.$$

Это означает, что только 30% распадов дадут асимметричный эффект, который наблюдается на симметричном фоне распадов остальных ядер.

На самом деле реально в опыте Ц. Вильямса использовался переход из основного состояния ядра изотопа $^{60}_{27}\text{Co}$ с $I=5$ в возбужденное состояние ядра $^{60}_{28}\text{Ni}$ с $I=4$. Поэтому $I=1$ — это «натяжка», упрощающая задачу.

6.74*. $n=2, l=1$, число подуровней 5.

Решение. Главное квантовое число $n = \sqrt{Ry/|\mathcal{E}|} = 2$. При этом $n = n_r + l + 1$, где радиальное квантовое число n_r равно числу нулей радиальной части волновой функции на $(0, \infty)$, т. е. $n_r = 0$. Отсюда следует, что $l = 1$, и мы имеем $2p$ -состояние. Число подуровней равно 5 ($m_l + 2m_s = \pm 2; \pm 1; 0$).

6.75. $2s$ -состояние ($l=0$); $2s+1=2$ — число подуровней. Оно не зависит от величины поля **B**, так как данный уровень — синглет.

6.76*. $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1034571,4 \text{ \AA} \approx 0,01 \text{ см.}$

Решение. В схеме Рассела–Саундерса снятие вырождения и расщепления терма 3P по величине полного момента **J** с образованием подуровней тонкой структуры $^3P_2, ^3P_1, ^3P_0$ возникает в результате спин-орбитального взаимодействия. Энергия подуровней отличается от энергии терма на величину энергии спин-орбитального взаимодействия

$$\mathcal{E}_{LS} = A \langle (\mathbf{L}\mathbf{S}) \rangle = \frac{A}{2} \langle \mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2 \rangle = \frac{A}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)].$$

При этом

$$\mathcal{E}(^3P_2) - \mathcal{E}(^3P_1) = [\mathcal{E}(^3P) + \mathcal{E}_{LS}(J=2)] - [\mathcal{E}(^3P) + \mathcal{E}_{LS}(J=1)] = 2A > 0.$$

Знак константы спин-орбитального взаимодействия однозначно связан с правилом Хунда: если занято меньше половины свободных мест, то ниже по энергии лежит состояние с меньшим J , и получается так называемый нормальный мультиплет. Действительно, электронная конфигурация $O^{2+}: 1s^2 2s^2 2p^2$, и в незаполненной L -оболочке, содержащей $2(2l+1)=6$ мест, занято всего 2 места.

Природа этого следующая. Эффективное магнитное поле, создаваемое движением ядра в системе покоя электронов, направлено вдоль \mathbf{L} . Магнитный момент системы электронов направлен против \mathbf{S} . В наиболее низкоэнергетическом состоянии момент параллелен полю, т. е. \mathbf{S} антипараллелен \mathbf{L} , и поэтому J минимально. Если электронов больше половины, то удобнее использовать концепцию дырок в полностью заполненной оболочке. Так как у дырок заряд больше нуля, то их магнитный момент параллелен \mathbf{S} , и значит, параллелен \mathbf{L} . Тогда J — максимально.

Аналогично,

$$\mathcal{E}(^3P_1) - \mathcal{E}(^3P_0) = [\mathcal{E}(^3P) + \mathcal{E}_{LS}(J=1)] - [\mathcal{E}(^3P) + \mathcal{E}_{LS}(J=0)] = A.$$

Согласно правилам Бора

$$\mathcal{E}(^3P_2) - \mathcal{E}(^3P_1) = \left(\mathcal{E}(^1D_2) - \frac{hc}{\lambda_1} \right) - \left(\mathcal{E}(^1D_2) - \frac{hc}{\lambda_2} \right) = hc \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right).$$

Аналогично,

$$\mathcal{E}(^3P_1) - \mathcal{E}(^3P_0) = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1}{2} (\mathcal{E}(^3P_2) - \mathcal{E}(^3P_1)) = \frac{hc}{2} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right),$$

откуда получаем ответ

$$\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1034571,4 \text{ \AA} \approx 0,01 \text{ см.}$$

6.77. $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 15784 \text{ \AA}$. (См. решение задачи 6.76.) Однако здесь получается обращенный мультиплет (так как число электронов в незаполненной L -оболочке равно 4), когда большей энергии соответствует меньшее J : состояние 3P_1 лежит выше по энергии состояния 3P_2 .)

6.78. $A = 0,4 \text{ эВ}$; $\mathcal{E}_k = 9,2 \text{ эВ}$.

Заметим, что энергия возбужденного состояния атома гелия $\mathcal{E}_{\text{пара}} = -W_{\text{пара}} = \mathcal{E} + \mathcal{E}_k + A$, а $\mathcal{E}_{\text{орто}} = -W_{\text{орто}} = \mathcal{E} + \mathcal{E}_k - A$, так как энергия обменного взаимодействия

$$V = -A(S(S+1) - 1) = \begin{cases} -A & \text{для ортогелия,} \\ +A & \text{для парагелия,} \end{cases}$$

а энергия электронной конфигурации $1s^1 2s^1$ в данном приближении $\mathcal{E} = -68 \text{ эВ}$.

6.79. $v_{\text{рез}} = \frac{2\mu_B B}{h} = 18,7 \text{ ГГц}$.

6.80. $L = 6$. Это атом неодима в состоянии 5I_4 .

6.81. На 9 компонент.

6.82. Поле в начальный момент затухания $B(0) = B \exp\left(\frac{Rt_0}{L}\right) = 7900 \text{ Гс}$, где $B = \frac{hc}{2\mu\lambda} = 7150 \text{ Гс}$.

6.83. 1D , 3P , 1S .

6.84. $\delta\mathcal{E}_{\text{полн}} = -\frac{15}{8}A = -\frac{5\alpha^2\text{Рy}}{64} = -5,66 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}$. Сдвиг отрицательный — уровень $2p_{1/2}$ опускается вниз по шкале энергии. Причиной дополнительного сдвига для подуровней с $l \neq 0$ является учет релятивистской поправки $\propto p^4$ в выражении для кинетической энергии $T = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2} - mc^2 \approx \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^3}$.

6.85. $\delta\mathcal{E}_{\text{доп}} = -\frac{7}{8}A = -\frac{7\alpha^2\text{Рy}}{64} = -7,91 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}$; этот сдвиг по модулю превосходит спин-орбитальный сдвиг, равный $A/2$. Таким образом, $2p_{3/2}$ -подуровень опускается вниз по шкале энергии. (См. также замечание к задаче 6.84.)

6.86*: $\langle \delta\mu_{\text{эл}} \rangle \simeq -\frac{\mu_B}{7340}$. Добавка направлена против $\mu_{\text{эл}}$.

Решение. При бесконечной массе ядра момент импульса атома $l=1$ — это момент импульса электрона. При учете конечной массы ядра — это относительный момент импульса ядра и электрона при их движении вокруг центра масс. Таким образом, $l = l_{\text{эл}} + l_{\text{яд}}$. Поскольку в системе центра инерции импульсы электрона и ядра равны, то для оценки можно считать, что отношение моментов равно отношению расстояния до центра масс $l_{\text{эл}}/l_{8.5} \simeq M/m$. В классической задаче это было бы точное соотношение.

Поскольку на спиновую часть магнитного момента электрона движение ядра влияния не оказывает, то «мгновенный» магнитный момент электрона равен

$$\mu_{\text{эл}} = \mu_B(g_l \mathbf{l}_{\text{эл}} + g_s \mathbf{s}_{\text{эл}}) \simeq \mu_B \left(g_l \mathbf{l} \frac{M}{M+m} + g_s \mathbf{s}_{\text{эл}} \right) \simeq \mu_B (g_l \mathbf{l} + g_s \mathbf{s}) - \mu_B \frac{m}{M} g_l \mathbf{l}.$$

Здесь $g_l = -1$ и $g_s = -2$ — орбитальный и спиновый g -факторы электрона. Проектируя этот вектор на направление сохраняющегося вектора полного момента \mathbf{j} , получаем средний магнитный момент электрона

$$\langle \mu_{\text{эл}} \rangle = \mu_B \left(g + \frac{m}{M} \left\langle \left(\frac{\mathbf{l}, \mathbf{j}}{j^2} \right) \right\rangle \right) \mathbf{j},$$

где g — фактор Ланде для электрона, а угловые скобки справа обозначают усреднение по направлениям векторов \mathbf{l} и \mathbf{j} . Следовательно, добавка есть

$$\begin{aligned} \langle \delta\mu_{\text{эл}} \rangle &= \mu_B \frac{m}{M} \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2(j+1)} = \\ &= \mu_B \frac{m}{M} \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + 1 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{5}{2}} = \mu_B \frac{m}{M} \simeq \frac{\mu_B}{7340}. \end{aligned}$$

6.87. $\langle \mu \rangle = g\mu_B J = 3\mu_B$, где $g = 3/2$.

6.88. 1) $L = 2$; $S = 1/2$; $J = L + S = 5/2$; ${}^2D_{5/2}$; $g = 6/5$. 2) $g_{\text{эфф}} = \frac{h\nu}{\mu_B B} = 2,27$.

6.89. Испускается фотон $E2$, время жизни состояния 1S_0 составляет примерно $\tau_2 \sim \tau_1 \frac{\lambda^2}{(2\pi a)^2} = 0,05 \text{ с}$ (точный ответ $\tau_2 = 0,7 \text{ с}$).

6.90* Решение. Поскольку свет линейно поляризован, то в среднем фотоны не несут спинового углового момента, и весь момент — орбитальный. Мощность пучка $P = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \hbar\omega \frac{dN}{dt}$. Поскольку каждый фотон несет орбитальный угловой момент $\hbar l$, то при поглощении пучка изменение момента количества движения частицы будет равно

$$\frac{dL}{dt} = \alpha \hbar l \frac{dN}{dt} = \alpha \frac{P}{\omega} l = \frac{\alpha P \lambda}{2\pi c} l.$$

Согласно уравнению движения момента количества движения $\frac{dL}{dt} = M$, откуда

$$\frac{\alpha P \lambda}{2\pi c} l = 8\pi r^3 \eta \Omega = 8\pi r^3 \eta \cdot 2\pi f, \quad \text{или} \quad l = \frac{32\pi^3 r^3 \eta f c}{\alpha P \lambda}.$$

Подставляя числа, получаем (в СИ)

$$l = \frac{32 \cdot 3,14^3 \cdot 10^{-18} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 10^8}{0,25 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 6,33 \cdot 10^{-7}} = 3.$$

§ 7. Ядерные модели. Радиоактивность. Эффект Мессбауэра

$$7.1. \rho = \frac{m_N A - BA/c^2}{4\pi R^3/3} = 1,8 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3.$$

$$7.2. \mathcal{E}_K \approx \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R} \approx 0,66 Z^2 A^{-1/3} [\text{МэВ}].$$

$$7.3^*. \sigma \approx 1,4 \cdot 10^{20} \text{ эрг/см}^2 \approx 3 \cdot 10^{17} \sigma_{Hg}.$$

Решение. В капельной модели ядра можно по аналогии с жидкой каплей также ввести поверхностное натяжение

$$\sigma = -\frac{E_{\text{пов}}}{S} = -\frac{E_{\text{пов}}}{4\pi R^2} = \frac{17 \cdot 1,6 \cdot 10^{-6} A^{2/3} \text{ эрг}}{4\pi \cdot 1,3^2 \cdot 10^{-26} \cdot A^{2/3} \text{ см}^2} = 1,4 \cdot 10^{20} \text{ эрг/см}^2.$$

что превышает поверхностное натяжение ртути примерно в $3 \cdot 10^{17}$ раз.

7.4* Решение. Энергия связи ядра

$$\mathcal{E}_{\text{св}} = (Z m_p + (A-Z) m_n - M_{\text{я}}(A, Z)) c^2.$$

Кроме того,

$$\mathcal{E}_{\text{св}} = f(A) - \mathcal{E}_K - \mathcal{E},$$

где через $f(A)$ обозначены вклады в энергию связи, не зависящие от Z . Отсюда масса ядра

$$M_{\text{я}}(A, Z) = Z m_p + (A-Z) m_n + \frac{\mathcal{E}_K + \mathcal{E} - f(A)}{c^2}.$$

Приближенно минимум $M_{\text{я}}(A, Z)$ можно найти, считая Z непрерывной переменной и полагая $(\delta M_{\text{я}}/\delta Z)_A = 0$. В результате получим

$$Z = \frac{A}{1,97 + 0,015 A^{2/3}}.$$

При пользовании этой формулой нужно брать ближайшее целое значение Z :

A	Z	Ядро	A	Z	Ядро
10	5	$^{10}_5\text{B}$	150	62	$^{150}_{62}\text{Sm}$
50	23	$^{50}_{23}\text{V}$	200	80	$^{200}_{80}\text{Hg}$
100	43	$^{100}_{43}\text{Tc}$			

7.5. $Z_0 = \frac{A/2}{1 + 7,5 \cdot 10^{-3} A^{2/3}}$. ^{27}Mg — β^- -активен; ^{29}P — β^+ -активен; ^{37}K — β^+ -активен; ^{67}Cu — β^- -активен.

$$\mathbf{7.6^*:} R_{\text{яд}} = \frac{e^2}{\Delta \mathcal{E}_{\text{cb}}} = 1,9 \cdot 10^{13} \text{ см.}$$

Решение. Прежде всего, предполагаем, что расстояние между протонами не может быть больше размеров ядра в приближении точечных протонов, т. е. $R_{\text{яд}} \approx \langle r \rangle$. Кроме того, считаем, что разница в энергиях связи обоих ядер $\Delta \mathcal{E}_{\text{cb}} = \mathcal{E}_{\text{H}} - \mathcal{E}_{\text{He}}$ целиком кулоновского происхождения, т. е. $\Delta \mathcal{E}_{\text{cb}} = \Delta \mathcal{E}_{\text{кул}}$.

Энергия кулоновского взаимодействия протонов в ядре ^3He есть

$$\mathcal{E}_{\text{кул}} = \int \psi^* \frac{e^2}{r} \psi dV.$$

Здесь ψ — волновая функция системы нуклонов в ядре, r — расстояние между протонами. Интегрирование идет по объему ядра, т. е. считается, что ядро имеет жесткую форму и вне ядра $\psi \approx 0$. Конкретный вид ψ -функции в данном случае не нужен.

$$\mathcal{E}_{\text{кул}} = e^2 \int |\psi|^2 \frac{1}{r} dV = e^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle.$$

Будем считать, что $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle \simeq \frac{1}{\langle r \rangle}$, и величину $\langle r \rangle$ примем за размер ядра. Таким образом,

$$R_{\text{яд}} = \frac{e^2}{\Delta \mathcal{E}_{\text{cb}}} = 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

$$\mathbf{7.7^*:} r_0 = 1,4 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Решение. По отношению к ядерным силам протон и нейtron ведут себя совершенно одинаково. Эта эквивалентность ядерных взаимодействий для протонов и нейтронов наиболее ярко проявляется в так называемых зеркальных ядрах, получающихся друг из друга заменой протонов на нейтроны и наоборот. Именно такими парами и являются ядра $^{27}_{14}\text{Si}(14\text{p} + 13\text{n})$ и $^{27}_{13}\text{Al}(13\text{p} + 14\text{n})$. Однократность ядерных взаимодействий для протона и нейтрона носит название *зарядовой независимости* ядерных сил и является проявлением более общего свойства — изотопической инвариантности сильного взаимодействия.

Если бы изотопическая инвариантность ядерных сил была точным законом природы, то все параметры зеркальных ядер были бы одинаковыми и β -распад был бы запрещен законом сохранения энергии. Кулоновское взаимодействие нарушает зарядовую независимость и делает распад возможным:



Позитрон не может «унести» больше энергии, чем выделяется при распаде. Таким образом,

$$\begin{aligned} m_e c^2 + \mathcal{E}_{\max} &= (M(\text{Si}) - M(\text{Al}))c^2 = \\ &= (m_p - m_n)c^2 + \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} (Z_{\text{Si}}(Z_{\text{Si}}-1) - Z_{\text{Al}}(Z_{\text{Al}}-1)) = \\ &= -(m_n - m_p)c^2 + \frac{3}{5} \frac{e^2}{R} (14 \cdot 13 - 13 \cdot 12), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{e^2}{r_0 A^{1/3}} = \frac{5}{78} ((m_n - m_p + m_e)c^2 + \mathcal{E}_{\max}).$$

И окончательно, $r_0 = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см.

7.8. ${}^{11}\text{C}, {}^{11}\text{B}$: $\Delta\mathcal{E}_{\text{cb}} = 2,8 \text{ МэВ}$, $\Delta\mathcal{E}_k \approx 3,19 \text{ МэВ}$; ${}^{13}\text{C}, {}^{13}\text{H}$: $\Delta\mathcal{E}_{\text{cb}} = 3,0 \text{ МэВ}$, $\Delta\mathcal{E}_k \approx 3,62 \text{ МэВ}$. Подсчет \mathcal{E}_k выполняется по формуле $0,71 Z^2 A^{-1/3}$.

7.9. К-захват; β^+ -распад энергетически невозможен.

7.10. $\Delta Mc^2 \approx \sqrt{2M_{\text{Li}}c^2 \mathcal{E}_0} \approx 0,81 \text{ МэВ}$.

7.11. $\mathcal{E} \approx 57 \text{ эВ}$.

7.12* $\mathcal{E}_{\text{gp}} \approx 2,2 \text{ МэВ}$.

Решение. Красная граница фоторасщепления дейтранона определяется энергией связи протона и нейтрона. На рис. 168 изображены потенциальная яма и волновая функция дейтранона. Вне ямы, где $U(r) = 0$, уравнение Шредингера для частицы с приведенной массой $\mu = m_N/2$ имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r \psi = \mathcal{E} \psi,$$

где $\Delta_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr}$ — радиальная часть оператора Лапласа.

Подставляя в уравнение $\psi = A \frac{e^{-\kappa r}}{r}$, получим $\kappa^2 \hbar^2 + 2\mu \mathcal{E} = 0$, откуда

$$\mathcal{E} = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu}.$$

Рис. 168

Таким образом, минимальное значение энергии, достаточное для расщепления дейтранона,

$$\mathcal{E}_{\text{gp}} = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2\mu} = \frac{\hbar^2 \kappa^2}{m_N} \approx 2,23 \text{ МэВ}.$$

7.13* $\mathcal{E}_{\text{GDR}} = \hbar \frac{2,08}{R} \sqrt{\frac{2a_s}{m_N}} \approx 17,7 \text{ МэВ}$, где $a_s = 23,7$ — коэффициент в симметрийном члене в формуле Вайцзеккера, $R = 5,2 \text{ фм}$.

Решение. Если жесткость системы равна K , то упругая энергия $\mathcal{E} = \frac{1}{2} K \varepsilon^2$, где ε — относительное смещение. Возвращающая сила, обусловленная симметрийным членом в формуле Вайцзеккера, стремится восстановить

равномерную плотность протонов и нейтронов. Симметрийный член в энергии меняется в расчете на 1 нуклон следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{E}}_s = \frac{1}{A} a_s \frac{(A-2Z)^2}{A} = \frac{1}{2} 2a_s \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2,$$

где $a_s = 23,7$ МэВ — коэффициент в формуле Вайцзеккера, N — число нейтронов.

Изменением кулоновской энергии при сжатии протонов вдвое можно преебречь в силу относительной малости кулоновского члена в формуле Вайцзеккера. Сравнивая $\tilde{\mathcal{E}}_s$ с упругой энергией \mathcal{E} и полагая, что $(N-Z)/A$ — относительное смещение протонов относительно нейтронов, можно сделать вывод, что в расчете на один нуклон жесткость системы $\tilde{K} = 2a_s$. По формуле, данной в условии задачи, скорость распространения колебаний (скорость звука) $u^2 = \tilde{K}/m_N = 2a_s/m_N$, где m_N — масса нуклона.

Таким образом, энергия гигантского дипольного резонанса \mathcal{E}_{GDR} в сферическом ядре с $A=64$ (при $Z=N$)

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{GDR}} = \hbar k u = \hbar \frac{2,08}{R} u = \hbar \frac{2,08}{R} \sqrt{\frac{2a_s}{m_N}} = 17,7 \text{ МэВ},$$

Приведем *другое решение* данной задачи. Подсчитаем изменение энергии, непосредственно возникающее при смещении L нейтронов вправо, а L протонов влево. Тогда в левой половине будет $N/2-L$ нейтронов и $Z/2+L$ протонов, а в правой половине ядра $N/2+L$ нейтронов и $Z/2-L$ протонов

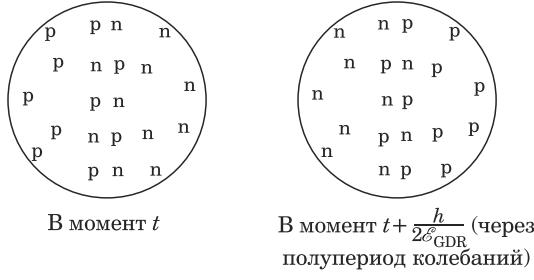


Рис. 169

(рис. 169). В этом решении мы не учитываем сжимаемость нуклонных жидкостей. В левой половине стало меньше нейтронов; там жидкость растянута, а протонная компонента — сжата. В правой половине — наоборот.

Полная энергия, связанная с нарушением симметрии, есть

$$\mathcal{E}_s = \frac{(N/2 - L - Z/2 - L)^2}{A/2} a_s + \frac{(N/2 + L - Z/2 + L)^2}{A/2} a_s = \frac{16L^2}{A} a_s.$$

Приведем эту формулу к тому же виду $\mathcal{E} = K\epsilon^2/2$ (см. первое решение). При этом становится очевидно, что максимальное число смещенных протонов

или нейтронов равно $A/4$. Таким образом,

$$\mathcal{E}_s = \frac{1}{2} 2a_s A \left(\frac{L}{A/4} \right)^2,$$

откуда $K = 2a_s A$.

Далее легко видеть, что мы приходим к тому же выражению для \mathcal{E}_{GDR} , что и в первом решении, поскольку полученное K следует либо привести к одному нуклону, т. е. поделить на A , либо воспользоваться формулой для расчета скорости u , приведенной в условии задачи,

$$u = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{2a_s A}{Am_N}} = \sqrt{\frac{2a_s}{m_N}}.$$

Заметим, что эта модель достаточно хорошо описывает положение гигантского резонанса. Например, в ядре меди, у которого как раз $A=64$, он наблюдается при энергии возбуждения 16 МэВ.

7.14. Нейтроны и протоны заполняют свои уровни независимо друг от друга, так как они не являются тождественными частицами. Первая оболочка $Z=N=2$; $A=4$ (He). Вторая оболочка $Z=N=8$; $A=16$ (O). Третья оболочка $Z=N=20$; $A=40$ (Ca).

$$7.15^*: \mathcal{E}_{\text{cb}} = |U_0| - \frac{5}{2}\hbar\sqrt{-\frac{2U_0}{m_N R_0^2}} \approx 12 \text{ МэВ}, \text{ где } m_N \text{ — масса нуклона.}$$

Решение. Радиус ядра кислорода $^{16}_8\text{O}$ $R_0 = 1,3 \cdot 10^{-13} \sqrt[3]{16} \approx 3,3 \cdot 10^{-13}$ см. Потенциальная энергия в однонуклонном приближении описывается выражением

$$U(r) = U_0 + \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

При $r \geq R_0$ потенциал $U(r) = 0$, и следовательно,

$$\omega = \sqrt{-\frac{2U_0}{mR_0^2}},$$

а уровни энергии имеют вид

$$\mathcal{E}_N = U_0 + \hbar\omega \left(N + \frac{3}{2} \right).$$

Картина уровней изображена на рис. 170. В пренебрежении конечным размером ямы уровни энергии эквидистанты. В силу зарядовой независимости

ядерных сил (см. задачу 7.7) уровни протонов и нейтронов в ядрах с $N=Z$ должны совпадать. В легких ядрах это действительно имеет место, поскольку в них вклад кулоновского взаимодействия в энергию связи незначителен. В случае ядра $^{16}_8\text{O}$ полностью оказываются заполненными протонные и нейтронные уровни с $N=0$ и $N=1$ (дважды магическое число 8 — по протонам и по нейtronам).

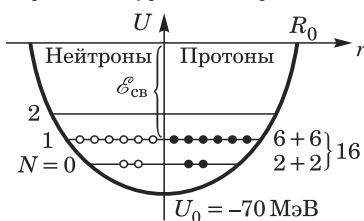


Рис. 170

На рис. 170 показано также, как отсчитывается искомая энергия связи \mathcal{E}_{cb} (от верхнего заполненного уровня до «потолка» ямы). Таким образом,

$$\mathcal{E}_{\text{cb}} \approx |U_0| - \left(N + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega.$$

где $N = 1$ (внешний нуклон). После преобразований получим

$$\mathcal{E}_{\text{cb}} = |U_0| - \frac{5\hbar}{2} \sqrt{-\frac{2U_0}{mR_0^2}} \approx 12 \text{ МэВ.}$$

7.16. $\Delta\mathcal{E} = \hbar\omega = \frac{\hbar}{R_0} \sqrt{-\frac{2U_0}{m}} \approx 15,8 \text{ МэВ.}$

7.17. $a^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu|U_0|}; a \approx 1,8 \cdot 10^{-13} \text{ см, где } \mu = m_p/2 — \text{ приведенная масса дейтрана. Приведем также результат точного решения, полученного из условия сшивки волновых функций на границе (см. также задачи 3.18 и 3.12):}$

$$a = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu(|U_0| - \mathcal{E}_{\text{cb}})}} \arccos \frac{\mathcal{E}_{\text{cb}}}{|U_0|} = 1,82 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

7.18. $R_d = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_N\mathcal{E}}} \approx 3 \cdot 10^{-13} \text{ см, где } m_N — \text{ масса нуклона. Здесь для оценки можно воспользоваться волновой функцией основного состояния дейтрана (см. задачу 7.12) } \psi \approx Ae^{-\kappa r}/r, \text{ где } \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m_N\mathcal{E}}.$

7.19. $J \approx 1,4 \cdot 10^{-47} \text{ г} \cdot \text{см}^2.$

7.20. В силу радиоактивного равновесия между ^{238}U и ^{234}U $\lambda_4 N_4 = \lambda_8 N_8$ (вековое уравнение), откуда

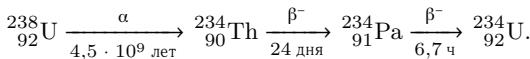
$$\frac{T_4}{T_8} = \frac{\lambda_8}{\lambda_4} = \frac{N_4}{N_8} = 5,5 \cdot 10^{-5}; \quad T_4 = 2,48 \cdot 10^5 \text{ лет.}$$

Период полураспада ^{234}U много меньше возраста Земли ($\approx 10^9$ лет); таким образом, наше предположение о наличии радиоактивного равновесия между ^{238}U и ^{234}U оправдано.

7.21. $k_8(t) = \frac{k_8}{1 + k_5(e^{(\lambda_5 - \lambda_8)t} - 1) \cdot 10^{-2}}, \quad k_5(t) = 100 - k_8(t).$

Если подставить числовые значения, то получается, что $4 \cdot 10^9$ лет тому назад содержание ^{235}U составляло 16%. Примерно $6 \cdot 10^9$ лет тому назад содержания ^{235}U и ^{238}U могли быть равными. Конечно, в момент образования Земли в ее составе имелись и другие изотопы урана (см. задачу 7.22).

7.22. С момента образования Земли за время $t = 4 \cdot 10^9$ лет содержание ^{234}U на Земле должно уменьшиться в $\exp(t \ln 2/\tau_4) \approx e^{11180} \approx 10^{4855}$ раз. Если даже предположить, что в момент образования Земли на ней существовали только изотопы ^{234}U , то и тогда на Земле уже давно не осталось бы ни одного атома ^{234}U . Изотоп ^{234}U существует в природе благодаря α -распаду ^{238}U и β^- -распадам ^{234}Th и ^{234}Pa :



Содержание ^{234}U находится из условия радиоактивного равновесия (см. задачу 7.20).

7.23. $T_8/\ln 2 = 6,45 \cdot 10^9$ лет; $T_5/\ln 2 = 1,016 \cdot 10^9$ лет.

7.24. В связи с тем, что проницаемость кулоновского барьера экспоненциально зависит от ширины барьера, то ответ задачи оказывается чрезвычайно чувствительным к выбору приближения. Приведем три возможных формы ответа:

$$1) \frac{I_1}{I_2} = \exp \left[-\frac{4(Z-2)e^2\sqrt{2m_a}}{\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} \arccos \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{U_0}} - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_2}} \arccos \sqrt{\frac{\mathcal{E}_2}{U_0}} + \sqrt{\frac{\mathcal{E}_2}{U_0} \left(1 - \frac{\mathcal{E}_2}{U_0} \right)} - \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{U_0} \left(1 - \frac{\mathcal{E}_1}{U_0} \right)} \right) \right] = 744;$$

$$2) \frac{I_1}{I_2} = \exp \left[\frac{2\pi(Z-2)e^2\sqrt{2m_a}}{\hbar} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_2}} - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} \right) \right] = 942;$$

$$3) \frac{I_1}{I_2} = \exp \left[\frac{8(Z-2)e^2}{\hbar} \sqrt{2m_a} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_2}} - \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} \right) \right] = 6130,$$

где $U_0 = \frac{2(Z-2)e^2}{R}$, R – радиус ядра с массовым числом $A-4$.

Формулы 1)–3) получены для случая, когда вне ядра α -частица описывается плоской волной (обрыв барьера при $r=R$), что приближенно справедливо, если энергия α -частицы мала по сравнению с высотой кулоновского барьера. Полученные формулы справедливы также при вылете α -частицы «из центра» ядра, когда можно не учитывать центробежный барьер. При этом формула 1) представляет собой результат точного интегрирования; формула 2) является предельным случаем при $U_0 \rightarrow \infty$, а формула 3) есть результат интегрирования при $U(r) \gg \mathcal{E}$.

7.25. Зависимость периода полураспада (в секундах) от энергии (в МэВ) хорошо описывается законом Гейгера–Неттоля

$$\lg T_{1/2} \approx A + \frac{R}{\sqrt{\mathcal{E}_a}}.$$

Из условий задачи константы $A \approx -56,5$; $B \approx 148,3$. Искомый период полу-распада равен $T_{1/2} \approx 3 \cdot 10^{84}$ лет.

$$7.26. \frac{T_p}{T_a} = \frac{\lambda_a}{\lambda_p} = \exp \left[\frac{4\sqrt{2}Z_a e^2}{\hbar\sqrt{\mathcal{E}}} \left(Z_a \sqrt{m_a} - Z_p \sqrt{m_p} \right) \right] e^{-169}; \quad T_p \approx 9 \cdot 10^{-57} \text{ с.}$$

В силу столь малых времен естественная протонная радиоактивность не наблюдается. Она обнаруживается экспериментально лишь в том случае, когда ей предшествует более медленный β -распад.

$$7.27^*: T_2 \sim 10^{12} \text{ лет.}$$

Решение. При выполнении условия $U \gg \mathcal{E}$ и $Z \gg 2$ проницаемость барьера (см. задачу 3.36)

$$D \approx \exp \left(-\frac{4\sqrt{2m}Z_aZe^2}{\hbar\sqrt{\mathcal{E}}} \right),$$

тогда $\frac{T_1}{T_2} = \exp \left[-\frac{4\sqrt{2m}Z_ae^2}{\hbar} \left(\frac{Z_1}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} - \frac{Z_2}{\sqrt{\mathcal{E}_2}} \right) \right] \approx e^{-4,9} = 7 \cdot 10^{-3}$ (здесь $Z_a=2$), откуда $T_2 \sim 10^{12}$ лет.

Заметим, что реальное ядро $^{152}_{65}\text{ Tb}$ имеет период полураспада $1,1 \cdot 10^{14}$ лет при энергии α -частицы $2,14 \text{ МэВ}$.

7.28. $U_0 = \frac{2(Z-2)e^2}{R} = 30,7 \text{ МэВ}; \quad d = \frac{2(Z-2)e^2}{\mathcal{E}} - R = 36 \text{ фм}, \quad \text{где} \quad R = r_0 A^{1/3} \approx 7,9 \text{ фм} — \text{радиус ядра.}$

$$\mathbf{7.29^*} \varphi = \frac{\dot{N}\hbar}{8f} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ рад} = 50 \text{ прад.}$$

Решение. Электроны, вылетающие с поверхности диска, делятся на две равные части. Одна из них поглощается диском, а вторая, вылетающая в телесный угол 2π , покидает диск, унося момент импульса. Электрон, вылетающий с поверхности диска под углом $\pi - \theta$ (рис. 171), уносит момент импульса $\hbar/2$. Проекция этого момента на ось вращения равна $(\hbar/2) \cos \theta$. Поскольку все направления вылета равновероятны, то изменение момента импульса в единицу времени $\frac{dL}{dt} = \frac{\dot{N}}{2} \frac{\hbar}{2} \langle \cos \theta \rangle$, где угловые скобки означают усреднение по телесному углу 2π ,

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \cos \theta \, d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin \theta \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $dL/dt = \dot{N}\hbar/8$. С другой стороны,

$$\frac{dL}{dt} = f\varphi,$$

откуда и следует ответ

$$\varphi = \frac{\dot{N}\hbar}{8f} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ рад.}$$

7.30. $t = 1,57 \cdot 10^{17} \text{ с} \approx 5 \cdot 10^9 \text{ лет}$ (практически равно возрасту Земли), т. е. таких условий на Земле, по-видимому, не существовало.

$$\mathbf{7.31^*} \tau_{\text{дип}} \approx 2 \cdot 10^{-16} \text{ с}, \quad \tau_{\text{квад}} \approx 5 \cdot 10^{-13} \text{ с.}$$

Решение. Число γ -квантов, излучаемых в единицу времени,

$$\frac{W}{\hbar\omega} = \frac{1}{\tau},$$

где τ — время жизни возбужденного уровня относительно излучения.

Дипольный момент $d = eR \sin \omega t$, где R — радиус ядра. Поэтому $\ddot{d} \approx eR\omega^2$ с точностью до коэффициента порядка единицы. Классическое выражение (данное в условии) для энергии дипольного излучения в единицу времени можно привести к виду

$$W \approx \frac{2}{3c^3} e^2 R^2 \omega^4.$$

Таким образом, для дипольного излучения время жизни возбужденного уровня

$$\tau_{\text{дип}} = \frac{\hbar\omega}{W} \approx \frac{3\hbar c^3}{2e^2 R^2 \omega^3}.$$

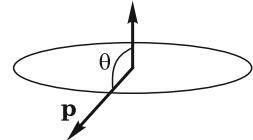


Рис. 171

Если ввести $\tilde{\lambda} = \frac{c}{\omega} \approx \frac{200}{\mathcal{E}[\text{МэВ}]} [\text{фм}]$ — приведенную длину волны γ -кванта с энергией \mathcal{E} в МэВ, то искомое время жизни

$$\tau_{\text{дип}} \approx \frac{\hbar c}{e^2 \omega} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{R} \right)^2 \approx \frac{8 \cdot 10^{-20}}{\mathcal{E}} \left(\frac{200}{\mathcal{E} R} \right)^2 [\text{с}].$$

При $\mathcal{E} = 1 \text{ МэВ}$ и $R = 4 \text{ фм}$ (условие задачи) формула дает $\tau = 2 \cdot 10^{-16} \text{ с}$.

Для мультипольных (в частности, квадрупольных) переходов оценочная формула будет примерно такой же. Изменится только степень размера ядра (размера системы). Из электродинамики известно, что при разложении электрического поля в ряд по мультипольям параметром разложения является отношение размеров системы к расстоянию до точки наблюдения (безразмерная величина). Если в дипольный момент входит R в первой степени (т. е. $d \sim eR$), то в квадрупольный момент входит R^2 , а если порядка m , — то R^m . Таким образом, время жизни относительно излучения γ -квантов с моментом m можно оценить как

$$\tau_m \approx \frac{8 \cdot 10^{-20}}{\mathcal{E}} \left(\frac{200}{\mathcal{E} R} \right)^{2m}.$$

Так, для $m = 2$ (квадруполь) $R = 4 \text{ фм}$, $\mathcal{E} = 11 \text{ МэВ}$, $\tau_{\text{квад}} \approx 5 \cdot 10^{-13} \text{ с}$.

$$7.32. t = -\frac{T_{1/2} \ln 0,1}{\ln 2} \approx 1,9 \cdot 10^4 \text{ лет.}$$

$$7.33. t_{\min} = \frac{0,01 T_{1/2}}{\ln 2} \approx 80 \text{ лет.}$$

Указание. Минимальный возраст, который можно определить, ограничивается статистикой отсчетов.

$$7.34. \beta^2 = \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{\left(\frac{\Delta \mathcal{E} a}{ch} \right)^2}{1 + \left(\frac{\Delta \mathcal{E} a}{ch} \right)^2}, \text{ где } \Delta \mathcal{E} = 110 \text{ кэВ; } \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{\Delta \mathcal{E} a}{ch} \approx 28,5; \\ \mathcal{E} = \gamma M_0 c^2 \approx 510 \text{ ГэВ.}$$

Указание. Для возбуждения уровня в системе покоя ядра нужна частота, определяемая из условия $h\nu = \Delta \mathcal{E}$. Частота возбуждения есть $\nu' = \frac{v}{a} =$

$$= \frac{v}{a \sqrt{1 - v^2/c^2}}, \text{ поскольку эффективный размер решетки сокращается в направлении движения ядра.}$$

$$7.35^*: \mu \approx 0,64 \mu_{\text{яд.}}$$

Решение. Векторная модель сложения угловых моментов ядра ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$) и его магнитных моментов ($\mu_{\text{сум}} = \mu_L + \mu_S$) в самом общем виде изображена на рис. 172, на котором векторы моментов импульса должны быть отложены в единицах \hbar , а векторы магнитных моментов — в ядерных магнетонах Бора. Но в силу того, что для протона $g_{lp} = 1$, для нейтрона $g_{ln} = 0$ (в силу его электрической нейтральности), а спиновые g -факторы, соответственно, $g_{sp} = 5,58$ и $g_{sn} = -3,82$; рис. 172 не отражает (в смысле масштабов) условие задачи, а лишь помогает понять правило сложения моментов. Средний магнитный момент ядра может быть направлен только вдоль \mathbf{J} , единственного

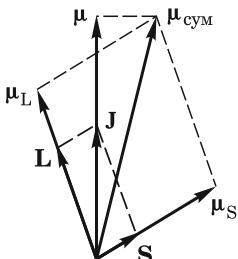


Рис. 172

$= 5,58$ и $g_{sn} = -3,82$; рис. 172 не отражает (в смысле масштабов) условие задачи, а лишь помогает понять правило сложения моментов. Средний магнитный момент ядра может быть направлен только вдоль \mathbf{J} , единственного

сохраняющегося вектора в системе, $\langle \mu_{\text{сум}} \rangle = \mu = g_J \mu_{\text{яд}} \mathbf{J}$. Умножим это равенство скалярно на \mathbf{J} и усредним по всем возможными проекциям векторов \mathbf{J} , \mathbf{L} и \mathbf{S} , т. е. по состоянию с заданными J , L , S . Тогда в силу того, что \mathbf{J} — сохраняющийся вектор, его можно внести под знак усреднения, и мы получаем

$$\langle \mu_{\text{сум}} \mathbf{J} \rangle = g_J \mu_{\text{яд}} \langle \mathbf{J}^2 \rangle.$$

Поскольку $\mu_L = g_L \mu_{\text{яд}} \mathbf{L}$ и $\mu_S = g_S \mu_{\text{яд}} \mathbf{S}$, то $g_S \langle \mathbf{S} \mathbf{J} \rangle + g_L \langle \mathbf{L} \mathbf{J} \rangle = g_J \langle \mathbf{J}^2 \rangle$. Используя теорему косинусов, получим

$$\frac{g_S \langle \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 - \mathbf{L}^2 \rangle}{2} + \frac{g_L \langle \mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2 \rangle}{2} = g_J \langle \mathbf{J}^2 \rangle.$$

В квантовой физике справедливы соотношения

$$\langle \mathbf{J}^2 \rangle = J(J+1); \quad \langle \mathbf{S}^2 \rangle = S(S+1); \quad \langle \mathbf{L}^2 \rangle = L(L+1).$$

Используя их, получим

$$g_J = \frac{g_S + g_L}{2} + \frac{g_S - g_L}{2} \frac{S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)}.$$

В нашем случае магнитный момент ядра определяется состоянием нейтрона, находящегося на уровне $1p_{1/2}$, т. е. для нейтрона $g_L = g_{ln} = 0$, $g_S = g_{sn} = -3,82$, $S = 1/2$; $L = 1$; $J = 1/2$. Подставляя эти данные, получим $g_J = 1,91 \cdot \frac{2}{3} \approx 1,273$; $\mu = g_J \mu_{\text{яд}} J \approx 0,64 \mu_{\text{яд}}$.

7.36. $\mu \approx -0,26 \mu_{\text{яд}}$.

$$7.37^*: \frac{\Delta \mathcal{E}_{\text{ct}}^H}{\Delta \mathcal{E}_{\text{ct}}^D} = \frac{4}{3} \frac{g_{sp}}{g_{sp} + g_{sn}} = 4,23.$$

Решение. В основном состоянии $\mathbf{L} = 0$, и магнитный момент имеет чисто спиновую природу. Спин водородного ядра $S_H = 1/2$, а у дейтерона $S_D = 1$. Магнитный момент электрона $\mu_e = g_s \mu_B \mathbf{S}_e = 2 \mu_B \mathbf{S}_e$, а ядра $\mu_{\text{яд}} = g \mu_{\text{яд}} \mathbf{S}_{\text{яд}}$. По определению для дейтерия

$$\mu_{\text{яд}} = (g_{sp} s_p + g_{sn} s_n) \mu_{\text{яд}} = g \mu_{\text{яд}} \mathbf{S}_D,$$

откуда

$$g = \frac{g_{sp} + g_{sn}}{2}.$$

Для водорода, естественно, $\mu_{\text{яд}} = g_{sp} \mu_{\text{яд}} \mathbf{S}_p$. Полный момент атома $\mathbf{F} = \mathbf{S}_e + \mathbf{S}_{\text{яд}}$, а величина сверхтонкого расщепления

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ct}} \langle U_{\text{ct}} \rangle &= A \cdot 2g \langle \mathbf{S}_e \mathbf{S}_{\text{яд}} \rangle \mu_B \mu_{\text{яд}} = Ag \left(F^2 - S_e^2 - S_{\text{яд}}^2 \right) \mu_B \mu_{\text{яд}} = \\ &= Ag [F(F+1) - S_e(S_e+1) - S_{\text{яд}}(S_{\text{яд}}+1)] \mu_B \mu_{\text{яд}}. \end{aligned}$$

Для атома водорода $S_{\text{яд}} = 1/2$, $S_e = 1/2$, поэтому возможные значения $F = 1$ или 0. Для дейтерия, соответственно, $S_{\text{яд}} = 1$, $S_e = 1/2$, а $F = 3/2$ или $1/2$. Поэтому величина сверхтонкого расщепления для водорода

$$\Delta \mathcal{E}_{\text{ct}}^H = Ag_{sp} (1 \cdot 2 - 0) \mu_{\text{яд}} \mu_B = 2Ag_{sp} \mu_{\text{яд}} \mu_B,$$

а для дейтерия

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{ст}}^{\text{D}} = Ag\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right)\mu_{\text{яд}}\mu_{\text{Б}} = 3Ag\mu_{\text{яд}}\mu_{\text{Б}}.$$

Таким образом, $\frac{\Delta\mathcal{E}_{\text{ст}}^{\text{H}}}{\Delta\mathcal{E}_{\text{ст}}^{\text{D}}} = \frac{2g_{sp}}{3g} = \frac{4}{3} \frac{g_{sp}}{g_{sp} + g_{sn}} = 4,23$.

$$7.38^*: \langle \mu_{\text{ат}}(F=2) \rangle = \frac{\mu_{\text{Б}}}{3}; \langle \mu_{\text{ат}}(F=1) \rangle = -\frac{\mu_{\text{Б}}}{6}.$$

Решение. Магнитный момент атома $\mu_{\text{ат}}$ складывается из магнитных моментов электронной оболочки и ядра $\mu_{\text{ат}} = \mu_{\text{e}} + \mu_{\text{я}} \approx \mu_{\text{e}}$, так как $|\mu_{\text{e}}| \gg |\mu_{\text{я}}|$. В состоянии с заданным \mathbf{J} средний магнитный момент электрона должен быть направлен вдоль \mathbf{J} :

$$\langle \mu_{\text{e}} \rangle = g_{\text{J}}\mu_{\text{Б}}\mathbf{J}, \quad \text{где } g_{\text{J}} = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}.$$

В нашем случае $g_{\text{J}} = 2/3$. При наличии взаимодействия ядра с электронами сохраняющимся вектором является $\mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{I}$, и средний магнитный момент атома $\langle \mu_{\text{ат}} \rangle$ должен быть направлен по \mathbf{F} , т. е. $\langle \mu_{\text{ат}} \rangle = g_{\text{F}}\mu_{\text{Б}}\mathbf{F}$. Умножая обе части скалярно на \mathbf{F} и внося вектор \mathbf{F} под знак усреднения, получим $g_{\text{F}}\mu_{\text{Б}}\langle \mathbf{FF} \rangle = g_{\text{J}}\langle \mathbf{JF} \rangle\mu_{\text{Б}}$, или

$$g_{\text{F}}\mu\langle \mathbf{F}^2 \rangle = \mu_{\text{Б}}g_{\text{J}} \frac{1}{2}\langle \mathbf{F}^2 + \mathbf{J}^2 - \mathbf{I}^2 \rangle.$$

$$\text{Отсюда } g_{\text{F}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} \right) g_{\text{J}}.$$

Поскольку $I = 3/2$, $J = 1/2$, то или $F = 2$ и $g_{\text{F}} = +1/6$, или $F = 1$ и $g_{\text{F}} = -1/6$. Следовательно,

$$\langle \mu_{\text{ат}}(F=2) \rangle = \frac{1}{6}\mu_{\text{Б}} \cdot 2 = \frac{\mu_{\text{Б}}}{3}.$$

$$\langle \mu_{\text{ат}}(F=1) \rangle = -\frac{1}{6}\mu_{\text{Б}} \cdot 1 = -\frac{\mu_{\text{Б}}}{6};$$

Примечание. Строго говоря, в векторной модели атома нужно сложить μ_{S} и μ_{L} и спроектировать сумму на направление \mathbf{F} . Мы же сначала проектируем эту сумму на направление \mathbf{J} , а затем получившийся вектор — на направление \mathbf{F} . Возможность такого подхода для вычисления $\mu_{\text{ат}}$ связана с малостью энергии сверхтонкого взаимодействия по сравнению с энергией спин-орбитального взаимодействия. Частота прецессии \mathbf{J} вокруг \mathbf{F} много

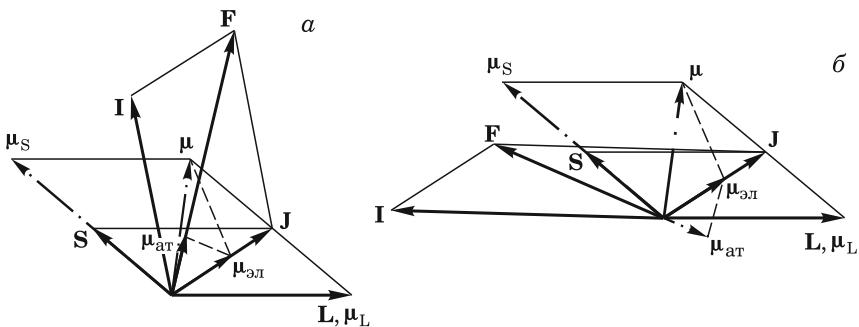


Рис. 173

меньше частоты прецессии **L** и **S** вокруг **J** (см. рис. 173 a и b). Построения на рис. 173, строго говоря, выполнены для $g_l = 1$ и $g_s = 2$. Правильнее было бы использовать $g_l = -1$ и $g_s = -2$. Это значит, что $g_J \rightarrow -g_J = -2/3$, и знаки ответов изменятся на противоположные.

7.39. При данной температуре $T = 1$ мК заселен только подуровень с $F = 0$. Поэтому возможны три перехода на расщепленный уровень с $F = 1$ с частотами $f = f_0 - \Delta f = 1447$ МГц; $f = f_0 = 1517$ МГц и $f = f_0 + \Delta f = 1587$ МГц, где $\Delta f = \mu_B B_0 / h = 70$ МГц.

7.40. При данной температуре $T = 1$ мК заполнен самый нижний уровень: $m_j = -1/2$, $m_I = 1/2$. Возможны переходы на: $(-1/2, -1/2)$; $(+1/2, -1/2)$; $(+1/2, +1/2)$, частоты которых 901,4 МГц; 126,2 ГГц; 126,8 ГГц. Второй переход с одновременным переворотом электронного и ядерного спинов маловероятен по сравнению с первым и третьим переходами. Кроме того, заметим, что для наблюдения второго перехода переменное поле должно быть параллельным постоянному, а для двух других — перпендикулярным.

7.41* Решение. При испускании γ -кванта должны выполняться законы сохранения энергии и импульса:

$$\mathcal{E} = \hbar\omega + R,$$

$$\frac{\hbar\omega}{c} = p_R = \frac{1}{c} \sqrt{R(2Mc^2 + R)},$$

где p_R — импульс ядра после испускания γ -кванта. Решая эти уравнения, получим

$$R = \frac{\mathcal{E}^2}{2(Mc^2 + \mathcal{E})} \approx \frac{\mathcal{E}^2}{2Mc^2} = 0,0468 \text{ эВ},$$

$$\hbar\omega = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}^2}{2Mc^2} \approx \mathcal{E} = 129 \text{ кэВ.}$$

7.42. Условие резонансного поглощения принимает вид $T_{\text{эфф}} \gtrsim \frac{R}{4k_B}$. Поскольку $R = \frac{\mathcal{E}_{\gamma}^2}{2Mc^2} = \frac{\mathcal{E}_{\gamma}^2 N_A}{2Ac^2}$, то $T_{\text{эфф}} \gtrsim \frac{\mathcal{E}_{\gamma}^2 N_A}{8k_B Ac^2} \approx 135$ К.

7.43. При излучении γ -кванта энергия отдачи R воспринимается всем кристаллом, и поэтому $\Delta\mathcal{E} = R = \frac{\mathcal{E}_{\gamma}^2}{2Mc^2} = 1,5 \cdot 10^{-25}$ эВ.

7.44. Смещение частот $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{R^2\Omega^2}{2c^2}$. Если $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-13}$, то $\Omega = 74$ рад/с.

7.45. $v = \frac{\mathcal{E}}{2mc} \approx 10^4$ см/с.

7.46. $h = \frac{\Gamma c^2}{100\mathcal{E}_{\gamma} g} \approx 28$ м, где g — ускорение свободного падения.

7.47* Решение. Из-за различия эффективных температур излучателя и поглотителя частоты излученного и поглощенного γ -квантов будут смещены на величину порядка $\Delta\nu \approx \nu \frac{k_B \delta T_{\text{эфф}}}{Mc^2} = \nu \frac{R \delta T_{\text{эфф}}}{Ac^2}$, где R — универсальная газовая постоянная, A — атомная масса железа. Именно это смещение должно быть меньше гравитационного $\Delta\nu = \nu \frac{gh}{c^2}$ (см. задачу 1.4). Разность тем-

ператур эквивалентна высоте $\delta h = \frac{R \delta T_{\text{эфф}}}{Ag} \approx 15$ м, что сравнимо с высотой башни в эксперименте Паунда и Ребки. Таким образом, для того, чтобы при помощи эффекта Мессбауэра можно было наблюдать гравитационное смещение частоты γ -квантов, температуры излучателя и поглотителя должны быть одинаковыми с высокой степенью точности.

$$7.48. H = \frac{10hc^2}{g\tau\mathcal{E}} \approx 400 \text{ м.}$$

$$7.49. m = \frac{\mathcal{E}^2 \tau}{\hbar c^2} \approx 5,3 \cdot 10^{-13} \text{ г; } b = \left(\frac{3m}{4\pi\rho} \right)^{1/3} \approx 0,25 \text{ мкм.}$$

$$7.50^*. \mathcal{E}_v = \frac{\Delta\mathcal{E}mc^2}{2\mathcal{E}_\gamma} \approx 960 \text{ кэВ.}$$

Решение. Естественная ширина возбужденного состояния, равная $\delta\mathcal{E} = \hbar/\tau = 1,5 \cdot 10^{-2}$ эВ, слишком мала и не может объяснить наблюдаемое уширение. Оно возникает из-за доплеровского сдвига, связанного с отдачей ядра при испускании нейтрино. Согласно закону сохранения импульса $p_{\text{яд}} = -\mathcal{E}_v/c$, а доплеровский сдвиг равен

$$\delta(\mathcal{E}_{\text{доп}}) = h\nu \frac{v}{c} = \frac{\mathcal{E}_v \mathcal{E}_v}{mc^2} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{2},$$

откуда следует

$$\mathcal{E}_v = \frac{\Delta\mathcal{E}mc^2}{2\mathcal{E}_\gamma} \approx 960 \text{ кэВ.}$$

$$7.51^*. \tau \approx \frac{\hbar}{(\Delta\mathcal{E} - 2\delta\mathcal{E}_{\text{доп}})} \approx 10^{-17} \text{ с, где } \delta\mathcal{E}_{\text{доп}} \approx 160 \text{ эВ.}$$

Указание. При испускании γ -кванта с энергией 5 МэВ ядро испытывает отдачу, и поэтому линия излучения с энергией 1,5 МэВ оказывается уширенной на $2\delta\mathcal{E}_{\text{доп}}$.

7.52. При переходах излучаются магнитно-дипольные ($M1$) γ -кванты с моментом и четностью 1^+ (см. также задачу 7.57). Рассматривая крайние компоненты расщепления ($\Delta v = 10,5$ мм/с), соответствующие изменению спина ядра $-3/2 \rightarrow -1/2$ и $+3/2 \rightarrow +1/2$, получим

$$B = \frac{\mathcal{E}_0 \Delta v}{c \mu_{\text{яд}} (g_{1/2} + 3g_{3/2})} \approx 330 \text{ кГс.}$$

$$7.53^*. \mathcal{E}_0 = -8,4 \text{ МэВ.}$$

Решение. Предположим, что ядро — равномерно заряженный шар радиусом R (см. решение задачи 4.41 и рис. 149 к ней). Мион является лептоном, поэтому он может взаимодействовать с ядром только за счет электромагнитных сил. Тогда потенциальная энергия мюона внутри ядра

$$U(r < R) = -\frac{3}{2} \frac{Ze^2}{R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right) = -U_0 + \frac{Ze^2}{2R^3} r^2, \quad \text{где } U_0 = \frac{3Ze^2}{2R}.$$

Видно, что это потенциал трехмерного изотропного гармонического осциллятора

$$U(r) = -U_0 + \frac{m_\mu \omega^2 r^2}{2},$$

где $\frac{m_\mu \omega^2}{2} = \frac{Ze^2}{2R}$, откуда следует, что $\omega^2 = \frac{Ze^2}{m_\mu R^3}$.

Подсчет дает $U_0 = \frac{3Ze^2}{2R} = 23$ МэВ; энергия основного состояния $\mathcal{E}_0 = -U_0 + \frac{3}{2}\hbar\omega$; $\hbar\omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 Ze^2}{m_\mu R^3}} = 9,73$ МэВ. Окончательно $\mathcal{E}_0 = -8,4$ МэВ.

7.54. Для оценки области локализации можно принять, что она совпадает с амплитудой колебаний трехмерного гармонического осциллятора в основном состоянии. В квантовой механике вместо амплитуды колебаний принято использовать среднеквадратичное смещение $\langle r^2 \rangle$. Определим его из теоремы вириала: $2 \frac{m_\mu \omega^2 \langle r^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} \hbar\omega$,

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3\hbar}{2m_\mu} \sqrt{\frac{m_\mu R^3}{Ze^2}}} = 6 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

что чуть меньше радиуса ядра свинца $R_{\text{ Pb}} = 7,7 \cdot 10^{-13}$ см.

7.55. $M = 5N(t)m_a \approx 3,2 \cdot 10^{-6}$ г, где число расщепившихся ядер $N(t) \approx N_0 \frac{t \ln 2}{T_{1/2}} = 0,975 \cdot 10^{17}$.

7.56. $M \approx 300$ т.

7.57* $I_{\text{кон}} = 1/2$; $2s_{1/2}$ -состояние.

Решение. Уравнение Шредингера для трехмерного изотропного гармонического осциллятора допускает разделение переменных как в прямоугольной, так и в сферической системе координат. Это есть следствие случайного вырождения уровней энергии в данном потенциале. В декартовой системе уровни осциллятора характеризуются квантовым числом $N = n_x + n_y + n_z$. В сферической системе можно характеризовать их по моменту l и радиальному квантовому числу n_r . При этом $N = 2n_r + l$, а уровни принято записывать как $(n_r + 1)l$. Таким образом, $N = 0$ соответствует $n_r = l = 0$, т. е. это $1s$ -состояние. $N = 1$ соответствует $n_r = 0$, $l = 1$, и это $1p$ -состояние. $N = 2$ соответствует $n_r = 1$, $l = 0$ и $n_r = 0$, $l = 2$, т. е. это $2s$ - и $1d$ -состояния, которые в данном приближении вырождены. Учет спин-орбитального взаимодействия приводит к расщеплению $1p$ -состояния на $1p_{3/2}$ и $1p_{1/2}$; $1d$ -состояния на $1d_{5/2}$ и $1d_{3/2}$. Как показывает эксперимент, при заданном l ниже по энергии лежит уровень с большим j . Фактически это означает, что в оболочечной модели независимых нуклонов константа спин-орбитального взаимодействия ($\mathcal{E}_{sl} = A \langle \langle \mathbf{sl} \rangle \rangle$) всегда отрицательна.

При поглощении фотона E_1 ($j=1$ — момент импульса фотона) должны выполняться правила отбора

$$|I_{\text{кон}} - I_{\text{нач}}| \leq j \leq I_{\text{кон}} + I_{\text{нач}},$$

где $I_{\text{кон}}$ и $I_{\text{нач}}$ — конечное и начальное значения спина ядра. Ядро $^{13}_6\text{C}$ имеет $2 \cdot 2 = 4$ нуклона на оболочке с $N=0$ и $2 \cdot 4 = 8$ нуклонов на оболочке с $N=1$. Остается один нейтрон из незаполненной подоболочки в состоянии $1p_{1/2}$ (см. указание к задаче). Таким образом,

$$|I_{\text{кон}} - \frac{1}{2}| \leq 1 \leq I_{\text{кон}} + \frac{1}{2}.$$

Кроме того, должен выполняться закон сохранения четности состояний:

$$P_{\text{кон}} \cdot P_{\text{нач}} = P_{\gamma} = \begin{cases} (-1)^J & \text{для } EJ\text{-фотонов;} \\ (-1)^{J+1} & \text{для } MJ\text{-фотонов,} \end{cases}$$

где $P_{\text{кон}}$ и $P_{\text{нач}}$ — четности конечного и начального состояний ядра, P_{γ} — четность испущенного или поглощенного фотона. Для одного нуклона в оболочке с моментом l четность состояния $P_{\text{нач}} = (-1)^l$ ($l=1$ для состояния $1p_{1/2}$). Отсюда следует, что конечная четность должна быть равна $P_{\text{кон}} = +1$.

С другой стороны, $P_{\text{кон}} = (-1)^{l_{\text{кон}}}$, где $l_{\text{кон}}$ — орбитальный момент конечного состояния. Таким образом, получается, что оно четное, а значит, подходят два нуклонных состояния из $N=2$: состояние $2s_{1/2}$ ($l_{\text{кон}}=0$)

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| \leq 1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad 0 \leq 1 \leq 1,$$

а также состояние $1d_{3/2}$ ($l_{\text{кон}}=2$)

$$\left| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right| \leq 1 \leq \frac{3}{2} + \frac{3}{2}, \quad \text{т. е.} \quad 1 \leq 1 \leq 2.$$

Условию задачи удовлетворяет состояние с наименьшей энергией $2s_{1/2}$, спин ядра $I_{\text{кон}} = 1/2$.

7.58. $I_{\text{кон}} = \frac{3}{2}$; $1d_{3/2}$ -состояние.

$$\mathbf{7.59.} \ k = \frac{M_{\tau}}{M_{\pi\pi}} = \left(\frac{\sqrt{2m_a \mathcal{E}_a} N_A \ln 2}{4g T_{1/2} A} - 1 \right)^{-1} \approx 0,52.$$

$$\mathbf{7.60*} \ \mu_d^{(1)} = \frac{\mu_{\text{яд}}}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{5,58 - 3,82}{2} \right) = 0,31 \mu_{\text{яд}} \text{ — для случая } ls\text{-связи; } \mu_d^{(2)} = \frac{\mu_{\text{яд}}}{2} \left(\frac{4}{3} - \frac{5,58 - 3,82}{3} \right) = 0,37 \mu_{\text{яд}} \text{ — для случая } jj\text{-связи.}$$

Решение. Нецентральность ядерных сил ведет к несохранению момента импульса, поэтому основное состояние не есть чистое s -состояние ($L=0$), а содержит также примесь состояния с $L=2$ (D -состояние). Наличие только четных моментов — следствие закона сохранения четности. Что же касается полного момента \mathbf{J} , то он всегда является интегралом движения. Поэтому $J=1$ в обоих случаях. Параллельность спинов (при этом $S=1$, $2S+1=3$) — экспериментальный факт, и с $S=0$ связанного состояния нет.

Заметим, что при реализации ls -связи полный момент $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, где $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i$; $\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{s}_i$. При реализации jj -связи $\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{j}_i$, где $\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{s}_i$.

Для дейтрана в состоянии 3D_1 : $L=2$; $S=1$; g -факторы протона и нейтрона: $g_{lp}=1$; $g_{ln}=0$ (поскольку заряд равен нулю); $g_{sp}=5,58$; $g_{sn}=-3,82$. Если \mathbf{L} — орбитальный момент дейтрана, а \mathbf{S} — спиновый, то в силу зарядовой независимости p и n для ядерных сил $\mathbf{l}_p = \mathbf{l}_n = \mathbf{L}/2$; $\mathbf{s}_p = \mathbf{s}_n = \mathbf{S}/2$. Таким образом, можно записать:

$$\mu_d = (g_{lp}\mathbf{l}_p + g_{sp}\mathbf{s}_p + g_{sn}\mathbf{s}_n)\mu_{\text{яд}} = \left(\frac{\mathbf{L}}{2} + (g_{sp} + g_{sn})\frac{\mathbf{S}}{2} \right) \mu_{\text{яд}}.$$

Поскольку средний магнитный момент дейтрона может быть направлен только вдоль вектора \mathbf{J} , то можно записать $\langle \boldsymbol{\mu}_d \rangle = g \boldsymbol{\mu}_{яд} \mathbf{J}$. Умножая это выражение скалярно на \mathbf{J} , получаем

$$g = \frac{1}{2J^2} (\langle \mathbf{LJ} \rangle + (g_{sp} + g_{sn}) \langle \mathbf{SJ} \rangle).$$

Используя теорему косинусов и заменяя квадраты модулей классических векторов их квантовыми значениями ($J^2 \rightarrow J(J+1)$), получим усреднение:

$$\begin{aligned} g = \frac{1}{2J(J+1)} \frac{1}{2} & [(J(J+1) + L(L+1) - S(S+1)) + \\ & + (g_{sp} + g_{sn})(J(J+1) + S(S+1) - L(L+1))] \end{aligned}$$

Подставляя числа, получаем

$$g = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} [(2+6-2) + (5,58-3,82)(2+2-6)] = 0,31.$$

Отсюда и следует первый ответ: $\mu_d^{(1)} = 0,31 \mu_{яд}$.

Что же касается магнитного момента дейтрона при реализации jj -связи, то в этом случае подсчет следует осуществлять так:

$$\langle \boldsymbol{\mu}_d \rangle = \langle g_n \boldsymbol{\mu}_{яд} \mathbf{j}_n + g_p \boldsymbol{\mu}_{яд} \mathbf{j}_p \rangle = g \boldsymbol{\mu}_{яд} \mathbf{J}.$$

В силу указанной выше зарядовой независимости р и н для ядерных сил $\mathbf{j}_n = \mathbf{l}_n + \mathbf{s}_n = (\mathbf{L} + \mathbf{S})/2 = \mathbf{J}/2$ и $\mathbf{j}_p = \mathbf{l}_p + \mathbf{s}_p = (\mathbf{L} + \mathbf{S})/2 = \mathbf{J}/2$, откуда $g = \frac{g_n + g_p}{2}$.

Определим g -факторы протона и нейтрона g_p и g_n . Имеем

$$\langle \boldsymbol{\mu}_n \rangle = g_n \boldsymbol{\mu}_{яд} \mathbf{j}_n \quad \text{где} \quad \boldsymbol{\mu}_n = g_{sn} \boldsymbol{\mu}_{яд} \mathbf{s}_n.$$

Умножая оба выражения на \mathbf{j}_n и усредняя при этом скалярное произведение, получим

$$\langle \boldsymbol{\mu}_n \mathbf{j}_n \rangle = g_n \boldsymbol{\mu}_{яд} \langle \mathbf{j}_n^2 \rangle = g_{sn} \boldsymbol{\mu}_{яд} \langle \mathbf{s}_n \mathbf{j}_n \rangle,$$

откуда следует, что

$$g_n = \frac{\langle \mathbf{s}_n \mathbf{j}_n \rangle}{\langle \mathbf{j}_n^2 \rangle} g_{sn} = g_{sn} \frac{s_n(s_n+1) + j_n(j_n+1) - l_n(l_n+1)}{2j_n(j_n+1)} = -\frac{g_{sn}}{3} = \frac{3,82}{3}.$$

Совершенно аналогично определяется и протонный g -фактор:

$$g_p = \frac{\langle \mathbf{l}_p \mathbf{j}_p \rangle}{\langle \mathbf{j}_p^2 \rangle} + g_{sp} \frac{\langle \mathbf{s}_p \mathbf{j}_p \rangle}{\langle \mathbf{j}_p^2 \rangle} = \frac{4}{3} - \frac{5,58}{3}.$$

Подставив результаты для g_n и g_p , получим ответ:

$$g = \frac{g_n + g_p}{2} = 0,37, \quad \text{т. е.} \quad \mu_d^{(2)} = 0,37 \mu_{яд}.$$

Поскольку обе модели дают близкие результаты, то отдать предпочтение какой-то из них на основе экспериментальных данных невозможно (см. задачу 7.61).

7.61. $w=0,035$ (3,5%) (см. также замечание в начале решения задачи 7.60). Если обозначить искомую вероятность как w , то тогда средний магнитный момент дейтрона, измеряемый в опыте, есть

$$\langle \mu \rangle = (1-w) \mu(^3S_1) + w \mu(^3D_1),$$

откуда и следует приведенный ответ.

$$\text{7.62. } \delta \mathcal{E}_{\text{допл}} = \frac{Q \mathcal{E}_\gamma}{Mc^2} = 5,7 \text{ эВ; } \delta \mathcal{E}_{\text{отд}} = \frac{\mathcal{E}_\gamma^2}{2Mc} = 2,5 \text{ эВ; } \delta \mathcal{E}_0 \approx \frac{\hbar}{\tau_1} + \frac{\hbar}{\tau_2} \approx \frac{\hbar}{\tau_1} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ.}$$

7.63. Амплитуда сигнала ЯМР пропорциональна количеству соответствующих ядер. Поэтому первый пик (B_1) соответствует ЯМР на ядрах трития, а второй (B_2) — ЯМР на протонах; $\mu_t = h\nu I / B_1 = 2,97 \mu_{\text{яд}} = 1,5 \cdot 10^{-23} \text{ эрг/с}$, где $I = 1/2$, разница между экспериментальным и теоретическим значениями $\mu_{t\text{эксп}} - \mu_{t\text{теор}} = (2,97 - 2,79) \mu_{\text{яд}} = 0,18 \mu_{\text{яд}}$. Интересно отметить, что в этом эксперименте измерялась не поглощаемая мощность, как сейчас, а ЭДС индукции, наводимая в условиях резонанса ядерными магнитными моментами в измерительной катушке, ось которой была перпендикулярна катушке с обrazцом (так называемый метод ядерной индукции). Эта ЭДС имела знак, и, как указывали авторы, он был одинаков для протонов и тритонов.

7.64. $\Delta \mu_{^3\text{He}} = |\mu_{\text{эксп}} - \mu_{\text{теор}}| = 0,22 \mu_{\text{яд}} = 0,11 \cdot 10^{-23} \text{ эрг/Гс}$, где $\mu_{\text{эксп}} = -2,13 \mu_{\text{яд}}$; $\mu_{\text{теор}} = -1,91 \mu_{\text{яд}}$. Разница объясняется тем, что ядерные силы нецентральны (см. 7.60), и состояние ядра ^3He не есть чистое состояние $^2S_{1/2}$, а содержит примесь других состояний — $^2P_{1/2}$, $^4P_{1/2}$, $^2D_{1/2}$.

7.65. $R_m = \frac{hc}{\mathcal{E} \sin \theta_m}$, $m = 1, 2, 3$; $R_{\text{cp}} = 3,5 \cdot 10^{-13} \text{ см}$, $(r_0)_{\text{cp}} = R_{\text{cp}} / A^{1/3} = 1,02 \cdot 10^{-13} \text{ см}$.

$$\text{7.66. } \mathcal{E}_0 = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}\right) \approx 0,47 mc^2 = 240 \text{ кэВ.}$$

$$\text{7.67. } r_0 = \frac{r_{\text{в}}}{Z} \left(1 - \sqrt{1 - (Z\alpha)^2}\right) \approx 0,55 \frac{r_{\text{в}}}{Z} = 2,6 \cdot 10^{-11} \text{ см.}$$

$$\text{7.68*} T_{1/2}^{\text{U}} / T_{1/2}^{\text{Pu}} = 10^{7,95} = 8,9 \cdot 10^7.$$

Решение. Так как туннелирование является изоэнергетическим процессом, энергия α -частицы на бесконечности равна энергии частицы в потенциальной яме, созданной сильным и кулоновским взаимодействиями. Поскольку массовое число у обоих ядер одинаково, то вклад сильного взаимодействия в потенциальную энергию взаимодействия α -частицы с ядром для двух ядер будет одинаковым. Однаковым — вследствие равенства плотностей вероятности — будет и вклад кинетической энергии. Вся разница будет связана с различным вкладом отталкивателяного кулоновского потенциала — потенциала однородно заряженного шара радиусом R .

Для ядра с зарядом Ze , равномерно распределенным в шаре радиусом R , потенциальная энергия взаимодействия с точечным зарядом e (протон),

находящимся внутри шара на расстоянии r от центра,

$$U(r) = -\frac{3Ze^2}{2R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right).$$

Для α -частицы с точечным зарядом $2Z$ эта энергия вдвое больше. Тогда кулоновский вклад в энергию взаимодействия α -частицы с зарядом Ze дочернего ядра

$$U_{\text{кул}}(Z) = \frac{\int_0^R w \cdot \frac{3}{2} \frac{2Ze^2}{R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) 4\pi r^2 dr}{\int_0^R w \cdot 4\pi r^2 dr} = \frac{12}{5} \frac{Ze^2}{R},$$

где $w = \text{const}$ — плотность вероятности обнаружить α -частицу в произвольной точке ядра. Отсюда

$$\Delta\mathcal{E} = U_{\text{кул}}^{\text{Po}}(Z+2) - U_{\text{кул}}^{\text{U}}(Z) = \frac{24e^2}{5R} = 1,3 \text{ МэВ.}$$

Таким образом, энергия α -частицы ядра урана

$$\mathcal{E}_{\alpha}^{\text{U}}(Z=92) = \mathcal{E}_{\alpha}^{\text{Po}}(Z=94) - \Delta\mathcal{E} = 5,5 - 1,3 = 4,2 \text{ МэВ.}$$

Далее этот результат подставляем в формулу Гейгера–Неттоля и получаем

$$\lg \frac{T_{1/2}^{\text{U}}}{T_{1/2}^{\text{Po}}} = 9,54 \left(\frac{90^{0,6}}{\sqrt{4,2}} - \frac{92^{0,6}}{\sqrt{5,5}} \right) \approx 7,95,$$

откуда $T_{1/2}^{\text{U}}/T_{1/2}^{\text{Po}} = 8,9 \cdot 10^7$. Экспериментальное значение — $5,1 \cdot 10^8$.

$$\mathbf{7.69^*:} T_{1/2}^{\text{Th}} \simeq 15\,900 \text{ с} = 265 \text{ мин.}$$

Решение. По заданному периоду полураспада находим энергию α -частицы при распаде ядра радия:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\alpha}^{\text{Ra}} &= \left[9,54 Z^{0,6} (\lg T_{1/2}^{\text{Ra}} + 51,37) \right]^2 = \\ &= 9,54 \cdot 86^{0,6} \left[\lg(1600 \cdot 3,156 \cdot 10^7) + 51,37 \right]^2 = 4,95 \text{ МэВ.} \end{aligned}$$

Поскольку дочернее ядро примерно в 60 раз тяжелее α -частицы, то можно считать, что кинетическая энергия α -частицы равна дефекту масс реакции. Выражая дефект масс через энергию связи частиц, для кинетической энергии α -частицы получим

$$\mathcal{E}_{\alpha} = \mathcal{E}_{\text{cb}}(A-4, Z) + E_{\text{cb}}(4, 2) + \mathcal{E}_{\text{cb}}(A-4, Z+2).$$

Так как у ядер радия и тория одинаковые массовые числа, то объемный, поверхностный и учитывающий четность числа нуклонов члены в формуле

Вайцзеккера будут одинаковы для материнских и дочерних ядер этих элементов. Разница в величине кинетической энергии α -частиц будет обусловлена отличием только кулоновских и симметрийных членов для этих ядер:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\alpha^{\text{Th}} - \mathcal{E}_\alpha^{\text{Ra}} = \\ = C_{\text{кул}} [(Z_{\text{Th}}^2 - Z_{\text{Ra}}^2)A^{-1/3} - ((Z_{\text{Th}} - 2)^2 - (Z_{\text{Ra}} - 2)^2)(A - 4)^{-1/3}] + \\ + C_{\text{сим}} [(A - 2Z_{\text{Th}})^2 - (A - 2Z_{\text{Ra}})^2] [A^{-1} - (A - 4)^{-1}] = 1,40 \text{ МэВ}.\end{aligned}$$

Здесь $Z_{\text{Th}} = 90$ и $Z_{\text{Ra}} = 88$ — заряды исходных (материнских) ядер; мы также учли, что разница числа нейтронов и протонов $A - 2Z$ одинакова для материнского и дочернего ядер.

Подставляя значения величин, получаем для энергии α -частицы тория $\mathcal{E}_\alpha^{\text{Th}} = 4,95 + 1,40 = 6,35 \text{ МэВ}$, а затем из формулы Гейгера–Неттоля находим период полураспада ядра тория: $\lg T_{1/2}^{\text{Th}} = \frac{9,54 \cdot 88^{0,6}}{\sqrt{6,35}} - 51,37 \approx 4,2$, или $T_{1/2}^{\text{Th}} \approx 15900 \text{ с} = 265 \text{ мин}$. Экспериментальное значение 30,9 мин.

7.70. $R = \frac{24e^2}{5\Delta\mathcal{E}_\alpha} = 5,1 \cdot 10^{-13} \text{ см}$; по известной формуле для радиуса ядра $R = 1,3 \cdot 10^{-13} \sqrt[3]{232} = 8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$. (См. решение задачи 7.68.)

7.71. Можно. Конечное число ядер в 4,4 раза превышает минимально необходимое число $1,7 \cdot 10^7$ ядер.

7.72. $t = 2,05 \cdot 10^8 \text{ с} = 6,5 \text{ лет}$.

7.73. $t = \frac{N}{n_0 m e^{-\lambda t}} = 3,35 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 1,1 \text{ года}$, где $N = \frac{1}{(\lambda \Delta t)^2} = 6830$ распадов, $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 3,83 \cdot 10^{-12} \text{ с}^{-1}$.

7.74. Искомое время опыта $t = \frac{N}{n_0 m e^{-\lambda t}} = 2,96 \cdot 10^8 \text{ с} \approx 9,4 \text{ лет}$. (См. задачу 7.73.)

7.75. Таким изотопом является $^{109}_{48}\text{Cd}$, испытывающий переход в $^{109}_{47}\text{Ag}$ (характеристическое рентгеновское излучение).

7.76* $Z_{\text{эфф}} = 23$.

Решение. Энергия возбуждения полностью передается конверсионному электрону:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{\text{св}} + \mathcal{E}_k,$$

где $\mathcal{E}_{\text{св}} = Ry \cdot Z_{\text{эфф}}^2 \text{ эВ}$, откуда $Z_{\text{эфф}} = 23$. Заметим, что вылет L -электронов, а также всех других конверсионных электронов с такой энергией невозможен.

7.77. $N = \sigma_{\text{тн}} \Phi_{\text{тн}} \sigma_f \Phi_f N_0 t^2 / 2 = 7,72 \cdot 10^{12}$, где $N_0 = 3 \cdot 10^{23}$ — начальное количество ядер висмута в мишени (0,5 моля).

7.78. $\sigma_{\text{ev}} = \frac{A}{\Phi} \frac{m_N}{ZM} \frac{dN}{dt} = 0,8 \cdot 10^{-45} \text{ см}^2$ — искомое сечение рассеяния нейтрино на электронах, усредненное по энергии; m_N — масса нуклона; M — масса вещества детектора.

7.79* $T = \mathcal{E}_\gamma - \frac{hc}{\lambda_{\text{рп}}} = 679 \text{ кэВ}$.

Решение. Поскольку (0–0)-переход для реальных фотонов запрещен, а ядерного превращения не происходит, то снятие возбуждения ядра про-

исходит за счет виртуального фотона, который затем поглощается одним из электронов оболочки — внутренняя конверсия. Согласно закону сохранения энергии $E_\gamma = \mathcal{E}_n + T + \mathcal{E}_{\text{отд}}$, где \mathcal{E}_n — энергия электрона на n -м уровне, T — кинетическая энергия электрона, $\mathcal{E}_{\text{отд}}$ — энергия отдачи. Минимальная энергия соответствует вылету электрона с K -оболочки. Она как раз и соответствует энергии края поглощения рентгеновских лучей:

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{\text{гр}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{гр}}} = \frac{6,62 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{1,12 \cdot 10^{-8} \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}} = 11 \text{ кэВ.}$$

Поскольку при конверсионном переходе импульс электрона равен импульсу отдачи ядра, то кинетической энергией отдачи ядра можно пренебречь по сравнению с энергией электрона. Таким образом, кинетическая энергия электрона равна $T = E_\gamma - \mathcal{E}_{\text{гр}} = 679$ кэВ.

7.80. $Z_{\text{эфф}} = \sqrt{\frac{\Delta Mc^2 - \mathcal{E}_v}{Ry}} \approx 20,25$, поэтому $\sigma = 2,75$. Полученная величина кажется большой, так как считается, что она должна быть ≈ 1 . Однако у хрома конфигурация $3d^3 4s^2$. Один из $3d$ -электронов не «падает вниз», а «летит вверх». У ванадия $8s$ -электронов и, возможно, они определяют большую константу экранирования.

§ 8. Нейтроны. Ядерные реакции

8.1. По закону сохранения момента импульса $bp = L = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. Минимальное значение $l = 1$, откуда $b_{\min} = \hbar\sqrt{2}/p = \hbar/\sqrt{m\mathcal{E}} = 2 \cdot 10^{-12}$ см.

$$8.2^*: \frac{\sigma_c(p)}{\sigma_c(n)} \approx 0,5.$$

Решение. Рассмотрим сначала случай рассеяния нейтрона на ядре (рис. 174). Возможные значения прицельных расстояний b_l определяются из правила квантования момента импульса $p b_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}$.

Импульс нейтрона $p = \hbar/\lambda$. В квазиклассическом приближении ($l \gg 1$) $b_l \approx l\lambda$. Разобъем пространство, занимаемое падающим пучком нейтронов, на кольцевые зоны, ширина которых равна λ . В каждой из этих зон будут двигаться частицы с определенным значением момента импульса. Число частиц в такой зоне (при условии их равномерного распределения в пространстве) пропорционально площади кольца со средним радиусом b_l :

$$S_l = \frac{1}{2}\pi(b_{l+1}^2 - b_{l-1}^2) = \pi\lambda^2(2l+1).$$

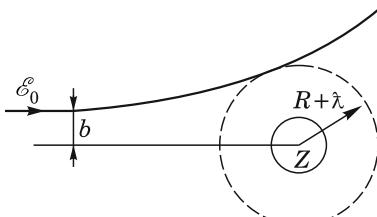


Рис. 174

Полученная величина S_l — это геометрическое сечение, пропорциональное доле всех частиц, имеющих квантовое число l , из всего потока падающих на ядро нейтронов. Умножая S_l на вероятность w_l поглощения частицы ядром, получим парциальное сечение образования составного ядра для частицы с моментом l .

Вероятность поглощения зависит от внутренних свойств ядра и от характеристики сил, действующих на частицу вне ядра. В общем случае она пропорциональна вероятности проникновения через кулоновский и центробежный барьеры. Представим w_l в виде

$$w_l = P_l \zeta_l,$$

где P_l — вероятность проникновения через внешний барьер, ζ_l — вероятность «прилипания» частицы к ядру. Тогда полное сечение поглощения (образования составного ядра), есть

$$\sigma_c(n) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\pi\lambda^2 P_l \zeta_l.$$

Чтобы ядро поглотило частицу, она должна попасть в область действия ядерных сил, т. е. $(b_l)_{\max} \leq R$, откуда $l_{\max} \approx R/\lambda$. Что касается величины ζ_l , то будем считать, что ядро поглощает все падающие на него частицы (модель «абсолютно черного ядра»). Тогда $\zeta_l = 1$ при $l \leq R/\lambda$ и

$$\sigma_c(n) = \sum_{l=0}^{R/\lambda} (2l+1)\pi\lambda^2 P_l.$$

В области энергий нейтронов порядка нескольких МэВ и выше, когда $\lambda \ll R$, можно считать, что $P_l \approx 1$, и тогда

$$\sigma_c(n) = \sum_{l=0}^{R/\lambda} (2l+1)\pi\lambda^2 = \pi(R+\lambda)^2. \quad (*)$$

В случае рассеяния протонов составное ядро образуется лишь тогда, когда энергия протона будет больше кулоновского барьера (туннельным эффектом при данной энергии можно пренебречь). Для вычисления воспользуемся полученным выше результатом (*). Как видно из этой формулы, эффективный размер ядра стал равным $R+\lambda$. Пусть на бесконечности энергия и прицельное расстояние протона равны \mathcal{E}_0 и b . Тогда закон сохранения энергии дает уравнение (в системе центра инерции)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \frac{Ze^2}{R+\lambda}.$$

Соответствующий закон сохранения момента импульса —

$$b\sqrt{2m\mathcal{E}_0} = (R+\lambda)\sqrt{2m\mathcal{E}},$$

откуда сразу следует предельное значение b :

$$b = (R+\lambda)\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}}.$$

Тогда искомое сечение образования составного ядра под действием протонов

$$\sigma_c(p) = \pi b^2 = \pi(R+\lambda)^2 \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \pi(R+\lambda)^2 \left(1 - \frac{Ze^2}{\mathcal{E}_0(R+\lambda)}\right).$$

Отношение сечений

$$\frac{\sigma_c(p)}{\sigma_c(n)} = 1 - \frac{Ze^2}{\mathcal{E}_0(R+\lambda)} \approx \frac{1}{2}.$$

где $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mathcal{E}_0}} = 1,5 \cdot 10^{-13}$ см; $R_{Ca} = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3} = 4,45 \cdot 10^{-13}$ см (величины соизмеримые).

8.3. $\sigma_{\text{полн}} = 2\pi R_U^2 \approx 4,1$ бн. В релятивистском случае дебройлевская длина волн $\lambda = \hbar/p \leq \hbar/(m_nc) = 2 \cdot 10^{-14}$ см, что много меньше $R_U \approx 8 \cdot 10^{-13}$ см. Таким образом, сечение поглощения неупругого рассеяния $\sigma_{\text{погл}} = \pi(R_U + \lambda)^2 \approx \pi R_U^2$, т. е. все частицы с прицельным расстоянием, меньшим R_U , выбывают из пучка и поглощаются. Ядро ведет себя как поглащающий шар (модель «абсолютно черного ядра»). Действительно, длина пробега нуклона $l = \frac{1}{\sigma_{NN} n} = \frac{4\pi r_0^3}{3\sigma_{NN}} \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см $\ll R_U$. Однако из-за дифракции на краю ядра происходит отклонение частиц от первоначального направления — упругое рассеяние. Согласно принципу Бабине для дифракции Фраунгофера количество света, рассеянного на черном теле, равно количеству света, падающего на него и поглощаемого им, $\sigma_{\text{погл}} = \sigma_{\text{диф}}$. Следовательно, $\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{погл}} + \sigma_{\text{диф}} = 2\sigma_{\text{погл}}$ (дифракционное удвоение), поэтому $\sigma_{\text{полн}} = 2\pi R_U^2 \approx 4,1$ бн.

8.4* Вероятность рассеяния с параллельной ориентацией спинов $\frac{I+1}{2I+1} = \frac{5}{8}$, а с антипараллельной $\frac{I}{2I+1} = \frac{3}{8}$.

Решение. Для медленных частиц минимальное прицельное расстояние (см. задачу 8.1) много больше размеров ядра, и поэтому реакция возможна только при $l=0$. Таким образом, полный момент является чисто спиновым, и число спиновых состояний системы из двух частиц есть $(2S+1)(2I+1) = 2(2I+1)$. При этом полный момент (спин) может принимать два значения: $I + \frac{1}{2}$ и $I - \frac{1}{2}$. Первому моменту соответствует $2(I + \frac{1}{2}) + 1 = 2(I+1)$ значений проекции момента, второму $2(I - \frac{1}{2}) + 1 = 2I$.

Вероятность рассеяния пропорциональна относительной доле состояний с заданной проекцией полного момента, так как энергия взаимодействия не зависит от значения проекции.

8.5. $\frac{d\sigma_{\text{лаб}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{цм}}(\theta')}{d\Omega'}$; $\theta' = 2\theta$; $d\sigma_{\text{цм}} = \frac{A}{4} d\Omega'$, т. е. нейтроны в системе центра масс (СЦМ) рассеиваются изотропно. $R \approx \lambda \approx 10^{-13}$ см. Полученные формулы следуют из векторных диаграмм рассеяния в ЛСО и СЦМ.

Приведем для сведения формулу для пересчета дифференциального сечения из лабораторной системы (л) в систему центра масс (цм) в общем виде:

$$\left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right)_L = \left(\frac{d\sigma(\theta')}{d\Omega'} \right)_{\text{цм}} \frac{(m_1^2 + 2m_1 m_2 \cos\theta' + m_2^2)^{3/2}}{m_2^2(m_2 + m_1 \cos\theta')},$$

где штрихом обозначены углы в СЦМ, m_2 — покоящаяся масса, m_1 — движущаяся.

8.6* $w \approx 4 \cdot 10^{-9}$.

Решение. Уменьшение потока нейтронов связано с актами захвата и рассеяния. Так, в слое защиты толщиной dx , находящемся на расстоянии x от места входа нейтронов, их поток уменьшится на величину

$$dj = -j(x) \frac{dx}{\lambda},$$

где $\lambda \approx \frac{1}{n\sigma_{\text{полн}}}$ — длина свободного пробега нейтрона. Полное сечение реакции (как захват, так и упругое рассеяние) $\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{погл}} + \sigma_{\text{расс}} \approx \sigma_{\text{расс}} = \sigma_0$. Таким образом,

$$j(x) = j_0 e^{-n\sigma_0 x},$$

где j_0 — поток нейтронов на входе. Перепишем это выражение в дифференциальной форме:

$$dj = -j_0 n\sigma_0 e^{-n\sigma_0 x} dx.$$

Таким образом, вероятность упругого рассеяния нейтрона в слое толщиной dx на расстоянии x от входа в защиту составляет

$$dw = \left| \frac{dj}{j_0} \right| = n\sigma_0 e^{-n\sigma_0 x} dx.$$

После столкновения нейтроны проходят путь $\frac{l-x}{\langle \cos \theta \rangle}$. Определим среднее значение косинуса угла рассеяния, имея в виду замечание в условии задачи, что в системе центра масс угловое распределение упругого рассеянных нейтронов изотропно. Как показано в предыдущей задаче 8.5, в этом случае в лабораторной системе отсчета $d\sigma(\theta) = A \cos \theta d\Omega$. Таким образом,

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos \theta \cos \theta d\Omega}{\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\Omega} = \frac{\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d(\cos \theta)}{\int_0^{\pi/2} \cos \theta d(\cos \theta)} = \frac{2}{3}.$$

Вероятность выйти из защиты без какого-либо взаимодействия после рассеяния в точке, находящейся на расстоянии x от места входа,

$$dw(x) = n\sigma_0 e^{-n\sigma_0 x} \exp\left(-n\sigma \frac{l-x}{\langle \cos \theta \rangle}\right) dx.$$

Искомая вероятность пройти защиту, испытав лишь одно упругое столкновение,

$$w = \int_0^l n\sigma_0 e^{-n\sigma_0 x} e^{-n\sigma_0 \frac{3}{2}(l-x)} = n\sigma_0 e^{-\frac{3}{2}n\sigma_0 l} \int_0^l e^{\frac{1}{2}n\sigma_0 x} dx \approx 2e^{-20} = 4 \cdot 10^{-9}.$$

8.7. $\frac{j_0 - j_d}{j_0} \approx n\sigma d = 10^{-5}$.

8.8. $\alpha_{\text{расс}} = 0,9$; $\alpha_{\text{погл}} = 0,022$.

8.9. $\frac{j_0}{j} = \exp\left(\frac{d\rho N_A \sigma}{A}\right) \approx 1,35$, где $\sigma = \sigma_{\text{расс}} + \sigma_{\text{погл}} = 1,64$ бн.

8.10. $\tau = \frac{\mu}{2\rho N_A \sigma v} = 2,3 \cdot 10^{-4}$ с. Отметим, что в области действия закона Бете $\sigma = \sigma_{\text{погл}} \propto 1/v$ время жизни нейтрона в среде не зависит от его энергии.

8.11. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left(\frac{\sigma_0 n d}{\ln(j_0/j)} \right)^2 \approx 0,14 \text{ эВ, где } \mathcal{E}_0 = 0,025 \text{ эВ.}$

8.12. $\varepsilon = 1 - \exp \left(-\frac{P_{\text{од}} d}{kT} \right) \approx 96\%.$

8.13* Решение. Энергия связи ядра ${}^3\text{He}$ равна $7,7 \text{ МэВ}$, а ядра ${}^4\text{He}$ — $28,3 \text{ МэВ}$, т. е. реакция в принципе экзотермическая. Однако трехчастичная реакция невозможна, как это имеет место при фотоэффекте на свободном электроне, в силу законов сохранения энергии и импульса

$$\begin{cases} \frac{mv^2}{2} + Q = \frac{MV^2}{2}; \\ mv = MV. \end{cases}$$

Поскольку $M \approx 4m$, то $v = 4V$. Тогда

$$16V^2 + \frac{2Q}{m} = 4V^2, \quad 6V^2 + \frac{Q}{m} = 0.$$

Из последнего равенства видно, что реакция невозможна при $Q > 0$.

8.14. Условие резонанса

$$2R_{\text{я}} = n \frac{\lambda}{2} = \frac{n\pi\hbar}{\sqrt{2m_N(\mathcal{E}_n + U)}}, \quad \mathcal{E}_n > 0$$

(энергия отсчитывается от потолка ямы), откуда $n^2 \cdot 0,864 \text{ МэВ} > U$. Минимальное целое n , которое удовлетворяет этому условию, есть $n = 7$; при этом $\mathcal{E}_n = 2,34 \text{ МэВ}$.

8.15* $L_{\text{эфф}} = \frac{A}{\rho N_A \sqrt{3\sigma_{\text{расс}} \sigma_{\text{погл}}} \approx 44 \text{ см.}}$

Решение. Длина свободного пробега частицы $\lambda = \frac{1}{n\sigma}$. В данном случае существуют два механизма взаимодействия нейтронов с ядрами углерода — рассеяние и поглощение (захват). Следовательно, имеются две длины свободного пробега. Время пробега до захвата $t_{\text{погл}} = \lambda_{\text{погл}} / v$. Искомый эффективный размер области, занимаемой нейtronами, определяется временем $t_{\text{погл}}$:

$$L_{\text{эфф}} = \sqrt{6D t_{\text{погл}}},$$

где коэффициент диффузии D в свою очередь определяется рассеянием нейтронов, т. е. $D = (1/3)\lambda_{\text{расс}} v$. Подстановкой получим

$$L_{\text{эфф}} = \sqrt{2\lambda_{\text{расс}} v \frac{\lambda_{\text{погл}}}{v}} = \sqrt{2\lambda_{\text{погл}} \lambda_{\text{расс}}} = \left(\frac{n^2 \sigma_{\text{погл}} \sigma_{\text{расс}}}{2} \right)^{-1/2}.$$

Плотность атомов углерода $n = \rho N_A / A$. Таким образом,

$$L_{\text{эфф}} = \frac{A\sqrt{2}}{\rho N_A \sqrt{\sigma_{\text{расс}} \sigma_{\text{погл}}}} \approx 107 \text{ см.}$$

8.16. Условие пропускания: $\lambda \geq 2d$, где λ — длина волны де Бройля для бериллия. Отсюда $\mathcal{E}_{\text{гр}} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2md^2} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ эВ.}$

$$8.17. \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_n k T a^2} \right)^2 = 0,16\%.$$

8.18. $\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}_k} = \frac{2kT}{(\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_{Bi})/2} \approx 34$, где $\mathcal{E}_C = \frac{\hbar^2}{2m\lambda_C^2}$; $\mathcal{E}_{Bi} = \frac{\hbar^2}{2m\lambda_{Bi}^2}$, а $\lambda_C \geq 2d_C$ и $\lambda_{Bi} \geq 2d_{Bi}$ (нейтроны с длинами волн от λ_C до λ_{Bi} рассеиваются в висячие и выходят через его поверхность).

$$8.19. v_{kp} = \frac{2\hbar\sqrt{-\pi Nf}}{m_n} \text{ при условии, что } f < 0.$$

$$8.20. \varphi_0 \approx \sqrt{1 - n^2} = \lambda \sqrt{-\frac{Nf}{\pi}}.$$

$$8.21. 1 - n^2 = -\frac{2\pi\hbar\rho N_A f}{m_n \mathcal{E} A} = 1,23 \cdot 10^{-5}, \theta \approx \sqrt{1 - n^2} \approx 12' \text{ (угол скольжения)}.$$

$$8.22. f = -\frac{\pi}{N\lambda^2} = -\frac{m_n^2 v^2 A}{4\pi\hbar^2 \rho N_A} \approx -0,78 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

8.23. Сечение упругого рассеяния нейтронов $\sigma = -\frac{\ln 0,7}{n_M d} = 5,45 \text{ бн}$, где $n_M = \rho N_A / A_{Pb}$ — концентрация ядер мишени. При упругом s -рассеянии $\sigma = 4\pi|f|^2$, откуда $R_y = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} = 6,6 \cdot 10^{-13} \text{ см}$. Доказательство того, что происходит s -рассеяние, т. е. рассеяние с нулевым моментом импульса, основано на подсчете квантового числа l в условии $pR_y = \sqrt{2m_n \mathcal{E}} R_y = \hbar\sqrt{l(l+1)}$, откуда $l \approx 0,4$, т. е. в самом деле преобладает s -рассеяние.

$$8.24. H = \left(\frac{3nh}{4m\sqrt{2g}} \right)^{2/3} \approx 0,034 \text{ мм.}$$

$$8.25. f = -\frac{gH A m_n^2}{2\pi\hbar^2 \rho N_A} \approx -8,4 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

8.26* Решение. Скорость счета, т. е. число нейтронов, попавших в детектор в единицу времени, есть произведение плотности потока нейтронов j на площадь детектора. Поскольку распределение нейтронов в реакторе максвелловское, то

$$dj(v) = v dn(v) = Av \cdot v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv,$$

где A — нормировочная постоянная.

Для ультрахолодных нейтронов $\frac{mv^2}{2k} = T^* = 6 \cdot 10^{-3} \text{ К} \ll T$, поэтому с хорошей точностью экспоненту можно считать равной 1. Тогда $dj(v) = Av^3 dv = A' \mathcal{E} d\mathcal{E}$, где $\mathcal{E} = mv^2/2$. При «падении» нейтронов вниз их скорость увеличивается и может превысить граничное значение v_{rp} , вследствие чего такой нейtron покинет трубу и не попадет в счетчик. Предельная энергия $\mathcal{E}' = \mathcal{E}_{rp} - mgH = \frac{mv_{rp}^2}{2} - mgH$. Суммарная плотность потока нейтронов

$$j = A' \int_0^{\mathcal{E}'} \mathcal{E} d\mathcal{E} = \frac{A'}{2} \mathcal{E}'^2 = \frac{A'}{2} \left(\frac{mv_{rp}^2}{2} - mgH \right)^2.$$

Счет прекратится при $\mathcal{E}' = 0$, откуда предельное значение

$$H = \frac{v_{rp}^2}{2g} = 5 \text{ м.}$$

$$8.27. j \propto \left(\frac{mv_{\text{rp}}^2}{2} - mgH \right)^2; H_{\text{rp}} = \frac{v_{\text{rp}}^2}{2g} = 5 \text{ м.}$$

$$8.28. S = \frac{4V}{v\tau} = 0,8 \text{ мм}^2.$$

$$8.29. \alpha = \sqrt{\frac{6}{\pi}} (\sin j)^3 = 3,4 \cdot 10^{-8}.$$

8.30*. $j \approx 18900$ нейтронов/с.

Решение. Чтобы понять, как ведут себя нейтроны с заданной энергией $E = 10^{-7}$ эВ в меди и алюминии, вычислим длину волн таких нейтронов:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 4,38 \text{ м/с}; \quad \lambda = \frac{h}{mv} = 9,05 \cdot 10^{-6} \text{ см.}$$

Предельные длины волн для нейтронов в меди и алюминии

$$\lambda_{\text{rp}} = \sqrt{\frac{\pi}{N|f|}} = \sqrt{\frac{\pi A}{\rho N_A |f|}} = \begin{cases} 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ см (Cu)}, \\ 12,2 \cdot 10^{-6} \text{ см (Al)}. \end{cases}$$

Таким образом, длина волны нейтронов данной энергии удовлетворяет неравенству

$$\lambda_{\text{rp}}^{\text{Cu}} < \lambda < \lambda_{\text{rp}}^{\text{Al}}.$$

Это означает:

- а) стенки медной сферы для этих нейтронов непроницаемы;
- б) по алюминиевому нейтроноводу пойдут лишь те, что падают на стенку под углом больше критического,

$$\Phi_{\text{kp}} = \arcsin n = \arcsin \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{(\lambda_{\text{rp}}^{\text{Al}})^2}} = 42,1^\circ.$$

Поток нейтронов, падающих на мишень, $\Phi = \langle j_{||} \rangle S$, где $S = \pi r^2$ — площадь детектора, $\langle j_{||} \rangle$ — тангенциальная по отношению к оси нейтроновода компонента плотности потока нейтронов, усредненная по телесному углу Ω (рис. 175), предельное значение которого

$$\Omega' = 2\pi(1 - \cos \theta_{\text{kp}}) = 2\pi \left[1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{kp}} \right) \right].$$

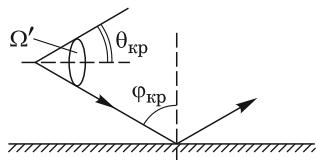


Рис. 175

Итак,

$$\begin{aligned} \langle j_{||} \rangle &= n_0 v \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{n_0 v}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2-\varphi_{\text{kp}}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= \frac{n_0 v}{4} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_{\text{kp}} \right) = \frac{n_0 v}{4} \cos^2 \varphi_{\text{kp}}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомый поток нейтронов на мишени

$$\Phi = S \frac{n_0 v}{4} \cos^2 \varphi_{\text{kp}} = \frac{\pi r^2}{4} n_0 \sqrt{\frac{2E}{m}} \cos^2 \varphi_{\text{kp}} \approx 18900 \text{ нейтронов/с.}$$

8.31. $\alpha = \frac{\lambda^2 |f| \rho N_A R}{2\pi A b} \approx 0,076$. Как видно из рис. 176, по нейтроноводу пройдут лишь те нейтроны, которые падают на его поверхность под углом $\theta \leq \theta_{kp}$.

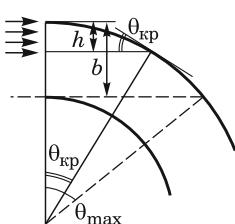


Рис. 176

Относительное их число α , очевидно, равно отношению h/b . Кроме того, приведем очевидные соотношения (i — угол падения):

$$\sin^2 i = \cos^2 \theta_{kp} = n^2; \quad 1 - \sin^2 \theta_{kp} = 1 - \frac{\lambda^2 N |f|}{\pi}.$$

$$8.32. R \approx \frac{4dm\mathcal{E}\lambda_0^2}{h^2\theta_{kp}^2} \approx 75 \text{ м.}$$

8.33. Отличие показателя преломления от 1 есть

$$1 - n = \frac{N_A \rho a \lambda^2}{2\pi A} = 4,74 \cdot 10^{-6}.$$

Тогда фокусное расстояние одного отверстия $F_1 = \frac{R}{2(1-n)} \approx 10,5 \text{ м}$, фокусное расстояние системы из 10 отверстий $F \approx 1 \text{ м}$.

8.34.* При облучении до насыщения число распадающихся в 1 с атомов йода (т. е. активность препарата) равно числу атомов, образующихся ежесекундно, т. е. $dn/dt = A = 10^7$ расп/с. Число атомов йода при активации до насыщения равно

$$N_{\text{нac}} = \frac{A}{\lambda} = 10^7 \frac{T}{\ln 2} = 2,16 \cdot 10^{10} \text{ атомов.}$$

Число атомов йода через время t после облучения

$$N = N_{\text{нac}} (1 - e^{-\lambda t}),$$

или при малых t ($t \ll T$)

$$N = N_{\text{нac}} \lambda t = \dot{n} t.$$

При $t = 1 \text{ мин}$

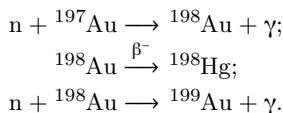
$$N = At = 10^7 \cdot 60 = 6 \cdot 10^8 \text{ атомов.}$$

При $t = 25 \text{ мин}$

$$N = N_{\text{нac}} (1 - e^{-\lambda t}) = 1,08 \cdot 10^{10} \text{ атомов.}$$

$$8.35.* \frac{N^*(10T_{1/2})}{N(10T_{1/2})} \approx \frac{\lambda}{\lambda + j\sigma_2} = 0,53.$$

Решение. Пусть N_0 — исходное число ядер ^{197}Au , N^* — число ядер ^{198}Au . На изотопах золота идут следующие реакции:



Уравнение баланса для ядер ^{198}Au имеет вид

$$\frac{dN^*}{dt} \approx \sigma_1 j N_0 - \lambda N^* - \sigma_2 j N^*. \quad (*)$$

Обратим внимание на то, что в правой части в первом члене $\sigma_1 j N_0$ вместо текущего числа ядер ^{197}Au поставлено их исходное число N_0 (этим и обусловлен значок приближенного равенства). Простая оценка показывает, что за $t = 27$ суток ($t = 10T_{1/2}$) исчезнет всего

$$j\sigma_1 10T_{1/2} \approx 2 \cdot 10^{-3} = 0,2\% \text{ ядер } ^{197}\text{Au},$$

что и обуславливает справедливость сделанного приближения.

Вычислим постоянную β^- -распада ядер ^{198}Au :

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 2,97 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1},$$

а также второй коэффициент при N^* в уравнении (*)

$$\sigma_2 j = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}.$$

Решение дифференциального уравнения (*) имеет вид

$$N^*(t) = \frac{j\sigma_1 N_0}{\lambda + j\sigma_2} \left(1 - \exp[-(\lambda + j\sigma_2)t] \right).$$

Вычислим показатель экспоненты:

$$(\lambda + j\sigma_2) 10T_{1/2} \approx 13.$$

Таким образом, $1 - e^{-13} \approx 1$. Отсюда следует, что

$$N^*(t) \approx \frac{j\sigma_1 N_0}{\lambda + j\sigma_2}.$$

Если бы за счет радиационного захвата нейтронов не «выгорали» ядра ^{198}Au , то

$$N(t) = \frac{j\sigma_1 N_0}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \approx \frac{j\sigma_1 N_0}{\lambda}.$$

Искомое уменьшение числа образующихся ядер ^{198}Hg равно

$$\frac{N^*(10T_{1/2})}{N(10T_{1/2})} \approx \frac{\lambda}{\lambda + j\sigma_2} = 0,53.$$

8.36. $N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}) (1 - e^{-\lambda T}) = 1,4 \cdot 10^{14}$ ядер, где $T = 24$ ч; $t = 8$ ч (рис. 177).

При непрерывном облучении $N = N_0 (1 - e^{-\lambda t^*})$, откуда $t^* = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N_0 - N} = 14,5$ ч; $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$; $N_0 = \frac{m}{A} N_A$.

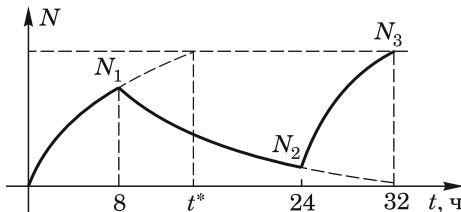


Рис. 177

8.37. $\frac{N_1}{N_1^{\max}} = (1 - e^{-\lambda t_1})(1 - e^{-\lambda t_3}) = 0,55$, где $N_1^{\max} = n_0 e^{-\lambda t_2}$.

8.38. $l\rho = \frac{\ln(1 + \alpha \sigma_0 / \rho_\Phi)}{\sigma_0 N_A} = 4,7 \text{ г/см}^2$.

8.39. За 6 месяцев накопится $1,08 \cdot 10^{14}$ протонов ($1,8 \cdot 10^{-10} \text{ г}$).

8.40. $N_p = j_n \left[1 - \exp\left(-\frac{a}{\tau_n v}\right) \right] \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$, где $\tau_n \approx 940 \text{ с}$ — время жизни нейтрона.

8.41.* $\sigma = \frac{\eta A_{Al}}{\rho_B l_B N_A} \approx 0,04 \text{ бн.}$

Решение. По определению сечения ядерной реакции

$$\sigma = \frac{dN/dt}{jN_m},$$

где dN/dt — число актов ядерного взаимодействия в единицу времени, [$1/\text{с}$]; j — плотность потока частиц, облучающих мишень, [$1/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$]; N_m — число ядер мишени.

Выход протонов определяется как

$$\eta = \frac{dN/dt}{jS},$$

где S — площадь поперечного сечения пучка. Тогда

$$\eta = \sigma \frac{N_m}{S} = \sigma n_m, \quad (*)$$

где n_m [$1/\text{см}^2$] — поверхностная плотность ядер мишени.

Иногда эту же формулу записывают в несколько ином виде:

$$\frac{N}{S} = \sigma n_p n_m,$$

где n_p — число частиц пучка, приходящееся на 1 см^2 сечения пучка, N — число прореагировавших ядер мишени (число произошедших реакций).

Пробег α -частицы ограничен из-за потери энергии на ионизацию атомов. Очевидно, что потери пропорциональны плотности вещества, так как имеется приближенная пропорциональность между плотностью и порядковым номером Z элемента, а произведение пробега частицы l на эту плотность есть величина постоянная, практически не зависящая от рода вещества, а только от начальной энергии частицы. Таким образом,

$$l_B \rho_B = l_{Al} \rho_{Al}. \quad (**)$$

Используя соотношения (*) и (**), получим

$$\sigma = \frac{\eta}{n_m} = \frac{\eta}{\frac{n_m}{l_{Al}} l_{Al}} = \frac{\eta}{n_{Al} l_{Al}},$$

где n_{Al} — концентрация ядер в алюминиевой мишени в [см^{-3}], l_{Al} — пробег α -частиц в ней. Однако в условии задан пробег l_B — в воздухе. Подставляя (**) в выражение для σ , получим

$$\sigma = \frac{\eta \rho_{Al}}{n_{Al} \rho_B l_B} = \frac{\eta A_{Al}}{\rho_B l_B N_A} = 4 \cdot 10^{-26} \text{ см}^2 = 0,04 \text{ бн.}$$

Здесь использовано, что $\rho_{\text{Al}} = m_{\text{Al}} n_{\text{Al}}$, где m_{Al} — масса атома алюминия. Плотность воздуха при нормальных условиях подсчитывается по известной формуле для идеального газа

$$\rho_{\text{возд}} = \frac{P\mu}{RT} \approx 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3.$$

8.42. $\sigma(\mathcal{E}) = \frac{A c \mathcal{E}^2}{n_0}$.

8.43. $J = e \sqrt{\frac{KSc}{2l\epsilon\sigma}} = 1,96 \text{ \AA}$.

8.44. $\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = e^{-(\mu_2 - \mu_1)x}$. При $x = 5 \text{ см}$ $\frac{\Phi_2}{\Phi_1} \approx 1,5$.

8.45. $\lambda' = 3\lambda = 3 \text{ \AA}$.

8.46. $\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{2P_0 N_A}{\mu g}\right) \approx 1,2 \cdot 10^{-6}$, где $\sigma = \pi r_N^2 = \pi r_0^2 A_N^{2/3}$ (это геометрическое сечение неупругого процесса (поглощения), и поэтому дифракционную упругую добавку учитывать не нужно), P_0 — нормальное атмосферное давление, μ — молярная масса азота.

8.47. $l_p = \frac{A_H}{8\pi\rho N_A r_p^2} \approx 148 \text{ см}$, $l_N = \frac{A_H}{2\pi\rho N_A (r_N + r_p)^2} \approx 24 \text{ см}$. (См. также комментарий к ответу задачи 8.3 о дифракционном удвоении.)

8.48. $\sigma_{\text{погл}} \approx \frac{\pi}{2} (2R_{\text{Рб}} - R_d) R_d = 0,385 \text{ бн.}$

8.49. $T_n \approx \frac{\mathcal{E}_\gamma + \Delta\mathcal{E}_{\text{cb}}}{1 + M_n/M_{\text{Li}}} = 6,7 \text{ МэВ}$; $T_{\text{Li}} = \mathcal{E}_\gamma + \Delta\mathcal{E}_{\text{cb}} - T_n = 1,1 \text{ МэВ}$, где $\Delta\mathcal{E}_{\text{cb}} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$, M_{Li} — масса ядра ${}^6\text{Li}$.

8.50. $T_p = \frac{(4m_p - m_\pi)m_\pi}{2(m_p - m_\pi)} c^2 = 0,31 \text{ ГэВ.}$

8.51* $\varphi = \frac{\hbar c}{\mathcal{E}_\gamma R_d} \approx 0,4 \text{ рад.}$

Решение. Энергия связи нуклонов мала по сравнению с энергией падающих на мишень фотонов. Поэтому продольный импульс нуклонов можно оценить как $p_{\parallel} \approx \mathcal{E}_\gamma/c$. Поперечный импульс нуклонов обусловлен движением нуклонов в ядре. Импульс нуклона в ядре оценим из соотношения неопределеностей:

$$p_{\perp} \approx \Delta p \sim \frac{\hbar}{R_d} \approx 100 \frac{\text{МэВ}}{c}, \quad c — \text{скорость света.}$$

Таким образом, угол рассеяния нуклонов в пучке по порядку величины равен

$$\varphi \approx \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} \approx 0,4 \text{ рад.}$$

8.52. $p_{O^*} = m_{O^*} c \frac{\Delta\mathcal{E}}{2\mathcal{E}} = 1,49 \frac{\text{ГэВ}}{c}$, $\alpha \approx \frac{p_{O^*}}{p} \approx 0,15 \text{ рад.}$

8.53. а) При реакции поглощается энергия (см. табл. 7 в Приложении 2) $Q = -931,5(7,016004 + 1,007825 - 7,016930 - 1,008665) \text{ МэВ} = 1,645 \text{ МэВ.}$

б) Из закона сохранения энергии и импульса для неупругого процесса найдем, полагая $m_n = m_p = m_{\text{Be}}/7 = m_{\text{Li}}/7$:

1) в системе центра масс

$$\mathcal{E}_n^c = \mathcal{E}_p^c - \frac{7}{8} Q;$$

2) в лабораторной системе

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n = \frac{49}{64} \left[\left(\mathcal{E}_p - \frac{8}{7}Q \right) + \frac{2}{7} \sqrt{\mathcal{E}_p \left(\mathcal{E}_p - \frac{8}{7}Q \right)} \cos \alpha_c + \frac{\mathcal{E}_p}{49} \right] = \\ = \frac{1}{64} \left[\sqrt{\mathcal{E}_p} \cos \alpha + \sqrt{49 \left(\mathcal{E}_p - \frac{8}{7}Q \right) - \mathcal{E}_p \sin^2 \alpha} \right]^2,\end{aligned}$$

где \mathcal{E}_n^c и \mathcal{E}_n — энергии нейтрона в системе центра масс и лабораторной системе; \mathcal{E}_p^c , \mathcal{E}_p — то же для протона; α_c и α — углы между направлениями скорости протона и нейтрона в системе центра масс и лабораторной системе.

Из формул видно, что минимальная энергия протона (порог реакции) в системе центра масс равна $\mathcal{E}_p^c = (7/8)Q = 1,44 \text{ МэВ}$, а в лабораторной системе $\mathcal{E}_p = (8/7)Q = 1,88 \text{ МэВ}$.

8.54. $w \approx \frac{R \rho p}{m_N} \approx 7 \cdot 10^{-6}$, где m_N — масса нуклона. Нейтрино поглощается только нейтронами.

8.55. $\mathcal{E} \geq \frac{2m_p}{\rho R A} \approx 95 \cdot 10^3 \text{ ГэВ}$.

8.56. Ослабление потока нейтрино $\frac{\Delta \Phi}{\Phi} = \frac{\sigma N_A \rho \cdot 2R_3}{2A} = 4,2 \cdot 10^{-4}$.

8.57* Решение. Сечение взаимодействия нуклонов убывает с ростом скорости и стремится к «геометрическому» сечению $\sigma \sim 10^{-25} \text{ см}^2$ (радиус нуклона $r_p \approx 0,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}$). Длина пробега при $n = 1 \text{ см}^{-3}$

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \approx 10^{25} \text{ см} \approx 10^7 \text{ св. лет}$$

(1 св. год $\approx 10^{18} \text{ см}$). Для массивных частиц в рамках геометрической модели рассеяния $\sigma \sim 10^{-24} \text{ см}^2$, а длина их свободного пробега $\lambda \sim 10^6 \text{ св. лет}$. Таким образом, прилет массивного «гостя» с такого расстояния крайне маловероятен. Заметим также, что полет комет по сильно вытянутым гиперболическим траекториям не зафиксирован в истории астрономии.

8.58. $M = \frac{\pi L^2 n \mu}{N_A N_{\text{вещ}} \tau} \approx 546 \text{ т}$, где L — расстояние от Солнца до Земли, μ — молярная масса CCl_4 .

8.59* $\sigma \approx 3 \cdot 10^{-46} \text{ см}^2$.

Решение. Длина свободного пробега λ электрона в ядре, сечение взаимодействия σ и концентрация протонов n_p в ядре связаны известным соотношением $\lambda \sigma n_p = 1$. При этом $\lambda = 2n\tau$, где τ — время, проведенное K -электронами в ядре за $\tau_0 = 32$ дня, коэффициент «2» учитывает, что на K -оболочке находятся два электрона. Таким образом, искомое эффективное сечение

$$\sigma = \frac{1}{2n\tau}.$$

Концентрация протонов в ядре

$$n_p = \frac{Z}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} = 5,3 \cdot 10^{37} \text{ см}^{-3},$$

а время оценим как

$$\tau = \tau_0 \left(\frac{R_\text{я}}{r_1} \right)^3,$$

где $R_\text{я} = 1,3 \cdot 10^{-13} A^{1/3} = 4,3 \cdot 10^{13} \text{ см}$, а радиус орбиты K -электрона $r_1 = \frac{r_\text{Б}}{Z-1} = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ см}$. Таким образом, $\tau \approx 0,0074 \text{ с}$.

Оценку скорости K -электрона проведем, исходя из соотношения

$$\frac{mv^2}{2} = Ry(Z-1)^2,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2Ry}{m}} (Z-1) = 3,7 \cdot 10^9 \frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Таким образом, искомое сечение

$$\sigma = \frac{1}{2nvt} \approx 3 \cdot 10^{-46} \text{ см}^2.$$

8.60. $R_{\text{Pb}} = r_0 A^{1/3} \approx 7,7 \cdot 10^{-13}$ см. Для K -оболочки мюона в атоме Pb $r = r_B \frac{m_e}{m_\mu Z} \approx 3 \cdot 10^{-13}$ см $< R_{\text{Pb}}$. Мюон взаимодействует с протоном по схеме

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu; \quad \sigma \approx \frac{4\pi r_0^3 A}{3Z^2 c \tau \alpha} \approx 1,9 \cdot 10^{-41} \text{ см}^2, \quad \text{где } \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

8.61* Ослабление потока γ -квантов $j(L) = j(0)e^{-n\sigma L}$ будет малым при условии $n\sigma L \ll 1$, где n — концентрация «поглотителей» (ядер ^{119}Sn), σ — сечение поглощения. Самопоглощение мессбауэровских квантов носит резонансный характер. Из формулы Брейта–Вигнера для сечения упругого процесса при $\mathcal{E}_\gamma = \mathcal{E}_{\text{рез}}$ получаем $\sigma = g \frac{4\pi}{k^2} = \frac{4\pi \hbar^2 c^2}{\mathcal{E}_\gamma^2}$. Здесь $g = \frac{1}{2} \cdot \frac{2J^*+1}{2J+1}$ — статистический фактор, учитывающий число начальных (возбужденное ядро с моментом J^*) и конечных (ядро в нормальном состоянии с моментом J плюс γ -квант) состояний. Здесь $2=2J+1$ — число возможных проекций момента γ -кванта. Для ядра ^{119}Sn $J^*=3/2$, $J=1/2$ и $g=1$. Кроме того, $n=p \frac{N_A}{\mu} \epsilon f$. Отсюда $L \ll \frac{1}{n\sigma} = \frac{\mathcal{E}_\gamma^2 \mu}{4\pi \hbar^2 c^2 p N_A \epsilon f} = 1,24 \cdot 10^{-3}$ см, где μ — молярная масса BaSnO₃.

8.62. $N_{\text{Ar}} = \frac{j N_{\text{Cl}} \sigma}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \approx 30$ ядер, где $N_{\text{Cl}} \approx 2,2 \cdot 10^{30}$, $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \approx 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$.

8.63. $N_{\text{Ge}} \approx 5$ ядер.

8.64. $\sigma_{\text{рез}}/\sigma_0 \sim 10^6$. Здесь сечение поглощения в центре резонансной линии определяется формулой Брейта–Вигнера для неупругого поглощения $\sigma_{\text{рез}} = \pi \lambda^2 = \lambda^2/4\pi$.

$$\text{8.65. } \alpha_{\text{погл}} = \frac{j_0 - j_{\text{погл}}}{j_0} = 1 - e^{-n_m \sigma_{\text{погл}} d} \approx 0,1;$$

$$\alpha_{\text{расс}} = \frac{j_0 - j_{\text{расс}}}{j_0} = 1 - e^{-n_m \sigma_{\text{расс}} d} \approx 0,37.$$

$$\text{8.66. } \sigma_1 = \sigma_0 \frac{N_2^2 (kT)^2}{(2P_0)^2} \approx 11 \text{ бн.}$$

8.67. $a_{\text{эл}} = \frac{\pi \theta_{\text{kp}}^2 / \lambda^2 - N_2 a_2 + N_1 a_1}{z_2 N_2 - z_1 N_1} = -2,6 \cdot 10^{-16}$ см. При учете рассеяния нейтронов на электронах показатель преломления $n^2 = 1 - \frac{Na\lambda^2}{\pi} - \frac{ZN a_{\text{эл}} \lambda^2}{\pi}$. Кроме того, в данной задаче $\theta_{\text{kp}}^2 \approx n_1^2 - n_2^2$.

Возможны два различных механизма взаимодействия, приводящих к рассеянию нейтронов на электронах. Еще в 1947 г. Ферми указал на возможность существования специфического взаимодействия между нейтроном

и электроном, не сводящегося к взаимодействию между магнитными моментами этих частиц. Появление этого взаимодействия следует ожидать, исходя из представления о том, что ядерное взаимодействие есть результат обмена виртуальными пионами между нуклонами, так что часть времени нейтрон проводит в диссоциированном состоянии $n \rightleftharpoons p + \pi^-$. Тем самым должны возникать силы притяжения, обусловленные электростатическим притяжением между электроном и протоном. Как следует из эксперимента, длина рассеяния очень мала, и поэтому эти силы должны быть весьма короткодействующими. Нейтрон состоит из трех заряженных夸克ов, и это взаимодействие фактически есть взаимодействие между составляющими нейтрон кварками и электроном.

Второй механизм — это так называемое фолдиевское взаимодействие — был получен и рассчитан Л. Фолди. Не вдаваясь в подробности, отметим, что взаимодействие медленного нейтрона с электростатическим полем возникает в результате учета квантовых эффектов и связано с «дрожанием» нейтрона в области размером в комптоновскую длину волны виртуальных пионов. На таких расстояниях нейтрон уже нельзя считать точечной частицей.

8.68. $\tau \approx \frac{m_n \mathcal{E}_n \sigma_{\text{погл}}}{2h\Gamma_n} = 4,1 \cdot 10^{-15}$ с. Если учесть статистический фактор, то в знаменатель надо добавить (см. задачу 8.61) $\frac{2J^*+1}{2(2J+1)}$, где $J^*=5$ — полный момент (спин) составного ядра ^{116}In , 2 — число проекций спина нейтрона, $J=9/2$ — полный момент (спин) ядра ^{115}In , $g=0,55$ и τ будет равно $7,45 \cdot 10^{-15}$ с.

$$\mathbf{8.69^*} \frac{\sigma_n(\mathcal{E}_1)}{\sigma_n(\mathcal{E}_2)} \approx 1, \text{ т. е. сечения примерно равны.}$$

Решение. Парциальное сечение нейтронного распада составного ядра

$$\sigma_n = \sigma_c \frac{\Gamma_n}{\Gamma_{\text{погл}}} = \sigma_c \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n + \Gamma_\gamma} \approx \sigma_c \frac{\Gamma_n}{\Gamma_\gamma},$$

где сечение образования составного ядра $\sigma_c = \pi \lambda^2 D$, а $D = 4 \frac{k k'}{(k+k')^2} \approx 4 \frac{k}{k'} \propto \sqrt{\mathcal{E}}$ — вероятность проникновения нейтрона в тяжелое ядро. Здесь $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}}$; $k' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 + \mathcal{E})} \gg k$; $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mathcal{E}}}$. Вероятность нейтрону покинуть составное ядро также пропорциональна D . Таким образом, $\sigma_n \propto \pi \lambda^2 D^2 \propto \frac{1}{\mathcal{E}} \mathcal{E} = \text{const}$, откуда и следует, что сечение распада составного ядра по нейтронному каналу от \mathcal{E} не зависит.

$$\mathbf{8.70^*} \mathcal{E}_n = \frac{12}{13} \mathcal{E}_{\text{пор}} + \mathcal{E} = 14,8 \text{ МэВ}; j = \frac{(dN/dt)A}{\sigma \rho N_A S d} = 0,45 \cdot 10^6 \frac{\text{нейтр}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}.$$

8.71* Весь пробег α -частиц в детекторе $l = \rho_s / \rho = 1,3 \cdot 10^{-3}$ см = 13 мкм, что значительно меньше толщины детектора $d = 300$ мкм, поэтому α -частица теряет в детекторе всю свою энергию на образование пар. Весь прошедший по цепи заряд должен равняться площади под кривой импульса тока, откуда

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{V \tau \mathcal{E}_0}{2eR} = 5,5 \text{ МэВ.}$$

$$8.72^*: t = \frac{1}{\sigma_0 v_0 n_0 - \lambda} \ln \frac{\sigma_0 v_0 n_0}{\lambda} = 2,54 \cdot 10^3 \text{ с} = 42 \text{ мин } 24 \text{ с.}$$

$$8.73^*: \frac{n_{\text{тепл}}}{n_{\text{рез}}} = R_{\text{Cd}} - 1 = 4.$$

8.74* Квадрат показателя преломления нейtronов различной поляризации имеет вид

$$n_{\pm}^2 = 1 - \lambda^2 \left(\frac{Na}{\pi} \pm \frac{3,82 m_n \mu_{\text{яд}} B}{h^2} \right),$$

где $N = N_A \rho / A = 8,46 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ — концентрация ядер железа. Через пластинку пройдут нейтронны с проекцией спина $-1/2$ на направление поля, а с проекцией $+1/2$ — отразятся. Отсюда ответ: $539 \text{ \AA} < \lambda < 729 \text{ \AA}$.

8.75* Максимальный угол скольжения (при меньших углах все отражаются)

$$\psi_{\max} = \sqrt{1 - n^2} = \sqrt{\frac{\mathcal{E}_-}{\mathcal{E}_{\text{тен}}}} = 2,58 \cdot 10^{-3} \text{ рад } (8'52''),$$

$\mathcal{E}_- = \mathcal{E}_{\text{рп}} + 1,91 \mu_{\text{яд}} B = 1,66 \cdot 10^{-7} \text{ эВ}$ — измененная граничная энергия нейтронов, связанная с наличием у них магнитного момента. Знак в индексе минус (или плюс) соответствует знаку проекции спина нейтрона на направление магнитного поля **B**.

8.76* Решение. Никель представляет для нейтронов оптически менее плотную среду, чем вакуум, так как $a > 0$. Поэтому максимальный угол скольжения, при котором нейтронны еще будут отражаться от никелевой полоски — угол полного внутреннего отражения — находится из условия $\sin(90^\circ - i_{\max}) = n$, где показатель преломления

$$n = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 Na}{\pi}},$$

а $N = \rho \frac{N_A}{N} = 9,13 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ — концентрация атомов никеля. Таким образом, $\cos i_{\max} = n$, а поскольку показатель преломления нейтронных волн близок к 1, то $i_{\max} \ll 1$, откуда $i_{\max} \cong \lambda \sqrt{\frac{Na}{\pi}}$. Подставляя числа, получаем $i_{\max} = 5,532 \cdot 10^{-3} \text{ рад}$, или $i_{\max} = 0,32^\circ$ (см. рис. 178).

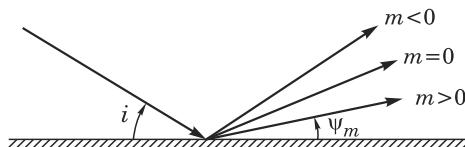


Рис. 178

При углах скольжения $i < i_{\max}$ в отраженном нейтронном излучении возникают максимумы m -го порядка, направления на которые находятся из условия

$$\cos i - \cos \psi_m = m \frac{\lambda}{d}.$$

Максимум 0-го порядка соответствует зеркальному отражению $\psi_0 = i$. Направление на максимум (+1)-го порядка находится из условия

$$\cos i - \cos \psi_{+1} = \frac{\lambda}{d}, \quad \text{или} \quad \psi_{+1} = \sqrt{i^2 - \frac{2\lambda}{d}}.$$

Условия существования данного максимума $i^2 - 2\lambda/d > 0$. Поскольку $i < i_{\max}$, то для минимальной толщины полоски получаем $d_{\min} = 2\lambda/i_{\max}^2 \approx 0,018$ мм.

По условию задачи нужно найти

$$\max(\psi_0 - \psi_{+1}) = \max\left(i - \sqrt{i^2 - \frac{2\lambda}{d}}\right).$$

Легко видеть, что эта функция не имеет экстремума, поэтому ее наибольшее значение достигается на границе интервала, т. е. при $i = \sqrt{2\lambda/d}$, или $\max(\psi_0 - \psi_{+1}) = \sqrt{2\lambda/d}$. Подставляя числа, получаем $\max(\psi_0 - \psi_{+1}) = 5,071 \cdot 10^{-3}$ рад = 0,29°.

§ 9. Деление ядер. Реакторы. Термоядерный синтез

9.1* Решение. При делении ядер на два равных осколка

$$\Delta \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n(2^{1/3} - 1), \quad \Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} = \mathcal{E}_{\text{кул}}(2^{-2/3} - 1),$$

где $\mathcal{E}_n = -17,8A^{2/3}$ [МэВ], $\mathcal{E}_{\text{кул}} = -0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ [МэВ].

Деление энергетически выгодно, когда $\Delta \mathcal{E}_n + \Delta \mathcal{E}_{\text{кул}} > 0$, т. е.

$$-\left|\mathcal{E}_n\right|(2^{1/3} - 1) + \left|\mathcal{E}_{\text{кул}}\right|(1 - 2^{-2/3}) > 0,$$

Отсюда находим

$$\frac{\left|\mathcal{E}_{\text{кул}}\right|}{\left|\mathcal{E}_n\right|} > \frac{2^{1/3} - 1}{1 - 2^{-2/3}} = 0,70, \quad \text{или} \quad \frac{Z^2}{A} \geq 17,6.$$

9.2. 1) $Z^2/A \geq 17,62 + 129,4A^{-1,42}$; 2) $Z^2/A \geq 17,62 + 564,8A^{-1,42}$; 3) $Z^2/A \geq 17,62 + 305,9A^{-1,42}$.

Наметим путь решения задачи. Энергия связи четно-четного ядра

$$\mathcal{E}_{\text{св}}(A, Z) = \mathcal{E}_1 A - \mathcal{E}_2 A^{2/3} - \mathcal{E}_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - \mathcal{E}_4 \frac{(A - 2Z)^2}{A/2} - \mathcal{E}_5 A^{-3/4},$$

где $\mathcal{E}_1 = 15,75$ МэВ; $\mathcal{E}_2 = 17,8$ МэВ; $\mathcal{E}_3 = 0,71$ МэВ; $\mathcal{E}_4 = 23,7$ МэВ; $\mathcal{E}_5 = 34$ МэВ. Энергия связи половинок ядра

$$\mathcal{E}'_{\text{св}}\left(\frac{A}{2}; \frac{Z}{2}\right) = \mathcal{E}_1 \frac{A}{2} - \mathcal{E}_2 \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} - \mathcal{E}_3 \frac{(Z/2)}{(A/2)^{1/3}} - \mathcal{E}_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A/2} - \mathcal{E}_5 \left(\frac{A}{2}\right)^{-3/4} \delta,$$

где $\delta = \begin{cases} -1, & \text{если } \frac{A}{2} = 2p; \quad \frac{Z}{2} = 2k, \\ 0, & \text{если } \frac{A}{2} = 2p + 1, \\ +1, & \text{если } \frac{A}{2} = 2p; \quad \frac{Z}{2} = 2k + 1. \end{cases}$

Условие распада

$$2\mathcal{E}'_{\text{св}}\left(\frac{A}{2}; \frac{Z}{2}\right) - \mathcal{E}_{\text{св}} \geq 0.$$

Далее легко получить приведенные выше ответы.

9.3* Решение. При деформации формы ядра изменяются энергия поверхностного натяжения и энергия кулоновского взаимодействия. Если $\Delta\mathcal{E}_{\text{кул}} + \Delta\mathcal{E}_{\text{пов}} \geq 0$, то энергия в конечном состоянии больше, и исходное сферическое ядро устойчиво:

$$\Delta\mathcal{E}_{\text{кул}} = \mathcal{E}_{\text{кул}}^{\text{элл}} - \mathcal{E}_{\text{кул}}^{\text{шар}}; \quad \Delta\mathcal{E}_{\text{пов}} = \sigma(S^{\text{элл}} - S^{\text{шар}}),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения ядра. Будем статически «вытягивать» сферическое ядро радиусом r , превращая его в эллипсоид вращения с полуосами a и b .

Введем эксцентрикитет меридионального сечения $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. Тогда $a = r(1 - \varepsilon^2)^{-1/6}$; $ab = r^2(1 - \varepsilon^2)^{1/6}$;

$$\mathcal{E} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{r} \frac{(1 - \varepsilon^2)^{1/3}}{2\varepsilon} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon};$$

$$S = 4\pi r^2 \frac{(1 - \varepsilon^2)^{-1/6}}{2\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).$$

При малых деформациях $\varepsilon \ll 1$. Эти выражения можно разложить в ряды, и мы получаем

$$\mathcal{E}_{\text{кул}}^{\text{элл}} = \mathcal{E}_{\text{кул}}^{\text{шар}} \left(1 + \frac{2}{45} \varepsilon^4 \right); \quad \mathcal{E}_{\text{пов}} = \mathcal{E}_{\text{пов}}^{\text{шар}} \left(1 - \frac{1}{45} \varepsilon^4 \right).$$

Отсюда следует условие устойчивости ядра

$$\mathcal{E}_{\text{кул}}^{\text{шар}} / \mathcal{E}_{\text{пов}}^{\text{шар}} \leq 2.$$

Используя формулу Вайцзеккера

$$\mathcal{E}_{\text{пов}} = 17,8 A^{2/3} [\text{МэВ}] \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{\text{кул}} = 0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}} [\text{МэВ}],$$

легко получить искомый критерий устойчивости ядер к статическим деформациям формы:

$$\frac{Z^2}{A} \leq 50.$$

Рассмотренная задача — модельная, потому что большинство тяжелых ядер имеют несферическую форму.

Реально, конечно, процесс деления ядра — динамический. При взаимодействии нейтрона с ядром возникают колебания формы капли практически несжимаемой ядерной жидкости. Частота этих колебаний определяется соотношением $\mathcal{E}_{\text{кул}}$ и $\mathcal{E}_{\text{пов}}$. При $\mathcal{E}_{\text{кул}} / \mathcal{E}_{\text{пов}} \leq 2$ частота становится мнимой (колебания апериодическими), и амплитуда колебаний нарастает со временем. Это приводит к возникновению перетяжки, и ядро делится на два осколка.

$$9.4^* \quad \sigma = \frac{4\pi}{kk'} \approx \begin{cases} 2600 \text{ бн (тепловые нейтроны),} \\ 4,1 \text{ бн (при } \mathcal{E} = 10 \text{ кэВ),} \end{cases} \quad \text{где } k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}}, \quad k' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\mathcal{E} + U_0)}.$$

Решение. При энергиях тепловых нейтронов деборильевская длина волны нейтрона $\lambda = \hbar/\sqrt{2m\mathcal{E}} = 3 \cdot 10^{-9}$ см $\gg R_U = 8 \cdot 10^{-13}$ см, и сечение образования составного ядра $\sigma \approx \pi\lambda^2 D$, где D — коэффициент прохождения нейтронной волной границы ядра. Коэффициент прохождения D определяется соотношением (см. задачу 3.25)

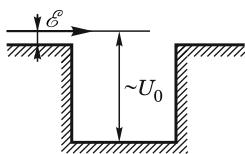


Рис. 179

где волновые числа k и k' определяются как коэффициенты в уравнениях Шредингера для областей вне ядра и внутри ядра (рис. 179):

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}}, \quad k' = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m\mathcal{E}(\mathcal{E} + U_0)}.$$

Искомое сечение взаимодействия

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{kk'} \approx \frac{2\pi\hbar^2}{2\sqrt{\mathcal{E}U_0}} \approx 2600 \text{ бн.}$$

Для нейтрона с энергией 10 кэВ $\lambda \approx 3 \cdot 10^{-9}$ см, и искомое сечение $\sigma \approx 4,1$ бн. Как видно из формулы, при данных энергиях $\sigma \propto 1/\sqrt{\mathcal{E}} \propto 1/v$. Такая зависимость сечения деления от скорости нейтронов называется *законом Берте*. Здесь он выполняется, поскольку рассматриваемые энергии лежат далеко от области резонансного поглощения нейтронов ядрами ^{235}U ($1 \div 100$ эВ).

9.5. $\sigma_c = \pi(R + \lambda)^2 D = 2,3$ бн, где $D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} \approx 0,7$, $\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\mathcal{E}}}$. Относительная вероятность деления к полной вероятности реакций, идущих через составное ядро, $\Gamma_{\text{дел}}/\Gamma_{\text{сост}} = \sigma_{\text{дел}}/\sigma_c \approx 0,2$.

$$9.6. \quad N = \frac{N_0}{1 - k_\infty}.$$

9.7. $k_\infty = \frac{\sigma_{\text{расс}}}{\sigma_{\text{погл}}} \frac{\sigma_{\text{дел}}}{\sigma_{\text{погл}} + \sigma_{\text{расс}}}$. В данном случае $k_\infty = 0,75 < 1$, что и требовалось показать.

$$9.8. \quad P(t) = P(0) k^{t/\tau} \approx P(0) e^{t \ln k / \tau} \approx P(0) e^{\rho t / \tau}; \quad T = \tau / \rho.$$

9.9. При $\rho < \beta$ в отсутствие запаздывающих нейтронов $k - \beta < 1$, и поэтому реакция только на мгновенных делительных нейтронах затухла бы. При $\rho > \beta$ реакция может развиваться и без запаздывающих нейтронов.

$$9.10^* \quad R = \sqrt{\frac{3}{k_\infty - 1}} L = 4 \text{ м.}$$

Решение. Полное число нейтронов

$$N = \int_0^R n_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{\pi n_0 R^3}{3},$$

где n_0 — концентрация нейтронов при $r=0$. Полагая $L \ll R$, подставляя числовые данные, получим, что из тонкого наружного слоя реактора, содержащего $4\pi R^2 L \frac{n_0 L}{2R}$ нейтронов (где $\frac{n_0 L}{2R}$ — средняя плотность нейтронов внутри этого слоя), примерно половина этих нейтронов уйдет из реактора, а половина останется. За это же время внутри реактора появится $(k_\infty - 1)N$ новых нейтронов. Таким образом,

$$\pi R n_0 L^2 = \frac{1}{3} \pi n_0 R^3 (k_\infty - 1),$$

откуда и следует ответ $R = \sqrt{\frac{3}{k_\infty - 1}} L = 400$ см.

$$9.11^*: t^* = \frac{T_1 T_2 \ln(T_2/T_1)}{(T_2 - T_1) \ln 2} \approx 11 \text{ ч.}$$

Решение. Пусть при $t=0$ имеется N_0 ядер йода I и $N_2(0)=0$ ядер ксенона Xe. Процесс β -распада I описывается уравнением

$$dN_1 = -N_1 \lambda_1 dt,$$

откуда $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$, где λ_1 — постоянная распада ядер йода. Ядра ксенона не только постоянно образуются из йода, но и одновременно распадаются с постоянной распада λ_2 . Запишем уравнение этого процесса и его решение:

$$dN_2 = -N_2 \lambda_2 dt + N_1 \lambda_1 dt,$$

$$N_2(t) = ae^{-\lambda_1 t} + be^{-\lambda_2 t}.$$

Поскольку $N_2(0)=0$, то $a=-b$, $N_2(t) = b(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t})$. Подстановка $N_1(t)$ в дифференциальное уравнение для N_2 дает

$$b(\lambda_1 - \lambda_2) = N_0 \lambda_1, \quad \text{откуда} \quad b = \frac{N_0 \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Таким образом,

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}).$$

Условие максимума числа ядер ксенона $\frac{dN_2}{dt} = 0$, откуда $\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = (\lambda_1 - \lambda_2)t^*$.

Таким образом, искомое время

$$t^* = \frac{T_1 T_2 \ln(T_2/T_1)}{(T_2 - T_1) \ln 2} \approx 11 \text{ ч.}$$

$$9.12^*: t = 3,4 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 390 \text{ дней.}$$

Решение. Полное нейтронное сечение $\sigma_t {}^{239}_{94}\text{Pu}$ складывается из сечения деления σ_{f1} и сечения радиационного захвата нейтрона σ_{n1} (переход в ${}^{240}\text{Pu}$, т. е. $\sigma_t = \sigma_{f1} + \sigma_{n1} = 1008$ бн).

Пусть плотность потока нейтронов, облучающих ${}^{239}\text{Pu}$, равна $j [\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}]$. Тогда число ядер $N_1 {}^{239}\text{Pu}$ убывает по закону

$$\frac{dN_1}{dt} = -j \sigma_t N_1.$$

Уравнение, описывающие накопление ядер $N_2 {}^{240}\text{Pu}$ с учетом их распада, имеет вид

$$\frac{dN_2}{dt} = j\sigma_{n1}N_1 - j\sigma_{n2}N_2.$$

Решение этой системы уравнений (см. задачу 9.11) есть

$$N_1 = N_{10} e^{-j\sigma_t t}; \quad N_2 = \frac{\sigma_{n1} N_{10}}{\sigma_{n2} - \sigma_t} (e^{-j\sigma_t t} - e^{-j(\sigma_{n2} - \sigma_t)t}).$$

Требуемое отношение концентраций

$$\frac{N_{240}}{N_{239}} = 0,4 = \frac{N_2}{N_1} = \frac{\sigma_{n1}}{\sigma_{n2} - \sigma_t} (1 - e^{-j(\sigma_{n2} - \sigma_t)t}),$$

откуда

$$-j(\sigma_{n2} - \sigma_t)t = \ln \left(1 - 0,4 \frac{\sigma_{n2} - \sigma_t}{\sigma_{n1}} \right).$$

Плотность потока j находится из энергетических соображений. Мощность реактора W равна (N_3 — число ядер горючего)

$$W = \varepsilon j \sigma_{f3} N_3 = \frac{\varepsilon j \sigma_{f3} M N_A}{235},$$

откуда искомый поток нейтронов

$$j = \frac{235W}{\varepsilon \sigma_{f3} M N_A} \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Время наработки необходимой концентрации ^{240}Pu равно

$$t = \frac{\ln [1 + 0,4(\sigma_t - \sigma_{n2})/\sigma_{n1}]}{j(\sigma_t - \sigma_{n2})} = 3,4 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 390 \text{ дней.}$$

$$\mathbf{9.13.} \quad \frac{n_{\text{Pu}}}{n_{\text{U}}} = \frac{\sigma j_n T_{1/2}}{\ln 2} \approx 3,3 \cdot 10^{-16}.$$

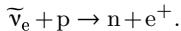
$$\mathbf{9.14.} \quad \frac{\Delta M}{M} = \frac{\mathcal{E} A_{\text{U}} m_{\text{n}}}{\mathcal{E}_0 M n_0} \approx 0,63, \text{ где } A_{\text{U}} = 235.$$

$$\mathbf{9.15.} \quad t = \frac{T_1 T_2}{(T_1 - T_2) \ln 2} \ln \left(\frac{N_{10}}{N_{20}} \frac{N_2}{N_1} \right) \approx 1,7 \cdot 10^9 \text{ лет, где } T_1 = 4,5 \cdot 10^9 \text{ лет, } T_2 = 0,7 \cdot 10^9 \text{ лет — периоды полураспада } ^{238}\text{U} \text{ и } ^{235}\text{U.}$$

$$\mathbf{9.16.} \quad j = \frac{WN}{4\pi L^2 Q} \approx 6 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}; \quad \eta = \frac{N\mathcal{E}}{Q} = 0,045, \text{ где } Q = 200 \text{ МэВ — энергия, выделяемая при делении ядра урана.}$$

$$\mathbf{9.17*} \quad \text{Земля практически не поглощает антинейтрино, поэтому } j = \frac{6W}{Q \cdot 4\pi R_{\text{3}}^2} \approx 6 \cdot 10^5 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Решение. В соответствии с законами сохранения электрического и лептонного зарядов, антинейтрино взаимодействуют только с протонами:



Реакция взаимодействия $\bar{\nu}_{\text{e}}$ с нейтронами невозможна в силу закона сохранения лептонного заряда. Наибольшее поглощение толщей Земли будут испытывать антинейтрино, проходящие внутри Земли максимальный путь, равный диаметру Земли. Концентрация нуклонов $n = \rho/m_{\text{n}} = \rho N_A / \mu_{\text{n}}$, где m_{n} — масса нуклона; $\mu_{\text{n}} = 1 \text{ г/моль}$. Поскольку Земля состоит в основном из элементов с $A \lesssim 60$, то числа протонов и нейронов примерно равны, т. е.

$n_p = n/2$. Тогда число протонов в «столбике» длиной $2R_3$ с поперечным сечением 1 см^2

$$N_p = n_p \cdot 2R_3 = \frac{1}{2} \frac{\rho N_A}{\mu_h} \cdot 2R_3 = \frac{\rho N_A R_3}{\mu_h}.$$

Уравнение, описывающее выбытие антинейтрино из потока,

$$dN_v = -\sigma N_v dN_p.$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$N_v = N_0 e^{-\sigma N_p} = N_0 \exp\left(-\sigma \frac{\rho N_A R_3}{\mu_h}\right),$$

где N_0 — начальный поток антинейтрино. Поскольку показатель экспоненты

$$\frac{\sigma \rho N_A R_3}{\mu_h} \approx 1,4 \cdot 10^{-10} \ll 1,$$

то $N_v \approx N_0$, т. е. Земля практически не ослабляет поток антинейтрино, т. е. поглощением антинейтрино Землей можно пренебречь.

Полный поток антинейтрино на поверхности Земли от распада распределенных по объему ядер тяжелых элементов равен потоку от всех распадающихся ядер, помещенных в центре Земли. По существу это аналог электростатической теоремы Гаусса. Поэтому

$$j = \frac{6W/Q}{4\pi R_3^2} = 6 \cdot 10^5 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1},$$

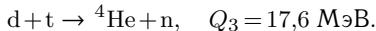
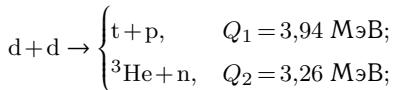
где $W = 15 \text{ ТВт}$ — мощность, выделяемая подземными источниками деления, $Q = 200 \text{ МэВ}$ — энергия, выделяющаяся при одном акте деления тяжелого ядра (U, Th).

9.18. $m = 282,6 \cdot 10^3 \text{ т}$ естественного урана.

9.19. $v = \frac{\sqrt{2}Ze}{\sqrt{MR_n}} \approx 3,5 \cdot 10^9 \text{ см/с}$, где Z , M , R_n — порядковый номер, масса и радиус ядра урана.

9.20* 1) $n_t = 10^{13} \text{ см}^{-3}$; 2) $q = 1,25 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-3}$; 3) $W = 99,6 \text{ Вт/см}^3$.

Решение. Отметим энерговыделение при указанных реакциях синтеза ядер



Первые две реакции (d, d) идут с равной вероятностью в силу зеркальности ядер t и ^3He . Изменение со временем концентрации частиц в результате взаимодействия определяется скоростями реакций (d, d) и (d, t) и скоростью поступления ядер извне.

Скорость реакции — это число столкновений частиц сорта 1 и 2 в единицу времени, приводящее к реакции. Пусть $f_1(\mathbf{v}_1)$ и $f_2(\mathbf{v}_2)$ — функции распределения частиц сортов 1 и 2 по скоростям. Будем считать, что эти функции

нормированы, т. е. $\int f(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = 1$. Тогда каждую секунду в каждом см^3 объема плазмы число актов взаимодействия частиц, имеющих скорости от v_1 до $v_1 + dv_1$ и от v_2 до $v_2 + dv_2$ равно

$$dN_{12} = n_1 f_1(\mathbf{v}_1) n_2 f_2(\mathbf{v}_2) |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \sigma(|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2,$$

где n_1 и n_2 — плотности частиц, $\sigma(v)$ — сечение реакции, зависящее от относительной скорости частиц, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ (рис. 180). Следовательно,

$$n_{12} = \iint d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 n_1 f_1(\mathbf{v}_1) n_2 f_2(\mathbf{v}_2) \mathbf{v} \sigma(v) [\text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}].$$

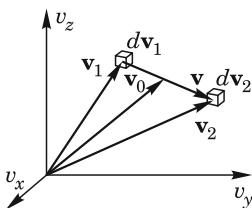
Считая, что плотности частиц n_1 и n_2 неизменны, получаем

$$N_{12} = n_1 n_2 \overline{\sigma v}, \quad \text{где} \quad \overline{\sigma v} = \iint d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2 f_1(\mathbf{v}_1) f_2(\mathbf{v}_2) v \sigma(v).$$

Запишем уравнение для изменения концентрации ядер дейтерия n_d со временем:

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} = -2 \frac{(n_d - 1)}{2} n_d \overline{\sigma v_{dd}} - n_d n_t \overline{\sigma v_{dt}} + q.$$

Здесь первое слагаемое описывает убыль ядер дейтерия из-за столкновений друг с другом. Одно ядро d имеет $n_d - 1$ столкновений (в расчете на единицу объема); n_d ядер имеют $n_d(n_d - 1) \approx n_d^2$ столкновений. Для реакции (d, d) безразличен порядок дейtronов в паре, поэтому число взаимодействующих пар равно $n_d^2/2$, и в каждом акте реакции исчезают два дейтранона. Таким образом,



$$\frac{\partial n_d}{\partial t} = -n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}} - n_d n_t \overline{\sigma v_{dt}} + q.$$

Рис. 180

Аналогично, для ядер трития можно записать:

$$\frac{\partial n_t}{\partial t} = -n_1 n_d \overline{\sigma v_{dt}} + \frac{1}{2} \frac{n_d(n_d - 1)}{2} \overline{\sigma v_{dd}}.$$

Во втором слагаемом первый коэффициент $1/2$ учитывает вероятность получения трития в результате столкновения пары дейтронов. Таким образом,

$$\frac{\partial n_t}{\partial t} = -n_t n_d \overline{\sigma v_{dt}} + \frac{1}{4} n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}}.$$

В стационарном состоянии производные \dot{n}_d и \dot{n}_t равны нулю, и мы получаем уравнения баланса

$$\begin{cases} q = n_d^2 = n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}} + n_d n_t \overline{\sigma v_{dt}}, \\ \frac{1}{4} n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}} = n_d n_t \overline{\sigma v_{dt}}, \end{cases}$$

откуда вычисляем стационарную концентрацию ядер трития

$$n_t = \frac{1}{4} n_d \frac{\langle \sigma v_{dd} \rangle}{\langle \sigma v_{dt} \rangle} = 10^{13} \text{ см}^{-3},$$

а также интенсивность поступления в зону реакции дейтронов от внешнего источника

$$q = \frac{5}{4} n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}} = 1,25 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Выделяющаяся в термоядерных реакциях мощность W может быть выражена через скорости изменения концентраций ядер дейтерия по каналам (d, d) и (d, t) :

$$W = Q_{dd} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial n_d}{\partial t} \right)_{dd} + Q_{dt} \left(\frac{\partial n_d}{\partial t} \right)_{dt},$$

где Q_{dd} и Q_{dt} — энерговыделения в реакциях (d, d) и (d, t) . Коэффициент $1/2$ учитывает, что для реакции (d, d) нужно два дейтрана. Поскольку эта реакция идет с равной вероятностью по двум каналам, то $Q_{dd} = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$, $Q_{dt} = Q_3$. Окончательно

$$W = n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}} \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{4} = 9,96 \cdot 10^8 \frac{\text{эрГ}}{\text{с} \cdot \text{см}^3} = 99,6 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}.$$

9.21. Число реакций, происходящих в 1 с в 1 см^3 , равно $n^2 \overline{\sigma(v)v}/2$, где черта означает усреднение по всем значениям относительных скоростей атомов дейтерия (см. задачу 9.20).

9.22. $W = \frac{n_d^2}{2} \overline{\sigma v_{dd}} \left(\frac{3,94 + 3,26}{2} \right) = 2,88 \cdot 10^7 \frac{\text{эрГ}}{\text{с} \cdot \text{см}^3} = 2,88 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}$ (см. задачу 9.20).

9.23. $W = n_d n_t \overline{\sigma v_{dt}} Q_{dt} = \frac{n^2}{4} \overline{\sigma v_{dt}} Q_{dt}$, где $n_d = n_t = n/2$ (см. задачу 9.20). $N = WV$.

При $kT = 1 \text{ кэВ}$: $W = 4,36 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/см}^3$; $N = 21,8 \text{ кВт}$.

При $kT = 10 \text{ кэВ}$: $W = 0,422 \text{ Вт/см}^3$; $N = 211 \text{ МВт}$.

9.24. $\tau \geq \frac{12kT}{\overline{\sigma v_{dt}} Q_{dt}}$.

9.25. $W_{выд} = W_{нагр} = \frac{3kTn^2}{n\tau} = 0,48 \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}$.

9.26. $n\tau > \frac{36kT}{\overline{\sigma v_{dt}} Q_{dt}} \approx 3,10^{14} \text{ с/см}^3$.

9.27. $R > \frac{12\sigma_c T^4}{Q n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}}} = 3,45 \cdot 10^{10} \text{ см} = 3,45 \cdot 10^5 \text{ км}; \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 24,8 \text{ МэВ}$ — выделение энергии, соответствующее суммарному уравнению синтеза $5d \rightarrow {}^3\text{He} + {}^4\text{He} + p + 2n$; σ_c — константа Стефана–Больцмана.

9.28* $N_{dd}^{кп} / N_{dd}^{кп} \approx 1,6 \cdot 10^{21}$.

Решение. Как следует из решения задачи 9.20, скорость реакции (d, d) можно представить в виде

$$N_{dd} = \frac{n_d^2}{2} \overline{\sigma v_{dd}}, \quad \text{где} \quad \overline{\sigma v_{dd}} = A(m, T) \int_0^\infty v^3 \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) \sigma(v) dv;$$

$\mu = m/2$ — приведенная масса; v — относительная скорость.

При классическом рассмотрении реакция произойдет только тогда, когда кинетическая энергия относительного движения будет больше высоты кулоновского барьера: $\mu v^2/2 \geq U_{\text{кул}} = e^2/(2R_d)$, где $R_d = 1,7 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус дейтрона. В этом случае сечение взаимодействия $\sigma_{\text{кл}}(v) = 4\pi R_d^2$ и

$$\begin{aligned}\overline{\sigma v}_{\text{dd}}^{\text{кл}} &= A \int_0^\infty v^3 \sigma_{\text{кл}}(v) \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT_0}\right) dv = \tilde{A} \pi \left(\frac{e^2}{U_{\text{кул}}}\right)^2 \int_{U_{\text{кул}}}^\infty \mathcal{E} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{kT_0}\right) d\mathcal{E} \approx \\ &\approx \tilde{A} \pi \left(\frac{e^2}{U_{\text{кул}}}\right)^2 (kT_0)^2 \left(\frac{U_{\text{кул}}}{kT_0} + 1\right) \exp\left(-\frac{U_{\text{кул}}}{kT_0}\right) \approx \tilde{A} \pi \left(\frac{e^2}{U_{\text{кул}}}\right)^2 kT_0 U_{\text{кул}} \exp\left(-\frac{U_{\text{кул}}}{kT_0}\right),\end{aligned}$$

поскольку $U_{\text{кул}}/(kT_0) \approx 58 \gg 1$.

При вычислениях были введены обозначения $\mathcal{E} = \mu v^2/2$, $\tilde{A} = A(2/\mu)^2$.

В квантовом случае определяющую роль играет проницаемость кулоновского барьера. При $\mathcal{E} \ll U_{\text{кул}}$ это условие выполняется в задаче, поскольку $(\mathcal{E} \sim \frac{3}{2}kT \approx 1,4 \cdot 10^4 \text{ эВ} \ll 0,5 \text{ МэВ})$

$$D(\mathcal{E}) \approx \exp\left(-\frac{4e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{\mathcal{E}}}\right).$$

В этом случае сечение взаимодействия $\sigma_{\text{кв}}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})D(\mathcal{E})$, где $\sigma(\mathcal{E})$ — геометрическое сечение образования составного ядра, и

$$\begin{aligned}\overline{\sigma v}_{\text{dd}}^{\text{кв}} &= A \int_0^\infty v^3 \sigma_{\text{кв}}(v) \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT_0}\right) dv = \tilde{A} \int_0^\infty \mathcal{E} \sigma_{\text{кв}}(\mathcal{E}) \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{kT_0}\right) d\mathcal{E}; \\ \sigma_{\text{кв}}(\mathcal{E}) &= \sigma(\mathcal{E})D(\mathcal{E}) \approx \sigma(\mathcal{E}) \exp\left(-\frac{4e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{\mathcal{E}}}\right).\end{aligned}$$

Выражение для $\overline{\sigma v}_{\text{dd}}^{\text{кв}}$ содержит интеграл с произведением двух экспонент (падающей и медленно растущей). Главную роль здесь играет область значений энергий вблизи максимума показателя экспоненциальной функции

$$\left. \frac{d}{d\mathcal{E}} \left(\frac{\mathcal{E}}{kT_0} + \frac{4e^2 \sqrt{2\mu}}{\hbar \sqrt{\mathcal{E}}} \right) \right|_{\mathcal{E}=\mathcal{E}_{\text{max}}} = 0,$$

откуда

$$\mathcal{E}_{\text{max}} = 2kT_0 \sqrt[3]{\frac{\mu e^4}{\hbar^2 k T_0}} = 3,1 \cdot 10^4 \text{ эВ.}$$

Соответствующая длина волны де Броиля

$$\lambda = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu \mathcal{E}_{\text{max}}}} = 3,66 \cdot 10^{-11} \text{ см} \gg R_d.$$

Таким образом, в наиболее существенной области значений энергий справедлива аппроксимация $\sigma(\mathcal{E}) = \pi \lambda^2 = \pi \hbar^2 / (2\mu \mathcal{E})$ и

$$\overline{\sigma v}_{\text{dd}}^{\text{кв}} = \tilde{A} \frac{\pi \hbar^2}{2\mu} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{kT_0} - \frac{4e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{\mathcal{E}}}\right) d\mathcal{E}.$$

Подынтегральное выражение представляет собой функцию с острым максимумом и шириной порядка kT_0 . Так как $kT_0 \gg \mathcal{E}_{\max}$, то спадание функции вблизи экстремума определяется экспонентой $\exp(-\mathcal{E}/kT_0)$. Таким образом,

$$\overline{\sigma v}_{dd}^{\text{KB}} = \tilde{A} \frac{\pi \hbar^2}{2\mu} kT_0 \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{\max}}{kT_0} - \frac{4e^2 \sqrt{2\mu}}{\hbar \sqrt{\mathcal{E}_{\max}}}\right) = \tilde{A} \frac{\pi \hbar^2}{2\mu} kT_0 \exp\left(-6 \sqrt[3]{\frac{\mu e^4}{\hbar^2 kT_0}}\right).$$

Окончательно,

$$\frac{N_{dd}^{\text{KB}}}{N_{dd}^{\text{кп}}} = \frac{\hbar^2}{2\mu e^4} U_{\text{кул}} \exp\left(\frac{U_{\text{кул}}}{kT_0} - 6 \sqrt[3]{\frac{\mu e^4}{\hbar^2 kT_0}}\right) \approx 1,6 \cdot 10^{21}.$$

9.29* В магнитном поле все столкновения идут с моментом импульса $I=3/2$ и среднее сечение увеличивается в 1,5 раза.

Решение. При низких энергиях, т. е. при малых импульсах, деборильевская длина волны велика по сравнению с размерами частиц. По правилу квантования момента импульса взаимодействие возможно только в состоянии с $\mathbf{L}=0$, и полный момент импульса ядра как целого — чисто спиновый. Полный момент импульса $\mathbf{I}=\mathbf{S}_d + \mathbf{S}_t$ системы $d+t$ может принимать два значения: $I=3/2$ и $I=1/2$. Так как ядерные силы зависят от спинов сталкивающихся частиц и полный спин есть интеграл движения, то

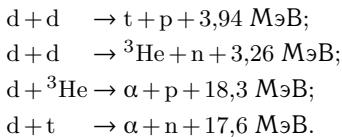
$$\langle \sigma \rangle = w_{3/2} \sigma_{3/2} + w_{1/2} \sigma_{1/2}.$$

Здесь $\langle \sigma \rangle$ — среднее сечение реакции; $\sigma_{3/2}$ и $\sigma_{1/2}$ — сечения реакции, соответствующие $I=3/2$ и $I=1/2$; $w_{3/2}$ и $w_{1/2}$ — доли состояний, соответствующие значениям полного момента импульса I из общего числа состояний, равного $(2S_d + 1)(2S_t + 1)$. По условию $\sigma_{1/2} \approx 0$, тогда

$$\langle \sigma \rangle = w_{3/2} \sigma_{1/2} = \frac{2 \cdot (3/2) + 1}{(2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1/2 + 1)} \sigma_{3/2} = \frac{2}{3} \sigma_{3/2}.$$

В магнитном поле, полностью поляризующем спины взаимодействующих ядер, возможно только одно состояние: $S_{dz} = 1$ и $S_{tz} = 1/2$; $I_z = 3/2$ (ось z совпадает с направлением магнитного поля \mathbf{B}). Тогда $\langle \sigma(B) \rangle = \sigma_{3/2}$ и, следовательно, среднее сечение возрастает в 1,5 раза.

9.30* Если учесть четыре реакции



то на один «сгоревший» deutрон выделяется энергия 7,18 МэВ. Пользуясь этим, легко найти, что при полном сгорании дейтерия, содержащегося в 1 л воды, выделится энергия $3,6 \cdot 10^3 \text{ кВт} \cdot \text{ч}$, что равно энергии, получающейся при сгорании 277 кг бензина.

9.31. $\mathcal{E} = 3 \cdot 10^7$ кДж.

9.32. $\frac{\mathcal{E}_{\text{кин}}}{\mathcal{E}_{\text{кон}}} = \frac{36kT}{3Q_1 + 2Q_2 + 2Q_3} \approx 0,06$, где Q_1, Q_2, Q_3 — энергии, выделяющиеся при реакциях синтеза, равные соответственно 3,3; 4; 17,6 МэВ.

$$\mathbf{9.33^*} n_d \tau = \frac{3kT}{\frac{\eta}{\eta-1} \overline{\sigma v_{dd}} \frac{2Q_{dd} + Q_{dt}}{4} - 1,5 \cdot 10^{-34} \sqrt{T}} \approx 7 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Решение. Реакция будет самоподдерживающейся, если выделяемая в реакторе плотность мощности превысит плотность совокупных потерь: $W \geq W_{\text{пот}}$. Последняя состоит из тепловых потерь, связанных с уходом частиц из зоны реакции, и потерь на тормозное излучение:

$$W = W_t + W_{\text{изл}}.$$

Выделяемая в реакторе мощность W берется из мощности термоядерного синтеза W_0 и частичного полезного преобразования мощности потерь как в корпусе реактора, так и в окружающей защите,

$$W = \eta W_0 + \beta (W_t + W_{\text{изл}}).$$

Таким образом, условие стационарной работы на уровне нулевой мощности при $\eta = \beta$

$$\eta (W_0 + W_t + W_{\text{изл}}) = W_t + W_{\text{изл}}.$$

Используя выражения для W_0 и W_t , полученные в задачах 9.20 и 9.24,

$$W_0 = n_d^2 \overline{\sigma v_{dd}} \cdot \frac{1}{4} (2Q_{dd} + Q_{dt}); \quad W_t = \frac{3n_d k T}{\tau},$$

получим

$$n_d \tau = \frac{3kT}{\frac{\eta}{\eta-1} \overline{\sigma v_{dd}} \frac{2Q_{dd} + Q_{dt}}{4} - 1,5 \cdot 10^{-34} \sqrt{T}} \approx 7 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

$$\mathbf{9.34.} \eta = \frac{Q}{Q_{\text{полн}}} = \frac{4,964}{24,68} = 0,2.$$

$$\mathbf{9.35.} \mathcal{E}_{\text{кин}}^{\max} = 19,8 \text{ МэВ}.$$

$$\mathbf{9.36.} \mathcal{J} = \frac{em_p}{\sigma t} \approx 9300 \text{ А}.$$

9.37* $t_{1/2} = 1,2 \cdot 10^{10}$ лет — время, за которое концентрация протонов убывает в два раза.

Решение. Согласно решению задачи 9.20 уравнение, описывающее изменение концентрации протонов, имеет вид

$$\frac{dn_p(t)}{dt} = -\frac{n_p^2(t)}{2} \overline{\sigma v_{pp}} \approx -\frac{n_p^2(t)}{2} \overline{\sigma v},$$

где $n_p(0) = \rho N_A = 9,25 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ — начальная плотность ядер водорода; $\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_p}} = 5,6 \cdot 10^7 \text{ см/с}$ — средняя тепловая скорость протонов. Интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{1}{n_p(t)} - \frac{1}{n_p(0)} = \frac{\sigma \overline{v} t}{2},$$

откуда следует, что концентрация протонов уменьшается вдвое за время $t_{1/2} = \frac{2}{n_p(0)\sigma v} = 1,2 \cdot 10^{10}$ лет.

9.38. Эффект можно заметить, если число $N_{\text{вын}}$ ядер, подверженных вынужденному делению, превысит дисперсию фона, т. е. дисперсию числа спонтанно делящихся ядер $N_{\text{сп}}$. Дисперсия фона $\sqrt{\Delta N_{\text{сп}}^2} \approx \sqrt{N_{\text{сп}}} = \sqrt{\lambda N t_0}$. За время t_0 $\sqrt{N_{\text{вын}}} \approx \sigma N j t_0$, где N — число ядер урана в момент времени t . Таким образом, $j \geq \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{A \ln 2}{T_{1/2} N_A m t_0}} \approx 5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$.

9.39. Грубая оценка: $R \sim \lambda \approx \frac{1}{n\sigma} = \frac{A}{\rho N_A \sigma} \approx 4,2 \text{ см}$, откуда масса «шарика» $M \approx 5,7 \text{ кг}$. Более точный расчет дает $R \approx \frac{3A}{\sigma\rho N_A (\nu - 1)} \approx 8,3 \text{ см}$ и $M \approx 45 \text{ кг}$.

9.40. $t = \frac{n}{n_0 \sigma \sqrt{2\mathcal{E}/M}} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}$, где n_0 — концентрация ядер ^{235}U , M — масса нейтрона, n — число поколений нейтронов, сменившихся к моменту заданного выделения энергии деления: n находится из уравнения $\frac{k_\infty^n - 1}{k_\infty - 1} = \frac{W}{\mathcal{E}_{\text{дел}}}$, где $\mathcal{E}_{\text{дел}} \approx 200 \text{ МэВ/акт деления}$, $n \approx 3,27 \cdot 10^4$.

$$\mathbf{9.41*} \quad \beta = \left(\frac{\hbar c}{E_\gamma r_0 A^{1/3}} \right)^2 \approx 17.$$

Решение. Фотоделение через состояние 1^- происходит при поглощении $E1$ (электрических дипольных) квантов, а через состояние 2^+ — при поглощении $E2$ (электрических квадрупольных) квантов. Так как энергия гамма-квантов больше высоты барьеров, то отношение вероятностей деления определяется только отношением сечений поглощения квантов ядром, равным $\beta = (\lambda/R_j)^2$ (см. решение задачи 7.31). Здесь $\lambda = \lambda/(2\pi)$ — приведенная длина волны γ -кванта, R_j — радиус ядра. Таким образом, отношение равно

$$\beta = \left(\frac{\hbar c}{E_\gamma r_0 A^{1/3}} \right)^2 \approx 17.$$

Это значит, что происходит преимущественное деление под действием $E1$ -квантов. При двухфотонном поглощении световой квант, практически не меняя энергии ядра, фактически меняет спин и четность основного состояния, и деление уже будет происходить под действием $E1$ -квантов через состояние 2^+ . Вероятность деления через канал 2^+ увеличится в 17 раз и будет равна сечению деления через канал 1^- под действием $E1$ -квантов.

9.42. $\frac{w_{\text{дел}}(1^-)}{w_{\text{дел}}(2^+)} = \frac{\sigma_{\text{дел}}(1^-)}{\sigma_{\text{дел}}(2^+)} D(\mathcal{E}_\gamma) = \left(\frac{\lambda}{R_{\text{яд}}} \right)^2 \exp \left(-\frac{2\pi(U_0 - \mathcal{E}_\gamma)}{\hbar\omega} \right) = 4,8$, где $D(\mathcal{E}_\gamma)$ — проницаемость параболического барьера (см. задачу 3.41). (См. также решение задачи 9.41.)

$$\mathbf{9.43.} \quad L_{\text{max}} = \sqrt{\frac{(1-\alpha)W}{8\pi\Phi_0}} \leq 110 \text{ км.}$$

§ 10. Элементарные частицы. Резонансы. Лептоны и кварки. Реакции при высоких энергиях

10.1. Запрещены распады 2 и 4, так как не сохраняется лептонный заряд, и распад 8, так как не сохраняется барионный заряд; в распаде 2 нарушается еще закон сохранения энергии.

10.2. Распады 2, 3, 9, 10 и реакции 6, 7 запрещены, так как в них не сохраняется лептонный заряд. При изучении взаимодействия нейтрино, полученных в распаде 1, с протонами было показано, что идет реакция 5, а не 6, хотя последняя энергетически более выгодна. Тем самым было доказано существование двух типов нейтрино.

10.3. В реакциях 1, 6, 8, 10, 12, 14 $|\Delta S|=0$, и они идут по сильному взаимодействию с характерными временами $10^{-22} \div 10^{-24}$ с (ядерные времена). В реакциях 2, 7, 9, 11 $|\Delta S|=1$, и они практически ненаблюдаемы. В распадах 3 и 4 $|\Delta S|=1$, и они идут по слабому взаимодействию с характерными временами $\sim 10^{-10}$ с. В процессах 5 и 13 $|\Delta S|=2$, и поэтому такие процессы не наблюдаются.

10.4. По указанному правилу разрешены распады 2, 3, 4, 5, 6, 8; запрещены распады 1, 7, 9, 10.

10.5. 1. Барион Λ^0 — синглет с зарядом $Z=0$. Следовательно, $N=1$, $T=0$, $Z_{\text{cp}}=0$, $S=-1$, $Y=0$, $T_3=0$.

2. Барион Σ — триплет с зарядом ± 1 и 0. Следовательно, $Z_{\text{cp}}=0$, $N=3$, $T=1$, $Y=0$, $S=-1$, $T_3=Z$.

3. Барион Ξ — дублет с зарядами 0 и -1 . Следовательно, $N=2$, $T=1/2$, $Z_{\text{cp}}=-1/2$, $S=-2$, $Y=-1$, $T_3=-1/2$ для $Z=-1$ и $T_3=1/2$ для $Z=0$.

4. Отрицательно заряженный барион Ω^- — синглет. Следовательно, $N=1$, $Z_{\text{cp}}=-1$, $S=-3$, $Y=-2$, $T=0$, $T_3=0$.

5. Мезон π с зарядами ± 1 , 0. Следовательно, $N=3$, $T=1$, $T_3=Z$, $S=0$, $Y=0$. Заметим, что если в составе мультиплета имеется истинно нейтральная частица, то при вычислении числа частиц в мультиплете N нужно вместе считать частицы и античастицы. Во всех других случаях под N подразумевается число частиц.

6. Мезон K — дублет с зарядами 0 и $+1$. Следовательно, $N=2$, $Z_{\text{cp}}=1/2$, $S=1$, $T=1/2$; $T_3=1/2$ для K^+ и $T_3=-1/2$ для K^0 .

7. Мезон η — нейтральный синглет. Следовательно, $N=1$, $T=S=Z_{\text{cp}}=T_3=0$.

10.6. Распады 2 и 4 запрещены законом сохранения лептонного заряда. Реакция 5 практически ненаблюдаема из-за несохранения странности. Распады 3 и 6 разрешены. Распад 1 запрещен законом сохранения энергии.

10.7. Реакция 2 и распад 8 невозможны, так как не сохраняется барионный заряд. Реакции 3 и 4 практически ненаблюдаемы из-за несохранения странности. Распады 1 и 7 происходят по слабому взаимодействию, распад 6 — по электромагнитному. Реакция 5 происходит по сильному взаимодействию.

10.8. Реакции 1 и 2 происходят по сильному взаимодействию; распады 3 и 5 — по электромагнитному; 4 и 6 — по слабому взаимодействию.

10.9* Странность K^0 -мезона равна +1, а странность \bar{K}^0 -мезона равна -1. Поскольку странность нуклонов равна 0, а странность других барионов либо равна нулю, либо отрицательна, то поглощение \bar{K}^0 -мезона может происходить с сохранением странности, т. е. по сильному взаимодействию. Поглощение K^0 -мезона может происходить лишь с несохранением странности, т. е. по слабому взаимодействию. Следовательно, K^0 -мезон в отличие от \bar{K}^0 будет слабо поглощаться веществом. Поскольку при переходах $K^0 \rightleftharpoons \bar{K}^0$ $|\Delta S|=2$, то такие переходы крайне маловероятны (см. задачу 10.3).

10.10. Реакции 1, 3, 4 происходят по сильному взаимодействию; распады 6, 7, 8 — по слабому; реакции 2 и 5 — по электромагнитному взаимодействию.

10.11. 1. Так как $\Delta S=2$, то возможна, но крайне маловероятна.

2. Так как $\Delta S=2$, то возможна, но крайне маловероятна.
3. Нет, так как $(m_n - m_p) < m_\mu$.
4. Нет, не сохраняется лептонный заряд.
5. Нет, не сохраняется барионный заряд.
6. Нет, не сохраняется лептонный заряд.

10.12. Λ^0 -гиперон или Σ^0 -гиперон.

10.13. $M = m_n N \frac{\tau}{t} \approx 170$ т, где $m_n \approx 1,7 \cdot 10^{-24}$ г — масса нуклона.

10.14. $\tau = \tau_0 \frac{\mathcal{E}_\mu}{m_\mu c^2} = 5,4$ мкс, где τ_0 — собственное время жизни мюона, $\mathcal{E}_\mu = \frac{m_K^2 c^4 + m_\mu^2 c^4}{2 m_K c^2}$.

10.15. $\tau \sim \frac{\hbar}{\Delta \mathcal{E}} \approx 2,6 \cdot 10^{-20}$ с.

10.16.* 1. $A=38$ (на неподвижной мишени). 2. $A \approx 3000$ (на встречных пучках), т. е. все известные ядра.

Решение. Найдем сначала скорость центра масс системы. Пусть энергия налетающей частицы \mathcal{E} , а покоящейся $m_2 c^2$. Суммарная энергия системы $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + m_2 c^2$. Полный импульс системы \mathbf{p}_1 . Рассматривая эту систему как сложную частицу, находим скорость центра масс:

$$\frac{\mathbf{v}_{\text{ц.м.}}}{c} = \frac{\mathbf{p}_1 c}{\mathcal{E}_1 + m_2 c^2}.$$

Энергии частиц в системе центра масс (СЦМ) равны

$$\mathcal{E}_1^* = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathbf{p}_1 \mathbf{v}_{\text{ц.м.}}}{\sqrt{1 - (v_{\text{ц.м.}}/c)^2}}; \quad \mathcal{E}_2^* = \frac{m_2 c^2 - 0}{\sqrt{1 - (v_{\text{ц.м.}}/c)^2}}.$$

Таким образом, суммарная энергия в СЦМ

$$\mathcal{E}_{\text{ц.м.}}^* = \mathcal{E}_1^* + \mathcal{E}_2^* = \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2 m_2 c^2 \mathcal{E}_1},$$

где было использовано релятивистское выражение для полной энергии частицы

$$\mathcal{E}_1^2 = (p_1 c)^2 + (m_1 c^2)^2.$$

Эту формулу можно было бы получить и без преобразований Лоренца, считая, что две частицы в СЦМ рождают одну с массой $M c^2 = \mathcal{E}_{\text{ц.м.}}^*$.

Используя инвариант, получим $(Mc^2)^2 = \mathcal{E}_{\text{п.м.}}^2 - 0^2 = (\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 = (\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)^2 - [\mathcal{E}_1^2 - (m_1 c^2)^2]$, откуда следует то же выражение:

$$\mathcal{E}_{\text{п.м.}}^* = \sqrt{m_1^2 c^4 + m_0^2 c^4 + 2m_2 c^2 \mathcal{E}_1}.$$

Для двух одинаковых частиц $m_1 = m_2 = m_p$:

$$p + p \rightarrow M + \bar{M} + p + p$$

$$\text{и } \mathcal{E}_{\text{п.м.}}^* = \sqrt{2m_p c^2 (\mathcal{E}_1 + m_p c^2)}.$$

Очевидно, что $\mathcal{E}_{\text{п.м.}}^* \geq (2A m_p + 2m_p) c^2$, откуда

$$2m_p c^2 \mathcal{E}_1 + 2(m_p c^2)^2 \geq 4(m_p c^2)^2 (A + 1)^2.$$

Если учесть, что $\mathcal{E}_1 \gg m_p c^2$, то в первом случае (столкновения с неподвижным протоном) получим ответ

$$A \leq \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{2m_p c^2}} - 1 \leq 39,$$

т. е. $A = 38$ (включительно). На встречных пучках

$$2\mathcal{E}' = 2Am_p c^2 + 2m_p c^2 \approx 2Am_p c^2,$$

откуда $A \approx 3000$, т. е. практически все известные ядра.

10.17.* $\tau \approx 3 \cdot 10^{-22}$ с; $mc^2 \approx 3,1$ ГэВ.

Решение. Масса частицы в данном случае равна $\mathcal{E}_{\text{п.м.}}$, соответствующей положению максимума на графике. Ширина резонансной кривой на полуысоте $\Delta\mathcal{E} \approx 2$ МэВ. Время жизни находим из соотношения неопределенностей $\tau \approx \hbar / \Delta\mathcal{E} \approx 3 \cdot 10^{-22}$ с. Отметим, что табличное значение $\Delta\mathcal{E} = 87$ кэВ. Дело в том, что на графике приведен экспериментальный результат, где ширина определяется, помимо всего прочего, энергетическим разрешением установки, которая гораздо больше собственной ширины.

10.18. $m_\xi c^2 = \sqrt{m_\gamma c^2 (m_\gamma c^2 - 2\mathcal{E}_\gamma)} = 8,32$ ГэВ, $\beta = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{m_\gamma c^2 - \mathcal{E}_\gamma} \approx 0,13$.

10.19. $m_{J/\psi} c^2 = \mathcal{E} \sqrt{2(1 - \cos\theta)} = 3,1$ ГэВ; $\beta = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$.

10.20. $T \approx 751$ МэВ.

10.21. $\mathcal{E}_{\min} \geq 2m_B c^2 \approx 10,56$ ГэВ.

10.22. $\mathcal{E}_{\text{пор}} = 4m_\Sigma c^2 + m_p c^2 + 2 \frac{m_\Sigma^2}{m_p} c^2 = 8,8$ ГэВ.

10.23. $N_{\max} = \frac{\sqrt{2m_p c^2 (\mathcal{E}_p + m_p c^2)} - 2m_p c^2}{2m_\pi c^2} = 5,2$ (пар пионов), всего может родиться не более 10 пионов.

10.24. $T_{\text{пор}} = \frac{(m+M)^2 - (2m)^2}{2m} c^2 = 1,6$ ГэВ, где $m_p \approx m_n = m$; $M = m_A + m_K$, где m_K — масса либо $K^0 -$, либо K^+ -мезона.

10.25. $T_{\text{нор}} = 8,94 \text{ ГэВ}$.

$$\mathbf{10.26.} \quad \mathcal{E}_{\max} = \frac{m_{\mu}c^2}{2} \left(1 + \frac{m_e^2}{m_{\mu}^2} \right) \approx \frac{m_{\mu}}{2} \approx 52,8 \text{ МэВ.}$$

$$\mathbf{10.27.} \quad \mathcal{E}_{\min} = m_e c^2 \approx 0,5 \text{ МэВ}; \quad \mathcal{E}_{\max} \approx \mathcal{E}_{\mu} - \frac{m_{\mu}^2 c^4}{2 \mathcal{E}_{\mu}} \approx 10,5 \text{ ГэВ.}$$

$$\mathbf{10.28.} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{m_{\pi} c^2}{2 \sqrt{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}} = 0,027.$$

10.29. $\mathcal{E} = m_{\pi} c^2 \frac{2A_N}{\sigma_{\text{топ}} N_a \sigma} \approx 1,4 \text{ ТэВ, где } N_a \text{ — атомная масса азота, } \sigma = 2\pi R_N^2 \text{ — сечение рассеяния быстрых пионов, равное удвоенному геометрическому сечению ядра, } R_N = 1,3 \cdot 10^{-13} A_N^{1/3}.$

10.30. $T = 6,615 \text{ ГэВ}; \delta \mathcal{E} \approx 7,8 \text{ эВ; } \tau = 4,2 \cdot 10^{-15} \text{ с.}$

10.31. $m_D c^2 \approx 1,85 \text{ ГэВ; } \beta = 0,94; \tau \approx 4,2 \cdot 10^{-13} \text{ с.}$

10.32.* $m_{\Omega} c^2 \approx 1,7 \text{ ГэВ.}$

Решение. Для нахождения массы Ω^- -гиперона воспользуемся инвариантностью квадрата четырехимпульса:

$$m_{\Omega}^2 c^4 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 c^2.$$

Нетрудно видеть, что Λ^0 -гиперон и K^0 -мезон можно считать ультрарелятивистскими, поскольку массы этих частиц малы по сравнению с произведениями pc : $m_{\Lambda} c^2 \approx 1,1 \text{ ГэВ}$; $m_K c^2 \approx 0,49 \text{ ГэВ}$ (табличные данные). Поэтому $\mathcal{E}_1 \approx p_1 c$; $\mathcal{E}_2 \approx p_2 c$. Раскрывая скобки, получим $m_{\Omega}^2 c^4 \approx 2\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 - 2p_1 p_2 c^2 \cos \theta \approx 2p_1 p_2 c^2 (1 - \cos \theta)$, откуда

$$m_{\Omega} c^2 \approx 2\sqrt{P_{\Lambda} P_K} c \sin \frac{\theta}{2} = 1,68 \text{ ГэВ} \approx 1,7 \text{ ГэВ.}$$

10.33. $\tau_0 \approx 0,88 \cdot 10^{-16} \text{ с; } \beta = 0,835.$

10.34. $L = ct = c\tau_0 \frac{\mathcal{E}_{\Lambda}}{m_{\Lambda} c^2} \approx 50 \text{ см, где } \tau_0 \approx 2,66 \cdot 10^{-10} \text{ с; } m_{\Lambda} c^2 = 1116 \text{ МэВ.}$

10.35. $L = (2 \ln 2) c \tau_0 \frac{\mathcal{E}_{\pi}}{m_{\pi} c^2} = 770 \text{ м, где } \tau_0 = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с; } m_{\pi} c^2 \approx 140 \text{ МэВ.}$

Решение. За период полураспада $T_{1/2}$ пиона (по схеме $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_{\mu}$) половина пионов переходит в мюоны. Еще через $T_{1/2}$ число мюонов в потоке превышает число пионов в три раза. Таким образом, искомая длина $L = v_{\pi} \cdot 2T_{1/2}\gamma$, где $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\mathcal{E}_{\pi}}{m_{\pi} c^2}$.

Скорость пионов v_{π} близка к скорости света, поскольку $\mathcal{E}_{\pi} \gg m_{\pi} c^2$. Период полураспада $T_{1/2} = \tau_0 \ln 2$, где τ_0 — собственное время жизни π^+ ($\tau_0 = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ с}$). Окончательно

$$L \approx (2 \ln 2) \frac{c \tau_0 \mathcal{E}_{\pi}}{m_{\pi} c^2} \approx 770 \text{ м.}$$

Можно решить задачу иначе. Поскольку $\mathcal{E}_{\pi} = 10 \text{ ГэВ} \gg m_{\pi} c^2$, то пионы можно считать ультрарелятивистскими. Мюоны, вылетающие в направлении движения пионов, также имеют скорость $v \approx c$. Собственное время жизни мюона

примерно в 100 раз больше времени жизни пиона, поэтому распадом мюонов в данной задаче пренебрегаем. Тогда $N_\pi(x) + N_\mu(x) = N_\pi(0)$. По закону радиоактивного распада

$$dN_\pi(x) = -\lambda N_\pi(x) dt = -\frac{N_\pi(x)}{\tau} dt.$$

Здесь $\tau = \gamma\tau_0 = \tau_0 \frac{\mathcal{E}_\pi}{m_\pi c^2}$, а $v dt = c dt = dx$, откуда $\frac{dN_\pi(x)}{dx} = -N_\pi \frac{m_\pi c^2}{\mathcal{E}_\pi \tau_0 c}$, или $N_\pi(x) = N_\pi(0) \exp\left(-\frac{m_\pi c^2}{\mathcal{E}_\pi \tau_0 c} x\right)$. По условию $3N_\pi(L) = N_\mu(L)$, поэтому $4 \exp\left(-\frac{m_\pi c^2}{\mathcal{E}_\pi \tau_0 c} L\right) = 1$, откуда и следует приведенный выше ответ задачи.

10.36. $\frac{N_\mu(L)}{N_K(0)} = 1 - \exp\left(-\frac{m_K c^2}{\mathcal{E}_K} \frac{L}{v\tau_0}\right) = 0,364$, где $\tau_0 = 1,24 \cdot 10^{-8}$ с — собственное время жизни K^\pm .

10.37. $\frac{N_\mu(L)}{N_K(L)} \approx 1800$.

10.38. $\mathcal{E}_\mu = \frac{m_\pi^2 c^4 + m_\mu^2 c^4}{2m_\pi c^2} \cdot \frac{\mathcal{E}_\pi}{m_\pi c^2} \approx 330$ МэВ.

10.39* $N_\pi \approx 3,6 \cdot 10^7$ частиц/с.

Решение. Число пионов, достигших детектора, равно $n = \frac{N_\pi}{4\pi} \Omega e^{-t/\tau}$, где N_π — число всех генерированных пионов; $\Omega = S/L^2$ — телесный угол, под которым виден детектор из точки генерации пионов; t — время пролета пионом пути L ; τ — время жизни пиона в лабораторной системе отсчета:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \tau_0 \frac{\mathcal{E}}{m_\pi c^2} = \tau_0 \left(1 + \frac{T}{m_\pi c^2}\right).$$

Окончательно получаем

$$N_\pi = n \frac{4\pi L^2}{S} \exp\left(\frac{L}{c\tau} \frac{m_\pi c^2}{\sqrt{T^2 + 2m_\pi c^2 T}}\right) \approx 3,6 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

10.40. $\mathcal{E}_{\text{пор}} = (m_n - m_p + m_e)c^2 \approx 1,8$ МэВ.

10.41. $\mathcal{E}_e^{\max} \approx \mathcal{E}_\mu^{\max} \approx \frac{(m_\tau c^2)^2 + (m_\mu c^2)^2}{2m_\tau c^2} \approx 0,9$ ГэВ. Более точный расчет дает

$$\mathcal{E}_\mu^{\max} \approx \frac{m_\tau c^2}{2} \left[1 + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^2\right] = 0,894 \text{ ГэВ};$$

$$\mathcal{E}_e^{\max} \approx \mathcal{E}_\mu^{\max} \left[1 - \left(\frac{m_\mu c^2}{2\mathcal{E}_\mu^{\max}}\right)^2\right] = 0,891 \text{ ГэВ}.$$

10.42. $T = m_\pi c^2 \frac{2(m_p + m_n) + m_\pi}{2(m_p - m_\pi)} \approx 330$ МэВ.

10.43. $\mathcal{E}_p = m_p c^2 \approx 1$ ГэВ.

$$\mathbf{10.44.} \quad \mathcal{E}_p = m_p c^2 \frac{T}{2\epsilon} = 6,57 \cdot 10^{19} \text{ эВ; } \tau \approx \frac{1}{n\sigma c} \approx 10^{15} \text{ с} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ лет.}$$

$$\mathbf{10.45.} \quad T \approx 2,6 \cdot 10^{14} \text{ эВ; } \tau \approx 8 \cdot 10^{10} \text{ с.}$$

$$\mathbf{10.46.} \quad \mathcal{E}_{\mu} = m_{\mu} c^2 \frac{H}{\tau_0 c} \approx 6,4 \text{ ГэВ.}$$

10.47. $\mathcal{E}_{\min} = \Delta \mathcal{E} \approx \rho \alpha H \approx 9 \text{ ГэВ, где } \Delta \mathcal{E} — \text{потери энергии на ионизацию.}$

$$\mathbf{10.48.} \quad \frac{\delta T_{\mu}}{T_{\mu}} = \left(\frac{m_{\nu}}{m_{\pi} - m_{\nu}} \right)^2 \approx \begin{cases} 0,15 \cdot 10^{-4} & \text{при } m_{\nu} c^2 = 0,17 \text{ МэВ,} \\ 0,86 \cdot 10^{-5} & \text{при } m_{\nu} c^2 = 0,1 \text{ МэВ.} \end{cases}$$

10.49. Выход мюонных антинейтрино (нейтрино) составляет 2,0002% от числа пионов. Выход электронных антинейтрино (нейтрино) составляет 0,0002% от числа пионов.

10.50. Процесс рассеяния нейтрино на электронах — это тот же комптон-эффект (рассеяние фотонов на электронах) (см. задачу 1.50):

$$\mathcal{E} = \frac{T_e + pc}{2} = \frac{(T_e + \sqrt{T_e(T_e + 2m_e c^2)})}{2} = 5,24 \text{ МэВ.}$$

$$\mathbf{10.51.} \quad \cos \beta = \frac{T_e(\mathcal{E} + m_e c^2)}{\mathcal{E} \sqrt{T_e(T_e + 2m_e c^2)}} = 0,927; \quad \beta \approx 22^\circ \text{ (для } \mathcal{E} = 15 \text{ МэВ).}$$

10.52. $\Phi(v_{\mu})/\Phi(v_e) = 2$. Наблюдение потоков атмосферных нейтрино на установке Super-Kamiokande не подтверждает этот результат. Таким образом, следует признать факт несохранения электронного и мюонного лептонных зарядов и нейтринных осциляций, что является следствием наличия у нейтрино массы.

10.53. $(m_W c^2)_{\min} = (1 + \sqrt{2}/2)\mathcal{E} \approx 100 \text{ ГэВ.}$ (Современное табличное значение $(m_W c^2 = 80,22 \pm 0,26 \text{ ГэВ})$.

10.54. Электрон — продукт распада $\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_{\tau}$. Искомая проекция электрона максимальна, когда $\mathbf{p}_{\nu_e} = \mathbf{p}_{\nu_{\tau}}$ и когда она перпендикулярна \mathbf{p}_{τ} . Тогда $\mathbf{p}_{e\perp} c = m_{\tau} c^2 / 2 = 0,896 \text{ ГэВ.}$

10.55. $m_Z c^2 \approx 2p_{\mu}c \sin(\theta/2) = 97,5 \text{ ГэВ; } \beta = \cos(\theta/2) = 0,82.$ (Современное табличное значение $m_Z c^2 = 91,173 \pm 0,020 \text{ ГэВ.}$)

10.56. Минимальная длина волны γ -кванта соответствует максимальной энергии. Как видно из графика, максимальная зарегистрированная энергия (γ -квант + ψ) составляет 3,14 ГэВ. $\lambda_{\gamma} = 2\pi\hbar c/\mathcal{E}_{\gamma}; \mathcal{E}_{\gamma} = \mathcal{E}_{\max} - m_{\psi} c^2 = 40 \text{ МэВ} \ll 3,1 \text{ ГэВ; } \lambda_{\gamma} \approx 3,1 \cdot 10^{-12} \text{ см}$ (пренебрегаем отдачей ψ -мезона).

10.57*: Спин мюона направлен против его импульса; $l \approx 1470 \text{ м.}$

Решение. Определение спина как собственного момента импульса, т. е. момента импульса в системе покоя частицы, оказывается неприменимым к безмассовым частицам, обладающим нулевой энергией покоя, т. е. $mc^2 = 0$. Для них принято вводить *спиральность*, т. е. проекцию собственного момента импульса на направление движения частицы — единственное выделенное направление для частиц с $m = 0$. При этом частицы с $\mathbf{S} \uparrow \mathbf{p}$ называются *правоспиральными* (*правополяризованными*), а частицы с $\mathbf{S} \downarrow \mathbf{p}$ называются *левоспиральными* (*левополяризованными*). Фотон как истинно

нейтральная частица может менять свою спиральность (с помощью пластинки $\lambda/2$), а нейтрино — нет. Нейтрино по определению — левоспиральная частица, а антинейтрино — правоспиральная.

Так как каон K^+ имеет спин $S=0$, то $\mathbf{S}_\mu + \mathbf{S}_\nu = 0$. Кроме того. $\mathbf{p}_\mu + \mathbf{p}_\nu = 0$. Отсюда следует, что \mathbf{S}_μ антипараллелен \mathbf{p}_μ ($\mathbf{S}_\mu \nparallel \mathbf{p}_\mu$). Для ответа на второй вопрос задачи запишем закон сохранения энергии при распаде:

$$m_K c^2 = \mathcal{E}_\nu + \mathcal{E}_\mu = pc + \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + p^2 c^2},$$

где $p_\mu = p_\nu = p$. Возведя это равенство в квадрат, получим

$$pc = \frac{(m_K c^2)^2 - (m_\mu c^2)^2}{2m_K c^2} = 235,6 \text{ МэВ.}$$

Полная энергия мюона

$$\mathcal{E}_\mu = \sqrt{p^2 c^2 + m_\mu^2 c^4} \approx 258 \text{ МэВ.}$$

Из релятивистской формулы $\mathcal{E}_\mu = m_\mu c^2 / \sqrt{1 - \beta^2} = \gamma m_\mu c^2$ определим: $\gamma \approx 2,444$ и $\beta = 0,912$ (относительная скорость мюона). Пробег мюона в лабораторной системе отсчета

$$l = \beta c \tau_0 \gamma = 1,47 \cdot 10^5 \text{ см} = 1,47 \text{ км.}$$

При этом использовались табличные данные: $m_K c^2 = 493,6 \text{ МэВ}$; $m_\mu c^2 = 105,7 \text{ МэВ}$; $\tau_\mu = \tau_0 = 2,2 \text{ мкс}$. Схема распада приведена на рис. 181.

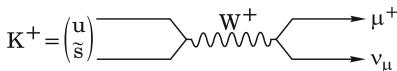


Рис. 181

$$10.58. \frac{q^2}{\hbar c} \sim \frac{2\hbar}{m_n c R_d} \sim 0,4.$$

$$10.59^*: r_{J/\psi} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\hbar c}{\sqrt{(4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}} = 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ см.}$$

Решение. Связанная система кварк-антикварк (в данном случае $(c\bar{c})$) с потенциалом взаимодействия $U = -q^2/r$ аналогична позитронию, и спектр ее возбуждений подобен энергетическому спектру атома водорода. Поэтому можно записать, что массы мезонов складываются из энергий покоя кварков за вычетом их энергии связи:

$$\mathcal{E}_1 = 2m_c c^2 - \frac{\mu q^4}{2\hbar^2} \frac{1}{1^2};$$

$$\mathcal{E}_2 = 2m_c c^2 - \frac{\mu q^4}{2\hbar^2} \frac{1}{2^2}.$$

где $\mu = m_c/2$ — приведенная масса. Здесь m_c обозначает массу с-кварка. Отличие в энергиях покоя двух состояний чармоная (т. е. J/ψ -мезона и ψ' -мезона) $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \frac{3}{16} \frac{m_c q^4}{\hbar^2}$. Из двух уравнений находим

$$m_c c^2 = \frac{4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{6} = 1,95 \text{ ГэВ}$$

и характерный радиус чармония

$$r_{J/\psi} = \frac{\hbar^2}{\mu q^2} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\hbar c}{\sqrt{(4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}} = 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ см.}$$

Поскольку кварки отсутствуют в свободном состоянии, то определение их энергии покоя невозможно. Это связано с тем, что в адронах три кварка, определяющие квантовые числа адрона и называемые валентными, окружены глюонами и виртуальными парами кварк–антикварк, называемыми морскими, и «масса» кварка должна зависеть от расстояния, на котором она определяется. На расстояниях $x \lesssim 10^{-14}$ см, где начинается асимптотическая свобода и «облака» глюонов и виртуальных кварковых пар «редеют», принято говорить о токовых (свободных) кварках. На больших расстояниях мы имеем дело с «одетыми» кварками, которые называются блоковыми, или конституентными (см. Приложение 2, табл. 5).

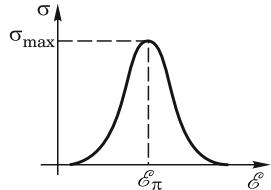
В рамках данного приближения почти свободных кварков по результатам эксперимента можно оценить как энергию покоя кварков, так и энергию их взаимодействия.

10.60. $m_b c^2 = \frac{1}{6}(4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) \approx 5,1 \text{ ГэВ}; \quad g^4 = \left(\frac{q^2}{\hbar c}\right)^2 = 32 \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{4\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1} \approx 0,585; \quad g^2 \approx 0,765 \sim 1, \quad q \approx 10 \text{ е.}$

10.61. $R \approx \frac{\hbar c}{m_W c^2} \approx 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ см.}$

10.62. $m_\Delta c^2 = 2m_p c^2 T_\pi + (m_p + m_\pi)^2 c^4 = 1232,5 \text{ МэВ}; \quad \tau \approx \hbar / \Gamma = 5,5 \cdot 10^{-24} \text{ с.}$

10.63* Решение. Резонансный характер поглощения пионов свидетельствует об образовании составного ядра, которое можно уподобить короткоживущей частице. Сечение образования составного ядра в резонансной области (рис. 182) определяется для бесспиновых частиц формулой



Брейта–Вигнера:

$$\sigma_{\text{полн}} = \pi \hat{\lambda}^2 \frac{\Gamma_{\text{упр}} \Gamma_{\text{полн}}}{(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)^2 + \frac{\Gamma_{\text{полн}}^2}{4}},$$

где $\hat{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi}$, λ — длина волны падающей частицы в системе центра масс, \mathcal{E} — суммарная энергия частиц в этой системе, \mathcal{E}_0 — энергия составного ядра (резонанса), $\Gamma_{\text{упр}}$ и $\Gamma_{\text{неупр}} = \Gamma_{\text{полн}} - \Gamma_{\text{упр}}$ — ширины резонанса, связанные с распадом по упругому и неупругим каналам.

Согласно закону сохранения электрического заряда распад составного ядра резонанса возможен только по каналу $\Delta \rightarrow \pi^+ p$, т. е. происходит только упругое рассеяние $\pi^+ + p \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ + p$, и в резонансе сечение

$$\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{упр}} = 4\pi \hat{\lambda}^2 = \frac{4\pi \hbar^2}{p^2}.$$

Импульс сталкивающихся частиц в системе центра масс $p = p_\pi = p_p$ находится из условия

$$M_\Delta c^2 = \sqrt{(pc)^2 + (m_p c^2)^2} + \sqrt{(pc)^2 + (m_\pi c^2)^2},$$

откуда

$$p = \sqrt{\frac{(M_\Delta^2 + m_p^2 - m_\pi^2)^2}{4M_\Delta^2} c^2 - m_p^2 c^2} = 227 \text{ МэВ/с};$$

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{4\pi\hbar^2 c^2}{p^2 c^2} = 95 \cdot 10^{-27} \text{ см}^2 = 95 \text{ мбн.}$$

Экспериментальное значение для данной реакции $\sigma_{\text{полн}} \approx 200$ мбн. Различие связано с тем, что в простейшем варианте формулы Брейта–Вигнера не учитываются спиновые состояния начального и конечного состояния системы. Имеются $(2S_p+1)(2S_\pi+1)$ начальных состояний системы и $2J+1$ конечных состояний Λ -резонанса, приводящих к одинаковому сечению (см. задачу 8.61).

В результате в формуле Брейта–Вигнера появляется множитель $g = \frac{2J+1}{(2S_p+1)(2S_\pi+1)}$, учитывающий статистический вес входного и выходного состояний системы. Сравнение теоретического и экспериментальных значений сечений позволяет определить, что $g \approx 2$, откуда находится полный момент резонанса $J=3/2$. Δ^+ и Δ^0 -резонансы представляют собой возбужденные состояния протона и нейтрона, т. е. системы кварков (uud) и (udd). При этом у них, как и у нуклонов, орбитальный момент относительного движения кварков равен нулю и возбуждение состоит в перевороте спина кварков d и u. Таким образом, $\mathbf{L}_\Delta = 0$, $S_\Delta = 3/2$ и $J \equiv J_\Delta = S_\Delta = 3/2$.

Полученный результат требует пояснения. Так как $S_p = 1/2$; $S_\pi = 0$, то в сумме они не могут дать $J=3/2$. Поэтому необходимо учитывать и орбитальное движение, т. е. закон сохранения момента нужно записывать в виде $\mathbf{J} = \mathbf{S}_p + \mathbf{S}_\pi + \mathbf{L}_{\pi p}$, где $\mathbf{L}_{\pi p}$ — орбитальный момент относительного движения. Считая, что радиус протона $r_p \approx 0,8 \cdot 10^{-13}$ см (фактически это комптоновская длина волны протона), получаем $pr_p = \hbar\sqrt{L(L+1)}$, или $\sqrt{L(L+1)} = r_p/\lambda$. Так как $\lambda = 0,87 \cdot 10^{-13}$ см, то $L \approx 0,83$. Следовательно, возможные значения $L = -0, 1$. Соображения, основанные на законе сохранения четности, показывают, что $L=1$ и $J=1/2+1=3/2$. Образно говоря, пролетающий пион за счет сильного взаимодействия захватывается протоном на орбиту с $L=1$, делает несколько оборотов и затем улетает.

Bo второй реакции (в отличие от предыдущей) возможен распад резонанса по схемам

$$\pi^- + p \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \begin{cases} \pi^- + p, \\ \pi^0 + n, \end{cases}$$

и таким образом появляется «неупругий» канал

$$\sigma_{\text{полн}} = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{неупр}},$$

где в резонансе (с учетом $g=2$)

$$\sigma_{\text{полн}} = 8\pi\lambda^2 \frac{\Gamma_{\text{упр}}}{\Gamma_{\text{полн}}}, \quad \text{или} \quad 68 \approx 190 \frac{\Gamma_{\text{упр}}}{\Gamma_{\text{полн}}},$$

откуда

$$\frac{\Gamma_{\text{упр}}}{\Gamma_{\text{полн}}} = \frac{\sigma_{\text{упр}}}{\sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{неупр}}} \approx 0,358; \quad \sigma_{\text{неупр}} \approx 1,8\sigma_{\text{упр}} \approx 0,64\sigma_{\text{полн}} \approx 44 \text{ мбн.}$$

Отметим, что другие неупругие процессы типа $\pi^0\pi^0n$ или $\pi^-\pi^0p$ запрещены законом сохранения энергии.

Рассмотренные резонансные состояния Δ^{++} и Δ^0 различаются проекциями изотопического спина. Изотопический спин пионов 1, а нуклонов $1/2$. Полный изоспин резонанса поэтому может быть $3/2$ и $1/2$. При этом (π^+p) -система обладает проекцией изоспина $T_3 = 3/2$ и является чистым состоянием с $T = 3/2$, а (π^-p) -система — проекцией $T_3 = 1/2$, т. е. является суммой состояний с $T = 3/2$ и $T = 1/2$.

10.64. $p = (uud); n = (udd); \Omega^- = (sss).$

10.65. $\pi^+ = (u\bar{d}); K^+ = (u\bar{s}).$

10.66. $K^0 = (d\bar{s}), \bar{K}^0 = (\bar{d}s).$

10.67. $\Xi^0 = (uss); \Lambda = (uds).$

10.68. $\pi^-; K^-.$

10.69.* $\sigma_3 = 2\sigma_2 - \sigma_1.$

Решение. Кварковый состав частиц из задачи:

$$K^+ = (u\bar{s}), \quad \Sigma^+ = (uus), \quad \Xi^0 = (uss), \quad \Omega^- = (sss).$$

Обозначим сечения взаимодействия кварков, имея в виду, что в задаче могут взаимодействовать кварки двух поколений: u — из первого поколения, s — из второго. Кроме того, заметим, что при $\mathcal{E} \gg mc^2$ сечения рассеяния частица-частица и частица-античастица одинаковы (теорема Померанчука). Таким образом,

$$\sigma_a = \sigma(uu) \approx \sigma(u\bar{d}) = \sigma(u\bar{d}) = \sigma(\bar{u}\bar{d});$$

$$\sigma_b = \sigma(u\bar{s}) = \sigma(u\bar{s}) \approx \sigma(d\bar{s}) = \sigma(\bar{u}s) \text{ и т. д.};$$

$$\sigma_c = \sigma(ss) = \sigma(s\bar{s}) = \sigma(\bar{s}\bar{s}).$$

Рассмотрим в качестве примера первую реакцию (рис. 183). Стрелками обозначены взаимодействия кварков: сплошная стрелка — с сечением σ_a ; штриховая стрелка — с сечением σ_b ; волнистая стрелка — с сечением σ_c . При указанных в задаче энергиях дебройлевская длина волны кварков оказывается много меньше размера частиц, поэтому можно считать, что происходят только одночастичные взаимодействия кварков, и в каждой из указанных реакций надо просуммировать сечения по всем возможным каналам. Таким образом, сечение взаимодействия

$$\sigma_1 = 2\sigma_a + 3\sigma_b + \sigma_c.$$

Вторая реакция $K^+ + \Xi^0$ дает сечение

$$\sigma_2 = \sigma_a + 3\sigma_b + 2\sigma_c.$$



Рис. 183

Аналогичное рассмотрение взаимодействия $K^+ + \Omega^-$ приводит к следующему выражению:

$$\sigma_3 = 3\sigma_b + 3\sigma_c.$$

Решая полученную систему уравнений, выражаем неизвестное сечение σ_3 через заданные сечения σ_1 и σ_2 :

$$\sigma_3 = 2\sigma_2 - \sigma_1.$$

10.70. $\sigma(\pi\rho) = 26$ мбн; $\sigma(\Lambda N) = 32$ мбн; $\sigma(\Xi N) = 25$ мбн.

10.71. $\sigma(\Lambda N) = 32$ мбн, $\sigma(\Xi N) = 25$ мбн; $\sigma(\Omega N) = 18$ мбн.

10.72. $m_{\Xi} \approx m_u + 2m_s \approx m_u + 2(\Delta + m_u) \approx 1290$ МэВ.

Замечание. Речь идет о блоковых (тяжелых) кварках, и $m_d \approx m_u$. Поэтому $m_d - m_p = m_s - m_u$.

10.73. а) $v_\mu + p \rightarrow \mu^- + \Delta^{++}$. Здесь возможны две схемы (рис. 184):



Рис. 184

б) $v_\mu + n \rightarrow \mu^- + p$ или $\mu^- + \Delta^+$;

в) $\bar{v}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$ или $\mu^+ + \Delta^0$;

г) $\bar{v}_\mu + n \rightarrow \mu^+ + \Delta^-$.

Отношение эффективных сечений этих реакций $\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c : \sigma_d = 1 : 2 : 2 : 1$.

10.74* Решение. Схема распада протона $p \rightarrow \pi^0 + e^+$ изображена на рис. 185. Масса X-бозона определяется из соотношения неопределенностей:

$$Mc^2 \approx \frac{\hbar}{\tau} \approx 0,6 \cdot 10^{23} \text{ эВ} = 0,6 \cdot 10^{14} \text{ ГэВ.}$$

Заряд X-бозона равен сумме зарядов двух u-кварков:

$$Q_X = +\frac{4}{3}e.$$

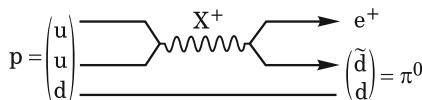


Рис. 185

10.75. $R \approx 2 \cdot 10^{-29}$ см; $Q_Y = +e/3$. Схема распада изображена на рис. 186.

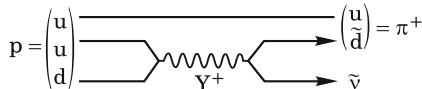


Рис. 186

10.76* Решение. На рис. 187 и рис. 188 показаны все 24 (2×12) перехода между кварками и лептонами, идущих через нейтральный Z^0 и заряжен-

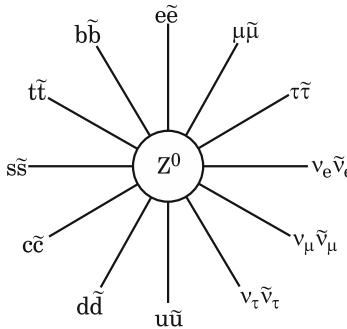


Рис. 187

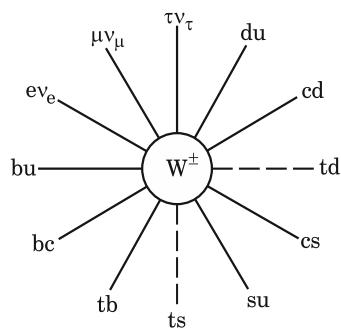


Рис. 188

ные промежуточные бозоны W^\pm , допустимые по теории электрослабого взаимодействия. При этом не наблюдавшиеся экспериментально переходы $t \leftrightarrow s$ и $t \leftrightarrow d$ изображены штриховыми линиями. Приведем примеры наблюдаемых переходов:

$$e^+ + e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow l\bar{l} + \bar{\nu}_l, \text{ где } l \equiv e, \nu, \tau - \text{лектоны},$$

— рождение нейтринных пар в результате $e\bar{e}$ -столкновений;

$$e^+ + e^- \longleftrightarrow Z^0 \leftrightarrow u + \bar{u}$$

— рождение в $e\bar{e}$ -столкновениях и распад в адроны либо рождение в $p\bar{p}$ -столкновениях и распад на пару лептон-антилептон;

$$d \rightarrow u + W^- \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e$$

— распад нейтрона;

$$u + \bar{d} \rightarrow W^+ \rightarrow l\bar{l} + \bar{\nu}_l, \text{ где } l \equiv e, \mu, \tau - \text{лектоны},$$

— рождение в $p\bar{p}$ -столкновениях и распад на пару лептон-антилептон.

Как следует из рис. 187, в процессах с участием Z^0 -бозона аромат кварков не меняется. На рис. 189 приведены доминирующие при слабых распадах адронов переходы между кварками, идущие через обмен W^\pm -бозонами. В то же время допустимые законом сохранения заряда переходы $c \rightarrow d$, $b \rightarrow u$ и другие, изображенные на рис. 188, также возможны. Например, экспериментально наблюдается как распад $D^0 \rightarrow K^- + \pi^+$, соответствующий переходу $c \rightarrow \bar{s}$ (рис. 190), так и распад $D^0 \rightarrow \pi^- + \pi^+$, соответствующий переходу $c \rightarrow d$. Отношение вероятностей этих переходов составляет $5 \cdot 10^{-2}$. Переходы же через поколение подавлены еще сильнее.

В условии задачи B^- -мезон, имеющий кварковый состав $(b\bar{u})$, в вершине 2 (рис. 73 из условия) распадается. Наиболее вероятный процесс — это распад

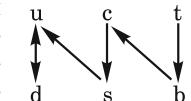
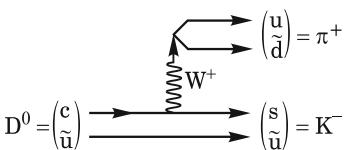


Рис. 189

б-кварка по схеме $b \rightarrow c + W^-$ (преобразование в ближайший более легкий кварк второго поколения).

Таким образом, в вершине 2 рождается тяжелая частица с кварковым составом ($\bar{c}u$). Это D^0 -мезон, т. е. $X \equiv D^0$. Кроме того, в эмульсии оставил след,



возможно, мюон, поскольку образовавшийся при распаде б-кварка виртуальный W^- -бозон мог распасться по схеме

$$W^- \rightarrow \begin{cases} \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \\ e^- + \bar{\nu}_e, \\ \tau^- + \bar{\nu}_\tau. \end{cases}$$

Рис. 190

Далее в вершине 3 D^0 -мезон распадается. Схема его распада изображена на рис. 190. Наиболее вероятен распад с-кварка в рамках второго поколения по схеме

$$c \rightarrow s + W^+.$$

В свою очередь, виртуальный W^+ -бозон распадается, как сказано в условии задачи, по нелептонному каналу. Наиболее вероятен такой распад:

$$W^+ \rightarrow u + \bar{d} \equiv \pi^+.$$

Таким образом, в вершине 3 D^0 -мезон распадается по схеме

$$D^0 \rightarrow K^- + \pi^+, \quad \text{где } K^- = (s\bar{u}).$$

Возможны и другие каналы распада D^0 -мезона через K^- -мезон с образованием любого числа пионов: $D^0 \rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^0$ или, например, $D^0 \rightarrow K^- + \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$.

10.77. Неизвестная частица X — это Ω^- -гиперон. При соударении K^- и p , кроме Ω^- , образовались еще две частицы. Это пара каонов K^0 и K^+ .

10.78.* Странность частицы $S=1$. Это может быть K^0 , а также D^0 или B^0 .

Решение. По условию задачи электрический и барионный заряды частицы равны $Q=0$, $B=0$, а проекция изотопического спина $T_3=-1/2$. Ответ надо искать, очевидно, среди мезонов, т. е. частиц, имеющих состав (кварк, антикварк).

По условию это может быть странный мезон, хотя не исключен очарованный или красивый мезон. Воспользуемся формулой Гелл-Мана–Нишиджими

$$Q = T_3 + \frac{1}{2}(B + S + C + b + t) = T_3 + \frac{1}{2}Y,$$

где B — барионный заряд, S — странность, C — очарование, b — красота, t — правдивость, Y — гиперзаряд. Подстановка в эту формулу данных задачи дает уравнение (для случая поиска странныго мезона)

$$0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0 + S),$$

откуда $S=1$. Таким образом, это $K^0 = (\bar{d}\bar{s})$. В принципе, это может быть и очарованный мезон $D^0 = (\bar{u}\bar{s})$. В этом случае по формуле Гелл-Мана–Нишиджими должно быть $C=1$. Также не исключен случай совсем редкой частицы с кварками третьего поколения — B^0 -мезона.

10.79. Антинейтрон \tilde{n} .

10.80. $Y = -2$, $S = -3$. Ω^- -гиперон.

10.81. $Y = -1$; $S = -2$. Ξ^0 -гиперон.

10.82. $\mu_{\Delta^{++}} = 2\mu_p = 5,58 \mu_{яд}$.

10.83. $\mu_{\Omega^-} = 1,7 \mu_{яд}$. Масса странного кварка принята равной $m_s \approx M_\Omega / 3 \approx 557$ МэВ.

10.84.* $k \approx 8 \cdot 10^{27}$ монополей.

Решение. Монополь, летящий со скоростью $v = \sqrt{2\mathcal{E}/M}$, в 1 с инициирует $N = \sigma n v$ распадов протонов (σ — сечение реакции, n — концентрация протонов). При этом освобождается энергия

$$Nm_p c^2 = \sigma n v m_p c^2,$$

переходящая в тепло при поглощении позитрона и γ -квантов. По условию $k\sigma n v m_p c^2 = L_C$, где k — число монополей внутри Солнца. Сечение реакции распада протона находится из условия распада одного протона на длине 1 см: $n_p \sigma = 1$; $\sigma = 1/n_p = 3 \cdot 10^{-24}$ см 2 , где n_p — концентрация протонов в 1 см 3 воды, $n_p = 10 N_A (m/\mu) \approx 3,3 \cdot 10^{23}$ см $^{-3}$ (в молекуле воды 10 протонов).

Число протонов в 1 см 3 Солнца

$$n = \frac{\rho}{m_p} = \frac{M_C}{\frac{4}{3}\pi R_C^3} \frac{1}{m_p}.$$

Отсюда

$$k = \frac{L_C}{\sigma n v m_p c^2} = \frac{4L_C n_p \pi R_C^3}{3M_C c^2 \sqrt{2\mathcal{E}/M}} \approx 8 \cdot 10^{27}.$$

10.85.* $\mathcal{E}_{пор} \approx 270$ ГэВ.

Решение. На встречных пучках протонов (uud) и антiproтонов ($\bar{u}\bar{d}\bar{d}$) может родиться реальный W^+ -бозон в реакции $u + \bar{d} = W^+$, если $\mathcal{E}_W > m_W c^2$. В ультрарелятивистском случае энергия распределяется между кварками точно так же, как и импульс. По закону сохранения энергии

$$m_W c^2 = \mathcal{E}_u + \mathcal{E}_{\bar{d}} = (p_u + p_{\bar{d}})c = 0,45 \frac{\mathcal{E}_{пор}}{3} + 0,45 \frac{\mathcal{E}_{пор}}{3},$$

откуда

$$\mathcal{E}_{пор} = \frac{m_W c^2}{0,3} \approx 270 \text{ ГэВ}.$$

Совершенно аналогично при столкновении кварков d и \tilde{u} может родиться W^- -бозон. Порог реакции будет таким же.

10.86. $\mathcal{E}_{пор} \approx 300$ ГэВ.

10.87. См. рис. 191.

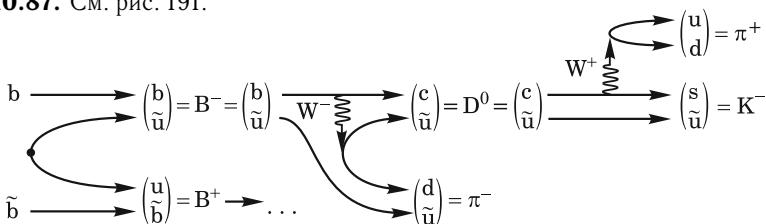


Рис. 191

10.88. См. рис. 192.

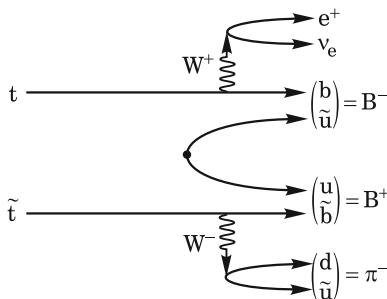


Рис. 192

10.89. См. рис. 193.

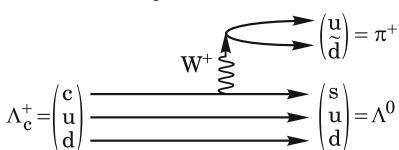


Рис. 193

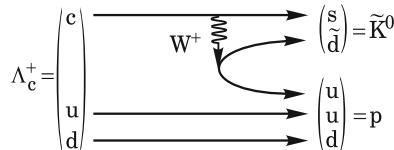


Рис. 194

10.90. См. рис. 194.

10.91. Заметим, что реакция $\nu_e + p \rightarrow n + e^+$ не идет, поскольку запрещена законом сохранения лептонного заряда. Поэтому реакция может идти только на нейтронах. Причем так как энергия нейтрино меньше 15 МэВ, то возможно детектирование только электронных нейтрино ν_e на нейтронахдейтерия в реакции $\nu_e + {}_1^2d \rightarrow p + p + e^-$, откуда $\mathcal{E}_{\text{пор}} = 1,37 \text{ МэВ}$.

10.92. $\mathcal{E}_{\nu_c}^{\text{пор}} = 15,5 \text{ МэВ}; \mathcal{E}_{\nu_{\mu}}^{\text{пор}} = 121,5 \text{ МэВ}$.

10.93*: $\mu_p = 3\mu_{\text{яд}}; \mu_n = -2\mu_{\text{яд}}$.

Решение. Сейчас к проблеме магнитных моментов нуклонов развит более наглядный подход, основанный на обобщенном принципе Паули. Согласно этому принципу волновая функция нуклона (произведение орбитальной, спиновой, изоспиновой и цветовой функций кварков) должна быть антисимметрична относительно перестановки любой пары тождественных кварков. Отсюда следует, что спины одинаковых кварков в нуклонах параллельны (цветовая функция всегда антисимметрична, орбитальная функция при $l=0$ — симметрична, следовательно, изоспиновая и спиновая функции — симметричны). Тем самым задача вычисления магнитных моментов нуклонов сводится к вычислению суммарного магнитного момента двух частиц со спином 1 (пара одинаковых кварков с параллельными спинами) и одной со спином 1/2 (оставшийся夸к).

Напомним выражение для магнетонов: $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c}$; $\mu_{\text{яд}} = \frac{e\hbar}{2m_p c}$. Отсюда видно, что магнитный момент частицы $\mu \propto \frac{q}{m}$, где q — заряд частицы. Для

кварков

$$\mu_u = \frac{2/3}{1/3} \mu_{яд} = 2\mu_{яд} = g_u \mu_{яд}, \quad \text{где } g_u = 2.$$

$$\mu_d = -\frac{1/3}{1/3} \mu_{яд} = -\mu_{яд} = g_d \mu_{яд}, \quad \text{где } g_d = -1.$$

Кварковый состав протона $p=(u\uparrow, u\uparrow, d\downarrow)$, нейтрона $n=(d\uparrow, d\uparrow, u\downarrow)$. Для протона суммарный спин u -кварков $S_u = 1$, спин d -кварка $S_d = 1/2$. Для нейтрона $S_u = 1/2$, $S_d = 1$.

Подсчитаем g -фактор для протона и нейтрона как системы кварков по аналогии с фактором Ланде:

$$g = \frac{g_u + g_d}{2} + \frac{g_u - g_d}{2} \frac{S_u(S_u+1) - S_d(S_d+1)}{J(J+1)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{S_u(S_u+1) - S_d(S_d+1)}{J(J+1)}.$$

Подсчет для протона:

$$g_p = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = 3,$$

для нейтрона

$$g_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 1 \cdot 2}{\frac{3}{4}} = -2.$$

Таким образом, $\mu_p = 3\mu_{яд}$; $\mu_n = -2\mu_{яд}$.

10.94. $\mathcal{E} = (m_\Delta - m_n)c^2 = 1231 - 939 = 292$ МэВ. (См. решение задачи 10.93.)

10.95. $\tau \approx \frac{\hbar}{\alpha^2 m_e c^2} \frac{8r_B^3}{\Lambda_e^3} = \frac{8r_{кл}}{\alpha^6 c} = 5 \cdot 10^{-10}$ с, где r_B — боровский радиус электрона в атоме водорода, $r_{кл} = \frac{e^2}{mc^2}$ — классический радиус электрона.

10.96. $t_p \approx t_{яд} \frac{r_{1p}^3}{\Lambda_\pi^3} = 0,32 \cdot 10^{-18}$ с, где $\Lambda_\pi = \frac{\hbar}{m_\pi c} = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см — комптоновская длина волнны пиона (радиус сильного взаимодействия), $t_{яд} \approx \Lambda_яд/c \approx 0,5 \cdot 10^{-23}$ с — характерное «ядерное время», r_{1p} — радиус основного состояния протониума.

10.97*: $\mathcal{E}_{пл} = \frac{m_n c^2}{4}$; $R_n = \frac{4\pi\hbar}{m_n c} = 2,64$ фм.

Решение. Волновая функция основного сферически симметричного состояния (орбитальный момент равен нулю) частицы в трехмерной сферической яме с непроницаемыми стенками $\psi = A \frac{\sin kr}{r}$. Условие на границе $\psi(R)=0$ дает разрешенные значения волновых чисел: $k = \frac{\pi}{R} n$. Таким образом, минимальная энергия трех безмассовых кварков в непроницаемой сфере $\mathcal{E}_{кв} = 3\hbar k c = \frac{3\pi\hbar c}{R}$, так как из-за различия в цвете они могут втроем находиться на нижнем уровне. Обозначим плотность энергии глюонного поля через ε . Тогда энергия кварков и глюонов

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{кв} + \mathcal{E}_{пл} = \frac{3\pi\hbar c}{R} + \varepsilon \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Минимизируя это выражение, получаем

$$R_{\min} = \left(\frac{3\hbar c}{4\varepsilon} \right)^{1/4}, \text{ а } \mathcal{E}_{\min} = 4\pi\hbar c \left(\frac{4\varepsilon}{3\hbar c} \right)^{1/4} = \frac{4\pi\hbar c}{R_{\min}}.$$

Поскольку $\mathcal{E}_{\min} = m_n c^2$, то

$$R_n = R_{\min} = 4\pi \frac{\hbar}{m_n c} = 4\pi \lambda_n = 2\lambda_n = 2 \cdot 1,32 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Энергия глюонного поля составляет

$$\mathcal{E}_{\text{gl}} = \varepsilon \cdot \frac{4}{3}\pi R_{\min}^3 = \frac{\pi\hbar c}{R_{\min}} = \frac{m_n c^2}{4}.$$

т. е. четверть энергии покоя нуклона.

10.98. Поскольку $\sigma(\mathcal{E}) \propto \mathcal{E}^2$, то $\frac{\sigma(\mathcal{E}=1 \text{ МэВ})}{\sigma(\mathcal{E}=10 \text{ МэВ})} = 10^{-2}$.

10.99. $m_{\eta b(1S)} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \sqrt{1 - \frac{2\mathcal{E}_Y}{\mathcal{E}}} = 9388,7 \frac{\text{МэВ}}{c^2}; \quad \Delta m = m_{\Upsilon(1S)} - m_{\eta b(1S)} = 71,4 \frac{\text{МэВ}}{c^2}$. Испускается магнитный дипольный γ -квант M1.

10.100. $\mathcal{E}_{\max} = 18,2 \text{ ГэВ}, \quad \mathcal{E}_{\min} = 1,2 \text{ ГэВ}$. Максимальная энергия мюона соответствует вылету мюона вдоль импульса боттомония, а минимальная — в обратном направлении.

10.101. $mc^2 = \sqrt{2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2(1 - \cos\alpha)} = 125,6 \text{ ГэВ}$. Бозон Хиггса распался на лепту, так как угол разлета меньше 180° .

10.102. $\mathcal{E}_V = \frac{(m_\mu + m_W + m_p)^2 - m_p^2}{2m_p} c^2 \approx \frac{m_W^2}{2m_p} c^2 = 3500 \text{ ГэВ}$.

10.103. $j_V = \frac{2I_C}{\mathcal{E}} = 64 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Детектор BOREXINO регистрирует $(66 \pm 7) \cdot 10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$.

10.104. Уравнение реакции $p + p \rightarrow d + e^+ + \nu_e$. Выделившаяся энергия распределяется между позитроном и нейтрино, поэтому энергии нейтрино распределены непрерывно от нуля до \mathcal{E}_V^{\max} . Последняя соответствует покоящемуся позитрону:

$$\mathcal{E}_V^{\max} = (2m_p - m_d - m_e)c^2 = 0,42 \text{ МэВ.}$$

10.105. $\Delta t = \frac{L}{c} \left(\frac{c}{\gamma} - 1 \right) \approx \frac{L}{2c} \left(\frac{mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 = 2,7 \text{ мкс.}$

10.106. $\mathcal{E}_V^{\min} = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} m_\mu c^2 + (m_n - m_p)c^2 = 161,3 \text{ МэВ.}$

10.107* Решение. Поскольку импульсы отдачи ядра лития и импульсы нейтрино равны, то закон сохранения энергии примет вид (T — кинетическая энергия ядра лития)

$$M_{\text{Be}}c^2 = M_{\text{Li}}c^2 + T + \sqrt{(m_Vc^2)^2 + 2M_{\text{Li}}c^2T}.$$

Здесь учтено, что в силу очень большой массы по сравнению с нейтрино движение ядра лития можно описывать нерелятивистскими формулами: $T = P_{\text{Li}}^2 / (2M_{\text{Li}})$. Кроме того, кинетическая энергия ядра лития ничтожно мала по сравнению с массами покоя ядер. Уединяя корень и возводя в квадрат, получим после отбрасывания члена T^2

$$T = \frac{(M_{\text{Be}} - M_{\text{Li}})^2 - m_{\nu}^2}{2M_{\text{Be}}} c^2.$$

Считая, что масса электронного нейтрино равна нулю (по крайней мере, она пренебрежимо мала по сравнению с массой стерильного нейтрино), получаем

$$\Delta\mathcal{E} \approx \Delta T = \frac{m_{\nu}}{2M_{\text{Be}}} m_{\nu} c^2 = 7 \text{ МэВ.}$$

10.108. $\mathcal{E}(L) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt[5]{1 + \mathcal{E}_0 \cdot 5A\delta^3 L}} = 12,3 \text{ ГэВ.}$ Если сделанное Коэном и Гленшоу предположение верно, то число нейтрино с большой энергией должно значительно уменьшиться, что ставит под сомнение результаты в обсуждаемом эксперименте.

10.109. $m_{\nu} = \mathcal{E}\sqrt{\delta} = 0,124 \text{ ГэВ}/c^2$,

$$\cos\theta = 1 - \frac{m_{\nu}^2 c^4 (\Delta\mathcal{E})^2}{2\mathcal{E}^2 (\mathcal{E} - \Delta\mathcal{E})^2}; \quad \theta \approx \frac{m_{\nu} c^2 \Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}(\mathcal{E} - \Delta\mathcal{E})} = \frac{\sqrt{\delta}}{99} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ рад}$$

(здесь мы пренебрегли массой электрон-позитронной пары и δ). Если посчитать, что потеря энергии произошла на середине пути нейтрино, то угловое отклонение соответствует у детектора разбросу пучка примерно на 20 м, что приведет к тому, что эффективное расстояние от ЦЕРНа до детектора в Италии оказывается больше, чем расстояние по прямой, а значит, скорость нейтрино будет еще больше рассчитанной.

10.110*: Угловая скорость вращения Земли

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28}{8,64 \cdot 10^4} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

Скорость точки на поверхности Земли на широте ЦЕРНа

$$v_3 = \omega_3 R_3 \cos\varphi = \omega_3 R_3 \cos 45^\circ \approx 330 \text{ м/с.}$$

Время пролета нейтрино от ЦЕРНа до Гран-Сассо

$$\tau = \frac{L}{v} \approx \frac{L}{c} = \frac{730 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 2,43 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

При вылете из ускорителя нейтрино относительно инерциальной системы координат имеет дополнительную скорость, связанную с вращением Земли. В силу того, что скорость нейтрино равна скорости света, модуль результирующей скорости также равен скорости света, но вектор скорости повернулся на угол $\delta \approx v_3/c$. Поэтому инерциальный наблюдатель увидит, что нейтрино смеетсяся на восток относительно детектора на расстояние $l = v_3 \tau = 330 \cdot 2,43 \cdot 10^{-3} = 0,8 \text{ м}$. Поэтому, как видно из рис. 195, из-за вращения Земли нейтрино

пройдет путь \tilde{L} , больший на $\Delta = l \cos \theta = l \cos 45^\circ \approx 0,57$ м. Эта величина приводит к положительной поправке к скорости $\Delta v = \Delta/\tau = 235$ м/с.

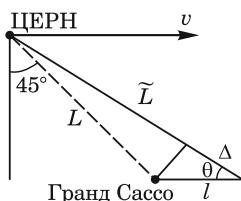


Рис. 195

$$\Delta S = \frac{a_K \tau^2}{2} = c \omega_3 \tau^2 \sin \theta \approx 3 \cdot 10^{10} \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6 \cdot 10^{-6} \approx 9 \text{ см},$$

что меньше полученной выше оценки. По-видимому, это обусловлено тем, что мы пользовались нерелятивистским выражением для кориолисовой силы.

$$10.111^* (m_2^2 - m_1^2) c^4 = \frac{2 \mathcal{E} h c}{L} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2.$$

Решение. Нейтрино определенного типа не обладает фиксированной массой и поэтому не может распространяться в пространстве «без изменения» своего типа. Фиксированную массу имеют другие состояния, которые нельзя приписать к какому-либо типу. Эти состояния могут распространяться в пространстве как свободные частицы, волновые функции которых являются плоскими волнами. Согласно принципу суперпозиции, волновая функция нейтрино определенного сорта может быть представлена в виде линейной комбинации волновых массивных нейтрино. Если в результате ядерной реакции происходит рождение нейтрино определенного сорта, то все компоненты линейной комбинации определенным образом синхронизированы («подогнаны»). Однако при дальнейшем распространении разные компоненты приобретают различный фазовый сдвиг, и первоначальная синхронизация нарушается. При этом возможен переход нейтрино одного типа в другой. В этом и состоит явление нейтринных осцилляций. Подчеркнем, что сам факт наличия

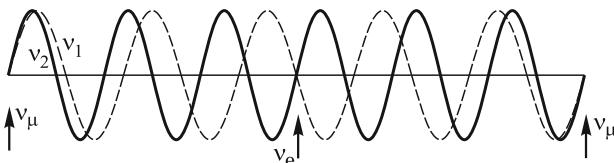


Рис. 196

осцилляций как раз и доказывает, что нейтрино — массивные частицы. Для безмассовых нейтрино этот эффект отсутствовал бы. Качественная картина осцилляций приведена на рис. 196.

Запишем волновые функции антинейтрино в момент рождения, считая, что волновые функции массивных нейтрино нормированы на единицу:

$$\tilde{v}_e(x, t) = \cos \theta \tilde{v}_1(x, t) + \sin \theta \tilde{v}_2(x, t),$$

$$\tilde{v}_\mu(x, t) = -\sin \theta \tilde{v}_1(x, t) + \cos \theta \tilde{v}_2(x, t).$$

Введем начало координат «в точке» рождения электронного нейтрино и будем отсчитывать время от момента рождения. Тогда

$$\tilde{v}_e(0, 0) = \cos \theta \tilde{v}_1(0, 0) + \sin \theta \tilde{v}_2(0, 0) = 1,$$

$$\tilde{v}_\mu(0, 0) = -\sin \theta \tilde{v}_1(0, 0) + \cos \theta \tilde{v}_2(0, 0) = 0.$$

Из этих соотношений находим $\tilde{v}_1(0, 0) = \cos \theta$ и $\tilde{v}_2(0, 0) = \sin \theta$. Поскольку

$$\tilde{v}_1(x, t) = \tilde{v}_1(0, 0) \exp\left(\frac{i(p_1 x - E_1 t)}{\hbar}\right) = \tilde{v}_1(0, 0) \exp(i\varphi_1)$$

$$\text{и} \quad \tilde{v}_2(x, t) = \tilde{v}_2(0, 0) \exp\left(\frac{i(p_2 x - E_2 t)}{\hbar}\right) = \tilde{v}_2(0, 0) \exp(i\varphi_2),$$

где $E_{1,2}^2 = p_{1,2}^2 c^2 + m_{1,2}^2 c^4$, то волновая функция антинейтрино

$$\tilde{v}_e(x, t) = \cos^2 \theta \exp(i\varphi_1) + \sin^2 \theta \exp(i\varphi_2).$$

Следовательно, плотность вероятности обнаружить антинейтрино

$$w(x, t) = |\tilde{v}_e(x, t)|^2 = |\cos^2 \theta \exp(i\varphi_1) + \sin^2 \theta \exp(i\varphi_2)|^2 = \\ = \cos^4 \theta + \sin^4 \theta + 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Периодом осцилляций L называется длина, на которой антинейтрино возвращается в исходное состояние, т. е. $w(L, t) = w(0, 0)$, или $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi$. Согласно условию

$$\mathcal{E}_{1,2} = \sqrt{p^2 c^2 + m_{1,2}^2 c^4} \cong pc + \frac{m_{1,2}^2 c^4}{2pc} \approx \mathcal{E} + \frac{m_{1,2}^2 c^4}{2\mathcal{E}}$$

и

$$\varphi_1 - \varphi_2 \cong \frac{(m_2^2 - m_1^2)c^4 t}{2\mathcal{E}\hbar}.$$

Поскольку антинейтрино движется практически со световой скоростью, то $ct \cong L$ и

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi = \frac{(m_2^2 - m_1^2)c^3 L}{2\mathcal{E}\hbar},$$

откуда

$$(m_2^2 - m_1^2)c^4 = \frac{2\mathcal{E}hc}{L} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2.$$

§ 11. Излучение

11.1* Решение. Из полного числа фотонов dn_ω с частотами в интервале $d\omega$ вблизи ω , находящихся в 1 см³ вакуумированной полости в пределах телесного угла $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, к стенке будут лететь

$$dn_{\omega, \theta} = dn_\omega \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} dn_\omega \sin \theta d\theta$$

фотонов. Нормальная компонента плотности их потока $dj_{\omega, \theta}$, $\left[\frac{\text{фотон}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right]$ получается умножением dn_{ω} на нормальную компоненту скорости

$$dj_{\omega, \theta} = dn_{\omega, \theta} \cdot c \cos \theta.$$

Если считать, что фотоны отражаются от стенки зеркально (это не сказывается на общности результата), то каждый из них передает стенке импульс $2p_n = 2 \frac{\hbar \omega}{c} \cos \theta$. Таким образом, фотоны создают давление

$$dP_{\omega, \theta} = 2p_n dj_{\omega, \theta} = d\rho_{\omega} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta,$$

где $d\rho_{\omega} = \hbar \omega dn_{\omega}$ — плотность энергии фотонов с частотами в интервале $d\omega$ вблизи ω ;

$$dP_{\omega} = \int_{(0)}^{(\theta)} dP_{\omega, \theta} = d\rho_{\omega} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} d\rho_{\omega}.$$

Полное давление

$$P = \int_{(\omega)} dP_{\omega} = \frac{1}{3} \int_{(\omega)} d\rho_{\omega} = \frac{1}{3} \rho.$$

Малое отверстие в полости ведет себя как абсолютно черное тело, поскольку излучение, попавшее через это отверстие внутрь полости, в результате многократного отражения от стенок практически полностью поглощается, так что коэффициент поглощения отверстия можно считать равным единице. Излучение, покидающее полость через малое отверстие, по интенсивности и спектральному составу идентично излучению абсолютно черного тела с температурой T . Вычислим, какую энергию в интервале частот $d\omega$ испускает в единицу времени полость через отверстие площадью dS при плотности излучения $d\rho_{\omega}$ в полости.

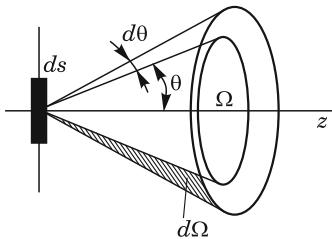


Рис. 197

Энергия этого излучения, выходящего из отверстия под углом θ к нормали к площадке dS в телесном угле $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ (рис. 197), очевидно, равна

$$d\rho_{\omega} c dS \cos \theta \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2} d\rho_{\omega} c dS \cos \theta \sin \theta d\theta.$$

Суммарное количество энергии в интервале частот $d\omega$, исходящее из отверстия в единицу времени, найдем интегрированием по полупространству:

$$\frac{1}{2} d\rho_{\omega} c dS \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{4} d\rho_{\omega} c dS.$$

Интегрирование по всем частотам дает полное количество энергии, исходящее из отверстия в единицу времени: $\frac{\rho c}{4} dS$. С другой стороны, отверстие имеет ту же излучательную способность, что и абсолютно черная поверхность

ность той же площади: $j dS$, где $j \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right]$ — плотность потока энергии излучения. Таким образом, мы получаем

$$j(T) = \frac{\rho(T)c}{4}. \quad (*)$$

Иногда (в фотометрии, например) интегральную (по всем частотам) плотность потока энергии, излучаемой с единицы поверхности протяженного источника излучения в телесный угол $d\Omega$ под углом θ к нормали к поверхности, записывают так:

$$dj_0 = B_\theta \cos \theta d\Omega.$$

Коэффициент пропорциональности B_θ называют в этом случае яркостью протяженного источника в направлении угла θ . Если B_θ не зависит от угла θ , т.е. $B_\theta = B$, то такой источник называют *ламбертовым*. Абсолютно черное тело — ламбертов источник излучения.

Вычислим суммарную плотность потока энергии излучения j , посылаемую единицей поверхности абсолютно черного тела в телесный угол 2π :

$$j = \int_0^{\pi/2} B \cos \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta = \pi B. \quad (**)$$

Кроме того, эта же величина в соответствии с законом Стефана–Больцмана равна σT^4 , где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4}$. Приравнивая $(**)$ к полученному ранее выражению $(*)$, получаем, что яркость

$$B = \frac{\rho c}{4\pi} = \frac{\sigma T^4}{\pi}.$$

Плотность потока энергии, излучаемой на всех частотах с единицы площади абсолютно черного тела, имеющего температуру T , в телесный угол 2π , называется энергетической светимостью (интегральной излучательной способностью):

$$R(T) = \frac{\rho(T)c}{4} = \sigma T^4.$$

В соответствии с вышеприведенными рассуждениями излучательную способность абсолютно черного тела на частоте ω под углом θ к нормали можно записать так:

$$R_{\omega, \theta} = \frac{c}{4\pi} \rho_\omega \cos \theta.$$

Это выражение называется законом Ламберта.

$$\mathbf{11.2*} \quad \rho(T) = aT^4; \quad s(T) = \frac{4a}{3}T^3, \quad \text{где } a = \frac{4\sigma}{c}.$$

Решение. Пусть равновесное тепловое излучение содержится в объеме V . Тогда его внутренняя энергия U и энтропия S соответственно равны

$$U(V, T) = \rho(T)V; \quad S(V, T) = s(T)V. \quad (*)$$

Воспользуемся термодинамическими тождествами

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V; \quad T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V.$$

Подставляя в первое из них уравнение состояния излучения $P = \frac{\rho(T)}{3}$ и соотношение (*), находим, что

$$s(T) = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{dT}. \quad (**)$$

Подставляя полученный результат и первое из соотношений (*) во второе тождество, находим уравнение для $\rho(T)$:

$$\frac{d^2\rho}{dT^2} = \frac{3}{T} \frac{d\rho}{dT},$$

откуда $\rho(T) = aT^4$, а также

$$s(T) = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{dT} = \frac{4}{3} aT^3.$$

Полученная постоянная a в этих выражениях может быть выражена через постоянную Стефана–Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{с} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{К}^4}$. Интегральная плотность потока теплового излучения $j = \sigma T^4$ зависит от температуры по закону Стефана–Больцмана $j = \sigma c/4$. Кроме того, $j = \rho c/4$ (см. задачу 11.1), откуда постоянная $a = 4\sigma/c = 7,56 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{К}^4}$.

Заметим, что соотношение $j = \rho c/4$ легко получить, если рассматривать излучение как идеальный газ фотонов, движущихся со скоростью c . Как известно из молекулярно-кинетической теории газов, плотность потока частиц, т. е. число частиц z , движущихся со средней тепловой скоростью \bar{v} и пересекающих за 1 с единицу площади поверхности стенки сосуда, равно $z = n\bar{v}/4$. В этой формуле n — концентрация молекул газа, в нашем случае — это число фотонов в единице объема.

$$\mathbf{11.3.} \quad S_2 - S_1 = \frac{16\sigma}{3c} T^3 (V_2 - V_1).$$

$$\mathbf{11.4.} \quad A = \frac{4\sigma}{3c}; \quad cv = \frac{16\sigma}{3c} T^3; \quad P = \frac{4\sigma}{3c} T^4, \quad cv = 8c_V^{\text{нд}}; \quad \Phi = 0.$$

$$\mathbf{11.5.} \quad A = \frac{16\sigma}{3c} T_1^3 (T_1 - T_2)(V_2 - V_1).$$

$$\mathbf{11.6.} \quad P = \frac{32\sigma}{3c} T^4 = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ дин/см}^2 = 1,26 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \approx 10^{-6} \text{ мм рт. ст.}$$

$$\mathbf{11.7.} \quad C_P = \infty; \quad VT^3 = \text{const} \quad \text{или} \quad PV^{4/3} = \text{const}.$$

$$\mathbf{11.8.} \quad T = \left(\frac{3c}{4\sigma} P \right)^{1/4} \approx 1,4 \cdot 10^5 \text{ К.}$$

$$\mathbf{11.9.} \quad n = \frac{4\sigma}{3ck_B} T^3 \approx 1,8 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}.$$

$$\mathbf{11.10.} \quad \frac{C_V^{\text{нд}}}{C_V^{\text{изл}}} = \frac{1}{8}.$$

$$\mathbf{11.11*.} \quad n = \frac{16\sigma}{3ck_B} T^3 = 7,3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}, \quad T_1 = \frac{T}{4} = 250 \text{ К.}$$

Решение. Температуры в обеих частях сосуда разные. Запишем условие механического равновесия поршня:

$$P_1 = nk_B T_1 = \frac{4\sigma}{3c} T_2^4 = P_2, \quad (*)$$

где индекс 1 относится к газу, а 2 — к излучению. Естественно предположить, что $T_1 \ll T_2$, так что давлением излучения при T_1 можно пренебречь. По условию задачи при малых изменениях температуры в обеих частях сосуда на одну и ту же величину направление смещения поршня не зависит от знака этой величины. Это означает, что в зависимости объема одной из частей сосуда от температуры имеется экстремум (минимум, если система устойчива), в окрестности которого $\partial V / \partial T = 0$. Так как $N = nV = \text{const}$, то в линейном приближении по отклонениям от равновесия $n \frac{\partial V}{\partial T} + V \frac{\partial n}{\partial T} = 0$, и, следовательно, $\partial n / \partial T = 0$. Тогда из соотношения (*) следует

$$n k_B dT_1 = \frac{16}{3c} \sigma T_2^3 dT_2.$$

По условию задачи $dT_1 = dT_2$, откуда

$$n = \frac{16\sigma T_2^3}{3ck_B} = 7,3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}.$$

Начальная температура газа $T_1 = T_2/4 = 250$ К, поэтому отношение давлений излучения $\frac{P_{1\text{изл}}}{P_{2\text{изл}}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{1}{256} \ll 1$, что оправдывает сделанное предположение о малости температуры газа в сравнении с температурой излучения.

$$\mathbf{11.12^*} T^4(r) = T_0^4 = \frac{R^2 h}{2(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Решение. Поток энергии, излученный элементом поверхности dS_1 и падающий на элемент другой поверхности dS_2 , определяется соотношением

$$d^2\Phi = \frac{B dS_1 dS_2 \cos\theta_1 \cos\theta_2}{R^2},$$

где в соответствии с рис. 198 a \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 — единичные векторы нормалей к соответствующим площадкам; R — расстояние между площадками; B —

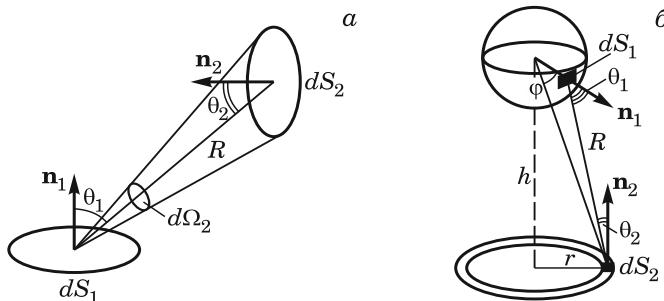


Рис. 198

коэффициент пропорциональности, называемый поверхностью яркостью (см. задачу 11.1), вообще говоря, зависящий от угла θ_1 (а также азимутального угла φ_1 , не изображенного на рисунке). Для абсолютно черного тела $B = \text{const}$

(закон Ламберта) и $B = \frac{\sigma T^4}{\pi}$. Если ввести телесный угол $d\Omega_2 = \frac{dS_2 \cos \theta_2}{R^2}$, под которым видна площадка dS_2 из центра первой площадки, то

$$d^2\Phi = \frac{\sigma T^4}{\pi} dS_1 \cos \theta_1 d\Omega_2.$$

На рис. 198б изображен шар — источник равновесного излучения, а под ним — зачерненная с обеих сторон поверхность, где и надо найти распределение температур. Из соображений симметрии ясно, что $T = T(r)$. При условии $h \gg a$ телесный угол, под которым из центра шара видно кольцо радиусом r на плоскости,

$$d\Omega_2 \approx \frac{2\pi r dr \cos \theta_2}{R^2} = \frac{2\pi r dr}{h^2 r^2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}.$$

Кроме того, условие $h \gg a$ позволяет считать, что $\theta_1 \approx \varphi$, где φ — угол между нормалью к dS_1 (т. е. радиусом) и вертикалью. Поэтому $dS_1 \cos \theta_1 \approx dS_1 \cos \varphi = dS'_1$, где dS'_1 — проекция dS_1 на экваториальную плоскость шара. Суммирование (интегрирование) по всем элементам полусферы дает πa^2 . Поэтому поток излученной шаром энергии и поглощенный кольцом

$$d\Phi = \pi a^2 \frac{\sigma T_0^4}{\pi} \frac{2\pi r dr h}{(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

В равновесии этот поток переизлучается кольцом по обе стороны плоскости:

$$d\Phi = 2\pi r dr \cdot 2\sigma T^4(r).$$

Из равенства этих потоков и следует ответ:

$$T^4(r) = T_0^4 \frac{a^2 h}{2(h^2 + r^2)^{3/2}}.$$

11.13. $T^4(r) = T_0^4 \frac{Rh}{2(h^2 + r^2)}$, где r — расстояние на плоскости до проекции оси цилиндра.

$$\text{11.14. } T^4(r) = T_0^4 \frac{a^2 h^2}{2(h^2 + r^2)^2}.$$

$$\text{11.15. } T_2 = T_1 \sqrt{\frac{r}{R}} \sqrt[4]{\cos \theta_1 \cos \theta_2}; \quad \frac{T_2(\theta=0)}{T_2(\theta=\pi/4)} = 2^{1/8} \approx 1,09.$$

$$\text{11.16. } T_2 = T_1 \sqrt[4]{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + D^2/4}} \right)} \approx 1125 \text{ K.}$$

$$\text{11.17. } A \approx 1 - \frac{\rho d^2}{4D^2}; \quad \frac{d}{D} \leq \frac{1}{16}.$$

$$\text{11.18* } T = \frac{T_C}{2} \sqrt{\frac{D}{F}} = 1500 \text{ K.}$$

Решение. Вычислим величину телесного угла Ω , под которым была бы видна линза из центра Солнца. Пусть L — расстояние от Солнца до Земли, а D — диаметр линзы. Угол α , под которым из центра Солнца виден радиус линзы, равен $\alpha = D/(2L)$, отсюда

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 4\pi \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \pi \alpha^2 = \pi \left(\frac{D}{2L} \right)^2.$$

Плотность потока энергии, излучаемой с поверхности Солнца, $j = \sigma T_{\text{C}}^4$. Поток энергии, излучаемой с поверхности Солнца в единицу телесного угла, равен $\frac{\sigma T_{\text{C}}^4 \cdot 4\pi R_{\text{C}}^2}{4\pi}$. Мощность солнечного излучения, падающего на линзу,

$$N_{\text{C}} = \sigma T_{\text{C}}^4 R_{\text{C}}^2 \pi \left(\frac{D}{2L} \right)^2.$$

Нагреваясь, шарик излучает. Когда поток энергии, полученной от Солнца, сравняется с потоком излученной энергии, установится равновесная температура шарика. Поток энергии с поверхности шарика диаметром d

$$N_{\text{ш}} = \sigma T^4 \cdot 4\pi \frac{d^2}{4}.$$

По условию размер изображения Солнца $\alpha_{\text{C}} F$ равен диаметру d шарика, где $\alpha_{\text{C}} = 2R_{\text{C}}^2/L$ — угловой размер Солнца, а F — фокусное расстояние линзы. Таким образом,

$$N_{\text{ш}} = \sigma T^4 \pi d^2 = \sigma T^4 \pi \alpha_{\text{C}}^2 F^2 = \sigma T^4 \pi F^2 \frac{4R_{\text{C}}^2}{L^2}.$$

Приравнивая потоки энергии N_{C} и $N_{\text{ш}}$, получаем

$$\sigma T_{\text{C}}^4 R_{\text{C}}^2 \pi \frac{D^2}{4L^2} = \sigma T^4 F^2 \pi \frac{4R_{\text{C}}^2}{L^2},$$

откуда и находим искомую температуру шарика

$$T = \frac{T_{\text{C}}}{2} \sqrt{\frac{D}{F}} = 1500 \text{ К.}$$

$$\mathbf{11.19.} \quad T = T_0 \left(1 + \frac{j_{\text{C}} D^2}{4\sigma T_0^4 d^2} \right)^{1/4} \approx 1980 \text{ К.}$$

$$\mathbf{11.20.} \quad \frac{j_{\text{коп}}}{j_{\text{эм}}} = \frac{n(m_{\text{p}} + m_{\text{e}})v^3}{2a_{\text{C}}^2 \sigma T^4} \approx 1,5 \cdot 10^{-8}.$$

$$\mathbf{11.21.} \quad T_{\text{рад}} = \sqrt[4]{\frac{J_{\text{C}}}{\sigma} \left(\frac{L}{R_{\text{C}}} \right)^2} \approx 5850 \text{ К.}$$

$$\mathbf{11.22.} \quad D = \frac{2L}{T^2} \sqrt{\frac{j}{\sigma}} = 1,55 \cdot 10^6 \text{ см} = 15,5 \text{ км, где } T \approx \frac{0,29}{\lambda_{\text{max}} [\text{см}]} = 1,45 \cdot 10^7 \text{ К.}$$

$$\mathbf{11.23.} \quad T_2 = \left(T_1^4 + T_{\text{ct2}}^4 - T_{\text{ct1}}^4 \right)^{1/4} \approx 340 \text{ К.}$$

$$\mathbf{11.24.} \quad T = T_{\text{C}} \sqrt{\frac{R_{\text{C}}}{2r}} = 2120 \text{ К.}$$

11.25. $T = T_{\text{C}} \sqrt{\frac{R_{\text{C}}}{2L}}$, где L — расстояние от Солнца до соответствующей планеты; $T_{\text{B}} \approx 340 \text{ К}$; $T_{\text{3}} \approx 290 \text{ К}$; $T_{\text{M}} \approx 230 \text{ К}$; $T_{\text{IO}} \approx 130 \text{ К}$.

Перегрев поверхности Венеры возникает вследствие парникового эффекта. Атмосфера Венеры толще и плотнее земной, в ее составе значительную долю составляет CO_2 . Атмосфера пропускает солнечный свет с $\lambda \approx 4800 \text{ \AA}$ (6000 K), но не пропускает с $\lambda \approx 10 \text{ мкм}$ (300 K).

$$\mathbf{11.26.} \quad T_{\text{C}} = 2T_3 \alpha_{\text{C}}^{-1/2} \approx 6000 \text{ К.}$$

11.27. $\frac{dT}{dt} = \frac{W - (1-\varepsilon)S\sigma T^4}{Mc} \simeq 0,25 \cdot 10^{-3}$ К/с $\simeq 0,96$ К/ч, где принято: масса человека $M = 70$ кг, поверхность человеческого тела $S \sim 1$ м², удельная теплоемкость тела человека $c = 4,2$ Дж/(г·К) (удельная теплоемкость воды). Можно также оценить максимальную длительность пребывания человека в открытом космосе (без принудительной вентиляции). Если принять, что максимально возможная температура для человеческого тела $T_{\max} = 315$ К (42°C), то тогда $\Delta T_{\max} = 5,4$ К. Полагая, что $dT/dt = \text{const}$, получим $\tau \simeq 6$ ч. Учет нелинейности производной только увеличит τ ($dT/dt \rightarrow 0$ с ростом T , и поэтому значение τ вырастет).

11.28. 1) $L = \frac{R_C}{2} \frac{T_C^2}{T^2} = (0,905 \div 2,53) \cdot 10^8$ км; 2) $\frac{R_C^2}{L^2} = 4 \left(\frac{T}{T_C} \right)^4 - \frac{(1-\eta)N}{\pi r^2 \sigma T_C^4 (1-a)}$.

В случае 1) ответ не зависит от отражательной способности a ; в случае 2) диапазон a определяется диапазоном температур и условием $(R_C/L)^2 > 0$ (правая часть положительна). Отражательная способность a должна лежать в пределах $0,773 < a < 0,971$.

Отсюда следует, что при $a \gtrsim 0,971$ станция не может работать в непрерывном режиме на любых расстояниях от Солнца (и без Солнца будет перегрев); при $a \leq 0,773$ получаем $L \geq 0,96 \cdot 10^8$ км, т. е. станция может работать на сколь угодно большом расстоянии от Солнца; при $a=0$ $L \approx (0,93 \div 2,9) \cdot 10^8$ км.

11.29.* $u_{\max} = \frac{2RT}{cA} \approx 0,1$ см/с, где $A = 56$ г/моль — атомная масса железа.

Решение. Согласно решению задачи 11.1 плотность потока энергии, излученной с поверхности пластиинки под углом θ к нормали в телесный угол $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, равна

$$dj = \frac{\rho c}{4\pi} \cos \theta d\Omega.$$

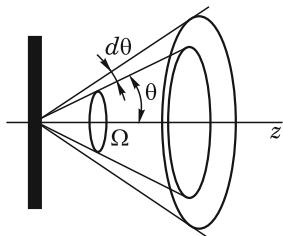


Рис. 199

Так как пластиинка излучает лишь в полупространство, то она получает составляющую плотности потока импульса в направлении угла θ

$$dp = \frac{dj}{c} = \frac{\rho}{4\pi} \cos \theta d\Omega \left[\frac{\text{Г} \cdot \text{см}/\text{с}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} \right].$$

Понятно, что только проекция составляющей импульса $dp_z = dp \cos \theta$ дает движение пластиинки вдоль по оси z (рис. 199):

$$dp_z = \frac{\rho}{4\pi} \cos^2 \theta d\Omega = \frac{\rho}{4\pi} \cos^2 \theta \cdot 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Полная плотность потока импульса, которая в силу симметрии направлена нормально к пластиинке, равна

$$p_z = \frac{\rho}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{\rho}{6} = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{c} T^4.$$

Найденная величина — это нормальная компонента импульса с единицой площади в единицу времени, т. е. нормальное давление. Полный импульс, полученный пластиинкой, находится интегрированием нормального давления по

площади пластины S и по времени излучения t . В соответствии с законом сохранения энергии он равен

$$p_{\text{полн}} = \int p_z dS dt = \frac{2}{3c} \int \sigma T^4 dS dt = \frac{2}{3c} \mathcal{E},$$

где \mathcal{E} — полная внутренняя энергия пластинки, переходящая в излучение. В соответствии с законом Дюлонга–Пти $\mathcal{E} = 3k_B TN$, где $N = \frac{M}{m} = N_A \frac{M}{A}$ — число атомов железа в пластинке, M — ее масса, A — атомная масса. Использованное для \mathcal{E} приближение является довольно грубым, так как не учитывает уменьшение теплоемкости при остывании пластины ниже температуры Дебая (для железа примерно 500 К). Тем не менее его можно использовать для оценки максимальной скорости, развиваемой пластинкой. Таким образом,

$$v_{\max} = \frac{p_{\text{полн}}}{M} = \frac{2RT}{cA} \approx 0,1 \text{ см/с.}$$

11.30. $\Delta T = T_3 \frac{W}{4W} \approx 7 \cdot 10^{-3}$ К, где T_3 — средняя температура поверхности Земли. $W_{\max} \approx 1,5 \cdot 10^{15}$ Вт = 150 Вт.

11.31. $T = \sqrt{\frac{L_C}{16\pi R^2 \sigma}} = 278$ К; $\Delta R = -2R \frac{\Delta T}{T} \sim -10^9$ м. Истинная орбита Земли эллиптическая: $R_{\max} \approx 152$ млн км, а $R_{\min} \approx 148$ млн км. Полученная оценка допустимых отклонений по порядку величины совпадает с этими отклонениями. Следовательно, реальная оценка допустимого температурного перегрева Земли несколько занижена.

11.32. $T = \left(\frac{\mathcal{E} \lambda_a N}{\sigma S} \right)^{1/4} \approx 11,1$ К, где $N = N_A \frac{m}{A}$ — число ядер в кусочке урана; $\lambda_a = \frac{\ln 2}{T_a^{1/2}}$ — постоянная распада; $S = 4\pi \left(\frac{3m}{4\pi\rho} \right)^{2/3}$ — площадь поверхности кусочка. Вклад осколков деления в разогрев шарика несущественен в силу большой разницы их парциальных времен полураспада.

11.33. Теплообмен падает в $N+1$ раз,

$$T_n^4 = \frac{(N+1-n)T_{\text{r}}^4 + nT_{\text{x}}^4}{N+1}, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

11.34.* 1) $T_{\text{a2}} = 950$ К; 2) $T_{\text{a2}} = 1230$ К.

Решение. 1) В первом случае ток не изменится. При повышении напряжения вдвое мощность тока увеличится также вдвое. В стационарном состоянии температура возрастает в $\sqrt[4]{2}$ раз и будет равной ≈ 950 К. Аналогично это записывается следующим образом:

$$W_{\text{a}} = \mathcal{J}_{\text{a}} V_{\text{a}}; \quad \mathcal{J}_{\text{a}} = \text{const}; \quad \frac{W_{\text{a1}}}{W_{\text{a2}}} = \frac{\mathcal{J}_{\text{a}} V_{\text{a1}}}{\mathcal{J}_{\text{a}} V_{\text{a2}}} = \frac{\sigma T_{\text{a1}}^4}{\sigma T_{\text{a2}}^4},$$

откуда $T_{\text{a2}} = T_{\text{a1}} \left(\frac{V_{\text{a2}}}{V_{\text{a1}}} \right)^{1/4} \approx 950$ К.

2) Во втором случае ток возрастет в $2^{3/2}$ раз, а мощность в $2^{5/2}$ раз. При этом температура анода повысится в $2^{5/8}$ раз и достигнет величины ≈ 1230 К. Запишем это:

$$T_{a2} = T_{a1} \left(\frac{W_{a2}}{W_{a1}} \right)^{1/4} = T_{a1} \left(\frac{\mathcal{J}_{a2} V_{a2}}{\mathcal{J}_{a1} V_{a1}} \right)^{1/4} = T_{a1} = \left(\frac{V_{a2}}{V_{a1}} \right)^{5/8} \approx 1230 \text{ К.}$$

11.35. $T_{a2} = T_{a1} \left(\frac{W_2}{W_1} \right)^{1/4} = 1083$ К, где $W_1 = \mathcal{J}_{a1} V_{a1} + W_{\text{нак1}} \approx \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{н}}} V_{a1} + W_{\text{нак1}} = 200$ Вт, $W_2 = \mathcal{J}_{a2} V_{a2} + W_{\text{нак2}} = \mathcal{J}_{a2} (\mathcal{E} - \mathcal{J}_{a2} R_{\text{нак}}) + W_{\text{нак2}} = 2550$ Вт.

$$\mathbf{11.36.} \frac{\rho_{\text{изл}}}{\mathcal{E}_{\text{пок}}} = \frac{4\sigma T^4}{c^3 m_p n} \sim 10^{-3}.$$

$$\mathbf{11.37.} \frac{\rho_{\text{изл}}}{\mathcal{E}_{\text{мар}}} = \frac{32\pi\sigma T^4}{cB^2} \approx 3,8.$$

11.38. $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta j}{j} \approx \frac{2}{5} \frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{\Delta V}{V} \approx 0,38$ (38%) — с учетом зависимости сопротивления нити от температуры, $\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{\Delta V}{V} \approx 0,48$ (48%) — без учета этой зависимости.

$$\mathbf{11.39*} \frac{\Delta B}{B} \approx \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\hbar\omega}{k_B T} \frac{\Delta T}{T_0} \approx 0,0256 \text{ (2,56%)}; \Delta T = \frac{5}{16} \frac{n}{\sigma T^2} \sqrt{\frac{k_B T_1}{\pi m_N}} \approx 5,6 \text{ К.}$$

Решение. При данной температуре диссоциация азота не происходит, так как $9,74 \text{ эВ} \gg 0,216 \text{ эВ}$ ($k_B T_0$). Концентрация молекул азота $n = \frac{P}{k_B T} = 1,93 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Длина свободного пробега молекул азота $\Lambda = \frac{1}{n \sigma_N} \approx 2,8 \text{ см} > 2 \text{ см}$ — размера колбы лампы. Таким образом, движение молекул внутри колбы — бесстолкновительное. Для оценки будем считать, что всю энергию, полученную от спирали, молекула теряет при столкновении с холодной стенкой, которая имеет температуру $T_1 \approx 300$ К. Число ударов в единицу времени о единицу поверхности стенки $z = \frac{n \bar{v}}{4}$, где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}$ — средняя скорость молекул. Умножая z на среднюю энергию одной молекулы $\mathcal{E} = c_V T$, получим поток энергии к стенке, т. е. интенсивность потери энергии $N_{\text{пот}} = z \mathcal{E}$.

При данной температуре нити накала колебательные степени свободы не возбуждены ($\hbar\omega_N = 0,29 \text{ эВ} > 0,216 \text{ эВ}$), а вращательные возбуждены, так как

$$\frac{\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{m_N d^2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ эВ} \ll 0,216 \text{ эВ} (k_B T_0)$$

(здесь m_N — масса атома азота). Теплоемкость, приходящаяся на одну молекулу, $c_V = c_{\text{пост}} + c_{\text{вр}} = \frac{5}{2} k_B$, т. е. $\mathcal{E} = \frac{5}{2} k_B T_0$. Таким образом, интенсивность потерь энергии

$$N_{\text{пот}} = \frac{5}{8} n v k_B T_0.$$

Уравнение теплового баланса

$$\sigma(T_0 - \Delta T)^4 + N_{\text{пот}} = \sigma T_0^4.$$

Считая $\Delta T \ll T_0$, получаем

$$\Delta T \approx \frac{N_{\text{пог}}}{4\sigma T_0^3} = \frac{5}{16} \frac{n}{\sigma T_0^2} \sqrt{\frac{k_B N_1}{\pi m_N}} \approx 5,6 \text{ К.}$$

При $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ $\frac{\hbar\omega}{k_B T_0} = \frac{hc}{\lambda k_B T_0} = 11,5$, поэтому $e^{\hbar\omega/(k_B T_0)} \gg 1$ и $\rho(\omega) \propto \omega^3 e^{\hbar\omega/(k_B T_0)}$. Отсюда следует, что при изменении температуры на ΔT

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\hbar\omega}{k_B T_0} \frac{\Delta T}{T_0} \approx 0,0256 \text{ (2,56%).}$$

Поскольку излучательная способность (яркость лампы) однозначно определяется спектральной плотностью излучения, то искомое отношение $\Delta B/B = 0,0256$.

11.40* $T_2 \approx 80 \text{ К.}$

Решение. Частота, соответствующая граничной длине волны $\lambda_0 = 5 \text{ мкм}$, равна $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0 = 3,8 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$. Поскольку пластина облучается потоком солнечного излучения, то необходимо вычислить частоту, на кото-

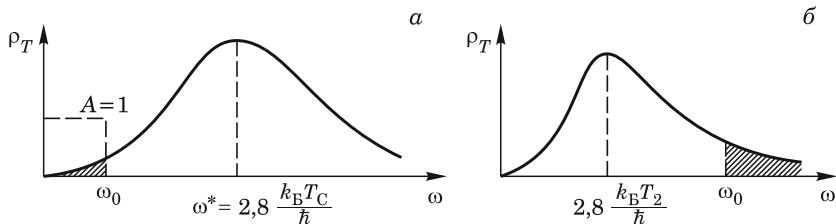


Рис. 200

рой спектральная плотность солнечного излучения $\rho_T(\omega)$ максимальна. Если считать Солнце абсолютно черным телом, то в соответствии с законом смещения Вина эта частота

$$\omega^* \approx 2,8 \frac{k_B T_C}{\hbar} \approx 23 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1},$$

откуда видно, что $\omega_0 \ll \omega^*$.

На рис. 200а показана спектральная плотность излучения Солнца $\rho_T(\omega)$. Из рисунка видно, что кварцевая пластина поглощает лишь малую часть излучения солнечного спектра (область, обозначенная штриховкой). Поток энергии от Солнца, приходящийся на кварцевую пластинку площадью S , равен

$$\Phi = jS = S \frac{c}{4} \int_0^{\omega_0} \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{e^{\hbar\omega/(k_B T_C)} - 1} \approx S \frac{c}{4} \int_0^{\omega_0} \frac{\omega^2 k_B T_C d\omega}{\pi^2 c^3} = \\ = S \frac{\omega_0^3 k_B T_C}{12\pi^2 c^2} \approx 4,3 \cdot 10^8 S \left[\frac{\text{эрг}}{\text{с}} \right].$$

Рассчитаем теперь поток энергии, получаемый абсолютно черной пластиночкой (в тех же условиях):

$$\Phi_{\text{черн}} = S \sigma T_C^4 \approx 734,8 \cdot 10^8 S \left[\frac{\text{эрг}}{\text{с}} \right],$$

т. е. поток энергии, поглощаемый абсолютно черной пластиночкой, больше та-кового для кварцевой пластиночки в $\Phi_{\text{черн}}/\Phi \approx 170$ раз.

Черная пластиночка имеет равновесную температуру $T_1 = 300$ К. В соответствии с законом Стефана–Больцмана поток излучаемой ею энергии (с двух сторон)

$$\Phi'_{\text{черн}} = 2S \sigma T_1^4 = 4,59 \cdot 10^5 \cdot 2S \left[\frac{\text{эрг}}{\text{с}} \right].$$

Кварцевая пластиночка, находящаяся в тех же условиях, излучает поток

$$\Phi' = 2S \left(\sigma T_2^4 - \frac{c}{4} \int_{\omega_0}^{\infty} \rho(\omega) d\omega \right). \quad (*)$$

На рис. 200б показана спектральная плотность равновесного теплового излучения кварцевой пластиночки при температуре T_2 . Штриховкой показана область частот, в которой пластиночка не излучает. Предполагаем, что $\omega_0 \gg 2,8k_B T_2/\hbar$. В этом случае интегралом $\int_{\omega_0}^{\infty} \rho_T(\omega) d\omega$ в формуле (*) можно пренебречь. Условием теплового равновесия является равенство поглощаемого и излучаемого потоков энергии, т. е. $\Phi = \Phi'$ и $\Phi_{\text{черн}} = \Phi'_{\text{черн}}$. Поэтому

$$\Phi' \approx 2S \frac{c}{4} \int_0^{\omega_0} \rho_T(\omega) d\omega \approx \frac{1}{170} \Phi'_{\text{черн}},$$

откуда $T_2^4 = \frac{T_1^4}{170}$, или $T_2 = \frac{T_1}{\sqrt[4]{170}} \approx 80$ К.

В заключение убедимся, что $\omega_0 \gg 2,8k_B T_2/\hbar$. В самом деле, $2,8k_B T_2/\hbar \approx 0,3 \cdot 10^{14}$ с⁻¹ $\ll 3,8 \cdot 10^{14}$ с⁻¹ = ω_0 . Таким образом, наше приближение оправдано и задача решена.

11.41. $\Phi \approx S \frac{15}{\pi^4} \sigma T^4 x_0^3 e^{-x_0} \approx 8,1 \cdot 10^{-6}$ Вт, где $x_0 = \frac{\hbar \omega_0}{k_B T} \approx 16,2$, S — площадь окошка.

$$\mathbf{11.42.} x = \frac{5}{\pi^4} \left(\frac{\mathcal{E}}{k_B T} \right)^3 \approx 0,003.$$

$$\mathbf{11.43.} x = \frac{15}{\pi^4} \left(\frac{\mathcal{E}}{k_B T} \right)^3 e^{-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}} \approx 1,63 \cdot 10^{-7}.$$

$$\mathbf{11.44.} T = \frac{\pi^4}{5} \frac{k_B^3 T^{*4}}{\hbar^3 \omega_0^3} = \frac{\pi^4}{5} \frac{T^{*4}}{\theta^3} \approx 5840 \text{ К}.$$

$$\mathbf{11.45.} x = \frac{\pi^4}{5} \left(\frac{k_B T^*}{\hbar \omega_1} \right)^3 T^* \approx 370 \text{ К}.$$

$$\mathbf{11.46.} d = \frac{1}{\chi} \ln \frac{I_0 - I_\lambda}{I_0} = 23 \text{ см}.$$

$$11.47. \quad \langle \Delta N_\lambda^2 \rangle \approx \langle N_\lambda \rangle \approx \frac{\tau \alpha_c^2 S \pi c}{2 \lambda^3} \frac{\Delta \lambda}{\lambda} \exp\left(-\frac{hc}{k_B T \lambda}\right) = 5,9 \cdot 10^9. \quad \text{Относительная}$$

$$\text{флуктуация } \frac{\sqrt{\langle \Delta N_\lambda^2 \rangle}}{\langle N_\lambda \rangle} = 1,3 \cdot 10^{-5}.$$

Заметим, что в задаче требуется определить среднеквадратичную флуктуацию сигнала, т. е. энергии, принимаемой приемником. Покажем, что при условии $\hbar\omega \gg k_B T$ это будет флуктуация числа фотонов. Строгая термодинамическая формула для флуктуации энергии имеет вид

$$\langle \Delta \mathcal{E}^2 \rangle = k_B T^2 \frac{d\langle \mathcal{E} \rangle}{dT}.$$

В интервале частот от ω до $\omega + d\omega$

$$\langle \mathcal{E} \rangle \equiv V \rho_T(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega.$$

Соответственно

$$\langle \Delta \mathcal{E}^2 \rangle = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar^2 \omega^4 \exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1\right]^2} d\omega.$$

При $\hbar \omega / (k_B T) \gg 1$ (область Вина)

$$\langle \Delta \mathcal{E}^2 \rangle \approx \frac{V}{\pi^2 c^3} \hbar^2 \omega^4 \exp\left(-\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) d\omega = \hbar \omega \langle \mathcal{E} \rangle.$$

Сравнивая с результатом для флуктуации числа частиц идеального газа $\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n \rangle$, мы видим, что в этой области справедливо представление о фотонах как о газе независимых частиц и

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \langle n \rangle \hbar \omega.$$

Напротив, в области Рэлея–Джинса справедливы волновые представления о свете и

$$\langle \Delta \mathcal{E}^2 \rangle = k_B T \langle \mathcal{E} \rangle.$$

11.48. $T = \frac{2\pi\hbar c}{1,62k_B \lambda_2} = 2,96$ К; при $\lambda_3 = 30$ см сигнал уменьшится в 1000 раз.

11.49* В обоих случаях $T_{\text{зФФ}} = \frac{2\mathcal{E} \lambda^2}{k_B \pi^2 c \tau \Delta \lambda} = 4,7 \cdot 10^{17}$ К.

Решение. Энергия, уносимая излучением за время dt с площадки dS под углом Θ к ней в телесный угол $d\Omega$,

$$d\mathcal{E} = I_{\omega, \theta} d\omega d\omega d\Omega dS dt,$$

где $I_{\omega, \theta} = \frac{c \rho_\omega}{4\pi} \cos \theta$ — излучательная способность АЧТ на частоте ω под углом θ к нормали. Согласно распределению Планка

$$\rho_\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar \omega / (k_B T)} - 1}.$$

Если рассматривать излучение вдоль направления нормали к площадке, то $\theta \approx 0$; $\cos \theta \approx 1$.

Переходя к конечным приращениям, запишем

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{c \rho \omega}{4\pi} \Delta \omega \Delta \Omega \Delta S \Delta t, \quad \text{причем } \Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}, \quad \Delta t = \tau. \quad (*)$$

Случай а). В отсутствие фокусировки $\Delta S = S = \frac{\pi D^2}{4}$, $\Delta \Omega = 2\pi(1 - \cos \varphi) = 4\pi \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, где φ — угол дифракции на выходном отверстии. Полагая, что $\sin \varphi \approx \varphi \approx \frac{\lambda}{D}$, получим $\Delta \Omega \approx \frac{\pi^2 \lambda^2}{4S}$. В свою очередь,

$$\Delta \omega = \left| \Delta \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right) \right| = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \Delta \lambda.$$

После подстановки найденных величин в (*) получаем

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^3 \hbar c^2 \Delta \lambda \tau}{\lambda^3 \left[\exp \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T_{\text{афф}}} \right) - 1 \right]}.$$

Вычислим выражение в скобках:

$$\exp \left(\frac{\hbar \omega}{k_B T_{\text{афф}}} \right) - 1 = \frac{\pi^3 \hbar c^2 \Delta \lambda \tau}{\mathcal{E} \lambda^3} \approx 0,4 \cdot 10^{-15} \ll 1.$$

Полученный результат означает, что $\frac{\hbar \omega}{k_B T_{\text{афф}}} \ll 1$. Тогда

$$T_{\text{афф}} = \frac{2\mathcal{E} \lambda^2}{\pi^2 c \tau \Delta \lambda k_B} = 4,7 \cdot 10^{17} \text{ К.}$$

Заметим, что полученный ответ — чисто «классический», так как постоянная Планка в нем отсутствует. Это означает, что можно было воспользоваться для вычисления ρ_ω формулой Рэлея–Джинса, а не Планка.

Случай б): При максимальной фокусировке с помощью линзы с фокусным расстоянием F площадь пятна в фокусе $\Delta S' = \pi \left(F \frac{\lambda}{D} \right)^2$, а телесный угол схождения лучей в фокусе $\Delta \Omega' = \frac{\pi D^2}{4F^2}$. Отсюда следует $\Delta \Omega' \Delta S' = \frac{\pi^2 \lambda^2}{4}$, т. е. такая же величина, что и в первом случае. Полученный результат $\Delta \Omega \Delta S = \text{const}$ является общим свойством оптических систем: поверхность яркость предмета и его изображения одинаковы. Можно считать, что изображение $\Delta S'$ «излучает» в телесный угол $\Delta \Omega'$. Поскольку все остальные параметры при фокусировке не меняются, то ответ будет таким же, как и в случае а).

Фактически ответ можно получить и из качественных рассуждений. Энергия \mathcal{E} в интервале $\Delta \omega$ излучается лазером с площадки S в телесный угол $\Delta \Omega \sim \lambda^2 / S$ за время τ . Энергия, излучаемая абсолютно черным телом с той же площадки в тот же угол и за то же время есть $\rho_\omega \Delta \omega \Delta \Omega \tau S$, где

$\rho_\omega \sim \frac{k_B T_{\text{эфф}}}{c \lambda^2}$. Сравнивая, получаем $k_B T_{\text{эфф}} \sim \frac{\mathcal{E}}{\tau \Delta \omega}$. Линза не меняет спектрального состава излучения, а значит, не меняет эффективную температуру.

$$\mathbf{11.50^*} T_{\text{эфф}} = \frac{2\mathcal{E}}{\pi^2 k_B} = 1,47 \cdot 10^{22} \text{ К.}$$

Решение. Поскольку энергия лазерного излучения $\mathcal{E} = 1 \text{ Дж}$ (что соответствует температуре $\mathcal{E}/k_B \sim 10^{23} \text{ К}$) сосредоточена в очень узком спектральном интервале, то можно с уверенностью считать, что для абсолютно черного тела, имеющего температуру $T_{\text{эфф}}$, $k_B T_{\text{эфф}} \gg \hbar \omega$ (ω — частота излучения лазера, $\hbar \omega \approx 2 \text{ эВ}$ для красного цвета). Таким образом, спектральную плотность потока энергии излучения черного тела (спектральную светимость $R_T(\omega)$) можно записать, ограничившись классической формулой Рэлея–Джинса:

$$R_T(\omega) = j_T(\omega) = \frac{c}{4} \rho_T(\omega) = \frac{\omega^2 k_B T_{\text{эфф}}}{4\pi^2 c^2} = \frac{k_B T_{\text{эфф}}}{\lambda^2}.$$

Спектральная яркость излучения абсолютно черного тела $B_T(\omega)$ связана со спектральной светимостью соотношением $R_T(\omega) = \pi B_T(\omega)$, являющимся следствием закона Ламберта, откуда $B_T(\omega) = \frac{k_B T_{\text{эфф}}}{\pi \lambda^2}$.

Найдем спектральную яркость лазерного излучения $B_{\text{лаз}}(\omega)$. Если обозначить плотность потока энергии на выходе лазера как q , сечение пучка на выходе $S = \pi D^2/4$, а время импульса излучения τ , то тогда очевидно, что

$$q = \frac{\mathcal{E}}{S\tau} = \frac{4\mathcal{E}}{\pi D^2 \tau}.$$

Ширина спектра импульсного излучения $\Delta \nu \approx 1/\tau$, а телесный угол, в котором распространяется лазерный пучок,

$$\Delta \Omega = 2\pi(1 - \cos \theta) \approx \pi \theta^2 \approx \pi \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2.$$

Таким образом, искомая спектральная яркость лазера

$$B_{\text{лаз}}(\omega) = \frac{q}{\Delta \omega \Delta \Omega} = \frac{q\tau}{2\pi^2 \left(\frac{\lambda}{D} \right)^2} = \frac{2\mathcal{E}}{\pi^3 \lambda^2}.$$

По условию $B_T(\omega) = B_{\text{лаз}}(\omega)$, откуда

$$T_{\text{эфф}} = \frac{2\mathcal{E}}{\pi^2 k_B} = 1,47 \cdot 10^{22} \text{ К.}$$

Эта колоссальная температура полностью оправдывает применение классической формулы Рэлея–Джинса.

Как и в задаче 11.49, можно привести качественную оценку. Поскольку здесь $\Delta \nu \tau \approx 1$, то $k_B T_{\text{эфф}} \approx \mathcal{E}$.

11.51. $T_{\text{эфф}} = \frac{jd^2\lambda}{2\pi ck_B} \frac{\nu}{\Delta \nu} = 2,65 \cdot 10^{16} \text{ К.}$ Как и в задаче 11.49, считая, что $\mathcal{E}/\tau \approx P$, получаем $k_B T_{\text{эфф}} \approx P/\Delta \nu$.

11.52. $T_{\text{эфф}} = \frac{2W}{\pi^2 k_B \delta \nu} = 1,47 \cdot 10^{15} \text{ К.}$ Как и задаче 11.49, поскольку $\mathcal{E} = W\tau$, то $k_B T_{\text{эфф}} \sim W/\delta \nu$.

$$\mathbf{11.53^*} T_{\text{эфф}} = aT = 3 \text{ К.}$$

Решение. Антенный тракт представляет собой волновод, по которому электромагнитное излучение передается к приемнику. Поглощение возникает главным образом из-за конечной проводимости стенок волновода. Пусть $a_T(\omega)$ — коэффициент поглощения (поглощающая способность), а $R_T(\omega)$ — излучательная способность материала волновода при температуре T на частоте $\omega = 2\pi c/\lambda$. Тогда по закону Кирхгофа

$$R_T(\omega) = a_T(\omega)\varepsilon_T(\omega),$$

где $\varepsilon_T(\omega)$ — излучательная способность на частоте ω абсолютно черного тела, имеющего температуру T . По определению эффективной температуры $R_T(\omega) = R_{\text{эфф}}^{\text{акт}}$, откуда $a_T(\omega)\varepsilon_T(\omega) = \varepsilon_{T_{\text{эфф}}}(\omega)$. Очевидно, что $T_{\text{эфф}} < T$. Предположим, что $\hbar\omega \ll k_B T_{\text{эфф}}$. Тогда в приближении Рэлея–Джинса и при условии, что $a_T(\omega) \equiv a$, получаем

$$a \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T_{\text{эфф}},$$

откуда и следует ответ $T_{\text{эфф}} = aT = 3$ К.

Так как $\frac{\hbar\omega}{k_B T_{\text{эфф}}} = 0,16 \ll 1$, использованное приближение оправданно.

11.54* $j_0 \approx \frac{\pi^2 \hbar c}{\lambda^3 \tau} = 9,5 \cdot 10^4 \frac{\text{эр}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}} = 9,5 \frac{\text{МВт}}{\text{см}^2}$, $a_{\max} = \frac{\hbar N_A}{2 A_{\text{Na}} \tau \lambda} = 9,2 \cdot 10^7 \text{ см}/\text{с}^2$.

Решение. Сила светового давления обусловлена изменением импульса атома за счет процессов «поглощение + спонтанное испускание». При поглощении фотона импульс атома получает приращение $\hbar\mathbf{k}$. В то же время при спонтанном испускании фотон излучается в произвольном направлении, и поэтому при многократном повторении процессов поглощения и испускания средний импульс, уносимый фотонами, равен нулю. Поэтому в среднем каждый процесс «поглощение + спонтанное испускание» изменяет импульс атома на величину $\hbar\mathbf{k}$ ($k = \omega_0/c$). Однако, наряду со спонтанным излучением, в потоке излучения может происходить и вынужденное (индуцированное) излучение, при котором атом отдает импульс вдоль заданного направления (волнового вектора излучения). В результате совокупного действия поглощения фотонов и их последующего индуцированного и спонтанного излучения движение атома имеет характер систематического дрейфа в направлении вектора \mathbf{k} (рис. 201) (длины стрелок одинаковы).

По определению сила, действующая на атом, равна

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t}, \quad (*)$$

где $\Delta \mathbf{p}$ — изменение импульса атома. Промежуток времени Δt , когда систему можно описывать классически, выбирается достаточно большим, чтобы за это время произошло много актов поглощения и испускания. Имеются два характерных масштаба времени: τ и $1/(\sigma\Phi)$. Характерное время спонтанного испускания τ связано с шириной линии и вероятностью спонтанного

испускания $W_{\text{сп}} \sim 1/\tau$. Характерное время процессов вынужденного поглощения и испускания $1/(\sigma\Phi)$ определяется сечением взаимодействия σ фотона с атомом и плотностью потока фотонов Φ [$\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$]. При этом $\sigma\Phi \sim W_{\text{п}} \equiv$

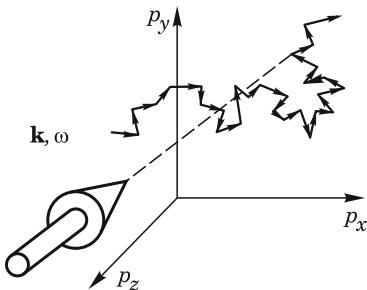


Рис. 201

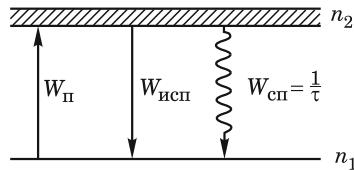


Рис. 202

$\equiv W_{\text{исп}}$, где $W_{\text{п}}$ и $W_{\text{исп}}$ — вероятности вынужденного поглощения и вынужденного испускания фотона (рис. 202). Таким образом, промежуток времени Δt должен удовлетворять условию $\Delta t \gg \tau, 1/(\sigma\Phi)$.

Пусть n_1 и n_2 — относительные заселенности уровней нижнего и верхнего состояний соответственно (рис. 202). Они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dn_1}{dt} = -\sigma\Phi n_1, \\ \frac{dn_2}{dt} = -\frac{n_2}{\tau} - \sigma\Phi n_2, \\ n_1 + n_2 = 1. \end{cases} \quad (**)$$

В стационарном состоянии скорости переходов «вниз» и «вверх» должны быть равны, и тогда из $(**)$ следует условие баланса $\sigma\Phi n_1 = \frac{n_2}{\tau} + \sigma\Phi n_2$ и выражения для n_1 и n_2 :

$$n_1 = \frac{\sigma\Phi + \frac{1}{\tau}}{2\sigma\Phi + \frac{1}{\tau}}, \quad n_2 = \frac{\sigma\Phi}{2\sigma\Phi + \frac{1}{\tau}}.$$

Видно, что с ростом Φ заселенность нижнего уровня $n_1 \rightarrow \frac{1}{2} + 0$, а верхнего $n_2 \rightarrow \frac{1}{2} - 0$, что соответствует насыщению. В качестве предельного значения можно взять $\Phi_0 \approx \frac{1}{2\sigma\tau}$.

Плотность потока энергии насыщения $j_0 = \hbar\omega\Phi_0 \approx \frac{\hbar\omega}{2\sigma\tau}$. Поскольку сечение поглощения фотона — процесс резонансный, то согласно формуле Брейта–Вигнера $\sigma = 4\pi\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{\pi}$ и $j_0 \approx \frac{\pi^2\hbar c}{\lambda^3\tau} = 9,5 \cdot 10^4$ эрг/($\text{см}^2 \cdot \text{с}$) = 9,5 мВт/ см^2 . Здесь сечение процесса поглощения считается как сечение упругого рассеяния. Это связано с тем, что в начальном состоянии были фотон и атом, а в конечном состоянии — атом и фотон. Как следует из вышесказанного,

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \right)_{\text{спонт}} + \left(\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \right)_{\text{инд}} = 0 + \hbar\mathbf{k}\sigma\Phi(n_1 - n_2) = \hbar\mathbf{k} \frac{\sigma\Phi}{2\sigma\Phi\tau + 1}.$$

Следовательно, при $\Phi \rightarrow \infty$ получаем $|\mathbf{F}_{\max}| = \frac{\hbar k}{2\tau}$, откуда

$$a_{\max} = \frac{F_{\max}}{M} = \frac{\hbar N_A}{2A_{\text{Na}}\tau} = 9,2 \cdot 10^7 \frac{\text{см}}{\text{с}^2} (\sim 10^5 \text{г}).$$

Выражение для силы F может быть интерпретировано следующим образом: $F = \hbar k \frac{1}{2\tau}$, т. е. произведение импульса одного кванта $\hbar k$ на вероятность спонтанного излучения в единицу времени $1/(2\tau)$. Последняя, в свою очередь, есть произведение вероятности того, что атом находится в возбужденном состоянии ($1/2$) на вероятность спонтанного излучения при условии, что атом возбужден ($1/\tau$).

Отметим, что если бы спонтанное излучение отсутствовало, то было бы $F=0$ (при $\tau \rightarrow \infty$, $F \rightarrow 0$). За большой ($\Delta t \gg \tau \rightarrow \infty$) промежуток времени атом поглотит и излучит в том же направлении одинаковое число квантов. Спонтанное излучение нарушает этот баланс, и в результате импульс атома равен импульсу тех поглощенных квантов, которые были переизлучены спонтанно.

11.55. Обозначая вероятность индуцированного перехода с n -го на m -й уровень p_{nm} ($p_{nm} = p_{mn}$), а спонтанного перехода W_{nm} , в случае атома

$$\frac{p_{nm}}{W_{nm}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1} \approx e^{-\hbar\omega/(k_B T)} \approx 1,6 \cdot 10^{17} (\hbar\omega \gg k_B T).$$

Для электронного спина в магнитном поле

$$\frac{p_{nm}}{W_{nm}} \approx \frac{k_B T}{2\mu_B B} \approx 2,2 \cdot 10^3 (k_B T \gg 2\mu_B B).$$

11.56. $\lambda < \frac{hc}{k_B T \ln 101} \approx 10,6 \cdot 10^{-4}$ см.

11.57. $\chi(T) = \chi_0 \operatorname{th} \frac{\hbar\omega}{2k_B T}$;

$$1) \chi(T) \approx \chi_0 \frac{\hbar\omega}{2k_B T}; \quad 2) \chi(T) \approx \chi_0 \left[1 - 2 \exp \left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T} \right) \right].$$

11.58* $\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} \approx \frac{\pi^2 Q c^3}{V \omega^3}$.

Решение. В квантовой физике спонтанное излучение возникает из-за возмущающего влияния на молекулу нулевых колебаний электромагнитного поля. Вероятности спонтанного и вынужденного излучений выражаются через коэффициенты Эйнштейна A и B и плотность энергии излучения $\rho(\omega)$:

$$W_{\text{вын}} = \rho(\omega)B; \quad W_{\text{сп}} = A.$$

Поскольку $\rho(\omega) = \hbar\omega \mathcal{D}(\omega) n(\omega, T)$, то $B/A = [\hbar\omega \mathcal{D}(\omega)]^{-1}$, где $\mathcal{D}(\omega)$ — спектральная плотность мод (осцилляторов поля, числа колебаний) поля в единичном объеме. Таким образом,

$$\frac{W_{\text{вын}}}{W_{\text{сп}}} = \frac{\rho(\omega)}{\hbar\omega \mathcal{D}(\omega)} = n(\omega, T),$$

где $n(\omega, T)$ — среднее число фотонов данной моды колебаний.

Как известно, для невырожденных уровней одной моды молекулы (атома) вероятности вынужденного излучения и поглощения равны. Рассмотрим молекулу в поле излучения со спектральной плотностью потока энергии $j(\omega) \propto c\rho(\omega)$. Здесь точное значение коэффициента пропорциональности зависит от углового распределения излучения. Так, для параллельного потока $j(\omega) = c\rho(\omega)$, а для изотропного излучения $j(\omega) = c\rho(\omega)/4$. В резонаторе этот коэффициент зависит от пространственного распределения поля, но по порядку величины он близок к единице.

Поглощаемая молекулой мощность

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int j(\omega)\sigma(\omega) d\omega,$$

где $\sigma(\omega)$ — сечение поглощения молекулы. Поскольку функция $\sigma(\omega)$ быстро спадает при удалении от резонансной частоты ω_0 , то можно записать

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx j(\omega_0) \int \sigma(\omega) d\omega \propto c\rho(\omega_0)S,$$

где S — площадь под кривой поглощения $\sigma(\omega)$. В обоснование вышеизложенного отметим, что в вакууме $j(\omega)$ является плавной функцией $\propto \omega^3$, а в резонаторе $j(\omega)$ занимает частотный интервал $\Delta\omega = \omega_0/Q$, который по условию задачи превосходит собственную ширину линии Г, т. е. ширину кривой поглощения $\sigma(\omega)$. Если теперь записать $d\mathcal{E}/dt = \hbar\omega_0 W_{\text{вын}}$, то из сравнения получим

$$W_{\text{вын}} \propto \frac{c\rho(\omega_0)S}{\hbar\omega_0}, \quad \text{откуда} \quad B \propto \frac{cS}{\hbar\omega_0}$$

и с точностью до коэффициента не зависит от того, где находится молекула: в свободном пространстве или в резонаторе.

Вероятность спонтанного излучения

$$W_{\text{сп}} = W_{\text{вын}} \frac{1}{n(\omega, T)} = W_{\text{вын}} \frac{\hbar\omega \mathcal{D}(\omega)}{\rho(\omega)} = \hbar\omega \mathcal{D}(\omega)B.$$

Запишем эту вероятность для двух случаев — в резонаторе ($W_{\text{сп}}$) и в свободном пространстве ($W_{\text{сп}}^0$):

$$W_{\text{сп}} = \hbar\omega_0 \mathcal{D}_{\text{рез}}(\omega_0)B; \quad W_{\text{сп}}^0 = \hbar\omega_0 \mathcal{D}(\omega_0)B.$$

Искомое отношение этих вероятностей есть

$$\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} = \frac{\mathcal{D}_{\text{рез}}(\omega_0)}{\mathcal{D}(\omega_0)},$$

т. е. вероятность перехода пропорциональна плотности конечных состояний. В свободном пространстве (вакууме) спектральная плотность мод $\mathcal{D}(\omega_0) \simeq \frac{\omega_0^2}{\pi^2 c^3}$, а в резонаторе, настроенном на частоту перехода, в интервале частот $\Delta\omega$ имеется только одно колебание (мода). Тогда спектральная

плотность числа мод (осцилляторов) поля имеет порядок $\mathcal{D}_{\text{пез}}(\omega_0) \sim \frac{1}{\Delta\omega V} \sim \sim \frac{Q}{\omega_0 V}$, откуда следует ответ

$$\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} \simeq \frac{\pi^2 Q c^3}{V \omega^3}. \quad (*)$$

В случае 1) получим $\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} \simeq 4 \cdot 10^2$, а *в случае 2)* $\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} \simeq 4 \cdot 10^{-8}$.

Как видно, в зависимости от конкретных данных возможны различные ситуации.

Приведем еще одно решение этой задачи. Вероятность спонтанного излучения молекулы равна вероятности поглощения, т. е. вероятности вынужденного испускания под действием одного фотона. В свою очередь, вероятность поглощения пропорциональна времени нахождения фотона вблизи молекулы в резонаторе τ_p . Из соотношения неопределенностей

$$\tau_p \Delta\omega \sim 1, \quad \text{откуда} \quad \tau_p \sim \frac{1}{\Delta\omega} = \frac{Q}{\omega} = \frac{Q\lambda}{2\pi c}.$$

Минимальный объем резонатора при длине волны λ соответствует условию $\lambda/2 \sim \sqrt[3]{V}$. Таким образом, $\tau_p = \frac{QV^{1/3}}{\mu c}$. Если взять такой же объем V , но в свободном пространстве, то время нахождения вблизи молекулы $\tau_{\text{св}} \sim \sqrt[3]{V}/c$.

Искомое отношение вероятностей спонтанного перехода для этих двух случаев

$$\frac{W_{\text{сп}}}{W_{\text{сп}}^0} = \frac{\tau_p}{\tau_{\text{св}}} \sim \frac{Q}{\pi}.$$

Очевидно, что это тот же результат, в чем легко убедиться, подставив $V = (\lambda/2)^3$, $\omega = 2\pi c/\lambda$ в соотношение (*).

11.59. $\frac{N_2}{N_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\ln(1-\tau)}{2lk_n} \right) = 0,5055$, где N_2 — число атомов хрома, находящихся в возбужденном состоянии, N_0 — полное число атомов хрома.

$$\mathbf{11.60.} \Delta\nu = 2v_0 \sqrt{\frac{2RT}{\mu c^2} \ln\left(\frac{\beta_0 - 1}{1 - R}\right)} = 3,5 \text{ МГц}.$$

Указаниe. При $\beta \rightarrow 1 + 0$ $\ln \beta \approx \beta - 1$.

11.61. Сдвиг частоты принимаемого сигнала при изменении направления движения происходит за счет эффекта Доплера и составляет $\Delta\omega \approx 2\frac{v}{c}\omega$, где ω — частота, на которой производится измерение. При этом сдвиг распределения излучения абсолютно черного тела $\Delta\rho \approx \frac{d\rho}{d\omega} \Delta\omega$. Отсюда видно, что измерения надо проводить на тех частотах, где максимальна величина $\left| \omega \frac{d\rho}{d\omega} \right|$.

Таким образом,

$$\left| \frac{\Delta\rho}{\rho} \right|_{x=x_1} \approx 1,55 \cdot 10^{-3}; \quad \left| \frac{\Delta\rho}{\rho} \right|_{x=x_2} \approx 3,31 \cdot 10^{-3}.$$

$$11.62. t = t_1 \frac{T_1}{T_0} \sim 10^7 \text{ лет.}$$

11.63. $P_{\text{св}} = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \approx 4,6 \cdot 10^{17} \text{ дин/см}^2 \approx 4,6 \cdot 10^{11} \text{ атм}; P_{\text{газ}} = \frac{N_A \rho Z}{A} k_B T = 7 \cdot 10^{10} \text{ атм} < P_{\text{св}}$. Реально при $kT = 10 \text{ кэВ}$ происходит лишь частичная ионизация. Заметим, что в водородной бомбе именно световое «сдавливание» термоядерного горючего (так называемая имплозия) играет решающую роль.

11.64. $T_{\text{пл}} = T_3 \left(\frac{\tau_3}{\tau_{\text{пл}}} \right)^{1/3} \approx 1350 \text{ К}$, где τ_3 — период обращения Земли, а T_3 — температура ее поверхности.

$$11.65. L_{\text{max}} = RT_0^2 \sqrt{\frac{\sigma}{5j}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ м} \approx 150 \text{ км.}$$

$$11.66. T = T_C \sqrt{\frac{\alpha_C}{2}} \left(\frac{1 + d^2/(16r^2)}{1 + r^2/R^2} \right)^{1/4} \approx 430 \text{ К.}$$

11.67. $F = \frac{\sigma T^4 \pi a^4}{cL^2} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ дин}$ (притяжение). Если бы в полости был один шарик, то никаких сил на него бы не действовало (симметрия). Наличие второго шарика приводит к нарушению симметрии. Он «затеняет» часть падающего излучения и нарушает баланс сил. В результате возникает эффективное притяжение между шариками. Собственное излучение шариков из-за его изотропности не дает вклада в величину силы.

11.68. $L \lesssim \lambda = \frac{1}{n\sigma} = 2,5 \cdot 10^{25} \approx 10^7 \text{ пк}$ (парsec), где концентрация реликтовых фотонов $n = \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3 [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]} \approx 400 \text{ см}^{-3}$. Полученная величина много больше размеров нашей Галактики ($\sim 10^3$ пк).

11.69. $\omega \geq \pi \left(\frac{c^4 \sigma}{2a^4} \right)^{1/5}$. Отсюда предельно возможная частота в резонаторе $\omega_{\text{max}} = 1,43 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, а минимальная частота колебаний в кубическом резонаторе $\omega_{\text{min}} = c \frac{\pi}{a} \sqrt{2} = 4,16 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Резонансные свойства пропадут, когда расстояние между пиками станет больше или равно ширине самого пика (аналог критерия Рэлея). Величина $\omega_{\text{max}} \tau \lesssim 10^{-3}$, где $\tau = \frac{m\sigma}{ne^2} \sim 10^{-14} \text{ с}$, т. е. дисперсией проводимости можно пренебречь и считать о постоянной.

$$11.70. \frac{\mathcal{E}}{\Delta v} = kT \frac{2L}{c} = 5,2 \cdot 10^{-21} \frac{\text{эрп}}{\text{Гц}}.$$

Замкнутый с обоих концов волновод с указанными размерами представляет собой длинный резонатор, в котором закон дисперсии $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, где $k_x = m \frac{\pi}{a}$, $k_y = n \frac{\pi}{b}$, $k_z = p \frac{\pi}{L}$, $m, n, p = 0, 1, 2, 3, \dots$ Перепишем закон дисперсии в виде $\frac{4}{\lambda^2} = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}$, или, подставляя длины волн и размеры в сантиметрах, $\frac{1}{25} = \frac{m^2}{(3,4)^2} + \frac{n^2}{(7,2)^2} + \frac{p^2}{(1000)^2}$. Из этого соотношения видно, что $m = 0$ и $n = 0, 1$. Поскольку поля в резонаторе описываются функциями типа $\sin(m \frac{\pi}{a} x) \sin(n \frac{\pi}{b} y) \cos(p \frac{\pi}{L} z)$, то решение $m = 0$ и $n = 0$ не отвечает никакому распределению, и значит, $n = 1$. Тогда из дис-

персионного уравнения следует, что $p \approx 144 \gg 1$. Следовательно, мы имеем дело с «одномерной» фотонной системой. Энергия такой системы на единичный интервал частот $d\mathcal{E} = \hbar\omega\bar{n}(\omega, T) dN_\omega = \hbar\omega\bar{n}(\omega, T) \frac{L}{\pi c} d\omega$. Поскольку $\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} \sim 10^{-5}$ эВ $\ll k_B T = 5 \cdot 10^{-2}$ эВ, то $\bar{n}(\omega, T) \approx \frac{k_B T}{\hbar\omega}$ и $d\mathcal{E} = k_B T \frac{L}{\pi c} 2\pi dv$, откуда $\frac{d\mathcal{E}}{dv} = k_B T \frac{2L}{c} = 5,2 \cdot 10^{-21}$ эрг/Гц.

$$11.71. t = \frac{M^3}{3A} = 0,84 \cdot 10^{20} \text{ с}, \text{ где } A = \frac{\hbar c^4}{15360\pi v^2} \approx 0,4 \cdot 10^{25} \text{ г}^3/\text{с}.$$

11.72. $H \geq \frac{RT}{\mu_B g} \ln \left(\frac{P_0 \sigma T}{k} \sqrt{\frac{8R}{\pi \mu_K T}} \right) \approx 1,6 \cdot 10^5 \text{ м} = 160 \text{ км},$ где μ_B и μ_K — молярные массы воздуха и кислорода, $P_0 \approx 10^5 \text{ Па}$ — атмосферное давление у поверхности Земли.

$$11.73^*. n \leq 825.$$

Решение. Образование устойчивой атомной системы с уровнями \mathcal{E}_n возможно, если уширение уровней меньше расстояния между уровнями:

$$\delta\mathcal{E}_n \leq \mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n-1} = \hbar\omega.$$

В поле магнитотормозного излучения время жизни возбужденных атомов определяется двумя факторами — временем спонтанных переходов $\tau_{\text{сп}}$ и временем индуцированных переходов $\tau_{\text{инд}}$. Таким образом, в данном случае ширина атомных уровней $\delta\mathcal{E}_n$ состоит из двух слагаемых — естественной ширины, определяемой временем спонтанного перехода, и ширины, обусловленной временем индуцированного излучения,

$$\delta\mathcal{E}_n \simeq \frac{\hbar}{\tau_{\text{изл}}} = \hbar \left(\frac{1}{\tau_{\text{сп}}} + \frac{1}{\tau_{\text{изл}}} \right).$$

Время индуцированных переходов с n -уровня под действием фотонов магнитотормозного излучения равно

$$\tau_{\text{инд}} = \frac{\tau_{\text{сп}}(n)}{N(\omega)} = \tau_{\text{сп}}(n) \frac{\hbar\omega \mathcal{D}(\omega)}{\rho(\omega)} = \tau_{\text{сп}}(n) \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2 I(\omega)}.$$

Здесь $N(\omega)$ — среднее число фотонов магнитотормозного излучения, $\mathcal{D}(\omega) = \omega^2 / (\pi^2 c^3)$ — плотность состояний свободного пространства, $\rho(\omega) = 4I(\omega)/c$ — спектральная плотность изотропного излучения на частоте $\hbar\omega \approx 2Ry/n^3$.

В отсутствие вынужденного излучения, как это следует из условия, при $n \gg 1$ естественная ширина уровней пропорциональна n^{-5} , и поэтому она убывает быстрее, чем расстояние между уровнями, которое пропорционально n^{-3} . Поэтому спонтанное излучение не может привести к ограничению на величину n .

Однако фотоны магнитотормозного излучения существенно увеличивают ширину уровней, и предельное значение номера уровня находится из условия

$$\frac{\hbar}{\tau_{\text{инд}}} \leq \frac{2Ry}{n^3},$$

откуда

$$n^7 \leq \frac{4Ry^4 \cdot 6 \cdot 10^{-12}}{\pi^2 c^2 \hbar^3 I(\omega)} = 0,26 \cdot 10^{21};$$

$$n_{\max} \simeq 825.$$

Отметим, что магнитотормозное излучение не является равновесным и среднее число фотонов не описывается формулой Планка, а находится из заданной спектральной интенсивности

$$I(\omega) = \frac{c\sigma(\omega)}{4} = \frac{c}{4} \hbar\omega \mathcal{D}(\omega) N(\omega),$$

откуда $N(\omega) \approx 1,7 \cdot 10^{11}$. Поскольку в космическом пространстве есть и радиотехническое излучение с температурой $T=2,7$ К, то, в принципе, эти фотонны также могут вызывать индуцированные переходы. Среднее число таких фотонов в интересующем нас интервале частот равно

$$\overline{N}(\omega) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} \approx \frac{k_B T}{\hbar\omega} \approx 4,8 \cdot 10^3 \ll N(\omega).$$

Фактически эта оценка показывает, что эффективная температура магнитотормозного излучения, соответствующая данной частоте, равна

$$T_{\text{эфф}} = T \frac{N(\omega)}{\overline{N}(\omega)} \approx 9,4 \cdot 10^7 \text{ К}.$$

11.74* $\sqrt{\langle \delta^2 \rangle} = 2\lambda_e \sqrt{\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{2}{\alpha}} = 8,5 \cdot 10^{-12}$ см, где $\alpha = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, λ_e — комптоновская длина волны электрона.

Решение. Рассмотрим нулевое колебание (моду) с частотой ω : $\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{E}_0 \omega t$. Уравнение движения свободного электрона в поле этой волны имеет вид $m \frac{d^2 \mathbf{\delta}_\omega}{dt^2} = e \mathbf{E}(\omega)$, где $\mathbf{\delta}_\omega$ — смещение электрона. Интегрируя это уравнение, получаем $\mathbf{\delta}_\omega = -\frac{e}{m\omega^2} \mathbf{E}_0 \cos \omega t$. Средний по времени квадрат смещения электрона

$$\overline{\delta_\omega^2} = \frac{e^2 E_0^2}{m^2 \omega^4} \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{e^2 E_0^2}{2m^2 \omega^4}.$$

Амплитуда колебания E_0 может быть найдена по принципу соответствия классического и квантового выражений для энергии моды:

$$\int \frac{\overline{E^2(\omega)} + \overline{H^2(\omega)}}{8\pi} dV = \frac{1}{2} \hbar\omega$$

(здесь V — объем системы). В плоской электромагнитной волне

$$\overline{E^2(\omega)} = \overline{H^2(\omega)} = \frac{E_0^2}{2},$$

поэтому $E_0^2 = \frac{4\pi}{V} \hbar\omega$. Следовательно, $\overline{\delta_\omega^2} = \frac{2\pi}{V} \frac{\hbar e^2}{m^2 \omega^3}$. Поскольку нулевые колебания различных частот независимы, то надо просуммировать (принтегрировать) это выражение по всем возможным колебаниям. Число мод нулевых

колебаний (число осцилляторов поля) в объеме V , приходящихся на интервал $d\omega$, есть $dN_\omega = V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$. Поэтому

$$\langle \delta^2 \rangle = \int \overline{\delta_\omega^2} dN_\omega = \frac{2e^2}{\pi \hbar c} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \int_{Ry/\hbar}^{2mc^2/\hbar} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{4}{\pi} \alpha \lambda_e^2 \ln \frac{2}{\alpha}.$$

Здесь α — постоянная тонкой структуры, λ_e — комптоновская длина волны электрона. Таким образом,

$$\sqrt{\langle \delta^2 \rangle} = 2\lambda_e \sqrt{\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{2}{\alpha}} = 8,5 \cdot 10^{-12} \text{ см.}$$

Такое смещение электрона на «орбите» может быть описано введением дополнительного (по отношению к кулоновскому потенциальну ядра) отталкивательного потенциала. Этот потенциал должен быть сферически симметричен и, как следует из полученной оценки, его эффективный радиус намного меньше боровского радиуса. Поэтому оненным образом возмущает $2s$ -состояние, волновая функция которого, в отличие от $2p$ -состояния, конечна при $r=0$. В результате уровень $2s_{1/2}$ смещается вверх по энергии относительно уровня $2p_{1/2}$.

$$11.75^* \Delta R = \frac{\sigma T_C^4 \pi R_C^2 R_3^2}{\gamma c M_3 M_C} R \approx 0,3 \text{ см.}$$

Решение Сила притяжения Земли к Солнцу является центростремительной силой при круговом движении Земли по орбите:

$$M_3 \omega^2 R = \gamma \frac{M_C M_3}{R^2}.$$

При учете давления излучения из первой части надо будет вычесть создаваемую им силу. Оценим ее. Мощность, излучаемая с поверхности Солнца, $W_C = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_C^2$, на Землю попадает часть этой мощности, равная

$$W_3 = \sigma T_C^4 \cdot 4\pi R_C^2 \frac{\pi R_3^2}{4\pi R^2} = \sigma T_C^4 \pi R_C^2 \frac{R_3^2}{R^2}.$$

Поскольку все поглощаемые фотонны передают не только энергию, но и импульс, то находим силу давления излучения

$$F = \frac{W_3}{c} = \frac{\sigma T^4 \pi R_C^2 R_3^2}{c} \frac{1}{R^2},$$

откуда получаем третий закон Кеплера

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2} M_C \left(1 - \frac{\sigma T_C^4 \pi R_C^2 R_3^2}{\gamma M_3 c M_C} \right).$$

Видно, что этот эффект сводится к эффективному уменьшению массы Солнца ΔM_{C} . Оценим относительное изменение:

$$\frac{\Delta M_{\text{C}}}{M_{\text{C}}} = \frac{\sigma T_{\text{C}}^4 \pi R_{\text{C}}^2 R_3^2}{\gamma M_{\text{З}} c M_{\text{C}}} = 1,9 \cdot 10^{-14}.$$

Переходя к малым приращениям, получим

$$\frac{3\Delta R}{R} - 2\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta M_{\text{C}}}{M_{\text{C}}}.$$

Поскольку сила давления излучения в силу симметрии является центральной, то сохраняется момент количества движения Земли: $L = m\omega R^2 = 2\pi m R^2/T = \text{const}$, откуда

$$\frac{2\Delta R}{R} = \frac{\Delta T}{T}.$$

Комбинируя эти два соотношения, получим, что увеличение радиуса орбиты составляет

$$\Delta R = \frac{\Delta M_{\text{C}}}{M_{\text{C}}} R \approx 0,3 \text{ см.}$$

Отметим, что $\Delta R \approx 10^{-12} |\Delta R_{\text{орб}}|$, где $\Delta R_{\text{орб}}$ — изменения R за счет эллиптичности орбиты Земли.

11.76. Период обращения Земли по орбите увеличится на

$$\Delta T = 2T \frac{\sigma T_{\text{C}}^4 \cdot 4\pi R_{\text{C}}^2 \tau}{M_{\text{C}} c^2} \approx 5 \text{ с.}$$

(см. задачу 11.75).

$$11.77^*: R = \frac{R_0}{1 - \frac{cV_0 R_0}{2\gamma M_{\text{C}}}} = 1,0115 R_0 \approx 50,6 \text{ млн км.}$$

Решение. Если обозначить светимость Солнца, т. е. полную мощность солнечного излучения, как W (равную $\sigma T_{\text{C}}^4 \cdot 4\pi R_{\text{C}}^2 = 3,826 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$), то плотность светового потока на расстоянии R от Солнца равна $J = \frac{W}{4\pi R^2}$.

Сила светового давления на солнечный парус на расстоянии R_0 уравновешивает силу гравитационного притяжения станции массой m к Солнцу:

$$\frac{2JS}{c} = \frac{2WS}{4\pi R_0^2 c} = \frac{\gamma m M_{\text{C}}}{R_0^2}, \quad (*)$$

откуда $\gamma m M_{\text{C}} = \frac{WS}{2\pi c}$. Как видим, при выполнении этого условия неподвижная станция будет находиться в равновесии на любом расстоянии от Солнца. Когда станция приобретает скорость в направлении от Солнца, то равновесие нарушится из-за влияния эффекта Доплера: частота отраженных от паруса фотонов станет меньше частоты падающих, и число падающих на единицу поверхности фотонов в единицу времени уменьшится. В результате сила

гравитационного притяжения превысит силу давления излучения, и станция будет тормозиться.

Пусть станция движется от Солнца со скоростью v . В системе покоя станции (которую можно приближенно считать инерциальной) частота фотонов, летящих к зеркалу,

$$v' = v \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

В этой системе частота отраженных фотонов такая же, а в лабораторной системе

$$v'' = v' \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \approx v \left(1 - \frac{2v}{c}\right).$$

Этот результат можно было бы получить сразу, если знать, что при отражении в движущемся со скоростью v зеркале изображение движется со скоростью $2v$.

В лабораторной системе переданный станции импульс при столкновении с ней одного фотона есть

$$\Delta p = \frac{hv + hv''}{c} = \frac{2hv \left(1 - \frac{v}{c}\right)}{c}.$$

Если при неподвижном зеркале время между двумя последовательными ударами фотонов равнялось t_0 , то при движущемся зеркале оно станет равным $t'_0 = t_0 / (1 - v/c)$. Число фотонов, падающих на единицу поверхности в единицу времени, уменьшается, и сила давления становится равной

$$F = \frac{\Delta p J' S}{hv} = 2JS \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}{c} \cong 2JS \frac{1 - \frac{2v}{c}}{c}.$$

Уравнение движения станции с учетом отмеченного в (*) равенства сил есть

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{2WS}{4\pi mc^2} \frac{2v(t)}{R^2 t} = -\frac{\gamma M_C}{c} \frac{2v(t)}{R^2(t)}.$$

Так как $dR(t) = v(t) dt$, то $dv = -\frac{2\gamma M_C}{c R^2} \frac{dR}{R^2}$, откуда $v(R) - v_0 = \frac{2\gamma M_C}{c} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)$.

Согласно условию $v(R) = 0$. Тогда

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{cv_0 R_0}{2\gamma M_C}} = 1,0115 R_0 \approx 50,6 \text{ млн км.}$$

$$\mathbf{11.78.} \quad v_0^{\min} = \frac{2\gamma M_C}{c R_0} = 1,78 \cdot 10^3 \text{ см/с} = 17,8 \text{ м/с.}$$

$$\mathbf{11.79.} \quad R = \frac{R_0}{1 + \frac{cv_0 R_0}{2\gamma M_C}} = 49,8 \text{ млн км.}$$

$$11.80^*: \frac{T_{\text{пл}} - T}{T} = \frac{5}{4} \left(\frac{v}{c} \right)^2 = 1,25 \cdot 10^{-6}.$$

Решение. Для мощности излучения, падающего со стороны направления движения, имеем

$$\begin{aligned}\Phi_f &= \int dS \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\infty} J(T, \omega, \Omega) \cos \theta d\omega = \\ &= S \int d\Omega \int_0^{\infty} \frac{\hbar \omega^3 \cos \theta d\omega}{4\pi^3 c^2 \left[\exp \frac{\hbar \omega (1 - \beta \cos \theta)}{k_B T} - 1 \right]} = \frac{Sc\alpha T^4}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\cos \theta d\Omega}{(1 - \beta \cos \theta)^4} = \\ &= \frac{Sc\alpha T^4}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^0 \frac{\cos \theta d(\cos \theta)}{(1 - \beta \cos \theta)^4} = \frac{Sc\alpha T^4}{2} \int_0^1 \frac{x dx}{(1 - \beta x)^4} = \\ &= \frac{Sc\alpha T^4 (3 - \beta)}{12(1 - \beta)^3} = \frac{Sc\alpha T^4}{4} \frac{1 - \beta/3}{(1 - \beta)^3} = S\sigma T^4 \frac{1 - \beta/3}{(1 - \beta)^3}.\end{aligned}$$

Здесь $\alpha = \frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3 \hbar^3} = \frac{4\sigma}{c}$ — константа, связывающая температуру с плотностью энергии равновесного излучения $\rho = \alpha T^4$; σ — постоянная Стефана–Больцмана. Для мощности излучения, падающего с противоположной стороны, аналогично имеем

$$\Phi_b = S\sigma T^4 \frac{1 + \beta/3}{(1 + \beta)^3}.$$

Полный поток энергии с обеих сторон равен

$$\Phi = \Phi_f + \Phi_b = S\sigma T^4 \frac{1 + \beta/3}{(1 + \beta)^3} + S\sigma T^4 \frac{1 - \beta/3}{(1 - \beta)^3} = 2S\sigma T^4 \frac{1 + 2\beta^2 - \beta^4/3}{(1 - \beta^2)^3}.$$

При $\beta \ll 1$ получаем $\Phi \approx 2S\sigma T^4 (1 + 5\beta^2)$.

Этот же результат легко получается без относительно сложного интегрирования, если учесть малость скорости $\beta \ll 1$ сразу в подынтергальном выражении:

$$\begin{aligned}\Phi_f &= \frac{Sc\alpha T^4}{2} \int_0^1 \frac{x dx}{(1 - \beta x)^4} \approx \frac{Sc\alpha T^4}{2} \int_0^1 (x + 4\beta x^2 + 10\beta^2 x^3) dx = \\ &= \frac{Sc\alpha T^4}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{4\beta}{3} + \frac{5\beta^2}{2} \right) = S\sigma T^4 \left(1 + \frac{8\beta}{3} + 5\beta^2 \right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_b &= \frac{Sc\alpha T^4}{2} \int_0^1 \frac{x dx}{(1 + \beta x)^4} \approx \frac{Sc\alpha T^4}{2} \int_0^1 (x - 4\beta x^2 + 10\beta^2 x^3) dx = \\ &= \frac{Sc\alpha T^4}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{4\beta}{3} + \frac{5\beta^2}{2} \right) = S\sigma T^4 \left(1 - \frac{8\beta}{3} + 5\beta^2 \right).\end{aligned}$$

Суммарная мощность

$$\Phi = \Phi_f + \Phi_b = S\sigma T^4 \left(1 + \frac{8\beta}{3} + 5\beta^2\right) + S\sigma T^4 \left(1 - \frac{8\beta}{3} + 5\beta^2\right) = 2S\sigma T^4 (1 + 5\beta^2).$$

Высокая теплопроводность пластиинки означает, что обе ее стороны будут иметь одинаковую температуру $T_{\text{пл}}$. В стационарном режиме полученный поток равен потоку энергии, излучаемой пластиинкой:

$$2S\sigma T^4 (1 + 5\beta^2) = 2S\sigma T_{\text{пл}}^4.$$

Отсюда для малых скоростей $\beta \ll 1$ имеем

$$T_{\text{пл}} = T \left(1 + \frac{5\beta^2}{4}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{T_{\text{пл}} - T}{T} = \frac{5}{4} \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1,25 \cdot 10^{-6}.$$

11.81. $F = \frac{4\delta T^4 v}{c^2}$ $S = 6,1 \cdot 10^{-16}$ дин, направлена против вектора скорости.

Заметим, что на ранних стадиях развития Вселенной, когда температура фотонового излучения была порядка 3000 К, объекты, движущиеся со скоростями, близкими к скорости света, могли довольно существенно тормозиться (и, соответственно, охлаждаться), отдавая свою энергию излучению.

$$\text{11.82. } \eta = \omega_{\text{кр}} \frac{\int\limits_{\omega_{\text{кр}}}^{\omega_0} \omega^2 \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) d\omega}{\int\limits_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}} = \frac{\hbar\omega_{\text{кр}}}{k_B T} \frac{\int\limits_{2,6}^{\infty} x^2 e^{-x} dx}{\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx} = 0,415, \text{ где красная}$$

граница рождения пары электрон–дырка находится из условия $\hbar\omega_{\text{кр}} = \Delta$.

$$\text{11.83. } \eta = \omega_{\text{кр}} \frac{\int\limits_{\omega_{\text{кр}}}^{\omega_0} \omega^2 \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) d\omega}{\int\limits_0^{\infty} \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}} = \frac{\hbar\omega_{\text{кр}}}{k_B T} \frac{\int\limits_{2,61}^{6,0} x^2 e^{-x} dx}{\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx} = 0,365, \text{ где красная}$$

граница рождения пары электрон–дырка находится из условия $\hbar\omega_{\text{кр}} = \Delta$.

§ 12. Задачи заключительного (Государственного) экзамена МФТИ по общей физике

12.2. $\alpha = \frac{\varepsilon_{n-1}^{\text{кин}}}{\varepsilon_n^{\text{кин}}} = \left(\frac{M+m}{M-m}\right)^2$. Для нейтронов в графите: $4 \cdot 10^7 = \left(\frac{13}{11}\right)^{2n}$, откуда $n = 52$.

12.3. $m_n = 1,5m_p$.

12.4. $t \approx \frac{Mu_0}{2mv^2nS} \approx 16$ мкс.

12.5. $(\mathcal{E}_k)_{\min} = \frac{3}{2}W = 9,15$ эВ.

12.6. Ионизации не произойдет, так как $(\mathcal{E}_k)_{\min} = 4,37$ эВ > 4 эВ.

12.7. $v_{Ar} = \frac{m_{Ne}}{m_{Ar}} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_k}{m_{Ne}}} = 1,55$ км/с.

12.8. $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{\pi} \sqrt{\frac{6m}{M}}$.

Указание. Применить для каждого шарика адиабатический инвариант $\oint p dx = \text{const}$, который дает $v_{1,2}(l \pm x) = 2vl^2 = \text{const}$, $v_0 = 2vl$, где $2l$ — длина всего цилиндра, v_1 и v_2 — скорости шариков в зависимости от смещения x поршня, v_0 — скорость шариков, когда поршень находится строго посередине.

12.9. Если направить ось OX перпендикулярно плоскости пластины, а ось OY параллельно плоскости пластины, то $V'_{1x} = 0$;

$$V'_{1y} = \begin{cases} V(\cos\varphi - k \sin\varphi) & \text{при } \operatorname{tg}\varphi \leq \frac{1}{2k}; \\ \frac{V}{2} \cos\varphi & \text{при } \operatorname{tg}\varphi \geq \frac{1}{2k}, \end{cases}$$

$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{k}$ (при этом значении угла работа $A_{\text{тр}}$ максимальна).

12.10. $\epsilon = \ddot{\varphi} = \frac{J}{2acR_p^2} \sqrt{\frac{mV}{2e}} = 0,618$ рад/с².

12.11* $T = \frac{L}{\sqrt{gH}} \simeq 10$ с.

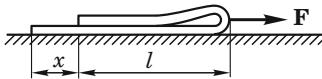


Рис. 203

На рис. 203 изображена лента в движении. Если x — координата скользящего верхнего конца ленты, l — длина верхней части, то $2l + x = L$. Записав выражение для потенциальной энергии

$$U(x) = \frac{1}{2} \rho g H a(L-x),$$

где a — ширина ленты, мы легко определим силу, выпрямляющую ленту $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$, а значит, и можем записать уравнение движения

$$\frac{d}{dt} [(L-x)\dot{x}] = gH,$$

откуда и определим искомое время T .

12.12. $A = \frac{1}{2} \mu mg \frac{l^2}{L} = 0,15$ Дж, где $l = 35$ см — длина части веревки, соприкасающейся с шероховатой поверхностью.

12.13. $\frac{w_{\text{прав}}}{w_{\text{магн}}} = \frac{3g^2}{\gamma B^2} \sim 10^{13}$.

12.14. Условие экранирования

$$E < \frac{mg}{e} \approx 10^{-9} \text{ В/см}; \quad \frac{dB}{dz} < \frac{mg}{\mu_p} \sim 10^2 \text{ Гс/см},$$

где m , e , μ_p — масса, заряд и магнитный момент протона.

12.15. Можно $\frac{\Delta F}{F} \geq \frac{\eta}{\delta} = 10^{-6}$. Тогда радиус свинцового шара $R_c \geq 10^{-6} \frac{\rho_3}{\rho_c} R_3 \approx 3,1$ м, где $\rho_3 \approx 5,5$ г/см³ — плотность Земли, $\rho_c = 11,3$ г/см³ — плотность свинца. Масса свинцового шара должна быть $M_c \approx 1400$ т.

12.16. $V = \frac{maL}{e} \approx 6 \cdot 10^{-9}$ В.

12.17. $r = \frac{4}{B} \sqrt{\frac{2\pi Ec}{c}} R_3 = 3,4 \cdot 10^4$ а. е. (СГСЭ).

12.18. $w_{изл} = 6,1 \cdot 10^{-13}$ эрг/см³; $w_{маг} = 1,6 \cdot 10^{-13}$ эрг/см³; $w_{веш} = 1,5 \times 10^{-9}$ эрг/см³. $w_{изл} : w_{маг} : w_{веш} = 6,1 : 1,6 : 1,5 \cdot 10^4$. Гравитационный радиус Вселенной можно оценить из соотношения размерностей

$$R \sim \frac{c}{\sqrt{\gamma \rho}} \sim 10^{29} \text{ см} \sim 10^{11} \text{ св. лет.}$$

12.19. $\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \frac{2h}{R} \simeq 6 \cdot 10^{-8}$. При этом в условии указана экспериментальная ошибка $\Delta g/g = 4 \cdot 10^{-9}$, что много меньше неоднородности поля.

12.20. $\Delta g/g = 10^{-8}$, где $\Delta g = 2\pi\gamma h(\rho_B - \rho_L) \simeq 10^{-5}$ см/с².

12.21. $\Delta P = g_0 \frac{\Delta g}{2\pi\gamma} \approx 0,24 \cdot 10^3$ Па = 1,8 мм рт. ст., где γ — гравитационная постоянная.

12.22. $\rho = \frac{2}{3}\rho_0 \left(1 - \delta \frac{R}{h}\right) = 0,453\rho_0 = 2,54$ г/см³.

12.23. $v^2 - v_0^2 = 4q \ln \frac{M}{M_0}$, откуда $v \approx 3,9 \cdot 10^4$ м/с; $\frac{v}{v_0} = 0,977$.

12.24. $V = \sqrt[3]{\frac{8\sigma T^4}{\rho}} \simeq 30$ км/с, где $\rho = \frac{P\mu}{RT_0} = 1,75 \cdot 10^{-8}$ кг/м³.

12.25. $N = acM = 3 \cdot 10^{12}$ Вт $\approx 670N_{ГЭС}$.

12.26. $k = \frac{g+a}{g} = k_0 \frac{M_0}{M} = 7,56$, где $\frac{M_0}{M} = e^{-\frac{k_0+1}{k_0}} = 0,165$.

12.27. $\frac{V}{u} = \ln \frac{k}{k_0} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k_0} = 1,18$.

12.28. $z = \frac{\gamma M}{g(R+H)} \approx 14$ см, где $M = \frac{4\pi}{3}(\rho_m - \rho_n)R^3 = 167,6 \cdot 10^9$ т.

12.29. $t = \frac{x}{v} = 7,7$ лет, где скорость таяния $v = \frac{dx}{dt} = \frac{a\Delta T}{\rho_B \lambda} = 130$ м/год, а $x = 1$ км — толщина растаявшего льда в момент поворота айсберга.

12.30. $\tau \approx 1,5$ года — время поворота настоящего айсберга.

12.31. $\frac{M_B}{M_3} = \frac{H_3}{H_B} \left(\frac{R_B}{R_3} \right) \approx 0,81$. Принимая $R_3 \approx 6370$ км и $g_3 = 9,81$ м/с², получаем $M_3 \approx 5,97 \cdot 10^{24}$ кг, $M_B = 4,83 \cdot 10^{24}$ кг. Соответственно плотность $\rho_3 \approx 5,52$ г/см³, $\rho_B \approx \rho_3 \frac{H_3}{H_B} \frac{R_3}{R_B} \approx 0,95\rho_3 \approx 5,23$ г/см³.

12.32. $\alpha = \frac{M_0 - M}{M_0} = 1 - \exp\left(-\frac{V_2 - V_1}{u}\right) \approx 0,16$, где M_0 и M — начальная и конечная массы корабля, V_2 — вторая, а V_1 — первая космическая скорость для Луны (2,4 и 1,7 км/с). $T = \frac{u^2}{2c_p} \approx 3600$ К.

12.33. $\mu = \frac{mg\Delta h}{2T_{uv}} \approx 2$ кг/сут, где v — скорость станции.

12.34. Потенциальная энергия космического аппарата как функция его расстояния до центра Луны

$$U(x) = -\frac{\gamma m M_3}{L-x} - \frac{\gamma m M_{\text{Л}}}{x},$$

где $M_3 \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг; $M_{\text{Л}} \approx 7,4 \cdot 10^{22}$ кг и m — массы Земли, Луны и аппарата; $L = 3,84 \cdot 10^8$ м — расстояние между центрами Земли и Луны. Полагая, что в максимуме потенциальной энергии (это точка, где силы притяжения аппарата к Земле и Луне сравниваются) кинетическая энергия аппарата равна нулю, находим скорость аппарата у поверхности Луны

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}} \left(1 + \frac{M_3}{M_{\text{Л}}} \frac{R_{\text{Л}}}{L - R_{\text{Л}}} \frac{R_{\text{Л}}}{L} \frac{(\sqrt{M_3} + \sqrt{M_{\text{Л}}})^2}{M_{\text{Л}}} \right)},$$

или

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2\gamma M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}} \left(1 - \frac{M_3}{M_{\text{Л}}} \frac{R_{\text{Л}}}{L} \right)} \approx 2,27 \text{ км/с.}$$

12.35. $R_0 = \frac{R_3 v_{1\kappa}}{\sqrt{2\alpha W/m}} \approx 3,5 \cdot 10^5$ км, где $v_{1\kappa}$ — первая космическая скорость.

$$\mathbf{12.36.} T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\lambda M}} \approx 42,5 \text{ ч.}$$

12.37. Импульс отдачи $p = \frac{Hm}{4} \sqrt{\frac{g}{R_3}} \approx 6,25 \cdot 10^3$ кг·м/с, энергия лазера $W = \frac{p}{\alpha} \approx 2 \cdot 10^8$ Дж.

$$\mathbf{12.38.} v_{2\text{Л}} = 2,4 \text{ км/с; } v_{2\text{T}} = 2,63 \text{ км/с.}$$

Наличие атмосферы на Титане связано с тем, что температура на поверхности Титана намного ниже температуры на поверхности Луны, что объясняется большим удалением Титана от Солнца. $T_{\text{T}} = T_3 \sqrt{\frac{r_3}{r_{\text{T}}}} \approx 90$ К, где r_3 и r_{T} — радиусы орбит Земли и Сатурна (Титана вместе с Сатурном). При такой температуре средние скорости молекул метана и аммиака недостаточны для их удаления в пространство.

12.39. $\delta T = \frac{2\delta r}{r} \frac{\omega_1 T}{\omega_2 \sin \theta} \approx 17,2$ с, где ω_1 — угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца, ω_2 — угловая скорость вращения Земли вокруг оси.

$$\mathbf{12.40.} \epsilon = \pi \frac{T_{\text{Л}} - T_3}{4(T_{\text{Л}} + T_3)} = 0,015. \text{ Табличное значение } \epsilon = 0,0167.$$

12.41. $\varphi = \pi \left[1 - \frac{T_3}{T_{\text{М}}} \left(\frac{a}{R_3} \right)^{3/2} \right] = 0,778$ рад $\approx 44,6^\circ$, где T_3 и $T_{\text{М}}$ — периоды обращения Земли и Марса вокруг Солнца, а $a = \frac{R_{\text{М}} + R_3}{2}$ — большая полуось эллипса перелета.

12.42. $\varphi = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2T}{T_3} - 1 \right) = 0,65$ рад $= 37,2^\circ$, где $T = \frac{T_3}{2} \left(\frac{R_{\text{М}} + R_3}{2R_3} \right)^{3/2} = 0,707$ года — время перелета.

12.43. Если M — масса звезды, m — масса планеты, то отношение масс $\frac{m}{M} = u_0 \left(\frac{T}{2\pi\gamma M} \right)^{1/3} = 0,425 \cdot 10^{-3}$, u_0 — скорость движения по кругу.

12.44. $N \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_0 T_{\text{IO}}^2}{4\pi^2 \rho r_0^2 \eta} \right)^{1/3} \approx 3600$, где ρ — плотность льда.

12.45. Если направить ось OX по радиусу к центру Земли (точка O — положение корабля), ось OZ — по касательной к орбите корабля в направлении его движения, то в условиях задачи траектория крышки относительно корабля — это эллипс, причем $x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$, а $z(t) = \frac{2v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t)$, где ω — угловая скорость колебательного движения крышки относительно корабля, совпадающая по величине с угловой скоростью вращения корабля вокруг Земли, т. е.

$$\omega = \sqrt{g \frac{R_0^2}{R_3^2}} \approx 1,36 \cdot 10^{-3} \text{ с}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 4607 \text{ с} \approx 1 \text{ ч } 17 \text{ мин.}$$

Эллипс имеет малую полуось $b \approx 370$ м и большую полуось $a \approx 735$ м.

12.46. $\frac{dr}{dt} = -2 \frac{C\gamma M}{m} = -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$

12.47. $T = \sqrt[4]{\frac{\rho v^3 (2 - \eta)}{8\sigma\eta}}$.

12.48. $M_{\text{г}} = \frac{a_{\text{г}} R_{\text{г}}}{a_{\text{C}} R_{\text{C}}} M_{\text{C}} \sim 10^{13} M_{\text{C}}$.

12.49. $\tau = T \left(\frac{r}{R} \right)^2 \approx 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, где $r = 1,3 \cdot 10^{-13} \left(\frac{M}{m_{\text{n}}} \right)^{1/3} \text{ см} \approx 14 \text{ км.}$

12.50* Решение. Энергия магнитного поля переходит в тепло

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{j^2}{\sigma} \tau, \quad j = \sigma E_{\text{инд}} \sim \sigma \frac{BR}{c\tau}, \quad \tau \sim \frac{8\pi\sigma R^2}{c^2} \sim 10^{22} \text{ с.}$$

Еще один подход: $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$; $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$; $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$; $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}$; $D = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$; $D\tau \sim R^2$, откуда $\tau \sim \frac{4\pi\sigma R^2}{c^2}$.

12.51. $B = B_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3}$, где $\rho_0 \approx 1,4 \text{ г/см}^3$ — начальная средняя плотность звезды: $B_{\text{б.кар.}} \approx 3,7 \cdot 10^4 \text{ Гс}$, $B_{\text{н.зв.}} \approx 1,7 \cdot 10^9 \text{ Гс}$.

12.52. Зеемановское расщепление должно быть больше доплеровского уширения за счет теплового движения атомов (в основном водорода) и вращения звезды, т. е.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{2\mu_B B}{\hbar\omega_0} \geq \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{\text{тепл.}} + \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{\text{вращ.}} = \frac{v_{\text{тепл.}}}{c} + \frac{v_{\text{вращ.}}}{c} \approx \frac{v_{\text{тепл.}}}{c}.$$

Окончательно получим $B \geq \frac{\hbar\omega}{2\mu_B c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m_p}} \approx 1,8 \text{ кГс.}$

12.53* Решение. Будем называть столкновением такой процесс, при котором центры звезд проходят друг относительно друга на расстоянии, не большем суммы их радиусов (в нашем случае — не большем $2R_C$).

Для определения сечения столкновения перейдем в систему центра масс сталкивающихся звезд. Пусть b — максимальный параметр удара (относи-

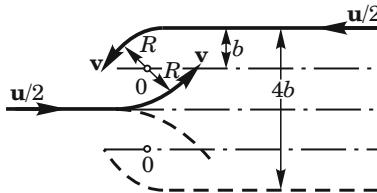


Рис. 204

тельно центра масс), при котором происходит столкновение. Тогда, как видно из рис. 204, сечение столкновения $\sigma = \pi(2b)^2$. Из законов сохранения энергии и момента импульса имеем

$$2 \frac{M_C}{2} \left(\frac{u}{2}\right)^2 = 2 \frac{M_C v^2}{2} - \frac{\gamma M_C^2}{2R_C}, \quad M_C b \frac{u}{2} = M_C R_C v,$$

где v — скорость каждой из звезд относительно неподвижного центра O , когда они находятся на кратчайшем расстоянии друг от друга. Исключая отсюда v , получаем

$$\frac{b^2}{R_C^2} = 1 + \frac{2\gamma M_C}{R_C u_2} \approx \frac{2\gamma M_C}{R_C u^2} \approx 10^2.$$

Соответственно, сечение столкновения

$$\sigma = 4\pi b^2 = 8\pi \frac{R_C \gamma M_C}{u^2}.$$

Так как длина свободного пробега $L = 1/(n\sigma)$, где $n = N/(cT)^3$ (c — скорость света, $T = 1$ год $\approx 3,2 \cdot 10^7$ с), то время между столкновениями одной и той же звезды

$$\tau = \frac{1}{n\sigma u} = \frac{u(cT)^3}{8\pi N R_C \gamma M_C} = 2,2 \cdot 10^{21} \text{ с} \approx 7 \cdot 10^{13} \text{ лет},$$

т. е. в одном кубическом световом году происходит в среднем одно столкновение за время

$$t = \frac{\tau}{N/2} \sim 10^{13} \text{ лет.}$$

12.54. $\tau \approx \frac{1}{n\sigma v} \approx 2,7 \cdot 10^9$ лет, т. е. за свою историю астероиды сталкиваются в среднем примерно 1 раз. Здесь $n \approx 0,75 \cdot 10^{-20} \text{ км}^{-3}$ — концентрация астероидов, $\sigma = 314 \text{ км}^2$ — сечение столкновений.

12.55. $\rho_{kp} = \frac{3H^2}{8\pi\gamma} \approx 10^{-29} \text{ г/см}^3$ (полная энергия $E = K + \Pi = 0$).

12.56. $R \leq \frac{\gamma M}{c^2} \approx 1,5 \cdot 10^5$ см = 1,5 км (точный ответ $R \leq R_{\text{ш}} = 2 \frac{\gamma M}{c^2}$ – радиус сферы Шварцшильда).

12.57. $R \gg \gamma \frac{M}{c^2} \approx 1,5$ км. (При сжатии бесконечно разреженного вещества до звезды радиусом R выделяется энергия $\frac{\gamma M}{R^2}$, которая стремится к бесконечности при $R \rightarrow 0$. Но это невозможно, так как общая выделившаяся энергия не может превышать Mc^2 .)

12.58. $r \sim \frac{3j_3}{4\pi c\rho g_C} \approx 0,6 \cdot 10^{-4}$, где $j_3 = 0,136 \cdot 10^6$ эрг/(с · см²) – солнечная постоянная (плотность потока энергии Солнца на Земной орбите), $\rho \approx 1$ г/см³ – плотность пылинки, $g_C \approx 0,6$ см/с² – ускорение свободного падения, создаваемое Солнцем на Земной орбите.

12.59. $mc^2 \leq \mathcal{E} \sqrt{\frac{cT}{L} \frac{\mathcal{E}}{\Delta \mathcal{E}}} \approx 28$ ГэВ. Размер излучающей области по крайней мере не должен быть меньше 1 свет. секунды (300 тыс. км). Однако это соответствует вращению объекта со сверхсветовой скоростью $v \sim 2\pi c$, т. е. ограничений на размер излучающей области нет.

$$12.60. \mathcal{E} = mc^2 \sqrt{\frac{L}{2c\Delta t}} \approx 560 \text{ кэВ.}$$

$$12.61. \Delta T = 5T \frac{\Delta R}{R} \approx 2,7 \text{ с.}$$

$$12.62. L_{02} = \frac{m_2}{2\alpha} \ln \left\{ 1 - \frac{m_2}{m_1} \left[1 - \exp \left(-\frac{-2\alpha L_{01}}{m_1} \right) \right] \right\}^{-1} = 110 \text{ м.}$$

$$12.63. m_1 + m_2 = \frac{c^3 T}{2^{5/2} \pi \gamma} \approx 2 \cdot 10^{32} \text{ кг} \approx 100 M_{\odot}, \text{ где } M_{\odot} \text{ – масса Солнца.}$$

$$12.64. E_{\text{ГВ}} = \frac{\gamma m_1 m_2}{2r_S} = \frac{c^2 m_1 m_2}{4(m_1 + m_2)} \approx 4M_{\odot} c^2, \text{ где } M_{\odot} \text{ – масса Солнца.}$$

Полученная оценка близка к численному решению уравнения Эйнштейна $3M_{\odot}c^2$.

$$12.65. v_{\max} = \frac{l}{\pi D} \sqrt{\frac{F}{mr}} = 205 \text{ Гц.}$$

$$12.66. t = \frac{MR^2 + 2mr^2}{2ml^2 \varphi} \left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right) \approx 1 \text{ мин.}$$

$$12.67. F = \frac{2d}{R} E \frac{m}{\rho} \alpha (t_1 - t_2) = 340 \text{ кГ} = 3,4 \text{ кН.}$$

$$12.68. \Delta l = \frac{Edm}{F\rho} \alpha^2 (t_1 - t_2)^2 = 8,6 \text{ см.}$$

12.69. $E = \frac{Fl_0^3}{dhx^3} = 1,2 \cdot 10^{12}$ Па. Превосходит модуль Юнга алмаза, равный $\approx 10^{12}$ Па.

$$12.70. 1) \Delta T = \frac{\left(\sigma_{\text{разр}} - \frac{PR}{h} \right) \cdot 3(1-2\mu)}{\alpha E} = 40 \text{ К;}$$

$$2) L = \frac{W\tau}{\pi \lambda c \rho h \Delta T} \approx 2000 \text{ км.}$$

12.71* Коэффициент затухания δ связан с вязким трением. Время установления вынужденных колебаний $\tau = \frac{1}{\delta}$. Добротность системы $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0 \tau}{2}$. Резонансный пик имеет ширину $\delta\omega$, время прохождения резонан-

са $t \ll \tau$. Отсюда искомое ускорение $\varepsilon \gg \frac{\Delta\omega}{\tau} = \delta\Delta\omega = 2\delta^2 = \frac{w_0^2}{2Q^2} = \frac{2\pi^2 v_0^2}{Q^2} = 0,2 \text{ с}^{-2}$.

$$\mathbf{12.72.} \beta \approx 2\pi v_0 m = 3,3 \cdot 10^6 \text{ кг/с.}$$

$$\mathbf{12.73.} a_0 \lesssim \frac{g}{4\pi^2 v_0^2} = 0,28 \text{ мм.}$$

12.74. $\omega_2 = \omega_0 \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha\right) \left(1 - \frac{v}{c} \cos \beta\right)}$, откуда релятивистская поправка к частоте $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{\text{рел}} \approx \frac{v^2}{c^2} \approx 7 \cdot 10^{-10}$. Разрешающая способность $R \geq 10^9$.

$$\mathbf{12.75.} v = \frac{\mathcal{E}}{mc} (1 + R^2 + 2R \cos 2\varphi)^{1/2} \approx 1,3 \text{ мм/с.}$$

$$\mathbf{12.76*} F = -\frac{I}{c} \frac{2(n-1)}{n+1} = -1,33 \cdot 10^{-3} \text{ дин/см}^2.$$

Решение. Импульс фотона

$$p = \hbar k = \hbar \frac{\omega}{c} n,$$

где \hbar — постоянная Планка, ω — частота света, c — скорость света в вакууме, n — показатель преломления.

Импульс падающего света

$$P_1 = N \frac{\hbar \omega}{c} = \frac{I}{c},$$

где N — число фотонов, попадающих на единицу площади за единицу времени.

Импульс отраженного света

$$P_2 = -\frac{r^2 I}{c},$$

где $r = \frac{n-1}{n+1}$ — амплитудный коэффициент отражения.

Импульс прошедших фотонов

$$P_3 = (1 - r^2) N \frac{\hbar \omega}{c} n = (1 - r^2) I n.$$

Искомое давление:

$$P = P_1 - P_2 - P_3 = \frac{I}{c} (1 + r^2 - n + nr^2) = -\frac{I}{c} \frac{2(n-1)}{n+1} = -1,33 \cdot 10^{-3} \text{ дин/см}^2,$$

т. е. сила давления направлена против волнового вектора падающего света. Именно этот результат кажется на первый взгляд парадоксальным, и, якобы, не совместимым с представлениями о давлении света.

12.77. $M = \frac{\pi D^2 dI}{4c} \frac{n^2 - 1}{n(n^2 + 1)} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ дин} \cdot \text{см.}$ Если свет падает на пластинку под углом Брюстера слева направо, то пластинка будет поворачиваться по часовой стрелке.

12.78. Если главные направления пластиинки повернуты на $\pm 45^\circ$ относительно плоскости поляризации падающего света, то прошедший свет будет поляризован по кругу. При этом свет будет переносить за единицу времени момент импульса $L = \pm nh$, где n — число фотонов, прошедших пластиинку за 1 с. Пластиинка же будет испытывать противоположно направленный момент импульса отдачи

$$M = \mp nh = \mp \frac{W\lambda}{c} = \mp 6,28 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}.$$

Если одно из главных направлений пластиинки будет совпадать с плоскостью поляризации света, то $M = 0$.

$$\mathbf{12.79.} \eta \approx d \frac{h\sqrt{2/m}}{\pi^2 R^3}.$$

12.80. Уравнение колебаний $M\ddot{x} + 16\pi\eta L\dot{x} + \rho g S x = 0$, откуда затухание $\delta = \frac{4\pi\eta}{\rho S} = 0,0143 \text{ с}^{-1}$, частота $\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{M}} = \sqrt{\frac{g}{2L}} = 3,13 \text{ с}^{-1}$; добротность $Q = \frac{\omega}{2\delta} \approx 110$.

$$\mathbf{12.81.} F \sim 4RL\rho v^2 \simeq 4 \cdot 10^3 \text{ дин}.$$

12.82* Решение. Для гравитационных волн скорость u и длина волны λ связаны соотношением $u = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$. Поэтому волновые картины будут подобны, если все размеры изменить пропорционально квадрату скорости движения. Следовательно, скорость модели должна быть равной $3,6 \text{ км}/\text{ч} = 1 \text{ м}/\text{с}$. Отметим, что в данной задаче безразмерными параметрами подобия являются отношения $u/v = \sqrt{g\lambda}/v$ и λ/L , где v — скорость корабля, L — его линейный размер.

12.83* Решение. Дисперсионное соотношение для гравитационных волн на поверхности воды должно быть: $\omega = f(k, \rho, g)$. При этом размерности $|\rho| = \text{г}/\text{см}^3$; $|g| = \text{см}/\text{с}^2$; $|k| = \text{см}^{-1}$. Отсюда $\omega = A\sqrt{gk}$, где A — безразмерная константа. Фазовая скорость $v = \frac{\omega}{k} = A\sqrt{\frac{g}{k}}$, а групповая скорость $u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{A}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{v}{2}$.

$$\mathbf{12.84.} \sin \alpha = \frac{v}{v_0} \sin \alpha_0 = 0,65.$$

12.85* Решение. Уравнение волны, распространяющейся по поверхности жидкости вдоль оси x (ось канала), имеет вид (начальная фаза φ для простоты равна нулю):

$$y = A \sin(\omega t - kx); \quad k = \frac{\omega}{c} \propto \frac{1}{\sqrt{H}}.$$

Пусть при $x = 0$ происходит скачок глубины канала от H_1 ($x < 0$) до H_2 ($x > 0$). Тогда для волн, распространяющихся в положительном направлении, имеем при $x < 0$ суперпозицию падающей и отраженной волн:

$$y = A_1 \sin(\omega t - k_1 x) + A_{-1} \sin(\omega t + k_1 x + \varphi_{-1}),$$

а при $x > 0$ — проходящую волну

$$y = A_2 \sin(\omega t - k_2 x + \varphi_2).$$

На границе (при $x=0$) должны выполняться условия непрерывности высоты волны и градиента высоты волны (последнее отражает непрерывность потока). Поэтому при любом t

$$A_1 \sin \omega t + A_{-1} \sin(\omega t + \varphi_{-1}) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2);$$

$$k_1 A_1 \cos \omega t - k_1 A_{-1} \cos(\omega t + \varphi_{-1}) = k_2 A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Отсюда получаем:

$$\varphi_{-1} = \varphi_2 = 0; \quad A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} A_1 = \frac{2\sqrt{H_2}}{\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}} A_1; \quad A_{-1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_1 = \frac{\sqrt{H_2} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_1} + \sqrt{H_2}} A_1.$$

В частности, при $H_2 = 4H_1$: $A_2 = \frac{4}{3}A_1$; $A_{-1} = \frac{1}{3}A_1$.

Таким образом, при переходе на глубокое место волны становятся выше и реже. Приведем также выражения для коэффициентов отражения R и прохождения T :

$$R = \left(\frac{A_{-1}}{A_1} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{H_2} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_2} + \sqrt{H_1}} \right)^2; \quad T = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 = 4 \left(\frac{\sqrt{H_1 H_2}}{\sqrt{H_2} + \sqrt{H_1}} \right)^2; \quad R + T = 1.$$

12.86. $\frac{W}{u} = 1,2 \cdot 10^{-5}$, где $W = \frac{I_0}{s} 10^{B/10} = 30,2 \frac{\text{Эрг}}{\text{см}^3}$ — плотность энергии в звуковой волне, $s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = 331 \text{ м/с}$ — скорость звука в воздухе, $u = \frac{5}{2}kTn = 2,5 \cdot 10^6 \frac{\text{Эрг}}{\text{см}^3}$ — плотность внутренней энергии воздуха.

12.87. $V_0 = \frac{2}{5} \frac{Q}{\pi g H} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^\gamma = 98,7 \text{ м}^3$, где $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5}$, конечный объем нефтехранилища $V = \frac{2}{5} \frac{Q}{\rho g H} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\gamma-1} = 342 \text{ м}^3$.

12.88. $\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\Delta P}{P_0} = \frac{1}{2} \frac{E^2 a}{kT} = 1,2 \cdot 10^{-7}$. Давление в конденсаторе больше.

12.89. $T = T_0 \frac{CU^2}{12PV} = 2,97 \cdot 10^7 \text{ К}$. Нагрев обкладки может существенно снизить температуру газа.

12.90. $W_1 - W_0 = N \frac{T_2 - T_1}{T_1} \approx 1,8 \text{ Вт}$.

12.91. $N_{\max} = \sigma S \left(\frac{T_{\text{C}}^4 \alpha^2}{4} - T_{\text{H}}^4 \right) \left(1 - \frac{T_{\text{x}}}{T_{\text{H}}} \right) = 148 \text{ Вт}$, где T_{H} находится из уравнения $T_{\text{H}}^4 \left(T_{\text{H}} - \frac{3}{4} T_{\text{x}} \right) = \alpha^2 \frac{T_{\text{x}} T_{\text{C}}^4}{16}$. После подстановки данных: $T_{\text{H}} \approx 364 \text{ К}$.

12.92. $N_{\max} = 2\sigma S T_{\text{x}}^4 \left(\frac{T_{\text{H}}}{T_{\text{x}}} - 1 \right) = 97 \text{ Вт}$, $T_{\text{x}} = \frac{3}{4} T_{\text{H}} = 225 \text{ К}$.

$$12.93. T = \sqrt{T_1 T_2} = 400 \text{ K}; N_{\max} = \frac{a}{2} (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 = 100 \text{ кВт.}$$

$$12.94. c(T_0) = \frac{3Q_{12}T_0^3}{T_1(T_1^3 - T_3^3)m} = 1,6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

$$12.95. \Delta T = \frac{q_{\text{пл}}}{c} \frac{T_{\kappa} - T_{\pi}}{T_{\pi}} \approx 7,9 \text{ К.}$$

12.96. $\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_1}{T_2} = 6$, где v_1 и v_2 — число молей газа при температурах T_1 и T_2 соответственно.

$$12.97. \eta = 1 - \frac{\frac{T_A}{T_C} - 1}{\frac{T_A}{T_C} \ln \frac{T_A}{T_C}} \approx 0,46.$$

$$12.98. \psi = \frac{Q_{12}}{A} = \left(\frac{\frac{T_3}{T_1} - 1}{\ln \frac{T_3}{T_1}} - 1 \right)^{-1} = 1,22.$$

$$12.99^*. \frac{\omega'}{\omega} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2,9.$$

Решение. Для адиабатического процесса $PV^\gamma = \text{const}$, откуда для небольших относительных изменений $\Delta P/P = -\gamma \Delta V/V$. Уравнение малых колебаний поршня вблизи положения равновесия

$$M\ddot{x} = \Delta P S = -\gamma P S \frac{\Delta V}{V} = -\gamma \frac{PS^2}{V} x,$$

и для частоты колебаний получим

$$\omega^2 = \frac{\gamma P S^2}{M V}.$$

Отсюда отношение частот

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{\gamma' V}{\gamma V'}} = \sqrt{\frac{7\gamma'}{\gamma}}.$$

Для расчета показателя адиабаты $\gamma = (C_V + R)/C_V$ необходимо оценить величины колебательного и вращательного квантов энергии. Для колебательного кванта $\hbar v_H/k = 6100 \text{ K} \gg T = 280 \text{ K}$, и соответствующие степени свободы не возбуждаются. Для вращательного кванта

$$\frac{\hbar}{\mu a^2 k} = \frac{2\hbar}{m_p a^2 k} = 172 \text{ K} < T = 280 \text{ K},$$

и эти степени свободы при комнатных и близких к ним температурах необходимо учитывать. Таким образом, для показателя адиабаты получаем

$$\gamma = \frac{(3/2 + 2/2 + 1)}{(3/2 + 2/2)} = \frac{7}{5}.$$

Используя уравнение состояния для идеального газа, нетрудно найти температуру, которую он приобрел в результате изобарического охлаждения:

$$T' = \frac{TV'}{V} = \frac{280}{7} = 40 \text{ K} \ll 172 \text{ K}.$$

Здесь уже необходимо учитывать замораживание вращательных степеней свободы. В этом случае показатель адиабаты становится равным

$$\gamma' = \frac{3/2 + 1}{3/2} = \frac{5}{3},$$

и для отношения частот окончательно получаем

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 7}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2,9.$$

12.100. $C = \frac{3}{2}R - R \frac{\ln \left(\frac{3\varphi_0 - 1}{3\varphi_1 - 1} \right)}{\ln \left[\frac{\tau_2}{\tau_0} + \frac{3}{4\tau_0} - \left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_0} \right) \right]} = \frac{R}{2}$, где использовались приведенные параметры $\varphi = V/V_{\text{кр}}$ и $\tau = T/T_{\text{кр}}$.

$$\mathbf{12.101. } T_{\text{кр}} = \frac{8}{27k_B} \left(\frac{B}{d^6} - \frac{A}{3d^{12}} \right) = \frac{16}{81} \frac{B}{kd^6} \approx 100 \text{ K.}$$

$$\mathbf{12.102*} T = 418 \text{ K.}$$

Решение. Запишем закон сохранения массы для вещества в пробирке:

$$0,6\rho_{\text{ж}}(T) + 0,4\rho_{\text{п}}(T) = \rho_{\text{ж}}(T').$$

Отсюда получаем

$$0,6 + 0,4 \frac{\rho_{\text{п}}(T)}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \frac{\rho_{\text{ж}}(T')}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \frac{0,28}{0,42} = \frac{2}{3}, \quad \text{или} \quad \frac{\rho_{\text{п}}(T)}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \frac{1}{6}.$$

Приведенные объемы жидкости и пара будут равны

$$\varphi_{\text{ж}}(T) = \frac{V_{\text{ж}}}{V_{\text{кр}}} = \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{ж}}(T)} = \frac{0,265}{0,42} = 0,63,$$

$$\varphi_{\text{п}}(T) = \frac{\rho_{\text{кр}}}{\rho_{\text{п}}(T)} \frac{\rho_{\text{ж}}(T)}{\rho_{\text{п}}(T)} = \frac{\rho_{\text{ж}}(T)}{\rho_{\text{п}}(T)} \frac{\rho_{\text{кр}}}{\varphi_{\text{ж}}(T)} = 6 \cdot 0,63 = 3,78.$$

Уравнение соответственных состояний для газа Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$\left(\pi + \frac{3}{\varphi_{\text{п,ж}}^2} \right) \left(\varphi_{\text{п,ж}} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau, \quad \text{где } \tau = \frac{T}{T_{\text{кр}}}; \quad \pi = \frac{P}{P_{\text{кр}}}.$$

Записывая его для жидкости и пара, получим систему уравнений

$$\left(\pi + \frac{3}{0,63^2} \right) \left(0,63 - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \tau = \left(\pi + \frac{3}{3,78^2} \right) \left(3,78 - \frac{1}{3} \right).$$

Из этой системы находим: $\pi = 0,482$, $\tau = \frac{3}{8}(0,482 + 7,56) \cdot 0,297 = 0,894$, $T = \tau T_{\text{кр}} = 418 \text{ K.}$

$$\mathbf{12.103. } \varphi = \varphi_0 \frac{mT}{m_0 T_0} \exp \left[\frac{\lambda \mu}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] = 0,66 \text{ (66%).}$$

$$\mathbf{12.104. } H \approx \frac{RT_0^2}{\mu_{\text{H}_2\text{O}} \lambda \alpha} \cdot \frac{\ln \varphi}{\frac{gT_0}{\lambda \alpha} - 1} = 1,5 \text{ км.}$$

$$\mathbf{12.105. } \Delta S = \frac{5}{2} k \ln \frac{T_{\text{ж}}}{T_{\text{п}}} - k \ln \frac{P_{\text{ж}}}{P_{\text{п}}} \approx 0,16k \approx 0,22 \cdot 10^{16} \text{ эрг/K.}$$

$$\mathbf{12.106. } A_{\text{max}} = \frac{3}{2} Nk \left[T_1 + T_2 - 2\sqrt{T_1 T_2} \left(\frac{4T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2} \right)^{1/3} \right].$$

З а м е ч а н и е. Условие равновесия двух сред есть равенство их химических потенциалов $\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T)$, откуда следует равенство температур и давлений. Поэтому совершение работы можно представить в два этапа: сначала мы выравниваем температуры, а затем изотермически выравниваем и давления (которые различаются из-за разности концентраций).

12.107. $x \approx \frac{Pv - c\Delta T}{\lambda} \approx 2,6\%$, где v — удельный объем, а c — удельная теплоемкость воды.

12.108. $\Delta T \approx -\frac{2T_0\Delta\rho}{c_P\rho_m^2\Delta t_m}\Delta P$, где c_P — удельная теплоемкость воды, ρ_m — плотность воды при 4°C , $\Delta t_m = 4^\circ\text{C}$. Конечная температура воды $t_k \approx 0,4^\circ\text{C}$.

12.109.* Решение, а) Считая молекулу $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ жесткой, $c_V = \frac{3R}{\mu} = 0,54 \text{ Дж/(г} \cdot \text{К)}$; в предположении полного возбуждения всех колебательных степеней свободы молекулы (так же как и вращательных) $c_V = \frac{3+i}{\mu} R = 4,3 \text{ Дж/(г} \cdot \text{К)}$, где $i=3(n2)=21$.

б) Если считать справедливым соотношение Майера $c_P - c_V = \frac{R}{\mu}$, то, используя экспериментальные данные о теплоемкости спирта при постоянном давлении ($c_P = 2,42 \text{ Дж/(г} \cdot \text{К)}$), получим искомое $c_V = 2,24 \text{ Дж/(г} \cdot \text{К)}$.

в) Используя точное термодинамическое соотношение

$$c_P - c_V = -\frac{T(\partial V)/(\partial T)_P^2}{(\partial V/\partial P)_T} = \frac{T\alpha^2}{\rho\beta_T} = 0,6 \text{ Дж/(г} \cdot \text{К}),$$

получим $c_V \approx 1,82 \text{ Дж/(г} \cdot \text{К)}$.

Таким образом, при комнатной температуре колебательные степени свободы молекул спирта в значительной степени заморожены ($\sim 70\%$).

12.110. $T = T_0 \left(\frac{N}{N_0} \right)^{1/3} \approx 217 \text{ К.}$

12.111. $P \approx \frac{\sqrt{2\pi mkT}}{a^2 t} = 9,66 \cdot 10^{-7} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} = 7,2 \cdot 10^{-10} \text{ мм рт. ст.}$

12.112. $T_k = 2T_0 = 600 \text{ К}$ (газ в этой ситуации ведет себя как двумерный), т. е. число степеней свободы молекулы $i=2$, и уравнение адиабаты прежнее.

12.113. $\frac{\Lambda_n}{\Lambda_0} \propto \frac{1}{n^4} = 10^{-4}$.

12.114. $T_{\text{пред}} \approx T_0 \left(\frac{kT_0}{P_0 \sigma d} \right)^{2(\gamma-1)} \approx 0,7 \text{ К.}$

12.115. Время перемешивания, обусловленное диффузией, $\tau \approx \frac{(\pi R_3)^2}{2\Lambda \bar{v}} \approx 2 \cdot 10^{18} \text{ с}$, где $\Lambda \sim 10^{-5} \text{ см}$ — длина свободного пробега молекулы при нормальных условиях, $\bar{v} \sim 10^3 \text{ м/с}$ — средняя скорость молекул. Турублентность ускоряет процесс перемешивания примерно в 10^{11} раз.

12.116. $v = \frac{EqR^2\rho N_A}{6\pi\mu P} = 7,2 \cdot 10^{-2} \text{ см/с.}$

12.117. $T \approx \frac{eE}{2k\sigma n} \sqrt{\frac{M}{m_e}} \approx 5000 \text{ К}$, где M — средняя масса молекул воздуха.

12.118. $\tau \approx \frac{\lambda^2}{4BkT} \approx 0,06 \text{ с}$. Здесь «4» в знаменателе — следствие не двумерности, а плоского характера фотографии.

12.119. $v = \sqrt{\frac{\Lambda e E}{2m}} \approx 15$ м/с, где m — масса иона Ar.

12.120. $\langle r^2 \rangle = \frac{4}{3} \frac{kT\tau}{P\sigma} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \approx 4 \cdot 10^{-2}$ см; $\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 2$ мм, где $\mu = 12,4$ г/моль — приведенная молярная масса Ar и O_2 .

12.121. Применяя формулу Стокса для силы сопротивления при вязком движении, получим

$$R \sim \left(\frac{729}{16\pi\rho} \frac{kT\eta^2}{(\rho - \rho_0)^2 g^2} \right)^{1/7} \sim 10^{-3} \text{ см.}$$

В осадок выпадут частицы, для которых средняя высота столба, оцененная по барометрической формуле, $h \sim \frac{kT}{mg} \leq R$ (m — масса частиц), что эквивалентно условию

$$R \geq \left(\frac{kT}{4(\rho - \rho_0)g} \right)^{1/4} \approx 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Следовательно, в краске выпадет осадок.

12.122. $r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{9\eta^2}{4\rho\rho_{\text{возд}}g}} \approx 4 \cdot 10^{-3}$ см, при этом установившаяся скорость капли $v_{\text{уст}} = \frac{\eta}{2r\rho_{\text{возд}}} \approx 18$ см/с. Здесь обозначено ρ — плотность воды, $\rho_{\text{возд}} = \frac{P\mu}{RT} = 1,16 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $\eta = \frac{1}{3}\lambda\rho_{\text{возд}}\bar{v} = 15,7 \cdot 10^{-5}$ г/см·с — динамическая вязкость воздуха, $\bar{v} \approx 4,8 \cdot 10^4$ см/с — средняя скорость молекул.

12.123. $u = v - \frac{2gr^2}{9\eta} \rho_q = 5,4$ см/с; $\text{Re} = \frac{\rho_f(v-u)r}{\eta} = 0,35$.

12.124. $\mu = \frac{jd}{\Delta P} = 0,75$ см²/(Б·с).

12.125. Требуемое число столкновений $n = \frac{\mathcal{E}_1}{\Delta\mathcal{E}} \ln 10 \approx 16$, где \mathcal{E}_1 — кинетическая энергия атома аргона массой M_1 , $\Delta\mathcal{E}$ — передаваемая энергия атому гелия массой M_2 , $\Delta\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_1 \frac{2M_2}{M_1 + M_2}$ (максимальная энергия при лобовом соударении вдвое больше). Требуемое расстояние $R = nl \frac{T}{T_{\text{ком}}} \frac{P_{\text{ком}}}{P} = 0,54$ мм.

12.126. Электрическое поле пробоя $E_{\text{пр}} = \frac{W_u P \pi r^2}{ekT} \approx 2,38$ ед. СГСЭ. В катушке электрическое поле складывается из осевого E_0 и циркулярного вихревого поля E_r . Полное поле $E = \sqrt{E_r^2 + E_0^2} \approx 1,89 E_0$. Здесь $E_r = \frac{L\mathcal{J}_0\omega}{2\pi R c^2}$, $E_0 = \frac{L\mathcal{J}_0\omega}{lc^2}$, индуктивность катушки $L \approx 200$ см.

При $E = E_{\text{пр}}$ $\mathcal{J}_0 \approx \frac{lc^2 E_{\text{пр}}}{1,89 L \omega} = 4,51 \cdot 10^{11}$ ед. СГСЭ ≈ 150 А.

12.127. $x = \sqrt{\frac{DT}{\ln 2}} \ln 10^5 = 20,4$ см.

12.128. $T_2 - T_1 = \frac{P_2 - P_1}{\rho c} \approx 2,4$ К, где $c \approx 4,2$ кДж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды при 20°C, а ρ — плотность воды.

$$12.130. h = \frac{\varkappa(T_0 - T_s)}{\varepsilon\sigma T_s^4} \approx 770 \text{ м.}$$

$$12.131. Q = 4\pi\gamma\kappa\rho \frac{T_r - T_R}{P_r} \approx 2,3 \cdot 10^{-9} \frac{\text{ЭР}}{\text{Г}\cdot\text{с}}; h = R_3 - \sqrt{R_3^2 - \frac{3}{2} \frac{P_r}{\pi\gamma\rho^2}} \approx 2880 \text{ км},$$

где $T_r = T_{\text{пл}}$, а $T_R = 300 \text{ К}$ — температура Земли у поверхности.

$$12.132. r_0 = \frac{\varkappa}{\sigma} \frac{T_0 - T_R}{T_0^4 - T_R^4} \approx 0,43 \text{ см},$$

$$12.133. r_0 = \frac{2\varkappa_\infty}{3\sigma T_0^{5/2} T_\infty^{1/2}} \left[1 - \left(\frac{T_\infty}{T_0} \right)^{3/2} \right] \approx 0,153 \text{ см.}$$

$$12.134. T_s = \left(\frac{j^2 a \rho}{\sigma} \right)^{1/4} = 77 \text{ К} — \text{температура наружной поверхности}; \Delta T = \frac{\sigma T_s^4 b}{\varkappa} \approx 0,02 \text{ К.}$$

$$12.135. v = \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{PT\varkappa}{(\rho q)^2 d} \approx 0,38 \text{ мм/с} \approx 1,37 \text{ м/ч, где } \Delta\rho — \text{разность плотностей воды и льда.}$$

$$12.136. P = P_0 \left(1 + \frac{2\sigma\mu}{r\rho_\infty RT} \right) \approx 1,09 \text{ атм, где } r = \sqrt[3]{\frac{3N\mu}{4\pi\rho N_A}} \approx 0,9 \cdot 10^{-6} \text{ см} — \text{радиус «минимальной» капли жидкости.}$$

$$12.137. r = \frac{2\sigma T}{\rho_\infty \lambda \Delta T} \approx 225 \text{ \AA.}$$

$$12.138. s = \frac{s_0}{\sqrt{1 + \alpha \frac{\rho_B}{\rho_{B0}} \left(\frac{s_0}{v_{3B}} \right)^2}} \approx 180 \text{ м/с; где обозначено } \rho_B — \text{плотность}$$

$$\text{воды, } \rho_{B0} = \frac{P\mu}{RT} = 1,2 \text{ кг/м}^3, \alpha = N \frac{4\pi}{3} r^3 \approx 4,2 \cdot 10^{-3}, v_{3B} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}} = 343 \text{ м/с} — \text{скорость звука в воздухе при } 20^\circ\text{C}.$$

$$12.139. \Delta T = \frac{\Delta F}{Mc} \left(\sigma - T \frac{d\sigma}{dT} \right) = 1,65 \text{ К; } \Delta S = \Delta F \frac{d\sigma}{dT} \approx 10^5 \text{ эрг/К, где } \Delta F — \text{изменение поверхности, } c = 4,19 \cdot 10^7 \text{ эрг/(г\cdot К)} — \text{удельная теплоемкость воды.}$$

$$12.140. U = \frac{\sigma\delta}{2} = 300 \text{ эрг/см}^2, \text{ где } \delta \approx 2 \text{ \AA} — \text{межатомное расстояние.}$$

$$12.141^*. \Delta T = \frac{RT^2 \Delta P}{P_1 \Lambda_1 + P_2 \Lambda_2} \approx 3 \text{ К, т. е. температура кипения системы } t = 69^\circ\text{C}. \text{ Здесь } P_1 \approx 0,27 P_0, P_2 \approx 0,73 P_0, \text{ где } P_0 — \text{нормальное атмосферное давление.}$$

Решение. Кипение начинается на границе соприкосновения жидкостей, когда сумма парциальных давлений паров обеих жидкостей равна внешнему давлению. Для паров воды парциальное давление

$$P_1 = P_0 \exp \left[-\frac{\Lambda_1}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) \right] \approx 0,27 P_0;$$

аналогично вычисляется парциальное давление для паров CCl_4 : $P_2 \approx 0,73 P_0$. При увеличении внешнего давления изменяются и парциальные давления паров: $\Delta P_1 = P_1 \frac{\Lambda_1}{RT^2} \Delta T$ и $\Delta P_2 = P_2 \frac{\Lambda_2}{RT^2} \Delta T$. Тогда $\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 = \frac{\Delta T}{R} (P_1 \Lambda_1 + P_2 \Lambda_2)$, откуда и следует ответ.

$$12.142. \lambda(0) = \frac{a}{b} = \frac{27}{8} RT_{\text{kp}} \approx 150 \text{ Дж/моль.}$$

$$12.143. P = P_0 \frac{T_c}{T_{\text{кип}}} \exp \left[\frac{\Lambda}{R} \left(\frac{1}{T_{\text{кип}}} - \frac{1}{T_c} \right) \right] = 0,945 \text{ атм} \approx 718 \text{ мм рт. ст. (экспериментальное значение 715 мм рт. ст.); } P_0 = 1 \text{ атм.}$$

12.144. Величина максимального количества жидкого азота находится из решения уравнения $A = \frac{5}{2} P_1 V_1 \frac{\Delta T}{T_1} + x\lambda$, где $A = 2,33 P_1 V_1$ — работа в адиабатическом процессе Пуассона, равная изменению внутренней энергии газа, откуда $x = \frac{P_1 V_2}{\lambda} \left(2,33 - 2,5 \frac{\Delta T}{T_1} \right) = 11,3 \text{ см}^3$.

$$12.145. T_{\text{k}} = 0,0122 \text{ К; } x = \frac{S_{\text{ж}}(T_0) - S_{\text{ж}}(T_{\text{k}})}{S_{\text{т}}(T_{\text{k}}) - S_{\text{ж}}(T_{\text{k}})} = \frac{4,6(T_0 - T_{\text{k}})}{\ln 2 - 4,6T_{\text{k}}} = 0,198, \text{ где } T_{\text{k}} — \text{корень квадратного уравнения}$$

$$\Delta P = \frac{2,3R}{V_{\text{ж}} - V_{\text{т}}} (T_{\text{k}}^2 - T_0^2) - \frac{R \ln 2}{V_{\text{ж}} - V_{\text{т}}} (T_{\text{k}} - T_0).$$

12.146. $\Delta S \approx \pm k_B$. Знак зависит от начальных условий. Если вначале маятник был неподвижен — и раскачался, то «+»; если вначале были колебания, а в конце маятник остановился, то знак «-».

$$12.147. \tau = \frac{\pi a^{3/2}}{e} \sqrt{\frac{m}{2}} = 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

$$12.148. \Delta\varphi = Ed \left(1 - \frac{d}{2L} \right) \ln \left(\frac{2L}{d} - 1 \right) \approx Ed \ln \frac{2L}{d} = 207 \text{ В.}$$

$$12.149. \sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2} \left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2 + R^2}} \right) \approx -2,6 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/см}^2.$$

$$12.150. V = \frac{ESRn}{2\pi} = 6,67 \cdot 10^{-4} \text{ ед. СГСЭ} = 0,2 \text{ В.}$$

$$12.151. L = 7,48 \text{ см; } r \approx 1,6 \text{ мкм} — \text{радиус шариков.}$$

$$12.152. F(r) = -\frac{4\pi a \delta T^4 R^2}{cr^3} = -4,55 \cdot 10^{-26} \text{ дин.}$$

$$12.153. \rho = \frac{4\pi t}{\ln 2} = 2,2 \cdot 10^4 \text{ ед. СГСЭ} = 2 \cdot 10^{14} \text{ Ом} \cdot \text{м.}$$

$$12.154^*. E_0 = \frac{E_{\text{пр}}}{3} = 10 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}.$$

Решение. Пробой произойдет, если максимальная напряженность поля у поверхности поляризованной в поле капельки воды превысит $E_{\text{пр}}$. Оценку напряженности поля, при котором пробивается воздух с аэрозольными капельками, можно сделать достаточно просто, если учесть, что капельки воды из-за большой величины диэлектрической проницаемости и, соответственно, сильной поляризуемости ведут себя в электрическом поле подобно проводящим шарикам, поле в которых полностью экранируется (формально, с точки зрения электростатики, металл — это диэлектрик с $\epsilon = \infty$). Заменим капельки воды проводящими шариками. Поле поляризованного проводящего шарика максимально вблизи полюсов. Оно складывается из внешнего поля E , которое в силу условия $nr^3 \ll 1$ мы считаем невозмущенным, и поля наведенного диполя $p = Er^3$, расположенного в центре шара: $E_p = E + 2p/r^3 = 3E$. Пробой наступает, если $E_p = 3E > E_{\text{пр}}$ или $E = E_{\text{пр}}/3$. Таким образом, напряженность пробоя оказывается в три раза меньше: $E_0 = E_{\text{пр}}/3 = 10 \text{ кВ/см}$. Эта оценка практически совпадает с расчетом, полученным для конечного $\epsilon = 81$. В этом случае поле у полюсов $E_p = 3\epsilon E/(\epsilon + 2) \approx 3E$.

12.155. $C \approx 2,2 \text{ мФ}$; $r \approx 480 \div 490 \text{ кОм}$.

12.156. $B_0 = \frac{4\pi^2 I}{\mathfrak{M} T_B^2} = 0,55 \text{ Гс}$, где $I = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$; $\cos \varphi = \left(\frac{T_B}{T_\Gamma}\right)^2 = 0,28$, т. е. $\varphi = 74^\circ$.

12.157. При $L \ll L_\Omega$ $B \ll B_{\min} = \frac{3B_0}{\pi l^2 \rho \Gamma^2} \approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ Гс}$, где $\Gamma = \frac{g \mu_B}{\hbar} \approx 1,8 \cdot 10^7 \text{ Гс}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ (гиромагнитное отношение при $g=2$); $l \ll l_0 \sqrt{\frac{B_{\min}}{B_3}} \approx 60 \text{ нм}$.

$$\mathbf{12.158.} v = \frac{\kappa H^2}{2\beta} = 1 \frac{\text{см}}{\text{с}}$$

12.159. Ток через соленоид будет практически совпадать с максимальным амплитудным значением $\mathcal{I}_L = Q\mathcal{I}_0 = 100 \text{ А}$. Время запитки соленоида $t = 300 \text{ с} \gg \tau$, где $\tau = 6 \text{ с}$ — характеристическое время — величина, обратная коэффициенту затухания $\delta = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{1}{2\sqrt{LCQ}}$.

12.160. $\ddot{x}_{\max} = \frac{gH_0^2}{8\pi\rho R\sqrt{7}(8/7)^4} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ см}/\text{с}^2$ (максимальное ускорение достигается при $x = R/\sqrt{7}$).

$$\mathbf{12.161.} q_0 = 42,4 \text{ Кл.}$$

$$\mathbf{12.162.} B_0 = \sqrt{\frac{32(T_{\text{пп}}^2 - T_0^2)C_V\rho_0}{T_0 D^2 \omega^2 t}} = 1,35 \text{ кГс.}$$

12.163. $T = \left(1 + \frac{\pi}{2} \frac{e^2}{\hbar c}\right)^{-2} = \left(1 + \frac{\pi}{2} \alpha\right)^{-2} = 0,9775$ — коэффициент прохождения; $R = \left(\frac{\pi}{2} \alpha\right) T = 0,0001$ — коэффициент отражения; $\kappa = \pi \alpha T = 0,0224$ — коэффициент поглощения графена $T + R + \kappa = 1$; $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ — постоянная тонкой структуры.

12.164. $Q = 2\pi f \frac{W}{P} \approx 200$, где $W = 2 \cdot \frac{E_{\text{пп}}^2}{8\pi} abl \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 906 \text{ эрг} \approx 9,1 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}$; размер резонатора $l \approx 3 \text{ см}$, мода (1, 2, 0).

$$\mathbf{12.165.} E_1 = \frac{2\sqrt{2eV_0m}f}{e(n-1/4)} = \frac{1500}{n-1/4 \text{ см}} \frac{\text{Б}}{\text{см}} = 2; 0,86; 0,55; \dots \frac{\text{Б}}{\text{см}}.$$

12.166. Период обращения протона $T = \frac{2\pi}{ecB} mc^2 \left(\frac{W}{mc^2} + 1 \right) = T_0 \left(\frac{W}{mc^2} + 1 \right)$. Ускорение прекратится, когда протоны начнут проходить дуанты в замедляющем поле. Это произойдет, когда период обращения увеличится на $T_0/4$. Таким образом, максимальная кинетическая энергия протонов равна $W = \frac{mc^2}{4} \approx 250 \text{ МэВ}$.

12.167. Период обращения электрона $T = T_0 \left(\frac{W}{mc^2} + 1 \right)$, где $T_0 = \frac{2\pi}{ecB} mc^2$. Синхронизм движения будет тогда, когда период обращения кратен T_0 , т. е. $\Delta W_{\min} = mc^2$. Длины окружностей соседних орбит отличаются на cT_0 , значит, максимальное расстояние между орбитами равно разности их диаметров $\Delta L = \frac{c}{\pi f_0} = 3,2 \text{ см}$.

$$\mathbf{12.168.} F \approx \frac{2\alpha R^2 V^2}{(l+R)^5} \sim 10^{-5} \text{ дин, где } \alpha = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4r^3.$$

12.169. $D = 4L\sqrt{\frac{hc/\lambda - A}{eV_a}} = 1,32$ мм. При расчете полагалось, что диаметр светового пятна на фотокатоде $d \ll D$.

$$\mathbf{12.170.} E = \frac{4\mathcal{E}}{eL} = 1,33 \text{ ед. СГСЭ} = 400 \text{ В/см.}$$

12.171. $Q \approx 4r^2\sqrt{7\pi P} = 1,876 \cdot 10^4$ ед. СГСЭ = $6,25 \cdot 10^{-6}$ Кл. (Формула справедлива при $r \gg \frac{a}{P} = 5 \cdot 10^{-5}$ см). В случае $r \ll \frac{a}{P}$ величина заряда $Q = 8\sqrt{3\pi\sigma r^3}$. Параметры задачи соответствуют первому условию.

$$\mathbf{12.172.} V = \sqrt{\frac{8\pi Mgd}{a}} = 4,71 \text{ кВ.}$$

$$\mathbf{12.173.} \tau = \frac{R^2}{2} \frac{\ln(R/r)}{\mu V} = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

12.174. Поскольку подвижности ионов постоянны, то постоянны их скорости v_1 и v_2 , и ток меняется скачком в момент времени t_1 прихода одного из ионов на пластину. Обозначив через x пусть первого иона, а $(d - x)$ — путь второго, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \mathcal{J}_1 = \frac{|e|}{d}(v_1 + v_2), \quad 0 < t < t_1 = \frac{x}{v_1}; \\ \mathcal{J} &= \mathcal{J}_2 = \frac{|e|}{d}v_2, \quad t_1 < t < t_2 = \frac{d-x}{v_2}. \end{aligned}$$

12.175. $T = \frac{Ne^2}{2r_0} = 0,72 \text{ МэВ; } v = c\sqrt{1 - (\mathcal{E}_0/\mathcal{E})^2} = 0,91c$, где \mathcal{E} — полная энергия, а \mathcal{E}_0 — энергия покоя электрона. Время расширения пучка можно оценить по пролетному времени $t \sim t_{\text{прол}} \approx r_0/c \approx 3 \cdot 10^{-11}$ с.

$$\mathbf{12.176.} n = \frac{UT}{Re} \approx 2 \cdot 10^7.$$

$$\mathbf{12.177.} B = B_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2 = 5 \cdot 10^6 \text{ Гс; } P = \frac{B^2}{8\pi} = 0,995 \cdot 10^{12} \frac{\text{дин}}{\text{см}^2} \approx 10^6 \text{ атм.}$$

$$\mathbf{12.178.} B = \sqrt{8\pi P} = 5 \cdot 10^6 \text{ Гс; } B_0 = B \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 = 5 \cdot 10^4 \text{ Гс.}$$

$$\mathbf{12.179.} \tau = \frac{4c^2\rho}{\sigma B^2} = 7,2 \text{ с.}$$

12.180. $\Omega = \frac{q}{2mc} \mathbf{B}$. Заметим, что величина Ω не зависит от скорости вращения кольца ω и от угла между векторами \mathbf{B} и $\boldsymbol{\omega}$. Полученный результат соответствует ларморовской частоте прецессии. Рассматриваемая задача по существу является моделью поведения атома в магнитном поле (эффект Земана).

$$\mathbf{12.181.} \omega_0^2 = \frac{v}{c} \frac{pB}{I_0}.$$

12.182. $\omega = \frac{(R_2^2 - R_1^2)VBl}{4Mc(R_1^2 + R_2^2)\ln(R_2/R_1)} = 8,1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$. За 1 час угол поворота $\varphi = \omega t = 0,029$ рад $\approx 1,66^\circ$.

$$\mathbf{12.183.} T \approx \frac{\pi ca^2}{2I} \sqrt{\frac{\rho}{2|\kappa|}} \approx 1,2 \text{ с.}$$

12.184.* Решение. Дадим краткое решение этой задачи. Магнитная восприимчивость $\kappa(\text{H}_2\text{O})$ воды от давления не зависит (вода практически несжимаема). А вот $\kappa(\text{O}_2)$ газообразного кислорода зависит от давления.

Полагая, что с ростом давления она растет прямо пропорционально, запишем ее величину при искомом давлении P_x как $\kappa(O_2) \frac{P_x}{P_0}$. Воспользуемся принципом суперпозиции: добавим и «вычтем» кислород в объеме капли. Тогда мы имеем однородный фон кислорода, на котором расположена капля воды с эффективной магнитной восприимчивостью

$$\kappa_{\text{эфф}} = \kappa(H_2O) - \kappa(O_2) \frac{P_x}{P_0}.$$

Определим магнитный момент капли воды:

$$\mu = IV = \kappa_{\text{эфф}} HV \approx \kappa_{\text{эфф}} BV.$$

Сила, действующая на магнитный момент капли в неоднородном магнитном поле, равна

$$F_z = \mu \frac{dB}{dz} = \left(\kappa(H_2O) - \kappa(O_2) \frac{P_x}{P_0} \right) VB \frac{dB}{dz}.$$

Далее, рассматривая равновесие капли в гравитационном поле в атмосфере кислорода (учитывая закон Архимеда), получаем ответ:

$$\frac{P_x}{P_0} = \frac{\rho(H_2O)g + \kappa(H_2O)B \frac{dB}{dz}}{\rho(O_2)g + \kappa(O_2)B \frac{dB}{dz}} \approx 10,3,$$

т. е. левитация капли наступает при давлениях $P_x \geq 10$ атм.

$$12.185. \mathcal{J} = \frac{6\mu\pi r^2 v}{CL^4 R} \approx 0,19 \text{ мА.}$$

12.186. $\frac{\Delta\Omega}{\Omega_t} = \pm \frac{IB}{\rho gl} \approx \pm 10,1$, где Ω_t — частота прецессии под действием силы тяжести. Два знака $\Delta\Omega$ означают, что есть два возможных направления намагниченности **I**: вдоль вектора **L** и против него.

$$12.187. B = I_0 \frac{\frac{4\pi - \frac{2d}{R}}{\sqrt{1 + (\frac{2d}{R})^2}}}{\sqrt{1 + (\frac{2d}{R})^2}} \approx 5390 \text{ Гс}, \text{ где } R = \frac{r_1 + r_2}{2} = 2 \text{ см.}$$

$$12.188. Q = \frac{4\pi IV n}{cR} \approx 3,75 \cdot 10^8 \text{ ед. СГСЭ} \approx 0,125 \text{ Кл.}$$

$$12.189. T = 2\pi l \sqrt{\frac{\pi\rho}{3B_0 B}} \approx 7,5 \text{ с.}$$

$$12.190. \mathcal{J} \geq \frac{2\pi c R^2 \rho g}{B} \approx 2400 \text{ А.}$$

$$12.191. \mathcal{J} = \frac{2\pi\hbar c^2}{Le} = 124 \text{ ед. СГСЭ} = 0,0413 \text{ А.}$$

$$12.192. \omega^2 \approx \frac{8b^2}{d^3 M}; d > \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi c}{\omega}, \text{ т. е. } d < \frac{8b^2}{\pi^2 M c^2}.$$

12.193. $F = \frac{1}{h} \left[\frac{V^2}{4(\ln \frac{4h}{d})} - \frac{\mathcal{J}^2}{c^2} \right] = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ дин/см} — \text{провод притягивается к плоскости.}$

$$12.194. Mg \leq \frac{3\mathfrak{M}^{2/3}}{16} \left(\frac{H_c}{2} \right)^{4/3} = 5,9 \cdot 10^4 \text{ дин} = 0,59 \text{ Н.}$$

$$12.195. \mu = \frac{q}{2mc} L = \frac{5e}{c} \sqrt{\frac{3kT}{10\pi\rho r}} = 1,12 \cdot 10^{-24} \frac{\text{эрг}}{\Gamma \text{с}} = 0,022 \mu_{\text{яд.}}$$

$$12.196. \frac{M}{q} = \frac{R_n^2 B^2}{c^2 V} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

12.197. $v_0 = \frac{Be}{2\pi mc} = 164 \text{ кГц}$, $\Delta v = \frac{cE}{2RB} \approx 30 \text{ кГц}$, где $m = 28 \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г}$ — масса иона азота.

$$12.198. \mathbf{S} = \frac{\pi r^2 j^3}{nec^2} \mathbf{e}_z, \text{ где } \mathbf{e}_z \text{ — вектор в направлении тока.}$$

$$12.199. x_0 = \frac{QSV_0^2}{16\pi d^2 m \omega^2} = 0,11 \text{ мм.}$$

$$12.200. \frac{Q_\infty}{Q_R} = 1 + \frac{L}{CRr} \approx 34.$$

$$12.201. r_C = \frac{N_{\text{пот}}}{T^2} = 9,8 \text{ Ом}, \quad N_{\text{пот}} = \frac{U^2}{R} + \frac{S}{4\pi} Vf = 9,81 \text{ Вт}; \quad C = \frac{1}{2\pi f X_C} \approx 14,4 \text{ мкФ}, \text{ где } X_C = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - r_C^2} = 219,8 \text{ Ом.}$$

$$12.202. R = \frac{N_{\text{пот}}}{I^2} = 12 \text{ Ом}, \quad N_{\text{пот}} = I^2 r + N + N_{\text{неп}} = 12 \text{ Вт}; \quad L = \frac{X_L}{2\pi f} = 0,7 \text{ Гс}, \text{ где } X_L = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = 219,7 \text{ Ом, а также } N_{\text{неп}} = \frac{Vf}{4\pi} \oint \mathbf{H} d\mathbf{B} — \text{ мощность потерь на перемагничивание ферромагнетика.}$$

$$12.203. \frac{dT}{dt} = \frac{fA}{12\pi R\rho} \oint \mathbf{H} d\mathbf{B} = 9,1 \cdot 10^{-4} \text{ К/с} \approx 3,3 \text{ К/ч.}$$

$$12.204. t = \frac{\Delta T}{dT/dt} \approx 72 \text{ с, где } \frac{dT}{dt} = \frac{\rho c^2 B_0^2}{32\pi^2 h \rho_{\text{Ag}} Cl_{\text{св}}} = 13 \text{ К/с} — \text{ скорость однородного нагрева на скиновой глубине } l_{\text{св}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{f}} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ см} \ll h.$$

$$12.205. Q = \frac{\rho c^2}{2\pi^2 f D \delta} = 18 \text{ (формула записана в СГСЭ).}$$

$$12.206. \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15.$$

$$12.207. \mathcal{J}_{\text{м}} = \frac{Bcl_c}{4\pi N} \approx 8,45 \cdot 10^3 \text{ А, где } B = 4\pi I \frac{D_{\text{и}}^2}{D_c^2 - (D_{\text{и}} - 2\delta)^2} \approx 2,12 \cdot 10^4 \text{ Гс,} \\ \delta \approx \sqrt{\frac{\tau}{4\pi\rho\mu}} c \approx 2,2 \text{ см} — \text{ глубина проникновения поля в цилиндр за время} \\ \tau \approx \frac{l_c + l_{\text{и}}}{2v} \approx 5,5 \text{ мс.}$$

$$12.208. \mathcal{J}_m = \mathcal{J}_0 \frac{D_c^2}{D_c^2 - (D_{\text{и}} - 2\delta)^2} \approx 1,6 \cdot 10^4 \text{ А, где глубина проникновения} \\ \delta \text{ поля за время пролета } \tau = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ с с оценивается по формуле } \delta = c \sqrt{\frac{\tau}{4\pi\rho}} = 0,28 \text{ см.}$$

$$12.209. N = Q^2 = 10^4 \text{ витков.}$$

$$12.210. Q = \sqrt{\frac{R}{2r}} \approx 30.$$

$$12.211. |\Delta C| > \frac{RCT^3}{16\pi L\tau^2} \approx 2,4 \cdot 10^{-12} \Phi, \text{ где } T = 2\pi \sqrt{LC} \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ с} — \text{ период} \\ \text{ колебаний; } \left| \frac{\Delta C}{C} \right| \approx 2,4 \cdot 10^{-2}.$$

12.212* Решение. Наличие пучка приводит к диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(\omega') = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega'}\right)^2 = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\omega'^2} = 1 - \frac{4\pi \mathcal{J}e}{S\sqrt{2m\epsilon}\omega'^2} = 1 - \alpha \left(\frac{\omega_0}{\omega'}\right)^2.$$

где $\alpha = \frac{4\pi \mathcal{J}e}{S\omega_0^2 \sqrt{2m\epsilon}} = 1,06$.

Поскольку искомое соотношение

$$\frac{\omega'}{\omega_0} = \sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} = \left(1 - \alpha \left(\frac{\omega_0}{\omega'}\right)^2\right)^{-1/2},$$

то отсюда следует $\frac{\omega'}{\omega_0} = \sqrt{1 + \alpha} = 1,435$.

12.213* Решение. При грамотном включении волновое сопротивление кабеля равно сопротивлению излучения антенны и входному сопротивлению телевизора, так что отраженного сигнала не возникает. Параллельное подключение к одному кабелю двух телевизоров эквивалентно подключению активного сопротивления, равного половине волнового. Из-за неточного сопряжения сигнал будет частично отражаться от разветвления, однако повторного его отражения от антennы не будет. Если обозначить амплитуды напряжений и токов в прямой волне как U_0 и \mathcal{J}_0 , а в отраженной — U_1 и \mathcal{J}_1 , то в точке разветвления

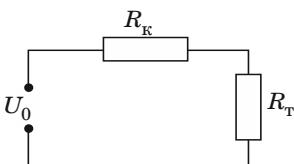


Рис. 205

так что отраженного сигнала не возникает. Параллельное подключение к одному кабелю двух телевизоров эквивалентно подключению активного сопротивления, равного половине волнового. Из-за неточного сопряжения

сигнал будет частично отражаться от разветвления, однако повторного его отражения от антennы не будет. Если обозначить амплитуды напряжений и токов в прямой волне как U_0 и \mathcal{J}_0 , а в отраженной — U_1 и \mathcal{J}_1 , то в точке разветвления

$$U = U_0 + U_1 = \frac{R\mathcal{J}}{2} = (\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1) \frac{R}{2} = \left(\frac{U_0}{R} - \frac{U_1}{R}\right) \frac{R}{2},$$

откуда

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{1 - 1/2}{1 + 1/2} = \frac{1}{3}.$$

Мощность отраженного сигнала будет равна $1/9$, а рассеивающаяся на половинном сопротивлении $-8/9$ от первоначальной. В каждый телевизор попадает $4/9$ первоначальной мощности при амплитуде в $2/3$ от исходной (или $10\lg \frac{N_1}{N_2} = 10\lg \frac{4}{9} = -3,52$ дБ).

Можно предложить еще и такое решение. При оптимальном согласовании кабеля и телевизора $R_k = R_t$ (рис. 205) мощность в нагрузке

$$N_0 = \left(\frac{U_0}{2R}\right)^2 R = \frac{U_0^2}{4R},$$

а при $R_t = \frac{R_k}{2}$ выделяемая мощность

$$N_1 = \left(\frac{U_0}{3R/2}\right)^2 \frac{R}{2} = \frac{2}{9} \frac{U_0^2}{R} = \frac{8}{9} N_0.$$

12.214. $E_0^2 = \frac{16QN\lambda}{V_c}$; $E_0 \approx 4,6$ ед. СГСЭ = 1,4 кВ/см.

12.215. $N = \frac{E_0^2 h a c}{16\sqrt{2}Q} = 0,4 \cdot 10^9$ эрг/с = 40 Вт — предельная мощность определяется пробоем в электрическом поле E_0 .

12.216. $E_{\max} = \frac{2cH_c}{\omega_0 \tau_0} = \frac{1}{6} \cdot 10^4$ ед. СГСЭ = 5 · 10⁵ В/см.

12.217. $\Delta d = 2d \frac{\Delta f}{f_0} = 2 \cdot 10^{-11}$ см.

12.218. $\Delta_{\max} = \Delta \left(z_0 = \frac{l}{2} \right) = \frac{\pi a^3 h E_0^2}{8mgl} = 0,049$ см ≈ 0,5 мм, где z_0 — координата центра шарика.

12.219. $H_0 = \sqrt{\frac{16mgl\Delta_{\max}}{\pi a^3 h}} = 14,3$ Э — максимальное отклонение шарика будет при $z_0 = \frac{l}{2}$ (положение центра шарика).

12.220. $E_0 = E e^{L/l_{\text{ск}}} = 455$ мкВ/см, где скиновая глубина проникновения поля $l_{\text{ск}} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu_0\omega}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\sigma f}} = 820$ см при $\sigma = e\eta[u(\text{Na}^+) + u(\text{Cl}^-)]\frac{mN_A}{A}$.

12.221. $d = r_f^2 \frac{\hbar\omega - A}{4e} = 1,4$ В · см².

12.222. $n_e = \frac{2aj}{\hbar\omega} \sqrt{\frac{me}{\hbar\omega - A}} \approx 1,22 \cdot 10^{13}$ см⁻³.

12.223. $A = \hbar\omega - \frac{4ad}{r_f^2} = 4$ эВ.

12.224. $L \approx \frac{ld}{\lambda} \approx 10$ км, где $l \approx 1$ м — расстояние между фарами, $d \approx 5$ мм — диаметр зрачка глаза.

12.225. $a = \frac{4fd}{D} \approx 15$ см.

12.226. $L \approx \frac{D^2}{2,44\lambda} \approx 1200$ км (более грубая оценка $L \sim D^2/\lambda$).

12.227. Размер антенны должен быть равным минимальному размеру ширины фронта $\Delta x_{\min} = 2\sqrt{2,44\lambda L} \approx 300$ м.

12.228. $W_0 \approx \frac{c}{4} \left(\frac{E\lambda L}{D} \right)^2 \approx 8$ ГВт.

12.229. $f = \frac{\pi I R^4}{4c f^2} = 2,6 \cdot 10^{-12}$ дин; $t = \sqrt{\frac{2lm}{F}} \approx 1$ с.

12.230. $d = \frac{\lambda}{s} l = 0,2$ мм; $P = \frac{b}{\cos\alpha} \approx b = 1$ мм, где $2d = 12,5^\circ$; $D = \frac{P}{\pi \operatorname{tg}\alpha} = 2,9$ мм.

12.231. $d = \frac{\lambda}{\operatorname{tg}\varphi \sin\theta} \approx \sqrt{6}\lambda = 1,59$ мкм; $l = \frac{\lambda L}{h \cos\theta \sin^2\theta} = 46$ мкм.

12.232* $m = 0,18$.

Решение. Рассмотрим вначале соотношение между шириной резонансной кривой и ее сдвигом в результате колебаний зеркала. Ширина резонансной кривой $\Delta\omega = \omega_0/Q = 2\pi c/(\lambda Q) = 3 \cdot 10^{15}/10^8 = 3 \cdot 10^7$ с⁻¹. Амплитуда колебаний зеркала $A^2 = 2k_B T/m(2\pi f_0)^2 \approx 2 \cdot 10^{-16}$ см², т. е. $A = 1,4 \cdot 10^{-8}$ см. Так как длина резонатора $L = n\lambda/2 = n\pi c/\omega_0$, то $dL = -n\pi c d\omega_0/\omega_0^2$ и относитель-

ный сдвиг резонансной частоты

$$\left| \frac{\Delta\omega_0}{\Delta L} \right| \equiv \frac{\Delta\omega_0}{A} = \frac{\omega_0^2}{n\pi c} = \frac{\omega_0}{L},$$

так что сдвиг резонанса $\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0 A}{L} = \frac{3 \cdot 10^{15} \cdot 1,4 \cdot 10^{-8}}{10} \simeq 4,2 \cdot 10^6$, т. е. много меньше ширины резонансной кривой.

Резонансная кривая — лоренцевская функция $y = 1/(1+x^2)$, где $x = -2Q(\omega - \omega_0)/\omega_0$. Амплитудная модуляция будет максимальна, если частота возбуждения будет соответствовать максимуму производной $dy/dx = -2x/(1+x^2)^2$, т. е. при условии

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} = 0,$$

откуда следует, что смещение внешней частоты относительно резонанса должно быть равно $x_0 = \pm 1/\sqrt{3} = \pm 0,577$, при этом максимальная производная $dy/dx = \pm 2x/(1+x^2)^2 = \pm 3\sqrt{3}/8 = \pm 0,649$. Таким образом, глубина амплитудной модуляции выходного сигнала равна

$$m = \Delta y = 0,649 \Delta x = (\Delta x = 2Q\Delta\omega_0/\omega_0 = 0,28) = 0,649 \cdot 0,28 = 0,18.$$

12.233. $W \simeq W_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^4 = 10^{15} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^3}$. Заметим, что для создания инверсной заселенности число переходов в единицу времени на промежуточный уровень должно быть больше числа спонтанных переходов. Только в этом случае будет заселяться рабочий уровень. Вероятность спонтанного излучения $\propto v^3$ (закон E^3 для дипольных переходов).

$$\text{12.234. } m_\Phi = \left(\frac{8\pi^2 \hbar^2 \Delta t}{Lc} \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \right)^{1/2} \simeq 5,2 \cdot 10^{-38} \text{ г, т. е. } \frac{m_\Phi}{m_\text{s}} < 5,7 \cdot 10^{-11}.$$

$$\text{12.235. } m_\Phi = \left(\frac{\pi^2 \hbar^2 v_0 3\tau \delta t}{Lc^3} \right)^{1/2} \simeq 10^{-38} \text{ г, т. е. } \frac{m_\Phi}{m_\text{s}} < 10^{-11}.$$

$$\text{12.236. } \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{1,6H\Delta f}{c f^3 \tau} \simeq 0,5 \cdot 10^{-2}, \text{ т. е. } 0,5\%.$$

$$\text{12.237. } \frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\dot{n}l}{c}; v = \frac{\Delta\omega}{\omega} c = -\dot{n}l.$$

$$\text{12.238*}. a_2 = 13 \text{ м.}$$

Решение. При движении к берегу длина волны l и амплитуда a волн цунами в силу закона сохранения энергии связаны соотношением $a_1^2 l_1 = a_2^2 l_2$. Так как $l \propto v \propto \sqrt{H}$, то $a_1/a_2 = (H_1/H_2)^{1/4}$ (эта формула впервые была получена английским физиком Эйри). Таким образом, $a_1/a_2 = 4,3$, т. е. амплитуда (высота) волн цунами у берега равна 13 м. В результате незаметная в океане из-за большой длины волны (несколько сот километров) трехметровая волна превращается в грандиозную и разрушительную волну высотой с четырехэтажный дом.

$$\text{12.239. } L \approx \frac{cd}{\lambda \Delta f} \approx 2 \cdot 10^5 \text{ см} = 2 \text{ км.}$$

12.240. $V_{\text{кор}} \approx \frac{\pi \lambda^3}{\psi^2} \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3$.

12.241. При восстановлении изображения плоской волной с длиной волны λ действительному изображению, т. е. сходящейся волне, соответствует граничное условие $\exp\left(-i\frac{\pi r^2}{\lambda_0 L_0}\right) = \exp\left(-i\frac{\pi r^2}{\lambda L} \cdot \frac{\lambda L}{\lambda_0 L_0}\right)$, откуда следует условие, что предел разрешения $\delta \sim \frac{\lambda}{D} L \propto \lambda L = \lambda_0 L_0$. Это означает, что предел разрешения не изменится. Здесь L — расстояние от голограммы до действительного изображения предмета, D — размер голограммы.

12.242. Здесь возникают биения разностной частоты, регистрируемые низкочастотной системой. Частота биений

$$\Delta v = v_0 \frac{2v_{\text{отв}}}{c} = v_0 \frac{2\omega_3 R_3}{c} \approx 31 \text{ кГц}.$$

12.243. $m > \frac{\delta}{f} \frac{a}{N\delta\lambda} = 2,5$, т. е. $m \geq 3$.

12.244. $l < \frac{Da\delta\lambda}{2\lambda^2}$ Кроме того, $l_{\min} \gg D$ (условие малости углов).

12.245. $|\sin \theta| = \left| \frac{c}{v} - \frac{m\lambda}{d} \right| \leq 1$.

12.246. $\frac{v}{c} \geq \frac{d}{L} = 2 \cdot 10^{-4}$.

12.247. Расстояние между главными максимумами, так же как и интенсивность света в нулевом максимуме, уменьшается в два раза.

12.248. $\tau = \frac{D}{c} = 100 \text{ пс.}$

12.249. $Q = \frac{Q_1 \tau_1 c}{R\lambda} \approx 10$.

12.250. $D_{\min} \approx \frac{1,22}{N} \frac{\lambda}{\delta\lambda} \approx 1,5 \text{ см.}$

12.251. $\Delta n \approx \frac{1}{N}$ (изменение показателя преломления); $\Delta P \approx 3300 \text{ Па} \approx \frac{1}{30} \text{ атм.}$

12.252. Распределение интенсивности $I(x) = 2I_0 \left[\frac{\sin(kDx/2F)}{kDx/2F} \right]^2 \left(1 + \cos \frac{kdx}{F} \right)$.

Число интерференционных полос (рис. 206) $N \approx 1 + 2 \frac{\Delta x}{\Delta l} \approx 1 + \frac{2d}{D}$.

12.253. $\tau \approx \pi \frac{\delta\lambda}{\Delta\lambda} \approx 1,5\%$.

12.254. $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2L(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda})} \approx 2 \text{ \AA.}$

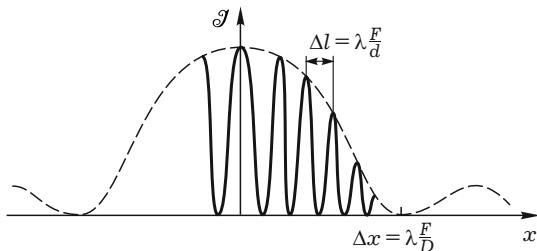


Рис. 206

12.255. Длина когерентности $l_{\text{ког}} \approx \frac{c}{\Delta v} \approx 0,3$ см. Поэтому будет виден лишь нулевой порядок: вначале при отражении от передней грани при $\Delta x = 0$, затем от задней грани при $x = 2dn = 2$ см. Далее будут появляться следующие порядки интерференции убывающей интенсивности (см. рис. 206).

$$12.256. \tau \approx \frac{\lambda n}{c(n_e - n_o)} \approx 3,4 \cdot 10^{-13} \text{ с.}$$

$$12.257. M = \frac{dL}{dt} = \frac{2\lambda IS}{\pi c} = 5,3 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см.}$$

$$12.258. \frac{E_2}{E_1} = 2.$$

12.259. $B = E \sim \frac{4m_e c^2}{\lambda e}$. Здесь $\left(\frac{v}{c}\right)^2 \approx 3/4$, и ускорение электрона происходит в течение периода изменения поля в световой волне. Числовая оценка для поля $B \sim 1,1 \cdot 10^8$ Гс: $W \approx \frac{c}{4\pi} E^2 \lambda^2 \sim \frac{m_e^2 c^5}{e^2} \approx 9 \cdot 10^9$ ГВт.

$$12.260. E \approx \sqrt{\frac{4\pi I_C}{c}} \frac{D}{Fa_C} \approx 360 \text{ В/см.}$$

$$12.261. r_\Phi \approx \frac{\lambda}{D} F \approx 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ см}, l_\Phi \approx 4\lambda \left(\frac{F}{D}\right)^2 = 2 \text{ см.}$$

12.262. $\frac{\Phi_{\text{отр}}}{\Phi_0} = [\Phi_1 + \Phi_2 + \sqrt{\Phi_1 \Phi_2} \cos(\Delta\varphi - \pi)] \frac{1}{\Phi_0} = 0,26$, где $\Delta\varphi = \frac{4n_1 d}{\lambda} \pi = \pi$ (Отраженный поток от первой поверхности $\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \left(\frac{n_1 - 1}{n_2 + 1}\right)^2 = 0,17$, прошедший поток $\Phi'_0 = 0,83\Phi_0$, а отраженный от второй границы $\Phi_2/\Phi'_0 = 0,03$).

12.263. $R \approx 0,034$, где $R = r_1^2 + r_2^2$, $r_1 = \frac{n_n - 1}{n_n + 1} = 0,13$, $r_2 = \frac{n_n - n_c}{n_n + n_c} = -0,13$, $n_c = n_n^2 = 1,69$. Здесь r_1 , и r_2 — амплитудные коэффициенты отражения от границ: вакуум—пленка, пленка—стекло.

$$12.264. F = \frac{\pi I R^4}{4c f^2} = 0,42 \text{ дин} = 4,6 \cdot 10^{-6} \text{ Н.}$$

12.265. $r = 0$, т. е. наблюдается полное прохождение излучения без отражения.

12.266. $\mathcal{E} = Q \approx \frac{\pi}{A} \left(\frac{\lambda F}{D}\right)^2 \sqrt{\frac{3R}{A}} \kappa \tau \rho \Delta T \approx 700 \text{ эрг} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ Дж, где } \Delta T \approx t_{\text{пл}} = 2200^\circ\text{C, } A \text{ — атомная масса алюминия.}$

$$12.267. \alpha = k \left(\frac{D}{d}\right)^4 = 8 \cdot 10^3.$$

12.268. $\varphi \approx \frac{D}{R} \frac{Z\rho N_A e^2 \lambda^2}{\pi A m_e^2 c^2} \approx 10^{-6}$ рад. Дифракционная расходимость $\Delta\varphi \sim \frac{\lambda}{D} \sim 10^{-9}$ рад $\ll \varphi$.

12.269. $\varphi = 4\lambda \sqrt{\frac{N r_{\text{кл}}}{\pi}} \approx 5 \cdot 10^{-2}$ рад, где $\lambda = \frac{hc}{\mathcal{E}}$ — длина волны рентгеновских лучей, $r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см — классический радиус электрона, $N = \frac{ZN_A \rho}{A} \approx 4,9 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$ — концентрация электронов.

$$12.270. L = \frac{2\pi m_e c \Delta t}{Ne^2} \frac{v_1^2 v_2^2}{v_2^2 - v_1^2} \approx \frac{2\pi m_e c \Delta t}{Ne^2} v_1^2 \approx 7 \cdot 10^{20} \text{ см} \approx 700 \text{ св. лет.}$$

$$12.271. \frac{\Delta L}{L} = -\frac{\Delta \omega}{\omega} = 10^{-14}; \left| \frac{\Delta \omega}{\omega} \right| = \alpha \Delta T, \Delta T = 10^{-8} \text{ К.}$$

$$12.272. \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{\lambda_3^2} \delta\lambda = 50 \text{ нм.}$$

$$12.273. \tau = \frac{L}{c(1 + \lambda R/L)} = 5,37 \cdot 10^{-10} \text{ с.}$$

12.274. Появление спутников при комбинационном рассеянии обусловлено процессами рассеяния фотонов с поглощением и испусканием колебательного кванта $\hbar\omega_{\text{кол}} = \frac{2\pi c\hbar}{\lambda}$. Отношение интенсивностей $\frac{I_{\text{флюол}}}{I_{\text{крас}}} = \frac{\bar{n}(\omega, T)}{\bar{n}(\omega, T) + 1} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{\text{кол}}}{k_B T}\right) \approx e^{-1,04} \approx 0,34$. В этой формуле обозначено $\bar{n}(\omega, T) = \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1\right]^{-1}$ — среднее число колебательных квантов.

12.275. Учитывая то обстоятельство, что не весь резонатор заполнен поглащающим веществом, эффективная длина пути, которую свет проходит за время генерации, будет равна $L_{\text{эфф}} = \text{ста} = 5,4 \cdot 10^9 \text{ см}$. Интенсивность волны $I(\omega_0, L) = I_0(\omega_0) e^{-\kappa L_{\text{эфф}}}$, откуда $\kappa \approx \frac{1}{L_{\text{эфф}}} \frac{\Delta I}{I_0} \sim 10^{-11} \text{ см}^{-1}$.

12.276. Изотопический сдвиг $\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{m_e(M_{41} - M_{39})}{M_{41}M_{39}} = 0,86 \cdot 10^{-6} < \frac{1}{c} \sqrt{\frac{k_B T}{M}} \approx 1,05 \cdot 10^{-6}$. Резонансное поглощение будет наблюдаться.

$$12.277. T \leq \frac{Mc^2}{k_B} \left[\frac{m_e(M_{23} - M_{22})}{M_{23}M_{22}} \right]^2 = 275 \text{ К.}$$

$$12.278. T \leq \left(\frac{m_e}{M} \right)^2 \left(\frac{\Delta M}{M} \right)^2 \frac{Mc^2}{k_B} = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ К.}$$

$$12.279. v_\Phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{eB\omega}{4\pi Ne}} = 0,5 \cdot 10^{10} \text{ см/с; } v_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = 2v_\Phi = 10^{10} \text{ см/с.}$$

$$12.280. N = \frac{c}{8evd^2} \frac{B_1 B_2}{(\sqrt{B_2} - \sqrt{B_1})^2} = \frac{9B_1 c}{8evd^2} = 7,67 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

$$12.281. \tau = \frac{m_e \omega^2}{\mu \pi c e^2}.$$

$$12.282. d_1 = \frac{v \ln 10}{4\pi v \kappa} \approx 13,5 \text{ м, } d_2 = 2d_1 \approx 27 \text{ м } (\kappa = 0,508).$$

$$12.283. n = \frac{\pi(1-\epsilon)m_e f_0^2}{e^2} = 9,3 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}, \text{ где } \epsilon = \left(\frac{c}{v} \frac{\Delta f}{f_0} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

12.284. Коэффициент поглощения излучения

$$A_\omega = \frac{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)}{l_\omega} \propto \frac{n^2}{\omega^2 T^{3/2}}.$$

Установившаяся ситуация соответствует постоянству оптической толщины слоя $A_\omega d = \text{const}$, откуда следует $T \propto n^{4/3} d^{2/3} \omega^{-4/3}$.

$$12.285. \sigma = \frac{n_e^2}{mv_e}.$$

$$12.286. B = \sqrt{8\pi n k_B T} \approx 60 \text{ кГс.}$$

$$12.287. T = \frac{\mathcal{J}^2}{c^2 \pi R^2 n k_B} = 1,47 \cdot 10^7 \text{ К.}$$

$$12.288. v \approx \frac{\mathcal{J}}{c} \sqrt{\frac{8l}{\pi M}} \approx 16 \text{ км/с.}$$

$$12.289. v \approx \frac{2\mathcal{J}}{c} \sqrt{\frac{l}{M} \ln \frac{D_1}{D_2}} \approx 27,4 \text{ км/с}, \text{ где } M = \frac{3\pi D_1^3 \rho}{32} = 3,68 \text{ мг.}$$

$$12.290. \epsilon = \frac{1}{3}[4 - \epsilon(0)] \approx 0,83, n = \sqrt{\epsilon} \approx 0,91.$$

$$12.291^*. P_{\min} = 4,6 \text{ атм.}$$

Решение. При скорости частицы и $v > c/n$ — фазовой скорости света в среде — возникает коническая поверхность, ограничивающая световой поток

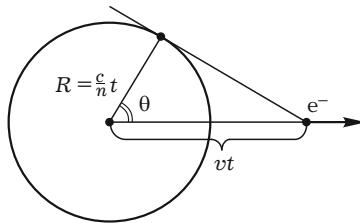


Рис. 207

излучения, исходящего от движущегося электрона (рис. 207). При этом угол θ определяется соотношением

$$\cos \theta = \frac{\frac{c}{n}t}{vt} = \frac{1}{\beta n} \approx 1 - \frac{\theta^2}{2},$$

где $\theta = 3^\circ$ — заданный угол. Отсюда

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1}{n(1 - \theta^2/2)}.$$

По условию задачи $n - 1 = a \ll 1$, тогда

$$\beta = \frac{1}{(1 + a)(1 - \theta^2/2)} \approx 1 - a + \frac{\theta^2}{2} = \frac{v}{c} \leq 1.$$

откуда следует $a \geq \frac{\theta^2}{2} = 0,00137$, т. е. показатель преломления n_x , при котором реализуется указанный процесс, отвечает условию $n_x - 1 \geq 0,00137$. Показатель преломления воздуха $n^2 = \epsilon = 1 + 4\pi Na$, где a — поляризуемость молекул; N — концентрация молекул; $N = \frac{P}{kT}$. Поскольку показатель преломления $n = \sqrt{1 + 4\pi Na} \approx 1 + 2\pi Na$, то $n - 1 \approx 2\pi Na = \frac{2\pi a}{kT} P$. Таким образом, при данной температуре $n - 1 \propto P$. Отсюда следует отношение

$$\frac{n_x - 1}{n_0 - 1} = \frac{P_x}{P_0}, \quad \text{т. е. } P_x = P_0 \frac{n_x - 1}{n_0 - 1} = 4,6 \text{ атм} = P_{\min}.$$

Давление воздуха (при $t = 0^\circ\text{C}$), при котором реализуется черенковское излучение под углом $\theta = 3^\circ\text{C}$, должно быть больше 4,6 атм.

12.292. $P = P_0 \frac{n - 1}{n_0 - 1} \approx 40,3$ атм, где $n \geq \frac{c}{v} = 1,018$ — условие возникновения черенковского излучения.

$$12.293. T = mc^2 \left(\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \right) = 4,54 \text{ ГэВ}, \text{ где } n = 1 + \frac{P}{P_0} (n_0 - 1) = 1,015.$$

$$12.294. \sqrt{1 + \left(\frac{m_{\pi}c}{p} \right)^2} > n > \sqrt{1 + \left(\frac{m_{\mu}c}{p} \right)^2}, \text{ т. е. } 1,414 > n > 1,254.$$

12.296* Решение. Потенциальная энергия атома в неоднородном электрическом поле $\mathbf{E}(r)$ $U(r) = -\frac{\alpha}{2} \mathbf{E}^2(r)$, откуда сила, действующая на единицу объема,

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha N_A}{2} \frac{\rho}{\mu} \nabla \mathbf{E}^2(r).$$

В условиях задачи эта сила направлена по радиусу к центру. Условие равновесия жидкости приводит к уравнению $\frac{dP}{dr} = F$. Интегрируя его с граничным условием $P(\infty) = 0$, получим

$$P(r) = \frac{\alpha N_A}{2} \frac{\rho}{\mu} E^2(r).$$

Из условия задачи следует, что $\epsilon = 1 + 4\pi\alpha N_A \frac{\rho}{\mu} \approx 1$, откуда $E = \frac{e}{r^2}$. Учитывая граничное условие на поверхности шарика $P(R) = P_{\text{тв}}$, находим радиус шарика

$$R = \left(\frac{\alpha N_A}{2} \frac{e^2 \rho}{\mu P_{\text{тв}}} \right)^{1/4} \approx 6,8 \text{ \AA}.$$

$$12.297*. H = \frac{8\mu_B^2 B^2}{3m_0 g k_B T} \approx 40 \text{ см}, \text{ где } m_0 \text{ — масса молекулы кислорода.}$$

Решение. Проекция магнитного момента молекулы O_2 (в пренебрежении вращением молекулы как целого) на направление внешнего магнитного поля \mathbf{B} квантуется по правилу

$$\mu_J = g_J m_J \mu_B.$$

Здесь g_J — фактор Ланде, μ_B — магнетон Бора, $m_J \in \{-J, -J+1, \dots\}$ — проекция полного момента количества движения неспаренных электронов J . Так как $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ и по условию задачи $\mathbf{L} = 0$, то $J = S = 1$ и $g_J = 2$. Следовательно, возможны три значения проекции магнитного момента: $-2\mu_B$; 0 ; $2\mu_B$. Вероятность того, что молекула находится в состоянии с проекцией $m_J 2\mu_B$, пропорциональна $\exp\left(-\frac{m_J 2\mu_B B}{k_B T}\right)$. Тогда средняя энергия молекулы

$$\overline{U}_B = \sum_{m_J=-1}^1 \frac{m_J 2\mu_B B \exp\left(-\frac{m_J 2\mu_B B}{k_B T}\right)}{\sum_{m_J=-1}^1 \exp\left(-\frac{m_J 2\mu_B B}{k_B T}\right)}.$$

Безразмерный параметр $\frac{2\mu_B B}{k_B T} = 1,69 \cdot 10^{-2} \ll 1$, и поэтому

$$\overline{U}_B \approx \frac{1}{3} \left[-2\mu_B B \left(1 + \frac{2\mu_B B}{k_B T} \right) + 2\mu_B B \left(1 - \frac{2\mu_B B}{k_B T} \right) \right] = -\frac{8(\mu_B B)^2}{3k_B T}.$$

Так как $\bar{U}_B < 0$, то молекуле O_2 выгодно «втягиваться» в магнитное поле (как всякому парамагнетику). Умножая \bar{U}_B на число втянутых молекул N , получим полный выигрыш в энергии.

Пусть x — высота столба втянутой жидкости, S — его сечение. Тогда $N = \frac{\rho S x}{m_0}$, где ρ — плотность жидкого кислорода, m_0 — масса молекулы O_2 . Таким образом,

$$U = U_B N = -\frac{8}{3} \frac{(\mu_B B)^2}{k_B T} \frac{\rho S}{m_0} x,$$

и втягивающая сила $F = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{8}{3} \frac{(\mu_B B)^2}{k_B T} \frac{\rho S}{m_0}$. Приравнивая эту силу весу столба втянутой жидкости высотой H , получаем

$$H = \frac{8}{3} \frac{(\mu_B B)^2}{k_B T m_0 g} \approx 40 \text{ см.}$$

12.298. Требуемая мощность $N \geq \frac{B^2}{8\pi t} 2\pi RS \approx 26,2 \text{ МВт}$, где $B \approx \frac{mc^2}{eR} \approx 13 \text{ кГс}$.

12.299. Для измерения степени поляризации с точностью 10^{-8} требуется наблюдать 10^{16} распадов (закон $1/\sqrt{N}$). Необходимое время $t = \frac{10^{16}}{10^{12}} = 10^4 \text{ с} \approx 3 \text{ ч.}$

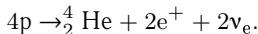
12.300. $\Delta S = kN \ln 2 \sim 10^{-10} \text{ эрг/К.}$

12.301. $S \approx \frac{4m_e^4 c^7}{\pi e^2 \hbar^2} \approx 7,5 \cdot 10^{30} \text{ Вт/см}^2$.

12.302. $\mathcal{E}_{\min} \approx \frac{\pi^2 mc^2}{r_{\text{кл}}} ct = 9 \cdot 10^4 \text{ эрг} \sim 10 \text{ мДж}$, где $r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{mc^2}$ — классический радиус электрона. Заметим, что движение электрона можно считать релятивистским, если приобретенный им импульс $p \sim mc$. Чтобы эффективно использовать лазер, необходимо, чтобы вся энергия излучения падала на площадку размером $\sim \lambda$.

12.303.* $\frac{j_\gamma}{j_\gamma} \leq \frac{2\bar{\mathcal{E}}_\gamma}{Q} \approx 0,9 \cdot 10^{-7}$, где $\bar{\mathcal{E}}_\gamma = 2,7 k_B T$, а $Q = 25 \text{ МэВ}$ — энерговыделение водородного цикла.

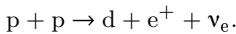
Решение. Запишем сначала протон-протонный цикл образования α -частицы:



Используя табличные значения избытков масс, можно получить выделяемую в реакциях этого цикла энергию:

$$Q = 24,68 \text{ МэВ} \approx 25 \text{ МэВ.}$$

Определим подробнее энерговыделение в реакциях образования нейтрино:



Если добавить слева и справа по два электрона, то получим



где ${}^1\text{H}$ и ${}^2\text{D}$ — нейтральные атомы. Используя табличные данные для избытков масс, получим

$$Q = (2 \cdot 0,07825 - 0,014102) \cdot 931,5016 - 2 \cdot 0,511 \approx 0,42 \text{ МэВ.}$$

Однозначно определить энергию нейтрино нельзя. Однако можно утверждать, что она не превосходит полученного значения $0,42 \text{ МэВ}$. Таким образом, энергия, уносимая нейтрино, составляет менее $1,7\% \left(\frac{0,42}{24,58} \cdot 100\% \right)$ от энерговыделения цикла. При этом нейтрино сразу покидает звезду. Остальная энергия, выделяющаяся в реакциях протонного цикла в центральной части Солнца, поглощается окружающими слоями и в конце концов уносится фотонами с поверхности Солнца. При этом мы пренебрегаем энергией, уносимой корпускулами (например, солнечным ветром).

На каждый акт полного цикла рождаются два нейтрино. Определим теперь среднее число фотонов, выделяющихся за полный цикл. Очевидно, оно равно

$$n = \frac{Q}{\bar{\mathcal{E}}_\gamma},$$

где $\bar{\mathcal{E}}_\gamma$ — средняя энергия одного фотона, улетающего с поверхности звезды. Полная энергия излучения

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{D}(\omega) \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega,$$

где $\mathcal{D}(\omega) = \frac{V\omega^2}{\pi^2 C^3}$ — число осцилляторов поля в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$. Число фотонов

$$N = \int_0^\infty \frac{\mathcal{D}(\omega) d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}.$$

Тогда искомая средняя энергия фотона

$$\bar{\mathcal{E}}_\gamma = \frac{\mathcal{E}}{N} = \hbar \frac{\int_0^\infty \frac{\omega^3 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}}{\int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}} = k_B T \frac{\pi^4 / 15}{2,404} = 2,7 k_B T.$$

Поскольку скорости нейтрино и фотона практически одинаковы и можно считать, что они вылетают изотропно, то искомое отношение потоков нейтрино и фотонов

$$\frac{j_N}{j_\gamma} \leq \frac{2\bar{\mathcal{E}}_\gamma}{Q} \approx \frac{5,4 k_B T}{Q} = 0,93 \cdot 10^{-7}.$$

$$12.304. j_v = \frac{\sigma T^4}{Q} \frac{a}{2} = 8,83 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1} \text{ см}^{-2}.$$

Здесь надо воспользоваться результатом решения предыдущей задачи, приравняв $j_v \mathcal{E}_\gamma = \sigma T^4$ и приведя поток на поверхности Солнца к потоку на орбите Земли.

$$12.305. w \sim 10^{-18}.$$

Решение. В квазиклассическом приближении можно считать, что полная энергия электрона есть

$$\mathcal{E}(z) = \pm \sqrt{p^2(z)c^2 + (mc^2)^2} - |e|Ez.$$

При этом «точки поворота» $p(z)=0$ определяются уравнениями $\mathcal{E}(z_1) = -mc^2 - |e|Ez_1$ и $\mathcal{E}(z_2) = +mc^2 - |e|Ez_2$ (рис. 208). Электрон должен протун-

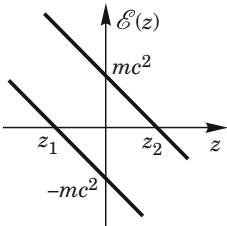


Рис. 208

нелировать от z_1 до z_2 через барьер. Вероятность туннелирования w равна проницаемости барьера:

$$w \approx D = \exp \left[-\frac{2}{\hbar c} \int_{z_1}^{z_2} |p(z)| dz \right] = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar c} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{(mc^2)^2 - [\mathcal{E}(z) + |e|Ez]^2} dz \right\}.$$

Вводя переменную $x = \frac{\mathcal{E}(z) + |e|Ez}{mc^2}$, получим

$$w = \exp \left[-\frac{2}{\hbar c} \frac{(mc^2)^2}{|e|E} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \right] = \exp \left(-\frac{\pi m^2 c^3}{\hbar |e| E} \right) = \exp \left(-\frac{\pi m c^2}{\lambda_e |e| E} \right),$$

где $\lambda_e = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см — комптоновская длина волны электрона. Тогда

$$w \approx \exp(-41,6) \approx 10^{-18}.$$

$$12.306^*. \frac{r_0}{r} \approx 11; P_0 = P \cdot 11^5 \approx 8 \cdot 10^{11} \text{ атм.}$$

Решение. Цепная реакция произойдет, когда длина свободного пробега будет порядка размеров системы. Начальная плотность ядер $n_0 = \rho N_A / A$, изменяется как $n = n_0(r_0/r)^3$, где $r_0^3 = 3m/(4\pi\rho)$. Таким образом, при взрыве

$$\left(\frac{r}{r_0} \right)^2 = n_0 r_0 \sigma = \frac{\sigma N_A}{A} \sqrt[3]{\frac{3m\rho^2}{4\pi}} \simeq 0,008,$$

и радиус надо уменьшить в ≈ 11 раз.

Давление преимущественно определяется электронным газом; при нормальных условиях в металле

$$P \simeq \frac{2}{5} n_e \epsilon_F \simeq \frac{9\hbar^2}{5m_e} \left(2\rho \frac{N_A}{A} \right)^{5/3} = 4,4 \cdot 10^{11} \text{ дин/см}^2 \approx 4,5 \cdot 10^5 \text{ атм},$$

где $n_e = 2n_0$ — концентрация электронного газа, 2 — валентность урана. Уравнение адиабаты $PV^{5/3} = \text{const}$, поэтому при взрыве

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V} \right)^{5/3} = \left(\frac{r_0}{r} \right)^5.$$

Таким образом, $P = P_0 \cdot 11^5 = 7,25 \cdot 10^{10}$ атм.

$$\mathbf{12.307.} \frac{\Delta t}{t} = \sqrt{(\Delta\theta)^2 \operatorname{ctg}^2 \theta + \left(\frac{\Delta d}{d} \right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L} \right)^2} = 1,3 \cdot 10^{-3}.$$

$$\mathbf{12.308.} F = \frac{D^2}{4\Delta n L} \approx 25 \text{ см, где } \Delta n = \delta n_0 \frac{\Delta T}{T_0} = 10^{-5}, \delta n_0 = n_0 - 1.$$

12.309. Так как разность хода между осевыми и периферийными лучами равна $\Delta \simeq L_\chi I_0$, то число колец $N = 1 + \frac{\Delta}{\lambda} = 3$. При этом центральный максимум считаем за кольцо нулевого радиуса.

12.310. Волновой фронт сразу за нелинейным образцом станет не плоским, а выпуклым, и его форма вдоль по оси z примет вид $z(r) = L_\chi I_0 \exp(-r^2/w^2)$. Максимальный угол $2\alpha_{\max}$ — угол между нормалью к волновому фронту — и есть искомая угловая расходимость θ . При этом $d\alpha_{\max} = \pi - \arctg \left(\frac{dz}{dr} \Big|_{r=r_{\max}} \right) = \arctg \left(\sqrt{\frac{2}{e}} \frac{L_\chi I_0}{w} \right); \theta = 2\alpha_{\max} = 0,2 \text{ рад.}$

12.311. Плотность записи $\rho \sim \left(\frac{\alpha}{kT} \right)^{2/3} = 4 \cdot 10^{13} \text{ бит/см}^2$. Заметим, что более аккуратный подход состоит в учете срока хранения информации τ , который составляет примерно 10 лет, т. е. $\tau \sim 10^9 \text{ с}$. Он определяется временем поворота магнитного момента $\tau \approx \tau_0 \exp \left(\frac{\alpha V}{k_B T} \right)$. Здесь характерное время $\tau_0 \sim 10^{-9} \text{ с}$. Отсюда следует, что $\alpha V \approx 40 k_B T$ и $S \simeq V^{2/3} \approx \left(\frac{40 k_B T}{\alpha} \right)^{2/3} \simeq 3 \cdot 10^{-13} \text{ см}^2$, что дает плотность записи $\rho \simeq \frac{1}{S} \simeq 3 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Последовательность заполнения состояний в атомах и ядрах

Составные части атома — электроны, нейтроны, протоны — являются фермионами, и поэтому как заполнение электронами квантовых состояний атома, так и структура нуклонных состояний в ядре полностью определяются принципом Паули. Однако форма атомного потенциала отличается от таковой для ядерного потенциала. В атоме электроны связаны с ядром кулоновским взаимодействием, а связанное состояние нуклонов в ядре возникает за счет сильного взаимодействия. Поэтому, с одной стороны, структуры квантовых состояний в этих системах во многом подобны, а с другой стороны, последовательности заполнения состояний в этих двух системах оказываются различными.

a) Атом водорода и водородоподобные атомы

Электрон в атоме водорода и водородоподобных атомах движется в чисто кулоновском поле ядра с зарядом Ze . Поскольку при движении в центрально-симметричном поле момент импульса сохраняется, то стационарные состояния электронов можно характеризовать заданием энергии состояния \mathcal{E} , квадрата момента импульса l и его проекции m_l , а также проекцией спина электрона m_s (так называемый полный набор квантовых чисел). При этом энергии стационарных состояний определяются формулой

	s	p	d
\mathcal{E}_4	—	—	—
\mathcal{E}_3	—	—	—
\mathcal{E}_2	—	—	—
\mathcal{E}_1	—		

Рис. 209

$$\mathcal{E}_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad (1)$$

где $n > 0$ — целое число. Это число называется главным квантовым числом, так как оно полностью определяет энергию состояния. При заданном n орбитальное квантовое число l может принимать значения от 0 до $n-1$.

Независимость энергии состояния от величины l носит название «случайное» вырождение и присуща только кулоновскому и осцилляторному потенциалам. В общем случае (даже в центрально-симметричном поле) это не имеет места.

В отсутствие внешнего магнитного поля энергия состояния не зависит ни от магнитного квантового числа $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, ни от спинового $m_s = \pm 1/2$. Поэтому число состояний с одинаковой энергией при заданном n (кратность вырождения) равна

$$2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 2n^2. \quad (2)$$

Состояния, соответствующие различным значениям l , принято обозначать буквами латинского алфавита

$$\begin{aligned} l = & 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \\ s, p, d, f, g, h, \dots \end{aligned}$$

Спектр атома водорода без учета тонкой структуры изображен на рис. 209.

б) Заполнение электронных оболочек сложных атомов

Поведение электронов в многоэлектронных атомах определяется не только полем ядра, но также и полем всех остальных электронов, что усложняет задачу нахождения энергии электронных состояний. Однако в первом приближении такая многоэлектронная задача может быть сведена к задаче о поведении одного электрона в эффективном центральном поле, которое называется самосогласованием. Оставшаяся часть межэлектронного взаимодействия, которая не сводится к центральному потенциалу, является малой величиной и может быть учтена как поправка наряду с релятивистским взаимодействиями (главным образом спин-орбитальным).

Так как в центрально-симметричном поле сохраняется момент импульса, то состояние электрона можно характеризовать орбитальным квантовым числом l и его проекцией m_l . При заданном l состояния электрона в порядке возрастания энергии принято нумеровать числом n , принимающим значения $l+1, l+2, \dots$ Число n по аналогии с атомом водорода называется главным квантовым числом. Однако у сложных атомов порядок заполнения зависит уже от двух квантовых чисел — n и l .

Состояние отдельного электрона в атоме, заданное квантовыми числами n, l, m_l, m_s , принято обозначать цифрой, соответствующей главному квантовому числу n , и буквой, соответствующей орбитальному квантовому числу l . Если в состоянии с данными n и l имеется k электронов, то такая конфигурация обозначается как $(nl)^k$, или просто nl^k . Так, например, сокращение $3p^2$ означает, что имеются два электрона с $m=3$ и $l=1$. Об электронах, имеющих одинаковые квантовые числа n и l , говорят как об эквивалентных электронах. Для этих электронов справедлив принцип Паули: в каждом состоянии $n l m_l m_s$ может находиться только один электрон. Таким образом, при заданных n и l в атоме имеется не более $2(l+1)$ электронов, которые образуют s, p, d, f, \dots оболочки.

Термином *оболочка* часто обозначаются состояния с данным квантовым числом n , она может быть заполненной или незаполненной, в зависимости от того, все или не все состояния в ней заняты электронами. Оболочка с $n=1$ называется *K*-оболочкой (она содержит состояния $1s$), с $n=2$ называется *L*-оболочка (содержит $2s$ - и $2p$ -состояния), и далее следуют по алфавиту *M*-оболочка с состояниями $3s, 3p, 3d$ и далее *N*-, *O*-, *P*-оболочки.

В приближении центрального поля задание электронной конфигурации, т. е. величин n и l всех электронов, полностью определяет энергию атома. При этом состояния, отличающиеся проекциями m_l и m_s различных электронов являются вырожденными — энергия атома в этом приближении не зависит от взаимной ориентации орбитальных и спиновых моментов электронов. Учет нецентральной части межэлектронного взаимодействия, называемого остаточным взаимодействием, и релятивистских добавок к энергии

(главным образом спин-орбитального взаимодействия) приводит к снятию этого вырождения.

Чтобы описать состояние атома, надо знать его полный, орбитальный, и спиновый моменты. Опыт показывает, что в легких и в средних атомах остаточное взаимодействие больше спин-орбитального. В этом случае орбитальные моменты отдельных электронов складываются в суммарный орбитальный момент атома

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i, \quad (3)$$

а спиновые — в спиновый

$$\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{s}_i, \quad (4)$$

и полный момент атома равен векторной сумме \mathbf{L} и \mathbf{S} :

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}. \quad (5)$$

Указанное приближение, при котором орбитальные моменты отдельных электронов рассматриваются независимо от их спиновых моментов, носит название приближения Рассела–Саундерса. Говорят также, что имеет место (LS)-связь, или рассел-саундеровская связь.

Состояния атома, характеризующиеся данными L и S , образуют так называемый терм и обозначаются большими латинскими буквами S, P, D, F, G, H, \dots , которые означают, что полный орбитальный момент L равен соответственно 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... Слева вверху указывается число $2S+1$, называемое мультиплетностью терма, внизу справа — величина полного момента J . Такая запись называется спектроскопическим символом терма. Так, например, символ $^2P_{1/2}$ означает, что это терм с $L=1, S=1/2, J=1/2$ (при заданных L и S полный момент J может принимать и значение $3/2$, тогда это будет терм $^2P_{3/2}$).

В пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием интегралами движения являются орбитальный и спиновый моменты, а также их проекции на ось квантования. Таким образом, полным набором являются n, L, S, M_L, M_S . Энергия терма зависит только от L и S , но не зависит от их проекций (т. е. имеется вырождение по величине полного момента J). Так, например, энергии указанных выше термов $^2P_{1/2}$ и $^2P_{3/2}$ одинаковы.

Поэтому все уровни терма имеют степень вырождения

$$(2S+1)(2L+1). \quad (6)$$

Учет спин-орбитального взаимодействия, которое в этом приближении трактуется как связь между моментами L и S , приводит к расщеплению состояний терма по величине J (мультиплетное расщепление), но оставляет их вырожденными по проекции M_J . При этом число состояний, относящихся к данному терму, сохраняется. Действительно,

$$\sum_{J=|L-S|}^{L+S} (2L+1) = (2S+1)(2L+1). \quad (7)$$

Однако теперь интегралами движения являются полный момент, его проекция на выделенную ось и абсолютные значения орбитального и спинового моментов (полный набор есть nJM_JLS). Что касается проекций моментов, то они по отдельности не сохраняются, а сохраняется только их сумма. На языке векторной модели это означает переход от независимой проекции векторов \mathbf{L} и \mathbf{S} вокруг оси квантования к их прецессии вокруг направления вектора \mathbf{J} , который, в свою очередь, прецессирует вокруг оси квантования.

Относительное расположение уровней с разными J определяется правилом интервалов Ланде:

$$\Delta E_{J,J-1} = E_J - E_{J-1} = AJ \quad (8)$$

и зависит от знака константы спин-орбитального взаимодействия A . При $A > 0$ ниже лежит уровень с наименьшим $J = |L - S|$ (нормальный мультиплет), при $A < 0$ — уровень с наибольшим $J = L + S$ (обращенный мультиплет).

Для определения основного состояния атома (или иона), т. е. состояния терма с наименьшей энергией, пользуются правилом Хунда: *наименьшей энергией обладает уровень с наибольшим возможным для данной электронной конфигурации значением S и наибольшим (при данном S) значением L* .

Требование максимальности S может быть обосновано следующим образом. Рассмотрим вначале систему из двух электронов. В силу принципа Паули волновая функция системы должна быть антисимметричной по отношению к перестановке электронов. Если спины электронов параллельны (максимально возможный суммарный спин), то спиновая часть волновой функции симметрична относительно перестановки электронов, а поэтому координатная часть $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ должна быть антисимметричной, и при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ такая функция обращается в нуль. Другими словами, в состоянии с $S=1$ вероятность нахождения обоих электронов вблизи друг от друга мала, что приводит к значительно меньшему их электростатическому отталкиванию, а потому и к меньшей энергии. Аналогично, для системы из нескольких электронов наибольшему спину соответствует «наиболее антисимметрична» координатная часть волновой функции, что и приводит к минимуму энергии электронной системы.

Для определения J основного состояния используют следующие правила: $J = |L - S|$, если заполнено меньше половины оболочки, и $J = L + S$, если больше половины оболочки; при половинном заполнении $J = S$ ($L = 0$). Например, для конфигураций np^2 и np^4 возможны термы 1S , 3P , 1D . Основному состоянию будет соответствовать терм 3P , а соответствующим спектроскопическим символом для состояния np^2 является 3P_0 ; для np^4 соответственно 3P_2 . Аналогично, для конфигурации np^3 возможны термы 4S , 2P , 2D ; термом основного состояния является S , а его спектроскопический символ ${}^4S_{3/2}$.

По мере увеличения атомного номера наблюдается переход к другому предельному случаю, когда спин-орбитальное взаимодействие оказывается много больше остаточного взаимодействия. Действительно, кулоновское взаимодействие электронов примерно пропорционально Z^2 (Z электронов взаимодействуют с зарядом ядра Z), а спин-орбитальное $\propto Z^4$.

Однако когда спин-орбитальное взаимодействие оказывается большим, понятие спинового и орбитального момента электрона в отдельности теряют

смысл, определяющим является только полный момент электрона $\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{s}_i$. Поэтому полный момент атома равен векторной сумме полных моментов составляющих его электронов:

$$J = \sum_i \mathbf{j}_i.$$

Такой вид связи называется jj -связью.

В следующей таблице приведены квантовые характеристики легких атомов вплоть до аргона.

Элемент	Электронная конфигурация	Основное состояние	Число электронов в оболочке		
			$K (1s)$	$L (2s, 2p)$	$M (3s, 3p, 3d)$
₁ H	$1s$	$^2S_{1/2}$	1		
₂ He	$1s^2$	1S_0	2		
₃ Li	$1s^2 2s$	$^2S_{1/2}$	2	1	
₄ Be	$1s^2 2s^2$	1S_0	2	2	
₅ B	$1s^2 2s^2 2p$	$^2P_{1/2}$	2	2 1	
₆ C	$1s^2 2s^2 2p^2$	3P_0	2	2 2	
...	
₁₀ Ne	$1s^2 2s^2 2p^6$	1S_0	2	2 6	
₁₁ Na	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$	$^2S_{1/2}$	2	2 6	1
...
₁₈ Ar	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$	1S_0	2	2 6	2 6

Таблица показывает, что до бора у всех элементов (He, Li, Be) полностью заполнена K -оболочка, а у L -оболочки заполнена $2s$ -подоболочка. Тем самым у всех тяжелых элементов от бора до неона остовом служит электронная конфигурация $1s^2 2s^2$. В боре начинается заполнение p -состояний, в которых проекция орбитального момента $m_l = 0, \pm 1$, а проекция спина может быть $\pm 1/2$. Поэтому возникает вопрос о том, с какими значениями m_l и m_s электроны будут последовательно заполнять p -оболочку. Здесь вступает в игру уже рассмотренное нами выше правило Хунда для определения L , S , J основного состояния, что иллюстрируется следующей таблицей.

A	m_s	m_l	S	L	J	$2S+1 L_J$
₅ Be	$1/2$	l	$1/2$	1	$1/2$	$^2P_{1/2}$
₆ C	$1/2, 1/2$	0, 1	1	1	0	3P_0
₇ N	$1/2, 1/2, 1/2$	0, 1, -1	$3/2$	0	$3/2$	$^4S_{3/2}$
₈ O	$1/2, 1/2, 1/2, -1/2$	0, 1, -1, 1	1	1	2	3P_2
₉ F	$1/2$	1	$3/2$	$^2P_{3/2}$
₁₀ Ne	0	0	0	1S_0

Правда, не все обстоит так просто с порядком заполнения электронных подоболочек у более тяжелых атомов, так как с ростом числа электронов в атоме существенную роль начинает играть экранирование поля ядра внутренними электронами. Действительно, с ростом квантового числа l из-за увеличения отталкивающего действия центробежного потенциала s -электроны

могут подходить ближе к ядру, чем d - или p -электроны и, например, состояние $4s$ лежит ниже по энергии состояния $3d$, а $6s$ ниже, чем $4f$. Эмпирически установлено следующее правило (так называемое правило Клечковского), справедливое в подавляющем большинстве случаев: *электроны в сложных атомах располагаются в порядке возрастания величины $n+l$; при одинаковых $n+l$ сначала заполняется уровень с меньшим n (или, что то же самое, с большим l)*. Эта ситуация хорошо видна из приведенной ниже таблицы, в которой показан порядок расположения атомных уровней в реалистичном атомном потенциале и число электронов в оболочках:

$1s - 2$

$2s 2p - 8$

$3s 3p - 8$

$4s 3d 4p - 18$

$5s 4d 5p - 18$

$6s 4d 5d 6p - 32$

$7s 6d 5f \dots$

В качестве иллюстрации на рис. 210 схематично показана последовательность электронных уровней в атоме натрия. Кружками показаны электроны в основном состоянии атома Na .

Отметим следующее обстоятельство. В состоянии $4f$ электрон находится в среднем значительно ближе к ядру, чем в состояниях $5p$ и $6s$. Поэтому заполнение оболочки $4f$ (при полностью или частично занятых оболочках $5p$ и $6s$) у редкоземельных элементов практически не меняет их химических свойств.

Особое место в таблице Менделеева занимают благородные газы. Благородными называются газы, химически почти полностью инертные, их потенциал ионизации — энергия отрыва одного электрона — оказывается наибольшим по сравнению с соседними элементами.

Атомные номера инертных элементов 2, 10, 18, 36, 54 иногда называют магическими числами, ибо, казалось бы, в них нет никакой закономерности. Однако с точки зрения квантовой механики благородные газы — это элементы, у которых полностью заполнена соответствующая p -оболочка, и им соответствует основное состояние с $S=L=J=0$. Химическая инертность благородных элементов обусловлена тем, что их электронные s -оболочки расположены близко к ядру и не являются внешними, а химические свойства определяются именно внешними электронами. Как видно из таблицы на с. 398,

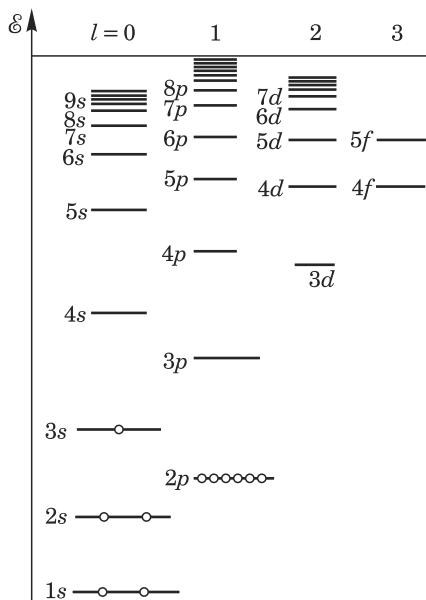


Рис. 210

после заполнения n -й p -оболочки начинает заполняться $(n+1)$ -я s -оболочка, что и приводит к периодичности химических свойств.

в) Нуклонные состояния в ядрах

Задача о структуре энергетических уровней ядра отличается от аналогичной задачи о сложном атоме прежде всего тем, что в атоме имеется центральное тело — ядро, и достаточно хорошим приближением является задача о движении электрона в заданном потенциале. Для ядра сведение задачи многих тел к одночастичной представляется на первый взгляд безнадежным делом, ибо взаимодействие между нуклонами весьма велико и отсутствие центрального тела не позволяет решать задачу по аналогии с атомом.

Однако квантовые свойства нуклонов накладывают свои особенности на их движение. В основном состоянии ядра все нейтроны и протоны по одному заполняют все наименее энергетические состояния. Изменить состояние одного нуклона можно, только сообщив ему энергию, достаточную для перехода вверх на одно из незанятых состояний. Если мы внесем в нашу сложившуюся систему добавочный нуклон, то он может занять только вышележащий незанятый уровень. Двигаясь в поле ядра, добавочный нуклон, конечно, будет сталкиваться с нуклонами ядра, но в большинстве своем эти столкновения не могут привести к изменению состояния ядра, т. е. к передаче импульса, и пробег добавочного нуклона в такой системе будет достаточно велик. Таким образом, задача о спектре состояний нуклона может быть сведена к одночастичной задаче движения нуклона в эффективном самосогласованном поле, образованном другими нуклонами. Соответственно состояние ядра в целом задается указанием состояний отдельных нуклонов аналогично электронной конфигурации в атоме. Такая модель называется *одночастичной оболочечной моделью*, она достаточно правильно описывает структуру одночастичных состояний, но, естественно, не описывает многочастичные (коллективные) возбуждения, возможные в системе конечных размеров, в частности, поверхностные и объемные колебания ядерной материи, вращательные состояния.

Как и в атоме, взаимодействия нуклона с эффективным самосогласованным нуклонным полем можно представить в виде суммы центрального потенциала и малой нецентральной добавки (остаточного взаимодействия). При этом центр поля совпадает с центром инерции ядра, а вследствие короткодействующего характера ядерных сил форма этого потенциала должна быть похожа на форму распределения плотности нуклонов в ядре. В средних и тяжелых ядрах хорошим приближением реалистичного ядерного потенциала является потенциал трехмерного изотропного гармонического осциллятора

$$U(r) = -U_0 + \frac{1}{2}M\omega^2 r^2. \quad (10)$$

В декартовой системе координат гамильтониан задачи распадается на сумму трех независимых гамильтонианов, соответствующих колебаниям вдоль осей x , y , z . Каждый одномерный осциллятор имеет энергетические уровни $\mathcal{E}_{n_i} = \hbar\omega(n_i + 1/2)$, и поэтому энергия трехмерного гармонического осциллятора равна

$$\mathcal{E}_N = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right) - U_0, \quad (11)$$

где квантовое число $N = n_x + n_y + n_z$ (n_x , n_y , n_z — целые числа). Нуклоны в ядре располагаются в виде оболочек. Это понятие заимствовано из теории

атомов. Однако ядерные оболочки означают группы уровней, разделенных большими энергетическими промежутками. При переходе от одной оболочки к другой происходят резкие изменения в таких ядерных свойствах, как энергии связи, спине ядра (в ядерной физике спином ядра называется полный момент ядра), сечении захвата нейтронов. Эти свойства аналогичны периодичности химических свойств элементов в таблице Д. И. Менделеева, и поэтому числа нуклонов, соответствующие заполненным оболочкам, называются магическими.

В случае трехмерного осциллятора группы уровней с разными N как раз и соответствуют разным оболочкам. Уровни трехмерного гармонического осциллятора сильно вырождены, так как одно и то же значение энергии (соответствующее одной и той же величине N) можно получить при различных комбинациях чисел n_x, n_y, n_z . Кратность вырождения N -го уровня S равна числу способов, которыми число N может быть представлено в виде суммы трех целых (включая значение 0) положительных чисел. Другими словами, это есть число способов, которыми N одинаковых шаров могут быть разложены по трем ящикам; оно равно

$$S = \frac{(N+1)(N+2)}{2}. \quad (12)$$

Если еще учесть спиновое вырождение, то отсюда сразу следует, что магическими должны быть числа 2, 8, 20, 40, 70, 112, как это показано на рис. 211.

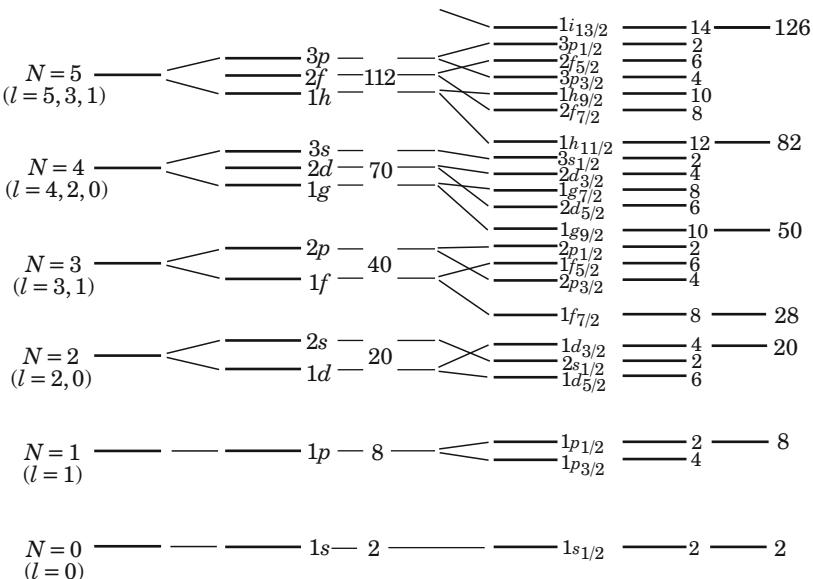


Рис. 211

При решении задачи о трехмерном гармоническом осцилляторе в сферической системе координат движение частицы характеризуется орбитальным моментом l и квантовым числом m , определяющим величину проекции l на

какую-либо ось. В гармоническом потенциале уровни энергии эквидистанты, но каждому энергетическому уровню соответствует несколько нуклонных состояний с разными значениями l . При этом каждому N соответствуют значения l : $N, N-1, N-2, \dots, 1(0)$ — в зависимости от четности N (см. рис. 211). Различные значения орбитального момента обозначаются буквами s, p, d, f, \dots , как это принято в спектроскопических обозначениях атомных электронов. Принято нумеровать уровни гармонического осциллятора с помощью пары чисел (n, l) , где n означает, что данное значение l появляется в последовательности уровней n -й раз, например $1s, 1p, 1d, 2p, 2s, 1f$ и т. д.

Конкретное расположение уровней после снятия вырождения зависит от вида поправки к потенциалу (10). Однако наибольший вклад в смещение уровней дает центробежная энергия: чем больше l , тем ниже лежит уровень, что хорошо видно на рис. 211. Таким образом, в отличие от классификации уровней энергии атомов, где число n , стоящее перед обозначением состояния (например, $2s$) является главным квантовым числом, определяющим энергию состояния, в ядре числа, стоящие перед обозначением состояния, указывают порядок расположения уровней.

В гармоническом потенциале лишь числа нуклонов в первых трех оболочках совпадают с экспериментальной последовательностью 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Если в ядре магическим оказывается как число протонов, так и число нейtronов, то такие ядра называются дважды магическими, они обладают наибольшей устойчивостью (наибольшей энергией связи). Такими дважды магическими ядрами являются, например, ядро гелия (альфа-частица) с двумя протонами и двумя нейtronами, ядро кислорода $^{16}_8O$, изотопы кальция $^{48}_{20}Ca$ и $^{40}_{20}Ca$, изотоп свинца $^{208}_{82}Pb$.

Правильное «магическое» заполнение всех оболочек получается, если допустить, что в ядрах существует достаточно сильное спин-орбитальное взаимодействие, которое сосредоточено в основном вблизи поверхности ядра, поэтому оно более существенно именно для тяжелых ядер, для которых и получается неверная последовательность магических чисел в простой модели трехмерного осциллятора.

В ядрах спин-орбитальное взаимодействие оказывается больше остаточного, поэтому классификация ядерных уровней соответствует jj -связи: спиновый \mathbf{s} и орбитальный \mathbf{l} моменты каждого нуклона складываются в полный момент $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, а векторы \mathbf{j} отдельных нуклонов складываются в суммарный момент ядра \mathbf{J} (спин ядра). Для определения J основных состояний ядер необходимо учитывать остаточное взаимодействие. В модели оболочек считается, что оно приводит к спариванию одинаковых нуклонов с противоположными \mathbf{j} . В результате у четно-четных ядер полный момент равен нулю, поскольку моменты всех нуклонов компенсируются, а у четно-нечетных ядер полный момент ядра определяется моментом нуклона сверх заполненных оболочек или нуклона, недостающего до заполненных. С учетом спин-орбитального взаимодействия сферически-симметричный потенциал следует записывать в виде

$$U = U(r) + V(r) \cdot (\mathbf{s}, \mathbf{l}), \quad (13)$$

где член $U(r)$ может быть взят в виде потенциала терхмерного симметричного гармонического осциллятора, а второй член описывает вклад спин-орбитального взаимодействия. Знак и вид потенциала $V(r)$ подбирается из соответствия экспериментальным данным. При этом оказывается, что если спин нуклона \mathbf{s} параллелен орбитальному моменту \mathbf{l} , то это приводит к «при-

тяжению» нуклона (увеличению его потенциальной энергии); потенциальная яма как бы уширяется и нуклон с такой ориентацией спина понижает свою энергию («опускается ко дну потенциальной ямы»). При антипараллельной ориентации векторов **s** и **l** энергия нуклонного состояния повышается (эффективная ширина ямы становится меньше). Таким образом, появляется расщепление уровней с заданным l на два подуровня с $j = l + \frac{1}{2}$ и $j = l - \frac{1}{2}$, и состояния с большим j имеют меньшую энергию. Это расщепление невелико, пока мало значение l , но уже при $l \geq 4$ оно оказывается настолько существенным, что раздвигает два подуровня в разные оболочки, т. е. в разных оболочках оказываются уровни $1g_{7/2}$ и $1g_{9/2}$, $1h_{9/2}$ и $1h_{11/2}$, $1i_{11/2}$ и $1i_{13/2}$ (величина j указывается справа внизу). В состоянии с заданными n , l , j может находиться одновременно не более $2j+1$ протонов и столько же нейтронов.

Рассмотренные закономерности приводят к последовательности заполнения нуклонами состояний в ядре, показанной на рис. 211. На этом рисунке слева показаны осцилляторные оболочки и уровни, получаемые при снятии случайного вырождения при небольшом изменении вида потенциала, указаны квантовые характеристики уровней и полное число нуклонов, которыми можно заполнить яму вплоть до данной оболочки включительно. Справа приведена последовательность уровней с учетом спин-орбитального взаимодействия, указаны характеристики уровней, число нуклонов на каждом уровне, а также их суммарное число по мере заполнения оболочек.

Как видно, одночастичная оболочечная модель объясняет природу нуклонных состояний и правильно воспроизводит все магически ядерные числа. В заключение отметим, что нейтроны и протоны независимо заполняют соответствующие ядерные состояния, однако если для легких ядер нейтронный и протонный потенциал практически совпадают, то в тяжелых ядрах глубина протонного потенциала оказывается существенно меньше в силу их кулоновского расталкивания. Именно поэтому в легких ядрах число протонов и нейтронов практически одинаково, а в тяжелых число нейтронов примерно в полутора раза больше числа протонов. Заполнение нейтронных и протонных состояний происходит так, что их верхние заполненные уровни практически совпадают по энергии. Ядра, у которых нейтронный (либо протонный) уровень оказывается выше по энергии, обладают большей энергией, чем при равенстве по энергии верхних состояний. Такие ядра нестабильны и переходят в более устойчивую конфигурацию путем бета-распада.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

1. Фундаментальные физические константы

Постоянные СИ

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}; \quad 1/4\pi\epsilon \approx 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$$
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,566 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$$

Скорость света в вакууме

$$c = 2,9979 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$$

Постоянная Планка

$$h = 6,6261 \cdot 10^{-27} \text{ эрг}\cdot\text{с};$$
$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-27} \text{ эрг}\cdot\text{с} \approx 0,658 \cdot 10^{-15} \text{ эВ}\cdot\text{с}.$$

Гравитационная постоянная

$$\gamma = 6,6726 \cdot 10^{-8} \text{ дин}\cdot\text{см}^2/\text{г}^2 = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Постоянная Больцмана

$$k_B \equiv k = 1,3807 \cdot 10^{-16} \text{ эрг}/\text{К} \approx 0,8617 \cdot 10^{-10} \text{ МэВ}/\text{К}$$

Постоянная Авогадро

$$N_A = 6,0221 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

Универсальная газовая постоянная

$$R = 8,3145 \cdot 10^7 \text{ эрг}/(\text{моль}\cdot\text{К}) = 8,3145 \text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})$$

Постоянная Стефана–Больцмана

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^2}{60 h^3 c^2} = 5,6705 \cdot 10^{-5} \frac{\text{эрг}}{\text{с}\cdot\text{см}^2\cdot\text{К}^4} = 5,6705 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$$

Постоянная в законе смещения Вина

$$b = \lambda_{\max} T = 0,2898 \text{ см}\cdot\text{К}$$

Элементарный заряд

$$e = 4,8032 \cdot 10^{10} \text{ ед. СГСЭ} = 1,60218 \cdot 10^{19} \text{ Кл}$$

Электронвольт

$$1 \text{ эВ} = 1,60218 \cdot 10^{12} \text{ эрг}$$

Температура, соответствующая 1 эВ

$$T_{\text{эВ}} = 11\,606 \text{ К}$$

Атомная единица массы

$$1 \text{ а. е. м.} = 1,66054 \cdot 10^{-24} \text{ г} (931,494 \text{ МэВ})$$

Квант магнитного потока (сверхпроводящий)

$$\Phi_0^{\text{сп}} = \frac{hc}{2e} = 2,0678 \cdot 10^{-7} \text{ Гс}\cdot\text{см}^2$$

Квант холловского сопротивления

$$R_0 = \frac{h}{e^2} = 25812,806377 \text{ Ом}$$

Магнетон Бора

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 0,92740 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс}$$

Ядерный магнетон

$$\mu_{яд} = \frac{e\hbar}{m_p c} = 0,50508 \cdot 10^{-23} \text{ эрг/Гс}$$

Постоянная тонкой структуры

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 7,2973 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{137,036}$$

Постоянная Ридберга

$$R_\infty = \frac{me^4}{4\pi\hbar^3 c} = \frac{a^2}{4\pi\Lambda_e} = 109737,31 \text{ см}^{-1}$$

Боровский радиус

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{\Lambda_e}{\alpha} = 0,52918 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

Энергия ионизации атома водорода

$$\mathcal{E} = 13,597 \text{ эВ}$$

Атмосфера стандартная

$$1 \text{ атм} = 101325 \text{ Па} = 1,01325 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$$

Объем моля идеального газа при нормальных условиях ($P = 101325 \text{ Па}$; $T = 273,15 \text{ К}$)

$$V_{\text{мол}} = 22,4141 \text{ л/моль}$$

Ускорение силы тяжести

$$g = 9,80665 \text{ м/с}^2$$

Электрон

Масса

$$m_e = 9,10939 \cdot 10^{-28} \text{ г}$$

$$m_e c^2 = 0,511 \text{ МэВ}$$

Удельный заряд

$$\frac{e}{m_e} = -5,2728 \cdot 10^{17} \text{ ед. СГСЭ} = -1,7588 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$$

Комптоновская длина волны

$$\Lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c} = 3,8616 \cdot 10^{-11} \text{ см}; \quad \Lambda_e = \frac{h}{m_e c} = 2,4263 \cdot 10^{-10} \text{ см}$$

Классический радиус

$$r_{\text{кл}} = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8179 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Протон

Масса

$$m_p = 1,6726 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 1,007276 \text{ а. е. м.}$$

$$m_p c^2 = 938,272 \text{ МэВ}$$

Отношение массы протона к массе электрона

$$\frac{m_p}{m_e} = 1836,1527$$

Удельный заряд

$$\frac{e_p}{m_p} = 2,8716 \cdot 10^{14} \text{ ед. СГСЭ} = 9,5788 \cdot 10^7 \text{ Кл/кг}$$

Комптоновская длина волны

$$\Lambda_p = \frac{\hbar}{m_p c} = 2,103 \cdot 10^{-14} \text{ см; } \Lambda_p = \frac{h}{m_p c} = 1,3214 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Магнитный момент

$$\mu_p = 2,7928 \mu_{яд} = 1,4106 \cdot 10^{23} \text{ эрг/Гс}$$

Нейтрон

Масса

$$m_n = 1,6746 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 1,00866 \text{ а. е. м.}$$

$$m_n c^2 = 939,565 \text{ МэВ}$$

Отношение массы нейтрона к массе протона

$$\frac{m_n}{m_p} = 1,001378$$

Комптоновская длина волны

$$\Lambda_n = \frac{\hbar}{m_n c} = 0,210 \cdot 10^{-13} \text{ см; } \Lambda = \frac{h}{m_n c} = 1,31959 \cdot 10^{-13} \text{ см}$$

Магнитный момент

$$\mu_n = -1,9130 \mu_{яд} = -0,9662 \cdot 10^{-23} \text{ эрг/Гс}$$

2. Некоторые астрофизические постоянные и единицы

$$1 \text{ год} = 3,1557 \cdot 10^7 \text{ с}$$

$$1 \text{ св. год} = 9,46053 \cdot 10^{17} \text{ см}$$

$$1 \text{ а. е.} = 1,496 \cdot 10^{13} \text{ см}$$

Солнце

Масса Солнца

$$M_C = 1,989 \cdot 10^{33} \text{ г}$$

Радиус Солнца

$$R_C = 6,96 \cdot 10^{10} \text{ см}$$

Средняя плотность Солнца

$$\rho_C = 1,409 \text{ г/см}^3$$

Угловой диаметр Солнца на среднем расстоянии от Земли

$$\alpha_C = 31'59,26'' \approx 0,0093 \text{ рад.}$$

Температура поверхности Солнца (эффективная температура)

$$T_C = 5770 \text{ К}$$

Энергия, излучаемая Солнцем в 1 с, или светимость

$$L_C = 3,826 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с} = 3,826 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$$

Солнечная постоянная (плотность потока излучения Солнца на среднем расстоянии от Земли до Солнца вне атмосферы Земли)

$$J_C = 1,373 \cdot 10^6 \text{ эрг/(с} \cdot \text{см}^2) = 1373 \text{ Вт/м}^2$$

Земля и Луна

Масса Земли

$$M_3 = 5,974 \cdot 10^{27} \text{ г}$$

Средний радиус Земли

$$R_3 = 6,378 \cdot 10^8 \text{ см} = 6378 \text{ км}$$

Средняя плотность Земли

$$\rho_3 = 5,517 \text{ г/см}^3$$

Среднее расстояние от Земли до Солнца

$$L_3 = 1 \text{ а. е.} = 1,496 \cdot 10^{13} \text{ см} = 1,496 \cdot 10^8 \text{ км}$$

Среднее расстояние от Земли до Луны

$$L_{\text{Л}} = 3,844 \cdot 10^{10} \text{ см} = 3,844 \cdot 10^5 \text{ км}$$

Средняя скорость движения Земли по орбите

$$v_3 = 29,79 \text{ км/с} = 2,979 \cdot 10^6 \text{ см/с}$$

Угловая скорость вращения Земли

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} = 7,272 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$$

Первая и вторая космические скорости

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_3}{R_3}} = \sqrt{gR_3} = 7,91 \cdot 10^5 \text{ см/с} = 7,91 \text{ км/с}$$

$$v_2 = \sqrt{2} v_1 = 11,19 \cdot 10^5 \text{ см/с} = 11,19 \text{ км/с}$$

Масса Луны

$$M_{\text{Л}} = 7,350 \cdot 10^{25} \text{ г}$$

Средняя плотность Луны

$$\rho_{\text{Л}} = 3,341 \text{ г/см}^3$$

Средний радиус Луны

$$R_{\text{Л}} = 1,7382 \cdot 10^8 \text{ см} = 1738,2 \text{ км}$$

Период обращения Луны вокруг Земли

$$T_{\text{Л}} = 29,531 \text{ сут}$$

Планеты

Планета	Большая полуось, а.е.	Орбитальный период	Период вращения	Масса в M_3	Радиус в R_3	Средняя плотность, г/см ³	Ускорение свобод. падения на поверхности, см/с ²	Альбедо*)
Меркурий	0,387	87,97 сут	58,7 сут	0,055	0,382	5,4	370	0,06
Венера	0,723	224,7 сут	243,0 сут	0,815	0,949	5,3	887	0,75
Земля	1,0	365,256 сут	23,9 ч	1,0	1,0	5,5	980	0,36
Марс	1,52	1,88 года	24,6 ч	0,107	0,533	3,9	370	0,24
Юпитер	5,20	11,9 года	9,92 ч	318,0	11,2	1,3	2490	0,50
Сатурн	9,54	29,5 года	10,7 ч	95,2	9,45	0,7	1050	0,76
Уран	19,2	84,0 года	23,9 ч	14,6	4,10	1,2	852	0,62
Нептун	30,1	165,0 лет	17,8 ч	17,2	3,88	1,6	1117	0,50

*) Альбедо — отношение количества света, отраженного поверхностью планеты, к количеству падающего на нее света

3. Соотношение некоторых физических величин в СИ и СГСЭ

Длина	L, l	метр (м)	10^2 см
Масса	m	килограмм (кг)	10^3 г
Время	t	секунда (с)	1 с
Сила	F	ньютон (Н)	10^5 дин
Работа, энергия	$A,$	дюйуль (Дж)	10^7 эрг
Мощность	N, W	ватт (Вт)	10^7 эрг/с
Давление	P	паскаль (Па)	10 дин/см ²
Плотность потока энергии	j	(Вт/м ²)	10^3 эрг/(с·см ²)
Сила электрического тока	\mathcal{I}	ампер (А)	$3 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ
Электрический заряд	Q, q	кулон (Кл)	$3 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ
Электрический потенциал, напряжение	φ, U, V	вольт(В)	$\frac{1}{300}$ ед. СГСЭ
Напряженность электрического поля	E	В/м	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$ ед. СГСЭ
Электрическая емкость	C	фарада (Φ)	$9 \cdot 10^{11}$ ед. СГСЭ
Электрическое сопротивление	R	ом (Ом)	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$ с/см
Удельное электрическое сопротивление	ρ	Ом · м	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$ с
Электрическая проводимость	$\Lambda = 1/R$	сименс (См)	$9 \cdot 10^{11}$ см/с
Удельная электрическая проводимость	$\sigma = 1/\rho$	См/м	$9 \cdot 10^9$ с ⁻¹
Магнитный поток	Φ	вебер (Вб)	10^8 Гс · см ² (максвелл)
Магнитная индукция	B	tesла (Тл)	10^4 Гс
Напряженность магнитного поля	H	А/м	$4\pi \cdot 10^{-3}$ Э (эрстед)
Индуктивность	L	генри (Γ н)	10^9 см
Намагниченность	I, M	А/м	$\frac{1}{4\pi} \cdot 10^4$ Гс (гаусс)
Вектор поляризации	P	Кл/м ²	$3 \cdot 10^5$ ед. СГСЭ
Электрическое смещение (индукция)	D	Кл/м ²	$12\pi \cdot 10^5$ ед. СГСЭ

4. Лептоны

Все лептоны – фермионы. Нейтрино имеют только ортоспиральную спиральность (левоспиральные частицы), а антинейтрино – только положительную (правоспиральные))^{*}

Поколение	Частица	Символ	Масса, МэВ	Время жизни, τ	Лептонный заряд	Преобладающая схема распада			
	Частица	Анти-частица			L_e	L_μ	L_τ		
I	электрон	e^-	e^+	0,511	$> 4,3 \cdot 10^{23}$ лет	+1	0	0	–
	нейтрино	ν_e	$\bar{\nu}_e$	$< 2 \div 2,5 \text{ эВ}$	$\frac{\tau}{m_{\nu_e}} > 300 \frac{c}{\partial B}$	+1	0	0	–
II	мюон	μ^-	μ^+	$105,658$ $207,767 m_e$	$2,197 \cdot 10^{-6}$ с	0	+1	0	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
	нейтрино	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	$< 0,17$	$\frac{\tau}{m_{\nu_\mu}} > 15,4 \frac{c}{\partial B}$	0	+1	0	–
III	таон	τ^-	τ^+	1777,0	$0,290 \cdot 10^{-12}$ с	0	0	+1	$\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau; e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$
	нейтрино	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	$< 18,2$?	0	0	+1	–

*) Спиральностью частицы называется косинус угла между векторами спина и импульса частицы. Для ультрарелятивистских фермионов спиральность может принимать только два значения: ±1.

5. Кварки

Все кварки — фермионы (спин 1/2), с барионным зарядом 1/3. Антикварки имеют квантовые числа с противоположными знаками.

Поколение	Название	Символ	Электр. заряд, ед. e	«Токовая» масса	Проекция изоспина, I_3	Заряд			Блоковая масса (в составе адрона), $\Gamma_{\text{эВ}}$
						c	S	t	
I	верхний (up)	u	+2/3	1,5 ÷ 4 МэВ	+1/2	0	0	0	0,33
	нижний (down)	d	-1/3	4 ÷ 8 МэВ	-1/2	0	0	0	0,33
II	очарованный (charm)	c	+2/3	1,1 ÷ 1,4 ГэВ	0	+1	0	0	1,8
	странный (strange)	s	-1/3	80 ÷ 130 МэВ	0	0	-1	0	0,51
III	t -кварк (top)	t	+2/3	174,3 ± 5,1 ГэВ	0	0	0	+1	0
	b -кварк (bottom)	b	-1/3	4,1 ÷ 4,4 ГэВ	0	0	0	-1	5,0

*) t -кварк имеет такое малое время жизни, что он распадается до образования t -адронов, поэтому блоковой массы не имеет. Токовая масса t -кварка $174,3 \pm 5,1$ ГэВ.

6. Адроны

Частица	Кварковый состав	Масса, МэВ	Время жизни, с	Преобладающие каналы распада
Мезоны				
π^\pm	$(\bar{u}\bar{d})$; $(\bar{d}\bar{u})$	139,567	$2,603 \cdot 10^{-8}$	$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$
π^0	$(\bar{u}\bar{u} - \bar{d}\bar{d})\sqrt{2}$	134,976	$8,4 \cdot 10^{-17}$	$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$
K^\pm	$(\bar{u}\bar{s})$; $(\bar{s}\bar{u})$	493,677	$1,239 \cdot 10^{-8}$	$K^+ \rightarrow \begin{cases} \mu^+ \nu_\mu \\ \pi^+ \pi^0 \end{cases}$
K^0	$(\bar{d}\bar{s})$	497,672	$K_S^0: 0,893 \cdot 10^{-10}$ $K_L^0: 5,17 \cdot 10^{-8}$	$K_S^0 \rightarrow \begin{cases} \pi^+ \pi^- \\ \pi^0 \pi^0 \end{cases}$ $K_L^0 \rightarrow \begin{cases} \pi^\pm e^\mp \nu_e \\ \pi^\pm \mu^\mp \nu_\mu \\ 3\pi^0 \\ \pi^+ \pi^- \pi^0 \end{cases}$
D^\pm	$(\bar{c}\bar{d})$; $(\bar{c}\bar{d})$	1869,3	$1,057 \cdot 10^{-12}$	$D^+ \rightarrow \begin{cases} K^- \pi^+ \pi^+ \\ \bar{K}^0 e^+ \nu_e \\ \bar{K}^0 \mu^+ \nu_\mu \end{cases}$
D^0	$(\bar{c}\bar{u})$	1864,5	$4,15 \cdot 10^{-13}$	$D^+ \rightarrow \begin{cases} K^- \pi^+ \\ K^0 e^+ \nu_e \\ \bar{K}^0 \pi^+ \pi^- \end{cases}$
D_s^\pm (был F^\pm)	$(\bar{c}\bar{s})$; $(\bar{s}\bar{c})$	1968,5	$4,67 \cdot 10^{-13}$	Множество почти равновероятных каналов
B^\pm	$(\bar{u}\bar{b})$; $(\bar{b}\bar{u})$	5278,9	$1,65 \cdot 10^{-12}$	«
B^0	$(\bar{d}\bar{b})$	5279,2	$1,56 \cdot 10^{-12}$	«
$\eta_c(1s)$	$(\bar{c}\bar{c})$	2979,8	полная ширина $\Gamma = 13,2$ МэВ	«
$J/\psi(1s)$	$(\bar{c}\bar{c})$	3096,9	полная ширина $\Gamma = 87$ МэВ	«
$\Upsilon(1s)$	$(\bar{b}\bar{b})$	9460,4	полная ширина $\Gamma = 52,5$ кэВ	«

Частица	Кварковый состав	Масса, МэВ	Время жизни, с	Преобладающие каналы распада
Барионы (нуклоны и гипероны)				
p	(uud)	938,27231	$> 1,6 \cdot 10^{25}$ лет	—
n	(udd)	939,56563	887	$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$
$\Lambda^0(\Lambda)$	(uds)	1115,68	$2,632 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 \rightarrow \begin{cases} p \pi^0 \\ n \pi^0 \end{cases}$
Σ^+	(uus)	1189,37	$7,99 \cdot 10^{-11}$	$\Sigma^+ \rightarrow \begin{cases} p \pi^0 \\ n \pi^+ \end{cases}$
Σ^0	(uds)	1192,65	$7,4 \cdot 10^{-20}$	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda \gamma$
Σ^-	(dds)	1197,44	$1,479 \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- \rightarrow n \pi^-$
Ξ^0	(uss)	1314,9	$2,90 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^0 \rightarrow \Lambda \pi^0$
Ξ^0	(dss)	1321,32	$1,639 \cdot 10^{-10}$	$\Xi \rightarrow \Lambda \pi^-$
Ω^0	(sss)	1672,45	$8,22 \cdot 10^{-11}$	$\Omega^- \rightarrow \begin{cases} \Lambda K^- \\ \Xi^0 \pi^- \\ \Xi^- \pi^0 \end{cases}$
Λ_c^+	(udc)	2284,9	$2,06 \cdot 10^{-13}$	$\Lambda_c^+ \rightarrow \begin{cases} p K^- \pi^+ \\ \Lambda^- \pi^+ \pi^+ \pi^- \end{cases}$
Σ_c^0	(ddc)	2452,1	?	$\Sigma_c^0 \rightarrow \Lambda_c^+ \pi^-$
Ξ_c^+	(usc)	2465,6	$3,5 \cdot 10^{-13}$	$\Xi_c^+ \rightarrow \begin{cases} \Lambda K^- \pi^+ \pi^+ \\ \Sigma^0 K^- \pi^+ \pi^+ \end{cases}$
Ξ_c^0	(dsc)	2470,3	$0,98 \cdot 10^{-13}$	$\Xi_c^0 \rightarrow \begin{cases} \Xi^- \pi^+ \\ p K^- \tilde{K}^{*0} \end{cases}$
Ω_c^0	(ssc)	2704	$0,064 \cdot 10^{-12}$	$\Omega_c^0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma^+ K^- K^- \pi^+ \\ \Sigma^+ K^- K^- \pi^+ \end{cases}$
Λ_B^0	(udb)	5624	$1,24 \cdot 10^{-12}$	$\Lambda_B^0 \rightarrow \Lambda_c^+ e^- \bar{\nu}_e$

7. Масса некоторых нейтральных атомов (в а. е. м. за вычетом энергии связи электронов) и энергия связи ядер

Ядра	$M_{\text{ат}}, \text{а. е. м.}$	$\mathcal{E}_{\text{св}}, \text{МэВ}$
^1_1H	1,00782522	—
^2_1H	2,01410222	2,2
^3_1H	3,01604971	8,5
^3_2He	3,01602968	7,7
^4_2He	4,0026033	28,3
^6_3Li	6,0151232	32,0
^7_3Li	7,0160044	39,2
^7_3Li	8,0224874	41,3
^7_4Be	7,0169295	37,6
^8_4Be	8,0053052	56,5
^9_4Be	9,0121829	58,2
$^{10}_5\text{B}$	10,0129385	64,7
$^{11}_5\text{B}$	11,009305	76,2
$^{11}_6\text{C}$	11,011431	73,4
$^{12}_6\text{C}$	12,000000	92,2
$^{13}_6\text{C}$	13,003354	97,1
$^{14}_6\text{C}$	14,003242	105,3
$^{13}_7\text{N}$	13,005739	94,1
$^{14}_7\text{N}$	14,003074	104,7
$^{15}_7\text{N}$	15,000108	115,5

Ядра	$M_{\text{ат}}, \text{а. е. м.}$	$\mathcal{E}_{\text{св}}, \text{МэВ}$
$^{15}_8\text{O}$	15,003072	111,9
$^{16}_8\text{O}$	15,994915	127,6
$^{17}_8\text{O}$	16,999133	131,8
$^{18}_9\text{F}$	18,000950	137,4
$^{19}_9\text{F}$	18,998405	147,8
$^{20}_9\text{F}$	19,999985	154,4
$^{20}_{10}\text{Ne}$	19,992440	160,6
$^{23}_{11}\text{Na}$	22,989773	186,6
$^{24}_{12}\text{Mg}$	23,985044	198,3
$^{27}_{12}\text{Al}$	26,981535	225,0
$^{28}_{14}\text{Si}$	27,976927	236,5
$^{31}_{15}\text{P}$	30,972074	262,9
$^{32}_{16}\text{S}$	31,972074	271,8
$^{35}_{17}\text{Cl}$	34,968854	298,2
$^{37}_{17}\text{Cl}$	36,965896	317,1
$^{40}_{18}\text{Ar}$	93,362384	343,8
$^{39}_{19}\text{K}$	38,963714	333,7
$^{208}_{82}\text{Pb}$	207,97664	1636,4
$^{234}_{92}\text{U}$	234,04090	1778,6
$^{235}_{92}\text{U}$	235,04393	1783,8
$^{238}_{92}\text{U}$	238,05076	1801,7

8. Значения некоторых определенных интегралов

$$1. \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, & n = \frac{1}{2}; \\ n!, & n > 0, \text{ целое}. \end{cases}$$

$$2. \int_0^\infty x^n e^{-x^2} dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, & n = 0; \\ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!, & n - \text{целое нечетное}; \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2^{n/2}} & \end{cases}$$

$$3. \int_0^a \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \begin{cases} 0,225, & a = 1; \\ 1,18, & a = 2; \\ 2,56, & a = 3; \\ 4,91, & a = 5; \\ 6,43, & a = 10. \end{cases}$$

$$4. \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx = \begin{cases} 2,31, & n = 1/2; \\ \pi^2/6, & n = 1; \\ 2,405, & n = 2; \\ \pi^4/15, & n = 3; \\ 24,9, & n = 4. \end{cases}$$

Интернет-магазин литературы по физике и математике

www.fizmatkniga.org

Учебное издание

*ОВЧИНКИН Владимир Александрович
РАЕВСКИЙ Александр Осипович
ЦИПЕНЮК Юрий Михайлович*

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ
Часть 3. Атомная и ядерная физика. Физика элементарных частиц. Излучение**

Под редакцией В. А. Овчинкина

Издание третье, исправленное и дополненное

Редактор *A. K. Розанов*

Набор и верстка выполнены в издательстве «Физматкнига».

Операторы *Б. Д. Спорышев, М. А. Шепелев, А. К. Розанов*

Графика *М. В. Ивановский, А. К. Розанов*

Издательство «Физматкнига».

141701, Московская область, г. Долгопрудный, ул. Первомайская, д. 5.

Тел. (499) 390-51-38.

E-mail fizmatkniga@inbox.ru.

<http://www.fizmatkniga.org>

Подписано в печать 31.07.2023. Формат 60×88/16. Печать цифровая.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 27,0. Тираж 250 экз.

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных материалов
в ООО «Фотоэксперт». 109316, г. Москва, Волгоградский проспект, д. 42,
корп. 5, эт. 1, пом. I, ком. 6.3-23Н