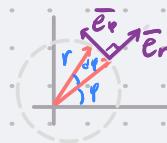


1.18. Движение точки задано в полярных координатах $r(t)$ и $\phi(t)$. Показать, что вектор ускорения точки коллинеарен ее радиусу-вектору, если $r^2\dot{\phi} = \text{const}$.

$$\text{Дано: } \bar{r} = \begin{bmatrix} r(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}$$

$$\text{Д-тб: } r^2\dot{\phi} = \text{const} \Rightarrow \bar{w} \parallel \bar{r}$$



$$|dr_\phi| = r d\phi \Rightarrow H_\phi = r$$

$$|dr_r| = dr \Rightarrow H_r = 1$$

$$\text{const } W_\phi = \frac{1}{H_\phi} \left[(\dot{V}/2)^{\circ}_{\phi} - (\dot{V}/2)^{\circ}_{\phi} \right]$$

$$\overset{\text{одн}}{V^2} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \Rightarrow W_\phi = \frac{1}{r} \cdot (r^2\dot{\phi})^{\circ} = 0 \Rightarrow \bar{w} \parallel \bar{r}$$

1.25. Радиус-вектор \bar{r} , скорость \bar{v} и ускорение \bar{w} движущейся точки связаны соотношением $\bar{w} = a(\bar{v} \times \bar{r})$, где $a = \text{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию \bar{r} и \bar{v} .

$$\text{Дано: } \bar{w} = a(\bar{v} \times \bar{r}), \\ a = \text{const} > 0 \\ p(\bar{r}, \bar{v}) - ?$$

1-й способ:

$$\text{из 1-го смысла по матану: } K = \frac{1}{p} = \frac{\dot{\bar{r}} \times \ddot{\bar{r}}}{|\dot{\bar{r}}|^3}$$

$$p = \frac{V^3}{|\bar{v} \times [a(\bar{v} \times \bar{r})]|} = \frac{V^3}{V \cdot |a(\bar{v} \times \bar{r})|} = \frac{V^2}{a |\bar{v} \times \bar{r}|}$$

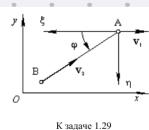
2-й способ: $\bar{w} = a(\bar{v} \times \bar{r}) \Rightarrow \bar{w} \perp \bar{v}, \bar{w} \perp \bar{r}$

$$\bar{w} = \dot{\bar{v}} \cdot \bar{E} + \frac{V^2}{P} \bar{n} \quad \checkmark \cdot \bar{v} \text{ спутана}$$

$$\bar{w} \cdot \bar{v} = \dot{\bar{v}} \cdot \bar{E} \cdot \bar{v} + \frac{V^2}{P} \bar{n} \cdot \bar{v} = 0$$

$$\dot{\bar{v}} \cdot \bar{E} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \dot{\bar{v}} = 0 \Rightarrow \bar{w} = \frac{V^2}{P} \bar{n} \Rightarrow P = \frac{V^2}{a |\bar{v} \times \bar{r}|}$$

1.31. Убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью v_1 . Догоняющий B движется с постоянной по величине скоростью v_2 , направленной по BA . Найти траекторию сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если в начальный момент угол φ между вектором скорости v_1 и прямой BA не равен нулю $\varphi_0 \neq 0$ (см. рис. к задаче 1.29).

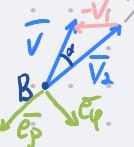


К задаче 1.29

Дано: $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \varphi_0 \neq 0$
 $AB = r(\varphi) - ?$

$$f(0, m, A, A)$$

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} -r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} V_p = \frac{dP}{dt} = -V_2 + V_1 \cos \varphi \\ V_\varphi = P \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -V_1 \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{V_2 - V_1 \cos \varphi}{V_1 \sin \varphi} d\varphi$$

$$\int \frac{dP}{P} = \frac{V_2}{V_1} \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[\operatorname{ctg} \varphi d\varphi \right]$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi/2}{\operatorname{tg} \varphi_0/2} \right)^{\frac{V_2}{V_1}}$$

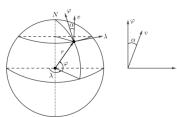
$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \left[\operatorname{ctg} \varphi d\varphi \right] = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{ds \sin \varphi}{\sin \varphi} \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \varphi/2}{\operatorname{tg} \varphi_0/2} \cdot \int_{\varphi_0/2}^{\varphi/2} \frac{2 dt}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2t} = \int_{\varphi_0/2}^{\varphi/2} \frac{dt}{t}$$

$$1.31. \frac{r}{r_0} = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \varphi} \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} / \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{2} \right)^{v_2/v_1}$$

T1

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \lambda \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} y_n - \text{е криволинейн.} \\ w_k - ? \quad K = \{r, \lambda, \varphi\} \\ W - ? \end{array}$$

T1. Используя сферические координаты (r , λ - долгота, φ - широта), определить, какую кривую описывает корабль, идущий под постоянным курсом, если углом отсчета к горизонту называется курсом. Корабль приступил к движению из порта P в направлении к пункту Q (рис. 1). Считая, что модуль скорости в корабле не изменяется, определить проекции ускорения корабля на оси сферических координат, модуль ускорения и радиус кривизны траектории.



$$\begin{aligned} V_\varphi &= V \cos \alpha = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V \cos \alpha}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \cos \varphi \\ V_\lambda &= V \sin \alpha = \frac{d\lambda}{dt} \cdot r \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{V \sin \alpha}{r \cos \varphi} \\ \frac{d\varphi}{\cos \varphi} &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} d\lambda \quad \downarrow \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sin(\varphi + \frac{\pi}{2})} = \int_{u_0}^{\varphi} \frac{du}{\sin u} = \int_{u_0}^{\varphi} \frac{dt}{t \operatorname{tg}(\varphi_0/2 + \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

$$\frac{t \operatorname{tg}(\varphi_0/2 + \pi/4)}{t \operatorname{tg}(\varphi_0/2 + \pi/4)} = \operatorname{ctg} \alpha (\lambda - \lambda_0)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_0/2 + \pi/4) = \operatorname{tg}(\varphi_0/2 + \pi/4) \cdot \exp[\operatorname{ctg} \alpha (\lambda - \lambda_0)]$$

у_n - е криволинейн.

Угл. начекурум: $H_r = 1$, $H_\varphi = r$, $H_\lambda = r \cos \varphi$

$$\text{ориентация } V_r = \dot{r}, V_\varphi = r\dot{\varphi}, V_\lambda = \dot{\lambda}r\cos\varphi$$

$$V^2 \stackrel{!}{=} \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2(\cos^2\varphi)\dot{\lambda}^2$$

$$W_r = \frac{1}{H_r} \left[\left(V^2/2 \right)_{SK} - \left(V^2/2 \right)_{SK} \right] = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r(\cos^2\varphi)\dot{\lambda}^2 = \\ = -r \frac{V^2 \cos^2\lambda}{r^2} - r \cdot \frac{V^2 \sin^2\lambda}{r^2 \cos^2\varphi} \cdot \cos^2\varphi = -\frac{V^2}{r}$$

$$W_\varphi = \frac{1}{r} \left[r^2 \ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2 \dot{\lambda}^2 \cos\varphi \sin\varphi \right] =$$

$$= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\dot{\lambda}^2 \cos\varphi \sin\varphi = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\varphi} \cdot \frac{V^2}{r^2} r \cos\varphi \sin\varphi = \frac{V^2 \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\varphi}{r}$$

$$W_\lambda = \frac{r^2}{r \cos\varphi} \left[\dot{\lambda}^2 \cos^2\varphi - 2 \cos\varphi \sin\varphi \dot{\varphi} \dot{\lambda} \right] = r(\dot{\lambda}^2 (\cos\varphi - 2 \sin\varphi \dot{\varphi} \dot{\lambda})) =$$

$$= r \left[\cos\varphi \frac{V \sin\lambda}{r} \cdot \frac{V \cos\lambda}{r \cos\varphi} \cdot \sin\varphi - 2 \sin\varphi \cdot \frac{V \cos\lambda}{r} \cdot \frac{V \sin\lambda}{r \cos\varphi} \right] =$$

$$= \frac{1}{2r} V^2 \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin 2\alpha - \frac{1}{r} V^2 \operatorname{tg}\varphi \sin 2\alpha = -\frac{V^2 \operatorname{tg}\varphi \sin 2\alpha}{2r}$$

$$W^2 = W_r^2 + W_\varphi^2 + W_\lambda^2 \Rightarrow$$

$$W = \sqrt{\frac{V^4}{r^2} + \frac{V^4 \sin^4\alpha \operatorname{tg}^2\varphi}{r^2} + \frac{V^4 \operatorname{tg}^2\varphi \sin^2 2\alpha}{4r^2}} =$$

$$= \frac{V^2}{r} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi \sin^2\alpha (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \frac{V^2}{r} \sqrt{1 + \sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi}$$

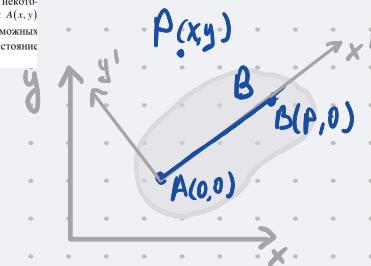
$$V = \text{const} \Rightarrow \alpha = \alpha_n = \frac{V^2}{P} \Rightarrow P = V^2 \cdot \frac{r}{V^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi}}$$

$$P = \frac{r}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi}}$$

№3.1

3.2. Плоская фигура движется в своей плоскости. В некоторый момент отношение величин скоростей двух её точек $A(x, y)$ и $B(x, y)$ равно $\lambda \neq 1$. Найти геометрическое место возможных положений мгновенного центра скоростей, если расстояние между точками равно a .

Дано: $\frac{v_B}{v_A} = \lambda \neq 1$, $AB = a$,
 $P(x, y) - ?$



перейдем в $(0 \ X')$ связанные с теми, начиная отсчета в Т. А

М.у.с.: $v_A \cdot AP = v_B \cdot BP$; $v_B = \lambda v_A \Rightarrow AP = \lambda BP$

$$AP^2 = x^2 + y^2 \quad BP^2 = (a-x)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 a^2 - 2\lambda ax + \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2$$

$$(1-\lambda^2)x^2 + 2\lambda^2 ax + (1-\lambda^2)y^2 = \lambda^2 a^2$$

$$x^2 + 2 \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} ax + y^2 = \frac{\lambda^2 a^2}{1-\lambda^2}; \quad \frac{\lambda^2 a^2}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda^4 a^2}{(1-\lambda^2)^2} = \frac{\lambda^2 a^2 - \lambda^4 a^2 + \lambda^4 a^2}{(1-\lambda^2)^2} = \left(\frac{\lambda a}{1-\lambda^2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{\lambda^2 a}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\lambda a}{1-\lambda^2}\right)^2$$

Ответ:

3.2. Окружность $\left(x + \frac{a\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2$ в системе координат, связанной с фигурой так, что $A(0,0)$, $B(a,0)$.

№ 3.20

Дано: ℓ, r, w, ϵ

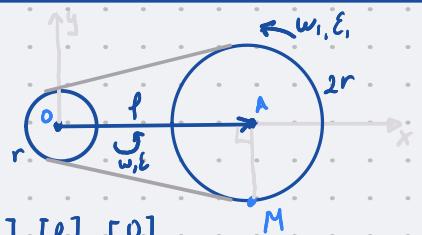
$AM \perp OA$

$v_M, w_M - ?$

3.20. Кривошип OA длины ℓ вращается вокруг центра O неподвижной шестерёнки радиуса r и несет на конце A ось другой шестерёнки радиуса $R=2r$. Угловая скорость шестерёнки M равна w . Угловая скорость в рассматриваемый момент ϵ и ω . Шестерёнки соединены между собой охватывающей их цепью. Найти величины скорости и ускорения точки M подвижной шестерёнки в момент, когда $AM \perp OA$.



К задаче 3.20



1) $\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{\omega} \times \bar{AM}; \quad \bar{V}_A = \bar{V}_O + \bar{\omega} \times \bar{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ rw \end{bmatrix}$

2) СО кинематика: $wr = w_0 \cdot 2r \Rightarrow w_0 = \frac{1}{2}w$

2) НСО: $\bar{\omega}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_i \end{bmatrix} = \bar{\omega} + \bar{\omega}_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{w}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{w}{2} \end{bmatrix}$

$\bar{\omega}_i \times \bar{AM} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{w}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rw \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{V}_M = \begin{bmatrix} rw \\ rw \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_M = w \sqrt{r^2 + r^2}$

$$2) \quad \bar{W}_M = \bar{W}_A + \bar{\epsilon}_i \times \bar{p} - \omega_i^2 \bar{p}$$

$$\bar{W}_A = \bar{\epsilon} \times \bar{p} - \omega^2 \bar{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ell \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \omega^2 p \\ p\ell + 0 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 p \\ p\ell \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}_M = \begin{bmatrix} -\omega^2 p \\ p\ell \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ EI/L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 p + \epsilon r + 0 \\ p\ell + 0 + \omega^2 r/2 \\ 0 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 p + \epsilon r \\ p\ell + \omega^2 r/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

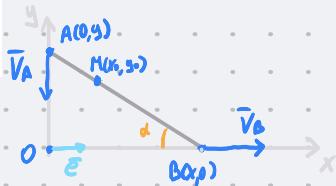
$$W_M = \sqrt{(\omega^2 p - \epsilon r)^2 + (\ell \epsilon + \frac{\omega^2 r}{2})^2}$$

$$3.20. \quad v_M = \omega \sqrt{l^2 + r^2}, \quad w_M = \sqrt{\left(\epsilon l + \frac{\omega^2 r}{2} \right)^2 + \left(\omega^2 l - \epsilon r \right)^2}.$$

№ 3.21

Дано: $V_A = \text{const}$
 $\vec{g} \perp \vec{t_B}, \omega_0$ $\vec{w}_n \perp \vec{O_3}$,
 $\vec{w}_n \sim x^{-3}$

3.21. Концы А и В стержня движутся вдоль перпендикулярных прямых Ox и Oy . Скорость точки А постоянна. Показать, что ускорение любой точки стержня перпендикулярно Ox и изменяется обратно пропорционально кубу расстояния этой точки от оси Ox .



□ 1) $A - MUSY, m.k.$ $\vec{V}_A = \text{const}$

$$\vec{AM} \parallel \vec{AB} \Rightarrow \vec{w}_n \parallel \vec{w}_B \Rightarrow \vec{w}_n \perp Oy$$

2) Считаем AM и AB известными, м.к.
 Через одну точку могут проходить столько
 разных линий



$$\vec{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_n \cdot \vec{e} = \vec{V}_A \cdot \vec{e} + \vec{\omega} \times \vec{AM} \cdot \vec{e} - \omega^2 \vec{AM} \cdot \vec{e}$$

$$w_n = 0 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} AM \cos \alpha \\ -AM \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \vec{e} - \omega^2 AM \cdot \cos \alpha = \epsilon \cdot AM \cdot \sin \alpha - \omega^2 AM \cos \alpha$$

$$\text{м.к. } A - MUSY : \tan \alpha = \frac{\epsilon}{\omega^2} \Rightarrow w_n = \omega^2 AM \cdot \tan \alpha \sin \alpha - \omega^2 AM \cos \alpha = \\ = \omega^2 AM \left(\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) = \omega^2 AM \cdot \frac{1 - 2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \omega^2 AM \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 2 \cos \alpha \right)$$

$$\vec{V}_B \cdot \vec{e} = \vec{V}_A \cdot \vec{e} + \vec{\omega} \times \vec{AB} \cdot \vec{e} \Rightarrow V_B = \omega y$$

$$V_A \sin \alpha = V_B \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{V_A}{V_B} = \frac{y}{x} \Rightarrow V_B = \frac{y}{x} V_A \Rightarrow W = \frac{V_B}{y} = \frac{V_A}{x} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{V_A}{x_0}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{AM} = \frac{x}{AB} \Rightarrow x = \frac{AB}{AM} x_0 \Rightarrow w_n = \left(\frac{AM}{AB} \cdot \frac{V_A}{x_0} \right)^2 \cdot AM \left(\frac{AM}{x_0} - 2 \frac{AM}{x_0} \right)$$

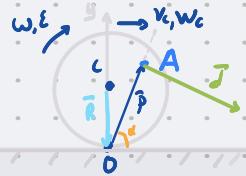
$$W_n = \frac{AM^4}{AB^2} \cdot V_A^2 \left(\frac{1}{x_0^3} - \frac{2}{x_0} \right) \sim \frac{1}{x_0^3}$$

№3.25

Дано: v_c, w_c, R
 $w_n, w_t - ?$

3.25. Диск радиуса R катится по прямой без скольжения. Скорость и ускорение центра C диска в данный момент равны v_c и w_c . Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки $A(x, y)$ диска ($x \neq 0, y \neq 0$).

Без проскальзывания! $\omega = \frac{v_c}{R}, \epsilon = \frac{w_c}{R}$



$$\bar{W}_A = \bar{W}_c + \bar{\epsilon} \times \bar{r}_A - \omega^2 \cdot \bar{r}_A = \begin{bmatrix} ER \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\epsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y-R \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y-R \\ 0 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} ER + y\epsilon - ER - \omega^2 X \\ w^2 R - w^2 y - X\epsilon \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\epsilon - \omega^2 X \\ w^2 R - X\epsilon - \omega^2 Y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{bmatrix}; W_p = \frac{1}{d} \bar{W}_c \cdot \bar{P} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} [y(\epsilon - \omega^2 X)X - (X\epsilon + w^2 Y - w^2 R)Y] = \frac{-w^2}{\sqrt{x^2+y^2}} (X^2 + Y^2 - YR) \Rightarrow$$

$$W_n = \frac{V_c^2 (X^2 + Y^2 - YR)}{R^2 \sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} Y \\ -X \\ 0 \end{bmatrix} \perp \bar{P}$$

$$W_d = \frac{1}{d} \bar{W}_c \cdot \bar{J} = \frac{1}{d} [(y\epsilon - \omega^2 X)Y + (X\epsilon + w^2 Y - w^2 R)X] = \frac{\epsilon(X^2 + Y^2) - \omega^2 RX}{d} \Rightarrow$$

$$W_t = \frac{w_c(X^2 + Y^2) - V_c^2 X}{R \sqrt{X^2 + Y^2}}$$

3.25. $w_{At} = \frac{w_c(x^2 + y^2) - v_c^2 x}{R \sqrt{x^2 + y^2}}, w_{An} = \frac{v_c^2(x^2 + y^2 - yR)}{R^2 \sqrt{x^2 + y^2}}$

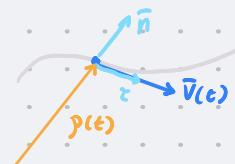
3.36. Точка движется в плоскости. Известны её скорость $v(t)$ и радиус $r(t)$ кривизны её траектории. Найти угловое ускорение сопровождающего точку трехгранника (τ, n, b).

№3.36

Дано: $\bar{v}(t), \bar{r}(t)$
 $\bar{E}, \bar{w} - ?$

$$\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \bar{\omega} = \bar{b} \cdot \frac{|\bar{v}|}{r} = \bar{b} \cdot \frac{\bar{v} \cdot \bar{\epsilon}}{r}$$

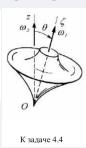
$$\bar{\epsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \bar{b} \left(\frac{\dot{\bar{v}} \cdot \bar{b}}{r^2} - \frac{\bar{v} \cdot \bar{b} \dot{\bar{b}}}{r^2} \right)$$



3.36. $\omega = b \frac{v \cdot \tau}{r}, \epsilon = b \left(\frac{\dot{v} \cdot \tau}{r} - \frac{v \cdot \tau \dot{b}}{r^2} \right)$

№4.4

4.4. Юла вращается вокруг своей оси симметрии O_2' с постоянной по величине угловой скоростью ω_1 . Ось O_2' равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью ω_2 , образуя с ней постоянный угол θ (регулярная пресессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы.



К задаче 4.4

Дано: $\omega_1, \omega_2, \theta$

$\bar{\omega}, \bar{E} - ?$



" $\theta, t.k. \omega = \text{const}$ "

$$\bar{E} = (\bar{w}_i \cdot \bar{e}_{w_i})^i = \dot{w}_i \bar{e}_{w_i} + w_i \dot{\bar{e}}_{w_i} = w_i \cdot \bar{w}_i \times \bar{e}_{w_i} = \bar{w}_i \times \bar{w}_i \Rightarrow E = w_i \cdot w_i \cdot \sin \theta$$

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \Rightarrow \omega = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + 2w_1 \cdot w_2 \cdot \cos \theta}$$

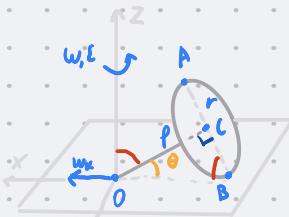
№4.10

4.10. Тонкое колесо радиуса r , жестко насаженное под прямым углом на стержень OC длины $l = r\sqrt{3}$, катится по плоскости без скольжения. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение стержня OC , описывающего коническую поверхность с неподвижной вершиной O , равны по величине ω и ε . Определить величины угловой скорости, углового ускорения колеса, а также величины ускорений его точек A и B .

Дано: $r, l = r\sqrt{3}, \omega, \varepsilon$
 $w_k, E_k, v_A, v_B - ?$

$$\bar{V}_c = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{OC} = \bar{V}_B + \bar{\omega}_K \times \bar{BC} \Rightarrow \omega \cdot OC \cdot \cos \theta = w_K \cdot BC \cos \theta$$

$$w_K = \omega \cdot \frac{OC}{BC} = \frac{l}{r} \omega \Rightarrow w_K = \sqrt{3} \omega$$



К задаче 4.10

$$\text{Введен} \bar{e}_{w_k} = \frac{\bar{w}_k}{w_k} \Rightarrow \bar{E}_k = \dot{w} \bar{e}_{w_k} + w_k \dot{\bar{e}}_{w_k} = \sqrt{3} \{ \cdot \bar{e}_{w_k} + \bar{\omega} \times \bar{w}_k$$

$$E_k = \sqrt{(\sqrt{3} \cdot \varepsilon)^2 + (\omega \cdot \sqrt{3} \omega)^2} \Rightarrow E_k = \sqrt{3} (\varepsilon^2 + \omega^4)$$

$$\bar{W}_B = \bar{W}_0 + \bar{E}_k \times \bar{OB} + \bar{\omega}_K \times (\bar{\omega}_K \times \bar{OB}) = \bar{E}_k \times \bar{OB} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \varepsilon \\ w_k \cdot w \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r / \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{w_k \cdot w \cdot r}{\sin \theta} \end{bmatrix}$$

$$0 \begin{array}{c} r\sqrt{3} \\ r \\ \theta \end{array} \Rightarrow \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ \Rightarrow W_B = \frac{w_k \cdot w \cdot r}{\sin \theta} = 2\sqrt{3} \cdot \omega^2 r$$

$$\bar{W}_A = \bar{W}_B + \bar{E}_k \times \bar{BA} + \bar{\omega}_K \times (\bar{\omega}_K \times \bar{BA}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3w^2 r \\ -3\varepsilon r \\ -3\sqrt{3}w^2 r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3w^2 r \\ -3\varepsilon r \\ -2\sqrt{3}w^2 r \end{bmatrix}$$

$$\text{①} \begin{bmatrix} \sqrt{3}\varepsilon \\ \sqrt{3}w^2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2r \sin \theta \\ 0 \\ 2r \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3w^2 r \\ -3\varepsilon r \\ -\sqrt{3}w^2 r \end{bmatrix} \quad \text{②} \begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2r \sin \theta \\ 0 \\ 2r \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3w \omega r \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{③} \begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -3w \omega r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_A = r \sqrt{g w^4 + g \varepsilon^2 + 12 w^4} = r \sqrt{g \varepsilon^2 + 21 w^4}$$

$$4.10. \omega_a = \sqrt{3}\omega, \varepsilon_a = \sqrt{3(\varepsilon^2 + \omega^4)}, \\ w_A = r \sqrt{9\varepsilon^2 + 21\omega^4}, w_B = 2\sqrt{3}\omega^2 r$$

4.12. Тонкий обруч радиуса R катится без скольжения по прямой AB . Скорость центра обруча постоянна и равна v . В плоскости обруча укреплена ось CD , вокруг которой с постоянной по величине угловой скоростью ω вращается диск радиуса r . Центры диска и обруча совпадают, плоскость диска перпендикулярна CD . В положении, когда ось CD образует угол α с прямой AB , найти скорость и ускорение точек 1, 3 и 2, 4 диска, соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.

№4.12

Дано: \bar{V} , R , r , α

$V_1, w_1 - ?$

В задавальнике
нужно только для 1 точки

$$\bar{w}_a = \bar{w} + \bar{\Omega}$$

Без скольжения: $\bar{\Omega} = \frac{\bar{V}}{R}$,

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} V/R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ w \cdot \cos \alpha \\ w \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{w}_a = \begin{bmatrix} -V/R \\ w \cdot \cos \alpha \\ w \cdot \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V} + \bar{w}_a \times \bar{\Omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -V/R \\ w \cdot \cos \alpha \\ w \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r \cdot \sin \alpha \\ r \cdot \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} wr \\ V + \frac{V}{R} r \cos \alpha \\ \frac{V}{R} \cdot r \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$V_1^2 = w^2 r^2 + \left(V + \frac{V}{R} r \cos \alpha\right)^2 + V^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin^2 \alpha = w^2 r^2 + V^2 + 2 \frac{V^2}{R} r \cos \alpha + \frac{V^2}{R^2} r^2 \cos^2 \alpha + \frac{V^2}{R^2} r^2 \sin^2 \alpha = w^2 r^2 + V^2 + 2 V^2 \frac{r}{R} \cos \alpha + V^2 \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow$$

$$V_1 = \sqrt{w^2 r^2 + V^2 + 2 V^2 \frac{r}{R} \cos \alpha + \left(V \frac{r}{R}\right)^2}$$

$$\bar{\epsilon}_a = \dot{\bar{w}} + \bar{\Omega} \times \bar{w} = \dot{\bar{w}} \bar{e} + \bar{w} \dot{\bar{e}} = \bar{\Omega} \times \bar{w}$$

$$\bar{W}_1 = \bar{W} + \bar{\epsilon}_a \times \bar{\Omega}_1 + \bar{w}_a \times (\bar{w}_a \times \bar{\Omega}_1) = \bar{w}_a \times (\bar{w}_a \times \bar{\Omega}_1) = \begin{bmatrix} -V/R \\ w \cdot \cos \alpha \\ w \cdot \sin \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} wr \\ \frac{V}{R} r \cos \alpha \\ \frac{V}{R} \cdot r \sin \alpha \end{bmatrix} =$$

" $\bar{\Omega}$, т.к. $\bar{V} = \text{const}$ "

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ rs \sin \alpha \left(w^2 + \frac{V^2}{R^2}\right) \\ -rc \oslash \alpha \left(w^2 + \frac{V^2}{R^2}\right) \end{bmatrix} \Rightarrow W_1 = r \left(\frac{V^2}{R^2} + w^2 \right)$$

4.23. При движении прямой (оси Ox) известны ускорения w_1 и w_2 точек с координатами x_1 и x_2 соответственно. Найти ускорение точки этой прямой с произвольным значением координаты x .

$$w_1 = \sqrt{v^2 + 2v^2 \frac{r}{R} \cos \alpha + \left(v \frac{r}{R}\right)^2 + \omega^2 r^2},$$

$$w_2 = r \left(\frac{v^2}{R^2} + \omega^2 \right)$$

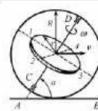
№4.23

$\bar{W}_1, \bar{W}_2, x_1, x_2$

$\bar{W}(x) - ?$

$$\bar{W}_2 = \bar{W}_1 + \bar{\epsilon} \times \bar{X}_1 \bar{X}_2 + w_2 x (w_1 \times \bar{X}_1 \bar{X}_2) \Rightarrow \bar{W}_2 - \bar{W}_1 = \bar{\epsilon} \times \bar{X}_1 \bar{X}_2 + w_2 x (w_1 \times \bar{X}_1 \bar{X}_2)$$

$$\bar{X}_1 \bar{X}_2 = k \cdot \bar{X}_1 \bar{X} \Rightarrow k = \frac{x_2 - x_1}{x - x_1}$$



К задаче 4.12



$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{\epsilon} \times \bar{x}_1 \bar{x} + \bar{w}_n (\bar{w}_1 \times \bar{x}_1 \bar{x}) = \bar{w}_1 + \frac{1}{k} [\bar{\epsilon} \times \bar{x}_1 \bar{x}_2 + w_1 x (w_1 \times \bar{x}_1 \bar{x}_2)] = \bar{w}_1 + \frac{1}{k} (\bar{w}_2 - \bar{w}_1)$$

$$\bar{W} = \bar{W}_1 - \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \bar{w}_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \bar{w}_2 \Rightarrow \bar{W} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \bar{w}_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \bar{w}_2$$

4.23. $\mathbf{w} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \mathbf{w}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \mathbf{w}_2$

Nº 4.30

4.30. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение тела, врачающегося вокруг неподвижной точки, равны ω и $\dot{\omega}$ соответственно. Показать, что вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а оссентриметрическая компонента — с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей векторы ω и $\dot{\omega}$.

Дано: $\bar{w}, \bar{\epsilon}$

д-р: $\bar{W}_{fp} = \bar{w}_z, \bar{W}_{oc} = \bar{w}_n \Leftrightarrow \bar{\epsilon}, \bar{w}, \bar{r}$ — коллинеарны

□ $\bar{W}_{fp} = \bar{\epsilon} \times \bar{r}, \bar{W}_z = \dot{v} \cdot \bar{r} = ([\bar{\epsilon} \times \bar{r}] \cdot \bar{r}) \cdot \bar{r}$

$$\bar{W}_{fp} = \bar{w}_z \Leftrightarrow \bar{\epsilon} \times \bar{r} = ([\bar{\epsilon} \times \bar{r}] \cdot [\bar{w} \times \bar{r}]) \cdot \frac{\bar{w} \times \bar{r}}{|\bar{w} \times \bar{r}|^2} / \cdot \bar{\epsilon} \text{ из-за}$$

$$\bar{\epsilon} \cdot (\bar{\epsilon} \times \bar{r}) = \bar{\epsilon} \cdot [\bar{w} \times \bar{r}] \cdot ([\bar{\epsilon} \times \bar{r}] \cdot [\bar{w} \times \bar{r}]) \cdot \frac{1}{|\bar{w} \times \bar{r}|^2}$$

$$\bar{\epsilon} \cdot (\bar{\epsilon} \times \bar{r}) = 0 \Rightarrow \bar{W}_{fp} = \bar{w}_z \Leftrightarrow \bar{\epsilon} \cdot [\bar{w} \times \bar{r}] = 0 \Leftrightarrow \bar{\epsilon}, \bar{w}, \bar{r} \text{ — коллинеарны}$$

$$\bar{W} = \bar{W}_{fp} + \bar{W}_{oc} = \bar{w}_z + \bar{w}_n = \bar{W}_{fp} + \bar{w}_n \Rightarrow \bar{w}_n = \bar{W}_{oc}$$

4.56. Ориентация осей $Oxyz$, жестко связанных с твердым телом, относительно поступательно движущейся системы отсчета $O'XYZ$ может быть задана ортогональной матрицей $A(t)$ — матрицей, состоящей из единичных элементов, если твердое тело не совершило полного вращения (теорема Эйлера).

Указание: При решении воспользуйтесь тем фактом, что при α и ω конечном повороте удовлетворяет уравнению $A = e^{\alpha \omega}$.

Найдем способъ бэккур \bar{U}

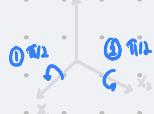
$$A \bar{U} = \bar{U}$$

$$\det(A \bar{U} - \bar{U}) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} A + \lambda \operatorname{tr} A - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad (\lambda_2, \lambda_3 \text{ ким кубл. искалб.)} \Rightarrow$$

\bar{U} — оставшая кубл. түші повернуте мета \Rightarrow повернут беккур \bar{U}

T2. Твердое тело поворачивают на угол $\pi/2$ относительно оси x_1 неподвижного базиса x_i , а затем — на угол $\pi/2$ вокруг оси x_2 того же базиса. Найти матрицу ориентации базиса ξ , связанный с телом, относительно x_i , если в начальный момент базисы x_i и ξ совпадают. Найти вектор соответствующего конечного поворота и углы Эйлера.

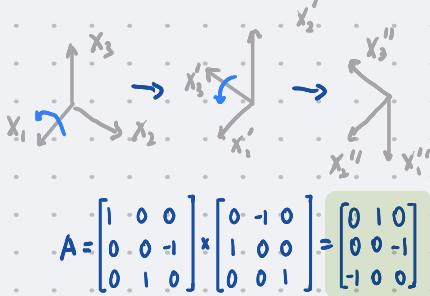


Решение 1: Активная точка зрения

(Предполагается Т.К.
Повороты даны в одном базисе)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Решение 2: Пассивная точка зрения



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Ψ -поворот вокруг \hat{i}_3 $\Psi=0$

Θ -поворот вокруг \hat{i}'_1 $\Rightarrow \Theta=90^\circ$

Υ -поворот вокруг \hat{i}''_3 $\Upsilon=90^\circ$

$$\Lambda = \Lambda_\Theta \circ \Lambda_\Upsilon = (\cos \frac{\pi}{4} + \bar{i} \cdot \sin \frac{\pi}{4}) \circ (\cos \frac{\pi}{4} - \bar{k} \cdot \sin \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} (1 + \bar{i}) \circ (1 - \bar{k}) =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \bar{k} + \bar{i} + \bar{j}) \Rightarrow \bar{\rho} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \alpha = 2 \arccos \lambda_0 = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

4.66. Поворот твердого тела задается углами Эйлера ψ , θ и φ . С помощью кватернионов найти угол и направляющие косинусы оси конечного поворота тела.

Дано:

$$\begin{array}{c} \vec{i}_3'' \\ \psi \\ \theta \\ \varphi \end{array}$$

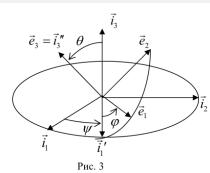


Рис. 3

$$\begin{aligned}\Lambda_\psi &= \cos \frac{\psi}{2} + \bar{i}_3 \sin \frac{\psi}{2} \\ \Lambda_\theta &= \cos \frac{\theta}{2} + \bar{i}_1' \sin \frac{\theta}{2} \\ \Lambda_\varphi &= \cos \frac{\varphi}{2} + \bar{i}_3'' \sin \frac{\varphi}{2}\end{aligned}$$

угол Эйлера \Rightarrow квaternion т. зр.

$$\Lambda = \Lambda_\psi \circ \Lambda_\theta \circ \Lambda_\varphi$$

$$\Lambda \circ M = \lambda_0 \mu_0 - (\vec{\lambda}, \vec{\mu}) + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}.$$

все члены можно убрать, т.к. кватернион поворота имеет одинаковые координаты по i, i', i''

$$\Lambda_\psi \circ \Lambda_\theta = C_1 C_2 + C_1 S_2 \bar{i}_1 + C_2 S_1 \bar{i}_3 + S_1 S_2 \bar{i}_2$$

$$\begin{aligned}\Lambda &= C_1 C_2 C_3 - C_2 S_1 S_3 + C_1 C_2 S_3 \bar{i}_3 + C_3 C_1 S_2 \bar{i}_1 + C_3 C_2 S_1 \bar{i}_3 + C_3 S_1 S_2 \bar{i}_2 + S_2 S_1 S_3 \bar{i}_1 - \\ &- C_1 S_2 S_3 \bar{i}_2 = C_2 (C_1 C_3 - S_1 S_3) + \bar{i}_3 \cdot C_2 (C_1 S_3 + S_1 C_3) + \bar{i}_2 \cdot S_2 (S_1 C_3 - C_1 S_3) + \\ &+ \bar{i}_1 \cdot S_2 (C_1 C_3 + S_1 S_3)\end{aligned}$$

КОМПОНЕНТЫ КВАТЕРНИОНА

$$\lambda_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\psi + \varphi}{2} \quad \text{--}$$

$$\lambda_1 = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\psi - \varphi}{2} \quad \text{--}$$

$$\lambda_2 = \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\psi - \varphi}{2} \quad \text{--}$$

$$\lambda_3 = \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\psi + \varphi}{2} \quad \text{--}$$

НОРМИРОВКА:

$$S_1^2 \cdot C_-^2 + S_2^2 \cdot C_-^2 + C_2^2 S_1^2 = S_1^2 + C_2^2 S_1^2 =$$

$$= S_2^2 + C_2^2 S_1^2 - C_2^2 + C_2^2 = 1 - C_2^2 (1 - S_1^2) =$$

$$= 1 - C_2^2 C_1^2 = 1 - \lambda_0^2$$

$$\alpha = 2 \arccos \lambda_0$$

$$\gamma_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1 - \lambda_0^2}} \quad i = 1, 2, 3$$

4.66. Угол и направляющие косинусы оси поворота

$$\alpha = 2 \arccos \lambda_0, \quad \gamma_i = \lambda_i / \sqrt{1 - \lambda_0^2}, \quad \text{где}$$

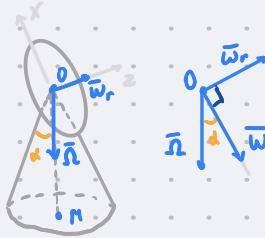
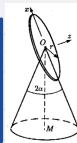
$$\lambda_0 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}, \quad \lambda_1 = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2},$$

$$\lambda_2 = \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}, \quad \lambda_3 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}$$

— компоненты кватерниона поворота.

4.70. Тонкий диск обкатывает без скольжения неподвижный конус с углом 90° при вершине так, что линия касания вращается вокруг оси конуса с постоянной угловой скоростью Ω . Найти угол и положение оси конечного поворота диска в момент времени $t = \frac{\pi}{\Omega}$.

Дано: Ω , $t = \frac{\pi}{\Omega}$
 $\alpha = \frac{\pi}{4}$



$$\omega = \Omega \sin \alpha = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}$$

$$w_r = w = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}$$

насшанская м. зп,

поворот вокруг верт. оси:

$$\Psi_1 = \Omega t = \frac{\pi}{2}, \quad \Lambda_1 = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{i} + \bar{k}) \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}$$

поворот вокруг оси Z: $\Psi_2 = w_r t = \frac{\pi}{2}$, $\Lambda_2 = \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \bar{k} \cdot \sin \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[+S - C\bar{i} - C\bar{k} + S\bar{j} \right]$$

$$\Psi = 2 \arccos \lambda_0 \Rightarrow \cos \Psi = 1 - \frac{S^2}{2} - 1 = S^2 - 1 = -C^2 = -\cos^2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$j_1 = j_3 = -\frac{\sqrt{2}C}{\sqrt{1+C^2}} = -\frac{\cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\cos^2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}}$$

$$j_2 = \frac{\sin \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{1+\cos^2 \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}}$$

Где ошибка?

4.70. $\cos \varphi = -\cos^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{8}} \right),$
 $\gamma_1 = \gamma_3 = -\frac{\cos \left(\frac{\pi}{\sqrt{8}} \right)}{\sqrt{1+\cos^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{8}} \right)}}, \quad \gamma_2 = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{\sqrt{8}} \right)}{\sqrt{1+\cos^2 \left(\frac{\pi}{\sqrt{8}} \right)}}.$

№4.85

4.85. Положение твердого тела с неподвижной точкой определяется кватернионом $\Lambda(t) = \cos \frac{\varphi(t)}{2} + \mathbf{e}(t) \sin \frac{\varphi(t)}{2}$, то есть его положение в момент времени t есть поворот из начального положения на угол $\varphi(t)$ вокруг вектора $\mathbf{e}(t)$. Найти угловую скорость тела.

$$\Lambda = \cos \frac{\varphi(t)}{2} + \bar{e}(t) \cdot \sin \frac{\varphi(t)}{2}$$

$\bar{\omega} - ?$

$$\bar{R} = \Lambda \circ \bar{r}^0 \circ \tilde{\Lambda}$$

$$|\Lambda| = 1 \Rightarrow \Lambda \circ \tilde{\Lambda} = 1 \Rightarrow \dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda} + \Lambda \circ \dot{\tilde{\Lambda}} = 0, \text{ где } \dot{\Lambda} = \dot{\lambda}_0 + \sum \dot{\lambda}_k \bar{i}_k$$

$$(\dot{\lambda} \circ \tilde{\Lambda}) = (\Lambda \circ \dot{\tilde{\Lambda}}) = -(\dot{\lambda} \circ \tilde{\Lambda}) \Rightarrow \operatorname{sgn}(\dot{\lambda} \circ \tilde{\Lambda}) = 0 \Rightarrow$$

$$V = \dot{\lambda} (\dot{\lambda} \circ \tilde{\Lambda}) \times \bar{R} = \bar{\omega} \times \bar{R}$$

$$\operatorname{sgn} \dot{\lambda} = 0$$

$$2S^2 = 2 - 2C^2 = \cos \Psi - 1$$

$$\bar{\omega} = (-S \cdot \dot{\varphi} + C \cdot \dot{\varphi} \bar{e} + 2S \dot{\bar{e}}) \circ (C - S \bar{e}) = S^2 \dot{\varphi} \bar{e} + C^2 \dot{\varphi} \bar{e} + 2SC \dot{\bar{e}} - 2S^2 \dot{\bar{e}} \times \bar{e} =$$

$$= \bar{e} \dot{\varphi} + \bar{e} \sin \varphi + \bar{e} \times \dot{\bar{e}} (1 - \cos \varphi)$$

4.85. $\omega = \mathbf{e} \dot{\varphi} + \mathbf{e} \sin \varphi + \mathbf{e} \times \dot{\mathbf{e}} (1 - \cos \varphi)$

T3

Т3. Доказать свойство ассоциативности кватернионного умножения: для любых кватернионов A , M и N выполняется $A \circ (M \circ N) = (A \circ M) \circ N$.

$$\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$$

$$M = \mu_0 + \vec{\mu}$$

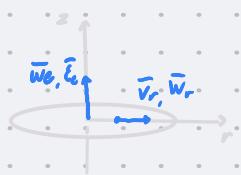
$$N = \nu_0 + \vec{\nu}$$

Проверить втулку

$$\text{D-TB: } \Lambda \circ (M \circ N) = (\Lambda \circ M) \circ N$$

Т4. Решить кинематические уравнения Пуассона $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \omega$ и $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\omega \circ \Lambda$ для $\omega = \text{const}$ и дать геометрическую интерпретацию полученным решениям.

2.9. В некоторый момент переносные угловая скорость и угловое ускорение соответственно равны $\omega_e = \mathbf{e}_z \omega_e$, $\ddot{\omega}_e = \mathbf{e}_z \ddot{\omega}_e$. Какими должны быть относительные скорость $\mathbf{v}_r = \mathbf{e}_r v_r$ и ускорение $\mathbf{w}_r = \mathbf{e}_r w_r$ точки, движущейся по оси Oz цилиндрической системы координат $Oxyz$, чтобы её абсолютное ускорение было равно нулю?



Дано: $\bar{\omega}_e = \bar{\epsilon}_z \omega_e$
 $\bar{\epsilon}_e = \bar{\epsilon}_z \ddot{\omega}_e$
 $\bar{W}_a = \bar{0}$

но оси Ox , Oy , Oz ?

$$\bar{W}_a = \bar{W}_r + \bar{W}_e + \bar{W}_k = \bar{0}$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_e &= \bar{\chi}_o^0 + \bar{\epsilon}_e \times \bar{P} + \bar{W}_e \times (\bar{W}_e \times \bar{P}) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \epsilon_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_e \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} rw_e^2 \\ r\epsilon_e \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{W}_k = 2\bar{W}_e \times \bar{V}_r = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2V_r w_e \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} V_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -rw_e^2 \\ r\epsilon_e \\ 2V_r w_e \end{bmatrix} = \bar{0} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_r &= \bar{\epsilon}_r w^2 r \\ \bar{V}_r &= -\bar{\epsilon}_r \frac{\epsilon_e r}{2w_e} \end{aligned}$$

$$2.9. \quad \mathbf{w}_r = \mathbf{e}_r \omega_e^2 r, \quad \mathbf{v}_r = -\mathbf{e}_r \frac{\epsilon_e r}{2\omega_e}.$$

2.16. Стержень OA совершает колебания в плоскости Oxy по закону $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t)$. По стержню скользит колечко P . Пренебрегая размерами конструкции, найти величины его абсолютной скорости и абсолютного ускорения, если $OP = \frac{1}{2}at^2$.

Дано: $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t)$

$$OP = \frac{1}{2}at^2$$

V_a , W_a ?



Введем $\Theta \epsilon_i$, связанные с стержнем

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e; \quad \bar{V}_r = \begin{bmatrix} a\dot{\epsilon}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}_e = \bar{\chi}_o^0 + \bar{\omega} \times \bar{OP} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} OP \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ OP\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}_a = \begin{bmatrix} at \\ \frac{1}{2}at^2\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_a^2 = a^2t^2 + \frac{1}{4}a^2t^4\dot{\varphi}^2 = \frac{a^2t^2}{4}(4 + \dot{\varphi}^2)$$

$$V_a = \frac{at}{2} \sqrt{4 + \dot{\varphi}_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)}$$

$$\bar{W}_a = \bar{W}_r + \bar{W}_e + \bar{W}_k \quad \bar{W}_r = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}_e = \bar{\chi}_o^0 + \bar{\epsilon} \times \bar{OP} + \bar{W}_e \times (\bar{W}_e \times \bar{OP}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} OP \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ OP\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi}^2 OP \\ \ddot{\varphi} OP \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}_k = 2\bar{W}_e \times \bar{V}_r = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} at \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\dot{\varphi}at \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}_a = \begin{bmatrix} a - \dot{\psi}^2 \bar{O}P \\ \ddot{\psi} \bar{O}P + 2\dot{\psi} a \bar{c} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W_a^2 = (a - \frac{1}{2} \dot{\psi}^2 a t^2)^2 + (\frac{1}{2} \ddot{\psi} a t^2 + 2\dot{\psi} a t)^2 =$$

$$= \frac{a^2}{4} \left[(2 - [\psi_0 w t \cdot \cos(wt)])^2 + (4\psi_0 w t \cos(wt) - \psi_0 w^2 t^2 \sin(wt))^2 \right]$$

$$W_a = \frac{a}{2} \sqrt{\left[2 - (\psi_0 w t \cos(wt)) \right]^2 + \psi_0^2 w^2 t^2 \left[4(\cos(wt) - w t \sin(wt)) \right]^2}$$

$$2.16. v = \frac{ar}{2} \sqrt{4 + \varphi_0^2 (\omega r)^2 \cos^2(\omega r)},$$

$$w = \frac{a}{2} \sqrt{\left[2 - \varphi_0^2 (\omega r)^2 \cos^2(\omega r) \right]^2 + \varphi_0^2 (\omega r)^2 \left[4 \cos(\omega r) - (\omega r) \sin(\omega r) \right]^2}$$

2.38. Точка движется по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$. Движение происходит в соответствии с законом площадей $r^2 \dot{\varphi} = C$, где C – постоянная величина. Эллипс вращается с постоянной угловой скоростью ω во круг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через фокус. Найти величины абсолютных скорости и ускорения точек в зависимости от r .

К такой приближенной модели приводит учет влияния несферичности Земли на движение спутника в плоскости земного экватора.

$$\text{Решение: } r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad | \quad \dot{r} = \frac{p e \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \quad r^2 \dot{\varphi} = C, \quad \bar{w} = \text{const}$$

$$V_a(r), W_a(r) ?$$

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{C}{r^2} \cdot r^2 \frac{e \sin \varphi}{p} \right)^2 = \left(\frac{C e}{p} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{p-r}{r e} \right)^2 \right] = C^2 \left[\left(\frac{e}{p} \right)^2 - \left(\frac{p-r}{p r} \right)^2 \right] = C^2 \left[\left(\frac{e}{p} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \right]$$

$$\bar{V}_a = \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\varphi} + r w \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_a = \sqrt{(wr + \frac{C}{r})^2 + C^2 \left[\left(\frac{e}{p} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \right]}$$

$$\bar{W}_a = \bar{W}_r + \bar{W}_\theta + \bar{W}_\omega$$

$$\bar{W}_\theta = \bar{W}_\theta^0 + \bar{E}_\theta \times \bar{r} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ rw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w^2 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad W_r = \dot{r} - r \dot{\varphi}^2$$



бездимный Ось Z, чью с земли можно.

В силу з-ва плоскости $W_y = 0$

можемо підтвердити:

$$W_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{2rC}{r^3} \quad W_\varphi = -\frac{2C}{r^2} \cdot \dot{r} + 2\dot{r}\frac{C}{r^2} = 0$$

$$\bar{W}_k = 2\bar{w} \times \bar{V}_r = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix} = 2w \begin{bmatrix} -r\dot{\varphi} \\ \dot{r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2\dot{r}\ddot{r} = \left[-C^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \right] = 2C^2 \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \cdot \frac{\dot{r}}{r^2}$$

$$\ddot{r} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$W_r = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \cdot \frac{1}{r^2} - r \frac{C^2}{r^4} = -\frac{C^2}{pr^2}$$

$$\bar{W}_a = \begin{bmatrix} W_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{w'r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2w \begin{bmatrix} -r\dot{\varphi} \\ \dot{r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_a^2 = \left(2 \frac{C^2}{r^3} + w^2 r + 2w r \dot{\varphi} \right)^2 + (2w \dot{r})^2$$

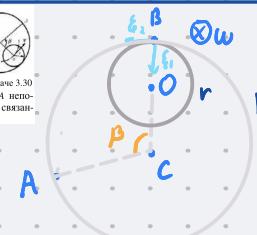
$$2.38. \quad v^2 = \left(\omega r + \frac{C}{r} \right)^2 + C^2 \left[\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \right].$$

$$w^2 = \left(\dot{\varphi}^2 r + 2\omega \frac{C}{r} + \frac{C^2}{r^2 p} \right)^2 + 4\omega^2 C^2 \left[\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \right].$$

$$W_a = \sqrt{\left(W^2 r + 2w \frac{C}{r} + \frac{C^2}{pr^2} \right)^2 + 4w^2 C^2 \left[\left(\frac{e}{p} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 \right]}$$



Дано: $r, R, \beta, v = \text{const},$
 $V_A, W_A ?$



$$\bar{W}_A = \bar{W}_e + \bar{W}_r + \bar{W}_k = \bar{0}$$

$$\bar{W}_e = \bar{W}_e + \bar{\epsilon} \times \bar{BA} - \omega^2 \bar{BA}$$

$$\bar{W}_k = 2 \bar{w} \times \bar{V}_{Ar} = -2 \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{BA}) = -2 \bar{w} (\bar{w} / \bar{BA}) + 2 \omega^2 \bar{BA}$$

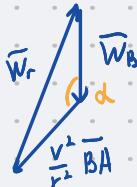
$$\bar{V}_A = \bar{V}_{Ae} + \bar{V}_{Ar} = \bar{0} \Rightarrow \bar{V}_{Ar} = -\bar{V}_{Ae}$$

$$\bar{V}_{Ae} = \bar{V}_B + \bar{w} \times \bar{BA}$$

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad AB = 2R \sin \frac{\beta}{2} \Rightarrow V_{Ar} = 2V \frac{R}{r} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\bar{W}_r = -\bar{W}_e - \bar{W}_k = -\left[\bar{W}_B + \frac{V^2}{r^2} \bar{BA}\right]$$

$$\bar{W}_B = \bar{W}_0 - \omega^2 \bar{OB}, \quad \bar{W}_0 = \frac{V^2}{R-r} \frac{\bar{OB}}{OB} \Rightarrow \bar{W}_B = \bar{BO} \cdot V^2 \left(\frac{1}{(R-r)r} + \frac{1}{r^2} \right) = \frac{RV^2}{(R-r)r^2} \cdot \bar{BC}$$



$$\varphi = 90 - \frac{\beta}{2}, \quad \alpha = 180 - \varphi = 90 + \frac{\beta}{2}$$

$$\cos \alpha = -\sin \frac{\beta}{2} = -s$$

$$W_r^2 = \left(\frac{RV^2}{(R-r)r} \cdot BO \right)^2 + \left(\frac{V^2}{r^2} \cdot BA \right)^2 + 2 \sin \frac{\beta}{2} \frac{V^2}{r^2} BA \cdot \frac{Rr}{(R-r)r^2} V^2 =$$

$$= \frac{R^2 V^4}{r^4 (R-r)^2} \left[r^2 + 4(R-r)^2 s^2 + 4s^2 (R-r) \cdot r \right]$$

$$4(R-r) s^2 (R-r+r)$$

$$W_r = \frac{R V^2}{r^2 (R-r)} \sqrt{r^2 + 4R(R-r) \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

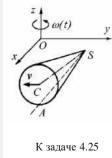
$$3.30 \quad v_A = 2r \frac{R}{r} \sin \left(\frac{\beta}{2} \right), \quad w_A = -\frac{v^2 R}{r^2 (R-r)} \sqrt{r^2 + 4R(R-r) \sin^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)}$$

4.25. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси

с угловой скоростью $\omega(t)$. По плос-

кости катится без скольжения конус так, что центр его основания движется относительно плоскости с постоянной по величине скоростью v в направлении, указанном на рисунке. Высота конуса h , угол при вершине 2β . Найти величины абсолютных угловой скорости и углового ускорения конуса.

Дано: $\bar{W}(t)$,
 $v = \text{const}$, $h, 2\beta$
 $w_a, \epsilon_a = ?$



К задаче 4.25

$$\bar{E}_a = \bar{E}_c + \bar{E}_r + \bar{W}_e \times \bar{w}_r$$

$$\bar{E}_r = \dot{\bar{w}}_a \bar{e} + \bar{w}_a \cdot \dot{\bar{e}} = \bar{w}_s \times \bar{w}_A$$

$$\bar{V}_c = \bar{w}_s \times \bar{SC} \Rightarrow V = w_s \cdot SC \cdot \sin(\vartheta + \beta) \Rightarrow w_s = \frac{V}{h \cos \beta}$$

$$\bar{E}_a = \dot{\bar{w}} + \bar{w}_s \times \bar{w}_A + \bar{w} \times \bar{w}_A$$

без D2
сопротивление

$$\bar{W}_a = \bar{W}_e + \bar{w}_r$$

$$\bar{V}_c = \bar{w}_A \times \bar{AC} \Rightarrow$$

$$V = w_A \cdot SC \cdot \sin \beta \Rightarrow w_A = \frac{V}{h \sin \beta}$$

$$w_a = \sqrt{w^2 + \left(\frac{V}{h \sin \beta} \right)^2}$$

$$E_a = \sqrt{\dot{w}^2 + \left[\frac{V}{h \sin \beta} \left(w - \frac{V}{h \cos \beta} \right) \right]^2}$$

Т5. Конус II (Рис. 2) с углом при вершине $\alpha_2 = 45^\circ$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1 = 90^\circ$. Высота OO_1 подвижного конуса равна l , а скорость центра его основания O_1 постоянна по величине и равна v . Вдоль высоты конуса OO_1 движется точка M по закону $OM = f(t)$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент, когда $OM = MO_1$.

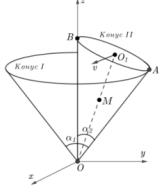
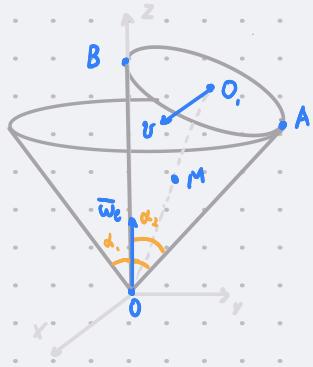


Рис. 2: К задаче Т3



Дано: $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_1 = 90^\circ$
 $O\dot{O}_1 = \rho$, v , $OM = f(t)$
 $OM = MO_1$,
 $V_a, W_a - ?$

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r$$

$$\bar{V}_e = \frac{1}{2} \bar{V} \quad \bar{V}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f}_y \\ \dot{f}_z \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{V}_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} V \\ \dot{f}_y \\ \dot{f}_z \end{bmatrix} \Rightarrow V_a = \sqrt{\frac{1}{4} V^2 + (\dot{f}(t))^2}$$

$$\bar{V}_{O_1} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{w}_e \times \bar{O}O_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -wO_{1y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \sin \frac{\alpha}{2}, \quad c = \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow W = \frac{V}{ps}$$

$$\bar{W}_a = \bar{w}_e + \bar{w}_r + \bar{w}_k \quad \bar{w}_k = 2 \bar{w}_e \times \bar{v}_r = 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f}_y \\ \dot{f}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2w\dot{f}_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f}(t)_y \\ \dot{f}(t)_z \end{bmatrix} \quad \bar{W}_e = \bar{e}_e \times \bar{OM} + \bar{w}_e \times (\bar{w}_e \times \bar{OM}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}wO_{1y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}w^2O_{1y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}w^2O_{1y} + \dot{f}_y & -2w\dot{f}_y \\ 0 & \dot{f}_y + \dot{f}_z & 0 \\ 0 & \dot{f}_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$W_a^2 = (\ddot{f} \cdot c)^2 + (\ddot{f} \cdot s - \frac{1}{2}w^2 ps)^2 + (2w\dot{f} \cdot s)^2 = \ddot{f}^2 - \ddot{f}^2 w^2 p s^2 + \frac{1}{4}w^4 p^2 s^2 + 4w^2 \dot{f}^2 s^2$$

$$W_a = \sqrt{\ddot{f}^2 - \ddot{f}^2 \frac{V^2}{p} + \frac{1}{p^2} \frac{V^4}{2-5s} + 4 \frac{V^2 \dot{f}^2}{p^2}}$$

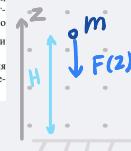
5.7. Камень массы m отпущен без начальной скорости на высоте H над Землей. Пренебрегая силами сопротивления, найди время падения T , по истечении которого камень достигнет высоты h , если сила притяжения меняется с высотой z по закону $\frac{\gamma m M}{(R+z)^2}$, где γ — гравитационная постоянная, M и R — масса и радиус Земли. В выражении для времени падения перейти к пределу при $R \rightarrow \infty$ (случай однородного поля тяжести).

Daten: m, H, T, h

$$F(z) = \frac{\gamma m M}{(R+z)^2}$$

$T - ?$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} T - ?$$



$$m \ddot{z} = -\frac{\gamma m M}{(R+z)^2}$$

$$x(z) = \dot{z}(t)$$

$$\ddot{z}(t) = x \cdot x'(z)$$

$$x \cdot x' = -\frac{\gamma M}{(R+z)^2} \Rightarrow \int_0^v x dx = -\int_H^z \frac{\gamma M}{(R+z)^2} dz$$

$$\frac{v^2}{2} = \int M \left(\frac{1}{R+z} - \frac{1}{R+H} \right) = \frac{1}{2} \dot{z}^2$$

$$\dot{z}^2 = 2 \int M \left(\frac{1}{R+z} - \frac{1}{R+H} \right) = 2 \int M \frac{1}{R+H} \cdot \left(\frac{1}{R+z} - 1 \right) = \frac{2 \gamma M}{a} \cdot \left(\frac{a}{R+z} - 1 \right)$$

$$U = R+z, dt = \sqrt{\frac{a}{2 \gamma M}} \cdot \frac{du}{\sqrt{\frac{a}{u}-1}} = \left\{ \begin{array}{l} V = \sqrt{\frac{a}{u}-1} \\ u = \frac{a}{V^2+1} \end{array} \right. = -\sqrt{\frac{a}{2 \gamma M}} \cdot \frac{2a}{(V^2+1)^2}$$

$$V = \operatorname{arctg} t,$$

$$t \cdot \operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}, \Rightarrow \int \frac{2dt}{a^3} \Big|_0^T dt = -2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt = - \left(\frac{\sin 2t}{2} + t \right) \Big|_{\operatorname{arctg} V}^0 = \frac{1}{2} \sin(2 \operatorname{arctg} V) + \operatorname{arctg} V;$$

$$dV = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$\sin(2 \operatorname{arctg} V) = 2 \sin(\operatorname{arctg} V) \cdot \cos(\operatorname{arctg} V) = 2 \cdot \frac{V}{\sqrt{1+V^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+V^2}} = \frac{2V}{1+V^2} = \frac{2V}{1+\frac{a}{u}-1} = \frac{2UV}{a}$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}$$

$$\Rightarrow \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \psi = \operatorname{arccos} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2 \gamma M}} \left(\frac{uv}{a} + \operatorname{arctg} V \right) = \sqrt{\frac{a^3}{2 \gamma M}} \cdot \left(\frac{u}{a} \sqrt{\frac{a}{u}-1} + \operatorname{arctg} V \right) = \sqrt{\frac{a^3}{2 \gamma M}} \left(\sqrt{\frac{u^2}{a^2} \left(\frac{a}{u}-1 \right)} + \operatorname{arccos} \frac{u}{a} \right)$$

$$JM = g R^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}} \left(\sqrt{\frac{(R+h)(H-h)}{(R+H)^2}} + \operatorname{arccos} \sqrt{\frac{R+h}{R+H}} \right)$$

$$\sqrt{\frac{u(a-u)}{a^2}}$$

$$1) R \rightarrow \infty: \frac{R+h}{R+H} = 1 - \frac{H-h}{R+H} = 1 - b, b \rightarrow 0$$

$$\sqrt{1-b} = 1 - \frac{b}{2} + o(b), b \rightarrow 0$$

$$\arccos(\sqrt{1-b}) = \arccos(1 - \frac{b}{2} + o(b)) = \arcsin(\sqrt{1 - (1 - \frac{b}{2})^2} + o(b^2)) = \\ = \arcsin(\sqrt{1 - 1 + b + o(b)}) = \arcsin(\sqrt{b + o(b)}) = \sqrt{b + o(b)}, b \rightarrow 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} T = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}} \cdot \frac{(R+h)(H-h)}{(R+H)^2} + \sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2} \cdot \frac{H-h}{R+H}} \right] = \sqrt{\frac{H-h}{2g}} + \sqrt{\frac{H-h}{2g}} = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

5.7. $T = \sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}} \left(\arccos \sqrt{\frac{R+h}{R+H}} + \sqrt{\frac{(R+h)(H-h)}{(R+H)^2}} \right)$.

$\lim_{R \rightarrow \infty} T = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$ — время падения в однородном поле тяжести при отсутствии сопротивления.

6.13. Прямой круговой конус поставлен основанием на гладкий горизонтальный стол. Конус сообщается угловая скорость ω_0 вокруг его оси симметрии. По его образующей из вершины к основанию опускается материальная точка, масса которой в k раз меньше массы конуса. Чему будет равна угловая скорость конуса, когда точка достигнет основания конуса?

Дано: $\omega_0, M = km$

$w - ?$



Рассл. шт. конус + М.Т.

$$R_z = (M+m)g - N = 0 \Rightarrow \dot{\bar{P}} = \bar{R}^e = \bar{o} \Rightarrow V_c = \text{const}$$

$$V_c(0) = 0 \Rightarrow \bar{V}_c = \text{const}$$

$$F_e \parallel OCA \text{ будем } \dot{\bar{k}}_c = 0 \Rightarrow K_c = \text{const} \Rightarrow K_c^{\text{ нач }} = K_c^{\text{ кон }}$$

$$\bar{K}_c^{\text{ нач }} = J_c \bar{\omega}_0 = \frac{3}{10} MR^2 \bar{\omega}_0$$

$$O \cdot \overset{\circ}{\cdot} A \quad \bar{OC} = \frac{m}{m+M} R \quad CA = OA - OC = \frac{MR}{m+M}$$

$$\bar{K}_c^{\text{ кон }} = \bar{K}_c^1 + \bar{K}_c^2 \quad \bar{K}_c^1 = K_0 + \bar{Q} \times \bar{OC} = \frac{3}{10} MR^2 \bar{\omega} + M \bar{V}_0 \times \bar{OC}$$

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_c^0 + \bar{\omega} \times \bar{OC} \Rightarrow \bar{V}_0 \times \bar{OC} = -(\bar{\omega} \times \bar{OC}) \times \bar{OC} = \bar{OC} \times (\bar{\omega} \times \bar{OC}) = \\ = \bar{OC}^2 \bar{\omega} - \bar{OC} (\bar{OC} / \bar{\omega}) = \bar{OC}^2 \cdot \bar{\omega}$$

$$K_c^1 = \left(\frac{3}{10} MR^2 + M \bar{OC}^2 \right) \bar{\omega} = MR^2 \left(\frac{3}{10} + \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 \right) \bar{\omega}$$

$$K_c^2 = m \bar{V}_A \times \bar{AC} = m \cdot (\bar{\omega} \times \bar{AC}) \times \bar{AC} = m \cdot (\bar{AC} \times \bar{\omega} \times \bar{AC}) = m (A^2 \bar{\omega}) = m \left(\frac{MR}{m+M} \right)^2 \bar{\omega}$$

$$K_c^{\text{кои}} = \bar{\omega} \cdot M R^2 \left(\frac{3}{10} + \frac{m^2}{(m+M)} + \frac{mM}{(m+M)^2} \right) = \bar{\omega} M R^2 \left(\frac{3}{10} + \frac{m}{m+M} \right) \Rightarrow$$

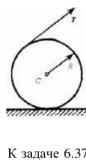
$$\bar{\omega} M R^2 \left(\frac{3}{10} + \frac{m}{m+M} \right) = \frac{3}{10} M R^2 \bar{\omega}_0 \Rightarrow$$

$$\bar{\omega}_0 = \frac{\frac{3}{10} + m/(m+M)}{\frac{3}{10}} \bar{\omega} = \frac{13m+3M}{3(m+M)} \bar{\omega} = \frac{13+3k}{3(1+k)} \bar{\omega}$$

$$W = \frac{3(1+k)}{13+3k} W_0$$

6.13. $\omega = \frac{3(k+1)}{3k+13} \omega_0$.

6.37. Однородный цилиндр катится по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы T , равной половине веса P цилиндра. Сила T касается цилиндра перпендикулярно его образующей и составляет с горизонтальной плоскостью угол α . Коэффициент трения скольжения равен $f = \frac{1}{3}$. Найти значение угла α' , при котором возникает скольжение. Найти угловое ускорение цилиндра и ускорение его центра масс для значений угла $\alpha < \alpha'$ и $\alpha > \alpha'$.



К задаче 6.37

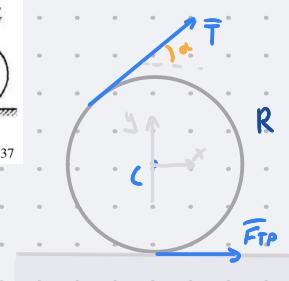
Дано: $T = \frac{1}{2} P$, α

$$f = \frac{1}{3}$$

α' - угол скольжения

α^* ?

E , W_c при $\alpha < \alpha'$?
 $\alpha > \alpha^*$?



1) $mW_c = T \cos \alpha + F_{Tp}$

$$T \sin \alpha + N = P \Rightarrow N = \frac{P}{2} (2 - \sin \alpha)$$

$$mW_c = T \cos \alpha + F_{Tp}$$

$$\dot{\epsilon}_c = J_c \epsilon = R(T - F_{Tp})$$

без проскальзывания: $W_c = ER$, $F_{Tp} \leq fN \Rightarrow \frac{1}{2} mR^2 \epsilon = R(T - F_{Tp})$

$$mER = T \cos \alpha + F_{Tp} = 2T - 2F_{Tp}$$

$$F_{Tp} = \frac{1}{3} T (2 - \cos \alpha) \leq fN = \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{2} (2 - \sin \alpha) \Rightarrow \cos \alpha \leq \sin \alpha$$

если $\alpha = \alpha^*$: $\cos \alpha^* = \sin \alpha^* \Rightarrow \alpha^* = 45^\circ$

2) $\alpha < \alpha^*$: $F_{Tp} = \frac{1}{3} T (2 - \cos \alpha)$

$$W_c = \frac{1}{m} (T \cos \alpha + F_{Tp}) = \frac{P}{2m} (\cos \alpha + \frac{1}{3} (2 - \cos \alpha)) = \frac{g}{3} (\cos \alpha + 1)$$

$$\epsilon = \frac{W_c}{R} = \frac{g}{3R} (1 + \cos \alpha)$$

3) $\alpha > \alpha^*$: $F_{Tp} = fN = \frac{P}{6} (2 - \sin \alpha)$

$$W_c = \frac{1}{m} (T \cos \alpha + F_{Tp}) = \frac{P}{6m} (3 \cos \alpha + 2 - \sin \alpha)$$

$$W_c = \frac{g}{6} (3 \cos \alpha + 2 - \sin \alpha)$$

$$\epsilon = \frac{R}{I_m k^2} (T - F_{Tp}) = \frac{2P}{2mR} (1 - f(2 - \sin \alpha)) = \frac{g}{R} \left(1 - \frac{1}{3} (2 - \sin \alpha) \right)$$

6.37. $\alpha' = 45^\circ$; при $\alpha < 45^\circ$: $\ddot{x} = r\ddot{\phi} = \frac{g}{3} (\cos \alpha + 1)$;

при $\alpha > 45^\circ$: $\ddot{x} = \frac{g}{2} [\cos \alpha + f(2 - \sin \alpha)]$; $\ddot{\omega} = \frac{g}{r} [1 - f(2 - \sin \alpha)]$.

6.39. Как нужно изменять длину $l(t)$ плоского математического маятника, чтобы угол отклонения маятника от вертикали менялся по линейному закону $\phi(t) = \omega t$, где $\omega = \text{const}$? Найти также нормальную реакцию в точке подвеса.

Дано: $\dot{\phi}(t) = \omega t$,
 $w = \text{const}$
 $l(t) = ?$
 $T = ?$
 $R = ?$
 Доказательство



Омни-но м.0

$$K = m w \dot{l}(t), \quad \dot{K} = \bar{OA} \times \bar{mg}$$

$$\dot{K} = 2m w l \dot{\phi} = -mg p \sin \omega t$$

$$\int_{P_0}^P dP = -\frac{g}{2w} \int_0^t \sin \omega t dt$$

$$P - P_0 = \frac{g}{w^2} \cdot \frac{\cos(\omega t) - 1}{2} \Rightarrow P(t) = P_0 - \frac{g}{w^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2}$$

$$\text{для M.T.: } \bar{T} + \bar{mg} = m \bar{w} = m \bar{v}$$

$$\begin{matrix} 0 & p \sin \varphi \\ 0 & -p \cos \varphi \\ w & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} -w p \cos \varphi \\ w p \sin \varphi \\ 0 \end{matrix} \quad \bar{w} = \begin{matrix} -w \dot{p} c + w^2 p s \\ w \dot{p} s + w^2 p c \\ 0 \end{matrix}$$

УЧИМСЯ

$$\text{осв. Y: } T \cos \varphi - mg = m(w \dot{p} \sin \varphi + w^2 p \cos \varphi) \Rightarrow$$

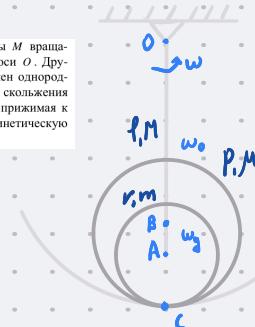
$$\begin{aligned} T \cos \varphi &= m \left(g + w \cdot \frac{g}{w^2} \cdot \frac{w}{2} \cdot \sin^2 \varphi + w^2 p_0 \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - w^2 \cdot \frac{g}{w^2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \varphi \right) = mg \left(1 + \frac{1}{2} \sin^2 \varphi + \frac{w^2}{g} p_0 \cos \varphi - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos^2 \varphi \right) = \frac{mg}{2} \left(3 + \frac{2p_0}{g} w^2 \cos \varphi - \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

$$6.39. \quad l(t) = l_0 - \frac{g}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega t}{2}, \quad \left(\omega^2 > \frac{2g}{l_0} \right)$$

$$N = \frac{mg}{2} \left(\frac{2l_0}{g} \omega^2 - 1 + 3 \cos \omega t \right) > 0.$$

7.4. Однородный стержень OA длины l и массы M вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси O . Другой конец стержня несет ось A , на которую наложен однородный диск радиуса r и массы m . Диск катится без скольжения внутри цилиндрической полости радиуса $R = l+r$, прижимая к ней кончик обруча радиуса p и массы μ . Найти кинетическую энергию системы.

Дано: $l, M, \omega, r, m, R = l+r, p, \mu$,
 $T = ?$



$$T = T_{cr} + T_g + T_o = \frac{1}{2} J_{cr} \omega^2 + \frac{1}{2} V_A^2 M + \frac{1}{2} J_g w_g^2 + \frac{1}{2} V_B^2 \mu + \frac{1}{2} J_o w_o^2$$

$$\bar{V}_A = \bar{Y}_o^0 + \bar{w} \times \bar{OA} \Rightarrow V_A = w p \quad \bar{V}_B = \bar{Y}_c^0 + \bar{w}_0 \times \bar{CA} \Rightarrow V_B = w_0 p = (l+r-p)w$$

В - центр обруча

$$V_A = w_p r = w l \Rightarrow w_1 = \frac{p}{r} \omega$$

$$V_B = w_0 p = w(l+r-p) \Rightarrow w_2 = \frac{l+r-p}{p} \omega$$

R

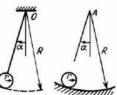
$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} M \rho^2 \cdot w^2 + \frac{1}{2} w^2 l^2 m + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m r^2 \cdot \left(\frac{l}{r}\right)^2 w^2 + \frac{1}{2} \mu (l+r-p)^2 w^2 + \frac{1}{2} \mu p^2 \cdot \left(\frac{l+r-p}{p}\right)^2 w^2 =$$

$$= \frac{1}{2} w^2 \left[\frac{1}{3} M \rho^2 + l^2 m + \frac{1}{2} m \cdot \frac{l^2}{r^2} + \mu (l+r-p)^2 + \mu (l+r-p) \cdot \frac{l^2}{r^2} \right]$$

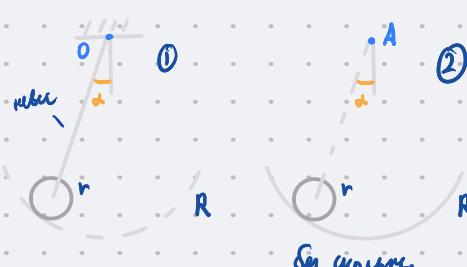
$$T = \frac{1}{2} w^2 \left[\frac{1}{3} M \rho^2 + \frac{3}{2} m \rho^2 + 2 \mu (l+r-p)^2 \right]$$

$$7.4. T = \frac{1}{2} \left[\frac{M l^2}{3} + \frac{3}{2} m l^2 + 2 \mu (l+r-p)^2 \right] \omega^2$$

7.28. Физический маятник состоит из однородного шара радиуса r , подвешенного на нити, не имеющей стяжки к точке O ; нижняя точка шара описывает окружность радиуса R . Другой такой же шар положен в круговой желоб радиуса R и катится по нему без скольжения. В начальный момент центры шаров находятся на одном уровне и начинают движение без начальной скорости. Найти отношение наибольших скоростей центров шаров. При каком соотношении между радиусами R и r эти скорости будут одинаковыми?



К задаче 7.28



Дано: r, R ,

$$1) \frac{V_2}{V_1} - ?$$

$$3(3): \Pi_n = T_n$$

$$2) V_1 = V_2, \frac{R}{r} - ?$$

$$\Pi_n \text{ в обоих случаях одинак} \Rightarrow T_{M_1} = T_{M_2}$$

$$① \Omega - \text{уд. скр. в начн. } T \Rightarrow \Omega = \frac{V_1}{R-r}$$

$$T_{M_1} = \frac{1}{2} (J_w + m(R-r)^2) \Omega^2 = \frac{1}{2} \cdot m \left[\frac{2}{5} r^2 \cdot \frac{V_1^2}{(R-r)^2} + V_1^2 \right] \Rightarrow T_{M_1} = \frac{1}{10} m V_1^2 \left[2 \cdot \left(\frac{r}{R-r} \right)^2 + 5 \right]$$

$$② \omega - \text{уд. скр. в начн. } T \Rightarrow \omega = \frac{V_2}{r}$$

$$T_{M_2} = \frac{1}{2} m V_2^2 + \frac{1}{2} J_w \omega^2 = \frac{1}{2} m V_2^2 \left[1 + \frac{2}{5} \right] = \frac{7}{10} m V_2^2$$

$$1) T_{M_1} = T_{M_2} \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 = \frac{1}{7} \cdot \frac{2r^2 + 5R^2 - 10Rr + 5r^2}{(R-r)^2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{5R^2 - 10Rr + 7r^2}{(R-r) \cdot 7}}$$

$$2) \frac{V_2}{V_1} = 1 \Rightarrow 5R^2 - 10Rr + 7r^2 = 7R^2 - 14Rr + 7r^2 \Rightarrow 2R = 4r \Rightarrow R = 2r$$

$$7.28. \frac{v_n}{v_n} = \frac{\sqrt{5R^2 - 10Rr + 7r^2}}{(R-r)\sqrt{7}}, R = 2r.$$

7.32. Как изменяется импульс P и кинетическая энергия T плоской фигуры массы m , движущейся в своей плоскости, если в некоторый момент времени закрепить центр инерции фигуры?

Дано: закрепили C ,

$$\bar{P} = m \bar{v}_c \Rightarrow \Delta \bar{P} = 0 - m \bar{v}_c = -m \bar{v}_c \Rightarrow \Delta \bar{P} = -m \bar{v}_c$$

$\Delta \bar{P}, \Delta T - ?$

$$T = T_c + T_{\text{огрн}}, T_{\text{огрн}} = \text{const} \Rightarrow \Delta T = 0 - \frac{m v_c^2}{2} \Rightarrow 2 \Delta T = m v_c^2$$

7.42. Шар радиуса r катится без скольжения со скоростью v_0 по горизонтальной плоскости AB . Достигнув точки B , шар, покинаявши плоскость BD , обрашивающуюся на наискосок, перекатывается по наклонной плоскости BD , образованной угол α с горизонтом. Найти значения угла α , при которых проекция силы reaction на угловой точке B на нормаль к траектории центра шара не равна нулю (движение без отрыва).

Дано! $r, V_0,$
для отрыва:
 $\alpha?$



$$W_{c_0} = \frac{V_0^2}{r}$$

$$\bar{N} + m\bar{g} = m\bar{V}$$

$$N - mg \cos \psi = -m \frac{V^2}{r}$$

$$\text{условиям отрыва } N=0: \cos \psi_0 = \frac{V^2}{rg} \Rightarrow \frac{V^2}{gr} \leq 1$$

$$mgr(1-\cos \psi_0) = \Delta T \quad (1)$$

$$1) T_1 - \text{по гориз. плоск., } \omega_1 = \frac{V_0}{r}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} J_m \omega_1^2 + \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2}{5} r^2 \cdot \frac{V_0^2}{r^2} + V_0^2 \right) = \frac{7}{10} m V_0^2$$

$$2) T_2 - \text{показ. вокруг } B, \text{ амплит. } T_1: T_2 = \frac{7}{10} m V^2$$

$$V^2 = gr \cos \psi_0 \Rightarrow T_2 = \frac{7}{10} m gr \cos \psi_0$$

$$\text{ноум. в (1): } mgr(1-\cos \psi_0) = \frac{7}{10} m (gr \cos \psi_0 - V_0^2)$$

$$gr - gr \cos \psi_0 = \frac{7}{10} gr \cos \psi_0 - \frac{7}{10} V_0^2 \Rightarrow \cos \psi_0 = \frac{10}{17} + \frac{7}{17} \frac{V_0^2}{gr}$$

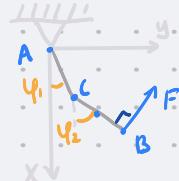
$$\psi_0 = \arccos \left(\frac{10}{17} + \frac{7}{17} \frac{V_0^2}{gr} \right) \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \arccos \left(\frac{10}{17} + \frac{7}{17} \frac{V_0^2}{gr} \right), \frac{V_0^2}{gr} \leq 1$$

$$7.42. 0 \leq \alpha \leq \arccos \left(\frac{7}{17} \frac{V_0^2}{gr} + \frac{10}{17} \right), \frac{V_0^2}{gr} \leq 1.$$

7.59. Двойной плоский маятник состоит из двух одинаковых шарнирно соединенных между собой стержней AC и CB длины l . Положение системы определяется углами φ_1, φ_2 между неподвижной осью Ax и стержнями. В точке B стержня CB под прямым к нему углом приложена постоянная по величине сила F . Выяснить, является ли сила F потенциальной.

Дано: $AC = CB = l$
 $\varphi_1, \varphi_2, F = \text{const}$
 $F - \text{нормальная?}$

7.59. F – непотенциальная сила.



$$\cos \psi_1 = c_1, \sin \psi_1 = s_1$$

$$\cos \psi_2 = c_2, \sin \psi_2 = s_2$$

$$\delta A = (\bar{F} \cdot \bar{V}_1) dt + ([CB \times F] \cdot \dot{\psi}_2) dt$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_A + \dot{\psi}_1 \times \bar{AC} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & c_1 \\ 0 & s_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}_1 s_1 \\ \dot{\psi}_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

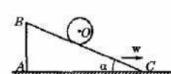
$$\bar{F} \cdot \bar{V}_c = F S_2 \dot{\psi}_1 f s_i + F C_2 \dot{\psi}_1 f c_i = F \dot{\psi}_1 f \cos(\psi_1 - \psi_2) = F \dot{\psi}_1 f C_{12}$$

$$\int A = F \ell \dot{\psi}_1 C_{12} dt + F \ell \dot{\psi}_2 dt = F \ell C_{12} d\dot{\psi}_1 + F \ell d\dot{\psi}_2$$

Even F-not zero, to $\delta A = -dU$:

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{\psi}_1} = F \ell C_{12}, \quad \frac{\partial U}{\partial \dot{\psi}_2} = F \ell, \quad 0 = \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{\psi}_1 \partial \dot{\psi}_2} \neq \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{\psi}_2 \partial \dot{\psi}_1} = F \ell S_{12} \Rightarrow \nabla U \Rightarrow F\text{-Knot.}$$

9.8. Клин ABC движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением w . На наклонную грань BC клина, образующую угол α с горизонтом, помещается с нулевой относительной скоростью однородный цилиндр, который может катиться по этой грани без скольжения. При каком ускорении клина цилиндр будет двигаться вверх?



Дано: $\bar{w} = \text{const}$
 α , без скольж.,
 движ. вверх,
 $w = ?$



$$B(0) \text{ Клин: } m\bar{w}^r = \bar{F} - \underline{\bar{m}\bar{w}^e} - \underline{\bar{m}\bar{w}^c}$$

$$\bar{J}^e = -m(\bar{w} + \bar{\epsilon} \times \bar{p} - \omega^2 \bar{p}) = -m\bar{w}$$

$$\bar{J}^L = -2m\bar{w} \times \bar{v}^r = \bar{0}$$

Выведите любое обясн.



Моменты параллельных сил, имеющие ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ движ. на одинак. расл. dm , уравновес. друг друга ($M_{se}^{se} = 0$)

Момент инерции, \Rightarrow это же происходит
 вокруг Т.О.

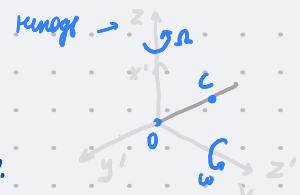
J^e - однородное

$$\dot{K}_p = M_p^{se} + M_p^{ng} = m\bar{w} \cdot r \cdot \sin(\varphi - \alpha) - m g r \sin \alpha > 0 \Rightarrow \bar{w} > g \operatorname{tg} \alpha$$

9.8. $w > g \operatorname{tg} \alpha$

9.25. Тонкий стержень вращается с постоянной по величине угловой скоростью Ω вокруг горизонтальной оси Oy , проходящей перпендикулярно стержню через его точку O . Ось Oy в свою очередь вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью ω . На стержень наложен колечко, размерами которого можно пренебречь. Составить дифференциальное уравнение движения колечка относительно стержня, определяя его положение расстоянием s от точки O . Коэффициент трения между колечком и стержнем равен f . В начальный момент стержень занимал вертикальное положение.

$$m\bar{w}^r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_{tp} + \bar{J}^e + \bar{J}^c$$



Дано: $\bar{w} = \text{const}$,
 $\bar{\Omega} = \text{const}$,
 $Oy = s$,
 f ,
 Нач. нач. вверх

$$OC = s, \bar{V}^r = \dot{s}, \bar{w}^r = \ddot{s}$$

$$\bar{w}^r = \bar{w}, \bar{w}^e = \bar{\Omega}, \bar{w}^a = \bar{w} + \bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \omega t \\ \Omega \sin \omega t \\ \omega \end{bmatrix} - \text{б. } Ox'$$

$$\bar{E}^a = \bar{\Omega} \times \bar{w} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \omega t & 0 & \omega \cdot \Omega \sin \omega t \\ \Omega \sin \omega t & 0 & -\omega \Omega \cos \omega t \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix}$$

Поправить

$$\bar{w}^e = \bar{w}^0 + \bar{E}^a \times \bar{OC} + \bar{w}^a \times (\bar{w}^0 \times \bar{OC}) = \begin{bmatrix} \omega \cdot \Omega \sin \omega t & s \cdot \Omega \cos \omega t & (\Omega \cos \omega t & s \\ -\omega \cdot \Omega \cos \omega t & 0 & \Omega \sin \omega t \times 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \Omega \cos \omega t & 0 & -(w^2 + \Omega^2 \sin^2 \omega t) \\ 0 & + \Omega \sin \omega t \times s \omega & s \omega & s \cdot \Omega^2 \sin \omega t \cos \omega t \\ s \omega \cdot \Omega \cos \omega t & \omega & -s \Omega \sin \omega t & 2 \omega \Omega \cos \omega t \end{bmatrix}$$

$$\bar{W}^k = 2 \cdot \bar{W}^a \times \bar{V}^r = 2 \begin{vmatrix} \cos \omega t & \dot{s} \\ \sin \omega t & 0 \end{vmatrix} = 2 \dot{s} \cdot \begin{matrix} 0 \\ -\Omega \sin \omega t \end{matrix}$$

$$\bar{g} = \begin{matrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \\ 0 \end{matrix}$$

$$\bar{F}_{Tp} = -f N \begin{bmatrix} \operatorname{sign}(\dot{s}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Н уравновешивает траектории сил на $y'uz'$

$$N^2 = [m(-s\Omega^2 \sin \omega t + 2\dot{s}\omega + g \sin \omega t)]^2 + [2m\Omega(s\omega \cos \omega t + \dot{s} \sin \omega t)]^2$$

$$23H \text{ на } x': \ddot{s} = -g \cos \omega t + s(\omega^2 + \Omega^2 \sin^2 \omega t) - \frac{1}{m} f N \operatorname{sign}(\dot{s})$$

$$9.25. \ddot{s} - s[\omega^2 + \Omega^2 \sin^2 \omega t] = g \cos \omega t - f N \operatorname{sign}(\dot{s}), \text{ где}$$

$$N^2 = [m(2s\omega - s\Omega^2 \sin \omega t + g \sin \omega t)]^2 + [m\Omega(2s\omega \cos \omega t + \dot{s} \sin \omega t)]^2$$

8.11. Материальная точка массы m движется в центральном поле под действием силы $F_r = \frac{\alpha m}{r^2}$ ($\alpha = \text{const}$). При каком значении момента импульса K_0 траектория является окружностью $r = 2R \cos \varphi$? Показать, что такая траектория невозможна для других потенциальных центральных сил.



Дано: $F_r = -\frac{\alpha m}{r^2}$
 $\alpha = \text{const}$
 $r = 2R \cos \varphi$
 $K_0 = ?$

1) Физика: $U'' + U = -\frac{F(u)}{mc^2 u^2}$, где $U = \frac{1}{r} = \frac{1}{2R \cos \varphi}$, $C = \frac{K_0}{m}$

$$U'_\varphi = U_r \cdot r'_\varphi = -\frac{1}{r^2} \cdot (-2R \sin \varphi) = 2R U^2 \sin \varphi$$

$$U''_{\varphi\varphi} = 2R (2U \cdot 2RU^2 \sin^2 \varphi + U^2 \cos \varphi), \cos \varphi = \frac{1}{2RU}, \sin^2 \varphi = 1 - \frac{1}{4R^2 U^2}$$

$$U''_{\varphi\varphi} = 8R^2 U^3 - 8R^2 U^3 \cdot \frac{1}{4R^2 U^2} + 2RU^2 \cdot \frac{1}{2RU} = 8R^2 U^3 - 2U + U = 8R^2 U^3 - U$$

негр. л. (1): $8R^2 U^3 - U + U = -\frac{F(U)}{mc^2 U^2} \Rightarrow F(U) = -8R^2 C^2 U^5 m$

$$F(r) = -\frac{8R^2 C^2 m}{r^5} \Rightarrow \text{только для силы } F = -\frac{\alpha m}{r^5}$$

$$-\frac{8R^2 C^2 m}{r^5} = -\frac{\alpha m}{r^5} \Rightarrow \alpha = 8R^2 C^2 = 8R^2 \frac{K_0^2}{m^2} \Rightarrow K_0 = \frac{m}{R} \sqrt{\frac{\alpha}{8}}$$

$$8.11. K_0 = \frac{m}{R} \sqrt{\frac{\alpha}{8}}$$

8.22. Комета массы m движется в поле тяготения звезды массы M ($M \gg m$). Величина скорости кометы на бесконечности равна v_∞ , а прицельное расстояние — d . Найти уравнение траектории кометы и угол θ , на который отклонится её траектория, когда она снова уйдет в бесконечность.

Дано: $M \gg m$,
 V_∞, d
 $\psi_0, e, \theta?$



К задаче 8.22

$M \gg m \Rightarrow$ Комета не окажет б. на звезду

$$r = \frac{P}{1+e\cos(\psi+\psi_0)}, \text{ при } \psi=0 - \text{perihelium} \Rightarrow \psi_0=0$$

$$r = \frac{P}{1+e\cos\psi}, e > 1, \text{ т.к. } V_\infty > 0$$

$$r \gg \infty \text{ при } 1+e\cos\psi \rightarrow 0 \Rightarrow \cos\psi \rightarrow -\frac{1}{e}$$

$$\psi_0 = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$$

$$2\psi_0 - \theta = \pi \Rightarrow \theta = 2\psi_0 - \pi = 2\arccos\left(-\frac{1}{e}\right) - \pi$$

$$\cos\theta = -\cos 2\psi_0 = 1 - 2\cos^2\psi_0$$

$$K_{\infty} = dmV_\infty, E_\infty = \frac{mV_\infty^2}{2} = E_0$$

$$8.22. \theta = \arccos \frac{(v_\infty^2 d)^2 - (\gamma M)^2}{(v_\infty^2 d)^2 + (\gamma M)^2}, \gamma - \text{гравитационная постоянная.}$$

$$e^2 = \frac{d^2 m^3 V_\infty^4 + M \alpha^2}{m \alpha^2} = \frac{d^2 V_\infty^4 + \gamma^2 M^2}{\gamma^2 M^2}$$

$$\cos\theta = 1 - 2 \cdot \frac{\gamma^2 M^2}{d^2 V_\infty^4 + \gamma^2 M^2} = \frac{d^2 V_\infty^4 - \gamma^2 M^2}{d^2 V_\infty^4 + \gamma^2 M^2}$$

$$\theta = \arccos \frac{d^2 V_\infty^4 - \gamma^2 M^2}{d^2 V_\infty^4 + \gamma^2 M^2}$$

начальная энергия минимальна.

8.24. С Северного полюса под углом α к горизонту запускают снаряд. Какой должна быть величина начальной скорости v_0 , чтобы место падения снаряда имело географическую широту ϕ (географическая широта отсчитывается от экватора, в северном полушарии $\phi > 0$, а в южном $\phi < 0$)? Землю считать однородным шаром радиуса R .

К задачам 8.24 – 8.26

8.25. В условиях предыдущей задачи найти эксцентриситет $e(a, \phi)$ и фокальный параметр $p(a, \phi)$ траектории. При каких значениях α снаряд попадает на заданную широту ϕ_0 ?

Дано: α, ϕ_0, R
 $e, p - ?$
 $d(\psi_0) - ?$



$$r = \frac{P}{1+e\cos(\psi+\beta)}$$

байдукая в токе, чтобы при $\psi=0$ $r = r_{min}$

$$\beta = \left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \Rightarrow \beta = \pi - j + \psi = \frac{3\pi}{4} - \frac{\psi}{2}$$

$$(1) r = \frac{P}{1+e\cos(\psi+\beta)} \Rightarrow (2) \dot{r} = \dot{\psi} \cdot \frac{eP \sin(\psi+\beta)}{(1+e\cos(\psi+\beta))^2}$$

когда $\Psi = \frac{\pi}{2}$:

- (1) $R = \frac{P}{1 - e \sin \beta} \Rightarrow P = R(1 - e \sin \beta)$
- (2) $V_0 \cdot \sin \alpha = -\frac{V_0}{R} \cos \alpha \cdot \frac{e P \cos \beta}{(1 - e \sin \beta)^2} \Rightarrow \sin \alpha = -\cos \alpha \cdot \frac{e \cos \beta}{1 - e \sin \beta}$

$$\sin \alpha - e \sin \beta \cdot \sin \alpha = -e \cos \beta \cos \alpha \Rightarrow e \cos(\alpha + \beta) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \frac{3\pi}{4} - \frac{\Psi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\Psi}{2} + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\Psi}{2})$$

$$e = \frac{\sin \alpha}{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\Psi}{2})}$$

$$P = R(1 + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha + \beta)}) = R(\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}) =$$

$$= R(\frac{1}{1 - \tan \alpha \tan \beta}) = \frac{R}{1 + \tan \alpha \tan(\frac{\Psi}{2} + \frac{\pi}{4})}$$

$$\tan \beta = \tan(\frac{3\pi}{4} - \frac{\Psi}{2}) = -\tan(\frac{\Psi}{2} - \frac{3\pi}{4}) = -\tan(\frac{\Psi}{2} + \frac{\pi}{4})$$

Чтобы снизить помех на широту Ψ_0 , $0 < e < 1$

тогда $e=1$: $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\Psi_0}{2}) = \sin \alpha$

$$\sin \alpha - \sin(\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\Psi_0}{2}) = 0$$

$$2 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8} - \frac{\Psi_0}{4}\right) \sin\left(\frac{\Psi_0}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{8} - \frac{\Psi_0}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{8} + \frac{\Psi_0}{4} \Rightarrow$$

$$0 < \alpha < \frac{3\pi}{8} + \frac{\Psi_0}{4}$$

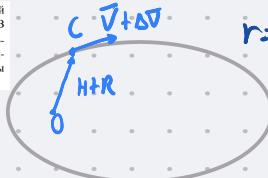
8.25. $e = \frac{\sin \alpha}{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\Psi}{2})}, P = \frac{R}{1 + \tan \alpha \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\Psi}{2})}, 0 < \alpha < \frac{3}{8}\pi + \frac{\Psi_0}{4}$.

8.52. Спутник Земли массы m движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и фокальным параметром p_0 . В положении, когда спутник находится на высоте H от поверхности Земли и имеет скорость v , ему сообщается касательный импульс $\Delta q = \lambda m v$ ($\lambda = \text{const}$). Найти параметры новой орбиты спутника.

Дано: $m, e_0, p_0, \bar{V},$

$$\Delta \bar{q} = \lambda m \bar{V}, \quad H, R$$

$p, e - ?$



$$p_0 = \frac{C_0^2}{K} = \frac{r^2 \bar{V}^2}{K}$$

$$\Delta q = \lambda m \bar{V} = m \Delta \bar{V} \Rightarrow \Delta \bar{V} = \lambda \bar{V}$$

$$C = r(1+\lambda)V_0 \quad p = \frac{C^2}{K} = \frac{r^2(1+\lambda)^2 V_0^2}{K}$$

$$p = p_0(1+\lambda)^2$$

$$E_0 = -\frac{mK}{R+H} + \frac{mV_0^2}{2}, \quad E = -\frac{mK}{R+H} + (1+\lambda)^2 \frac{mV_0^2}{2} = (1+\lambda)^2 \left[-\frac{mK}{R+H} + \frac{mV_0^2}{2} \right] - (1^2 + 2\lambda) \left(-\frac{mK}{R+H} \right) = (1+\lambda)^2 E_0 + (\lambda^2 + 2\lambda) \cdot \frac{mK}{R+H}$$

$$e_0^2 - 1 = \frac{2E_0 C_0^2}{mK^2}, \quad C = (1+\lambda) \cdot C_0$$

$$e^2 = 1 + \frac{2EC^2}{mK^2} = 1 + (1+\lambda)^2 \frac{2EC^2}{mK^2} = 1 + (1+\lambda)^2 \left[(1+\lambda)^2 \cdot \frac{2E_0 C_0^2}{mK^2} + 2(\lambda^2 + 2\lambda) \cdot \frac{mK}{R+H} \right]$$

$$\cdot \frac{mK}{R+H} \cdot \frac{C^2}{mK^2} = 1 + (1+\lambda)^2 \left[(1+\lambda)^2 (e_0^2 - 1) + (\lambda^2 + 2\lambda) \cdot \frac{2p_0}{R+H} \right]$$

8.52. $p = p_0(1+\lambda)^2, \quad e^2 = 1 + (1+\lambda)^2 \left[e_0^2 - 1 + \frac{2p_0}{R+H} (\lambda^2 + 2\lambda) \right], \quad R - \text{радиус Земли.}$

