УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория функций комплексного переменного**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу составил
к.ф.-м.н., доцент А. Э. Бунаков

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 10 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Комплексные числа. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Последовательности и ряды. Понятие функции комплексного переменного. Непрерывные функции.
2. Дифференцирование по комплексному переменному. Условия Коши–Римана. Понятие функции регулярной в области. Сопряженные гармонические функции двух переменных.
3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, показательная и тригонометрическая, их свойства. Теорема об обратной функции. Понятие о многозначной функции и ее регулярных ветвях. Главные регулярные ветви многозначных функций $\sqrt[n]{z}$ и $\mathrm{Ln}z$.
4. Комплексное интегрирование. Интеграл по кривой и его свойства. Интегральная теорема Коши для регулярных функций.
5. Интегральная формула Коши. Интеграл Коши, его регулярность.
6. Первообразная, условия ее существования. Формула Ньютона–Лейбница. Теорема Мореры.
7. Степенные ряды. Первая теорема Абеля. Радиус и круг сходимости степенного ряда. Разложение в степенной ряд функции, регулярной в круге. Теорема единственности для регулярных функций.
8. Локально равномерная сходимость. Теоремы Вейерштрасса.
9. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции регулярной в кольце. Единственность разложения. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.
10. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация. Определение характера особой точки по главной части ряда Лорана. Теорема Сохоцкого.
11. Вычеты. Теоремы Коши о вычетах. Формулы для вычисления вычетов. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана. Целые функции и их свойства.
12. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры. Теорема о локальной структуре отображения. Однолистность и многолистность в малом. Принцип сохранения области. Принцип максимума модуля регулярной функции. Принцип максимума и минимума гармонической функции.
13. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Критерий конформности отображения в конечной точке. Понятие конформного отображения в области, лежащей в расширенной комплексной плоскости. Принцип соответствия границ. Теорема Римана (без доказательства).
14. Дробно-линейные функции и их свойства.
15. Конформные отображения с помощью элементарных функций. Функция Жуковского и ее свойства.

Литература

Основная

1. *Половинкин Е.С.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : ИНФРА-М, 2023.
2. *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : Лаборатория знаний, 2016.

Дополнительная

3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Москва : Наука, 1973.
4. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : Наука, 1982.
5. *Горяйнов В. В., Половинкин Е. С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : МФТИ, 2017.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного — Москва : Бином. Лаб. знаний, 2006, 2009.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября — 04 октября)

I. Комплексные числа

§1: 1($\underline{2}$, 4); 2(2, 3, $\underline{4}$); 3(4); $\underline{4(2)}$; 5(4); 6; 7(3); 9(3,$\underline{4}$); 10(7, 9); 18*.

II. Элементарные функции. Функциональные ряды

§3: 8(1, 2, 4); 9(3, $\underline{4}$, 8); 11(1, 2, $\underline{3}$, 4); 12(1, 2); 13($\underline{1}$, 3); 14(1, 4); 17($\underline{1}$, 4, 8); 19(3).

§4: 6(4).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

§5: 1($\underline{2}$, 4, 6); 6(2, $\underline{5}$); 7(1, 6); 13($\underline{1}$, 2); 17(3, $\underline{6}$).

IV. Ряд Тейлора

§7: 4; 5*; 6($\underline{6}$); 11(1, $\underline{4}$); 12(1).

V. Теорема единственности

§9: 2(1, 2, $\underline{5}$, 11, 12); 13($\underline{5}$, 8).

1. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено $f^{(n)}(z) = 0$. Доказать, что f – многочлен степени меньше n.

2*. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G, и для любого $z \in G$ существует натуральное число n такое, что $f^{(n)}(z) = 0$. Верно ли, что $f(z)$ – многочлен?

3. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, гармонические в области D, совпадают в ней в окрестности некоторой точки $(x_0, y_0) \in D$. Доказать, что эти функции тождественно равны друг другу в области D.

4. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, гармонические в области D, совпадают в ней на бесконечном множестве точек E, имеющем предельную точку в D. Верно ли, что эти функции тождественно равны друг другу в области D?

VI. Ряд Лорана

§11: 1(6); 2(1, <u>4</u>, 6); 3(1, <u>6</u>); <u>4(4)</u>; 5(4); 7(3); <u>8(6)</u>; 9(2); <u>10(6)</u>.

5. Доказать, что если четная функция регулярна в кольце с центром в точке $z = 0$, то ее разложение в этом кольце в ряд Лорана не содержит нечетных степеней.

77[3* (<u>21</u>)]

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 ноября)

I. Особые точки однозначного характера

§12: 1(2, 6); 2(7); 8(3, <u>7</u>); 15(4, <u>8</u>); 17(7); <u>20(5)</u>; 26(5)*.

<u>1</u>. Найти и исследовать все особые точки функции f (для полюса указать порядок)

$$f(z) = \frac{\cos^2\left(z + \frac{1}{z}\right) - \sin^2\left(z - \frac{1}{z}\right)}{\sin(2z)\cos\frac{2}{z}}\,\mathrm{th}\,\frac{1}{z+i}.$$

2*. Пусть регулярная в кольце $G = \{z|\ 0 < |z| < 1\}$ функция f такова, что найдутся действительные числа $A > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$, при которых справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^\alpha}, \quad \forall z \in G.$$

Определить тип особой точки 0 для функции f при различных α.

3. Пусть $f(w)$ — целая функция, $g(z)$ имеет существенно особую точку при $z = a$. Какого типа особую точку может иметь $f(g(z))$ при $z = a$?

II. Вычеты и вычисление интегралов

§13: 2(5); 3(4); 4(3, <u>6</u>); 5(5).

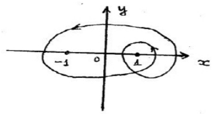
4. Вычислить, если возможно, вычеты функции $\frac{z}{\cos\frac{1}{z}}$ в точках $z = 0$ и $z = \infty$. Если невозможно, объяснить почему.

§14: 1(6); 2(2, 9, <u>17</u>, 24); 3(1).

<u>5</u>. Вычислить интеграл от функции $f(z) = \frac{z^2}{z^2-1}\sin\frac{1}{z}$:

а) по малой петле гладкого контура, изображенного на рисунке;

б) по всему контуру.



§23: 1(<u>3</u>, 5, 8); 2(8, 13, <u>20</u>).

<u>6</u>. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 3ix + 4}\, dx.$$

7. Используя равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$

вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+ix}\, dx.$$

III. Принцип аргумента и теорема Руше

§15: 1(<u>3</u>, 7, 8*, 10).

<u>8</u>. а) Найти число корней многочлена $4z^6 + 4z^3 + 9z - 4$ в круге $|z| < 1$.

б) Найти число корней уравнения $5z^3 + 6\sin(z^2) = 0$ в круге $|z| < 1$.

9. Применяя теорему Руше и теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} z^6 \left(\frac{1}{3z^4 + z + 1}\right) dz.$$

10. Пусть функция $f(z)$ непостоянна и регулярна в области D. Верно ли, что:

а) если область D односвязна, то и область $f(D)$ односвязна;

б) если D неодносвязна, то и $f(D)$ неодносвязна?

11. Пусть целая функция не принимает значений, лежащих в некоторой области G комплексной плоскости. Докажите, что эта функция постоянна.

43[3*(<u>12</u>)]

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–13 декабря)

I. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

§25: 3($\underline{3}$, 5); 6($\underline{2}$, 3); 7(2).

II. Конформные отображения

§27: 7($\underline{2}$, 3); 8(4).

§28: 5(рис. 28.31, 28.34, $\underline{28.38}$, 28.44); 10(рис. $\underline{28.51}$, 28.55, $\underline{28.61}$); 11(рис. 28.66); $\underline{13}$; 19 (рис. 28.71, $\underline{28.75}$, 28.76 28.81, $\underline{28.84}$, 28.85); 20(рис. 28.89).

1*. Определить наименьшее значение R, при котором отображение $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ конформно в области $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2i| > R\}$. Найти $f(D)$ при этом значении R.

25[1^*($\underline{9}$)]

Составитель задания к.ф.-м.н., доцент А. Э. Бунаков