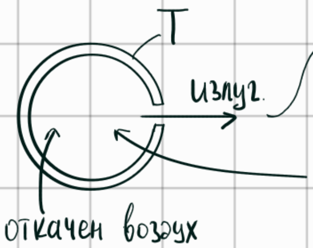
Неделя 2

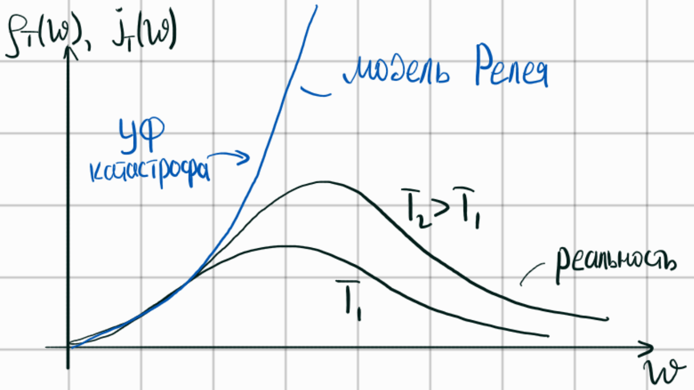
Теория. Абсолютно черное тело



$j(T)\left[\frac{эрг}{см^2 с}\right]$ – плотность потока

$\rho(T) \equiv u(T)\left[\frac{эрг}{см^3}\right]$ – объемн. плотность энергии

Также можно изучать излучение на разных частотах

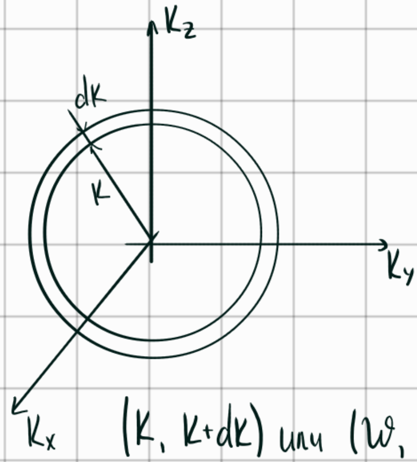


$\boxed{j(T) = \sigma T^4}$, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \frac{эрг}{с \cdot см^2 K^4}$

Число ударов молекул об стенку (терма): $Z\left[\frac{шт}{см^2 с}\right] = \frac{1}{4} n\bar{v} \xrightarrow{аналог} j\left[\frac{эрг}{см^2 с}\right] = \frac{1}{4}\rho c \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\rho(T)} = \frac{4}{c} j = \boxed{\frac{4\sigma}{c} T^4}$

Похоже ид. газу: $p = \frac{2}{3} n \overbrace{\left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle}^{u} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{3}\rho(T)}$



$(k, k+dk)$ или $(\omega, \omega+d\omega)$

волновой вектор: $k = \frac{\omega}{c}$, расcм. k-пр-во:

полное число возм. колебаний: $\boxed{dN(\omega) = 2\frac{V \cdot dV_k}{(2\pi)^3}}$ объем в k-пр-ве

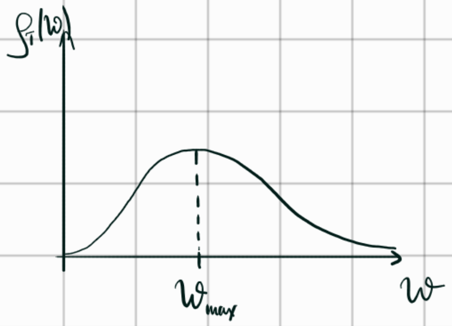
$$\rho(\omega)d\omega = \underbrace{dN(\omega)}_{\text{сколько колеб.}} \cdot \overbrace{\hbar\omega}^{\text{квант энергии}} \cdot \underbrace{\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_Б T}} - 1}}_{\text{вероятность занять место}}$$

$dV_k = 4\pi k^2 dk \Rightarrow dN(\omega) = V \cdot \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$; $\rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3 (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)}$

① Низкие частоты: $\hbar\omega \ll k_Б T$: $\rho_T(\omega) = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\omega^2$

② Высокие частоты: $\hbar\omega \gg k_Б T$: $\rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$

$$\rho(T) = \int_0^\infty \rho_T(\omega)d\omega = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{15\hbar^3 c^3} = aT^4; \qquad j(T) = \frac{c}{4} aT^4 = \sigma T^4$$

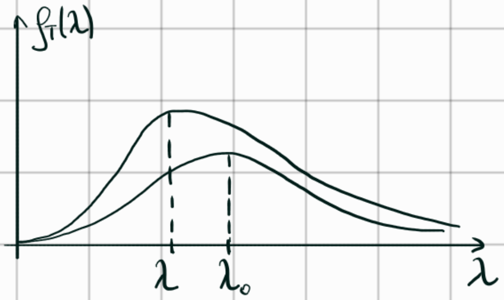


$$\omega_{max} = 2.8\frac{kT}{\hbar}, \quad \lambda_{max} = \frac{0.29}{T}, \quad \text{но} \quad \omega_{max} \neq \frac{2\pi c}{\lambda_{max}}$$

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60\hbar^3 c^2}$$

~~2~~	8 – 14 сен.	Законы излучения АЧТ	~~0-2-1~~, ~~0-2-2~~	~~11.26~~, ~~11.38~~, ~~11.50~~	~~11.44~~, ~~Т.4~~, ~~Т5~~

0-2-1. Вследствие повышения температуры положение максимума спектральной энергетической светимости абсолютно черного тела переместилось с 2 мкм на 1 мкм. Во сколько раз изменилась его интегральная энергетическая светимость?



1) $\lambda_{max} = \frac{0.29}{T} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{a}{T_0}; \quad \lambda = \frac{a}{T}$

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 2$$

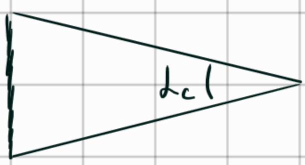
2) $\frac{j}{j_0} = \frac{\sigma T^4}{\sigma T_0^4} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 = 16$

0-2-2. Оценить давление теплового излучения во внутренней области Солнца, где температура равна T=1,3·10⁷ К.

1) $P = \frac{1}{3}\rho(T) = \frac{1}{3}\frac{4\sigma}{c}T^4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\cdot 5.67\cdot 10^{-5}}{3\cdot 10^{10}}\cdot(1.3\cdot 10^7)^4 \simeq 7.2\cdot 10^{13}\,\frac{\text{дин}}{\text{см}^2} = 7.2\cdot 10^{12}\,\text{Па}$

11.26. Оценить температуру Солнца, исходя из его видимого углового размера $\alpha_C = 0{,}01$ рад и температуры земной поверхности ($T_З \simeq 300$ К).

1) Ур-е теплового баланса:

0) 

$$\alpha_c = \frac{2R_c}{L} \Rightarrow \frac{\alpha_c}{2} = \frac{R_c}{L}$$

$$\Phi_c \frac{\Omega_З}{4\pi} = \Phi_З$$

11.26. $T_C = 2T_З\alpha_C^{-1/2} \approx 6000$ К.

$$\cancel{\sigma} T_c^4 \cdot \cancel{4\pi} R_c^2 \cdot \frac{\pi R_З^2}{L^2 \cdot 4\pi} = \cancel{\sigma} T_З^4 \cdot \cancel{4\pi} R_З^2 \Rightarrow T_c^4 \cdot \underbrace{\left(\frac{R_c}{L}\right)^2}_{\left(\frac{\alpha_c}{2}\right)^2} = 4T_З^4 \Rightarrow T_c^4 = 16\,\alpha_c^{-2} T_З^4 \Rightarrow T_c = 2\,\alpha_c^{-\frac{1}{2}} T_З = 6000\,\text{K}$$

11.38. Напряжение в сети возросло на 5%. На сколько процентов увеличится освещенность, создаваемая вакуумной лампой накаливания с температурой нити 1500 К на длине волны 500 нм? Нить считать абсолютно черным телом. Рассмотреть случаи, когда сопротивление нити $R = \text{const}$ и когда $R = R(T) = R_0 + \alpha(T - T_0)$.

1) $\sigma T^4 \cdot S = N = V^2/R \Rightarrow RT^4 \propto V^2$

2) $R = \text{const} \Rightarrow T^4 \propto V^2 \Rightarrow 4\frac{\Delta T}{T} = 2\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta V}{V} = \underline{2.5\%}$

$R \propto T \Rightarrow T^5 \propto V^2 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{5}\frac{\Delta V}{V} = \underline{2\%}$

3) $\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6.63\cdot10^{-27}\cdot3\cdot10^{10}}{5\cdot10^{-5}\cdot\underbrace{1.6\cdot10^{-12}}_{\text{в эВ}}} \simeq 2.5$ эВ

$kT = 1.38\cdot10^{-16}\cdot1500\frac{1}{1.6\cdot10^{-12}} = 0.13$ эВ $\ll \hbar\omega$ – область высоких частот $\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_T(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\underbrace{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}}_{\text{основной фактор}} \Rightarrow \rho_T(\omega) \propto e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$

$\ln\rho_T(\omega) \propto -\frac{\hbar\omega}{kT}$

4) $\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\hbar\omega}{kT^2}\Delta T;$

$R = \text{const}$: $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{kT}\frac{\Delta V}{V} \simeq 48\%$

$R \propto T$: $\frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{5}\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{2}{5}\frac{\hbar\omega}{kT}\frac{\Delta V}{V} \simeq 38\%$

11.38. $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta j}{j} \approx \frac{2}{5}\frac{\hbar\omega}{k_Б T}\frac{\Delta V}{V} \approx 0{,}38$ (38%) — с учетом зависимости сопротивления нити от температуры, $\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{k_Б T}\frac{\Delta V}{V} \approx 0{,}48$ (48%) — без учета этой зависимости.

11.50*. Определить температуру абсолютно черного тела, спектральная яркость излучения которого равна яркости лазерного излучения с энергией в импульсе $\mathscr{E} = 1$ Дж. Считать, что расходимость лазерного пучка определяется только дифракцией на выходном отверстии, а немонохроматичность — длительностью импульса.

1) $\mathscr{E} \sim k_Б T_{эфф} \Rightarrow T_{эфф} \sim \frac{\mathscr{E}}{k_Б} \sim 10^{23}$ K – дофига $\Rightarrow k_Б T_{эфф} \gg h\nu$

2) $j_T(\omega) = \frac{c}{4}\rho_T(\omega) = \frac{c}{4}\frac{kT}{\pi^2c^3}\omega^2 = \frac{kT_э}{4\pi^2c^2}\omega^2$

$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow j_T(\omega) = \frac{kT}{4\pi^2c^2}\frac{4\pi^2c^2}{\lambda^2} = \frac{kT_э}{\lambda^2}$

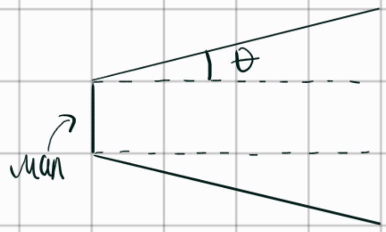
3) Из оптики: ламбертовский излучатель ⇒

$$\Rightarrow j_T(\omega) = \pi B \quad \Rightarrow B_T(\omega) = \frac{kT_э}{\pi\lambda^2}$$

4) Теперь рассмотрим лазер:

$$j_л = \frac{\xi}{S\tau}, \quad S = \frac{\pi D^2}{4} \quad \Rightarrow \quad j_л = \frac{4\xi}{\pi D^2 \tau}$$

5) Угол расхождения дифракц. пучка лазера: $\theta \approx 1.22\frac{\lambda}{D} \sim \frac{\lambda}{D}$



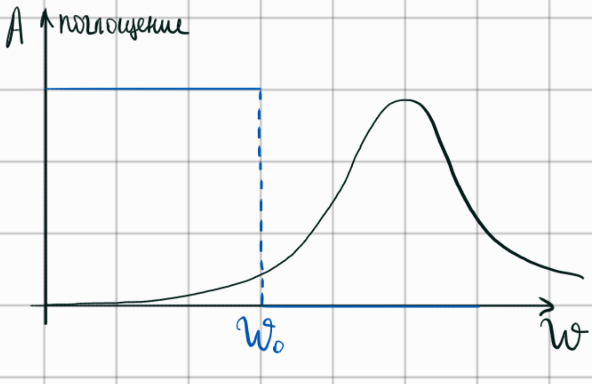
$$\Delta\Omega = 2\pi(1-\cos\theta) \approx \pi\theta^2 \simeq \pi\left(\frac{\lambda}{D}\right)^2$$

$$B = \frac{d^2\Phi}{d\Omega\, dS \cos\theta}$$ - яркость

$$B^{лаз}_\omega = \frac{j}{d\Omega\, d\omega} = \frac{(\xi/S\tau)}{\pi(\lambda/D)^2\cdot(2\pi/\tau)} = \frac{2\xi}{\pi^3\lambda^2}$$

6) $$B^{лаз}_\omega = B^{тела}_\omega \Rightarrow \frac{kT}{\pi\lambda^2} = \frac{2\xi}{\pi^3\lambda^2} \Rightarrow T_{эфф} = \frac{2\xi}{\pi^2 k} \approx \frac{2\cdot 1}{9\cdot 1.38\cdot 10^{-23}} \approx 1.47\cdot 10^{22}$$

11.44. Поверхность некоторого тела приготовлена таким образом, что коэффициент поглощения электромагнитного излучения $A = 1$ для частот $\omega \leqslant \omega_0$ и $A = 0$ при $\omega > \omega_0$. Это тело помещено в вакуум и в отсутствие других источников излучения нагревается за счет внутреннего источника энергии до температуры T. Определить эту температуру, если известно, что для такого же тела с абсолютно черной поверхностью в тех же условиях равновесная температура $T^* = 300$ К. Граничная частота соответствует температуре $\theta = \hbar\omega_0/k_Б = 300$ К.



1) Рассм. абс черное тело:

$$\sigma T^{*4} S = N$$ - мощность внутр. ист.

$$\omega^{АЧТ}_{max} = 2.8\frac{kT^*}{\hbar} = 2.8\omega_0$$

2) Рассм. данное тело: $\omega_{max} > \omega^{АЧТ}_{max}$ - очев. т.к. меньше рассеивается ⇒

$$\omega_{max} > 2.8\omega_0 \Rightarrow$$

3) $\Rightarrow$ Из графика видно, что излучают только низкие частоты

$$\rho_T(\omega)=\frac{kT}{\pi^2c^3}\omega^2; \qquad j_T(\omega)=\frac{c}{4}\frac{kT}{\pi^2c^3}\omega^2$$

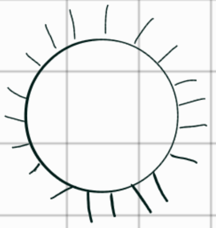
$$j_{общ}=\frac{kT}{4\pi^2c^2}\int_0^{\omega_0}\omega^2 d\omega=\frac{kT\omega_0^3}{12\pi^2c^2}$$

4) $$\frac{kT}{12\pi^2c^3}\omega_0^3 S=N=\sigma T^{*4}S, \qquad \sigma=\frac{\pi^2k^4}{60\hbar^3c^2}$$

$$\frac{kT}{12\pi^2c^3}\omega_0^3=\frac{\pi^2k^4}{60\hbar^3c^2}T^{*4} \Rightarrow T=\frac{\pi^4}{5}\frac{k^3T^{*4}}{\hbar^3\omega_0^3}=\frac{\pi^4}{5}\frac{T^{*4}}{\theta^3}=\frac{3.14^4}{5}\cdot\frac{300^4}{300^3}\approx 5840\text{K}$$

11.44. $T=\dfrac{\pi^4}{5}\dfrac{k_Б^3T^{*4}}{\hbar^3\omega_0^3}=\dfrac{\pi^4}{5}\dfrac{T^{*4}}{\theta^3}\approx 5840$ К.

Т.4. Нитинол (сплав никеля и титана) обладает эффектом "памяти формы": он восстанавливает ее при нагреве выше температуры t=130 °С. Проволока из нитинола, подогреваемая пропускаемым через неё током, используется в качестве привода для раскрытия антенн космических аппаратов. Насколько различаются токи через проволоку, необходимые для запуска такого привода у искусственного спутника Земли, находящегося на теневой и солнечной сторонах геостационарной орбиты? Температуру проволоки считать однородной по объему, сопротивление — не зависящим от температуры. Солнечная постоянная равна J=1,4·10^3 Вт/м^2. Диаметр проволоки d = 1,5 мм удельное сопротивление ρ=0,8·10^{-6} Ом м, коэффициент серости ε = 0,66. Считать, что на солнечной стороне орбиты проволока находится на освещённой стороне спутника. Тепловым излучением Земли на геостационарной орбите и тепловым излучением корпуса спутника можно пренебречь



Все энергии смотрим на см (погонные)

1) $N_c=J\cdot d\cdot\varepsilon$

$N_{тока}=I^2\frac{\rho}{\pi d^2/4}$

$N_{отдали}=\sigma t^4\cdot\pi d\cdot\varepsilon$

2) $N_{тока}=N_{отд} \Rightarrow I^2\frac{\rho}{\pi d^2/4}=\sigma t^4\pi d\cdot\varepsilon \Rightarrow I_0=\frac{1}{2}\pi d t^2\sqrt{\frac{\varepsilon\sigma d}{\rho}}=3.2\text{A}$

3) $N_c+N_{тока}=N_{отд} \Rightarrow I^2\frac{\rho}{\pi d^2/4}+Jd\varepsilon=\sigma t^4\pi d\varepsilon$

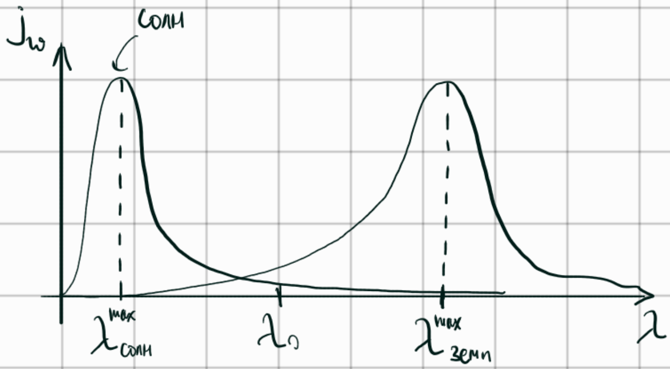
$$I^2=\frac{1}{4}\frac{\pi d^2}{\rho}\left(\sigma t^4\pi d\varepsilon-Jd\varepsilon\right)=\frac{1}{4}\frac{\pi^2d^3\sigma t^4\varepsilon}{\rho}\left(1-\frac{J}{\pi\sigma t^4}\right)=I_0^2\left(1-\frac{J}{\pi\sigma t^4}\right)$$

$$\Delta I=I_0\left(1-\sqrt{1-\frac{J}{\pi\sigma t^4}}\right)=0.52\text{A}$$

Ответ: $\Delta I=I_0\left(1-\sqrt{1-\dfrac{J}{\pi\sigma T^4}}\right)=0{,}52$ А, где $I_0=0{,}5\pi dT^2\sqrt{\dfrac{\varepsilon\sigma d}{\rho}}=3{,}2$ А.

Т.5. Средняя температура поверхности Земли составляет 15°С. В результате природных процессов или влияния промышленных выбросов прозрачность атмосферы может измениться. Оценить, как изменится равновесная температура земной поверхности если прозрачность атмосферы уменьшится на 5% для излучения: а) с длиной волны меньше $\lambda_0 = 20000$ Å; б) с длиной волны более $\lambda_0 = 20000$ Å. Под прозрачностью понимается доля излучения, преодолевающая расстояние от верхних слоёв атмосферы до поверхности. Считать для оценки, что прозрачность атмосферы постоянна для $\lambda > \lambda_0$ и $\lambda < \lambda_0$

1) $j_{солн} \cdot \pi R^2 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2 \Rightarrow j_{солн} = 4\sigma T^4$



2) $\lambda^{max}_{земл} = \frac{0.29}{T}$ см $\approx \frac{0.29}{290}$ см $= 100000$ Å

$\lambda^{max}_{солн} = \frac{0.29}{T_{солн}}$ см = очень мало Å

3) Теперь уменьшается прозрачность:

а) $\lambda > \lambda_0 \Rightarrow j_{солн} = 0.95 \cdot 4\sigma T_1^4 \Rightarrow 0.95 \cdot 4\sigma T_1^4 = 4\sigma T^4 \Rightarrow T^4 = (1-0.05)T_1^4$

$\Delta T \approx \frac{1}{4} \cdot 0.05\, T \approx 4°C$ – потепление

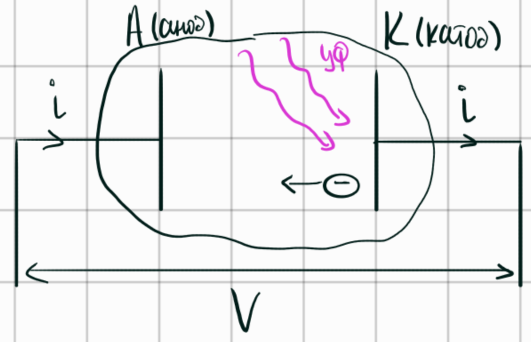
б) $\lambda < \lambda_0 \Rightarrow 0.95\, j_{солн} = 4\sigma T_2^4 \Rightarrow$ аналог $\Rightarrow \Delta T = 4°C$ похолодание

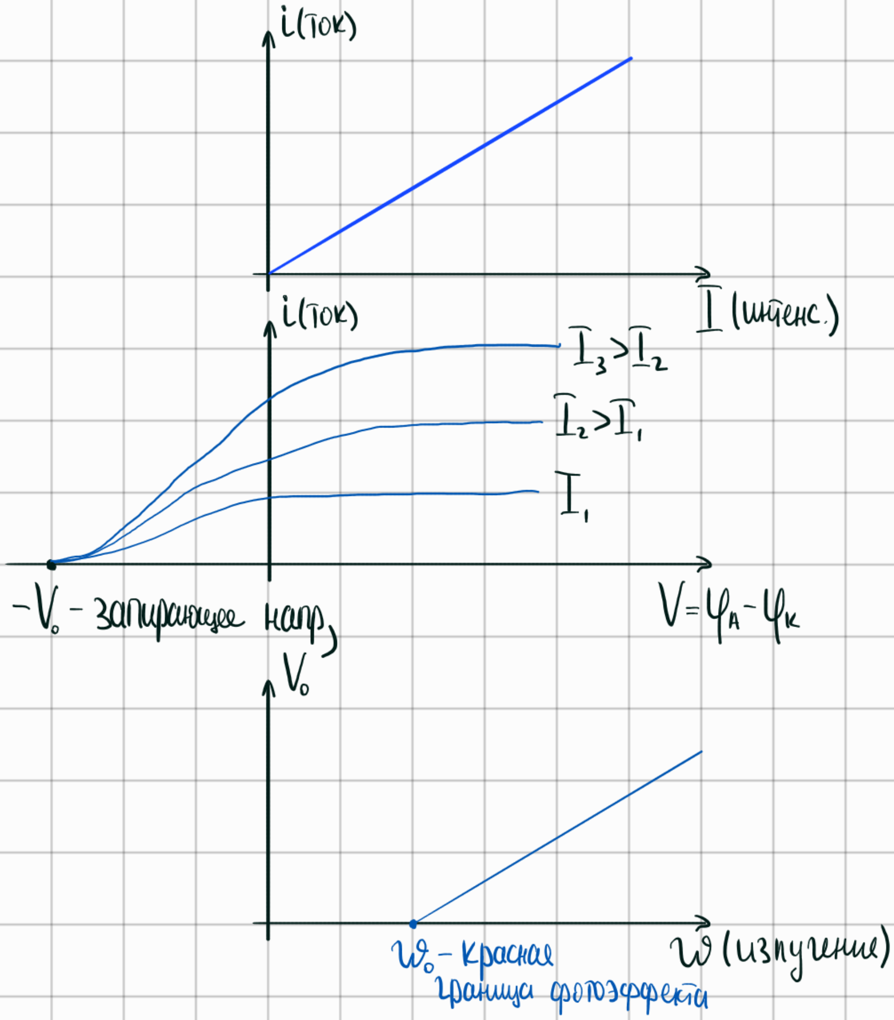
Ответ: случай а): «ядерная осень», температура понизится на 4° С;

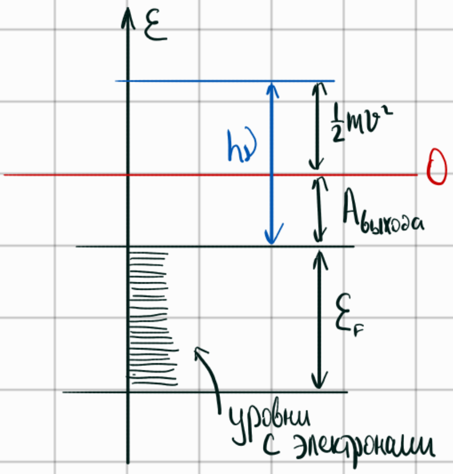
случай б): «глобальное потепление», температура повысится на 4°С

Неделя 1

Теория. Фотоэффект. Эффект Комптона







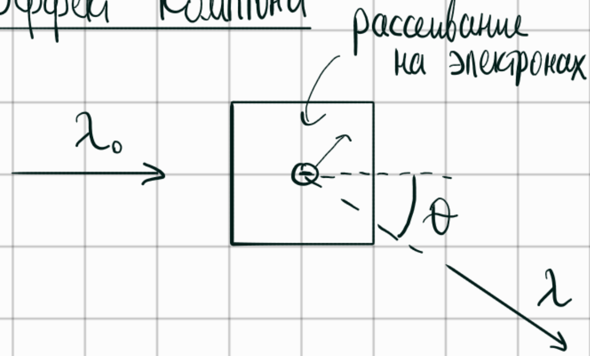
$$h\nu \equiv \hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} = A + \frac{1}{2}mv^2; \qquad h\nu_0 = A$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \hbar(\omega - \omega_0) = e(V_0 + V_c)$$

контактные напр. для каждого материала

преодолеть $\varphi_A - \varphi_K$

Эффект Комптона



$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda_e(1-\cos\varphi) = 2\pi ƛ_e(1-\cos\varphi)$$

$$\Lambda_e = 2.426 \cdot 10^{-10}\ \text{см} = \frac{h}{m_e c}$$

$$ƛ_e = 3.86 \cdot 10^{-11}\ \text{см} = \frac{\hbar}{m_e c}$$

1	1 – 7 сен.	Фотоэффект. Эффект Комптона.	~~0-1-1~~, ~~0-1-2~~	~~1.7~~, ~~Т1~~, Т2, ?	~~1.35~~, ~~1.48~~, Т3,

0-1-1. В опытах П. Н. Лебедева, доказавшего существование светового давления, падающий световой поток составлял $S = 6$ Вт/см^2. Вычислить давление, которое испытывали зачернённые и зеркальные лепестки его измерительной установки.

1) Посчитаем кол-во фотонов в сек на см^2:

$\hbar\omega_0 \cdot N = S \Rightarrow N = \frac{S}{\hbar\omega_0}$, $N = \frac{d^2n}{dS\,dt}$, n - кол-во

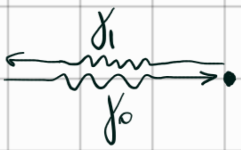
2) $p_{черн} = \frac{\hbar\omega_0}{c}$ $p_{зерк} = 2p_{черн}$ – очев из механики

3) $P_{черн} = N \cdot p_{черн} = \frac{S}{c} = \frac{6\cdot10^4}{3\cdot10^8} = 2\cdot10^{-4}$ Па $=$ 200 мкПа

$P_{зерк} = \frac{2S}{c}$ $= 4\cdot10^{-4}$ Па $=$ 400 мкПа

0-1-2. Монохроматическое гамма-излучение рассеивается на покоящихся электронах. Найти частоту излучения, рассеиваемого назад, если энергия налетающего фотона равна энергии покоя электрона.

1) $\Delta\lambda = \Lambda(1-\cos\theta)$ $\frac{\omega}{2\pi}\lambda = c$



$\theta = \pi \Rightarrow \Delta\lambda = 2\Lambda = \frac{4\pi\hbar}{mc}$

2) $\hbar\omega = mc^2 = \hbar\frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mc} = \Lambda$

3) Итого, $\lambda_{рас} = \lambda + \Delta\lambda = 3\Lambda$

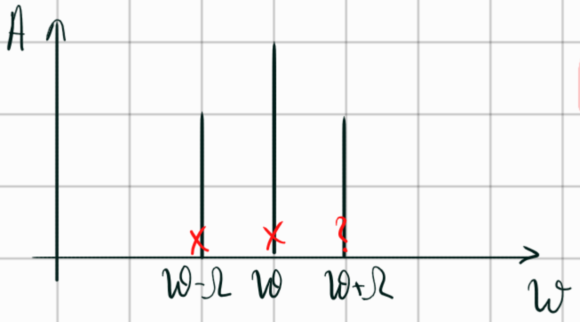
$\nu_{рас} = \frac{c}{3\Lambda} = \frac{mc^2}{6\pi\hbar} = \frac{mc^2}{3h} = \frac{9.1\cdot10^{-31}\cdot(3\cdot10^8)^2}{3\cdot6.6\cdot10^{-34}} \approx 4.1\cdot10^{19}$ Гц

1.7. Электромагнитная волна с круговой частотой $\omega = 2 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$ промодулирована по амплитуде синусоидой с круговой частотой $\Omega = 2 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$. Найти энергию $\mathscr{E}$ фотоэлектронов, выбиваемых этой волной из атомов водорода с энергией ионизации $\mathscr{E}_{\text{и}} = 13{,}6$ эВ.

Чтобы выбить электрон: $\hbar\omega > \xi_{\text{и}}$

1) До модуляции: $\hbar\omega = 6.6 \cdot 10^{-16}$ эВ$\cdot$с $\cdot\, 2 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$ $= 13.2$ эВ $< \underset{\xi_{\text{и}}}{13.6}$ эВ — не выбьет

2) После модуляции: $\hbar(\omega+\Omega) = 6.6 \cdot 10^{-16} \cdot 2.2 \cdot 10^{16}$ эВ $= 14.52$ эВ — выбьет



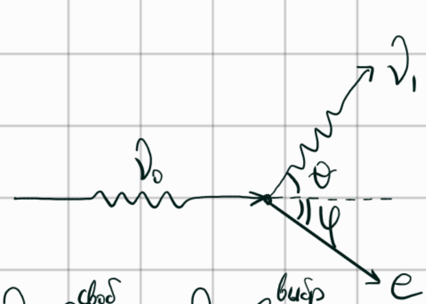
$$\xi = \hbar(\omega+\Omega) - \xi_{\text{и}} = 0.92 \text{ эВ}$$

T.1. Детектор нейтрино SUPERKAMIOKANDE (Япония) используется для детектирования нейтрино с энергией выше 3.5 МэВ. При взаимодействии нейтрино с водой, наполняющей детектор, выбиваются энергичные электроны, которые производят обнаруживаемое датчиками черенковское излучение. Определить максимальный угол (по отношению к направлению движения исходного нейтрино), под которым движутся производящее черенковское излучение электроны отдачи при энергии нейтрино, равной порогу детектирования. Показатель преломления воды $n = 1.333$, нейтрино считать безмассовыми частицами.

Ответ: $\Theta_{\max} \simeq 59°$

1) Граничное усл-е черенковского свечения: $v = \dfrac{c}{n}$

2) $E_e = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1 - 1/n^2}} \approx 1.51\, mc^2$



$\nu_0 + e^{своб} \to \nu_1 + e^{выбр}$

3) $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

$$p_e = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2c^4} = \sqrt{1.51^2 - 1}\, mc \approx 1.13\, mc$$

4) ЗСЭ: $E_0 + m_e c^2 = E_1 + E_e$

$(E_1 = p_1 c$, т.к. $m_1 = 0)$

ЗСИ: $p_0 = p_1 \cos\theta + p_e \cos\varphi \quad | \cdot c \quad \Rightarrow \quad E_0 = E_1 \cos\theta + p_e c \cos\varphi$

$$p_1 \sin\theta = p_e \sin\varphi \quad \Rightarrow \quad E_1 \sin\theta = p_e c \sin\varphi$$

5) $\begin{cases} E_0 + m_e c^2 = E_1 + E_e \\ E_0 = E_1 \cos\theta + p_e c \cos\varphi \\ E_1 \sin\theta = p_e c \sin\varphi \end{cases}$ $\quad E_0 = 3.5$ МэВ $\quad E_1, \theta, \varphi - ?$

$p_e c = 1.13\, m_e c^2 \approx 0.574$ МэВ

$E_e = 1.51\, m_e c^2 = 1.51 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot \underbrace{6.2 \cdot 10^{18}}_{эВ} \approx 0.767$ МэВ

Math: $(E_0 - p_e c \cdot \cos\varphi)^2 = (E_1 \cos\theta)^2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} E_0^2 - 2p_e c E_0 \cos\varphi + p_e^2 c^2 \cos^2\varphi = E_1^2 \cos^2\theta \\ p_e^2 c^2 \sin^2\varphi = E_1^2 \sin^2\theta \end{array} \right| \Rightarrow$

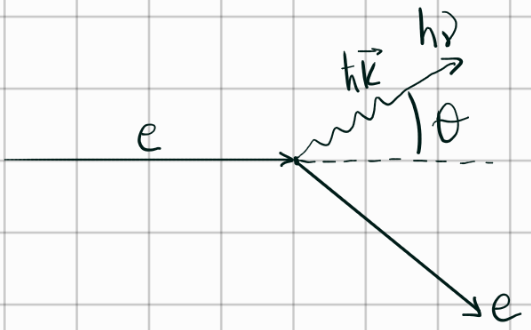
$$\Rightarrow E_0^2 - 2p_e c E_0 \cos\varphi + p_e^2 c^2 = E_1^2 = (E_0 + m_e c^2 - E_e)^2$$

$$\cos\varphi = \frac{E_0^2 + p_e^2 c^2 - (E_0 + m_e c^2 - E_e)^2}{2 p_e c E_0} = \frac{3.5^2 + 0.574^2 - (3.5 + 0.5 - 0.767)^2}{2 \cdot 0.574 \cdot 3.5} = 0.53$$

$$\varphi \approx 58^\circ$$

Т.2. Покажите, что электрон, движущийся в среде с показателем преломления $n > 1$ со скоростью $V > c/n$, способен излучать фотоны (излучение Вавилова—Черенкова). Найдите энергию фотона $\varepsilon(\theta)$ в зависимости от направления излучения θ относительно исходного направления движения электрона. Каково максимально возможное значение $\theta_{\max}$? Энергию фотона считать малой по сравнению с энергией покоя.

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{mc^2}{n^2}\left(\cos\theta - \dfrac{c}{nV}\right)$, $\theta_{\max} = \arccos\dfrac{c}{nV}$



1) ЗСЭ: $E_0 = E_1 + \hbar\omega$

2) ЗСИ: $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \hbar\vec{k}$, $\quad |k| = \dfrac{\omega}{\upsilon_{ср}} = \dfrac{n\omega}{c}$

3) $\left. \begin{array}{l} E_0^2 = p_0^2 c^2 + m_e^2 c^4 \\ E_1^2 = p_1^2 c^2 + m_e^2 c^4 \end{array} \right| \Rightarrow (p_0^2 - p_1^2) c^2 = E_0^2 - E_1^2$

4) Math: $p_0^2 - 2\hbar \vec{k}\vec{p}_0 + \hbar^2 k^2 = p_1^2 \qquad (\vec{k}, \vec{p}_0) = k \cdot p_0 \cos\theta$

$$p_0^2 - p_1^2 = \frac{E_0^2 - E_1^2}{c^2} = 2\hbar k p_0 \cos\theta - \hbar^2 k^2$$

$$E_0^2 - (E_0 - \hbar\omega)^2 = c^2 (p_0^2 - p_1^2) \rightarrow \hbar\omega (2E_0 - \hbar\omega) = c^2 (2\hbar k p_0 \cos\theta - \hbar^2 k^2)$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{\hbar\omega}{c^2}(2E_0 - \hbar\omega) + \hbar^2 k^2}{2\hbar k p_0} = \frac{2E_0 - \hbar\omega + \hbar n^2 \omega}{2ncp_0} = \frac{E_0}{ncp_0}\left(1 - \frac{\hbar\omega(n^2-1)}{2E_0}\right) \Leftrightarrow$$

5) $E_0 = \gamma mc^2$, $p_0 = \gamma mv$ $\Bigg|$ $\Leftrightarrow \cos\theta_{max} = \frac{\gamma mc^2}{nc\gamma mv} = \frac{c}{nv}$

?

6)

1.35. Фотон от рубинового лазера ($\lambda = 0{,}6943$ мкм) испытывает лобовое соударение с электроном, имеющим кинетическую энергию $T = 500$ МэВ. Оценить энергию $\mathscr{E}_\gamma$ фотона, образующегося в результате «обратного комптон-эффекта» (т. е. при 180°-рассеянии фотона на движущемся электроне). См. также задачу 4.51.

1) Чтобы применить формулу $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \Lambda_e(1-\cos\varphi)$, нужен неподвижный электрон =>

=> перейдем в СО e:

2) Эффект Доплера ($T = 500$ МэВ $\gg m_e c^2 \approx \frac{1}{2}$ МэВ – очень быстро)

$$\omega' = \omega_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \quad \text{или} \quad \lambda' = \lambda_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}},$$ – т.к. навстречу

3) $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \approx \frac{T}{mc^2} \Rightarrow \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{T}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\overbrace{\frac{mc^2}{T}}^{\alpha}\right)^2 \approx 0.9999\ldots$$

$$\lambda' = \lambda_0\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_0\left[\frac{\frac{1}{2}\alpha^2}{2-\frac{1}{2}\alpha^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha}{2}\lambda_0\left[1-\frac{1}{4}\alpha^2\right]^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\alpha}{2}\lambda_0 = \lambda_0\frac{mc^2}{2T} \approx \frac{1}{2000}\lambda_0$$

4) $\lambda' \sim 0.1$ нм

$\Lambda_e \sim 1$ пм $\ll \lambda'$

$$\Delta\lambda = \Lambda(1-\cos\varphi) = 2\Lambda \Rightarrow \tilde{\lambda}' = \lambda' + 2\Lambda \approx \lambda'$$

5) Возвращаемся в ЛСО, но теперь не навстречу, значит формула такая же

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \left(\frac{mc^2}{2T}\right)^2\lambda_0$$

6) $$\mathcal{E}_\gamma = \frac{hc}{\tilde{\lambda}} = \frac{hc}{\lambda_0}\left(\frac{2T}{mc^2}\right)^2 \approx 6.85 \text{ МэВ}$$

1.35. При условии $T \gg \hbar\omega_0$ ответ имеет вид

$$\mathscr{E}_\gamma \approx \hbar\omega_0 \frac{2T}{\frac{(m_e c^2)^2}{2T} + 2\hbar\omega_0}$$

(кинетическая энергия электрона $T \gg m_e c^2$, поэтому полная его энергия $\mathscr{E}_0 \approx T$). Здесь возможны два случая:

1) $\hbar\omega_0 \ll m_e c^2 \frac{m_e c^2}{T}$. Тогда $\mathscr{E}_\gamma \approx \hbar\omega_0\left(\frac{2T}{m_e c^2}\right)^2 \approx 6{,}85$ МэВ (этот случай и реализуется в задаче);

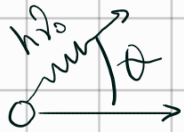
2) $\hbar\omega_0 \gg m_e c^2 \frac{m_e c^2}{T}$. Тогда $\mathscr{E}_\gamma = \hbar\omega \approx T$. В задаче этот случай не выполняется.

Задачу можно также решить, рассмотрев два последовательных перехода: в систему покоя электрона и обратно в лабораторную систему. Оба раза частота γ-кванта будет меняться за счет эффекта Доплера.

1.48. Возбужденное ядро с энергией возбуждения $\Delta\mathscr{E} = 1$ МэВ с $A = 100$ движется с кинетической энергией $T = 100$ эВ и испускает гамма–квант. Под каким углом к направлению движения ядра сдвиг γ-кванта по энергии будет равен нулю?

0) Сдвиг γ-кванта $= 0 \iff E_\gamma = \Delta E$

1) Перейдем в СО ядра:



· Эффект Доплера: $\nu_1 = \nu_0 \left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$

· ЗСЭ: $\Delta E = \frac{p^2}{2M_{ядр}} + h\nu_1$

· ЗСИ: $\frac{h\nu_1}{c} = p$

$\Rightarrow \frac{(h\nu_1)^2}{2Mc^2} + h\nu_1 - \Delta E = 0$

$h\nu_1 = \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}}\right)Mc^2$

$$h\nu_1 = Mc^2\left(-1 + \left(1 + \frac{2\Delta E}{Mc^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \simeq \Delta E - \frac{\Delta E^2}{2Mc^2} = \Delta E\left[1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right]$$

$\nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \Rightarrow \nu_1 = \nu_0\left(1 - \frac{\Delta E}{2Mc^2}\right)$, $\nu_1 = \nu_0\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$ $\Rightarrow \frac{v}{c}\cos\theta = \frac{\Delta E}{2Mc^2}$

$\cos\theta = \frac{\Delta E}{2Mv \cdot c}$

2) $v = \sqrt{\frac{2T}{M}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\Delta E}{2\sqrt{2TMc^2}} = \frac{1 \text{ МэВ}}{2\sqrt{2 \cdot 100 \text{ эВ} \cdot 1.67 \cdot 10^{-22} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 / 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ эВ}}} = 0.115$

$M = A \cdot m_p = 100 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1.67 \cdot 10^{-25} \text{ кг} = 1.67 \cdot 10^{-22} \text{ гр}$

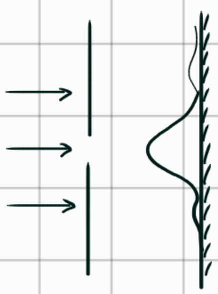
$\theta \approx 83.3°$

1.48. $\cos\theta = \frac{\Delta\mathscr{E}}{2\sqrt{2Tm_{яд}c^2}} = 0{,}116$, $\theta = 83{,}3°$; где $m_{яд}c^2 = A \cdot 931{,}5$ МэВ.

Неделя 3

Волны де Бройля

Идея: любая частица может быть волной



$$E=\hbar\omega \to \omega=\frac{E}{\hbar};\quad p=\frac{\varepsilon}{c}=\frac{\hbar\omega}{c}=\hbar k,\quad \vec{p}=\hbar\vec{k}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}=\vec{E}_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}$$

Для частицы с $\varepsilon, \vec{p}$: $\psi(x,t)=\psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px-\varepsilon t)}$ волновая ф-ция

$\psi^*\psi|_{x,t}=|\psi|^2_{x,t}$ — плотность вероятности обнаружить частицу

Соотношение неопределенностей

$$\Delta x\Delta p_x\sim\hbar$$
$$\Delta\varepsilon\Delta t\sim\hbar$$

в форме Вейля $\overline{\Delta x^2}\,\overline{\Delta p^2}\gtrsim\frac{\hbar^2}{4}$

„Чем точнее измеряете одна хар-ка частицы, тем менее точно можно измерить 2-ю"

3	15 – 21 сен.	Волны де Бройля. Соотношение неопределенностей.	~~0-3-1~~, ~~0-3-2~~	~~2.12~~, ~~2.15~~, ~~2.26~~,	~~2.30~~, ~~2.38~~, ~~2.44~~

0-3-1. Определить кинетическую энергию электрона, при которой его дебройлевская и комптоновская длины волн равны между собой.

1) $\underset{\text{фотон}}{p}=\frac{h}{\lambda}\ \overset{\text{для частицы}}{\Rightarrow}\ p=\frac{h}{\lambda_{д.б.}}\ \to\ \lambda_{д.б.}=\frac{h}{p}$

2) $\Delta\lambda=\lambda-\lambda'=\underbrace{\frac{h}{m_e c}}_{\Lambda}(1-\cos\theta);\quad \Lambda=\frac{h}{m_e c}$

3) $\frac{h}{p}=\frac{h}{mc}\ \Rightarrow\ p=mc$

4) $E^2=p^2c^2+m_e^2c^4\ \Rightarrow\ E=\sqrt{2}\,m_e c^2$

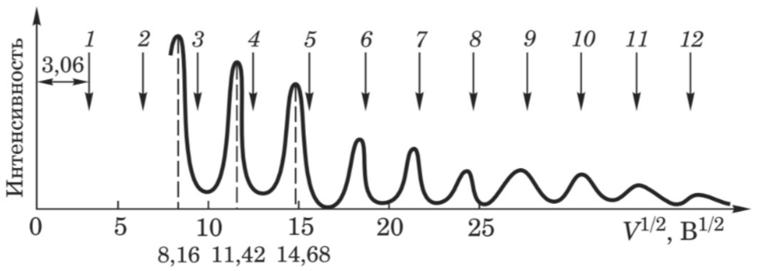
$E_k=E-m_e c^2=(\sqrt{2}-1)m_e c^2\approx 0.4\cdot 0.5\,МэВ\approx 0.2\,МэВ$

0-3-2. Исходя из соотношения неопределенностей, оцените минимальную энергию осциллятора с частотой ω.

1) $\Delta t \sim \frac{1}{\omega}$

2) $\Delta\varepsilon \Delta t \geq \hbar \Rightarrow \Delta\varepsilon_{min} \sim \hbar\omega$

2.12*. На рис. 5 приведена кривая, полученная в опытах Дэвиссона и Джермера по рассеянию электронов от монокристалла никеля, падающих под углом скольжения 80°. По оси абсцисс отложено значение $\sqrt{V}$, где V — энергия электронов в вольтах, по оси ординат — относительная интенсивность рассеянных электронов. При больших порядках отражения m максимумы эквидистантны (расстояние между ними 3,06 В$^{1/2}$), а при малых эта закономерность, показанная стрелками, нарушается. Оценить немонохроматичность используемых электронов и показатель преломления никеля для волны де Бройля электронов, соответствующих 3-му, 4-му и 5-му максимумам, которые наблюдаются при $\sqrt{V}$, равном соответственно 8,16, 11,42 и 14,68 В$^{1/2}$. Найти межплоскостное расстояние d никеля.



1) Аналогично оптике: $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{max}} = \frac{\lambda}{12}$

$E = \frac{p^2}{2m}$, $p = \frac{h}{\lambda_{g.б.}} \rightarrow E = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \propto \frac{1}{\lambda^2} \rightarrow \frac{\Delta E}{E} = -2\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \Rightarrow \left|\frac{\Delta E}{E}\right| = \frac{1}{6}$

2) Электрон разгоняется напр. $V \Rightarrow eV = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \propto \sqrt{V}$

В металле: $v_2 \propto \sqrt{V+V_0}$, где V_0 — внутр. потенц. металла

Аналогично оптике вводим: $n_{21} = n = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1+\frac{V_0}{V}}$

3) $\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \Rightarrow \sqrt{V} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda\sqrt{2me}} = \frac{12.26}{\lambda[Å]} = \frac{12.26\, m}{2d\sin\varphi\,[Å]}$

4) При $m>6$: $V_0 \ll V$: $\sqrt{V} = \frac{12.26\cdot 1}{2\cdot d\cdot \sin(80°)} \Rightarrow d = \frac{12.26}{2\cdot 3.06\cdot \sin(80°)} \approx 2.03$ Å

$n \approx 1$

5) Аналогично закону Снеллиуса:

$$n = \frac{\cos\varphi}{\sin\psi}; \quad \cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}$$

$$2d\sin\theta = m\frac{\lambda}{n} \rightarrow 2nd\sin\theta = m\lambda$$

$$2nd\cos\psi = m\lambda \rightarrow$$

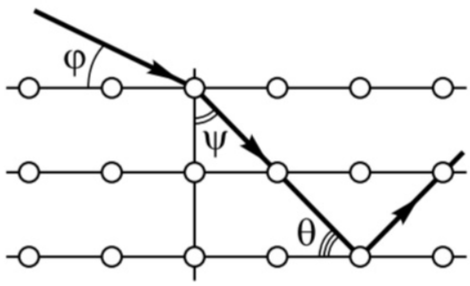
$$\rightarrow 2d\sqrt{n^2-\cos^2\varphi} = m\lambda$$

6) $$\sqrt{V'} = \frac{12.26}{2d\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}} = \frac{12.26m}{2d\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}$$

$$\sqrt{\frac{V}{V'}} = \frac{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}{\sin\varphi} \Rightarrow n = \sqrt{\frac{V}{V'}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}$$

7) Math:

m	$\sqrt{V}$, $B^{1/2}$	$\sqrt{V'}$, $B^{1/2}$	n
3	9.18	8.16	1.12
4	12.24	11.42	1.07
5	15.3	14.68	1.04



2.12* Решение. Для нерелятивистского электрона $\mathscr{E} = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \propto \frac{1}{\lambda^2}$. Поэтому искомую немонохроматичность электронов $\Delta\mathscr{E}/\mathscr{E}$ легко оценить по числу наблюдаемых отражений $m_{\max} = 12$, откуда следует $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{m_{\max}} \approx \frac{\lambda}{12}$. И далее $\left|\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}}\right| = 2\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| = \frac{1}{6}$.

Вне металла скорость электрона $v_1 \propto \sqrt{V}$, внутри металла $v_2 \propto \sqrt{V_0 + V}$, где V_0 — внутренний потенциал металла. Таким образом, показатель преломления металла

$$n = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1 + \frac{V_0}{V}}.$$

Эквидистантное расположение максимумов интенсивности отраженных электронов наблюдается, когда внутренний потенциал металла $V_0 \ll V$. Это соответствует показателю преломления кристалла $n = 1$ (для $m \geqslant 6$). В этом случае в соответствии с формулой Брэгга–Вульфа (рис. 135)

$$2d\sin\varphi = m\lambda; \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2meV}}; \quad \sqrt{V} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda\sqrt{2me}}.$$

где d следует подставлять в ангстремах [Å], а результат $\sqrt{V}$ получается в $В^{1/2}$. В нашем случае при $m = 1$ $\sqrt{V} = 3{,}06\ В^{1/2}$, и поэтому межплоскостное расстояние $d = 2{,}03$ Å. Из рис. 5 и условия задачи следует, что при $m < 6$ максимумы интенсивности неэквидистантны. Это означает, что при соответствующих энергиях показатель преломления отличается от 1.

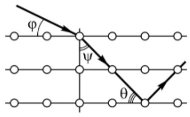


Рис. 135

Закон преломления волн де Бройля идентичен классическому закону Снеллиуса:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\psi} = n; \quad \cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}.$$

По формуле Брэгга–Вульфа $n \cdot 2d\sin\theta = m\lambda$, или $n \cdot 2d\cos\psi = m\lambda$, откуда следует

$$2d\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi} = m\lambda.$$

Обозначим через V' ускоряющий потенциал, соответствующий энергиям электронов, когда $n \neq 1$. Тогда

$$\sqrt{V'} = \frac{12{,}26}{\lambda[Å]} = \frac{12{,}26m}{2d\sqrt{n^2 - \cos^2\varphi}}.$$

Из соотношения $\sqrt{\frac{V}{V'}}$ мы и определим n: $\sqrt{\frac{V}{V'}} = \frac{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}{\sin\varphi}$, откуда $n = \left(\frac{V}{V'}\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)^{1/2}$.

Для $m = 5$; $\sqrt{V'} = 14{,}68\ В^{1/2}$; $\sqrt{V} = 15{,}3\ В^{1/2}$; $n = 1{,}04$.
Для $m = 4$; $\sqrt{V'} = 11{,}42\ В^{1/2}$; $\sqrt{V} = 12{,}24\ В^{1/2}$; $n = 1{,}07$.
Для $m = 3$; $\sqrt{V'} = 8{,}16\ В^{1/2}$; $\sqrt{V} = 9{,}18\ В^{1/2}$; $n = 1{,}12$.

2.15* Чтобы получить пучок нейтронов, обладающих заданной энергией $\mathscr{E} = 1$ эВ, используют брэгговское отражение первого порядка от кристалла LiF, для которого расстояние между плоскостями кристаллической решетки $d = 2{,}32$ Å (рис. 7). На кристалл падает пучок нейтронов с различными энергиями. Оценить разброс нейтронов по энергиям $\Delta\mathscr{E}$ в отраженном пучке, если угловая ширина этого пучка $\Delta\varphi = 0{,}1°$. Какую толщину кристалла D следует выбирать в этом эксперименте? Кристалл вырезан так, что отражающие плоскости параллельны поверхности кристалла.

1) $$\mathcal{E} = 1\ эВ, \quad \lambda_{дБ} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} = \frac{6.6\cdot10^{-27}\ эрг\,с}{\sqrt{2\cdot1.67\cdot10^{-24}г\cdot1.6\cdot10^{-12}\ эрг}} = 2.86\cdot10^{-11}м =$$

$$= 0.286\ Å$$

2) Условие Брэгга-Вульфа: $2d\sin\varphi = m\lambda$

$$m=1: \quad \sin\varphi = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0.286}{2\cdot2.32} \simeq 0.06 \Rightarrow \sin\varphi \simeq \varphi \ll 1$$

3) $$\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}; \quad \lambda \propto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} \Rightarrow \left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}}\right|$$

$$\Delta\mathcal{E} = 2\frac{\Delta\varphi}{\varphi}\mathcal{E} = 2\cdot\frac{0.1\cdot\frac{\pi}{180}}{0.06}\cdot1\ эВ \simeq 0.058\ эВ$$

2.15* $D \geqslant \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} = 82$ Å.

Решение. Согласно условию Брэгга–Вульфа первый порядок ($m = 1$) отражения соответствует углу

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{2d}.$$

Длина волны, соответствующая энергии нейтрона $\mathscr{E} = 1$ эВ, равна 0,287 Å, поэтому $\frac{\lambda}{2d} \approx 0{,}06$. Это означает, что $\sin\varphi \approx \varphi \approx 0{,}06$. Очевидно, что $\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$.

Дебройлевская длина волны $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\mathscr{E}}} \propto \frac{1}{\sqrt{\mathscr{E}}}$. Поэтому $\left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\Delta\mathscr{E}}{\mathscr{E}}\right|$, откуда

$$\Delta\mathscr{E} = 2\mathscr{E}\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2\mathscr{E}\frac{\Delta\varphi}{\varphi} \approx 0{,}057\ эВ.$$

Толщину кристалла D выберем из тех соображений, что разрешающая способность такой системы $R = mN \geqslant \lambda/\Delta\lambda$, т. е. при $m = 1$ и числе интерферирующих пучков, равном числу слоев, $N = D/d$:

$$\frac{D}{d} \geqslant \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{\lambda}{2d\Delta\varphi},$$

откуда

$$D \geqslant \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} \approx 82\ Å.$$

Приведем *другое решение* этой задачи. Рассмотрим бесконечную решетку в направлении оси X (рис. 136). Волновая функция всей решетки представляет собой плоскую волну $A\exp\left(i\frac{p_x x}{\hbar}\right)$, где p_x — импульс решетки в направлении оси X. При смещении всей решетки вдоль X на период d волновая функция умножается на $\exp\left(i\frac{p_x d}{\hbar}\right)$ и переходит сама в себя. Отсюда $p_x d = 2\pi m\hbar$, т. е. импульс, передаваемый решетке, квантован! При упругом отражении $p_x = 2p\sin\varphi$, откуда следует $2d\sin\varphi = m\frac{h}{p} = m\lambda$. Таким образом, мы получили условие Брэгга–Вульфа.

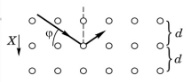


Рис. 136

Если же решетка ограничена по x, то передаваемый по X решетке импульс приобретает неопределенность $\delta p_x \geqslant h/D$. С другой стороны, $\delta p_x = 2p\,\delta(\sin\varphi) = 2p\cos\varphi\,\delta\varphi$. Поскольку $\cos\varphi \approx 1$, то

$$\delta\varphi = \frac{\delta p_x}{2p} \gtrsim \frac{h}{D\cdot 2p} \approx \frac{\lambda}{2D}.$$

Таким образом, искомая толщина кристалла $D \geqslant \frac{\lambda}{2\delta\varphi}$. Полагая $\delta\varphi \approx \Delta\varphi = 0{,}1°$, получим ответ.

4) $R = mN$ – разр. способность, $N = \frac{D}{d}$ – кол-во слоев

$R = m\frac{D}{d} \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \Rightarrow D \geq \frac{\lambda}{\Delta\lambda} d = \frac{\varphi}{\Delta\varphi} d = \frac{\lambda}{2d\Delta\varphi} d = \frac{\lambda}{2\Delta\varphi} \approx 82\,\mathring{A}$

2.26. Какова должна быть кинетическая энергия T электронов (протонов) для исследования распределения заряда и ядерной материи внутри ядра с точностью $l \sim 1$ фм (10^{-13} см), и структур с линейными размерами $l \sim 10^{-4}$ фм, что соответствует радиусу слабого взаимодействия?

1) $v \sim c \Rightarrow E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 \Rightarrow p = \sqrt{E^2/c^2 - m^2c^2}$

2) $\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar \Rightarrow p \sim \frac{\hbar}{l} \Rightarrow \frac{E^2}{c^2} - m^2c^2 \sim \frac{\hbar^2}{l^2} \Rightarrow E^2 \sim \frac{\hbar^2 c^2}{l^2} + m^2c^4$

3) $E = T + mc^2 \Rightarrow T > \sqrt{\frac{\hbar^2c^2}{l^2} + m^2c^4} - mc^2 = mc^2\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_k}{l}\right)^2} - 1\right]$, $\lambda_k = \frac{\hbar}{mc}$

для e: $\lambda_e = 3.86 \cdot 10^{-11}$ см

для p: $\lambda_p = 1.32 \cdot 10^{-13}$ см

$l \sim 10^{-13}$ | $l \sim 10^{-17}$

Электрон: $T \gtrsim \frac{1}{2}$ МэВ $\cdot 400 \approx 200$ МэВ | $T \gtrsim 2$ ТэВ

Протон: $T \gtrsim 950$ МэВ $\cdot \left(\sqrt{1 + (1.3)^2} - 1\right) \approx 600$ МэВ | $T \gtrsim 950$ МэВ $\cdot 19000 \approx 2$ ТэВ

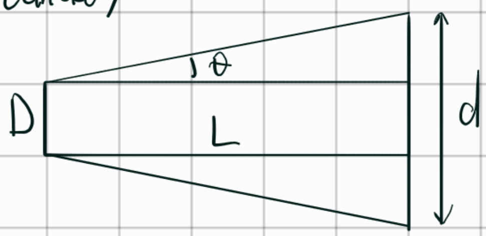
2.26. Условие разрешения объекта с характерным размером l: $\lambda_{дБ} \leqslant l$ или $h/p \leqslant l$, откуда $T > mc^2\sqrt{1 + (\Lambda/l)^2} - mc^2$, где $\Lambda = h/(mc)$ — комптоновская длина волны электрона (протона).

Для электрона: $T \gtrsim 1{,}24$ ГэВ ($l \sim 10^{-13}$ см) и $T \gtrsim 12{,}4$ ТэВ ($l \sim 10^{-17}$ см).

Для протона: $T \gtrsim 620$ МэВ ($l \sim 10^{-13}$ см) и $T \gtrsim 12{,}4$ ТэВ ($l \sim 10^{-17}$ см).

2.30. Оценить минимально достижимый диаметр d пятна, которое можно создать на детекторе пучком атомов серебра, испускаемых печью с температурой $t = 1200\,°$C. Расстояние от выходной щели печи до детектора равно $L = 1$ м. Расчет произвести: 1) исходя из волновой природы частиц в приближении Фраунгофера; 2) исходя из соотношения неопределенностей. Убедиться в эквивалентности обоих подходов.

1) Приближение Фраунгофера (оптика, экран далеко)



$\theta \sim \frac{\lambda}{D}$ – из оптики

$d = D + 2L\frac{\lambda}{D}$, найдем $d(D)_{min}$

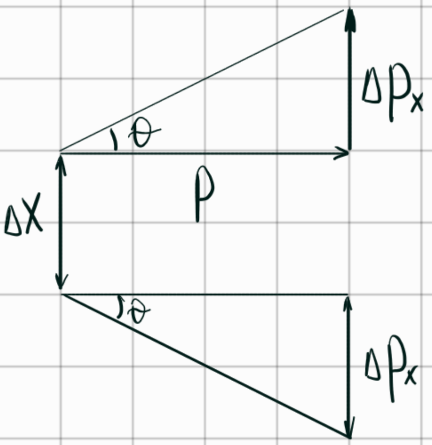
$$d' = 1 - 2L\frac{\lambda}{D^2} = 0 \Rightarrow 2L\frac{\lambda}{D^2} = 1 \Rightarrow D = \sqrt{2L\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{min} = \sqrt{2L\lambda} + \frac{2L\lambda}{\sqrt{2L\lambda}} = 2\sqrt{2L\lambda}$$

2) $\lambda_{дб} = \dfrac{h}{p}$; $\quad \dfrac{3}{2}kT = \dfrac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{3mkT}$ $\qquad {}^{47}Ag$ 107.86

$$d_{min} = 2\sqrt{2L\frac{h}{p}} = 2\sqrt{\frac{2Lh}{\sqrt{3mkT}}} = 2\cdot\sqrt{\frac{2\cdot 100\cdot 6.6\cdot 10^{-27}}{\sqrt{3\cdot 108\cdot 1.66\cdot 10^{-24}\cdot 1.38\cdot 10^{-16}\cdot(1200+273)}}} \approx 7 \text{ мкм}$$

3) Теперь из соотношения неопределенностей: $\Delta x \Delta p_x \sim \hbar$



$\theta = \dfrac{\Delta p_x}{p}$, $\quad D = \Delta x \Rightarrow \theta = \dfrac{\hbar}{p\,\Delta x} = \dfrac{\lambda}{\Delta x}$

$$d = \Delta x + 2L\theta = \Delta x + 2L\frac{\lambda}{\Delta x} = D + 2L\frac{\lambda}{D},$$

далее аналогично

2.30. $d \approx 2\sqrt{\dfrac{2hL}{\sqrt{3mkT}}} \approx 7{,}5$ мкм.

2.38. Электрон притягивается к поверхности жидкого гелия электростатическими силами изображения, потенциальная энергия которых, как известно, равна

$$U(x) = -\frac{e^2}{4x}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1},$$

где x — кратчайшее расстояние от электрона до поверхности, e — заряд электрона, $\varepsilon = 1{,}057$ — диэлектрическая проницаемость гелия (рис. 12). В то же время медленный электрон не может проникнуть внутрь гелия из-за отталкивания (так называемое отрицательное сродство гелия к электрону). Поэтому можно считать, что на поверхности ($x = 0$) потенциальная энергия испытывает бесконечный скачок и электрон оказывается в потенциальной яме (рис. 12). Пользуясь этой моделью и соотношением неопределенностей, оценить по порядку величины среднее расстояние $\langle x\rangle$ электрона от поверхности гелия в основном состоянии и энергию связи $\mathscr{E}_{св}$ электрона вблизи поверхности гелия.

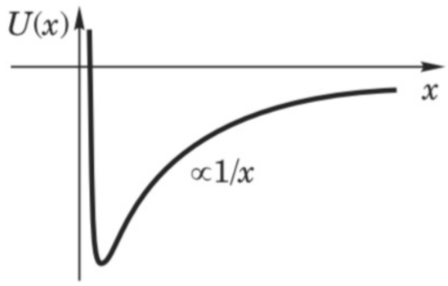


Рис. 12

1) $E = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{e^2}{4x}\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} = \dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{C}{x} = \left| px \sim \hbar \right| = \dfrac{\hbar^2}{2mx^2} - \dfrac{C}{x}$

Основное состояние: $\dfrac{dE}{dx} = 0 \Rightarrow -\dfrac{2\hbar^2}{2mx^3} + \dfrac{C}{x^2} = 0 \Rightarrow \langle x\rangle = \dfrac{\hbar^2}{mC} = 4\dfrac{\hbar^2}{me^2}\dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}$

$$x = 4\cdot\frac{(1.054\cdot 10^{-27})^2}{9.1\cdot 10^{-28}\cdot(4.8\cdot 10^{-10})^2}\cdot\frac{2.057}{0.057} \approx 76\,\text{Å}$$

2) Из модели Бора: $\frac{mv^2}{x} = \frac{\partial U}{\partial x} = F = \frac{C}{x^2} \Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{C}{x} = \frac{p^2}{2m}$

$$E_{cb} = \frac{1}{2}\frac{C}{\langle x\rangle} - \frac{C}{\langle x\rangle} = -\frac{C}{2\langle x\rangle} = -\frac{mC^2}{2\hbar^2} = -\frac{me^4}{32\hbar^2}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2 = -E_{ион}\cdot\frac{1}{16}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2 = -13.6\,эВ\cdot\left(\frac{0.057}{4\cdot 2.057}\right)^2 \approx$$
$$\approx -6.5\cdot 10^{-4}\,эВ$$

2.38. $\langle x\rangle \approx \frac{4(\varepsilon+1)}{\varepsilon-1} r_1 \approx 76$ Å, где $r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0{,}53\cdot 10^{-8}$ см — радиус первой боровской орбиты в атоме водорода. Энергия связи

$$\mathscr{E}_{св} \approx -\frac{me^4}{32\hbar^2}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2 = -\mathscr{E}_{ион}\frac{1}{16}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2 \approx -6{,}5\cdot 10^{-4}\ эВ,$$

где $\mathscr{E}_{ион} = \frac{me^4}{2\hbar^2} = 13{,}6$ эВ — энергия ионизации атома водорода.

2.44*. Действие силы на свободно движущуюся частицу массой m можно обнаружить, наблюдая изменение ее координаты во времени. Оценить в соответствии с квантово-механическими законами, какую минимальную силу, действующую по направлению движения частицы, можно обнаружить таким способом за время наблюдения τ.

1) $\Delta X_F = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{F\tau^2}{2m}$

2) В начальный момент нельзя точно найти $p_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta X_p = \frac{\Delta p_0 \tau}{m}$

$(\Delta X)^2 = \underbrace{(\Delta X_p)^2}_{\text{из-за } \Delta p_0} + \underbrace{(\Delta X_0)^2}_{\text{в } t=0}$ — сложение дисперсий

3) $(\Delta p_0)^2(\Delta X_0)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow (\Delta p_0)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4(\Delta X_0)^2} \Rightarrow (\Delta X_p)^2 \geq \frac{\hbar^2\tau^2}{4m^2(\Delta X_0)^2}$

4) $(\Delta X)^2 = \frac{\hbar^2\tau^2}{4m^2(\Delta X_0)^2} + (\Delta X_0)^2$

$\frac{d(\Delta X)^2}{d(\Delta X_0)} = 0 \Rightarrow \frac{\hbar^2\tau^2}{4m^2}\frac{2}{(\Delta X_0)^3} = 2\Delta X_0 \Rightarrow (\Delta X_0)^2_{min} = \frac{\hbar\tau}{2m}$, подставляем:

5) $(\Delta X)^2 = \frac{\hbar\tau}{2m} + \frac{\hbar\tau}{2m} = \frac{\hbar\tau}{m}$

6) $(\Delta X_F)^2 > (\Delta X)^2 \Rightarrow \frac{F^2\tau^4}{4m^2} \geq \frac{\hbar\tau}{m} \Rightarrow F \geq 2\sqrt{\frac{\hbar m}{\tau^3}}$

2.44*. $\sqrt{\frac{4\hbar m}{\tau^3}}$.

Неделя 4

$$\psi(x,t) = \psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x - Et)}, \qquad |\psi|^2 = \psi^* \psi, \qquad \int |\psi|^2 dV = 1$$

$$\langle x \rangle = \int \psi^* x \psi \, dV, \qquad \langle \varphi(x) \rangle = \int \psi^* \varphi(x) \psi \, dV$$

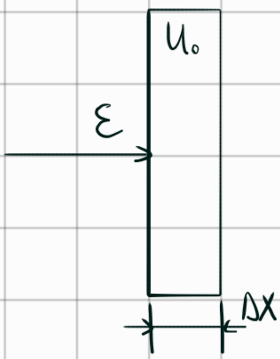
Ур-е Шредингера: $\boxed{E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x,y,z)\psi} = \hat{E}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$

$\hat{}$ – оператор, например $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, т.к. $\hat{p}_x \psi = p_x \psi$

$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$, т.к. $\hat{E}\psi = E\psi$

$$\hat{E} = \hat{T} + \hat{U}, \qquad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta, \qquad \hat{U} = U(x,y,z)$$

Туннелирование



$D = \frac{|\psi|^2_{вых}}{|\psi|^2_{вход}}$ – вероятность пройти через барьер

$|\psi|^2 \propto e^{-\frac{\Delta x}{L}}$, где $L = \frac{\hbar}{2\sqrt{2m(U_0 - \varepsilon)}}$

$$D \approx \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-\varepsilon)}\,\Delta x\right\}$$

4	22 – 28 сен.	Уравнения Шредингера. Потенциальные барьеры. Туннельный эффект	~~0-4-1~~, ~~0-4-2~~	~~3.35~~, ~~3.53~~, ~~3.56~~,	~~3.45~~, ~~Т6~~, ~~Т.7~~ ?

0-4-1. Найти минимальную кинетическую энергию электрона, при которой он без отражения пройдёт над одномерной прямоугольной потенциальной ямой глубиной $U = 2{,}5$ эВ размером $a = 2r_Б$, $r_Б$ — боровский радиус.

1) I: $\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + E\psi = 0$

$$\Delta\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0$$

$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2$

II Аналогично: $k' = \frac{\sqrt{2m(E+U)}}{\hbar}$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

2) $R = |r|^2$ – отражающий коэф. по энергии

$T = |t|^2$ – проходящий —||—

$T + R = 1$

Сложный путь (см. пункт 4)

3)

$$\psi_I = e^{ikx} - r e^{-ikx}$$

$$\psi_{II} = C e^{ik'x} - D e^{-ik'x}$$

$$\psi_{III} = t e^{ikx}$$

$$\psi_I(-a) = \psi_{II}(-a): \quad e^{-ika} - r e^{ika} = C e^{-ik'a} - D e^{ik'a}$$

$$\psi_I'(-a) = \psi_{II}(-a): \quad ik\left(e^{-ika} + r e^{ika}\right) = ik'\left(C e^{-ik'a} + D e^{ik'a}\right)$$

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a): \quad C e^{ik'a} - D e^{-ik'a} = t e^{ika}$$

$$\psi_{II}'(a) = \psi_{III}'(a): \quad ik'\left(C e^{ik'a} + D e^{-ik'a}\right) = ik t e^{ika}$$

$$2 C e^{ik'a} = \left(1 + \frac{k}{k'}\right) t e^{ika} \Rightarrow C = \frac{k+k'}{2k'} e^{i(k-k')a} t = \frac{k+k'}{2k'} \alpha \beta^{-1} t$$

$$D = \frac{k'-k}{2k'} e^{i(k+k')a} t = \frac{k'-k}{2k'} \alpha \beta t$$

Пусть $e^{ika} = \alpha$, $e^{ik'a} = \beta$.

$$(1)+(2): \quad 2\alpha^{-1} = \frac{k'+k}{k} C \beta^{-1} + \frac{k'-k}{k} D \beta$$

$$2\alpha^{-1} = \left[\frac{(k+k')^2}{2kk'} \alpha \beta^{-2} + \frac{(k'-k)^2}{2kk'} \alpha \beta^2\right] t \Rightarrow \boxed{\frac{1}{t} = 1 + \frac{U^2}{4\mathcal{E}(\mathcal{E}+U)} \sin^2(2k'a)}$$

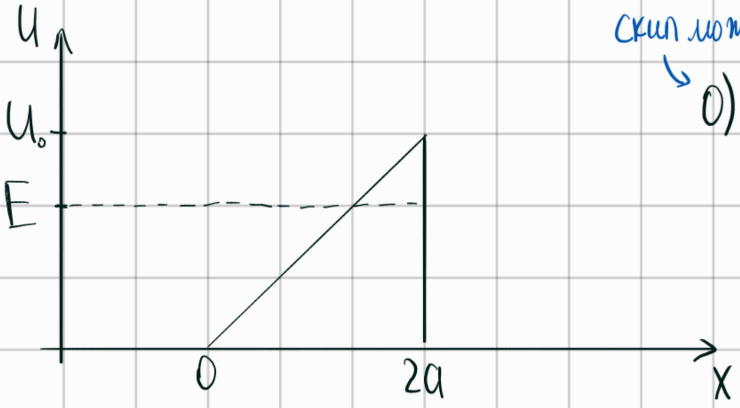
Можно сразу

4) $t = 1 \Leftrightarrow 2k'a = \pi n$ – условие резонанса

$$\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(\mathcal{E}+U)} = n\pi \Rightarrow$$

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \underset{1}{\underset{\parallel}{n^2}} - U = \frac{(1.05 \cdot 10^{-27})^2 \, 3.14^2}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot (2 \cdot 5.3 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} - 2.5 \text{ эВ} \approx 31 \text{ эВ}$$

0-4-2. Потенциальный барьер представляет собой прямоугольный треугольник с катетами $2a = 2$ Å и $U_0 = 5$ эВ. Оценить вероятность туннелирования через такой барьер электрона с энергией $E = 3U_0/5$.



скип можно

0) Вероятность пройти через прямоуг. барьер:

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$$

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E-U|}$$

$$\psi = C_1 e^{-\varkappa x} + \underbrace{C_2 e^{\varkappa x}}_{\substack{|C_2| \ll |C_1| \\ \text{„отраженная волна"}}} \Rightarrow \psi \propto e^{-\varkappa x} \Rightarrow \text{(известный факт)}$$

$$\Rightarrow w = w_0 e^{-2\varkappa d}$$ – вероятность пройти барьер, d – ширина

1) Наш случай: разделим на прямоугольники

$$U(x) = U_0 \frac{x}{2a} \qquad U\left(\frac{6}{5}a\right) = \frac{3}{5}U_0 = E$$

Экспонену. затухание лишь при $E < U$

2) $$w = w_0 \exp\left\{-2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\int_{1.2a}^{2a}\sqrt{U(x)-E}\,dx\right\} \ominus$$

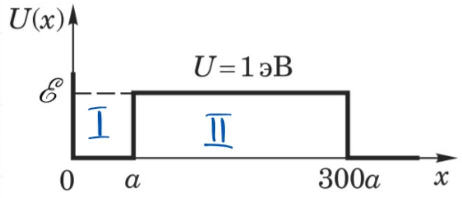
$$I = \int_{1.2a}^{2a}\left(U_0\frac{x}{2a} - E\right)^{1/2}dx = \int_{1.2a}^{2a}(\alpha x - E)^{1/2} = \left|\begin{matrix} w = \alpha x - E \\ dw = \alpha dx \end{matrix}\right| = \int_0^{U_0-E} w^{1/2}\frac{dw}{\alpha} = \frac{2}{3\alpha}(U_0-E)^{3/2}$$

$$\ominus\; w_0 \exp\left\{-2\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2a}{U_0}(U_0-E)^{3/2}\right\},$$ итого:

$$W = \exp\left\{-\frac{8a\sqrt{2m}}{3\hbar}\frac{(U_0-E)^{3/2}}{U_0}\right\} \approx \exp\left\{-\frac{8\cdot 1\cdot 10^{-8}\sqrt{2\cdot 9.1\cdot 10^{-28}}}{3\cdot 1.054\cdot 10^{-27}}\frac{(2\,\text{эВ})^{3/2}\sqrt{1.6\cdot 10^{-12}}}{5\,\text{эВ}}\right\} \approx \exp\{-0.77\} \approx$$

$$\approx 46\%$$

3.35. Электрон находится в одномерной потенциальной яме, изображенной на рисунке рис. 32. Энергия частицы равна $\mathscr{E} = 0{,}9999$ эВ, а высота потенциального барьера $U = 1$ эВ. Найти ширину ямы, если уровень с указанным значением энергии является первым. Оценить время жизни τ частицы в яме. Отражением волновой функции на задней границе потенциального барьера следует пренебречь.



1) $\psi_I'' + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi_I = 0 \Rightarrow \psi_I = e^{ikx} + r e^{-ikx}$, $\quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, но $\psi_I(0) = 0 \Rightarrow \psi_I = A \sin kx$

$\psi_{II}'' + \frac{2m}{\hbar^2}(U-E)\psi_{II} = 0 \Rightarrow \psi_{II} = Ce^{-\varkappa x} + \cancel{De^{\varkappa x}}$, $\quad \varkappa = \frac{\sqrt{2m|U-E|}}{\hbar} = \frac{1}{100} k =$

отраженным пренебрегаем

$$= \frac{\sqrt{2\cdot 9.1\cdot 10^{-21}\cdot 0.0001\cdot 1.6\cdot 10^{-12}}}{1.054\cdot 10^{-27}} = 5.1\cdot 10^{5}\ \text{см}^{-1}$$

2) Сшиваем решение:

$\psi_I(a) = \psi_{II}(a)$: $\quad A\sin ka = Ce^{-\varkappa a}$

$\psi_I'(a) = \psi_{II}'(a)$: $\quad kA\cos ka = -\varkappa C e^{-\varkappa a}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} ka = -\frac{k}{\varkappa}$

$$|a| = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{\varkappa}\right)}{k} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{E}{U-E}}\right)$$

$$a = \frac{1.054\cdot 10^{-27}}{\sqrt{2\cdot 9.1\cdot 10^{-28}\cdot 1.16\cdot 10^{-12}}} \cdot \operatorname{arctg}(100) = 3\ \text{Å}$$

3) $D = \exp\{-2\varkappa L\} \approx \exp\{-2\cdot 5.1\cdot 10^{5}\cdot 299\cdot 3\cdot 10^{-8}\} \approx 1.06\cdot 10^{-4} = 0.0106\,\%$

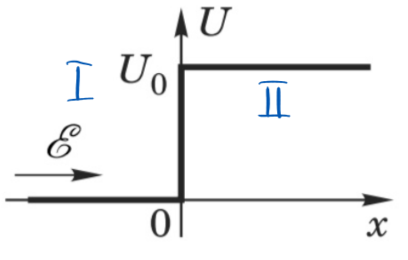
— вероятность прохождения („прозрачность")

$n = \frac{v}{a} = \sqrt{\frac{2E}{ma^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1.16\cdot 10^{-12}}{9.1\cdot 10^{-28}\cdot (3\cdot 10^{-8})^2}} \approx 1.98\cdot 10^{15}$ — частота ударов об яму

$\tau \approx \frac{1}{nD} = \frac{1}{1.98\cdot 10^{15}\cdot 1.06\cdot 10^{-4}} \approx 4.7\cdot 10^{-12}$ с — не совпало, но порядок правильный

3.35. $\tau = \frac{1}{nD} \approx 1{,}2\cdot 10^{-11}$ с, где $D \approx \exp(-598a\varkappa) \approx 8{,}3\cdot 10^{-5}$, $\varkappa = \frac{\sqrt{2m(U-\mathscr{E})}}{\hbar} \approx 5{,}08\cdot 10^{5}$ см$^{-1}$, $a = 3$ Å.

3.53. На одномерную прямоугольную потенциальную ступеньку высотой $U_0 > 0$, расположенную в точке $x = 0$, из области $x < 0$ падают микрочастицы с энергией $\mathscr{E} = U_0/4$ (рис. 37). На каком наименьшем расстоянии слева от ступеньки (в длинах волн де Бройля) плотность вероятности обнаружить частицу будет максимальна и на каком — минимальна?



1) $K_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{mU_0}}{\hbar}$

$K_2 = \dfrac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} = i\varkappa = i\sqrt{\dfrac{3}{2}}\dfrac{\sqrt{mU_0}}{\hbar} = \sqrt{3}\, i K_1$

2) Можно воспользоваться формулами Френеля из оптики $(\theta = 0)$

$$\boxed{r = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}, \quad t = \frac{2K_1}{K_1 + K_2}; \quad R = |r|^2 \quad T = \frac{K_2}{K_1}|t|^2}$$

модификация кват. физики

$|r|^2 = r r^* = \dfrac{K_1 - i\varkappa}{K_1 + i\varkappa} \cdot \dfrac{K_1 + i\varkappa}{K_1 - i\varkappa} = 1 \Rightarrow$ полное отражение

$r = \dfrac{K_1 - i\varkappa}{K_1 + i\varkappa} = e^{i\varphi}, \quad \varphi = -2\,\mathrm{arctg}\dfrac{\varkappa}{K_1} = -2\,\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{3/2}}{1/\sqrt{2}} = -\dfrac{2\pi}{3}$

3) $\psi(x) = e^{ikx} + e^{i\varphi}e^{-ikx} = 2e^{\frac{i\varphi}{2}}\left(\dfrac{e^{-\frac{i\varphi}{2}}e^{ikx} + e^{\frac{i\varphi}{2}}e^{-ikx}}{2}\right) = 2e^{\frac{i\varphi}{2}}\cos\left(kx - \dfrac{\varphi}{2}\right)$

$|\psi(x)|^2 \propto \cos^2\left(kx + \dfrac{\pi}{3}\right)$

4) $x_{max} = -\dfrac{\pi}{3k} = -\dfrac{\lambda}{6}$ $\qquad \left(k = \dfrac{2\pi}{\lambda}\right)$

$x_{min} = -\dfrac{5\pi}{6k} = -\dfrac{5\lambda}{12}$

3.53. $x_{\max} = -\lambda/6$, $x_{\min} = -5\lambda/12$, где λ — дебройлевская длина волны падающих микрочастиц.

3.56. Какая доля электронов с энергией $\mathscr{E} = 1$ эВ, падающих слева на прямоугольный несимметричный потенциальный барьер с параметрами $U_1 = \mathscr{E}$, $U_2 = 4U_1$ и шириной $l = 7{,}8 \cdot 10^{-8}$ см, сможет его преодолеть (рис. 40)?

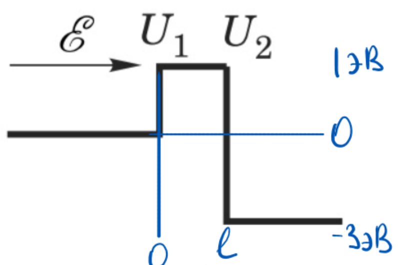


Рис. 40

1) $K_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = K = \dfrac{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}}{1.054 \cdot 10^{-27}} \approx 5.1 \cdot 10^{7}\,\text{см}^{-1}$

$\psi''_{II} = 0 \Rightarrow \psi_{II} = Ax + B$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m \cdot 4E}}{\hbar} = 2k$$

2) $\psi_I(x) = e^{ik_1x} + re^{-ik_1x}$

$$\begin{cases} \psi_I(0) = \psi_{II}(0): & 1 + r = B \\ \psi_I'(0) = \psi_{II}'(0): & ik_1 - rik_1 = A \end{cases}$$

$\psi_{II}(x) = Ax + B$

$$\begin{cases} \psi_{II}(l) = \psi_{III}(l): & Al + B = te^{ik_2l} \\ \psi_{II}'(l) = \psi_{III}'(l): & A = ik_2te^{ik_2l} \end{cases}$$

$\psi_{III}(x) = te^{ik_2x}$

Math: $B = te^{ik_2l} - Al = te^{ik_2l}(1 - ik_2l)$

$$ik_1(1-r) = ik_2te^{ik_2l} \Rightarrow r = 1 - \frac{k_2}{k_1}te^{ik_2l}$$

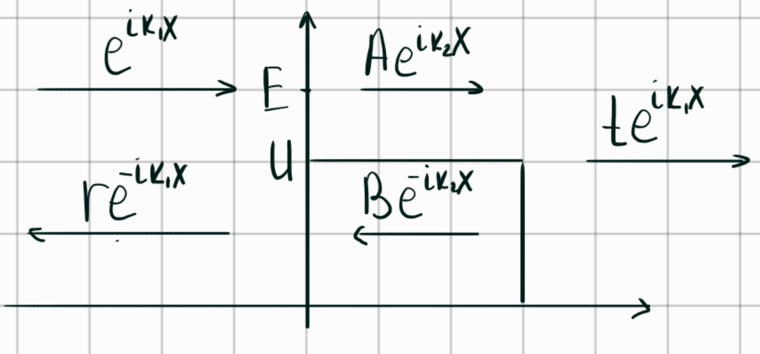
$$2 - \frac{k_2}{k_1}te^{ik_2l} = te^{ik_2l}(1 - ik_2l) \Rightarrow t = \frac{2e^{-ik_2l}}{1 - ik_2l + k_2/k_1}$$

$$t = \frac{2ik_1e^{-ik_2l}}{k_1k_2l + i(k_1+k_2)}$$

$$T = \frac{k_2}{k_1}|t|^2 = \frac{k_2}{k_1}\frac{4k_1k_2}{k_1^2k_2^2l^2 + (k_1+k_2)^2} = \frac{8}{9 + 4k^2l^2} \Rightarrow \frac{8}{9 + 4(5.1 \cdot 10^{+7})^2(7.8 \cdot 10^{-8})^2} \approx 0.11$$

3.56. Искомая доля равна коэффициенту прохождения барьера $D = \frac{4k_1k_2}{(k_1+k_2)^2 + k_1^2k_2^2l^2} = \frac{8}{73} = 0{,}11$, где $k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\mathscr{E}} = 5{,}1 \cdot 10^7$ см$^{-1}$; $k_2 = 2k_1$.

3.45. При прохождении нерелятивистской частицы с энергией $\mathscr{E}$ над прямоугольным барьером высотой $U = (3/4)\mathscr{E}$ коэффициент отражения по мощности оказался равным $R = 9/25$. Определить минимально возможную ширину барьера в единицах соответствующей ему дебройлевской длины волны.



$$\begin{cases} 1 + r = A + B \\ 2ik(1-r) = ik(A-B) \\ Ae^{ikl} + Be^{-ikl} = te^{2ikl} \\ ik(Ae^{ikl} - Be^{-ikl}) = 2ikte^{2ikl} \end{cases}$$

1) $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = 2k$; $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} = k$

2) В общем случае $r \neq \sqrt{R}$! т.к. $r \in \mathbb{C}$

В нашем случае аналог отражения от более плотной среды.

Как известно, при этом фазы падающ. и отр. волн равны $\Rightarrow$

$\Rightarrow r \in \mathbb{R}; \quad r = \sqrt{R} = \frac{3}{5}$

3) $\begin{cases} 1.6 = A + B \\ 0.8 = A - B \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A = 1.2 \\ B = 0.4 \end{matrix}$

$1.2e^{ikl} + 0.4e^{-ikl} = te^{2ikl} \rightarrow 2.4e^{ikl} = 3te^{2ikl} \Rightarrow t = \frac{4}{5}e^{-ikl}$

$1.2e^{ikl} - 0.4e^{-ikl} = 2te^{2ikl} \rightarrow 1.2e^{ikl} - 0.4e^{-ikl} = 1.6e^{ikl} \Rightarrow$

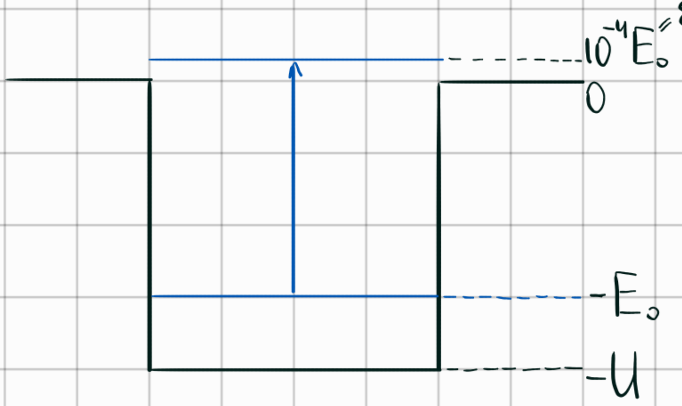
$\Rightarrow e^{ikl} = -e^{-ikl}$

$e^{ikl} = \pm i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$kl = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l_{min} = \frac{\pi}{2k} = \frac{\pi\lambda}{2 \cdot 2\pi} = \frac{\lambda}{4}$

3.45. $L_{\min} = \lambda/4$.

Т.6. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной $d = 1$ Å в основном состоянии. Энергия ионизации электрона $E_0 = 20$ эВ. Электрон поглощает фотон с энергией $1.0001E_0$, оценить время, которое электрон будет находиться над ямой. Процесс релаксации с испусканием фотона и возвратом в исходное состояние не рассматривать. Глубина ямы $U = 20.32$ эВ. Сравнить уширение уровня с его энергией.

1) 

Аналог. оптике: $T = \frac{4K_1K_2}{(K_1+K_2)^2} \approx \frac{4K_2}{K_1} \approx 4 \cdot 10^{-2}$

$K_1 = \frac{\sqrt{2m(U+\varepsilon)}}{\hbar} \approx 2.31 \cdot 10^7 \text{ см}^{-1}$

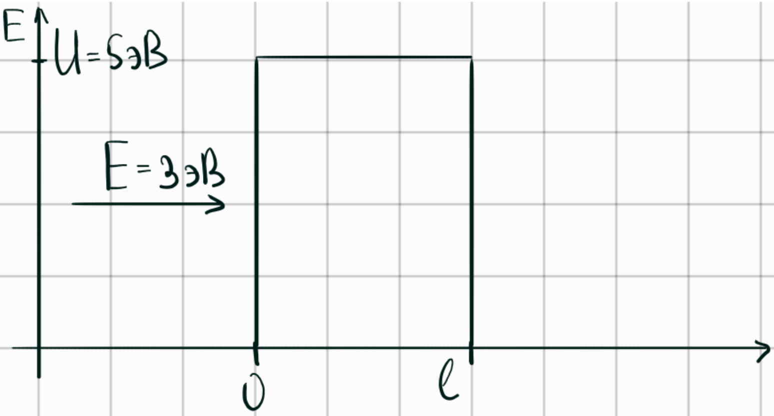
$K_2 = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{\hbar} \approx 2{,}29 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1} \ll K_1$

2) Частота ударов: $\nu = \frac{v}{d} = \sqrt{\frac{2E}{md^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}}{9.1 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-14}}} = 2.65 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$

3) $\tau \approx \frac{1}{\nu T} = \frac{1}{2.65 \cdot 10^{15} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \approx 10^{-14} \text{ с}$; $\quad \delta E = \frac{\hbar}{\tau} \approx \frac{1.054 \cdot 10^{-27}}{10^{-14} \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}} \approx 0.066 \text{ эВ} \gg \varepsilon$

Ответ: $\tau \approx 10^{-14}$с; $\delta E = \hbar/\tau \approx 0{,}06$ эВ >> 10^{-4} E_0= 0,002 эВ

Т.7. Электрон с энергией E = 3 эВ проходит через прямоугольный потенциальный барьер высотой U = 5 эВ и шириной l =3 Å. Определить, во сколько раз должна возрасти высота барьера, чтобы вероятность прохождения через барьер упала в 10 раз: а) при использовании приближенной формулы для проницаемости барьера; б) точной формулы для проницаемости прямоугольного барьера.



I 1) Приближение: $W = \exp(-2\varkappa l) = \exp(-2\cdot 7.24\cdot 10^{7}\cdot 3\cdot 10^{-8}) \approx 1.3\cdot 10^{-2}$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2\cdot 9.1\cdot 10^{-28}\cdot 2\cdot 1.6\cdot 10^{-12}}}{1.054\cdot 10^{-27}} \approx 7.24\cdot 10^{7}\ \text{см}^{-1}$$

2) $\exp(-2\varkappa l) = 10\exp(-2\varkappa^* l)$

$$\exp[-2(\varkappa^*-\varkappa)l] = \frac{1}{10} \Rightarrow \varkappa^* = \varkappa + \frac{\ln 10}{2l}$$

$$U^* = E + \left(\sqrt{U-E} + \frac{\ln 10}{2l}\cdot\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\right)^2 = 3 + \left(\sqrt{2} + \frac{\ln 10\cdot 1.054\cdot 10^{-27}}{2\cdot 3\cdot 10^{-8}\sqrt{2\cdot 9.1\cdot 10^{-28}}\cdot\sqrt{1.6\cdot 10^{-12}}}\right) = 7.68\ \text{эВ}$$

$$\alpha = \frac{U^*}{U} = 1.536$$

✓ не совпало

II Точная формула: $T = \left[1+\frac{U^2}{4E(U-E)}\sinh^2(\varkappa l)\right]^{-1}$

(учет переотражений от стенок барьера)

$$T \approx \left[1+\frac{5^2}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot\sinh^2(3\cdot 10^{-8}\cdot 7.24\cdot 10^{7})\right]^{-1} \approx 4.87\cdot 10^{-2}$$

$$\left[1+\frac{U^{*2}}{4E(U^*-E)}\sinh^2\left(\frac{\sqrt{2m(U^*-E)}}{\hbar}\right)\right]^{-1} = 4.87\cdot 10^{-3} \xrightarrow{\text{численно}} U^* = 7.70\ \text{эВ}$$

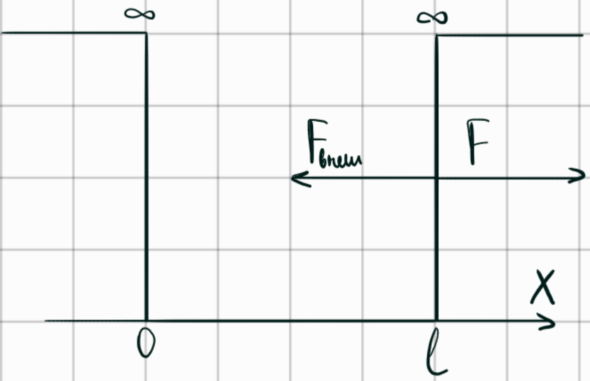
Не совпало

То есть приближенная формула оказалась достаточно точной

Ответ: а) в 1,54 раз ($U_x \approx$7,68 эВ), б) в 1,70 раза ($U_x \approx$8,51 эВ).

5	29 сен. – 5 окт.	Потенциальные ямы. Квазиклассическое приближение	~~0-5-1~~, ~~0-5-2~~	~~3.5~~, ~~3.15~~, ~~3.21~~, ?	~~3.6~~, ~~3.23~~, ~~3.50~~

0-5-1. Частица массы m заключена в одномерном потенциальном ящике шириной l с непроницаемыми стенками. Найти работу, которую надо затратить на квазистатическое сжатие ящика вдвое, если частица находится в основном состоянии.



1) $\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0 \Rightarrow \psi = A\sin kx + B\cos kx$

$\psi(0) = \psi(l) = 0 \Rightarrow \psi = A\sin kx$, где

$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$A\sin kl = 0 \Rightarrow kl = \pi n \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}n^2$ – энергия дискретна

2) $W = E_1\left(\frac{l}{2}\right) - E_1(l) = \frac{3\hbar^2\pi^2}{2ml^2}$

0-5-2. Частица массы m заключена в одномерном потенциальном ящике с непроницаемыми стенками. Какова масса частицы, если при ширине ящика l =3 Å. расстояние между первым и третьим уровнями частицы в яме составляет ΔE= 5 эВ?

1) Из прошлой задачи: $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2}n^2$

$\Delta E = E_3 - E_1 = \frac{8\hbar^2\pi^2}{2ml^2} = \frac{4\hbar^2\pi^2}{ml^2}$

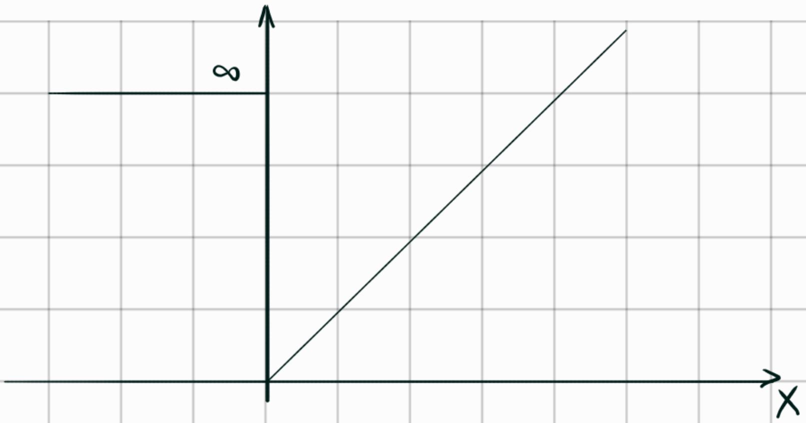
2) $m = \frac{4\hbar^2\pi^2}{\Delta E \cdot l^2} = \frac{4(1.054\cdot 10^{-27})^2\, 9.87}{5\cdot 1.6\cdot 10^{-12}\; 9\cdot 10^{-16}} \approx 6.1\cdot 10^{-27}$ гр

$m_e = 9.1\cdot 10^{-28}$ гр $\Rightarrow m \approx 6.69\, m_e \approx 6.1\cdot 10^{-27}$ гр

3.5. Частица массой m находится в одномерном потенциале

$$U\cancel{m}(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ kx & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Оценить энергию основного состояния частицы в этом потенциале, используя в качестве волновой функции $\psi = x\exp(-ax)$. В качестве оценки взять минимум среднего значения полной энергии частицы. Сравнить с задачей 2.39.



1) Ур-е Шредингера:

$$\hat{E}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + U(x,y,z)\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xe^{-ax}) + kx\cdot xe^{-ax} =$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[-2ae^{-ax} + a^2xe^{-ax}\right] + kx^2e^{-ax} = e^{-ax}\left\{\frac{\hbar^2}{2m}(2a-a^2x) + kx^2\right\}$$

2) $$\bar{E} = \frac{\int\psi^*\hat{E}\psi\,dV}{\int\psi^*\psi\,dV} = \frac{\int_0^\infty\psi^*\hat{E}\psi\,dx}{\int_0^\infty\psi^*\psi\,dx} = \frac{\frac{\hbar^2}{8ma}+\frac{3k}{8a^4}}{\frac{1}{4a^3}} = \frac{\hbar^2a^2}{2m} + \frac{3k}{2a} = \frac{1}{2a}\left(\frac{\hbar^2a^3}{m} + 3k\right)$$

$$\cdot \int_0^\infty\psi^*\psi\,dx = \int_0^\infty x^2e^{-2ax}dx = \left|\int_0^\infty x^ne^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}\right| = \frac{2}{(2a)^3} = \frac{1}{4a^3}$$

$$\cdot \int_0^\infty\psi^*\hat{E}\psi\,dx = \int_0^\infty xe^{-ax}\cdot e^{-ax}\left\{\frac{\hbar^2}{2m}(2a-a^2x)+kx^2\right\} =$$

$$= \int_0^\infty\frac{\hbar^2a}{m}xe^{-2ax}dx - \int_0^\infty\frac{\hbar^2a^2}{2m}x^2e^{-2ax}dx + \int_0^\infty kx^3e^{-2ax}dx =$$

$$= \frac{\hbar^2a}{m}\frac{1}{4a^2} - \frac{\hbar^2a^2}{2m}\cdot\frac{1}{4a^3} + k\frac{3}{8a^4} = \frac{\hbar^2}{8ma} + \frac{3k}{8a^4}$$

3) $$\frac{d\bar{E}}{da} = 0 \Rightarrow \frac{\hbar^2a}{m} - \frac{3k}{2a^2} = 0 \Rightarrow a^3 = \frac{3km}{2\hbar^2}$$

$$\bar{E}_{min} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\hbar^2}{3km}\right)^{1/3}\cdot\frac{9k}{2} = \frac{9}{4}\left(\frac{2\hbar^2k^2}{3m}\right)^{1/3} = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}\frac{\hbar^2k^2}{m}\right)^{1/3}$$

3.5. $\mathscr{E}_0 \approx \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}\frac{\hbar^2k^2}{m}\right)^{1/3}$, параметр $a = \left(\frac{3mk}{2\hbar}\right)^{1/3}$. (См. также задачу 2.39.) Полученный ответ совпадает с точным решением с точностью 6%.

3.15. Поток нейтронов, летящих со скоростью $V_0 = 25$ см/с, падает на широкую щель с абсолютно отражающими стенками (рис. 22). Длина щели $l = 1$ см, высота $d = 10^{-4}$ см. Сколько времени нейтрон будет находиться внутри щели, если он в нее попадет?

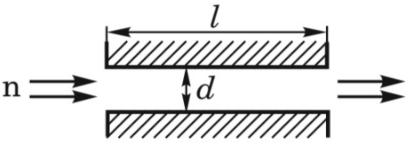


Рис. 22

1) Анал. волновода, часть энергии уходит на осн. сост.

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{\pi^2\hbar^2}{2md^2}$$

· условие неотражения: $\frac{mv_0^2}{2} > \frac{\pi^2\hbar^2}{2md^2} \Rightarrow (1.67\cdot10^{-24})^2 25^2 \geq \frac{9.8\cdot(1.054\cdot10^{-27})^2}{10^{-8}}$

$1.74\cdot10^{-45} \geq 1.09\cdot10^{-45} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ попадет в щель

· $v = \sqrt{v_0^2 - \frac{\pi^2\hbar^2}{m^2d^2}} = \sqrt{25^2 - \frac{9.87\cdot(1.054\cdot10^{-27})^2}{(1.67\cdot10^{-24})^2\,10^{-8}}} \approx 15.2\ \frac{см}{с}$

2) $t = \frac{l}{v} = \frac{1}{15.2}\cdot 1000\,мс \approx 65.8\,мс$

3.15. $t = 0{,}065$ с.

3.21. Энергия взаимодействия $U(z)$ атома водорода с твердой стенкой аппроксимируется прямоугольной потенциальной ямой глубиной U_0, шириной $a = 6$ Å и $U(z = 0) = +\infty$ (рис. 26). Энергия адсорбции — это разность наинизших уровней свободного и прилипшего к стенке атома $\mathscr{E} = U_0 - \mathscr{E}_1 = 1$ К. Найти величину U_0 и среднее значение координаты $\langle z \rangle$ адсорбированных атомов.

Указание: $\varphi \operatorname{ctg} \varphi = -1{,}21$ при $\varphi = 2\pi/3$.

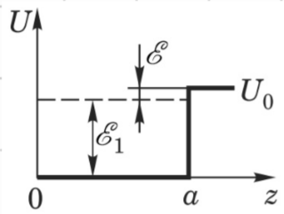
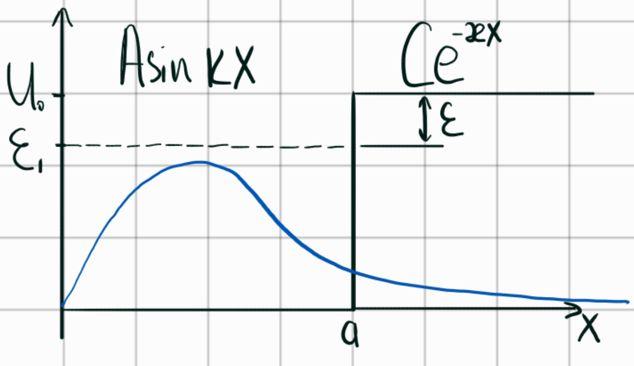


Рис. 26



1) $A\sin ka = Ce^{-\varkappa a}$
$kA\cos ka = -\varkappa Ce^{-\varkappa a}$ $\Rightarrow \operatorname{ctg} ka = -\frac{\varkappa}{k}\frac{a}{a}$

2) $ka\cdot\operatorname{ctg} ka = -\varkappa a = -\frac{\sqrt{2m\mathcal{E}}}{\hbar}a =$

$= \frac{\sqrt{2\cdot1\cdot1.67\cdot10^{-24}\cdot1.38\cdot10^{-16}}}{1.054\cdot10^{-27}} \approx 2\cdot10^{7}\cdot6\cdot10^{-8} \approx -1.21 \Rightarrow$

$\Rightarrow ka = \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{2m\mathcal{E}_1}}{\hbar}a \Rightarrow \mathcal{E}_1 = \frac{2\hbar^2\pi^2}{9ma^2} = \frac{2(1.054\cdot10^{-27})^2\cdot9.87}{9\cdot1.67\cdot10^{-24}\cdot36\cdot10^{-16}\cdot1.38\cdot10^{-16}} \approx 3K$

$U_0 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E} = 4K$;

$A\sin\frac{2\pi}{3} = C\cdot e^{-1.21} \Rightarrow \frac{A}{C} \approx 0.344$

3) $$\langle z\rangle = \frac{\int_0^\infty \psi^* z\psi dz}{\int_0^\infty \psi^*\psi dz} = \frac{A^2\left[\frac{a^2}{4} - \frac{a\sin(2ka)}{4k} - \frac{\cos(ka)-1}{8k^2}\right] + C^2 e^{-\varkappa a}\frac{2\varkappa a+1}{4\varkappa^2}}{A^2\left[\frac{a}{2} - \frac{\sin(2ka)}{4k}\right] + C^2\frac{1}{2\varkappa}e^{-2\varkappa a}} = \ldots \approx 7\,\text{Å}$$

- $$\int_0^\infty \psi^*\psi = \int_0^a A^2 \sin^2 kz\, dz + \int_a^\infty C^2 e^{-2\varkappa z} dz = A^2\left[\frac{a}{2} - \frac{\sin(2ka)}{4k}\right] + C^2\frac{1}{2\varkappa}e^{-2\varkappa a}$$

- $$\int_0^a \sin^2 kz\, dz = \int_0^a \frac{1-\cos(2kz)}{2}\frac{d2kz}{2k} = \frac{1}{4k}\int_0^a 1-\cos(2kz)\, d2kz = \frac{a}{2} - \frac{\sin(2ka)}{4}$$

- $$\int_a^\infty e^{-2\varkappa z} dz = \left.\frac{e^{-2\varkappa z}}{-2\varkappa}\right|_a^\infty = \frac{1}{2\varkappa}e^{-2\varkappa a}$$

- $$\int_0^\infty \psi^* z\psi dz = A^2\int_0^a z\sin^2 kz\, dz + C^2\int_a^\infty z e^{-2\varkappa z} dz = A^2\left[\frac{a^2}{4} - \frac{a\sin(2ka)}{4k} - \frac{\cos(ka)-1}{8k^2}\right] + C^2 e^{-\varkappa a}\frac{2\varkappa a+1}{4\varkappa^2}$$

- $$\int_0^a z\frac{1-\cos(2kz)}{2}dz = \frac{1}{2}\int_0^a z dz - \frac{1}{2}\int_0^a z\cos(2kz) dz = \frac{a^2}{4} - \frac{a\sin(2ka)}{4k} - \frac{\cos(ka)-1}{8k^2}$$

- $$\int_0^a z\cos(2kz) dz = \int_0^a z\frac{d\sin(2kz)}{2k} = \frac{1}{2k}\left\{a\cdot\sin(2ka) - \int_0^a \sin(2kz) dz\right\} =$$
$$= \frac{a\sin(2ka)}{2k} + \frac{\cos(ka)-1}{4k^2}$$

- $$\int_a^\infty z e^{-2\varkappa z} dz = \int_a^\infty z\frac{de^{-2\varkappa z}}{-2\varkappa} = \frac{1}{+2\varkappa}\left\{ae^{-2\varkappa a} - \int_a^\infty e^{-2\varkappa z} dz\right\} =$$
$$= \frac{ae^{-2\varkappa a}}{2\varkappa} + \frac{e^{-2\varkappa a}}{4\varkappa^2} = \frac{(2\varkappa a+1)e^{-2\varkappa a}}{4\varkappa^2}$$

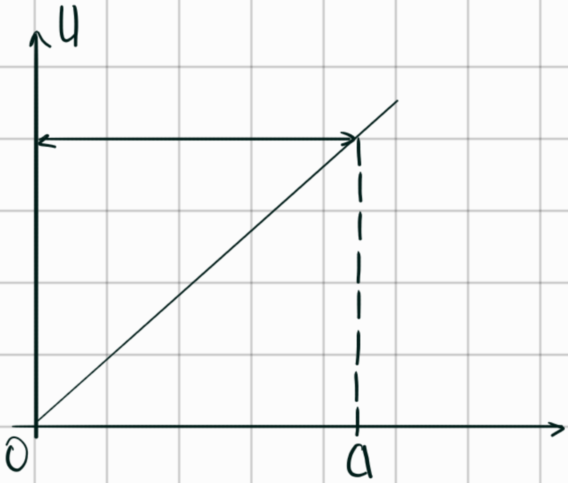
3.21. $U_0 = 4$ K, $\langle z\rangle \approx \frac{\pi}{2k} + \frac{1}{2\varkappa} \approx 7$ Å. Здесь $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\mathscr{E}_1}$; $\varkappa = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - \mathscr{E}_1)} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\mathscr{E}}$; $\mathscr{E}_1 = U_0 - \mathscr{E}$. Точный расчет показывает, что $\langle z\rangle \approx 5{,}4$ Å, т. е. «в среднем» атом находится не вне ямы, а все-таки внутри нее.

3.6. Используя правило квантования Бора–Зоммерфельда, найти закон квантования энергии частицы массой m при больших значениях главного квантового числа n (в квазиклассическом приближении) в одномерном потенциале

$$\psi(x) = \begin{cases}\infty & \text{при} \quad x < 0,\\ kx & \text{при} \quad x > 0.\end{cases}$$

Указание. Правило квантования Бора–Зоммерфельда

$$\oint \mathbf{p}\, d\mathbf{l} = nh.$$



1) Считаем, что частица циклично ударяется о стенки:

$$\oint \vec{p}\, d\vec{l} = p\cdot 2a = nh \Rightarrow p = \frac{nh}{2a} = \frac{\pi n \hbar}{a}$$

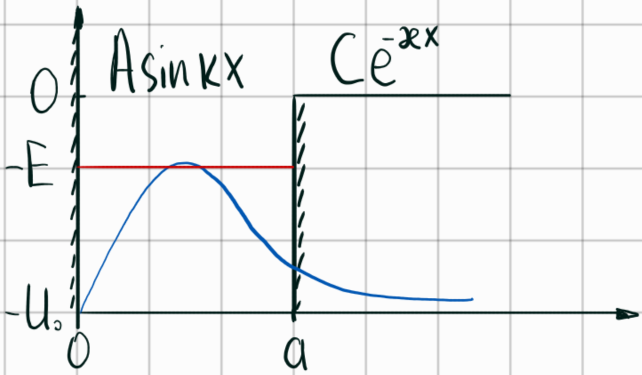
2) $$E = \frac{p^2}{2m} + ka = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2} + ka$$

3) $$E \to \min: \quad \frac{dE}{da} = 0 = -\frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{ma^3} + k \Rightarrow a^3_{min} = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{mk}$$

$$E_{min} = \sqrt[3]{\frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{mk}} \left[k + \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2m} \cdot \frac{mk}{\pi^2 n^2 \hbar^2}\right] = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi^2 n^2 \hbar^2 k^2}{m}\right)^{1/3}$$

$$\mathscr{E}_n = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{k^2\pi^2\hbar^2}{m}}\, n^{2/3}$$

3.23. Найти глубину ямы и энергию ионизации $\mathscr{E}$ электрона (в эВ), находящегося в основном состоянии в одномерной яме шириной $a = 2\,\text{Å}$ с потенциалом $U_0 = \infty$, $U = -U_0$ при $0 < x < a$ и $U = 0$ при $x > a$, если известно, что отношение волновой функции на границе ямы ($x = a$) к ее максимальному значению в яме равно $\alpha = \sqrt{3}/2$.



1) $$k^2 = \frac{2m(U_0 - \mathcal{E})}{\hbar^2} \qquad \varkappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

2) $$\left.\begin{aligned} A\sin ka &= Ce^{-\varkappa a} \\ kA\cos ka &= -\varkappa C e^{-\varkappa a} \end{aligned}\right| \Rightarrow \operatorname{ctg} ka = -\frac{\varkappa a}{ka}$$

3) $$x \in [0; a]: \quad \psi_1 = A\sin kx \Rightarrow \psi_1^{max} = A; \quad \frac{\psi_1(a)}{\psi_1^{max}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \psi_1(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ka = \frac{2\pi}{3}$$

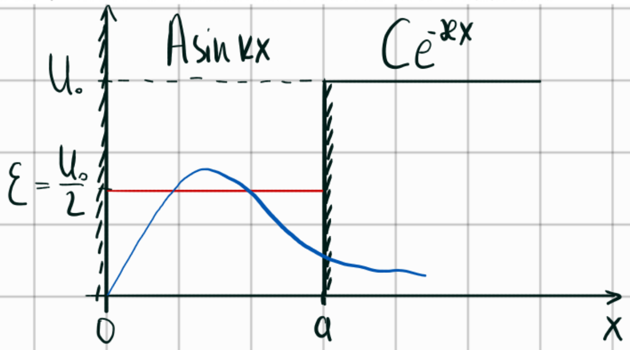
4) $$\varkappa a = -ka \cdot \operatorname{ctg} ka = -\frac{2\pi}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$$

$$\varkappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{4}{27}\frac{\pi^2}{a^2} \Rightarrow E = \frac{2}{27}\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2} = \frac{2}{27}\frac{(1.054\cdot 10^{-27}\cdot 3.14)^2}{9.1\cdot 10^{-28}\cdot 4\cdot 10^{-16}\quad 1.6\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{эрг}}{\text{эВ}}} \approx 1.38\,\text{эВ}$$

5) $$k^2 = \frac{2m(U_0 - E)}{\hbar^2} = \frac{4}{9}\frac{\pi^2}{a^2} \Rightarrow \frac{k^2}{\varkappa^2} = \frac{U_0 - E}{E} = 3 \Rightarrow U_0 = 4E = \frac{8}{27}\frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2} = 5.53\,\text{эВ}$$

3.23. $U_0 = \dfrac{8\pi^2\hbar^2}{27ma^2} = 5{,}53$ эВ; $\mathscr{E} = \dfrac{U_0}{4} = 1{,}38$ эВ.

3.50. Микрочастица находится в одномерной потенциальной яме заданной ширины. Одна ее стенка бесконечно высокая, а вторая — конечной высоты U_0. Энергия частицы в яме $\mathscr{E} = U_0/2$. Во сколько раз надо квазистатически изменить высоту ямы при неизменной ширине, чтобы частица стала свободной?



1) $k^2 = \dfrac{2m\varepsilon}{\hbar^2}$; $\quad æ^2 = \dfrac{2m(U_0-\varepsilon)}{\hbar^2}$

2) $\left.\begin{array}{l} A\sin ka = Ce^{-æa} \\ kA\cos ka = -æCe^{-æa} \end{array}\right| \Rightarrow k\,\mathrm{ctg}\,ka = -æ$

$$\frac{æ^2}{k^2} = \mathrm{ctg}^2 ka = \frac{1}{\sin^2 ka} - 1 = \frac{U_0-\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{U_0}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \sin^2 ka = \frac{\varepsilon}{U} = \frac{1}{2}$$

$$ka = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \xrightarrow{\text{из рис.}} ka = \frac{3\pi}{4}$$

$$k^2a^2 = \frac{9\pi^2}{16} = \frac{2ma^2\varepsilon}{\hbar^2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{9\pi^2\hbar^2}{32ma^2} \qquad U_0 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{16ma^2}$$

3) После сдвига $\tilde{E} = \tilde{U} \Rightarrow \tilde{æ} = 0 \Rightarrow \mathrm{ctg}\,\tilde{k}a = 0 \Rightarrow \tilde{k}a = \frac{\pi}{2}$

$$\tilde{k}^2a^2 = \frac{2m\tilde{U}a^2}{\hbar^2} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \tilde{U} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8ma^2} = \frac{9}{2}U_0 \Rightarrow \frac{\tilde{U}}{U_0} = \frac{9}{2}$$

3.50. $\dfrac{U_0}{U_0'} = \dfrac{9}{2} = 4{,}5$, где U_0' — измененная высота ямы.