Задание 1 Наумов В.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября — 04 октября)

I. Комплексные числа

§1: ~~1($\underline{2}$, 4)~~; ~~2(2, 3, $\underline{4}$)~~; ~~3(4)~~; ~~4($\underline{2}$)~~; ~~5(4)~~; ~~6~~; ~~7(3)~~; ~~9(3,$\underline{4}$)~~; ~~10(7, 9)~~; 18*.

II. Элементарные функции. Функциональные ряды

§3: ~~8(1, 2, 4)~~; ~~9(3, $\underline{4}$, 8)~~; ~~11(1, 2, $\underline{3}$, 4)~~; ~~12(1, 2)~~; ~~13($\underline{1}$, 3)~~; ~~14(1, 4)~~; ~~17($\underline{1}$, 4, 8)~~; ~~19(3)~~.

§4: ~~6(4)~~.

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

§5: ~~1($\underline{2}$, 4, 6)~~; ~~6(2, $\underline{5}$)~~; ~~7(1, 6)~~; ~~13($\underline{1}$, 2)~~; ~~17(3, $\underline{6}$)~~.

IV. Ряд Тейлора

§7: ~~1~~; 5*; ~~6($\underline{6}$)~~; ~~11(1, $\underline{4}$)~~; ~~12(1)~~.

V. Теорема единственности

§9: ~~2(1, 2, $\underline{5}$, 11, 12)~~; ~~13($\underline{5}$, 8)~~.

~~1~~. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено $f^{(n)}(z) = 0$. Доказать, что f – многочлен степени меньше n.

2*. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G, и для любого $z \in G$ существует натуральное число n такое, что $f^{(n)}(z) = 0$. Верно ли, что $f(z)$ – многочлен?

~~3~~. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, гармонические в области D, совпадают в ней в окрестности некоторой точки $(x_0, y_0) \in D$. Доказать, что эти функции тождественно равны друг другу в области D.

~~4~~. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, гармонические в области D, совпадают в ней на бесконечном множестве точек E, имеющем предельную точку в D. Верно ли, что эти функции тождественно равны друг другу в области D?

VI. Ряд Лорана

§11: ~~1(6)~~; ~~2(1, $\underline{4}$, 6)~~; ~~3(1, $\underline{6}$)~~; ~~4($\underline{4}$)~~; ~~5(4)~~; ~~7(3)~~; ~~8($\underline{6}$)~~; ~~9(2)~~; ~~$\underline{10(6)}$~~.

~~5~~. Доказать, что если четная функция регулярна в кольце с центром в точке $z = 0$, то ее разложение в этом кольце в ряд Лорана не содержит нечетных степеней.

77[3*($\underline{21}$)]

I. Комплексные числа:

п 1:

№ 1 (2, 4)

1. Вычислить:

~~1) $(1+2i)(2-i)+(1-2i)(2+i)$~~; 2) $\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}$;

~~3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$~~; 4) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$.

2) $\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}=5\left(\frac{1-2i}{5}+\frac{2+i}{5}\right)=3-i$

2) $3-i$.

4) $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}=\frac{(-3+4i)+(2+2i)}{(-9+46i)-(3+4i)}=\frac{-1+6i}{-12+42i}$

$=-\frac{1}{318}(-44+5i)$

№ 2 (2, 3, 4)

4) $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$.

2. Записать в тригонометрической и показательной форме комплексное число z:

~~1) $z=1+i^{121}$~~; 2) $z=(-3+4i)^3$;

3) $z=1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$; 4) $z=\frac{(1+i)^9}{(1-i\sqrt{3})^6}$.

2) $z=(-3+4i)^3=\left[5\left(-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\right]^3$

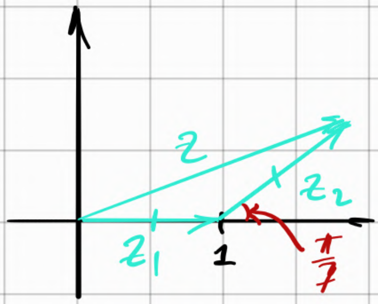
$\varphi=\pi-\mathrm{arctg}\left(\frac{4}{3}\right)$

$\Rightarrow$

$z=125\cdot(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)=125\cdot e^{3i\varphi}$

3) $z = \underbrace{1}_{z_1} + \underbrace{\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}}_{z_2}$; $\varphi = \frac{\pi}{7}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{14}$

$r = 2\cos\frac{\pi}{14}$



$\Rightarrow z = 2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right)$

$= 2\cos\frac{\pi}{14}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{14}}$

4) $z = \dfrac{(1+i)^9}{(1-\sqrt{3}i)^6} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^9}{\left(2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^6} = 2^{\frac{9}{2}-6}\cdot e^{i\left(\frac{9}{4}\pi + \frac{6}{3}\pi\right)} =$

$= 2^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2) $125(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 125e^{i3\varphi}$; $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$;

3) $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}\right) = 2\cos\frac{\pi}{14}\, e^{i\pi/14}$;

4) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\, e^{i\pi/4}$.

3(4)

3. Найти все корни уравнения:

4) $|z|^2 - 2iz + 2i = 0$.

$|z|^2 - 2iz + 2i = 0 \Rightarrow |x+iy|^2 - 2i(x+iy) + 2i = 0 \Rightarrow (x^2+y^2) - 2i(x+iy) + 2i = 0$

$\operatorname{Re}\left[(x^2+y^2) + 2y - 2xi + 2i\right] = 0 \Rightarrow x^2+y^2+2y = 0$

$\operatorname{Im}\left[(x^2+y^2) + 2y - 2xi + 2i\right] = 0 \Rightarrow -2x+2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2y=0 \\ -2x+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+y^2+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow z = 1-i$

4) $z = 1 - i$.

№4(2)

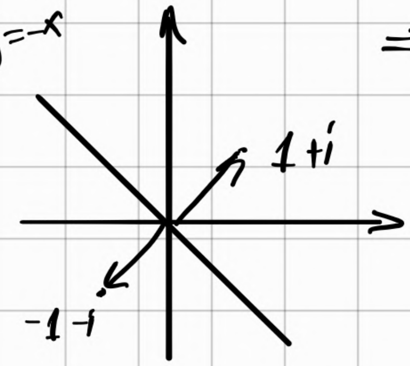
4. Решить систему уравнений:

1) $\cancel{\begin{cases} |z-2i| = |z|, \\ |z-i| = |z-1|; \end{cases}}$ 2) $\begin{cases} |z^2-2i| = 4, \\ |z+1+i| = |z-1-i|. \end{cases}$

$$\begin{cases} |z^2 - 2i| = 4 & (1) \\ |z+1+i| = |z-1-i| & (2) \end{cases}$$

геометрически (2):

(2) $y=-x$



$\Rightarrow z = x(1-i)$, подставим в (1):

$$|x^2(1-i)^2 - 2i| = 4 \Rightarrow |x^2(-2i) - 2i| = 4$$

$$|-2i||x^2+1| = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow z_1 = 1-i$$

$$z_2 = -1+i$$

2) $z_1 = 1 - i$; $z_2 = -1 + i$.

№5(4)

5. Решить уравнение:

4) $z^8 = 1 + i$.

$$z^8 = 1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_k = \sqrt[16]{2}\cdot e^{i\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)} = \sqrt[16]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{32}(8k+1)}, \quad k = 0 \ldots 7$$

4) $z_k = \sqrt[16]{2} e^{i(8k+1)\pi/32}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

№6

6. Пусть $z = z_0$ — корень многочлена $P(z)$ с действительными коэффициентами. Доказать, что $P(\bar{z}_0) = 0$, т. е. $\bar{z}_0$ — корень многочлена $P(z)$.

□ представим $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$; $a_k \in \mathbb{R}$

тогда $P(\bar{z}_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\bar{z}_0)^k \ \textcircled{=}$

если $z_0 = re^{i\varphi}$ то $\bar{z}_0 = re^{-i\varphi} \Rightarrow (\bar{z}_0)^k = r^k \cdot e^{-k\varphi}$

$= \overline{(z_0^n)}$

$\textcircled{=} \ \sum_{k=0}^{n} a_k (\overline{z_0^k}) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z_0^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k}$

$a_k = \overline{a_k}$ $\qquad = \overline{P(z_0)} = \bar{0}$

$\boxtimes$

№7(3)

7. Пусть z_1 и z_2 — фиксированные точки комплексной плоскости. Дать геометрическое описание множества всех точек z, удовлетворяющих уравнению:

3) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, где $a > \frac{1}{2}|z_2 - z_1|$;

Эллипс, с фокусами z_1 и z_2, a = большая полуось

...очка $z = 1$.

3) Эллипс с фокусами в точках z_1 и z_2 и с большой полуосью, равной a.

№9.(3,4)

9. Выяснить, какая линия на плоскости задается уравнением:

3) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$; $\qquad$ 4) $\operatorname{Re} \frac{z-a}{z+a} = 0 \ (a > 0)$.

3) $\operatorname{Im}\left[\frac{z-1}{z+1}\right] = 0$, пусть $t = z+1$; $z \neq -1$

$\operatorname{Im}\left[\frac{t-2}{t}\right] = 0 \Rightarrow \operatorname{Im}\left[\frac{(t-2)\bar{t}}{|t|^2}\right] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{|t|^2} \cdot \operatorname{Im}[(t-2)\bar{t}]=0 \Rightarrow \operatorname{Im}[(t-2)\bar{t}]=0$

пусть $t = x+iy$

$\Rightarrow \operatorname{Im}[((x-2)+iy)(x-iy)]=0$

$\operatorname{Im}[iy\cdot x-(x-2)iy]=0 \Rightarrow xy-xy+2y=0$

$y=0$

$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

4) $\operatorname{Re}\left[\frac{z-a}{z+a}\right]=0 \quad ; a>0$ и $z \neq -a$

пусть $t=z+a$

$\operatorname{Re}\left[\frac{t-2a}{t}\right]=0 \Rightarrow \operatorname{Re}\left[\frac{(t-2a)\cdot\bar{t}}{|t|^2}\right]=0$

$\Rightarrow \frac{1}{|t|^2}\operatorname{Re}[(t-2a)\bar{t}]=0$

пусть $t=x+iy \Rightarrow \operatorname{Re}[((x-2a)+iy)(x-iy)]=0$

$(x-2a)x+y^2=0$

$x^2-2ax+y^2=0$

$x^2-2ax+a^2+y^2=a^2$

$(x-a)^2+y^2=a^2$ где t

$\Rightarrow$ для z: $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\,(t-a) = x-a$

$\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, t = y$

$\Rightarrow \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = a^2$; где $z = \tilde{x} + i\tilde{y}$

окружность с центром в $z=0$

и радиусом a, кроме $z=-a$

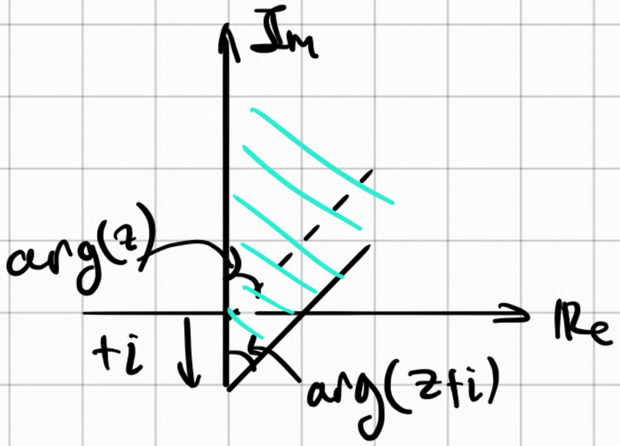
3) Действительная ось.
4) Окружность радиуса a с центром в точке $z=0$.

№ 10 (7, 9)

10. Выяснить, какое множество точек z комплексной плоскости удовлетворяет неравенству:

7) $\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}$; ~~8) $|z| > 1 - \mathrm{Re}\, z$~~; 9) $\mathrm{Re}\, z^4 > \mathrm{Im}\, z^4$.

7) $\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}$



9) $\mathrm{Re}\, z^4 > \mathrm{Im}\, z^4$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^4 = r^4(\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$

$\mathrm{Re}\, z^4 = r^4 \cos 4\varphi$

$\mathrm{Im}\, z^4 = r^4 \sin 4\varphi$

$\Rightarrow \cos 4\varphi > \sin 4\varphi$

$$\cos 4\varphi - \sin 4\varphi > 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 4\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 4\varphi > 0$$

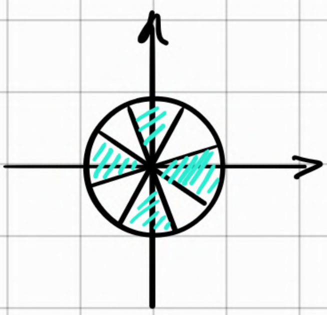
$$\cos\frac{\pi}{4}\cos 4\varphi - \sin\frac{\pi}{4}\sin 4\varphi > 0$$

$$\cos\left(4\varphi + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 4\varphi + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < 4\varphi < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$-\frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2}\pi k < \varphi < \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2}\pi k$$



7) Угол раствора $\frac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z = -i$, стороны которого проходят через точки $z = 1$, $z = 0$.

~~8) Часть плоскости, лежащая с той же стороны~~ параболы $y^2 = 1 - 2x$, ~~что и точка $z = 1$~~ (и ограниченная этой параболой).

9) Четыре угла раствора $\frac{\pi}{4}$ с вершиной в точке $z = 0$, биссектрисами которых являются лучи $\arg z = -\frac{\pi}{16} + \pi k$, $k = 0, 1, 2, 3$.

Во всех случаях точки граничных линий не включаются.

II. Элементарные функции

Функциональные ряды

П3

№ 8(1, 2, 4)

8. Вычислить значения функции e^z в точках:

1) $z = 2\pi i$; 2) $z = \pi i$;
~~3) $z = \pi i/2$~~; 4) $z = -\pi i/2$;
~~5) $z = \pi i/4$~~.

e^z в точке

1) $z = 2\pi i$: $e^z = e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

2) $z = \pi i$: $e^z = e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$

4) $z = -\pi i/2$: $e^z = e^{-\frac{\pi}{2} i} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$

8. 1) 1; 2) -1; ~~3) i~~; 4) $-i$;

№9 (3, 4, 8)

9. Доказать формулы:

3) $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z$; 4) $\sin(\pi+z)=-\sin z$;

8) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$.

3) $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\cos z$

$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ $\quad\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

$\square$ $\sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{e^{iz+i\frac{\pi}{2}}-e^{-iz-i\frac{\pi}{2}}}{2i}=\frac{e^{iz}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}-e^{-iz}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i}$; $\quad e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$

$=\frac{e^{iz}\cdot i-e^{-iz}\cdot(-i)}{2i}=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$ $\boxed{\checkmark}$

4) $\sin(\pi+z)=-\sin z$

$\square$ $\frac{e^{i\pi+iz}-e^{-i\pi-iz}}{2i}=\frac{e^{i\pi}\cdot e^{iz}-e^{-i\pi}\cdot e^{-iz}}{2i}\ominus$; $\quad e^{i\pi}=-1$, $e^{-i\pi}=-1$

$\ominus\ \frac{(-1)\cdot e^{iz}-(-1)\cdot e^{-iz}}{2i}=(-1)\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)=-\sin z$ $\boxed{\checkmark}$

8) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2$

$\square$ $\cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2=$

$$\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}-\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$$

$$=\frac{1}{4}\left(e^{iz_1}+e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}+e^{-iz_2}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{iz_1}-e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2}-e^{-iz_2}\right)$$

$$\frac{1}{4}\Big[e^{iz_1+iz_2}+\cancel{e^{iz_1-iz_2}}+\cancel{e^{-iz_1+iz_2}}+e^{-iz_1-iz_2}+e^{iz_1+iz_2}-\cancel{e^{iz_1-iz_2}}-\cancel{e^{-iz_1+iz_2}}+e^{-iz_1-iz_2}$$

$$=\frac{e^{iz_1+iz_2}+e^{-iz_1-iz_1}}{2}=\cos(z_1+z_2)\ \boxed{\cancel{\ }}$$

№11 (1, 2, 3, 4)

11. Доказать формулы:

1) $\operatorname{sh} z=-i\sin(iz)$; 2) $\operatorname{sh}(iz)=i\sin z$;

3) $\cos(iz)=\operatorname{ch} z$; 4) $\operatorname{ch}(iz)=\cos z$;

$$\operatorname{sh}\theta=\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\qquad \operatorname{ch}\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

1) $\operatorname{sh} z=-i\sin iz$

$$\square\ -i\sin iz=-i\cdot\frac{e^{iz\cdot i}-e^{-iz\cdot i}}{2i}=-\frac{e^{-z}-e^{z}}{2}=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

$$=\operatorname{sh} z\ \boxed{\cancel{\ }}$$

2) $\operatorname{sh}(iz)=i\sin z$

$$\square\ \operatorname{sh} iz=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}=i\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=i\sin z\ \boxed{\cancel{\ }}$$

3) $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$

$\square$ $\dfrac{e^{iz\cdot i} + e^{-iz\cdot i}}{2} = \dfrac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \operatorname{ch} z$ $\blacksquare$

4) $\operatorname{ch}(iz) = \cos z$

$\square$ $\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$ $\blacksquare$

№12(1, 2)

12. Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать, что:

1) $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$, $\quad \operatorname{Im}\sin z = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$;

2) $\operatorname{Re}\cos z = \cos x \cdot \operatorname{ch} y$, $\quad \operatorname{Im}\cos z = -\sin x \cdot \operatorname{sh} y$;

1) $\operatorname{Re}\sin z = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$ $\qquad$ $\operatorname{Im}\sin z = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$

$\square$ $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$; $\quad z = x + iy$

$$= \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = -\frac{1}{2}\cdot i\left(e^{ix}\cdot e^{-y} - e^{-ix}\cdot e^{y}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} i(\cos x + i\sin x)e^{-y} + \frac{1}{2} i(\cos x - i\sin x)e^{y}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-y}(\sin x - i\cos x) + \frac{1}{2}e^{y}(\sin x + i\cos x)$$

$\Rightarrow \operatorname{Re}\sin z = \sin x \cdot \frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y$

$\Rightarrow \operatorname{Im}\sin z = \frac{1}{2}e^{-y}\cdot(-\cos x) + \frac{1}{2}e^{y}\cdot\cos x = \cos x \cdot \operatorname{sh} y$ $\blacksquare$

2) $\mathrm{Re}\cos z = \cos x \,\mathrm{ch}\, y$ $\qquad$ $\mathrm{Im}\cos z = -\sin x \cdot \mathrm{sh}\, y$

$\square$ $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $z = x+iy$

$$= \frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2} = \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i\sin x) + \frac{1}{2}e^{y}(\cos x - i\sin x)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\cos z = \frac{1}{2}e^{-y}\cos x + \frac{1}{2}e^{y}\cdot\cos x = \cos x \cdot \mathrm{ch}\, y$$

$$\mathrm{Im}\cos z = \frac{1}{2}e^{-y}\sin x - \frac{1}{2}e^{y}\sin x = -\sin x\, \mathrm{sh}\, y$$ $\blacksquare$

№13(1,3)

13. Пусть $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$. Доказать, что:

1) $|\sin z| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x}$; ~~2) $|\sin z|$~~

3) $|\mathrm{sh}\, z| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 x - \cos^2 y}$; ~~4) $|\mathrm{ch}\, z|$~~

$|z|^2 = \mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z$; $z = x+iy$

1) $\square$ $|\sin z|^2 = \sin^2 x\, \mathrm{ch}^2 y + \cos^2 x\, \mathrm{sh}^2 y$ $\qquad$ (из №12(1,2))

$$= (1-\cos^2 x)\mathrm{ch}^2 y + \cos^2 x(\mathrm{ch}^2 y - 1)$$

$$= \mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x \Rightarrow |\sin z| = \sqrt{\mathrm{ch}^2 y - \cos^2 x}$$ $\blacksquare$

3) $\square$ заметим, что $\mathrm{sh}\, z = -i\sin iz$ $\qquad$ (из №11(1))

тогда $|\operatorname{sh} z| = |\sin iz|$

из (1)

$$\Rightarrow |\operatorname{sh} z|^2 = |\sin iz|^2 = \operatorname{ch}^2 \operatorname{Im}(iz) - \cos^2 \operatorname{Re}(iz)$$

$$= \operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y \Rightarrow |\operatorname{sh} z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}$$ $\boxtimes$

№14 (1, 4)

14. Описать точки z, в которых следующие функции принимают действительные значения:
1) $\cos z$; ~~2) $\operatorname{ch} z$~~; ~~3) $\sin z$~~; 4) $\operatorname{tg} z$; ~~5) $\operatorname{cth} z$~~.

1) $\cos z \in \mathbb{R}$? $\Leftrightarrow \operatorname{Im} \cos z = 0$

из №12 (2): $\operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{sh} y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{Im} z = 0 \\ \operatorname{Re} z = \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

14. 1) $\operatorname{Im} z = 0$; $\operatorname{Re} z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;

4) $\operatorname{Im} \operatorname{tg} z = 0$

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh}(2y)}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y} \Rightarrow \operatorname{Im} \operatorname{tg} z = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sh}(2y) = 0 \\ \cos 2x + \underbrace{\operatorname{ch} 2y}_{\cos(2iy)} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2\cos(x+iy)\cos(x-iy) \neq 0 \end{cases}$$

$z \neq \pm\frac{\pi}{2} + \pi k$

$$\Rightarrow \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\} \setminus \{z \mid z = \pm\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

4) $\operatorname{Im} z = 0$;

Определение 5.4. Множество решений уравнения $w = e^z$ относительно z называется логарифмом w и обозначается

$$\operatorname{Ln} w := \ln|w| + i \operatorname{Arg} w. \qquad (5.11)$$

№ 17 (1, 4, 8)

17. Найти все решения следующих уравнений:

1) $\sin z = \frac{4i}{3}$; 2) ~~$\sin z = \frac{5}{3}$~~; 3) ~~$\cos z = \frac{3i}{4}$~~; 4) $\cos z = \frac{3+i}{4}$;

5) ~~$\operatorname{tg} z = \frac{5i}{3}$~~; 6) ~~$\operatorname{ctg} z = -\frac{3i}{5}$~~; 7) ~~$\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$~~; 8) $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}$.

1) $\sin z = \frac{4i}{3} \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{4i}{3}$

$e^{iz} - e^{-iz} = -8/3$; пусть $t = e^{iz}$

$t - \frac{1}{t} = -\frac{8}{3} \Rightarrow t^2 + \frac{8}{3}t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-\frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + 4}}{2} =$

$\frac{-\frac{8}{3} \pm \frac{10}{3}}{2} = -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3}$

$\Rightarrow t_1 = -3 \quad \Rightarrow e^{iz} = -3 \Rightarrow iz = \ln 3 + i(2\pi k + \pi)$
$t_2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow$

$k \in \mathbb{Z}$

$z_1 = -i\ln 3 + 2\pi k + \pi$

t_2: $e^{iz} = \frac{1}{3} \Rightarrow iz = \ln\frac{1}{3} + i \cdot 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$

$z_2 = -i \ln\frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

17. 1) $z = i(-1)^k \ln 3 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;

4) $\cos z = \frac{3+i}{4}$

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{3+i}{4} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \left(\frac{3+i}{2}\right)$$

$$t^2 - 2\cdot\frac{(3+i)}{4}t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{3+i}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3+i}{4}\right)^2 - 1} = \frac{3+i}{4} \pm \sqrt{\frac{-4+3i}{8}} = \frac{3+i}{4} \pm \frac{1+3i}{4}$$

$$\Rightarrow t_1 = 1+i$$

$$t_2 = \frac{1-i}{2}$$

$$\Rightarrow e^{iz} = 1+i \Rightarrow zi = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

$$z_1 = -i\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

$$e^{iz} = \frac{1-i}{2} \Rightarrow zi = \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$$

$$z_2 = -i\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\Rightarrow z_{1,2} = \pm\left(-\frac{i}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k; \ k \in \mathbb{Z}$$

4) $z = \pm\left(-\frac{i}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z};$

8) $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^z + e^{-z} = 1$

$t = e^z \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 1 \Rightarrow t^2 - t + 1 = 0$

$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)} = e^z \Rightarrow z = \pm\frac{\pi}{3}i + i \cdot 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

8) $z = \pm \dfrac{\pi i}{3} + 2k\pi i, \;\; k \in \mathbb{Z}.$

№19(3)

19. Пусть $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Доказать, что:

3) Функции $\sin z$ и $\cos z$ стремятся к бесконечности при $y \to \pm\infty$ и это стремление равномерно по x.

$\square$ заметим, что $|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}$

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos x$ - ограничена $\quad |\sin z| \geqslant \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = |\operatorname{sh} y|$

$|\operatorname{sh} y| \to \infty \Rightarrow \sin z \to \infty$ при $y \to \pm\infty$

для $\cos z$:

$\sin^2 z = 1 - \cos^2 z \Rightarrow \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x = 1 - \cos^2 z$

$|\cos z| = \left|\sqrt{1 + \cos^2 x - \operatorname{ch}^2 y}\right| \geqslant \left|\sqrt{1 - \operatorname{ch}^2 y}\right|$

$= \left|\sqrt{-\operatorname{sh}^2 y}\right| = |\operatorname{sh} y| \to \infty \Rightarrow \cos z \to \infty$

равн по x $\blacksquare$

n4

№6(4)

6. Доказать равномерную сходимость ряда на множестве E:

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\cos nz,\ \ E=\{z\colon |\operatorname{Im} z|\leqslant\delta<\ln 2\}$.

Ограничим функциональный ряд, числовым рядом (для т. Вейерштрасса)

$$|\cos nz| = \left|\frac{e^{inz}+e^{-inz}}{2}\right| \leq \frac{|e^{inz}|+|e^{-inz}|}{2}$$

$$|e^{inz}| = |e^{in(x+iy)}| = |e^{inx-ny}| = e^{-ny}$$

$$|e^{-inz}| = e^{ny}$$

$$|\cos nz| \leq \frac{|e^{inz}|+|e^{-inz}|}{2} \leq \frac{2e^{n|y|}}{2} = e^{n|y|} \leq e^{n\delta}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{(n+1)(\delta-\ln 2)}}{e^{n(\delta-\ln 2)}}\right| = e^{\delta-\ln 2} < e^{0} = 1$$

по признаку Даламбера $e^{n(\delta-\ln 2)}$ сходится

$\to$ функц ряд сх. равном $\blacksquare$

III Условия Коши – Римана
Гармонические функции

Справочные сведения

1. Дифференцируемость. Условия Коши—Римана

1.1. *Дифференцируемость.* Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, т. е. на множестве

$$B_r(z_0) = \{z\colon |z - z_0| < r\},$$

где $r > 0$. Если существует конечный предел отношения $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ при $z \to z_0$, тот этот предел называется *производной* функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $f'(z_0)$, т. е.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1}$$

или

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z},$$

где

$$\Delta z = z - z_0, \quad \Delta f = f(z) - f(z_0).$$

Если функция $f(z)$ имеет в точке z_0 производную, то говорят, что функция $f(z)$ *дифференцируема* в точке z_0.

1.2. *Условия дифференцируемости.* Для того чтобы функция

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) функции $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ и $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ дифференцируемы в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$;
2) в точке (x_0, y_0) справедливы равенства (*условия Коши—Римана*):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

2. Понятие регулярной функции. Функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ называется *регулярной* (или *голоморфной*) функцией в области $G \subset \mathbb{C}$, если она определена и дифференцируема в каждой точке области G.

Говорят, что функция f *регулярна в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если она регулярна в некоторой окрестности этой точки.

Говорят, что функция f *регулярна на множестве* D, если существует область $G \supset D$, в которой функция f определена и регулярна.

3. Понятие гармонической функции

3.1. *Определение гармонической функции.* Действительная функция $u(x, y)$, определенная и дважды непрерывно дифференцируемая в области $G \subset \mathbb{R}^2$, называется *гармонической* в области G, если в любой точке $(x, y) \in G$ справедливо равенство

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

n5

№1 (2,4,6)

1. Найти все точки $z = x + iy$, в которых дифференцируемы функции:
~~1) Im z~~; 2) $|\overline{z}|^2$; ~~3) $z^2 - iy^2$~~; 4) $x^2 - y^2 - 2ixy$;
~~5) $x - y + i(x + y)$~~; 6) $z \operatorname{Re} z$.

2) $|\overline{z}|^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = 0 \end{cases}$

Проверим: $\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}: \quad 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}: \quad 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 0$

4) $x^2 - y^2 - 2ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = -2xy \end{cases}$

$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}: \quad 2x = -2x \Rightarrow x = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}: \quad -2y = 2y \Rightarrow y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow z = 0$

6) $z \operatorname{Re} z = (x + iy)x = x^2 + ixy \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 \\ v = xy \end{cases}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}: \quad 2x = x \Rightarrow x = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}: \quad 0 = -y \Rightarrow y = 0$$
$$\to z = 0$$

1. ~~1) Нигде~~; 2) в точке $z = 0$; ~~3) на прямой $\mathrm{Re}\, z = -\mathrm{Im}\, z$~~;
4) нигде;? ~~5) всюду~~; 6) в точке $z = 0$.

№6(2,5)

6. Выяснить, в каких точках $z \in \mathbb{C}$ дифференцируемы функции, и найти их производные:
~~1) $e^{\mathrm{sh}\, z}$~~; 2) $\cos(2e^z)$; ~~3) $\sin z\, \mathrm{sh}\, z + i \cos z\, \mathrm{ch}\, z$~~;
~~4) $\frac{e^z}{z}$~~; 5) $\frac{z}{e^z}$; ~~6) $\frac{\sin z}{1+z^2}$~~.

Теорема 5.1. *Пусть заданы две области D и H в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, две регулярные функции $f : D \to \mathbb{C}$ и $g : H \to \mathbb{C}$, причем выполнено условие, что $f(z) \in H$ для всех $z \in D$ (т. е. $f(D) \subset H$). Тогда сложная функция $\zeta = g(f(z))$ определена и регулярна в области D и справедлива формула дифференцирования*

$$\zeta'(z) = g'(f(z))f'(z), \quad \forall z \in D. \quad (5.1)$$

2) $\cos(2e^z)$ — либо 1) либо 2)

1) По формуле произв. сложной функции:

$$\left(\cos(2e^z)\right)' = -\sin(2e^z) \cdot 2e^z = -2e^z \sin(2e^z)$$

диф. везде

2) По определению

$$2e^z = 2e^{x+iy} = 2e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Из задания ранее: $\mathrm{Re}\, \cos(2e^z) = \cos(2e^x \cos y) \cdot \mathrm{ch}(2e^x \sin y)$

$\mathrm{Im}\, \cos(2e^z) = -\sin(2e^x \cos y) \cdot \mathrm{sh}(2e^x \sin y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(2e^x \cos y) \cdot 2e^x \cos y \cdot \mathrm{ch}(2e^x \sin y) + \cos(2e^x \cos y) \cdot \mathrm{sh}(2e^x \sin y) \cdot 2e^x \sin y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\cos(2e^x \cos y) \cdot 2e^x \cdot (-\sin y) \cdot \mathrm{sh}(2e^x \sin y) - \sin(2e^x \cos y) \cdot \mathrm{ch}(2e^x \sin y) \cdot 2e^x \cos y$$

не трудно заметить, что условие $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ выполн.

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Найдём $\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos(2e^x\cos y)\cdot 2e^x\cos y\cdot sh(2e^x\sin y)$
$-\sin(2e^x\cos y)\cdot ch(2e^x\sin y)\cdot 2e^x\sin y$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \begin{pmatrix}-\sin(2e^x\cos y)\cdot 2e^x\cos y\cdot ch(2e^x\sin y)\\ +\cos(2e^x\cos y)\cdot sh(2e^x\sin y)\cdot 2e^x\sin y\end{pmatrix}$$
$$+ i\begin{pmatrix}-\cos(2e^x\cos y)\cdot 2e^x\cos y\cdot sh(2e^x\sin y)\\ -\sin(2e^x\cos y)\cdot ch(2e^x\sin y)\cdot 2e^x\sin y\end{pmatrix}$$

$$= 2e^x\begin{pmatrix}\cos(2e^x\cos y)\,sh(2e^x\sin y)\sin y\\ -i\cos(2e^x\cos y)\,sh(2e^x\sin y)\cos y\end{pmatrix}$$

$-i\cdot i = 1$

$$+ 2e^x\begin{pmatrix}-\sin(2e^x\cos y)\,ch(2e^x\sin y)\cos y\\ -i\sin(2e^x\cos y)\,ch(2e^x\sin y)\sin y\end{pmatrix}$$

$$= 2e^x\cdot(-i)\begin{pmatrix}\cos(2e^x\cos y)\,sh(2e^x\sin y)\,i\sin y\\ \cos(2e^x\cos y)\,sh(2e^x\sin y)\cos y\end{pmatrix}$$

$$2e^x\cdot(-1)\begin{pmatrix}\sin(2e^x\cos y)\,ch(2e^x\sin y)\cos y\\ \sin(2e^x\cos y)\,ch(2e^x\sin y)\,i\sin y\end{pmatrix}$$

$$= 2e^x(-i)\cdot e^{iy}\cdot\cos(2e^x\cos y)\,sh(2e^x\sin y)$$
$$+ 2e^x\cdot(-1)\cdot e^{iy}\cdot\sin(2e^x\cos y)\,ch(2e^x\sin y)$$

$$= -2e^z\cdot\sin(2e^z)$$

5) $\dfrac{z}{e^z}$

Предложение 3.1. *Если функции f и g дифференцируемы в точке z_0, то в точке z_0:*
а) *функция $f+g$ дифференцируема и $(f+g)' = f' + g'$,*
б) *функция fg дифференцируема и $(fg)' = f'g + fg'$,*
в) *функция $\frac{f}{g}$ дифференцируема, если $g(z_0) \neq 0$, и*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

$\dfrac{z}{e^z}$ диф. везде

$$\left(\frac{z}{e^z}\right)' = \frac{e^z - ze^z}{e^{2z}} = (1-z)e^{-z}$$

6. ~~1) $\operatorname{ch} z\, e^{\operatorname{sh} z}$~~; 2) $-2e^z \sin(2e^z)$;
~~3) $(1+i)\cos z \operatorname{sh} z + (1-i)\sin z \operatorname{ch} z$~~;
~~4) $\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)e^z$, $z \neq$~~ 0; 5) $(1-z)e^{-z}$;

№7(1,6)

7. Выяснить, где дифференцируемы функции, и найти их производные:
1) $\operatorname{tg} z$; ~~2) $\operatorname{ctg} z$~~; ~~3) $\frac{e^z+2}{e^z-2}$~~; ~~4) $\frac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}$~~;
~~5) $(e^z + e^{-z})^{-3}$~~; 6) $\dfrac{\sin z}{\sin z - \cos z}$.

1) $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ диф $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi k\}, k \in \mathbb{Z}$

$$\operatorname{tg}' z = \frac{\sin' z \cos z - \sin z \cos' z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}$$

6) $\dfrac{\sin z}{\sin z - \cos z}$

диф-ема: $\sin z - \cos z \neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin z + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos z \neq 0$

$\sin\frac{\pi}{4}\sin z + \cos\frac{\pi}{4}\cos z \neq 0 \Rightarrow \cos\left(z + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Rightarrow z = \frac{\pi}{4} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ диф-ема $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{4} + \pi k\}$

произв: $\dfrac{\cos z(\sin z-\cos z)-\sin z(\cos z+\sin z)}{(\sin z-\cos z)^2}$

$$= \frac{-1}{(\sin z-\cos z)^2}$$

7. 1) $\dfrac{1}{\cos^2 z}$; ~~2)~~ $\cancel{-\dfrac{1}{\sin^2 z}}$; ~~3)~~ $\cancel{\dfrac{-4e^z}{(e^z-2)^2}}$; ~~4)~~ $\cancel{\cos 2z}$;

5) $\cancel{\dfrac{3(e^{-z}-e^z)}{(e^z+e^{-z})^4}}$; 6) $\dfrac{-1}{(\sin z-\cos z)^2}$.

№13(1,2)

13. В следующих задачах дается одна из пары сопряженных гармонических функций u или v. Найти вторую функцию пары.
1) $u = xy$; 2) $u = x^2 - y^2 + 2xy$;

гармоническая: $\Delta u(x,y) = 0$

сопряж. u и v ⇒ для них верен критерий К-Р

1) $u = xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = \frac{y^2}{2} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -x \Rightarrow \varphi = -\frac{x^2}{2} + C$$

$\Rightarrow v = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} + C$; заметим, что $\Delta v = 0$ верно

2) $u = x^2 - y^2 + 2xy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x + 2y = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = 2xy + y^2 + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -2y + 2x = -2y - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2x \Rightarrow \varphi = -x^2 + C$$

$\Rightarrow v = 2xy + y^2 - x^2 + C$; $\Delta v = 0$ верно

13. 1) $-\dfrac{x^2-y^2}{2} + C$; 2) $2xy \underset{+C}{-} x^2 + y^2 + C$;

№17(3,6)

17. Восстановить регулярную функцию $f(z)$ по условию

3) $\operatorname{Im} f(z) = y \operatorname{ch} x \cos y + x \sin y \operatorname{sh} x$, $f(0) = 1$;

$v = \operatorname{Im} f = y \operatorname{ch} x \cos y + x \sin y \operatorname{sh} x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ch} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y + x \cos y \operatorname{sh} x$$

$$\Rightarrow u = \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{sh} x \sin y + \cos y (x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) + \varphi(y)$$

$$= -y \operatorname{sh} x \sin y + \cos y \cdot x \operatorname{ch} x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -\operatorname{sh} x \sin y - y \operatorname{sh} x \cos y - \sin y \, x \operatorname{ch} x + \frac{d\varphi}{dy}$$

$$= -y \operatorname{sh} x \cos y - \sin y \operatorname{sh} x - x \sin y \operatorname{ch} x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \Rightarrow \varphi = C$$

$$\Rightarrow u = -y\,\mathrm{sh}x \sin y + \cos y \cdot x\,\mathrm{ch}x + C$$

подставим $f(0) = 1$; $f = u + iv$

$v(0) = 0$; $u(0) = C \Rightarrow C = 1$

$$f(z) = (-y\,\mathrm{sh}x \sin y + \cos y \cdot x\,\mathrm{ch}x + 1) + i(y\,\mathrm{ch}x \cos y + x \sin y\,\mathrm{sh}x)$$

$$= 1 + \cos y \cdot \mathrm{ch}x \cdot (x + iy) + \sin y\,\mathrm{sh}x\,(ix - y)$$

$$= 1 + \cos y\,\mathrm{ch}x\,(x + iy) + i \sin y\,\mathrm{sh}x\,(x + iy)$$

$$= 1 + (x + iy)\left(\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}iy + \mathrm{sh}(iy)\,\mathrm{sh}(x)\right) =$$

$$= z\,\mathrm{ch}z + 1$$

3) $z \,\mathrm{ch}\, z + 1$;

6) 6) $\mathrm{Re}\, f(z) = xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y, \quad f(0) = i$;

$$u = \mathrm{Re}\, f = xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow e^x \cos y + xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v = \cancel{e^x \sin y} + xe^x \sin y + (y+1)\cos y \cdot e^x \cancel{- \sin y \cdot e^x} + \varphi(x)$$

$$= xe^x \sin y + (y+1)\cos y\, e^x + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow -xe^x \sin y - e^x \sin y - ye^x \cos y - e^x \cos y$$

$$= -e^x \sin y - xe^x \sin y - (y+1)\cos y\, e^x + \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = 0 \to \varphi = C$$

$$\Rightarrow V = xe^x \sin y + (y+1)\cos y\, e^x + C$$

$$f(0) = i \to i(1+c) = i \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow f = u + iv = (xe^x \cos y - (y+1)e^x \sin y)$$
$$+ i(xe^x \sin y + (y+1)\cos y \cdot e^x)$$

$$xe^x(\cos y + i\sin y) + ye^x(-\sin y + i\cos y) + e^x(-\sin y + i\cos y)$$

$$= xe^x \cdot e^{iy} + ye^x \cdot ie^{iy} + e^x \cdot ie^{iy} = (z+i)e^z$$

6) $(z+i)e^z$;

IV Ряд Тейлора:

Теорема 9.2. *Если функция f регулярна в круге $\mathrm{B}_r(a)$, где $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, то она представима в этом круге $\mathrm{B}_r(a)$ в виде суммы сходящегося ряда Тейлора, т. е.*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall\, z \in \mathrm{B}_r(a),$$

где

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

n7

№4

4. Разложить функцию

$$f(z) = \frac{2z^2 + 2z - 7}{z^2 + z - 2}$$

в ряд Тейлора в окрестности точки $z = -1$.

$$f(z) = \frac{2z^2 + 2z - 7}{z^2 + z - 2} = 2 + \frac{-3}{z^2 + z - 2}$$

$$= 2 + \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z-1}$$

в окресности $z = -1 \Rightarrow$ пусть $t = z + 1$

$$\Rightarrow f(t) = 2 + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - t/2}$$

$$= 2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^n$$

$$= \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right) = \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (z+1)^n \left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n\right)$$

$|z+1| < 1$

4. $f(z) = \dfrac{7}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2^{-(n+1)} + (-1)^n\right)(z+1)^n$.

№6(6)

6. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z=0$ функции:

6) $\operatorname{ch} z \cdot \cos z$.

6) $\operatorname{ch} z \cdot \cos z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2} \cdot \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$= \frac{1}{4}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{(1+i)z}+e^{-(1+i)z}+e^{(1-i)z}+e^{-(1-i)z}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(1+i)z + \operatorname{ch}(1-i)z\right)$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((1+i)z)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((1-i)z)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\left((1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}\right)$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\cdot\left((2i)^{n}+(-2i)^{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{4k}}{(4k)!}\cdot(-1)^{k}\cdot 2^{2k}$

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}2^{2n}\,\dfrac{z^{4n}}{(4n)!}$.

Точка $z=a$ $(a\neq\infty)$ является нулем порядка m функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(z)=(z-a)^{m}h(z),$$

где $h(z)$ — регулярная в точке a функция, такая, что $h(a)\neq 0$.

№11(1,4)

11. Определить порядок m нуля $z=a$ функции $f(z)$, если:

1) $f(z)=(\cos 3z-\cos 5z)^{2}(1-\cos 2z)^{3}$, $a=0$;

4) $f(z)=(z^{4}+2z^{3}-2z-1)^{2}(e^{i\pi z}+1)^{3}$, $a=-1$.

1) $f(z)=(\cos 3z-\cos 5z)^{2}(1-\cos 2z)^{3}$; $z=0$

$g(z)=(\cos 3z-\cos 5z)=z^{2}\cdot h_{1}(z)$

g': $-\sin 3z\cdot 3+\sin 5z\cdot 5=0$, g'': $-\cos 3z\cdot 9+\cos 5z\cdot 25\neq 0$

$$t(z) = (1 - \cos 2z) = z^2 \cdot h_2(z)$$

$\sin 2z \cdot 2 = 0, \cos 2z \cdot 4 \neq 0$

$$\Rightarrow f(z) = z^{10} \cdot h_1^2(z) \cdot h_2^3(z)$$

$$\Rightarrow m = 10$$

4) $f(z) = (z^4 + 2z^3 - 2z - 1)^2 (e^{i\pi z} + 1)^3 \; ; \; z = -1$

$$g(z) = (z^4 + 2z^3 - 2z - 1) = (z-1)(z+1)^3$$
$$= (z+1)^3 h_1(z)$$

$$t(z) = e^{i\pi z} + 1 = (z+1) h_2(z)$$

$$i\pi e^{i\pi z} = -i\pi \neq 0$$

$$\Rightarrow (z+1)^9 h_1(z) \cdot h_2(z) \Rightarrow m = 9$$

11. 1) $m = 10$; 2) $\cancel{m = 6}$; 3) $\cancel{m = 6}$; 4) $m = 7$.?

№12(1)

12. Найти разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функции, удовлетворяющей указанным ниже условиям:

1) $f'(z) = f(z)$, $f(0) = 1$;

$$f'(z) = f(z) \Rightarrow f(z) = e^z \cdot C \; ; \; f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$
$$\Rightarrow f(z) = e^z$$

в окр. $z = 0$: $f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

12. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$;

V. Теорема единственности

1. Теорема единственности. *Если функции f_1 и f_2 регулярны в области G, совпадают в ней на бесконечном множестве точек E, имеющем предельную точку в G, то эти функции тождественно равны друг другу в области G.*

п 9;

№2 (1, 2, 5, 11, 12)

2. Существует ли функция $f(z)$, регулярная в некоторой окрестности точки $z = 0$ и удовлетворяющая одному из следующих условий (для всех $n = 1, 2, \ldots$):

1) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{\pi n}{2}$;

2) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cos \pi n$;

3) ~~$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$;~~

4) ~~$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2 \pi n}{2n+1}$;~~

5) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n + \cos \pi n}$;

9) ~~$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$;~~

10) ~~$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{n^3}$;~~

11) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2(\pi n)}{n^2}$;

12) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin^2\frac{\pi n}{2}}{n^2}$;

13) ~~$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < e^{-n}$;~~

1) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{\pi n}{2}$

заметим, что $f\left(\frac{1}{2k}\right) = \sin \pi k = 0$

$\Rightarrow$ пусть $g(z) = 0$; на мн-ве точек $z = \frac{1}{2k}$

f и g совпадают, точек бесконечно много

и предельная точка $(0,0)$. $G = \mathbb{C}$. Тогда т.к. g = рег,

если f — регулярна, то

по условию теоремы $f \equiv g$, что не правда при $z \neq \frac{1}{2k}$ => противоречие., не существует

2) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\cos \pi n$

для $f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k}\cos 2\pi k = \frac{1}{2k}$

пусть $g(z) = z$

=> для $z = \frac{1}{2k}$ => f и g совпадают

$G = \mathbb{C}$, $(0,0)$ предельная, $g(z)$ = регулярна => если f регулярна =>

$f \equiv g$, что не верно (для $n = 2k+1$)

=> не существует

5) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n + \cos \pi n}$

для $n = 2k$: $f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{4k+1}$

пусть $g(z) = \frac{z}{z+2}$, для $z = \frac{1}{2k}$ f и g совп.

$G = B_1(0,0)$, $(0,0)$ - пред. => из теор $f \equiv g$, для $n = 2k+1$ противоречие

$z = -2 \notin B_1(0,0)$

g = регулярная в $B_1(0,0)$ => не сущ.

11) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2(\pi n)}{n^2}$

заметим, что $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\cos^2(\pi n)}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow f(z) = z^2 \Rightarrow$ сущ.

12) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin^2\frac{\pi n}{2}}{n^2}$

для $n = 2k$: $f\left(\frac{1}{2k}\right) = f\left(-\frac{1}{2k}\right) = \frac{\sin^2 \pi k}{4k^2} = 0$

пусть $g(z) = 0 \Rightarrow$ для $z = \frac{1}{2k}$ g и f совп, g = регулярна

$G = \mathbb{C}$, $(0,0)$ – предельная $\Rightarrow$ из теоремы $\Rightarrow$ против

т.к. $n = 2k+1$ не совп

$\Rightarrow$ не сущ

2. 1) Нет; 2) нет; ~~3) да; 4) да.~~
5) нет; ~~6) да; 7) нет; 8) нет.~~
~~9) нет; 10) нет~~; 11) да; 12) нет.

№13(5,8)

13. Опираясь на справедливость приводимых ниже формул для действительных значений переменных, доказать их справедливость и для произвольных комплексных значений этих переменных:

5) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;

8) $\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{z_1+z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1-z_2}{2}$.

5) $\sin(z_1+z_2) - \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2 = 0$

◻ пусть $z_1 = x \in \mathbb{R}$

обозначим $\varphi(z_2) = \sin(x+z_2) - \sin x \cdot \cos z_2 - \cos x \cdot \sin z_2$

пусть $G = \mathbb{C}$, беск. мн-во точек: $z_2 \in \mathbb{R}$ и $z_2 = 0$ (пред. точкой)

заметим, что для $z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(z_2) \equiv 0$

$\Rightarrow$ по теор. единственности $\Rightarrow \varphi(z_2) \equiv 0$ для $\forall z_2 \in \mathbb{C}$

фикс. $z_2 \in \mathbb{C}$,

пусть $\psi(z_1) = \sin(z_1+z_2) - \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2$

было показано, что для $z_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \psi(z_1) \equiv 0$

$G = \mathbb{C}$, $z_1 \in \mathbb{R}$, $z_1 = 0$ пред точка

$\Rightarrow$ по теор. $\Rightarrow \psi(z_1) \equiv 0 \quad \forall z_1 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ ◻

8) $\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2\operatorname{sh}\frac{z_1+z_2}{2}\operatorname{ch}\frac{z_1-z_2}{2}$

□ Аналогично пункту 5), $G = \mathbb{C}$, беск мн-во $= \mathbb{R}$
$z=0$ предельная

⊠

№T1

1. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено $f^{(n)}(z) = 0$. Доказать, что f – многочлен степени меньше n.

□ заметим, что т.к $f^{(n)}(z)=0 \Rightarrow f^{(m)}(z)=0$
для $\forall m \geq n$

выберем точку $z_0 \in G$ и r такие, что $B_r(z_0) \subset G$

тогда $\forall z \in B_r(z_0) \Rightarrow f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$

т.к $f^{(k)}(z) \equiv 0 \ \forall k \geq n \Rightarrow f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$

пусть $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ для $\forall z \in \mathbb{C}$

покажем, что $f \equiv P$ для $\forall z \in \mathbb{C}$, не только
для $z \in B_r(z_0)$

Возьмём посл $z_m = z_0 + \frac{r}{m+1}$; $\{z_m\} \subset B_r(z_0)$
$z_m \to z_0$, f и P регулярны

$\Rightarrow$ по ТЕ $\Rightarrow f \equiv P$ для $\forall z \in G$ ⊠

№T3

3. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, гармонические в области D, совпадают в ней в окрестности некоторой точки $(x_0, y_0) \in D$. Доказать, что эти функции тождественно равны друг другу в области D.

$\Delta u = 0$ в D

$\Delta v = 0$

$\exists (x_0, y_0) \in D \hookrightarrow \forall (x, y)$ в некоторой окр $B(x_0, y_0)$

$\hookrightarrow u(x_0, y_0) = v(x_0, y_0)$

$\square$ пусть $w = u - v$

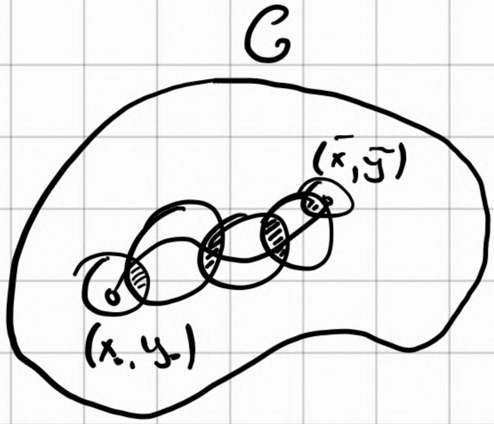
Рассмотр произвольную точку $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in G$

т.к область является связанным мн-вом

то $\exists$ кривая γ, соединяющая (x_0, y_0) и $(\tilde{x}, \tilde{y})$

Покроим γ кругами $B_0, B_1 \ldots B_k$

так, что



1) $B_i \subset G$

2) $B_0 \subset B(x_0, y_0)$ и $(x_0, y_0) \in B_0$

3) $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in B_k$

4) B_i пересекается с B_{i+1}

База:

тогда рассмотрим B_0: ω - гармоническая ф.

$\Rightarrow \exists f_0(z)$ опред на B_0: $\mathrm{Re}(f_0) = \omega$ и f_0 - регулярна

$\Rightarrow \mathrm{Re}\, f_0 \equiv 0 \ \forall z_0 \in B_0$ (по построению)

из критерия К-Р $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f_0 = C_0 \Rightarrow f_0 = iC_0$

Шаг индукции:

пусть для B_i верно, что $\omega \equiv 0$

для B_{i+1} $\exists f_{i+1}$: $\mathrm{Re}(f_{i+1}) = \omega$ и f_{i+1} - рег.

Рассмотрим $B_i \cap B_{i+1}$ = область

т.к в $B_i \cap B_{i+1}$ $\omega = 0 \Leftrightarrow f_{i+1}$ совпадает с iC_i на $B_i \cap B_{i+1}$

$\overset{\text{по TE}}{\Rightarrow} f_{i+1} = iC_i$ для $B_{i+1} \Rightarrow \mathrm{Re}\, f_{i+1} = 0$

$\Rightarrow$ по индукции $\mathrm{Re}\, f_k = 0 \Rightarrow \omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$

т.к выбор $(\tilde{x}, \tilde{y})$ - произвольный $\Rightarrow \omega \equiv 0$ на G $\Rightarrow u \equiv v$ $\boxtimes$

№ Т4

4. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, гармонические в области D, совпадают в ней на бесконечном множестве точек E, имеющем предельную точку в D. Верно ли, что эти функции тождественно равны друг другу в области D?

рассмотрим $\begin{cases} u(x,y) = x \\ v(x,y) = 0 \end{cases}$, $D \equiv \mathbb{C}$

$u = v$ для $E = \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{n} \end{cases}$ беск мно-во + предельная точка $(0,0)$

u не совпадает с v $\Rightarrow$ нет

VI Ряд Лорана.

1. Область сходимости ряда Лорана. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad (1)$$

где a — фиксированная точка комплексной плоскости, c_n — заданные комплексные числа, называется *рядом Лорана*. Ряд (1) называется *сходящимся в точке* z, если в этой точке сходятся ряды

регулярная часть
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad (2)$$

главная часть
$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \qquad (3)$$

а сумма ряда (1) по определению равна сумме рядов (2) и (3). Область сходимости ряда (2) — круг

$$|z-a| < R$$

(при $R = 0$ ряд (2) сходится только при $z = a$, а при $R = \infty$ — во всей комплексной плоскости). Ряд (3) сходится в области

$$|z-a| > \rho.$$

Если $\rho < R$, то ряд (1) сходится в области

$$D = \{z \colon \rho < |z-a| < R\}, \qquad (4)$$

т. е. в круговом кольце с центром в точке a (эту область называют *кольцом сходимости ряда* Лорана (1)).

n 11

№1(б)

1. Найти множество точек z, в которых сходится ряд Лорана:

6) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$;

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \frac{1}{n^2+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{n^2+1}$$

сх при $|z| \le 1$ — сх при $|z| \ge 1$

$\Rightarrow$ для сходимости необх $|z| = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|z^n\cdot\frac{1}{n^2+1}\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} \le \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ сходится}$$

$\Rightarrow$ ряд абс сходится

Аналогично для $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\cdot\frac{1}{n^2+1}$

при $|z|=1$ сходится 6) $|z| = 1$;

№2 (1, 4, 6)

2. Опираясь на формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а также используя дифференцирование и интегрирование, доказать:

1) $\frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1}z^n, \ |z| > |b|$;

4) $\frac{1}{(z-b)^2} = -\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)b^{-n-2}z^n, \ |z| > |b|$;

6) $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{0}(1-n)(b-a)^{-n}(z-a)^n, \ a \ne b, \ |z-a| > |b-a|$.

1) $\frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n; \ |z|>|b|$

$$\square \ \frac{1}{z-b} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{b}{z}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^n = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{z}\right)^{n-1} = \frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{b}{z}\right)^{-n-1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1}\cdot z^n \ \boxtimes$$

4) $\frac{1}{(z-b)^2} = -\sum_{n=-\infty}^{-2}(n+1)b^{-n-2}z^n; \ |z|>|b|$

$\square$ обозначим $S = \frac{1}{(z-b)^2}$

$$\int\frac{1}{(z-b)^2}dz = -\frac{1}{z-b} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1}\cdot z^n(n+1)$$

$$\int S\,dz = -\sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n \Rightarrow S = -\sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^{n-1}\cdot n$$

$$\Rightarrow S = -\sum_{n=-\infty}^{-2} b^{-n-2} z^n(n+1) \ \boxtimes$$

6) $\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} (1-n)(b-a)^{-n}(z-a)^n$, $|z-a| > |b-a|$

$\square$ пусть $t = z-a$

$\Rightarrow z-b = t-(b-a)$, $b-a=d$

$\Rightarrow \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 = \left(\frac{t}{t-d}\right)^2 = t^2 \cdot \left[-\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) d^{-n-2} t^n\right]$

$= -\sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1) d^{-n-2} t^{n+2} = \sum_{n=-\infty}^{0} (1-n)(b-a)^{-n}(z-a)^n$ $\boxtimes$

№3(1, 6)

3. Разложить в ряд Лорана по степеням z в кольце $1 < |z| < 2$ функцию:

1) $\dfrac{1}{(z+1)(z-2)}$;

6) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$.

1) $\frac{1}{(z+1)(z-2)} = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2-z} + \frac{1}{z+1}\right] = -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right]$

$|z|<2 \Rightarrow \frac{1}{1-z/2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cdot z^n$

$\frac{1}{|z|}<1 \Rightarrow \frac{1}{1+1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} \Rightarrow -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cdot z^n + \underbrace{\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}}_{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}}\right]$

$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{3}\cdot(-1)^n\cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3}\cdot 2^{-n-1}\cdot z^n$

1) $\displaystyle\sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3\cdot 2^{n+1}} z^n$;

6) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z^2+4)}$

$t = z^2;\quad 1 < |t| < 4$

$$\frac{1}{(t-1)^2(t+4)} = \frac{1}{100(1+\frac{t}{4})} - \frac{1}{25(t-1)} + \frac{1}{5(t-1)^2}$$

$$= \frac{1}{100}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{t}{4}\right)^n - \frac{1}{25}\sum_{n=-\infty}^{n=-1} t^n - \frac{1}{5}\sum_{n=-\infty}^{-2} t^n(n+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{-n}\cdot(-1)^n}{100}\cdot t^n - \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{25}t^n - \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{1}{5}t^n(n+1)}_{=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{5}t^n(n+1)}$$

$= \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{5}t^n(n+1)$, т.к. при $n=-1$ $=0$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{-5n-6}{25}\cdot z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{100\cdot 4^n}\cdot z^{2n}$$

6) $\sum\limits_{n=-1}^{-\infty}\dfrac{-5n-6}{25}z^{2n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{100\cdot 4^n}z^{2n}$.

№4(4)

4. Разложить в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце D (точка a и кольцо D указаны в скобках) функцию:

4) $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$ $(a=1,\ 2i \in D)$;

разложить по $z-1$

$$f(z)=\frac{z^2-1}{z^2+1}=\frac{z^2+1-2}{z^2+1}=1-2\cdot\frac{1}{1+z^2}$$

функция не регулярна при $z=\pm i$ $\Rightarrow$ $D=\{z \mid |z-1|>\sqrt{2}\}$

и $2i\in D$

$$f(z)=1-2\cdot\frac{1}{z^2+1}=1+i\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$$

пусть $t=z-1$

$$= 1+i\left(\frac{1}{t+1-i}-\frac{1}{t+1+i}\right) \quad |t|>\sqrt{2}$$

$$=1+i\left(\frac{1}{t\left(1+\frac{1-i}{t}\right)}-\frac{1}{t\left(1+\frac{1+i}{t}\right)}\right)$$

$$=1+i\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-i)^n}{t^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+i)^n}{t^{n+1}}\right)$$

$$=1+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\Big(\underbrace{(1-i)^n}_{2^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi}{4}n}}-\underbrace{(1+i)^n}_{2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{\pi}{4}n}}\Big)=1+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{t^{n+1}}\left(2^{\frac{n}{2}+1}\right)\left((-2i)\,\frac{e^{\frac{\pi}{4}n}-e^{-\frac{\pi}{4}n}}{2i}\right)$$

$$=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{t^{n+1}}2^{\frac{n}{2}+1}\sin\frac{\pi}{4}n=1+\sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^{n+1}2^{-\frac{n}{2}+1}\sin\frac{\pi n}{4}(z-1)^{n-1}$$

запись как в ответе

$$= 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^n 2^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi(n+1)}{4}\right)(z-1)^n$$

4) $1 + \sum\limits_{n=0}^{-\infty} (-1)^{n+1} 2^{-\frac{n}{2}+1} \sin\frac{\pi n}{4} (z-1)^{n-1}$;

№5(4)

5. Разложить данную функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в кольце, которому принадлежит точка z_0. Указать границы кольца сходимости.

4) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+6} + \dfrac{z-1}{2z^2-3z}$, $z_0 = 2$;

f регулярна при $z^2 \neq -6$ и $2z^2 - 3z \neq 0$ $\Rightarrow$ $z \neq \pm i\sqrt{6}$, $z \neq 0$, $z \neq 3/2$

$$D: \frac{3}{2} < |z| < \sqrt{6}$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{z}{z^2+6}}_{f_1(z)} + \underbrace{\frac{z-1}{2z^2-3z}}_{f_2(z)}$$

$$f_1(z) = \frac{z}{z^2+6} = \frac{z}{6} \cdot \frac{1}{1+\frac{z^2}{6}} = \frac{z}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{6^{n+1}}$$

$$f_2(z) = \frac{z-1}{2z^2-3z} = \frac{1}{3z} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2z-3} = \frac{1}{3z} + \frac{1}{6z} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{2z}}$$

$$= \frac{1}{3z} + \frac{1}{6z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3/2}{z}\right)^n = \frac{1}{3z} + \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{z^n}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}} \cdot z^{2n+1} + \frac{1}{3z} + \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{z^n}$$

запись как в ответе

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}} z^{2n+1} + \frac{1}{2z} + \sum_{n=-\infty}^{-2} \frac{1}{9} \left(\frac{2}{3}\right)^n z^n$$

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n+1}} z^{2n+1} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{9} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{z^n}, \ \frac{3}{2} < |z| < \sqrt{6};$

№7(3)

7. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - a$ в кольце D, которому принадлежит точка z_0. Указать границы кольца D.

3) $f(z) = \dfrac{5 - 4z}{(z+1)(z^2-1)^2}, \ a = 1, \ z_0 = 0;$

f не регулярна при $z \neq \pm 1$, $0 \in D \Rightarrow$ $D = 0 < |z-1| < 2$

$t = z - 1$

$$f(t) = \frac{1-4t}{(t+2)^3 t^2} = \left(\frac{1-4t}{8t^2}\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^3}}_{g(t)}$$

$$g(t) = \frac{1}{\left(1+\frac{t}{2}\right)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (n+1)(n+2)$$

$$f(t) = \frac{(1-4t)}{t^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} (n+1)(n+2)$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+4}}(n+1)(n+2) - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} \frac{(-1)^n}{2^{n+2}} (n+1)(n+2)\right]$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+4}}(n+1)(n+2) - \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} n(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+4}} \left[(n+1)(n+2) + 8n(n+1)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{t^2}\left[\frac{1}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \frac{(-1)^n}{2^{n+4}}(n+1)(9n+2)\right]$$

$$= \frac{1}{8t^2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-2} \frac{(-1)^n}{2^{n+4}}(n+1)(9n+2)$$

$$= \frac{1}{8t^2} + \sum_{n=-1}^{\infty} t^n \frac{(-1)^{n+2}}{2^{n+6}}(n+3)(9n+20)$$

$$= \frac{1}{8(z-1)^2} - \frac{11}{16(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \frac{(-1)^n}{2^{n+6}}(n+3)(9n+20)$$

? 3) $f(z) = -\frac{1}{4(z-1)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{9n+10}{2^{n+3}}(z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 2;$

№8(6)

8. Разложить функцию $f(z)$ в ряд по степеням z в кольце, которому принадлежит точка z_0. Указать границы кольца сходимости.

6) $f(z) = \frac{(1-i)z-5}{iz^2+(2-3i)z-6}, \quad z_0 = 1+2i;$

f не регулярна при $z=3$ и $z=2i$

$$|z_0| = \sqrt{5} \Rightarrow D = \{z \mid 2 < |z| < 3\}$$

$$f(z) = \frac{(1-i)z-5}{iz^2+(2-3i)z-6} = -\frac{1}{z-3} - \frac{i}{z-2i} = \frac{1}{3}\cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{z}{3}}}_{f_1} - \frac{i}{z}\cdot \underbrace{\frac{1}{1-\frac{2i}{z}}}_{f_2}$$

$$f_1 = \frac{1}{1-z/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n$$

$$f_2 = \frac{1}{1-\frac{2i}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z}\right)^n$$

$$f(z) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n - \frac{i}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2i}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot z^n - \frac{i}{2}\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(2i)^n}\cdot z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=-\infty}^{-1} -\frac{1}{2^{n+1}i^n} z^n$$

6) $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum\limits_{n=-1}^{-\infty}\left(-\frac{1}{2^{n+1}i^n}\right)z^n,\ \ 2 < |z| < 3;$

$\surd\, g(z)$

9. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце, которому принадлежит точка z_0. Указать границы кольца сходимости.

2) $f(z) = \dfrac{-4-2i}{(z+1+2i)(z-3)},\ \ a=-1,\ \ z_0 = -1-5i;$

f не регулярна при $z = -1-2i$, $z = 3$ $\Rightarrow |z+1| > 4$

$|-1-5i| > |-1-2i+1|$

$> |3+1|$

$$f(z) = \frac{-4-2i}{(z+1+2i)(z-3)} = -\frac{1}{z-3} + \frac{1}{z+1+2i}$$

$$t = z+1 \Rightarrow f(t) = -\frac{1}{t-4} + \frac{1}{t+2i}$$

$$= -\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{t}} + \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{1+2i/t}$$

$$= -\frac{1}{t}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{t}\right)^n + \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2i}{t}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2i)^{n-1}}{(z+1)^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+1)^{n+1}}$$ ← записан как в ответе $$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2i)^{n-1}}{(z+1)^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{(z+1)^n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left((-2i)^{-n-1} - 4^{-n-1}\right)(z+1)^n$$

2) $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2i)^{n-1}}{(z+1)^n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+1)^{n+1}}$, $|z+1| > 4$;

№10(6)

10. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-a$ в кольце, которому принадлежит точка z_0. Указать границы кольца сходимости.

6) $f(z) = \frac{z-1-5i}{z^2-2z+2} + \frac{3z-1-3i}{z^2-z(1+2i)-1+i}$, $a = 2i$, $z_0 = 0$;

по степеням $z - 2i$

f не рег. при $z = 1 \pm i$

$z = i$ $\Rightarrow$ $D = \{z \,/\, \sqrt{2} < |z-2i| < \sqrt{10}\}$

$z_0 = 0 \in D$

$|1-i-2i| = \sqrt{10}$

$|i-2i| = 1$

$|1+i-2i| = \sqrt{2}$ $\quad |0-2i| = 2$

$$f(z) = \frac{z-1-5i}{z^2-2z+2} + \frac{3z-1-3i}{z^2-z(1+2i)-1+i} = \frac{1}{z-i} + \frac{3}{z-(1-i)}$$

пусть $t = z - 2i$ $\Rightarrow f(t) = \frac{1}{t+i} + \frac{3}{t+3i-1}$

$$= \frac{1}{t} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{i}{t}}}_{f_1} + \frac{3}{(3i-1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{t}{3i-1}}}_{f_2}$$

$$f_1(t) = \frac{1}{1+\frac{i}{t}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i}{t}\right)^n$$

$$f_2(t) = \frac{1}{1+\frac{t}{3i-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{3i-1}\right)^n$$

$$f(t) = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{i}{t}\right)^n + \frac{3}{3i-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{3i-1}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)(z-2i)^n}{(1-3i)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(z-2i)^n} =$$ ← запись как в ответе

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)}{(1-3i)^{n+1}} (z-2i)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} (-i)^{-n-1} (z-2i)^n$$

6) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)(z-2i)^n}{(1-3i)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n-1}}{(z-2i)^n}$,

$z \neq 1+i$? $1 < |z-2i| < \sqrt{10}$;

№ T5

5. Доказать, что если четная функция регулярна в кольце с центром в точке $z = 0$, то ее разложение в этом кольце в ряд Лорана не содержит нечетных степеней.

77[3*(21)]

$\square$ $f(z) = f(-z)$

разложение по z

$\gamma_r = \{z \mid |z| = r\}$, $r \in \{\rho, R\}$

разложение: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot z^n$; $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\psi)}{\psi^{n+1}} d\psi$

для $n=2k-1$: $c_{2k-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\psi)}{\psi^{2k}} d\psi$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{\psi^{2k}} d\psi + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2}^{\gamma_1} \frac{f(\psi)}{\psi^{2k}} d\psi \; =$$

$\gamma_1, \gamma_2 \in \gamma_r$: $\gamma_1 = -\gamma_2$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{\psi^{2k}} d\psi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_2}^{\gamma_1} \frac{f(-\psi)}{(-\psi)^{2k}} d(-\psi)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{\psi^{2k}} d\psi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{f(\psi)}{\psi^{2k}} d\psi = 0$$

$\Rightarrow$ при $n = 2k+1 \hookrightarrow c_{2k+1} = 0$