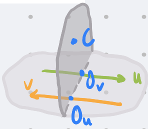
11.1. Показать, что моменты инерции твёрдого тела относительно любых двух параллельных осей u и v связаны соотношением $J_v = J_u + m(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_C)$, где векторы $\mathbf{r} = \overrightarrow{O_uO_v}$ и $\mathbf{r}_C = \overrightarrow{O_uC}$ лежат в плоскости, проходящей через центр масс C тела, перпендикулярно этим осям. Оси u и v пересекают упомянутую плоскость соответственно в точках O_u и O_v.

Дано: $\bar r = \overline{O_uO_v}$

$\bar r_c = \overline{O_uC}$

$u \parallel v$

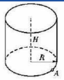
Д-ть: $J_v = J_u + m(\bar r\cdot\bar r - 2\bar r\cdot\bar r_c)$



$\bar r_v = \bar r_c - \bar r \qquad J_u = J_c + m(\bar r_c\cdot\bar r_c)$

$$J_v = J_c + m(\bar r_v\cdot\bar r_v) = J_u + m(-\bar r_c\cdot\bar r_c + \bar r_c\cdot\bar r_c - 2\bar r_c\cdot\bar r + \bar r\cdot\bar r) = \boxed{J_u + m(\bar r\cdot\bar r - 2\bar r\cdot\bar r_c)}$$

11.11. Высота однородного кругового цилиндра равна H, радиус его основания – R, а масса – m. Найти главные оси инерции в точке A цилиндра. Для случая $H = \sqrt{3}R$ выписать моменты инерции относительно найденных осей.

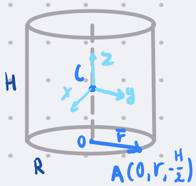


К задаче 11.11

Дано: H, R, m

гл. оси ин - ?

$\hat J$ - ?



$\hat J_c = \mathrm{diag}(A, A, C)$, $A = \frac14 mR^2 + \frac1{12} mH^2$, $C = \frac12 mR^2$

$\hat J_A = \hat J_c + m\,j(\bar r)$, где $j(\bar r) = E r^2 - \bar r\,\bar r^T$

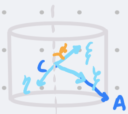
$$\hat J_A = \hat J_C + m\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

при $H = R\sqrt3$: $\hat J_c = \frac12 mR^2\cdot E$, $\quad \hat J_A = \hat J_c + m\,j(\bar r)$, где $j(\bar r) = \begin{pmatrix} a_2^2+a_3^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 \\ & a_1^2+a_3^2 & -a_2a_3 \\ & & a_1^2+a_2^2 \end{pmatrix}$, $j(r) = j(r)^T$

Найдем гл. оси ин:

OAC - плоскость симм. $\Rightarrow$ одна из гл. осей $\perp$ ей ($\parallel Ox$)

расположим базис $\xi\eta\zeta$ так, что ось $\zeta \parallel CA$, $\eta \parallel Ox$,



Тогда $\hat J_A$ будет иметь диаг. вид

и $J_{11} = J_{22} = \frac12 mR^2 + m\,CA^2 = \frac12 mR^2 + \frac74 mR^2 = \frac94 mR^2$, $\quad J_{33} = \frac12 mR^2$

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{H/2} = \frac{2\sqrt3}{3}}$ $\qquad \boxed{\hat J = \frac14 mR^2\cdot \mathrm{diag}(9, 9, 2)}$

Найдем α в общем случае:

$$\hat J_A = \frac1m\begin{pmatrix} Am + R^2 + \frac{H^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & Am + \frac{H^2}{4} & \frac12 RH \\ 0 & \frac12 RH & Cm + R^2 \end{pmatrix} = \frac1m\begin{pmatrix} \frac54 R^2 + \frac13 H^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac14 R^2 + \frac13 H^2 & \frac12 RH \\ 0 & \frac12 RH & \frac32 R^2 \end{pmatrix}$$

Найдем угол α такой, что недиаг. эл. $\hat J_A$ обнулятся

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & ca - sb & cb - sd \\ 0 & sa + cb & sb + cd \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & c^2a - 2scb + s^2d & csa - s^2b + c^2b - csd \\ 0 & csa - s^2b + c^2b - csd & c^2a + 2scb + s^2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 & 0 \\ 0 & B' & 0 \\ 0 & 0 & C' \end{pmatrix}$$

$$csa - s^2b + c^2b - csd = 0 \Rightarrow \frac{d-a}{2}\sin 2\alpha = b\cos 2\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{\operatorname{tg}2\alpha} = \frac{2b}{d-a} = \frac{RH}{\frac{3}{2}R^2 - \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{3}H^2} = \frac{RH}{\frac{5}{4}R^2 - \frac{1}{3}H^2} = \boxed{\frac{12RH}{15R^2 - 4H^2}}$$

При $H = R\sqrt{3}$: $\operatorname{tg}2\alpha = 4\sqrt{3}$

11.11. Одна из главных осей перпендикулярна плоскости, проходящей через ось цилиндра и точку A, а две другие лежат в этой плоскости и составляют с образующей цилиндра углы α и $\frac{\pi}{2} - \alpha$, причём $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{12RH}{15R^2 - 4H^2}$. При $H = R\sqrt{3}$ имеем $\bar{\bar{J}} = \frac{1}{4}mR^2\left(\mathbf{ii}9 + \mathbf{jj}2 + \mathbf{kk}9\right)$.

11.18. Однородный параллелепипед массы m с рёбрами a, b, c вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно своей диагонали OB. Найти кинетическую энергию T параллелепипеда и его момент импульса $\mathbf{K}_A$ относительно произвольной точки A пространства.

Дано: m, a, b, c

$T, \bar{K}_A$ – ?

$$\int\limits_G x^2 dm = \frac{m}{abc}\int\limits_G x^2 dx\,dy\,dz = \frac{m}{abc}\int\limits_{-c/2}^{c/2} dz \int\limits_{-b/2}^{b/2} dy \int\limits_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \frac{ma^2}{12}$$

$$J_{xx} = \int\limits_G (y^2 + z^2)\,dm = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2) \Rightarrow \hat{J} = \frac{m}{12}\cdot \operatorname{diag}(b^2 + c^2, a^2 + c^2, a^2 + b^2)$$

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \omega \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \Rightarrow \bar{K}_c = \hat{J}\cdot\bar{\omega}, \quad \bar{K}_A = \bar{K}_c + \bar{AC} \times (m\underbrace{\bar{V}_c}_{=0}) = \bar{K}_c \qquad \boxed{\bar{K}_A = \frac{m\omega}{12\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\begin{pmatrix} a(b^2 + c^2) \\ b(a^2 + c^2) \\ c(a^2 + b^2) \end{pmatrix}}$$

$$T = \frac{1}{2}\bar{\omega}^T\hat{J}\,\bar{\omega} = \frac{m\omega^2}{24(a^2 + b^2 + c^2)}\cdot\left(a^2(b^2 + c^2) + b^2(a^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2)\right) = \boxed{\frac{m\omega^2}{12}\cdot\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}J_\omega\omega^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\top\hat{J}_o\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \hat{J}_o\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)}$$

11.18. $K_{AX} = \frac{ma\omega(b^2 + c^2)}{12\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, $K_{AY} = \frac{mb\omega(a^2 + c^2)}{12\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, $K_{AZ} = \frac{mc\omega(a^2 + b^2)}{12\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, $T = \frac{m\omega^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{12\left(a^2 + b^2 + c^2\right)}$.

11.23. Однородная квадратная пластина массы m вращается с угловой скоростью ω вокруг диагонали AC прямоугольной рамы $ABCD$. Диагональ рамы AC проходит через центр масс пластины O и лежит в её плоскости. Рама вращается вокруг неподвижной оси AB с угловой скоростью Ω. Найти кинетическую энергию T пластины, если её сторона равна a, $AB = b$, $\angle BAC = \alpha$, $AO = OC$. В начальный момент плоскости пластины и рамы совпадали.

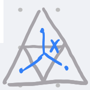
11.24. Решить задачу 11.23 для однородной треугольной пластины со сторонами a.

Дано: m, ω, Ω

a, b, α,

T – ?

Найдем $\hat{J}_0$ для Δ:

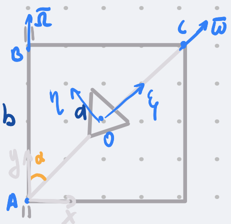


$J_{33} \sim mr^2 \sim r^4$

$J'_{33} = \frac{1}{16}J_{33}$ – мом. ин. мал. Δ отн всю

по Th. Г-Ш: $J_{33} = \frac{4}{16}J_{33} + \frac{3m}{4}x^2 \Rightarrow J_{33} = mx^2$

h – выс. мал $\Delta \Rightarrow x = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow J_{33} = \frac{ma^2}{12}$, $J_{11} = J_{22} = \frac{ma^2}{24}$



$$T = \frac{1}{2}mV_0^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}^T\hat{J}_0\bar{\omega}$$

$$\bar{V}_0 = \bar{\Omega} \times \bar{AO} \Rightarrow V_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\cos\alpha}\cdot\Omega\sin\alpha = \frac{1}{2}\Omega b\operatorname{tg}\alpha$$

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega} + \bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega\cos\alpha + \omega \\ \Omega\sin\alpha\cos\omega t \\ \Omega\sin\alpha\sin\omega t \end{pmatrix}$$

$$T_{вр} = \frac{ma^2}{2\cdot 24}\left(\Omega^2\cos^2\alpha + 2\omega\Omega\cos\alpha + \omega^2 + \Omega^2\sin^2\alpha\cos^2\omega t + 2\Omega^2\sin^2\alpha\sin^2\omega t\right) =$$

$$= \frac{ma^2}{48}\left(\omega^2 + 2\omega\Omega\cos\alpha + \Omega^2(1+\sin^2\alpha\sin^2\omega t)\right)$$

$T = \frac{1}{2}J_\omega\omega^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^\top \hat{J}_o\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}, \hat{J}_o\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$

11.24. $T = \frac{mb^2}{8}\Omega^2\mathrm{tg}^2\alpha + \frac{ma^2}{48}\left[\omega^2 + 2\omega\Omega\cos\alpha + \Omega^2\left(1+\sin^2\alpha\sin^2\omega t\right)\right]$.

$$T = \frac{1}{8}mb^2\Omega^2\,\mathrm{tg}^2\alpha + \frac{ma^2}{48}\left(\omega^2 + 2\omega\Omega\cos\alpha + \Omega^2(1+\sin^2\alpha\sin^2\omega t)\right)$$

11.32. Показать, что для твёрдого тела с неподвижной точкой кинетическая энергия сохраняется в том и только в том случае, когда во всё время движения вектор момента импульса $\mathbf{K}_O$ и вектор углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}$ ортогональны.

Дано: Неподв. т.

Д-ть: $T = const \Leftrightarrow \bar{K}_0 \perp \bar{\varepsilon}$

В неподв. базисе: $\bar{K}_0 = \hat{J}\bar{\omega}$, но $J \neq const \Rightarrow$

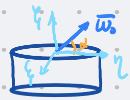
равны

В баз. гл. осей: $\bar{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, $\bar{K}_0 = \begin{pmatrix} Ap \\ Bq \\ Cr \end{pmatrix}$ $\dot{\bar{K}}_0 = \frac{d'\bar{K}_0}{dt} + \bar{\omega}\times\bar{K}_0$ $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \frac{d'\bar{\omega}}{dt}$

$$T = \frac{1}{2}\bar{\omega}\cdot\bar{K}_0 \Rightarrow 2\dot{T} = \dot{\bar{\omega}}\cdot\bar{K}_0 + \bar{\omega}\cdot\dot{\bar{K}}_0 = \bar{\varepsilon}\cdot\bar{K}_0 + \bar{\omega}\cdot\frac{d'\bar{K}_0}{dt} + \underbrace{\bar{\omega}\cdot(\bar{\omega}\times\bar{K}_0)}_{0} = 2\bar{\varepsilon}\cdot\bar{K}_0$$

$$T = const \Leftrightarrow \bar{K}_0 \perp \bar{\varepsilon}$$

11.61. Однородному круговому цилиндру (высота h, радиус основания R), который может двигаться вокруг своего неподвижного центра масс, сообщается вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_0$ вокруг оси, образующей угол α с плоскостью основания цилиндра. Определить движение цилиндра.



11.61. Регулярная прецессия с параметрами: $\dot{\psi} = \omega_0\sqrt{1+\frac{36R^4\mathrm{tg}^2\alpha}{\left(h^2+3R^2\right)^2}}\cos\alpha$, $\dot{\varphi} = \frac{h^2-3R^2}{h^2+3R^2}\omega_0\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{6R^2\mathrm{tg}\,\alpha}{h^2+3R^2}$.

Дано: $h, R, \bar{\omega}, \alpha$

движ.-?

Случай Эйлера, $A = B = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2$, $C = \frac{1}{2}mR^2$

$$\bar{K} = \hat{J}\bar{\omega} = diag(A,A,C)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A\omega\cos\alpha \\ C\omega\sin\alpha \end{pmatrix}$$

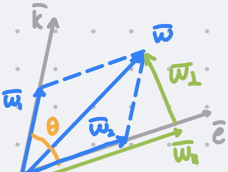
$$\cos\theta = \frac{Cr_0}{K_0}$$
$$\dot{\psi} = \frac{K_0}{A}$$
$$\dot{\varphi} = r_0\left(1 - \frac{C}{A}\right)$$

$$\dot{\psi} = \frac{K}{A} = \frac{\sqrt{A^2\omega^2\cos^2\alpha + C^2\omega^2\sin^2\alpha}}{A} = \omega\cos\alpha\sqrt{1 + \frac{C^2}{A^2}\mathrm{tg}^2\alpha} = \omega\cos\alpha\sqrt{1 + \frac{36R^4\,\mathrm{tg}^2\alpha}{(h^2+3R^2)^2}}$$

$$\dot{\varphi} = r\cdot\frac{A-C}{A} = \omega\sin\alpha\cdot\frac{\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 - \frac{1}{2}mR^2}{\frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2} = \omega\sin\alpha\cdot\frac{h^2 - 3R^2}{h^2 + 3R^2}$$

$$\cos\theta = \frac{Cr}{K} = \frac{C\omega\sin\alpha}{\sqrt{A^2\omega^2\cos^2\alpha + C^2\omega^2\sin^2\alpha}}, \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{A\omega\cos\alpha}{C\omega\sin\alpha} = \frac{6R^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{h^2 + 3R^2}$$

11.75. Симметричное твёрдое тело $(A = B \neq C)$ с неподвижной точкой O совершает регулярную прецессию. Показать, что вектор момента импульса определяется выражением $\mathbf{K}_O = \left[C + (C-A)\frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\theta\right]\boldsymbol{\omega}_1 + A\boldsymbol{\omega}_2$, где $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ – векторы угловых скоростей собственного вращения и прецессии соответственно, а θ – угол между ними. Используя это соотношение, получить выражение для момента импульса $\mathbf{K}_O$ в случае движения симметричного твёрдого тела по инерции.



В гл. осях: $\bar K = \hat J \bar\omega$, $\hat J = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & C \end{pmatrix}$

$\bar\omega = \bar\omega_1 + \bar\omega_2 = \bar\omega_\parallel + \bar\omega_\perp$, где $\bar\omega_\parallel$ – по оси динамич. симметрии, $\bar\omega_\perp$ – в пл дин. сим.

$$\bar\omega = \bar\omega_2 + \bar e\omega_1\cos\theta - \bar e\omega_1\cos\theta + \bar\omega_1$$

$$\bar K = C\left(\bar\omega_2 + \bar\omega_2\frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\theta\right) + A\left(\bar\omega_1 - \bar\omega_2\frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\theta\right) = \left(C + (C-A)\frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\theta\right)\bar\omega_2 + A\bar\omega_1$$

11.91. Оси $O\xi\eta\zeta$ являются главными осями инерции твёрдого тела. Моменты инерции тела относительно этих осей равны A, B, C. Найти центробежные моменты инерции для системы осей $Oxyz$, повёрнутых вокруг оси $O\zeta$ на угол α.

11.91. $J_{xy} = (A - B)\sin\alpha\cos\alpha$, $J_{yz} = 0$, $J_{zx} = 0$.

$$S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat J = \mathrm{diag}(A, B, C)$$

$$\hat J' = S^T \hat J S = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ac & sB & 0 \\ -As & cB & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat J' = \begin{pmatrix} Ac^2 + s^2B & -(Asc - Bsc) & 0 \\ -(Asc - Bsc) & As^2 + Bc^2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$J_{xy} = (A - B)\sin\alpha\cos\alpha, \quad J_{yz} = 0, \quad J_{zx} = 0$$

Центробежными моментами инерции тела по отношению к осям прямоугольной декартовой системы координат называются следующие величины[1][7]:

$$J_{xy} = \int\limits_{(m)} xy\,dm = \int\limits_{(V)} xy\rho\,dV,$$

$$J_{xz} = \int\limits_{(m)} xz\,dm = \int\limits_{(V)} xz\rho\,dV,$$

$$J_{yz} = \int\limits_{(m)} yz\,dm = \int\limits_{(V)} yz\rho\,dV,$$

Видимо тут расхождения в опр. ц.б. мом. ин.

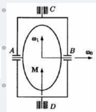
$$\mathbf{J}_O^{xyz} = \sum_i m_i(\mathbf{I}\mathbf{r}_{Oi}^2 - \mathbf{r}_{Oi}\mathbf{r}_{Oi}^T) = \begin{pmatrix} J_O^{xx} & J_O^{xy} & J_O^{xz} \\ J_O^{yx} & J_O^{yy} & J_O^{yz} \\ J_O^{zx} & J_O^{zy} & J_O^{zz} \end{pmatrix} \qquad (5.4)$$

называется *тензором инерции твердого тела* относительно базиса $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_y\mathbf{e}_z$. Элементы этой матрицы определяются следующими формулами:

$$J_o^{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad J_o^{xy} = J_o^{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i,$$
$$J_o^{yy} = \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2), \quad J_o^{yz} = J_o^{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i, \qquad (5.4^*)$$
$$J_o^{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2), \quad J_o^{zx} = J_o^{xz} = -\sum_i m_i z_i x_i.$$

Из приведенных формул следует, что тензор инерции является симметричной матрицей и зависит от базиса, выбираемого в теле. Диагональные элементы этой матрицы представляют собой моменты инерции тела относительно осей $O\mathbf{e}_x, O\mathbf{e}_y, O\mathbf{e}_z$, а остальные элементы называются *центробежными моментами инерции* твердого тела.

11.113. Велосипедное колесо радиуса r и массы m, равномерно распределённой по ободу, установлено в раме. Колесо вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг своей оси AB. Рама вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг оси CD, перпендикулярной оси AB. Определить динамические реакции в подшипниках C и D рамы, если расстояние $CD = l$.

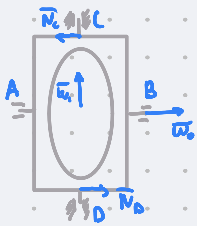


К задаче 11.113

$$\mathbf{M}_C = (\dot{\boldsymbol\psi}_0 \times \dot{\boldsymbol\varphi}_0)\left(C + (C - A)\frac{\dot\psi_0}{\dot\varphi_0}\cos\theta_0\right)$$

11.113. $F_C = F_D = \dfrac{mr^2}{l}\omega_0\omega_1$.

Дано:
$r, m, \bar\omega_0, \bar\omega_1, l$
N_C, N_D – ?



$$M_D = l N_D = (\bar\omega_1 \times \bar\omega_0)\left(C + (C-A)\frac{\omega_1}{\omega_0}\cos\theta\right) = \omega_1 \cdot \omega_0 \cdot C = mr^2\omega_0\omega_1$$

$$m w_c = R \Rightarrow N_D = -N_C = \frac{mr^2}{l}\omega_0\omega_1$$

11.132. Симметричное твёрдое тело с неподвижной точкой O, для которой главные моменты инерции равны $A = B \neq C$, движется в однородном поле тяжести. Масса тела равна m, а его центр тяжести лежит на оси динамической симметрии на расстоянии l от неподвижной точки (случай Лагранжа). В начальный момент углы Эйлера и их первые производные по времени равны

1. $\psi(0)=0,\ \varphi(0)=0,\ \theta(0)=\dfrac{\pi}{2},$

$\dot\psi(0)=2\sqrt{\dfrac{mgl}{A}},\ \dot\theta(0)=0\ \dot\varphi(0)=\dfrac{\sqrt{Amgl}}{C};$

Угол нутации θ отсчитывается от оси, направленной вертикально вверх. В каких пределах будет изменяться угол θ в последующем движении тела? Изобразить след оси симметрии тела на сфере с центром в неподвижной точке.

ф-лы

$$A\dot\psi\sin^2\theta + H\cos\theta = K.$$

$$H = Cr = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta).$$

$$A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta) + 2mgL\cos\theta = 2E.$$

известны, но если что их вывод Амелькин стр. 105

$$K = A\dot\psi\sin^2\theta + H\cos\theta \overset{t=0}{=} \sqrt{4Amgl},\quad \dot\psi = \frac{K-Hu}{A(1-u^2)}$$

$$H = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) \overset{t=0}{=} \sqrt{Amgl}$$

$$u=\cos\theta,\quad \dot u = -\dot\theta\sin\theta \Rightarrow \dot\theta = -\frac{\dot u}{\sin\theta} \qquad 2E = A(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta) + 2mgl\cos\theta \overset{t=0}{=} 4mgl$$

$$A\left(\frac{\dot u^2}{1-u^2} + \frac{(K-Hu)^2}{A^2(1-u^2)}\right) + 2(mglu - E) = 0 \ \backslash \cdot A(1-u^2)$$

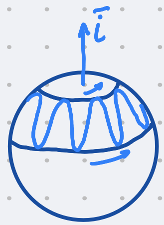
$$A^2\dot u^2 + (K-Hu)^2 + 2A(1-u^2)(mglu - E) = 0$$

$$A^2\dot u^2 + mglA(2-u)^2 + 2Amgl(1-u^2)(u-2) = 0$$

$$f(u) = (2-u)^2 - 2(1-u^2)(2-u) \le 0$$

$$(2-u)(2-u-2-2u^2) \le 0 \qquad u(2-u)(1-2u) \ge 0$$

На отр $[-1,1]$ только $u_1=0,\ u_2=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$



$$\dot\psi = \frac{K-Hu}{A(1-u^2)} = \frac{\sqrt{Amgl}}{A}\cdot\frac{2-u}{1-u^2} > 0, \text{ при } \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$$

11.132. 1) $\dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2},\ \dot\psi > 0;$

Т6 (случай Горячева - Чаплыгина). Твердое тело массы m движется в однородном поле тяжести. Главные моменты инерции для неподвижной точки O в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ равны $A = B = 4C$, а центр масс тела C лежит на оси ξ_1 на расстоянии l от неподвижной точки. В начальный момент времени проекция кинетического момента $\boldsymbol{K}_O$ на вертикаль равна нулю: $\boldsymbol{K}_O \cdot \boldsymbol{\gamma}|_{t=0} = 0$, где $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]^T$ – орт вертикали. Показать, что уравнения Эйлера допускают интеграл

$$Cr(p^2 + q^2) + mglp\gamma_3 = \text{const}.$$

Подставляя выражение (5.21) в уравнение (5.20), получим следующие уравнения, называемые *динамическими уравнениями Эйлера*:

$$\mathbf{J}_O\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J}_O\,\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_O^{ex}. \qquad (5.22)$$

Здесь $\mathbf{M}_O^{ex}$ – момент действующих на тело внешних сил, вычисленный относительно неподвижной точки тела.

Уравнения (5.22) связывают в дифференциальной форме угловую скорость твердого тела с моментом действующих на тело сил.

В покоординатной записи уравнения (5.22) принимают наиболее простой вид, если в качестве связанного с телом базиса выбран базис главных осей инерции $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ твердого тела. В проекциях на эти главные оси инерции уравнения (5.22) описываются следующей системой:

$$\begin{aligned} A\dot p + (C-B)qr &= M_1,\\ B\dot q + (A-C)rp &= M_2,\\ C\dot r + (B-A)pq &= M_3. \end{aligned} \qquad (5.23)$$

Дано: $\hat J = \operatorname{diag}(4C, 4C, C)$

$K(0) = 0$

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$

Д-ть: $Cr(p^2+q^2) + mglp\gamma_3 = \text{const}$

$\bar\omega = p\bar\xi_1 + q\bar\xi_2 + r\bar\xi_3 \quad \bar K_0 = 4Cp\bar\xi_1 + 4Cq\bar\xi_2 + Cr\bar\xi_3$

$\hat J\dot{\bar\omega} + \bar\omega\times\hat J\bar\omega = \bar M = a(\bar\xi_1\times\bar\gamma)$, где $s = mgl$

$$\bar\xi_1\times\bar\gamma = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\gamma_3\\\gamma_2\end{pmatrix}, \quad \dot{\bar\gamma} = \bar\gamma\times\bar\omega = \begin{pmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\\\gamma_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_2 r - \gamma_3 q\\\gamma_3 p - \gamma_1 r\\\gamma_1 q - \gamma_2 p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot\gamma_1\\\dot\gamma_2\\\dot\gamma_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4C\dot p = 3Cqr\\ 4C\dot q + 3Crp = -s\gamma_3\\ C\dot r = s\gamma_2\\ \gamma_2 r - \gamma_3 q = \dot\gamma_1\\ \gamma_3 p - \gamma_1 r = \dot\gamma_2\\ \gamma_1 q - \gamma_2 p = \dot\gamma_3 \end{cases}$$

рассм $f = Cr(p^2+q^2) + sp\gamma_3$

$$\dot f = C\dot r(p^2+q^2) + Cr(2p\dot p + 2q\dot q) + s\dot p\gamma_3 + sp\dot\gamma_3 =$$

$$= s\gamma_2(p^2+q^2) + r2p\cdot\frac{3}{4}Cqr + r2q\cdot\frac{1}{4}(-3Crp - s\gamma_3) + s\frac{3}{4}qr\gamma_3 + sp(\gamma_1 q - \gamma_2 p) =$$

$$= \cancel{s\gamma_2 p^2} + s\gamma_2 q^2 + \cancel{\frac{3}{2}pqr^2} - \cancel{\frac{3}{2}pqr^2} - \frac{1}{2}s\gamma_3 qr + \frac{3}{4}sqr\gamma_3 + s\gamma_1 pq - \cancel{s\gamma_2 p^2} =$$

$$= \frac{sq}{4}(4\gamma_2 q + r\gamma_3 + 4\gamma_1 p)$$

$\bar M_0 = mgl\,\bar\gamma\times\bar e_1 = \dot{\bar K}_0$

$\dot k = \dot{\bar K}_0\cdot\bar\gamma = mgl[\bar\gamma\times\bar e_1]\cdot\bar\gamma = 0$

$k = \text{const} = 0 \Rightarrow 4\gamma_1 p + 4\gamma_2 q + r\gamma_3 = 0 \Rightarrow \dot f = \frac{sq}{4}\cdot k = 0 \Rightarrow \boxed{f = \text{const}}$

$$Cr(p^2 + q^2) - mglp\gamma_3 = \text{const}.$$

12.3. Определить число степеней свободы системы, состоящей из двух волчков, установленных один на другом, как показано на рисунке. Точка опоры нижнего волчка неподвижна.

К задаче 12.3

Нижн. волчок: $A \in SO(3)$ - матр, опр. ориент. $\xi_1\eta_1\zeta_1$ отн. Xyz: $A = (\bar{a}_1\ \bar{a}_2\ \bar{a}_3)$

Множество таких матр задается 6-ю ур-ми: $\begin{cases} |\bar{a}_1| = 1 \\ |\bar{a}_2| = 1 \\ \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 0 \\ \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \bar{a}_3 \end{cases}$ - 3 скал. ур-я

Верхний волчок: $B \in SO(3)$ - матр, опр ориент. $\xi_2\eta_2\zeta_2$ отн $\xi_1\eta_1\zeta_1$

аналогично м.А получаем 6 ур-ний.

Числом степеней свободы механической системы называется разность между размерностью S вектора $\mathbf{R}$, задающего положение системы без связей, и числом m *независимых* связей, наложенных на систему:

$$n = S - m. \qquad (6.13)$$

Число ст. св = разм. конф. многообр $\boxed{n = \underset{\text{разм. пр-ва}}{18} - \underset{\text{число ур.}}{12} = 6}$

12.3. Шесть.

12.7. Свободная материальная точка движется под действием силы $\mathbf{F} = \mathbf{i}F_x + \mathbf{j}F_y + \mathbf{k}F_z$. Определяя положение точки
б) сферическими $(x = r\sin\theta\cos\varphi,\quad y = r\sin\theta\sin\varphi,\quad z = r\cos\theta)$, координатами, найти соответствующие обобщённые силы.

$$Q_i = \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_i}, \quad i = \{r, \theta, \varphi\}$$

$$Q_k = \sum_j \mathbf{F}_j^T \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}; \quad k = 1, \ldots, n.$$

$$Q_r = F_x \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$Q_\theta = F_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} =$$

$$Q_\varphi = F_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

б) $Q_r = F_x \sin\theta\cos\varphi + F_y \sin\theta\sin\varphi + F_z \cos\theta,$

$Q_\theta = F_x r\cos\theta\cos\varphi + F_y r\cos\theta\sin\varphi - F_z r\sin\theta,$

$Q_z = -F_x r\sin\theta\sin\varphi + F_y r\sin\theta\cos\varphi;$

12.11. Материальная точка массы m движется в плоскости Oxy под действием силового поля с потенциальной энергией $\Pi = \Pi(x, y)$. Найти лагранжиан точки в координатах q_1 и q_2, связанных с декартовыми координатами равенствами $x = \frac{q_1 - q_2}{2}$, $y = \sqrt{q_1 q_2}$.

Дано: m, $\Pi = \Pi(x,y)$,
$x = \frac{q_1-q_2}{2}$, $y=\sqrt{q_1q_2}$

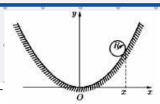
$$\bar r = \left(\frac{q_1-q_2}{2}, \sqrt{q_1q_2}\right)^T \quad \dot{\bar r} = -\frac{1}{2}\left(\dot q_2-\dot q_1, \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\dot q_1 + \sqrt{\frac{q_1}{q_2}}\cdot\dot q_2\right)^T$$

$$(\dot{\bar r})^2 = \frac{1}{4}\left(\dot q_2^2 - \cancel{2\dot q_2\dot q_1} + \dot q_1^2 + \frac{q_2}{q_1}\dot q_1^2 + \cancel{2\dot q_2\dot q_1} + \frac{q_1}{q_2}\dot q_2^2\right)$$

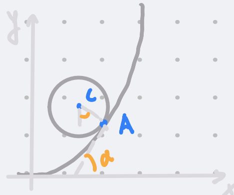
$$\mathcal{L} = T - \Pi = \frac{1}{2}m(\dot{\bar r})^2 - \Pi(r_1, r_2) = \frac{m}{8}\left[\dot q_1^2\left(\frac{q_2}{q_1}+1\right) + \dot q_2^2\left(\frac{q_1}{q_2}+1\right)\right] - \Pi\left(\frac{q_1-q_2}{2}, \sqrt{q_1q_2}\right)$$

12.11. $L = \frac{m}{8}\left[\dot q_1^2\left(\frac{q_2}{q_1}+1\right) + \dot q_2^2\left(\frac{q_1}{q_2}+1\right)\right] - \Pi\left[\frac{q_1-q_2}{2}, \sqrt{q_1q_2}\right]$.

12.38. Однородный диск радиуса R и массы m может катиться без проскальзывания по параболе $2y = ax^2$. Ось Oy вертикальна, $Ra \le 1$. Определяя положение диска координатой x точки касания, составить функцию Лагранжа.



К задаче 12.38



Дано: R, m, $2y = ax^2$, $Ra \le 1$
$\mathcal{L}$ - ?

$$A(x_A, y_A) = A\left(x, \tfrac{1}{2}ax^2\right)$$
$$C(x_c, y_c) = C(x_A - R\sin\alpha, y_A + R\cos\alpha)$$
$$\operatorname{tg}\alpha = y'_x = ax \Rightarrow \sin\alpha = \frac{ax}{\sqrt{1+a^2x^2}} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2x^2}}$$

Без проск $\Rightarrow \omega R = V_c \Rightarrow T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\omega^2 + \frac{1}{2}mV_c^2 = \frac{3}{4}mV_c^2$

$$\dot x_c = \dot x - \frac{Ra}{1+a^2x^2}\left[\dot x(1+a^2x^2)^{1/2} - a^2x^2\cdot\dot x(1+a^2x^2)^{-1/2}\right] = \dot x - \frac{Ra\dot x}{(1+a^2x^2)^{3/2}}$$

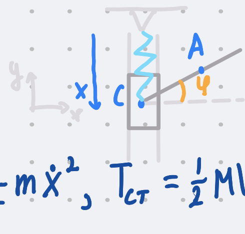
$$\dot y_c = ax\dot x - \frac{Ra^2x\dot x}{(1+a^2x^2)^{3/2}} = ax\dot x_c$$

$$\dot x_c^2 + \dot y_c^2 = \dot x_c^2(1+a^2x^2) = \dot x^2\left(1 - \frac{Ra}{(1+a^2x^2)^{3/2}}\right)^2\cdot(1+a^2x^2)$$

$$\mathcal{L} = T - \Pi = \frac{3}{4}mV_c^2 - mgy_c = \frac{3}{4}m\dot x^2\left(\sqrt{1+a^2x^2} - \frac{Ra}{1+a^2x^2}\right)^2 - mg\left(\frac{1}{2}ax^2 + \frac{R}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right)$$

12.38. $L = \frac{3}{4}m\dot x^2\left(\sqrt{1+a^2x^2} - \frac{Ra}{1+a^2x^2}\right)^2 - mg\left(\frac{1}{2}ax^2 + \frac{R}{\sqrt{1+a^2x^2}}\right)$.

12.39. Груз массы m, подвешенный на пружине жёсткости c, может двигаться без трения по вертикальным направляющим. К центру масс груза шарнирно прикреплён своим концом однородный стержень массы M и длины $2l$, который может двигаться в неизменной вертикальной плоскости. Составить уравнения Лагранжа.



Дано: m, c,
$M, 2l$
ур-я Лагранжа?

Введем обобщ. коорд. $\bar q = \begin{pmatrix} x \\ \varphi \end{pmatrix}$

$$T = T_{гр} + T_{ст}, \quad T_{гр} = \frac{1}{2}mV_c^2 = \frac{1}{2}m\dot x^2, \quad T_{ст} = \frac{1}{2}MV_A^2 + \frac{1}{2}J_A\omega^2$$

$$\overline{V_A} = \overline{V_C} + \overline{\omega}\times\overline{CA} = \begin{pmatrix}\dot x\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}l\cos\varphi\\ l\sin\varphi\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi\\ \dot\varphi l\cos\varphi\\0\end{pmatrix}$$

$$T_{ст} = \frac{1}{2} M V_A^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot M\cdot 4l^2\cdot\omega^2 = \frac{1}{2}M\left((\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi)^2 + (\dot\varphi l\cos\varphi)^2\right) + \frac{1}{6}\cdot M l^2\dot\varphi^2$$

$$\Pi = -mgx - Mg(x - l\sin\varphi) + \frac{1}{2}cx^2$$

$$\mathcal{L} = T - \Pi = \frac{1}{2}m\dot x^2 + \frac{1}{2}M\left((\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi)^2 + (\dot\varphi l\cos\varphi)^2\right) + \frac{1}{6}\cdot M l^2\dot\varphi^2 + mgx + Mg(x - l\sin\varphi) - \frac{1}{2}cx^2$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x} = m\dot x + M(\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi) \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = mg + Mg - cx \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x}\right) - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\right) = 0$$

С помощью этой функции уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf q}} - \frac{\partial L}{\partial\mathbf q} = 0. \qquad (6.44)$$

$$\boxed{(m+M)\ddot x - Ml(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi) + cx = (m+M)g}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = -M(\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi)l\sin\varphi + M\dot\varphi l^2\cos^2\varphi + \frac{1}{3}Ml^2\dot\varphi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = M\left(-\dot\varphi l\cos\varphi(\dot x - \dot\varphi l\sin\varphi) - \dot\varphi^2 l^2\cos\varphi\sin\varphi\right) - Mgl\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi}\right) - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}\right) = 0$$

$$-\ddot x\sin\varphi - \cancel{\dot x\dot\varphi\cos\varphi} + \ddot\varphi l\sin^2\varphi + \cancel{2\dot\varphi^2 l\sin\varphi\cos\varphi} + \ddot\varphi l\cos^2\varphi - \cancel{2\dot\varphi^2 l\sin\varphi\cos\varphi} + \frac{1}{3}l\ddot\varphi +$$

$$+\cancel{\dot x\dot\varphi\cos\varphi} - \cancel{\dot\varphi^2 l\cos\varphi\sin\varphi} + \cancel{\dot\varphi^2 l\cos\varphi\sin\varphi} + g\cos\varphi = 0$$

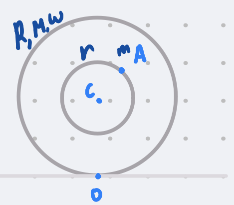
зачерк для себя

12.39. $(m+M)\ddot x - Ml(\ddot\varphi\sin\varphi + \dot\varphi^2\cos\varphi) + cx = (m+M)g$,

$4l\ddot\varphi - 3\ddot x\sin\varphi + 3g\sin\varphi = 0$, где x – смещение груза из положения равновесия, в котором пружина недеформирована, φ – угол поворота стержня.

$$\boxed{4l\ddot\varphi - 3\ddot x\sin\varphi + 3g\cos\varphi = 0}$$

12.48. Однородный диск массы M и радиуса R может катиться без проскальзывания по горизонтальной прямой. В диске имеется гладкий круговой желоб радиуса r, центр которого совпадает с центром диска. По желобу может скользить материальная точка массы m. Составить уравнения Лагранжа системы и найти их первые интегралы.

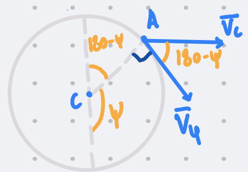


можно x вместо φ

Введем обобщ коорд. $\overline{q} = \begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}$, где φ - угол пов. диска, ψ - угол между верт и CA

без проск: $\omega = \frac{V_c}{R}$; $T = T_д + T_т$,

$$T_д = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}J_c\omega^2 = \frac{1}{2}M\omega^2R^2 + \frac{1}{2}M\cdot\frac{1}{2}R^2\omega^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot\varphi^2$$



$T_т = \frac{1}{2}mV_A^2$, по Th.cos $V_A^2 = V_\psi^2 + V_c^2 - 2V_\psi V_c\cos\psi$

$V_\psi = \dot\psi r,\ V_c = \dot\varphi R \Rightarrow \mathcal{L} = T - П$, где

$T = \frac{3}{4}MR^2\dot\varphi^2 + \frac12 m(\dot\psi^2 r^2 + \dot\varphi^2 R^2 - 2\dot\psi\dot\varphi rR\cos\psi)$ $\quad П = -mgr\cos\psi$,

(1) $\frac{\partial\mathcal L}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot\varphi} = const$

С помощью этой функции уравнения Лагранжа записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf q}} - \frac{\partial L}{\partial\mathbf q} = 0. \qquad (6.44)$$

$$\boxed{\frac32 MR^2\dot\varphi^2 + m\dot\varphi R^2 - 2rR\cos\psi = const}$$

(2) $\frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot\psi} = mr^2\dot\psi - m\dot\varphi rR\cos\psi$ зачерк для себя

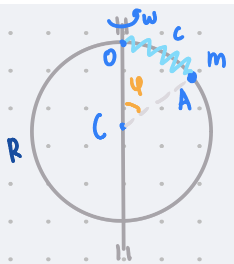
$\frac{\partial\mathcal L}{\partial\psi} = \dot\psi\dot\varphi mrR\sin\psi - mgr\sin\psi$

$r\ddot\psi - R\ddot\varphi\cos\psi + \cancel{R\dot\varphi\dot\psi\sin\psi} - \cancel{\dot\psi\dot\varphi R\sin\psi} + g\sin\psi = 0$

$$\boxed{r\ddot\psi - R\ddot\varphi\cos\psi + g\sin\psi = 0}$$

12.48. $(3M+2m)R\dot\varphi - 2mr\dot\psi\cos\psi = \text{const}$,
$r\ddot\psi - R\ddot\varphi\cos\psi + g\sin\psi = 0.$

12.64. Гладкая проволочная окружность радиуса R вращается вокруг своего вертикального диаметра с постоянной угловой скоростью ω. На окружность насажено колечко массы m, соединённое с наивысшей точкой O окружности пружиной жёсткости c, длина пружины в недеформированном состоянии равна $R\varphi_0$. Составить уравнение Лагранжа, описывающее относительное движение колечка.



ψ - угол между верт. и CA

$T = \frac12 mV_A^2,\ \bar V_A = \bar V_e + \bar V_r,\ \bar V_e = \bar\omega\times\bar{CA},\ V_r = \dot\psi R$

$V_A^2 = (R\omega\sin\psi)^2 + \dot\psi^2R^2;\ T = \frac12 m[(R\omega\sin\psi)^2 + \dot\psi^2R^2]$

$П = mgR\cos\psi + \frac12 cR^2(\psi-\psi_0)^2$

$\mathcal L = \frac12 m[(R\omega\sin\psi)^2 + \dot\psi^2R^2] - mgR\cos\psi - \frac12 cR^2(\psi-\psi_0)^2$

$\frac{\partial\mathcal L}{\partial\psi} = mR^2\omega^2\sin\psi\cos\psi + mgR\sin\psi - cR^2(\psi-\psi_0),\ \frac{\partial\mathcal L}{\partial\dot\psi} = m\dot\psi R^2 \Rightarrow$

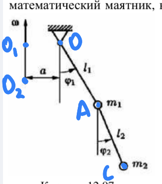
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf q}} - \frac{\partial L}{\partial\mathbf q} = 0.$

$m\ddot\psi R^2 - mR^2\omega^2\sin\psi\cos\psi - mgR\sin\psi + cR^2(\psi-\psi_0) = 0$

$$\boxed{\ddot\psi - \omega^2\sin\psi\cos\psi - \frac gR\sin\psi + \frac cm(\psi-\psi_0) = 0}$$

12.64. $\ddot\varphi - \omega^2\sin\varphi\cos\varphi - \frac gR\sin\varphi + \frac cm(\varphi-\varphi_o) = 0.$

12.97. Плоскость, в которой совершает колебания двойной математический маятник, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, расположенной в той же плоскости на расстоянии a от точки подвеса маятника. Массы и длины маятников равны m_1, m_2 и l_1, l_2. Положения маятников определяются углами φ_1, φ_2 отклонения от вертикали. Составить функцию Лагранжа $L = T - П$. Сравнить кинетическую и потенциальную энергии в абсолютном и относительном (в плоскости) движениях маятников.



К задаче 12.97

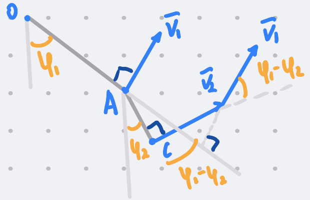
Все на рисунке

С т. зр. абс. СО:

$T^a = T_1^a + T_2^a,\ T_1^a = \frac12 m_1V_A^2,\ \bar V_A = \bar V_A^e + \bar V_A^r = \bar\omega_1\times\bar{OA} + \bar\omega\times\bar{O_1A} \Rightarrow$

$T_1^a = \frac12 m_1(\dot\varphi_1^2 l_1^2 + (a + l_1\sin\varphi_1)^2\omega^2)$

$T_2^a = \frac{1}{2} m V_c^2,\ \bar{V}_c = \bar{V}_c^e + \bar{V}_c^r = \bar{\omega} \times \overline{O_1A} + \bar{V}_c + \bar{\omega}_2 \times \overline{AC} = \bar{\omega} \times \overline{O_1A} + \bar{\omega}_1 \times \overline{OA} + \bar{\omega}_2 \times \overline{AC} = \bar{V} + \bar{V}_1 + \bar{V}_2$



По Th. cos $V_3 = |\bar{V}_1 + \bar{V}_2|^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) V_1 V_2$,

где $V = (a + l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2)\omega,\ V_1 = l_1\dot{\varphi}_1,\ V_2 = l_2\dot{\varphi}_2$

$П^a = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g (l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)$

12.97. $L = \frac{m_1}{2}\left[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + (a + l_1\sin\varphi_1)^2\omega^2\right] + \frac{m_2}{2}\left[l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + (a + l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2)^2\omega^2\right] + m_1 g l_1\cos\varphi_1 + m_2 g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)$.

$$\mathcal{L}^a = T - П = \frac{1}{2}m_1[\dot{\varphi}_1^2 l_1^2 + (a + l_1\sin\varphi_1)^2\omega^2] + \frac{1}{2}m_2[(a + l_1\sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2)^2\omega^2 + l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + 2\cos(\varphi_1-\varphi_2)\cdot l_1\dot{\varphi}_1\cdot l_2\dot{\varphi}_2] + m_1 g l_1\cos\varphi_1 + m_2 g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)$$

С т. зр. подв СО: $T^r = T_1^r + T_2^r = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_3^2$

x_1 – расст от оси O_1O_2 до т. A $\Rightarrow F_1^e = m\omega^2 x_1 = -\frac{\partial\left(-\frac{\omega^2 m x^2}{2}\right)}{\partial x} \Rightarrow$

$П_1^e = -\frac{1}{2}m\omega^2 x_1 = -\frac{1}{2}m_1\omega^2(a + l_1\cos\varphi_1)$

аналогично $П_2^e = -\frac{1}{2}m_2\omega^2(a + l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)$

$\bar{F}_1^к = -2m_1\bar{\omega}\times\bar{V}_1$ – напр $\perp$ вирт перемещ, работы не соверш $\Rightarrow$ не войдет в $\mathcal{L}^r$

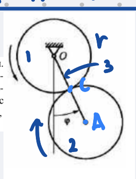
$\bar{F}_2^к$ – аналогично

$П^r = -m_1 g l_1\cos\varphi_1 - m_2 g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2) - \frac{1}{2}m\omega^2(a + l_1\cos\varphi_1) - \frac{1}{2}m\omega^2(a + l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)$

$\mathcal{L}^r = T^r - П^r$, нетрудно заметить, что $\mathcal{L}^r = \mathcal{L}^a$, но слагаемые, отвечающие за силы инерции перешли из $П^r$ в T^a

---

12.105. Кривошип, несущий две шестерёнки одинакового радиуса, может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через центр O первой шестерёнки. Шестерёнки находятся в зацеплении друг с другом. Первая шестерёнка вращается с постоянным угловым ускорением. Показать, что движение системы эквивалентно движению маятника с потенциальной энергией $П = -A\cos\varphi - B\varphi$, где $A = \mathrm{const}$, $B = \mathrm{const}$.



К задаче 12.105

1) без проск $\Rightarrow \bar{V}_c = \bar{\omega}_1\times\overline{OC} = \bar{V}_A + \bar{\omega}_2\times\overline{AC} \Rightarrow \omega_1 r = 2\dot{\varphi}r - \omega_2 r$

$\omega_2 = 2\dot{\varphi} - \omega_1$

$T = T_1 + T_2 + T_3,\ T_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2,\ T_3 = \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}^2$

$T_2 = \frac{1}{2}m_2V_A^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}m_2(2r\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\cdot J_2\omega_2^2 = 2m_2r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2$

$П = -m_3 g r\cdot\cos\varphi - m_2 g\cdot 2r\cos\varphi = -(m_3 g r + 2m_2 2 g r)\cos\varphi$

$\mathcal{L} = T - П = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_3\dot{\varphi}^2 + 2m_2r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J_2\cdot(2\dot{\varphi} - \omega_1)^2 + (m_3 g r + 2m_2 2 g r)\cos\varphi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = J_3\dot\varphi + 4m_2r^2\dot\varphi + 2J_2(2\dot\varphi - \omega_1) = \underbrace{(J_3 + 4m_2r^2 + 4J_2)}_{C_1}\dot\varphi - 2J_2\omega_1 \quad (-2J_2\varepsilon = B_1 = const)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\underbrace{(m_3r + 2m_2 2r)g}_{A_1}\sin\varphi \Rightarrow C_1\ddot\varphi + A_1\sin\varphi + B_1 = 0$$

2) $\Pi = -A\cos\varphi - B\varphi \Rightarrow \mathcal{L} = T_2 - \Pi = \frac{1}{2}a(\varphi,t)\dot\varphi^2 + A\cos\varphi + B\varphi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\varphi} = a(\varphi,t)\ddot\varphi + \dot a(\varphi,t)\dot\varphi \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = a'_\varphi(\varphi,t) - A\sin\varphi + B \Rightarrow a(\varphi,t)\ddot\varphi + \dot a(\varphi,t)\dot\varphi + a'_\varphi(\varphi,t) + A\sin\varphi - B = 0$$

движ. сист. экв. движ. маятника с $\Pi = -A\cos\varphi - B\varphi$

при $a(\varphi,t) = C_1 = J_3 + 4m_2r^2 + 4J_2$, $A = A_1 = m_3gr + 2m_2 2gr$, $B = -2J_2\varepsilon$