110. Доказать, что если тригонометрический ряд сходится равномерно, то он является рядом Фурье своей суммы.

$l=\pi$ для простоты

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad (1)$$

сх. равномерно на R. Надо док-ть, что

$f(x)$ непрер 2π-период ф-ция и (1) — её ряд Фурье

$\square$ $f(x)$ — непр. как сумма равном. сх. ряда из непр ф-ций

$f(x)$ — 2π — периодич — очевидно

Равном сх ряд из непр ф-ций можно почленно интегрир. на отрезке

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt\,dt+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt\,dt\right) \qquad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$

интеграл и сумму можно менять местами, если ряд сход. равномерно

Утв. Если $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сх равном. на E, $|g(x)| \le M$ на E, то $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) g(x)$ равном сход.

$$f(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx)$$ сх. равном на $[-\pi;\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\, dt = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos mt\, dt}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nt \cos mt\, dt}_{=0,\ m\ne n} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nt \cos mt\, dt}_{=0}\Big)$$

В пр-ве ф-ций, непр на $[a,b]$, можно ввести скалярное произв.

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

В смысле этого скал произв.

сист. $1, \cos x, \sin x, \dots \cos nx, \sin nx$ ортогональна на $[-\pi;\pi]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos mt\, dt = a_m \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mt\, dt =$$

$$= a_m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\overbrace{\cancel{\cos 2mt}}^{=0}}{2}\, dt = \pi a_m, \quad a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt\, dt.$$

Аналогично b_m.

111. Являются ли нижеследующие тригонометрические ряды рядами Фурье:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin nx$.

1) да, т.к. сх равномерно на $\mathbb{R}$

4) нет, т.к. $b_n = 1 \not\to 0$

1. Разложить в ряд Фурье функцию: $\sin^2 x$;

Ряд вида
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$
называется *тригонометрическим рядом.*

Если функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, то тригонометрический ряд (1), коэффициенты которого (называемые *коэффициентами Фурье* функции f) определяются по формулам

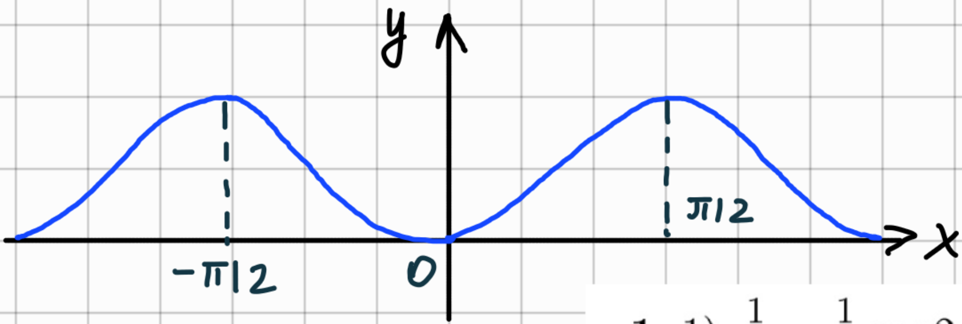
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \in N, \tag{3}$$

называется *рядом Фурье* функции f, или, подробнее, ее *тригонометрическим рядом Фурье.* В этом случае пишут

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

сх. равномерно, имеет период π и кус. гладкая



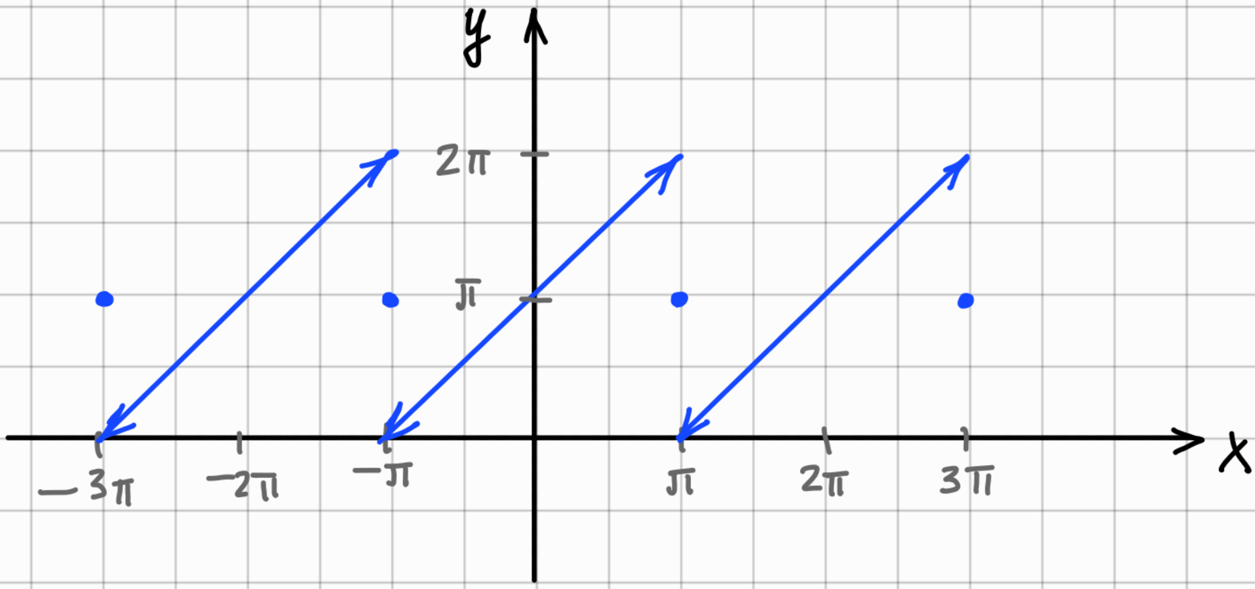
1. 1) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$;

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, указать промежутки, в которых сумма ряда Фурье равна функции $f(x)$, и най и сумму ряда в указанной точке x_0 (4–11).

8. $f(x) = \pi + x,\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi,\ x_0 = \pi.$

Теорема 1. *Ряд Фурье кусочно гладкой на отрезке $[-\pi;\pi]$ функции f сходится в каждой точке интервала $(-\pi;\pi)$ к значению*
$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$
(в частности, в точке непрерывности функции f к ее значению в этой точке), а в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ к значению
$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Теорема 2. *Если функция f имеет на отрезке $[-\pi;\pi]$ $k-1$ непрерывных производных, $k \geqslant 0$, причем $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, k-1$, и кусочно непрерывную k-ю производную, то ряд Фурье функции f сходится абсолютно и равномерно на всем отрезке $[-\pi;\pi]$ к функции f и $|f(x) - S_n(x;f)| < \frac{\alpha_n}{n^{k-1/2}}$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.*



сх поточечно на $\mathbb{R}$, но неравномерно, т.к. сумма разрывна

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{2}+\pi x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\cancel{2}\pi^{\cancel{2}}$$

$$= \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\cos nx}_{\text{нечёт} \,=\, \text{нечет}\cdot\text{чет}}\,dx$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx\,dx = \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx}_{=0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi\cos\pi n}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] = -\frac{2\cos\pi n}{n}$$

0

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}; \quad [\cos\pi n = (-1)^n]$$

$$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \quad \text{при} \quad x\in(-\pi;\pi)$$

$$\text{при} \quad x = x_0 \qquad S(x_0) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\pi n = \pi$$

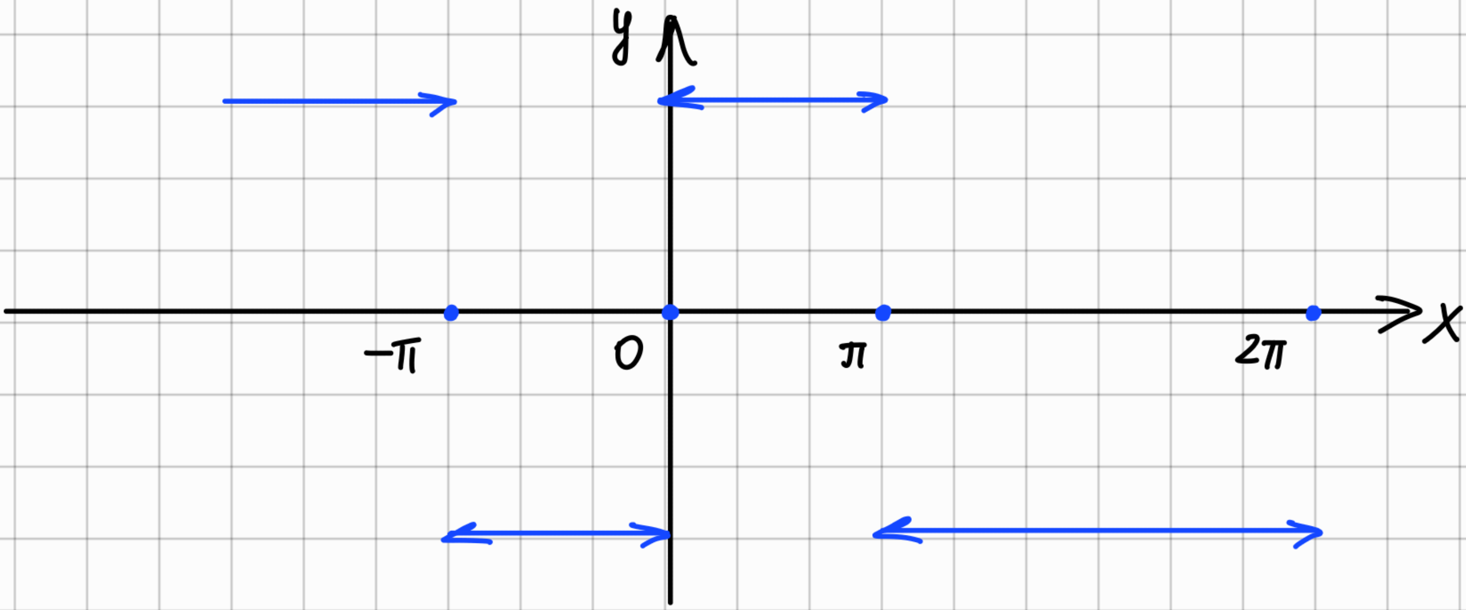
0

8. $f(x) = \pi + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n}$, $-\pi < x < \pi$; π.

---

12. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$, и, пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда Лейбница

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$



Если функция f четная, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0, \quad n \in N;$$

а если — нечетная, то

$$a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n \in N.$$

Ряд будет сход. неравном. на $(-\infty;+\infty)$

т.к сумма его разрывна (равном. сх. ряд из непр фо-ций имеет непр. сумму)

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sign} t \sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin nt\,dt = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos nt}{n}\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{\pi n} = \frac{2}{\pi n}\left(1+(-1)^{n+1}\right)$$

$$\operatorname{sign}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n}\left(1+(-1)^{n+1}\right)\sin nx, \quad -\pi < x < \pi$$

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{4}{\pi(2k+1)}, & n = 2k+1, \quad k = 0,1,2 \end{cases}$$

$$\operatorname{sign} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4\sin(2k+1)x}{\pi(2k+1)}; \quad \sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^k$$

$$x = \frac{\pi}{2}: \quad 1 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$ на указанном промежутке, длина промежутка является периодом (13–26).

24. $f(x) = x\sin x$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

$x \sin x$ – четная $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right] = 1$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^{\pi} x\left(\frac{\sin(n+1)x + \sin(1-n)x}{\cancel{2}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x\sin(n+1)x\,dx + \int_0^{\pi} x\sin(1-n)x\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(n+1)x}{n+1}\Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}\Big|_0^{\pi} + \right.$$

$$\left. - \frac{x\cos(1-n)x}{1-n}\Big|_0^{\pi} + \frac{\sin(1-n)x}{(1-n)^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \cancel{\frac{1}{\pi}}\left[-\frac{\cancel{\pi}\cos(n+1)\pi}{n+1}\right.$$

$$\left. - \frac{\cancel{\pi}\cos(1-n)\pi}{1-n}\right] = -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{(-1)^{1-n}}{1-n};\ n \neq 1$$

$$n = 1:\quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\underbrace{\sin x\cos x}_{\frac{\sin 2x}{2}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$$

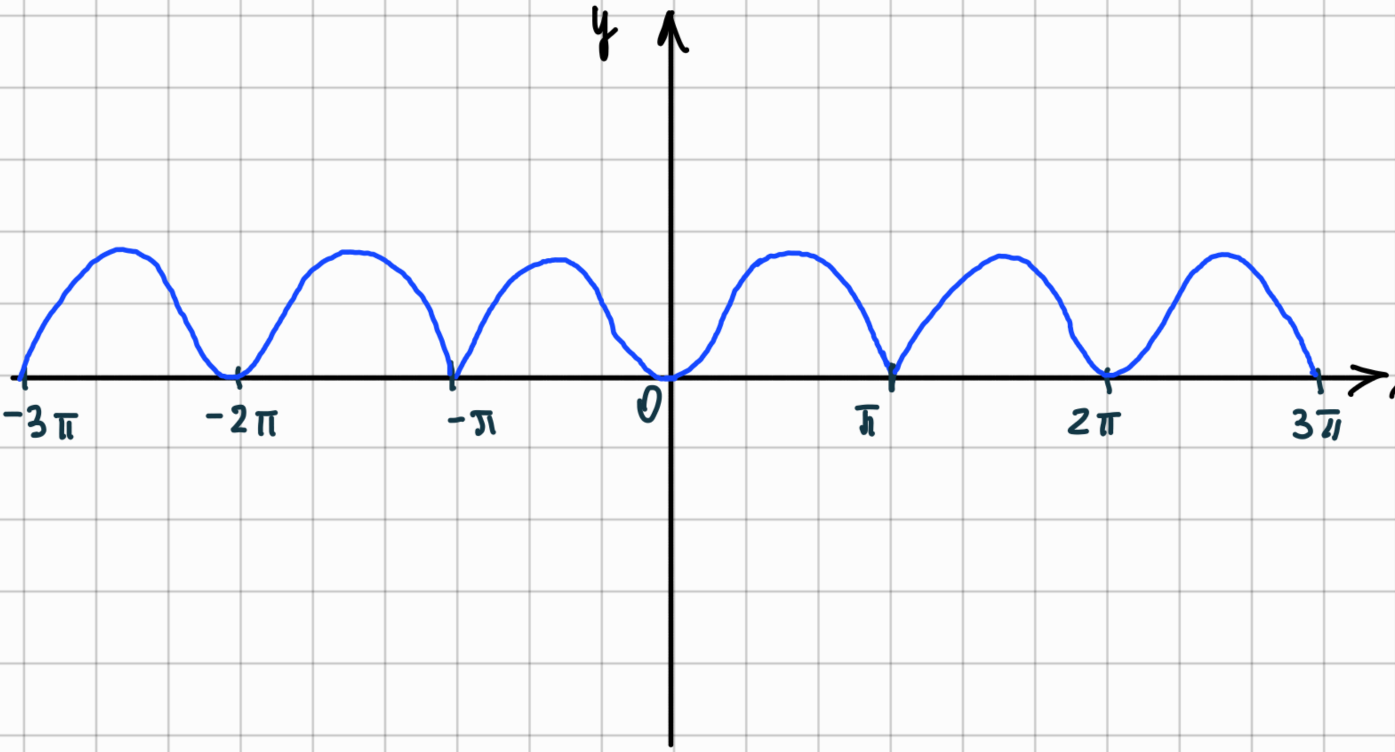
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cos 2x\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^{2-n}}{n-1} = \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^{-n}}{n-1} =$$

$$= \frac{(-1)^n(n-1-n-1)}{n^2-1} = \frac{-2(-1)^n}{n^2-1} = 2\,\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}$$

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx$$



ряд $\Rightarrow f(x)$, $f(x)$ имеет период 2π и кус.-гладкая на $\mathbb{R}$

24. $1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos nx.$

25. $f(x) = x\cos x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$.

Теория рядов Фурье 2π-периодических функций переносится на случай периодических функций, имеющих любой период $2l$, с помощью линейного отображения

$$y = \frac{\pi}{l}x, \quad -l \leqslant x \leqslant l, \quad -\pi \leqslant y \leqslant \pi,$$

$x\cos x$ – нечётная

$a_n = 0$; $a_0 = 0$

$2l = \pi$, $l = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \overset{=0}{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} [\overset{=0}{a_n \cos 2nx} + b_n \sin 2nx]$$

отрезка $[-l;l]$ на отрезок $[-\pi;\pi]$. *Рядом Фурье функции f, абсолютно интегрируемой на отрезке* $[-l;l]$, называется ряд

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \tag{10}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \in N. \tag{11}$$

Если функция f четная, то

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad b_n = 0, \quad n \in N,$$

а если f нечетная, то

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \in N, \quad a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin 2nx\,dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos x \sin 2nx\,dx$$

$$= \frac{\cancel{4}\,2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\left[\frac{\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x}{\cancel{2}}\right]dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin(2n+1)x\,dx + \int_0^{\pi/2} x\sin(2n-1)x\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{\overset{=0}{x\cos(2n+1)x}}{2n+1} + \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} - \right.$$

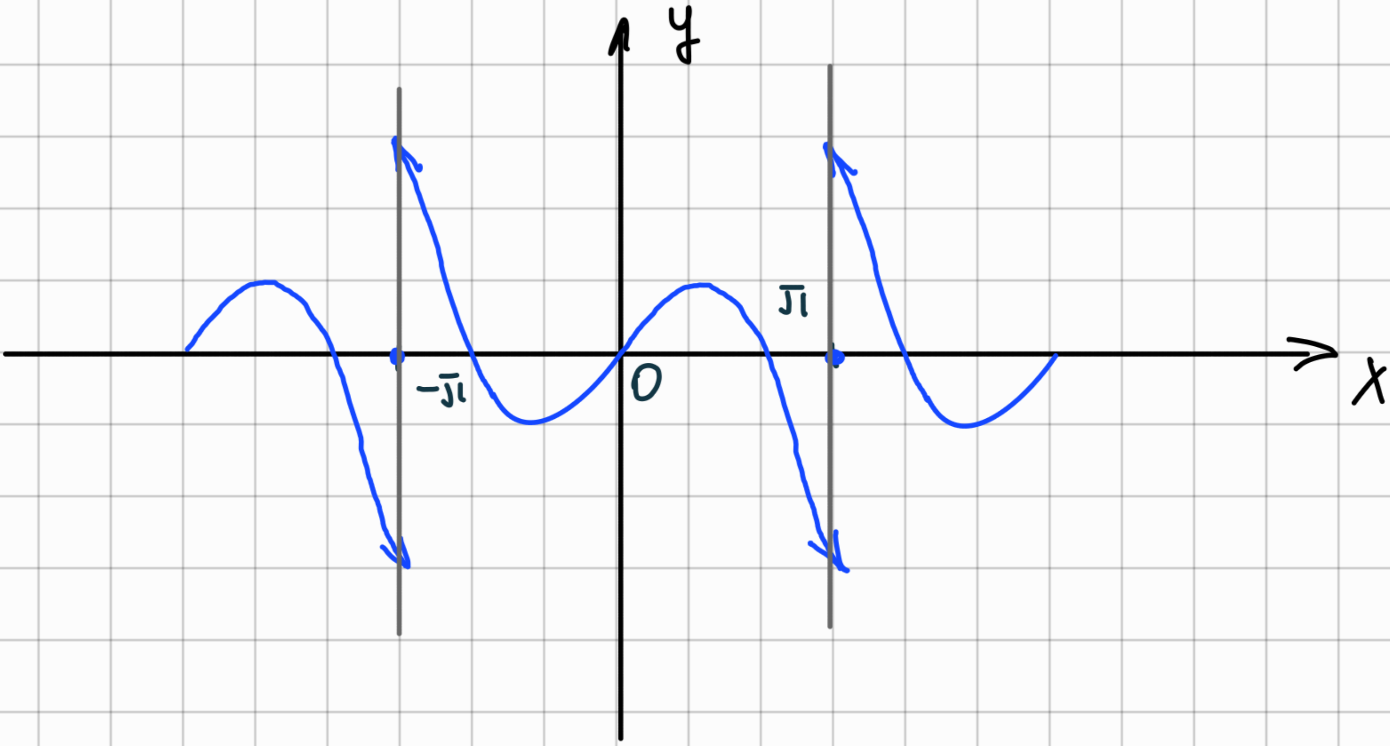
$$\left.\left(-\frac{\overset{=0}{x\cos(2n-1)x}}{2n-1} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2} + \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{(2n-1)^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\right] = \frac{2(-1)^{n-1}}{\pi}\left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}(-1)^{n+1}\left[\frac{2\cdot 4n}{(4n^2-1)^2}\right] = \frac{16}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow x\cos x = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx$$



РФ не сход. равномерно к $f(x)$, т.к сумма разрывна

25. $\frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx.$

28. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, периодически продолженную с периодом 2. Нарисовать график суммы ряда.

$f(x)=x^2$

$2l=2,\ l=1$

x^2 — четная, $b_n=0$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l x^2\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 \cos\frac{\pi n x}{l}\,dx = 2\int_0^1 x^2 \cos \pi n x\,dx$$

$u = x^2, \quad du = 2x\,dx$

$dV = \cos \pi n x\,dx, \quad V = \frac{\sin \pi n x}{\pi n}$

$$a_n = 2\left[x^2\,\frac{\sin \pi n x}{\pi n}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin \pi n x}{\pi n}\cdot 2x\,dx\right]$$

$0''$

$$= -4\int_0^1 \frac{\sin \pi n x}{\pi n}\,x\,dx = -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{x\cos \pi n x}{\pi n}\Big|_0^1\right.$$

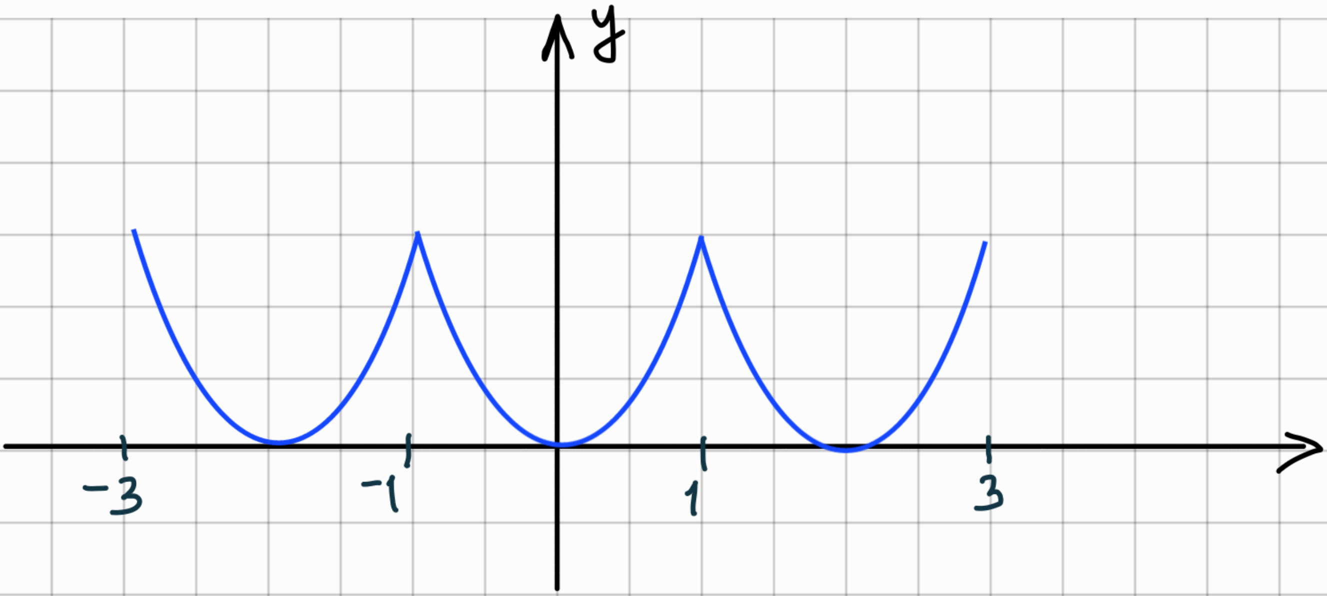
$u = x, \quad du = dx$

$dv = \sin \pi n x\,dx \quad V = -\frac{\cos \pi n x}{\pi n}$

$$\left. + \int_0^1 \frac{\cos \pi n x}{\pi n}\,dx\right] = -\frac{4}{\pi n}\left[-\frac{\cos \pi n}{\pi n} - \overset{0}{\frac{\sin \pi n x}{(\pi n)^2}}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{4\cos \pi n}{(\pi n)^2} = \frac{4(-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

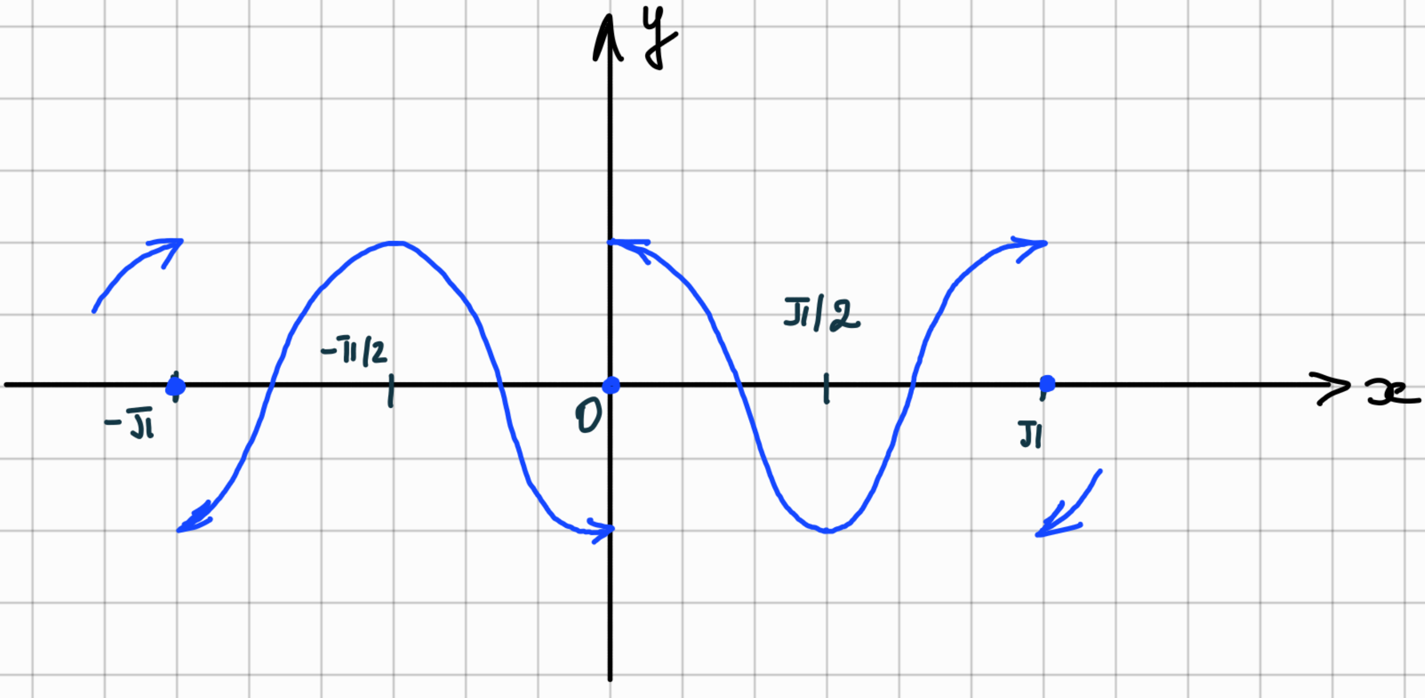
$$x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos \pi n x$$



РФ сх равномерно к $f(x)$, т.к. $f(x)$ имеет период 2 и кус.-гладк.

28. $\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi n x.$

41. Разложить функцию $f(x) = \cos 2x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, в ряд Фурье по синусам.



продолжим по нечетности на $[-\pi, 0]$, затем с периодом 2π

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\, dx, \quad l = \pi$$

$a_n = 0$

$a_0 = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin nx\, dx = \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+2)x + \sin(n-2)x}{\cancel{2}}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin(n+2)x\, dx + \int_0^{\pi} \sin(n-2)x\, dx\right] =$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+2)x}{n+2}\Bigg|_0^{\pi} - \frac{\cos(n-2)x}{n-2}\Bigg|_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\overset{\text{" }\cos(\pi n+2\pi)}{\cos(n+2)\pi}}{n+2} + \frac{1-\overset{\text{" }\cos(\pi n-2\pi)}{\cos(n-2)\pi}}{n-2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos\pi n}{n+2} + \frac{1-\cos\pi n}{n-2}\right]$$

n чётное $\Rightarrow b_{2n} = 0$

n нечётное $\Rightarrow b_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n-2}\right) =$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{2(2n-1)}{(2n-3)(2n+1)} \quad \text{при } n \neq 2$$

Если $n = 2$: $b_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2x \sin 2x\, dx =$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{\cancel{2}}dx = 0$$

$$\cos 2x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-3)(2n+1)}$$

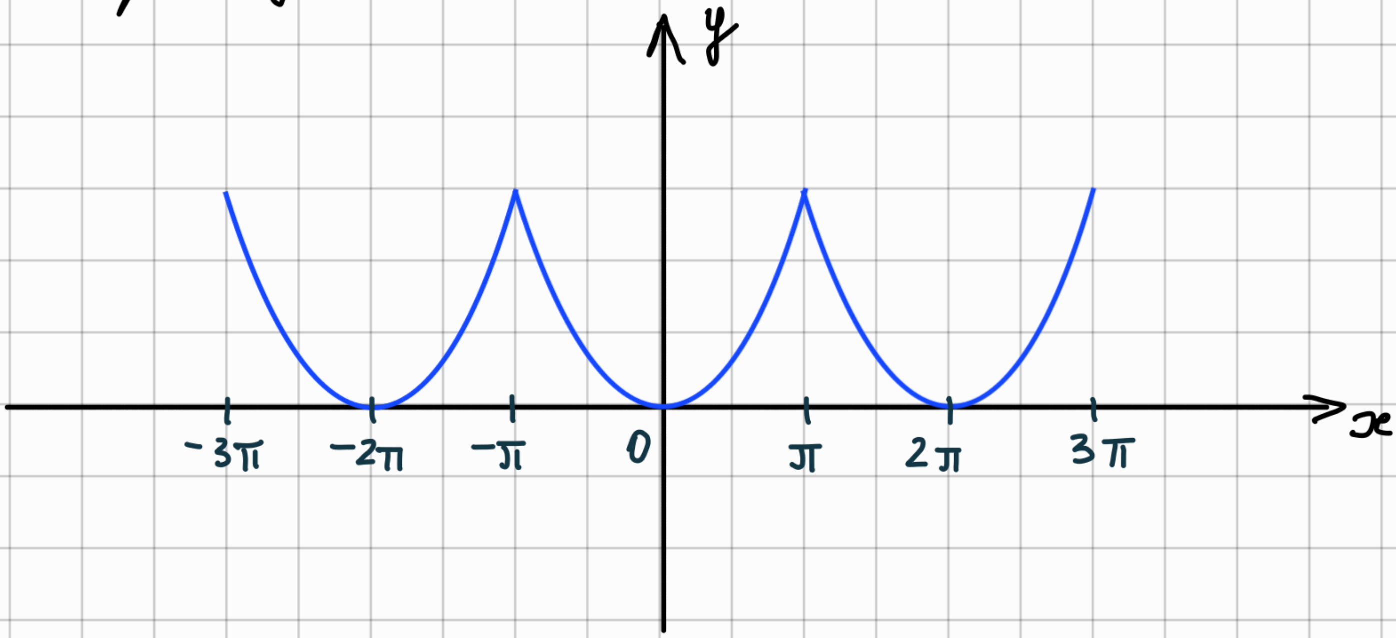
ряд не сход. равномерно к $f(x)$, т.к. сумма разрывна

41. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-3)(2n+1)}$.

45. Разложить функцию $f(x) = x^2$ в ряд Фурье:
1) на отрезке $[-\pi; \pi]$ по косинусам;
2) на интервале $(0; \pi)$ по синусам;
3) на интервале $(0; 2\pi)$ по синусам и косинусам.
Пользуясь этими разложениями, найти суммы рядов

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

1) по cos ⇒ продолж по четности с периодом 2π



$f(x)$ имеет период 2π и кус.-гладк. на $\mathbb{R}$ ⇒ ряд сх. равномерно к $f(x)$.

$b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,d\ell = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^3}{\pi \cdot 3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n x}{\ell}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}2x\,dx\right] =$$

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = \cos nx\,dx \qquad V = \frac{\sin nx}{n}$

$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin nx \, x\,dx = -\frac{4}{\pi n}\Big[-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx}_{=0}\Big]$$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \sin nx\,dx \qquad V = -\frac{\cos nx}{n}$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{\pi\cos n\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

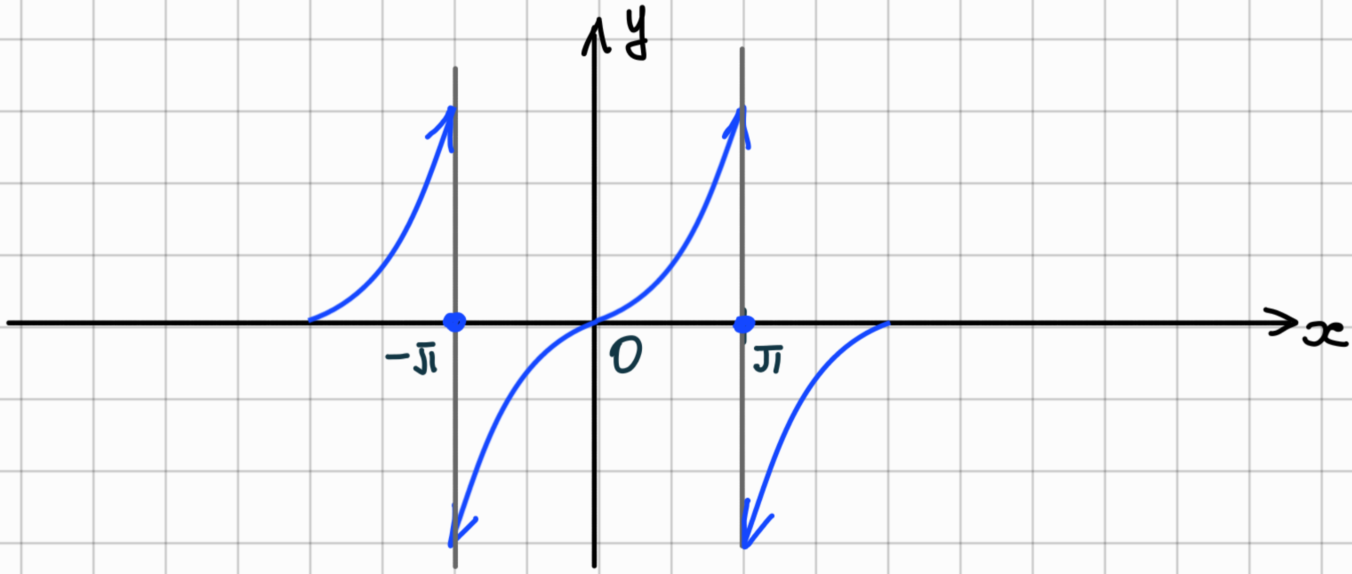
$f(x) = S(x)$ на $[-\pi, \pi]$ (сх равномерно к $f(x)$)

$$f(\pi):\ \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\pi n = \frac{\pi^2}{3} +$$

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overbrace{(-1)^{2n}}^{=1}}{n^2} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}_{=S_1} = \frac{2\pi^2}{3\cdot 4} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$f(0):\ 0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \Rightarrow S_2(x) = -\left(-\frac{\pi^2}{3\cdot 4}\right) = \frac{\pi^2}{12}$$

2)



продолж на $(-\pi, 0)$ по нечётности,
далее с периодом 2π

ряд сх. неравном к $f(x)$, т.к сумма разрывна.

$a_0 = 0$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-x^2\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}2x\,dx\right] =$$

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dv = \sin nx\,dx \qquad v = -\frac{\cos nx}{n}$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)\right]$$

$\overset{0}{\parallel}$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \cos nx\,dx \qquad v = \frac{\sin nx}{n}$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\,\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n\ \pi^2}{n}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n^3}\ \cos\pi n - 1\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n\ \pi^2}{n} + \frac{2((-1)^n - 1\ )}{n^3}\right]$$

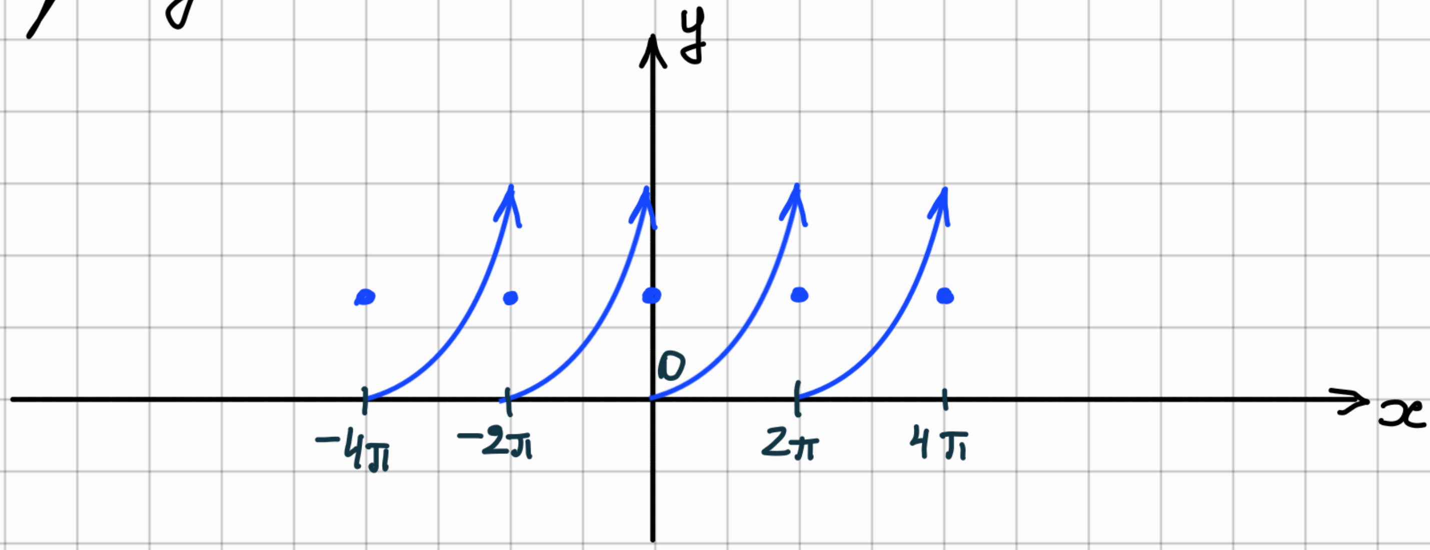
$$\Rightarrow x^2 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi^2}{n} - \frac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\right)\sin nx$$

$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \dots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\cancel{3}}{4} \frac{\pi^2}{\cancel{6}\,2} = \boxed{\frac{\pi^2}{8}}$$

3) по синусам и косинусам $\Rightarrow$ продолж. с периодом 2π



ряд сх неравномерно к $f(x)$, т.к сумма разрывна

Пример 6. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом $2l$ функцию f, если $f(x) = x$ при $a \leqslant x < a + 2l$. Выяснить, для каких значений x будет справедливо это разложениеΓ Чему будет равна сумма ряда Фурье в остальных точкахΓ

$2l = 2\pi$

$l = \pi$

▲ Найдем коэффициенты Фурье функции f (см. (12)):

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_a^{a+2l} x\,dx = \frac{x^2}{4l}\Big|_a^{a+2l} = a + l,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \cos\frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2l}{n\pi} \sin\frac{n\pi a}{l},$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \sin\frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{2l}{n\pi} \cos\frac{n\pi a}{l}, \quad n \in N.$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^3}{2\cdot 3\pi} - \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\,dx = \frac{4}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nd x = -\frac{4\pi}{n^2}$$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n^2}\right)$$

45. 1) $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \cos nx}{n^2}$;

2) $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{\pi^2}{n} - \dfrac{2(1-(-1)^n)}{n^3}\right)\sin nx$;

3) $\dfrac{4\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos nx}{n^2} - \dfrac{\pi \sin nx)}{n}\right)$, $S_1 = \dfrac{\pi^2}{6}$, $S_2 = \dfrac{\pi^2}{12}$, $S_3 = \dfrac{\pi^2}{8}$.

65. Доказать, что если абсолютно интегрируемая на отрезке $[0;\pi]$ функция f удовлетворяет условию $f(\pi - x) = f(x)$, то ее коэффициенты Фурье обладают следующими свойствами:

1) при разложении f в ряд Фурье по косинусам $a_{2n-1} = 0$, $n \in N$;

2) при разложении f в ряд Фурье по синусам $b_{2n} = 0$, $n \in N$.

$2l = \pi$

$l = \pi/2$

1) по косинусам с периодом

$$a_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx\right) =$$

$u = \pi - x$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx + \int_{\pi/2}^{0} f(\pi-u)\cos 2(2n-1)(\pi-u)\,d(\pi-u)\right) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx + \int_0^{\pi/2} f(\pi-u)\cos 2(2n-1)(\pi-u)\,du\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx + \int_0^{\pi/2} f(u)\cos 2(2n-1)\right.$$

$$\left.(\pi - u)\,du\right)$$

$\cos(\alpha-\beta)$

$$\cos 2(2n-1)(\pi-u) = \cos\left(2(2n-1)\pi - 2(2n-1)u\right) = \cos 2(2n-1)\pi$$

$$\cdot \cos 2(2n-1)u + \underbrace{\sin 2(2n-1)\pi}_{=0}\sin 2(2n-1)u = \cos 2(2n-1)u$$

$\Rightarrow$

$$a_{2n-1} = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx - \int_0^{\pi/2} \overset{f(x)}{\overset{\parallel}{f(u)}}\cos 2(2n-1)u\,\underset{-dx}{\underset{\parallel}{du}}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx - \int_0^{\pi/2} f(x)\cos 2(2n-1)x\,dx\Big)$$

$= 0$

2) по синусам с периодом π

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 4nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\sin 4nx\,dx\right.$$

$u = \pi - x$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin 4nx\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\sin 4nx\,dx + \right.$$

$$\left.\int_0^{\pi/2} f(u)\sin 4n(\pi-u)\,du\right)$$

$$\sin 4n(\pi-u) = \sin(4\pi n - 4nu) = -\sin 4nu$$

$$b_{2n} = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} f(x)\sin 4nx\,dx - \int_0^{\pi/2} f(u)\underset{-\sin 4nx}{\underset{\parallel}{\sin 4nu}}\,\overset{-dx}{\overset{\parallel}{du}}\right)$$

$= 0$

66. Как следует продолжить абсолютно интегрируемую на отрезке $[0;\pi/2]$ функцию на отрезок $[-\pi;\pi]$, чтобы ее ряд Фурье имел вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x\Gamma$$

разлож. $f(x) \in L_R(0, \pi/2)$ по косинусам нечётные кратных дуг

$f(x) \in L_2(0, \frac{l}{2}) \Rightarrow l = \pi$

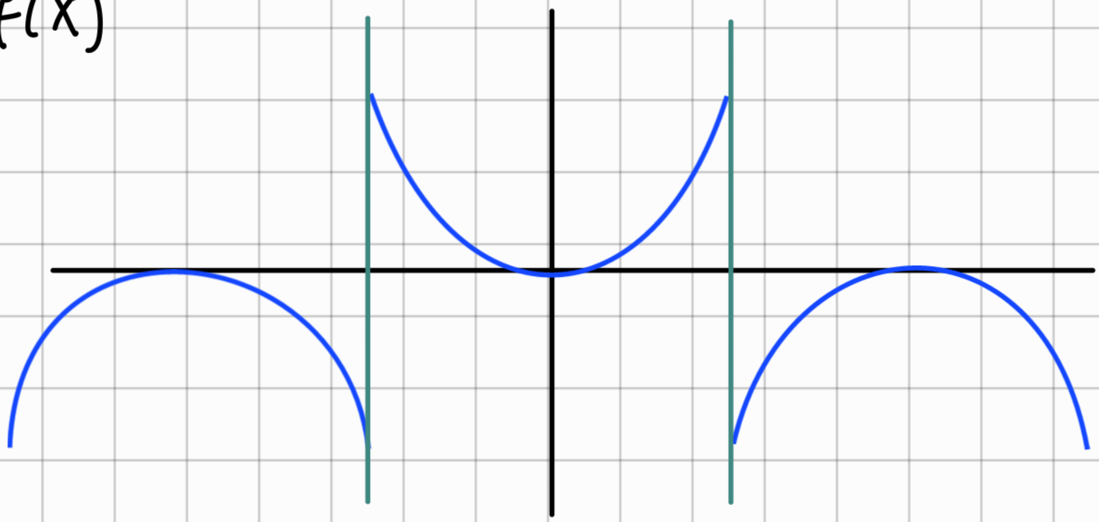
симм относ. $(\frac{l}{2}, 0)$

далее по четности, далее с период. $2l$.

$b_n = 0$, $a_{2n} = 0 \Rightarrow f(l-x) = -f(x)$, $0 < x < \frac{l}{2}$

$\Downarrow$

$f(-x) = f(x)$



66. $f(-x) = f(x)$; $f(\pi - x) = -f(x)$.

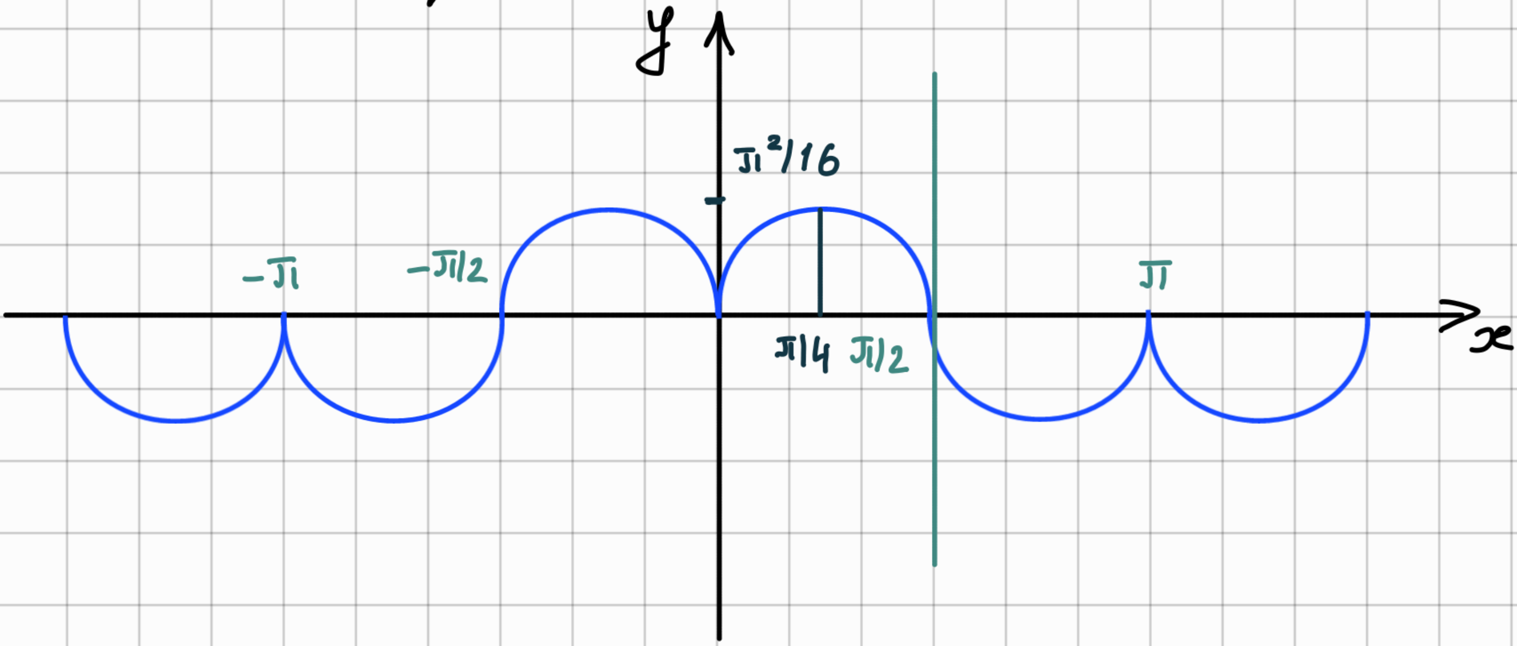
68. Разложить функцию $f(x) = x(\pi/2 - x)$ в ряд Фурье на отрезке $[0;\pi/2]$:

1) по системе $\{\cos(2n-1)x\}$, $n \in N$;

2) по системе $\{\sin(2n-1)x\}$, $n \in N$.

1) по косинусам нечетные кратных дуг

симм отн. $(\frac{l}{2}, 0)$, далее по чётности, далее с периодом 2π



$$a_{2n-1} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(2n-1)x\,dx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\pi x}{2}\cos(2n-1)x\,dx - \int_0^{\pi/2} x^2\cos(2n-1)x\,dx\right)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(-\frac{\pi(-1)^n}{2(2n-1)} - \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)} + \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^3}\right)$$

① $$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} x\cos(2n-1)x\,dx = \frac{\pi}{2}\left.\frac{x\sin(2n-1)x}{2n-1}\right|_0^{\pi/2}$$

$u = x \qquad du = dx$

$dv = \cos(2n-1)x\,dx \qquad v = \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,dx = \frac{\pi^2\sin(\pi n - \pi/2)}{4(2n-1)} + \left.\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right|_0^{\pi/2}$$

$= \sin\pi n = 0$

$$= \frac{-\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)} + \frac{\pi}{2}\frac{\cos(\pi n - \frac{\pi}{2})}{(2n-1)^2} - \frac{\pi}{2(2n-1)^2} =$$

$$= -\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)} - \frac{\pi}{2(2n-1)^2}$$

② $$\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(2n-1)x\,dx = x^2 \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\Bigg|_0^{\pi/2} -$$

$u = x^2 \qquad du = 2x\,dx$

$dV = \cos(2n-1)x\,dx \qquad V = \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

$$-\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} 2x\,dx = -\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)} - \frac{2}{2n-1}\Bigg[$$

$$-\underbrace{\frac{x\cos(2n-1)x}{2n-1}\Bigg|_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\,dx\Bigg] =$$

$u = x \qquad du = dx$

$dV = \sin(2n-1)x\,dx \qquad V = -\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$

$$= -\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)} - \frac{2}{2n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= -\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)} + \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^3}$$

$\sin(\pi n - \frac{\pi}{2})$

$n=1: \quad -\cos \pi n$

$-(-1)^n$

$$\frac{4}{\pi}\left(-\cancel{\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)}} - \frac{\pi}{2(2n-1)^2} + \cancel{\frac{\pi^2(-1)^n}{4(2n-1)}} - \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^3}\right)$$

$$= -\frac{2}{(2n-1)^2} - \frac{2\cdot 4(-1)^n}{\pi(2n-1)^2(2n-1)}$$

$$x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)}\right)\cos(2n-1)x$$

Замечание: $\underset{\pi/2}{f(x)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2n-1)x$

$$A_n = \frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle} = \frac{\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(2n-1)x\,dx}{\int_0^{\pi/2} \cos^2(2n-1)x\,dx} = \frac{\pi}{4}$$

норма φ_n

$$\cos^2(2n-1)x = \frac{1+\cos 2(2n-1)x}{2}$$

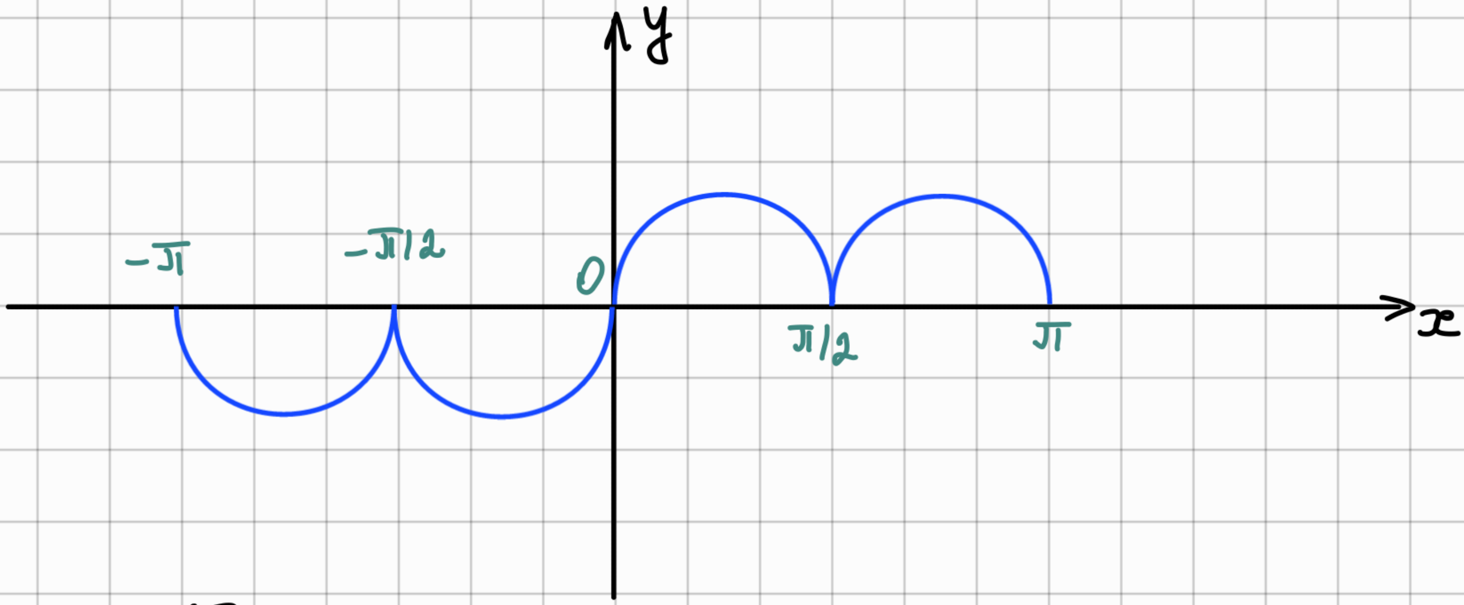
$$A_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(x)\cos(2n-1)x\,dx$$

2) по синусам нечётные кратных дуг

1) по синусам нечётных кратных дуг

$f(x) \in L_R\left(0, \frac{l}{2}\right)$ $\quad f(l-x) = f(x),\ 0<x<\frac{l}{2}$

симм отн-но $x = \frac{l}{2}$ далее по нечетности, далее период $2l$



$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(2n-1)x$$

$$B_n = \frac{\langle f_n, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{\int_0^{\pi/2} f(x) \sin(2n-1)x \, dx}{\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2(2n-1)x}_{\frac{1}{2} - \frac{\cos 2(2n-1)x}{2}} \, dx} =$$

$$= \frac{4}{\pi} \langle f_n, \varphi_n \rangle$$

$$B_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin(2n-1)x \, dx = \frac{4}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2} x \sin(2n-1)x \, dx \right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2n-1)x \, dx \right)$$

(1) $$\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin(2n-1)x \, dx = \frac{\pi}{2}\left[\underbrace{\frac{-x\cos(2n-1)x}{2n-1}\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} + \right.$$

$u = x \qquad du = dx$

$dV = \sin(2n-1)x \, dx \qquad V = \frac{-\cos(2n-1)x}{2n-1}$

$$\left. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} \, dx \right] = \frac{\pi}{2} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}$$

(2) $$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(2n-1)x \, dx = \underbrace{-\frac{x^2\cos(2n-1)x}{2n-1}\Big|_0^{\pi/2}}_{=0} +$$

$u = x^2 \qquad du = 2x \, dx$

$dV = \sin(2n-1)x \, dx \qquad V = -\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} 2x \, dx = \frac{2}{2n-1}\left[\frac{x\sin(2n-1)x}{2n-1}\Big|_0^{\pi/2} - \right.$$

$u = x \qquad du = dx$

$dV = \cos(2n-1)x \, dx \qquad V = \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

$$-\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}\,dx \Big] = -\frac{\pi\,(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^3}\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \boxed{-\frac{\pi(-1)^n}{(2n-1)^2} - \frac{2}{(2n-1)^3}}$$

$$B_n = \frac{4}{\pi}\left(\underbrace{-\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{\pi(-1)^n}{(2n-1)^2}}_{=\frac{\pi}{2}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}} + \frac{2}{(2n-1)^3}\right)$$

$$x\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi(2n-1)^3}\right)\sin(2n-1)x$$

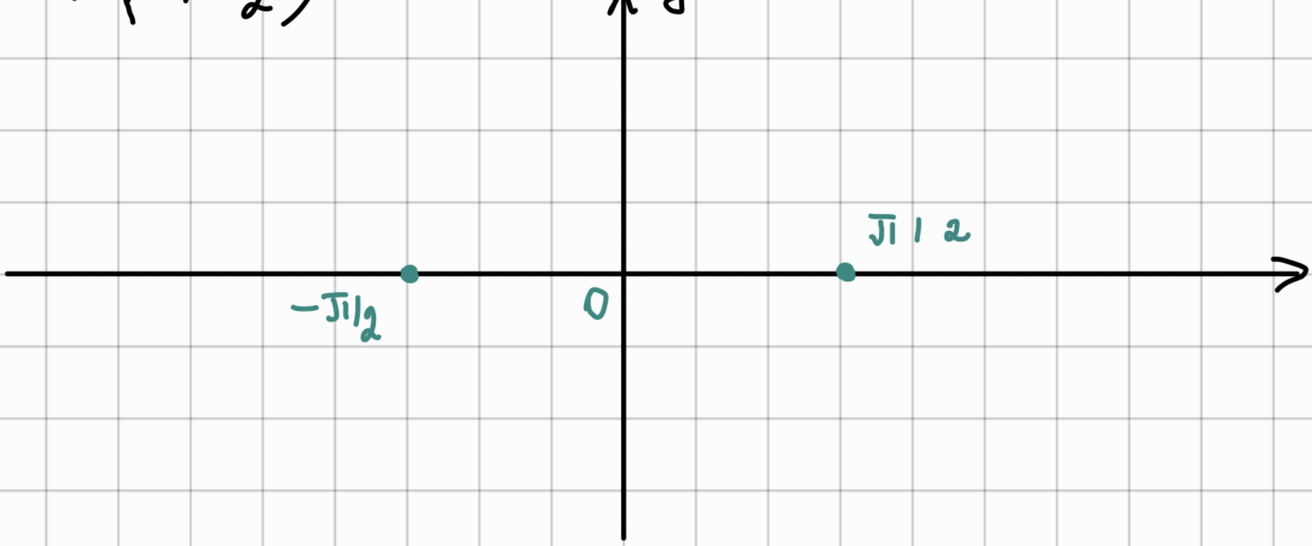
68. 1) $-2\sum\limits_{n=1} \frac{1}{(2n-1)^2}\left(1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\right)\cos(2n-1)x$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{\pi(2n-1)^3}\right)\sin(2n-1)x$.

72. Какими особенностями обладают коэффициенты Фурье функции периода 2π, если ее график:
1) имеет центр симметрии в точках $(0;0)$ и $(\pm\pi/2;0)$;
2) имеет центр симметрии в начале координат и оси симметрии $x = \pm\pi/2$Г

1) по синусам чётных кратных дуг

$f(x) \in L_R\left(0, \frac{l}{2}\right)$



центр симметр $(0,0) \Rightarrow$ нечетн., далее по синусам, $a_n = 0$

$f(-x) = -f(x)$

$f(\pi - x) = -f(x)$ — симметрия $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

$x \to \pi - x$ $\quad f(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n(\pi - x)) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\underbrace{\sin \pi n}_{0} \cos nx - \underbrace{\cos \pi n}_{(-1)^n} \sin nx) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-1)^{n+1} \sin nx = -f(x)$ в силу симметрии $= -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

$b_n[(-1)^{n+1} + 1] = 0$

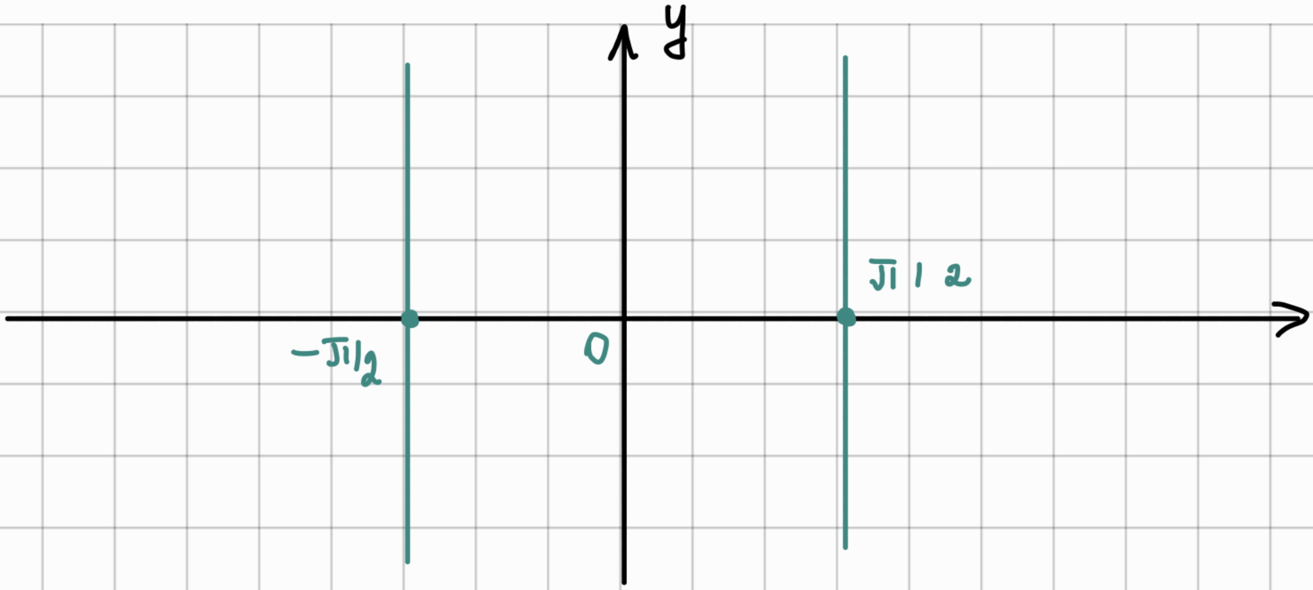
$2n-1$ (нечётное): $2b_{2n-1} = 0$

$2n$ (четное): $(-1)^{2n+1} + 1 = 0$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} \sin 2nx$ — по синусам чётных кратных дуг $f(x) \in L_R\left(0, \frac{l}{2}\right)$

$f(l - x) = -f(x)$, $0 < x < \frac{l}{2}$, далее по нечетности, далее с пер. $2l$

2)



$f(-x) = -f(x)$ нечётная, центр симметрии $(0,0)$ $\Rightarrow$ разложение по синусам

$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ – симметрия отн-но

$x = \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$$

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2} \pm nx\right) = \sin\frac{\pi n}{2}\cos nx \pm \sin nx \cos\frac{\pi n}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 b_n \sin nx \cos\frac{\pi n}{2} = 0$$

$$\Rightarrow b_n \cos\frac{\pi n}{2} = 0$$

$n=1$: b_1 любое

$n=2$: $-1 \Rightarrow b_2=0$

$n=3$: b_3 любое

$n=4$: $1 \Rightarrow b_4=0$

$\Rightarrow \forall n$ нечетного b_n остаются

$b_{2n}=0$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x$$

разложение по синусам нечётных кратных дуг

$f(x)\in L_R(0,\frac{l}{2})$ $\quad f(l-x)=f(x),\ 0<x<\frac{l}{2}$

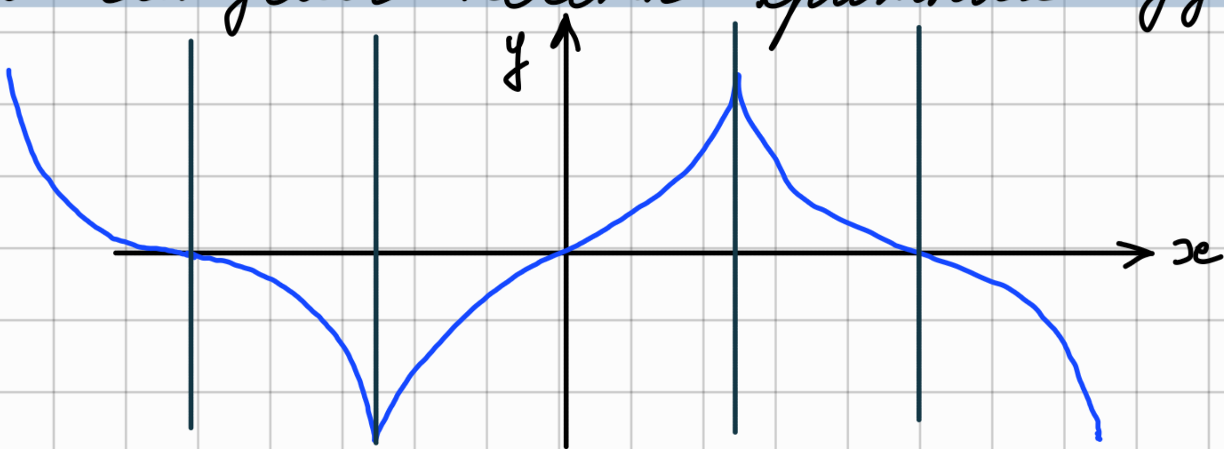
симм отн-но $x=\frac{l}{2}$ далее по нечетности, далее период $2l$

72. 1) $a_n=0,\ b_{2k-1}=0$; 2) $a_n=0,\ b_{2k}=0$.

1. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функций $f(x)=\operatorname{sh}x,\ x\in[0;\pi/2]$ и $g(x)=\operatorname{sh}x+1,\ x\in[0;\pi/2]$ по системам:
а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$;
в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?
Постройте графики сумм этих рядов.

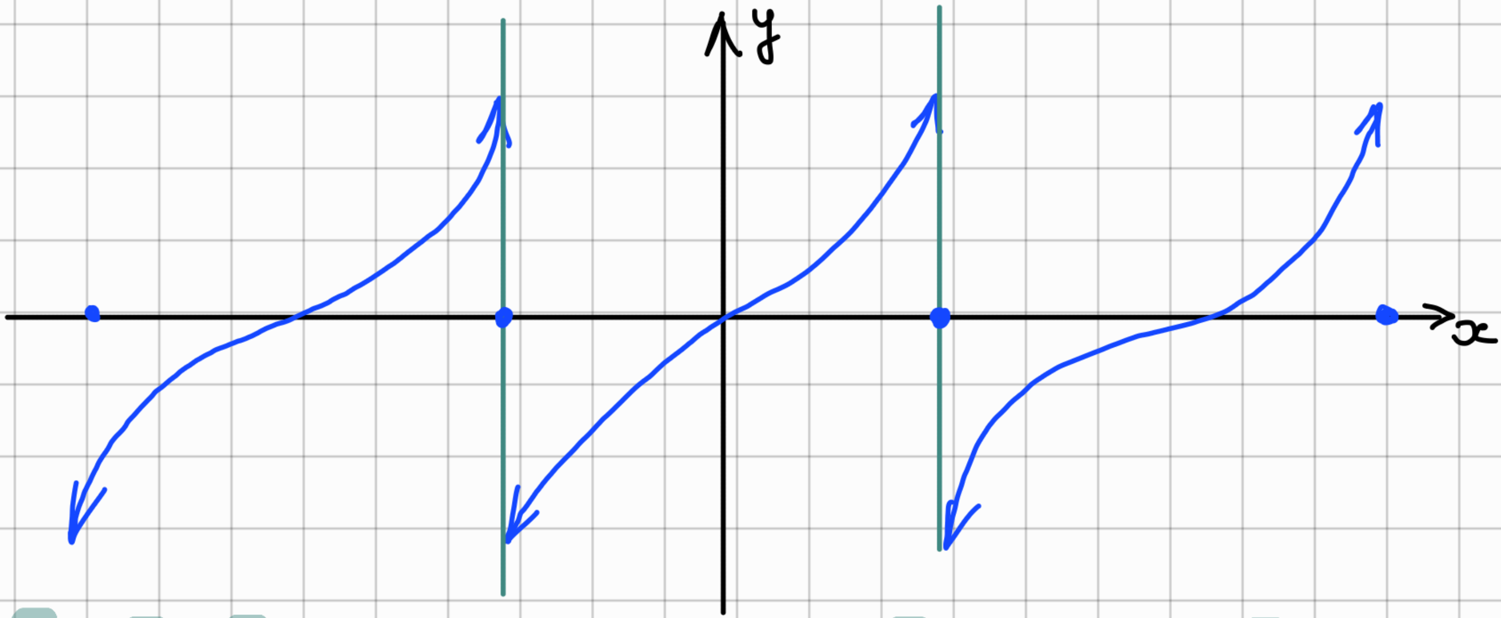
$$\boxed{f(x)=\operatorname{sh}x \qquad l=\pi \to 2l=2\pi}$$

а) по синусам нечетн кратных дуг



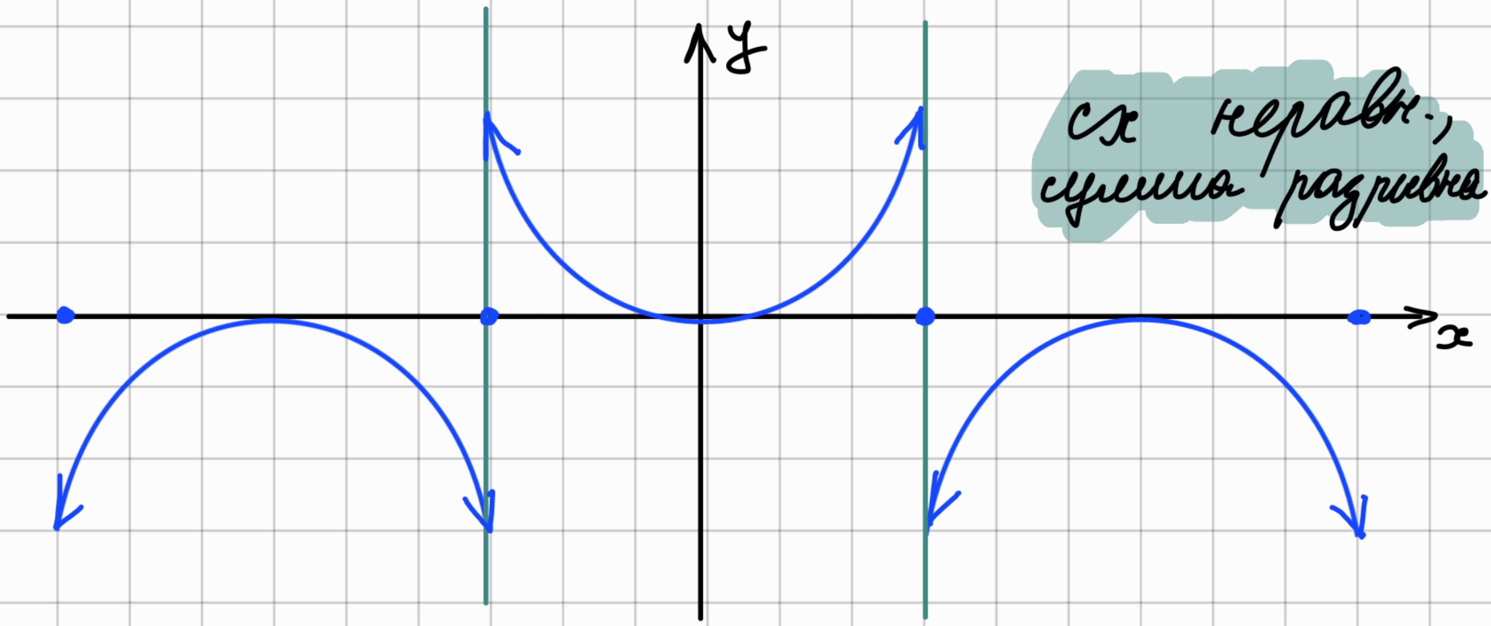
кусочно-гладкая $[-\pi, \pi]$ с периодом 2π ряд сх. равном по сл. 1 из призн Липшица.

б) по синусам четных кратных дуг



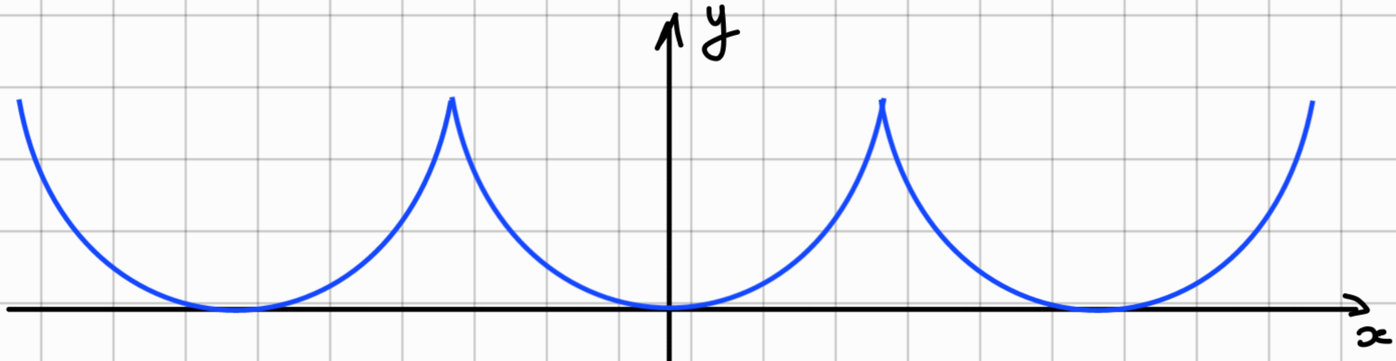
ряд сх неравном, т.к сумма разрывна по сл 1,2

в) по косинусам нечетных кр дуг



сх неравн., сумма разрывна

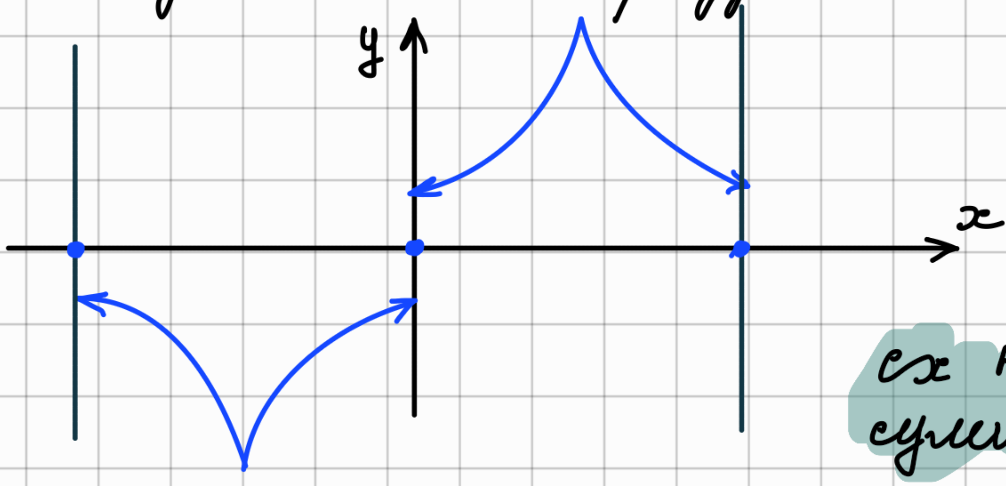
г) по косинусам четн кр дуг



ровн сход., период 2π
и кус - гладкая

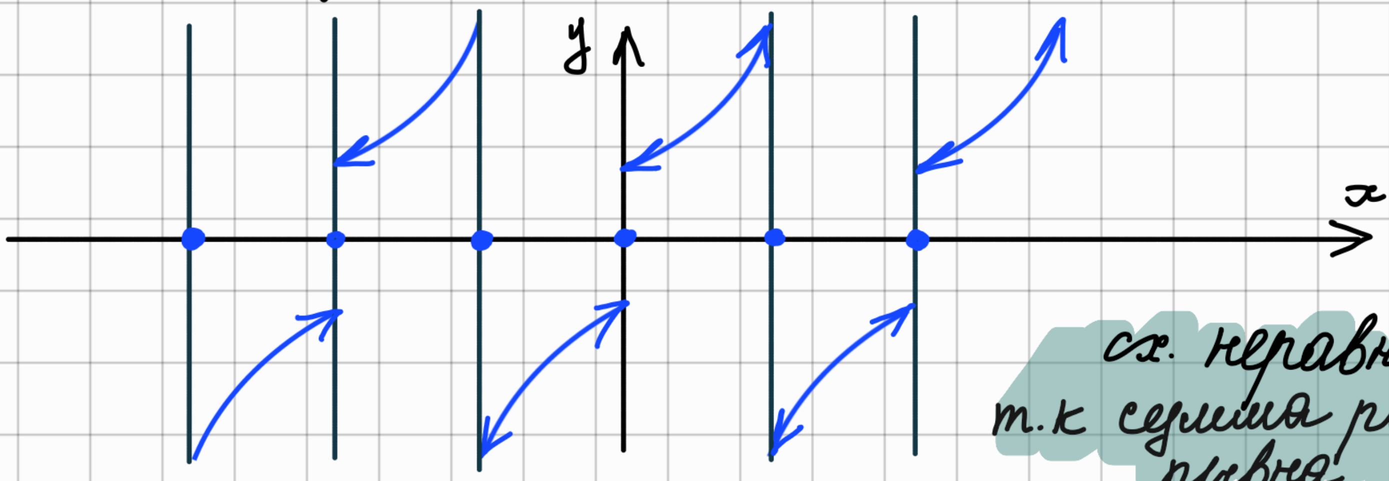
$\boxed{f(x) = \operatorname{Sh} x + 1 \qquad l = \pi \qquad 2l = 2\pi}$

а) по синусам нечетн кр дуг



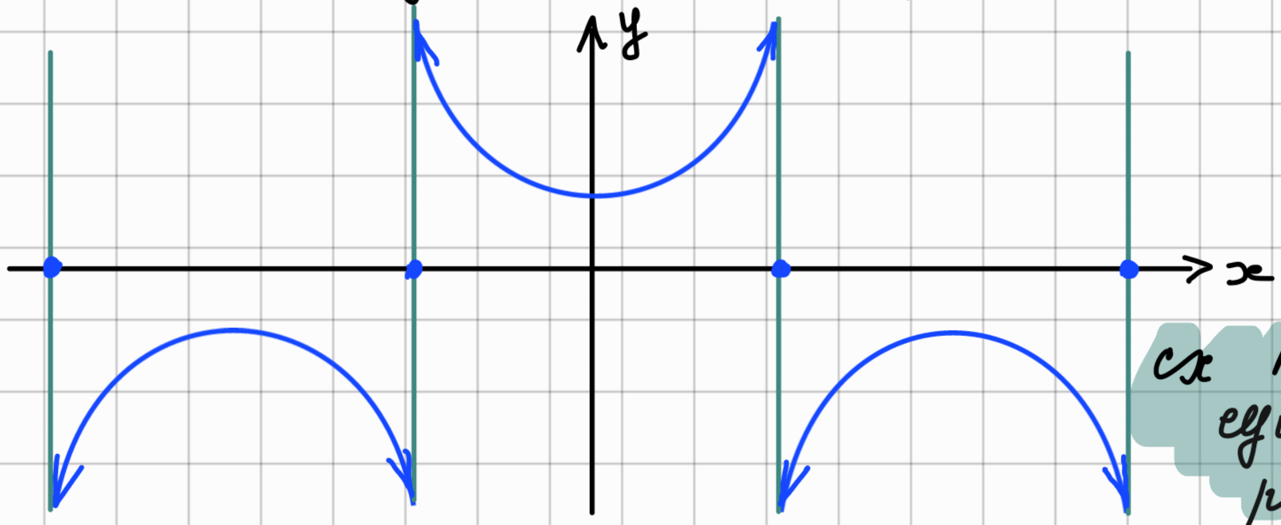
сх неравн., т.к. сумма разрывна

б) по синусам четн кр. дуг



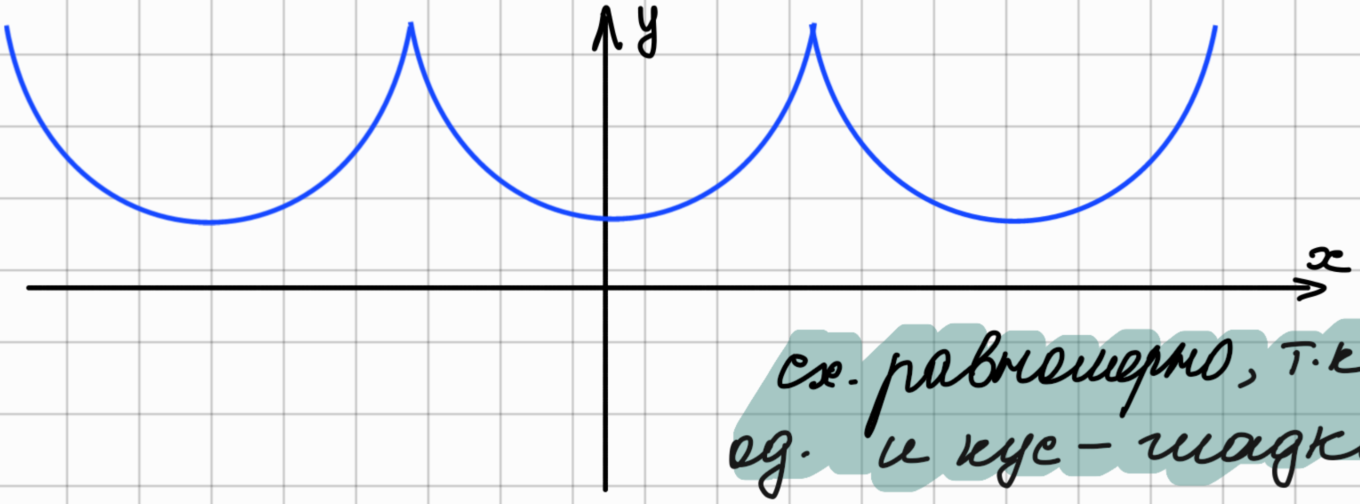
сх. неравн., т.к сумма разрывна

в) по косинусам нечётн кр дуг



сх неравн., т.к. есть раз-рывы

г) по косинусам чётн кр. дуг



сх. равномерно, т.к пери-од. и кус-гладкая

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определите порядок их убывания, ~~а также порядок убывания остатка ряда~~ для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$:

а) x^{2025}; б) x^{2024}; в) $(x^2 - \pi^2)^3$.

Теорема 22.8. 1) *Пусть функция f имеет период $2l$ и при всех x существует $f^{(k-1)}(x)$ — кусочно-гладкая функция на $[-l; l]$, $l > 0$. Тогда коэффициенты Фурье f удовлетворяют условию $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $k = 1, 2, \ldots$).*

2) *Пусть функция f имеет период $2l$, причём $f^{(k-2)}$ непрерывна в любой точке, а $f^{(k-1)}$ — кусочно непрерывно дифференцируемая функция на $[-l; l]$, $l > 0$. Тогда коэффициенты Фурье f удовлетворяют условию $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $k = 2, 3, \ldots$).*

$2l = 2\pi$

Пример 22.9. Оценить скорость стремления к нулю коэффициентов Фурье функции $f(x) = \pi^3 x - x^4 \operatorname{sign} x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

□ Так как функция нечётная, то $a_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ (функцию f считаем периодически продолженной на всю числовую прямую с периодом 2π). Имеем

$$f(x) = \begin{cases} \pi^3 x - x^4, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ \pi^3 x + x^4, & -\pi \leqslant x \leqslant 0; \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \pi^3 - 4x^3, & 0 < x < \pi, \\ \pi^3 + 4x^3, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Функция f непрерывна на $[-\pi; \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$. Далее, $\lim\limits_{x \to -0} f'(x) = \lim\limits_{x \to +0} f'(x) = \pi^3$; так как f непрерывна в точке 0, то существует $f'(0) = \pi^3$ (теорема 4.16 и замечание к ней). Точно также получим, что $f'(-\pi) = f'(\pi) = -3\pi^3$; значит, периодическая функция f' непрерывна в любой точке. Далее,

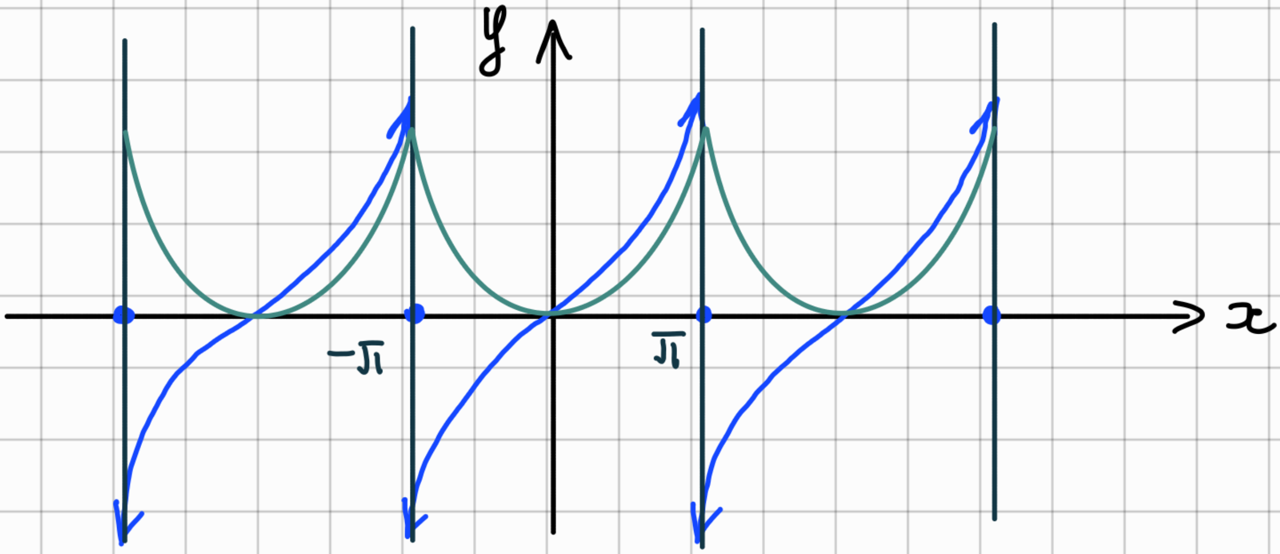
$f''(x) = \begin{cases} -12x^2, & 0 < x < \pi, \\ 12x^2, & -\pi < x < 0. \end{cases}$ Аналогично только что доказанному, $f''(0) = 0$, но $f''(\pi) \neq f''(-\pi)$. Поэтому периодическая функция f'' кусочно непрерывно дифференцируема на $[-\pi; \pi]$, но не является непрерывной в точках $x = \pm\pi$. Функция f удовлетворяет условиям второй части теоремы 22.8 при $k - 1 = 2$ и $k - 2 = 1$, т.е. $k = 3$. Поэтому $b_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, $n \to \to \infty$. Отметим, что первая часть теоремы 22.8 дала бы только $b_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \to \infty$. Поэтому на практике обычно выгоднее применять вторую часть теоремы, чем первую. ■

а) x^{2025} нечётная, $a_n = 0$

1) утв-ие неприменимо, т.к. $f(x)$ не явл. кусочно-гладк. $\Rightarrow$ производные тем более

2) $k-1=0$, $f'(x) = 2025x^{2024}$ $\Rightarrow b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow k=1$



$f(x)$ кусочно-гладкая

б) x^{2024} чётная $b_n = 0$

1) $k-1=0 \Rightarrow k=1$ $\quad a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

2) $k-1=1$, $k-2=0$ $\Rightarrow k=2$ $\quad a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$f(x)$ непрер., а $f'(x)$ кусочно-непр дифф.

в) $(x^2-\pi^2)^3$ $\quad f(x) = (x-\pi)^3(x+\pi)^3$

$\Rightarrow f(\pi) = f(-\pi) = 0$

Сравним $f^{(k)}(\pi)$ и $f^{(k)}(-\pi)$ до тех пор,

пока не получ. разл значения.

$$f'(x) = 3(x^2-\pi^2)\cdot 2x = 6x^3 - 6\pi^2 x$$

$$f'(\pi) = f'(-\pi) = 0$$

$$f''(x) = 18x^2 - 6\pi^2$$

$$f''(\pi) = f''(-\pi)$$

$$f'''(x) = 36x$$

$$f'''(\pi) \neq f'''(-\pi)$$

$f(x) \in C^2$, лишь третья произв стан. кус-гладкой, сама ф-ция, первая и вторая произв непрерывны

1) $k-1=2 \Rightarrow k=3$: $a_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$

чётная $\Rightarrow b_n = 0$

2) $k-2=2 \Rightarrow k=4$: $a_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$

чётная $\Rightarrow b_n = 0$

115. Не вычисляя коэффициенты ряда Фурье на $(-\pi;\pi)$ функции $f(x) = \pi x - x\,|x|$, выяснить, сходится ли этот ряд равномерно. Построить графики сумм, продифференцированного и дважды продифференцированного рядов.

$f(-\pi) = f(\pi)$ $\quad f(x)$ непр и кусочно- непр. дифф.

$$f'(x)=\begin{cases}\pi-2x, & 0<x<\pi\\ \pi+2x, & -\pi<x<0\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}-2, & 0<x<\pi\\ 2, & -\pi<x<0\end{cases}$$

4. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная кусочно непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$, то ряд Фурье для $f'(x)$ получается из ряда Фурье для $f(x)$ почленным дифференцированием, т. е. если*

$$f=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{22}$$

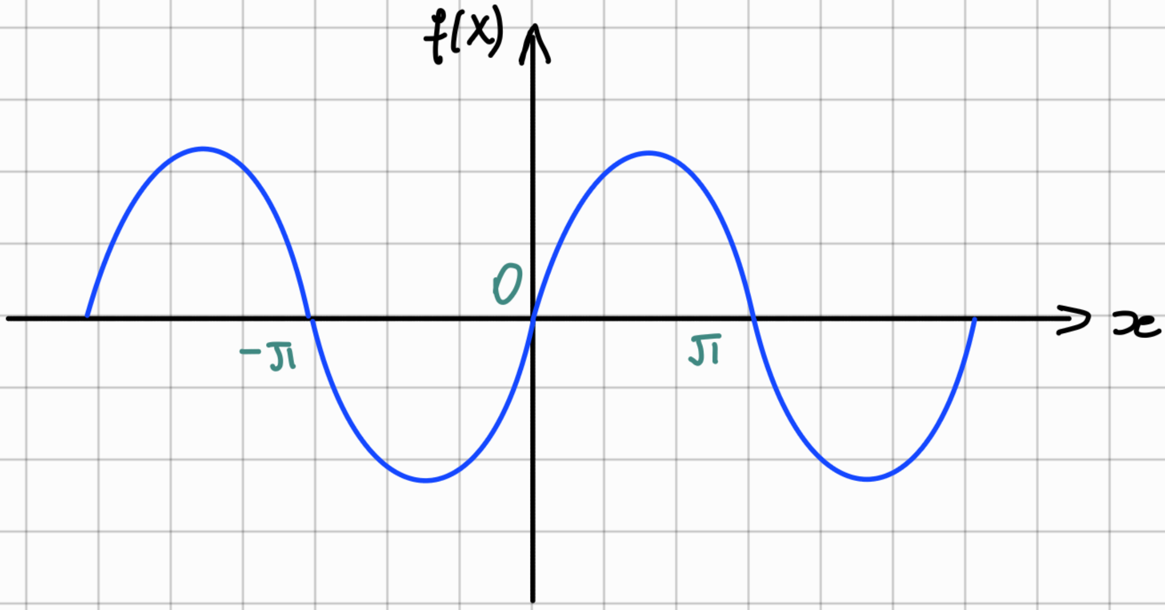
то

$$f'\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\cos nx). \tag{23}$$

Теорема 6. *Если $f(x)$ — кусочно непрерывная и 2π-периодическая функция $f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, то*

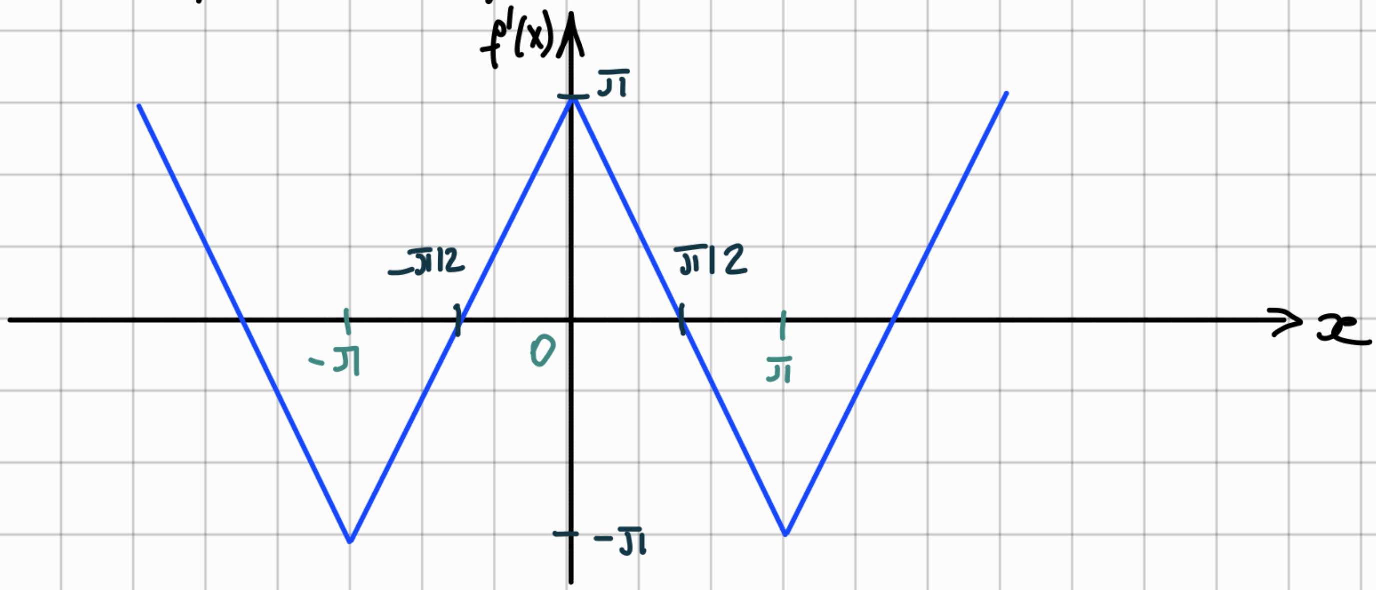
$$\int_0^x f(t)\,dt=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\sin nx}{n}+b_n\frac{1-\cos nx}{n}\right), \tag{24}$$

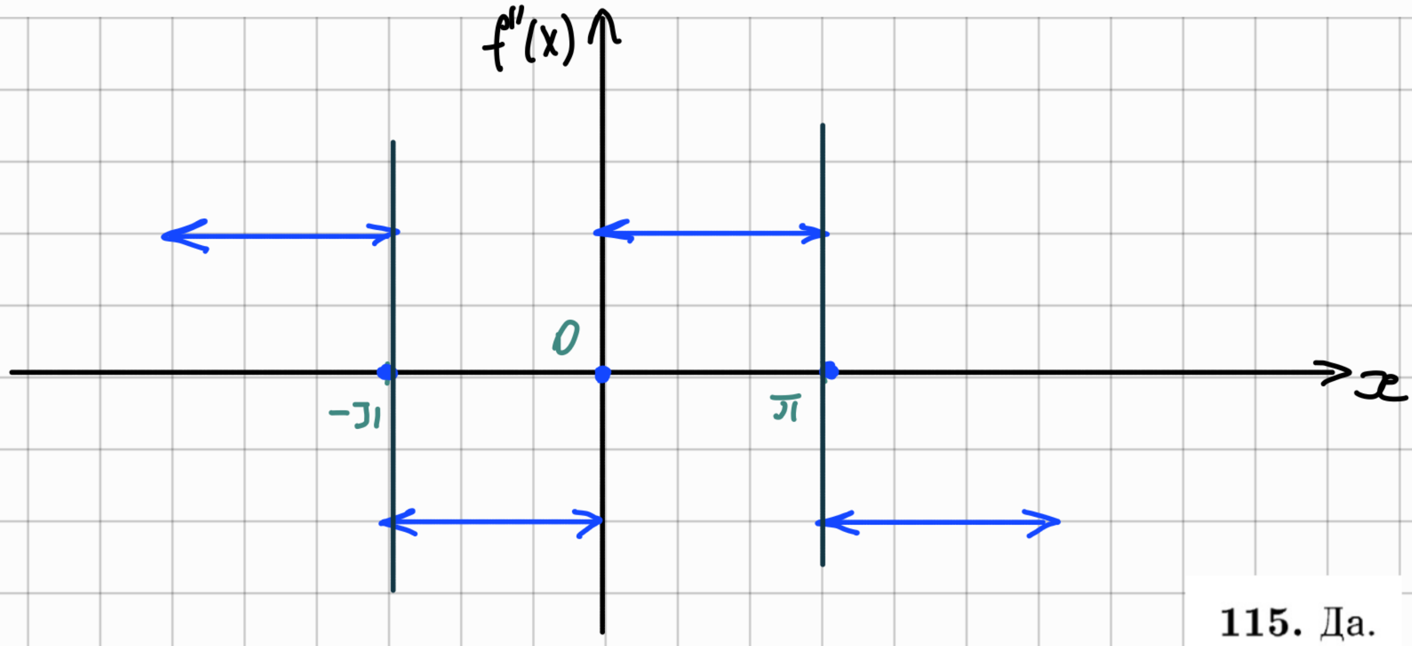
т. е. ряд (24) получается из ряда (22) почленным интегрированием.



период 2π и кус-гладк $\Rightarrow$ ряд сх.

к $f(x)$ равномерно





115. Да.

116. Исходя из разложения

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi,$$

получить почленным интегрированием разложения в ряд Фурье функций x^2, x^3 и x^4.

Теория

$$x = f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

$f(x)$ кусочно-непр на $[-l, l]$ имеет период $2l$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

Тогда $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2}$ — кус-глад. на $[-l, l]$ с периодом $2l$.

$$F(x) = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi n}\left(a_n \sin\frac{\pi n x}{l} - b_n \cos\frac{\pi n x}{l}\right)$$

равн сх ряд $\quad c = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx$

а) $f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$; $l=\pi$

$b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

$\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{2\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$$

б) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$

$l=\pi$

$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2} = \int_0^x t^2\,dt - \frac{\pi^2}{3}x$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left.\left(\frac{x^4}{12} - \frac{\pi^2 x^2}{6}\right)\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\frac{x^3}{3} - \frac{\pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n\sin nx}{n^3}$$

$$x^3 = 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12(-1)^n\sin nx}{n^3}$$

$$\Rightarrow x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n \sin nx - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \sin nx}{n^3}$$

$$x^3 = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6 - \pi^2 n^2}{n^3} \sin nx$$

б) $f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3} \sin nx$ $\qquad l = \pi$

$$b_n = 2(-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3}$$

$$F(x) = \int_0^x t^3 dt = \frac{x^4}{4}$$

$$\frac{x^4}{4} = \frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4} \cos nx$$

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^4}{4} dx = \frac{1}{4\pi} \frac{x^5}{5}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5}{20\pi} = \frac{\pi^4}{10}$$

$$\frac{x^4}{4} = \frac{\pi^4}{20} + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4} \cos nx$$

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4} \cos nx$$

116. 1) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$; 2) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3} \sin nx$;

3) $\frac{\pi^4}{5} + 8\sum \cancel{(-1)^n} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4} \cos nx$. $(-1)^{n+1}$

$$a_n = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n \cdot \pi^3 \cdot n^3 - 6 \cdot (-1)^n \cdot \pi \cdot n}{n^5}$$

$$a_n = -\frac{8}{\pi} \cdot \pi n (-1)^n \frac{6 - \pi^2 n^2}{n^5} = 8(-1)^{n+1} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4}$$

С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы рядов: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

Если $a_0,\ a_n,\ b_n,\ n\in N$, — коэффициенты Фурье функции f, то справедливо *равенство Парсеваля*

$$2a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx. \qquad (26)$$

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

РФ для $f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$

равенство Парсеваля: $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=$

$\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x^4dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^5}{5}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^4}{5}$$

$b_n=0$

$a_n^2=\frac{16}{n^4}$

$$\frac{2\pi^4}{5}=\frac{2\pi^4}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}\Rightarrow 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{8\pi^4}{45}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$

РФ для $x^3=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6-\pi^2n^2}{n^3}\sin nx$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^6 dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^7}{7}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^7}{7\pi} = \frac{2\pi^6}{7}$$

$a_n = 0$

$$b_n = 2(-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3}\ ;\ b_n^2 = 4\frac{(6-\pi^2n^2)^2}{n^6} =$$

$$= 4\,\frac{36 - 12\pi^2n^2 + \pi^4n^4}{n^6}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^6}{7} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{36}{n^6} - 4\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\pi^2}{n^4}}_{\pi^4/90} + 4\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^4}{n^2}}_{\pi^2/6}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^6}{7} + \frac{4\cdot 12\pi^6}{90} - \frac{4\pi^6}{6} = 4\cdot 36\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}} = \frac{\cancel{16}\,4\,\pi^6}{105}\cdot\frac{1}{\cancel{4\cdot 36}\,9} = \boxed{\frac{\pi^6}{945}}$$

3. а) Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[-\pi,\pi]$ функция, такая что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} f'^2(x)dx.$$

Указание: воспользоваться неравенством Парсеваля. б) Докажите, что если f — непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$ функция, такая что $f(a) = f(b) = 0$, то

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b f'^2(x)dx.$$

Указание: после сдвига продолжить функцию нечётным образом.

а) $\square$ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$

кус. - непрер.

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-n a_n \sin nx + n b_n \cos nx)$$

Рав. Парсеваля $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$

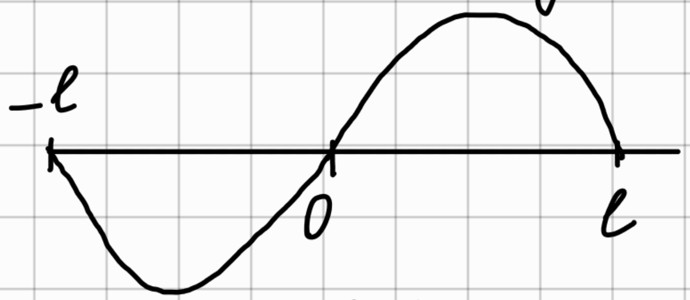
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2(a_n^2+b_n^2)$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2dx\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2dx \qquad \blacksquare$$

б $\square$ $\varphi(x)=f(x+a)$ кус-гл. на $[0,b-a]$,

$b-a=l$ и $\varphi(0)=\varphi(l)=0$

по нечётн., далее с периодом $2l$



$$\varphi(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi n x}{l}$$

$$\varphi'(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi n}{l}b_n\cos\frac{\pi n x}{l}$$

$$\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}(\varphi(x))^2dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$$

$$\int\limits_{-l}^{l}(\varphi(x))^2dx\le\frac{l^2}{\pi^2}\int\limits_{-l}^{l}(\varphi'(x))^2dx$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}(\varphi'(x))^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2 n^2}{l^2}b_n^2$$

$$2\int_0^l (\varphi(x))^2\,dx \le \frac{l^2}{\pi^2}\,2\int_0^l (\varphi'(x))^2\,dx$$

$$\int_0^l (f(x+a))^2\,dx \le \frac{l^2}{\pi^2}\int_0^l (f'(x+a))^2\,dx$$

$x+a \to x$

$$\int_a^b (f(x))^2\,dx \le \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b (f'(x))^2\,dx \qquad \blacksquare$$

48. Показать, что ряд суммируется методом Чезаро (см. задачу 47), найдя σ_n и σ:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$; 2) $\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos n\theta$, $0<|\theta|<\pi$;

47. Пусть задана числовая последовательность $a_0, a_1 \ldots, a_n \ldots$; обозначим

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k, \quad \sigma_n=\frac{S_0+S_1+\ldots+S_n}{n+1}.$$

Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ *суммируется методом средних арифметических*, а число σ называют *обобщенной* (*в смысле Чезаро*) *суммой* этого ряда.

S_k — k-ая частичн сумма ряда

а) $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k$ $a_n \to 0$ ряд расходится

$n=2m$: $S_{2m}=1-1+1-1+\ldots+1=1$

$S_0+S_1+\ldots S_{2k}$: $k+1$ единиц

$S_1, S_3, \ldots S_{2k-1}$: k нулей

$n = 2m-1 \quad S_{2m-1} = 1 - 1 + 1 + \ldots + 1 - 1 = 0$

$S_0, S_2, \ldots S_{2k-2}$: k единиц

$S_1, S_3, \ldots S_{2k-1}$: k нулей

$$S_n = \begin{cases} 1, & n = 2m \\ 0, & n = 2m-1 \end{cases} \qquad \tau_n = \frac{S_1 + \ldots S_n}{n+1}$$

$$\frac{S_1 + S_2 + \ldots S_n}{n+1} = \begin{cases} \frac{m+1}{2m+1}, & n = 2m \\ \frac{1}{2}, & n = 2m-1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \tau_n = \frac{1}{2}$$

б) из необх усл-ия следует, что

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx$ при b_n: $\lim_{n \to \infty} b_n = 1 \neq 0$

расходится при всех x

$\measuredangle \; S_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta), \quad 0 < |\theta| < \pi$

$S_0 = \frac{1}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\frac{n+1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{k\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\theta}{2}\right)}{\sin(\theta/2)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\underbrace{\left(\frac{k\theta}{2}+\frac{(k+1)\theta}{2}\right)}_{= k\theta+\frac{\theta}{2}} + \sin\underbrace{\left(\frac{k\theta}{2}-\frac{(k+1)\theta}{2}\right)}_{= -\theta/2}}{2\sin(\theta/2)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(k\theta+\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\theta/2} \Rightarrow$$

$$\sigma_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{\theta}{2}}\left[\sum_{k=1}^{n}\sin\left(k\theta+\frac{\theta}{2}\right) - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\theta}{2}}_{= n\sin\frac{\theta}{2}}\right]$$

$$= \sin k\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} + \sin\frac{\theta}{2}\,\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left[\underbrace{\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{n+1}{2}\theta + \sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{n+1}{2}\theta}_{= \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta+\frac{\theta}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{n+2}{2}\theta}{\sin^2\theta/2} - n\right] =$$

$$2(n+1)\sin^2\theta/2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\cos\theta - \cos(n+1)\theta}{2\sin^2\theta/2} - n\right] \Rightarrow$$

$$\sigma_n = \frac{\cancel{2(}n+1)\sin^2\theta/2 + \overset{//\,1-2\sin^2\theta/2}{\cos\theta} - \overset{//\,1-2\sin^2\frac{(n+1)\theta}{2}}{\cos(n+1)\theta} - \cancel{2n\sin}^2\theta/2}{4(n+1)\sin^2\theta/2} =$$

$$= \frac{2\sin^2\theta/2 + \cos\theta - \cos(n+1)\theta}{4(n+1)\sin^2\theta/2} = \frac{\cancel{2}\sin^2\frac{n+1}{2}\theta}{\underset{2}{\cancel{4}}(n+1)\sin^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 \Rightarrow \theta = fix \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$$

48. 1) $\sigma_{2k-1} = \frac{1}{2}$, $\sigma_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}$, $\sigma = \frac{1}{2}$;

2) $\sigma_n = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right)^2$, $\sigma = 0$;

4. Докажите, что если f — функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, а $\{f_n\}$ — последовательность функций, непрерывных на $[a,b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке приведите контрпример):

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\begin{array}{c}\{f_n\}\\ \text{сходится}\\ \text{равномерно к } f\end{array}} & \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array} & \boxed{\begin{array}{c}\{f_n\}\\ \text{сходится по}\\ \text{норме } L_2 \text{ к } f\end{array}} & \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array} & \boxed{\begin{array}{c}\{f_n\}\\ \text{сходится по}\\ \text{норме } L_1 \text{ к } f\end{array}} \\
\not\uparrow\downarrow & & \not\uparrow\not\downarrow & & \not\uparrow\not\downarrow \\
\multicolumn{5}{c}{\boxed{\{f_n\} \text{ сходится поточечно к } f}}
\end{array}$$

Из равном сход-ти следует сход. в средним квадр.

$$\|f_n - f\|_C \to 0$$

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx \le \|f_n - f\|_C^2 \cdot \int_a^b 1\,dx = (b-a)\|f_n - f\|_C^2 \to 0$$

след. $\|f_n - f\|_2 \to 0$

из равном сход. следует сход. в среднем — аналогично

из сход. в среднем квадр следует сход. в среднем

$\|f_n - f\|_2 \to 0$

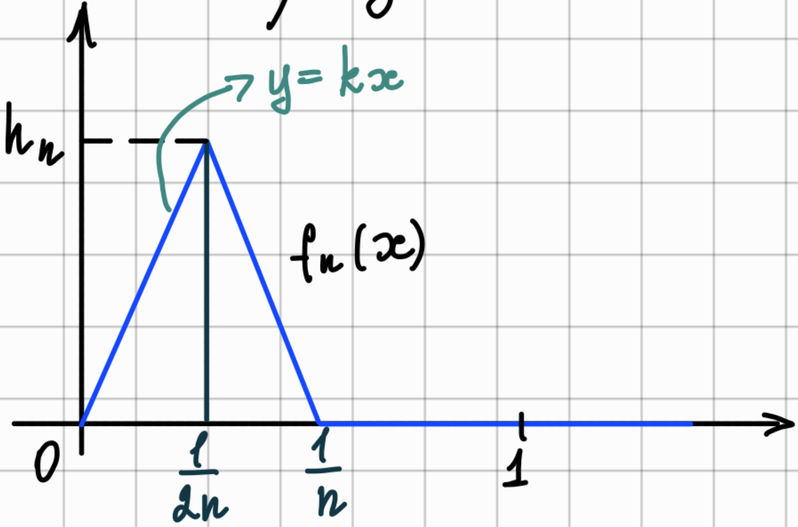
$$\|f_n - f\|_1 = \int_a^b |f_n - f| \cdot 1\, dx \le \sqrt{\int_a^b |f_n - f|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b 1^2 dx} = \sqrt{b-a}\, \|f_n - f\|_2 \to 0$$

интегр нер-во Коши — Буняковского

$$\left|\int_a^b f(x) g(x)\, dx\right| \le \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx}$$

в евкл пр-вах

$|(f, g)| \le |f| \cdot |g|$ $\quad \int_a^b f(x) g(x)\, dx$ — скал произв. в $\mathcal{L}_c^2[a, b]$



$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$$

$\forall x \in [0, 1]$

$\max\limits_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = h_n$ сх. равном. $\Leftrightarrow h_n \to 0$

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(x) - \overset{\overset{0}{|||}}{f(x)}|\, dx = \frac{h_n}{2n} \to 0$$

сх. в среднем $\Leftrightarrow h_n = o(n)$

$k \cdot \frac{1}{2n} = h_n \quad ; \; y = 2n h_n x$

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 2 \int_0^{1/2n} 4n^2 h_n^2 x^2 dx$$

$$= 8n^2 h_n^2 \frac{1}{3} \frac{1}{8n^3} = \frac{h_n^2}{3n} \to 0$$

сх в среднем квадр $\quad h_n = o(\sqrt{n})$

есть сход. в среднем квадр. $\Rightarrow$ нет равномерной $\quad h_n = 1$

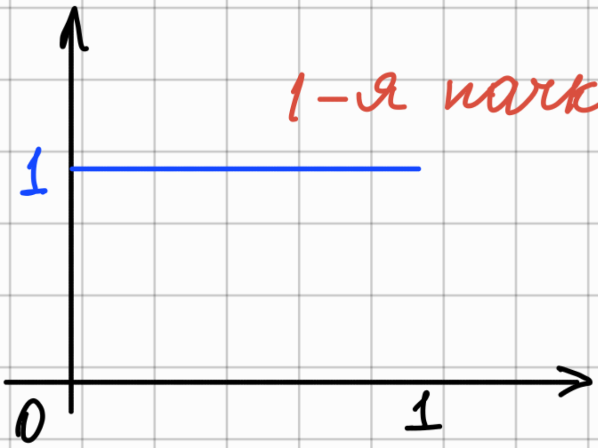
есть сход. в среднем $\Rightarrow$ нет в среднем квадрат. $\quad h_n = \sqrt{n} \quad$ нет равномерной

есть поточечная, нет остальных типов

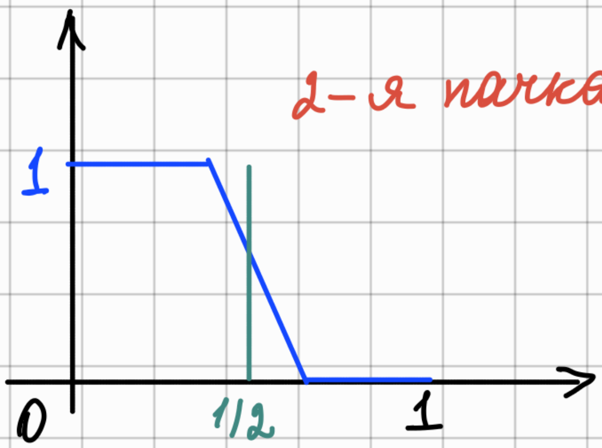
$h_n = n \quad$ (или n^2)

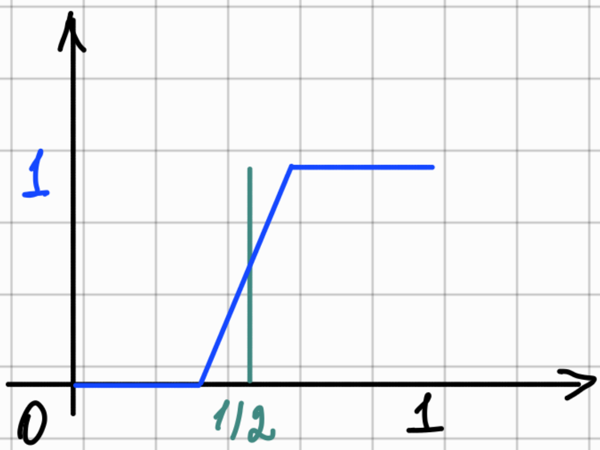
Пример, когда есть сход. в среднем квадр. ($\Rightarrow$ есть сход. в среднем), но нет поточечной

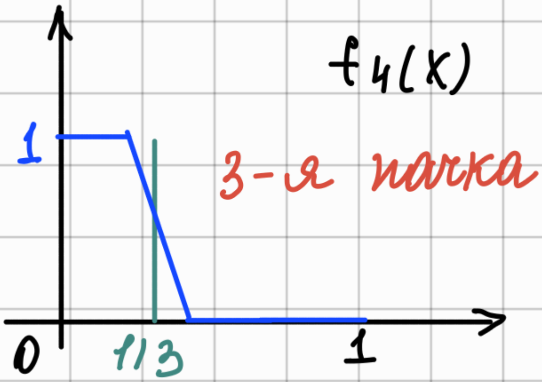
$f_1(x)$

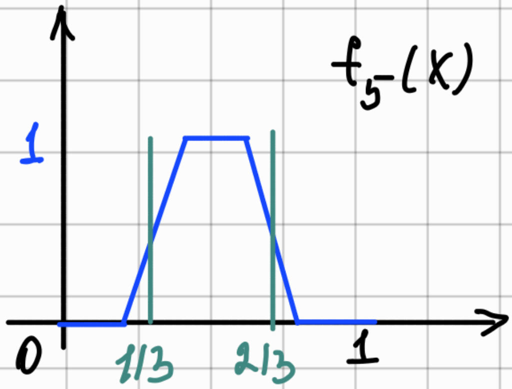


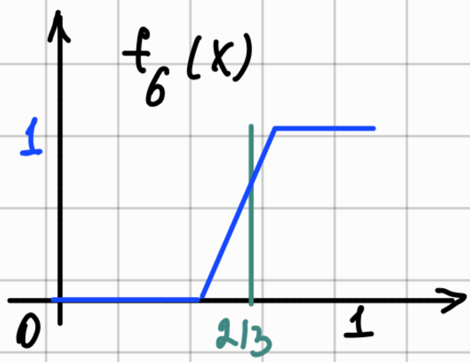
$f_2(x)$











$f_n(x) \to$ в среднем квадр.

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 (f_n(x))^2\,dx \le \frac{2}{k} \to 0,\ n \to \infty$$

(если не срезать на непр., то $\le \frac{1}{k}$)

Почему нет поточечной сх к $f(x)=0$?

$\forall x \in [0, 1]$ есть сколько угодно больше n, где $f_n(x) = 1$