

Сурхенио Эдвард БО1-304.

Общая физика. 2 Задание. Оптика

10 неделя. Интегриция на синусоидальных решётках.

Элементы Физико-оптики

I столбик

9.1. Три плоские монохроматические волны с амплитудами 1, a и a ($a \ll 1$) падают на плоскость $z = 0$ под углами 0 , α и $-\alpha$ (рис. 500) так, что в точке $x = 0$ колебания оказываются синфазными. При смещении плоскости наблюдения в область $z > 0$ происходят периодические изменения контраста интерференционной картины. Объяснить явление. Найти положения плоскости наблюдения, в которых контраст картины максимальный и минимальный. Чему он равен?

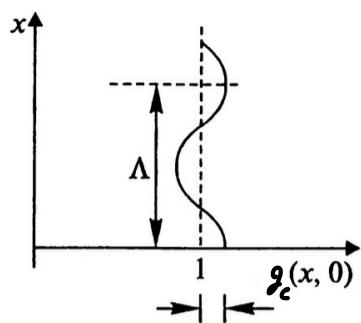
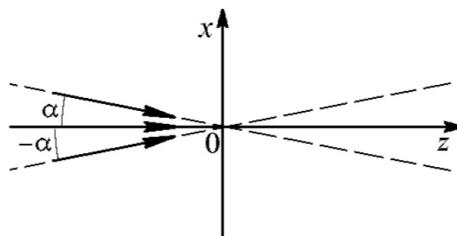


Рис. 9.2

$$1 \quad a \quad 2a \cos \alpha x$$

Рис. 9.3

$S_2 = u$

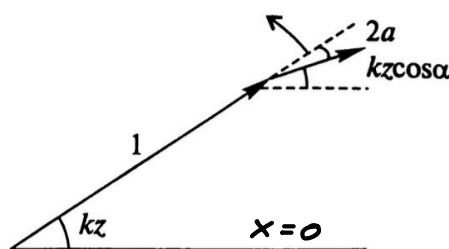


Рис. 9.4

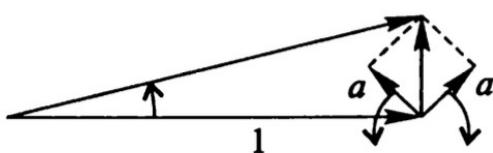


Рис. 9.5

$$j(x, z) = e^{ikz} + a e^{i(\omega x + k z \cos \alpha)} + a e^{-i(\omega x + k z \cos \alpha)} (0)$$

При $z=0$

$$g(x, 0) = 1 + a e^{i \omega x} + a e^{-i \omega x} = 1 + 2a \cos \omega x (1)$$

$$J(x, z) = e^{ikz} + 2a \cos 2x e^{ikz \cos d} \quad z = \frac{\pi n}{2\pi(1-\cos d)} = \frac{n_d}{2(1-\cos d)}$$

$$\Delta \varphi = k_z(1-\cos d) = \pi n \rightarrow z = \frac{\pi n}{k(1-\cos d)} = \frac{d}{2} n$$

$$V = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}} = J \sim j \cdot j^*$$

$$= \frac{(1+2a)^2 - (1-2a)^2}{(1+2a)^2 + (1-2a)^2} = J_{max} \sim (1+2a)^2$$

$$= \frac{8a}{2(1+2a^2)} \approx 4a \quad J_{min} \sim (1-2a)^2$$

$$\Delta \varphi = k_z(1-\cos d) = \frac{\pi}{2} \pm \pi n$$

$$z = \frac{\pi(\frac{1}{2} \pm n)d}{2\pi(1-\cos d)} = \frac{\frac{d}{4} \pm \frac{n}{2}d}{1-\cos d}$$

$$V=0$$

$$TBET: V_{max} \approx 4a \quad \text{with } z = \frac{\frac{d}{2}n}{1-\cos d}$$

$$V_{min}=0 \quad \text{with } z = \frac{\frac{d}{4} \pm \frac{n}{2}d}{1-\cos d}$$

9.15. При наблюдении фазовых (прозрачных) структур методом темного поля в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 (рис. 506) на оптической оси устанавливается проволока Π . Фазовая решетка создается в жидкости стоячей ультразвуковой волной с частотой $v = 20 \text{ МГц}$. Найти расстояние Δl между интерференционными полосами на экране \mathcal{E} , а также максимально допустимое удаление L_{\max} экрана от линзы L_2 , при котором еще возможно наблюдение интерференционной картины. Диаметр линзы L_2 равен $D = 4 \text{ см}$, скорость звука в жидкости $v = 1,5 \text{ км/с}$. Решетка освещается нормально падающей плоской волной ($\lambda = 0,5 \text{ мкм}$).

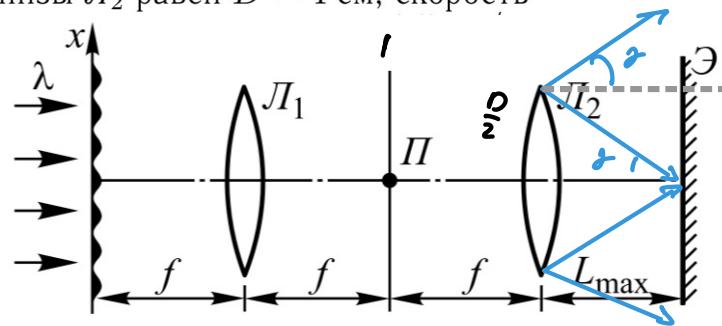


Рис. 506

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^7} = 75 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 75 \text{ мкм}$$

$d \ll 1$

$$f(x) = e^{i d \cos \alpha x} = \cos(d \cos \alpha x + i \sin(d \cos \alpha x))$$

$$f(x) = 1 + i d \cos \alpha x = 1 + \frac{i d}{2} (e^{i \alpha x} + e^{-i \alpha x})$$

$$j(x) = \frac{i d}{2} (e^{i \alpha x} + e^{-i \alpha x}) \Rightarrow j(x) = i d \cos \alpha x$$

$$\partial \partial^* = \alpha^2 \cos^2(\alpha x) = \frac{d^2}{2} (1 + \cos(2 \alpha x))$$

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\beta)$$

$$A = \alpha C = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \alpha} d = \frac{d}{2} = \frac{75 \cdot 10^{-6}}{2} = 37,5 \text{ мкм}$$

$$\alpha C = \frac{\pi}{2}$$

$$C = k \sin \gamma = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r}{d} = \frac{\pi r}{d}$$

$$t g \gamma = \frac{D}{2 L_{\max}} \rightarrow L_{\max} = \frac{D}{2 t g \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{r}{d}$$

$$t g \gamma \approx \sin \gamma = \frac{r}{d}$$

$$L_{\max} = \frac{D d}{2 r} = \frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 75 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 37,5 \cdot 10^{-6}} = 3 \text{ м}$$

Ответ: $\alpha C = \frac{d}{2} = 37,5 \text{ мкм}$, где $d = \frac{\nu}{\lambda} = 75 \text{ мкм}$ — период ультразвука

$$\text{РЕШЕТКА. } L_{\max} = \frac{Dd}{2f} = 300\text{ см.}$$

9.22. Один из методов наблюдения фазовых (прозрачных) объектов состоит в том, что плоскость наблюдения P смещается на некоторое расстояние l относительно плоскости P_0 , сопряженной с объектом (т. е. плоскости, в которой в соответствии с геометрической оптикой располагается его изображение) (рис. 512). При этом контрастность наблюдавшейся картины периодически изменяется при изменении l . Найти период d фазовой синусоидальной решетки, если в схеме, представленной на рисунке, ее контрастное изображение в первый раз возникло при $l_1 = \Delta L$. При каких других значениях l изображение будет контрастным?

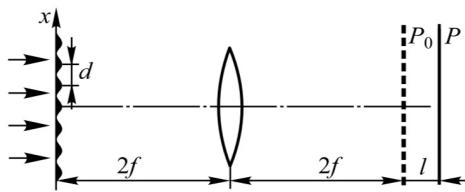


Рис. 512

решетки, если в схеме, представленной на рисунке, ее контрастное изображение в первый раз возникло при $l_1 = \Delta L$. При каких других значениях l изображение будет контрастным?

$$f(x) \sim e^{im\cos 2x} = \\ = 1 + \frac{im}{2} e^{i2x} + \frac{im}{2} e^{-i2x} \\ \Delta \varphi = \frac{\tilde{c}_1}{2} + m \tilde{a}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\Delta \varphi = \alpha \cdot k(x)$$

$$\alpha = c_2 - c = \frac{c}{\cos x} - c = c \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{2c \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x} \quad (2)$$

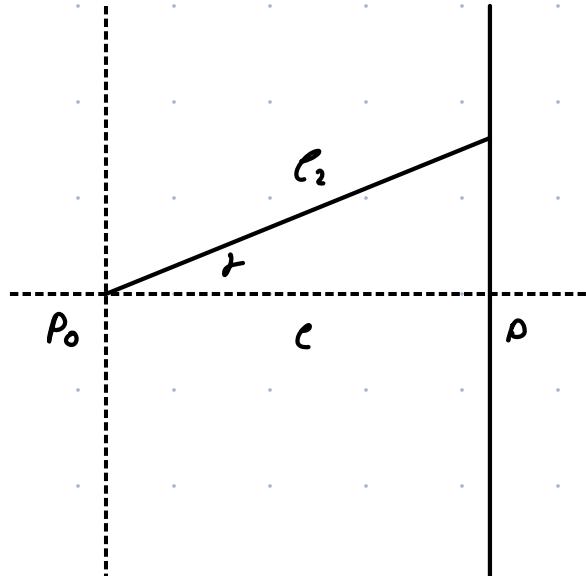
$$\Rightarrow \frac{2c \sin^2 \frac{x}{2}}{c_2} = \frac{c_1^2}{2d^2} \quad (2)$$

$$x = \frac{d}{\lambda}$$

$$\Delta \varphi = \frac{c_1^2}{2d^2} \cdot \frac{2\tilde{c}}{\lambda} = \frac{\tilde{c} c_1}{d^2} \quad (3)$$

$$\pi(m + \frac{1}{2}) = \frac{\tilde{c} c_1}{d^2} \quad c = \frac{d^2}{\lambda} (m + \frac{1}{2}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Delta L = \frac{d^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow d = \sqrt{2\lambda \Delta L}$$



$$\text{ОТВЕТ: } d = \sqrt{2\lambda \Delta L}; \quad c = \frac{d^2}{\lambda} (m + \frac{1}{2}) = \Delta L (2m + 1), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

9.45. Оптическая схема мультипликации (размножения) изображения показана на рис. 521. Предмет (размер которого равен $l = 5$ мм) располагается во входной плоскости Π_0 оптической системы и освещается параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. В общей фокальной плоскости Φ линз L_1 и L_2 (фокусное расстояние линз $f = 50$ см) располагается решетка, а размноженное (мультиплицированное) изображение возникает в выходной плоскости Π_1 . Определить период решетки, при котором размноженные изображения не налагаются друг на друга и не создают таким образом взаимных помех. Оценить размер щелей решетки, если необходимо получать десятикратно размноженное изображение (ограничение обусловлено тем, что интенсивность размноженных изображений убывает по мере удаления от оптической оси). Оценить число щелей решетки, если в плоскости Π_1 необходимо рассмотреть детали объекта, размер которых $\delta = 0,01$ мм.

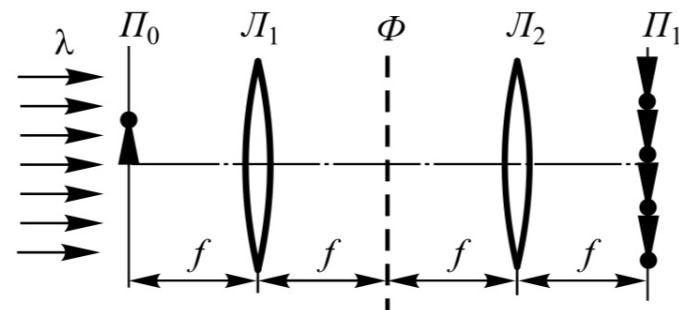


Рис. 521

$$ds \sin \varphi = k_\lambda$$

$$d \varphi = k_\lambda$$

$$d \cdot \frac{f_0}{f} = \lambda \rightarrow f_0 \approx \frac{\lambda f}{d} \geq l$$

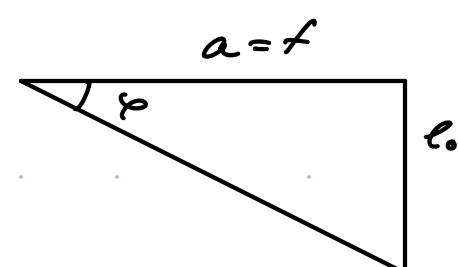
$$d \leq \frac{\lambda f}{l} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5}{5 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}$$

$$\frac{\lambda}{D} \leq \frac{3}{f} \rightarrow D \geq \frac{\lambda f}{3} = \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 0,5}{10^{-5}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,5 \text{ см}$$

$$N_{\text{реш}} = \frac{D}{d} = \frac{2,5 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}} = 500$$

$$N_{\text{реш}} = \frac{\lambda f c}{2 \pi f} = \frac{c}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{10^{-5}} = 500$$

$$N = \frac{2 \cdot \frac{\lambda}{d}}{\frac{1}{f}} = \frac{2d}{f} \Rightarrow \delta = \frac{2d}{N} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{10} = 10^{-5} \text{ м} = 10^{-3} \text{ см.}$$



$$\text{ОТВЕТ: } d \leq \frac{\lambda f}{l} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ см}, \delta \leq \frac{2d}{N} = 10^{-3} \text{ см, где } N = 10$$

$$N \geq \frac{c}{\delta} = 500$$

II Столбик

9.11. Два плоских монохроматических когерентных пучка света с длиной волны $\lambda = 600$ нм и равными амплитудами A_0 падают под углом $\alpha = \pm 0,06$ рад на синусоидальную решетку с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = (1 + \sin \Omega x)/2$ (рис. 501). В точке $x = 0$ эти волны создают синфазные колебания. Период решетки $d = 10^{-3}$ см. Определить пространственный спектр волн за решеткой.

$$k_x = k \sin \alpha \approx \frac{2\pi}{\lambda} d = 2\pi \frac{6 \cdot 10^{-7}}{6 \cdot 10^{-7}} = 2\pi \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$$

$$\Omega = \frac{2\pi}{d} = 2\pi \cdot 10^5 \text{ м}^{-1}$$

$$f_1 = A_0 e^{i\omega x}$$

$$f_2 = A_0 e^{-i\omega x}$$

$$J(x) = (f_1 + f_2) \tau(x) =$$

$$= A_0 \left(\frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} \right) (1 + \sin \Omega x)$$

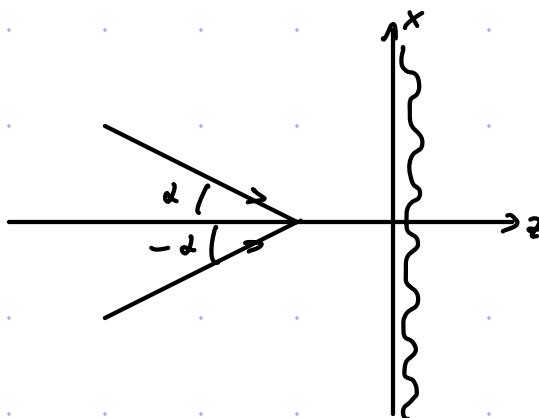
$$J(x) = A_0 \left(\frac{1}{2} e^{i\omega x} + \frac{1}{2} e^{-i\omega x} + \frac{\sin \Omega x}{2} \right) \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\sin \Omega x = \frac{e^{i\Omega x} - e^{-i\Omega x}}{2i} = \frac{1}{i} e^{i(\Omega x - \frac{\pi}{2})} + \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ + \frac{1}{i} e^{-i(\Omega x - \frac{\pi}{2})} \quad (2) \quad \frac{1}{i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad -\frac{1}{i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$J(x) = A_0 \left(\frac{1}{2} e^{i\omega x} + \frac{1}{2} e^{-i\omega x} + \frac{1}{i} e^{i(\Omega x - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{i} e^{-i(\Omega x - \frac{\pi}{2})} \right)$$

$$k \sin \alpha = \pm \Omega \quad \text{и} \quad \pm 2\Omega$$

$$\text{Ответ: } A = A_0 \left(\frac{1}{2} e^{i\omega x} + \frac{1}{i} e^{i(\Omega x - \frac{\pi}{2})} + \frac{1}{2} e^{-i\omega x} + \frac{1}{i} e^{-i(\Omega x - \frac{\pi}{2})} \right)$$



9.17. Один из методов наблюдения фазовых (прозрачных) объектов состоит в следующем: в общей фокальной плоскости линз L_1 и L_2 на оптической оси устанавливается прозрачная пластина Π , вносящая фазовую задержку в $\pi/2$ (рис. 507). Найти распределение интенсивности $I(x)$ в плоскости изображения (в задней фокальной плоскости линзы L_2), если предмет — фазовая синусоидальная решетка с амплитудным коэффициентом пропускания $\tau(x) = \exp(im \cos \Omega x)$, $m \ll 1$ — расположен в передней фокальной пло-

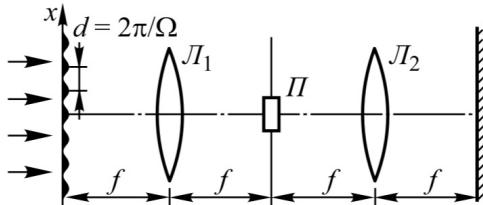


Рис. 507

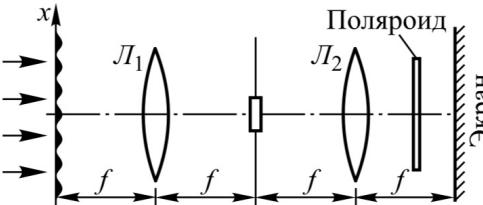


Рис. 508

кости линзы L_1 . Как изменится картина интенсивности, если использовать пластинку с задержкой в $3\pi/2$? Как изменится контраст, если пластина обладает коэффициентом поглощения k_Π ?

$$\tau(x) = e^{im \cos \Omega x} = \cos(m \cos \Omega x) + i \sin(m \cos \Omega x)$$

$$\gamma(x) = 1 + im \cos \Omega x = i + im \cos \Omega x \quad (1)$$

$$e^{i \frac{\pi}{2}} = i$$

$$J(x) = i(1 + m \cos \Omega x)$$

$$J^* = (1 + m \cos \Omega x)^2 = 1 + 2m \cos \Omega x + m^2 \cos^2 \Omega x$$

$$J \sim 1 + 2m \cos \Omega x \quad (2)$$

$$e^{i \frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$J_2(x) = -i + im \cos \Omega x = i(m \cos \Omega x - 1)$$

$$J_2^* = J_2 \cdot J_2^* = (m \cos \Omega x - 1)^2 = 1 - 2m \cos \Omega x \quad (3)$$

$$J \sim 1 + 2m \cos \Omega x$$

$$k = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{cp}}$$

$$J_{max} \sim 1 + 2m \quad J_{min} \sim 1 - 2m$$

$$J_{max} - J_{min} = 4m$$

$$k_1 = \frac{k_1}{k_2} = \frac{J_{cp,2}}{J_{cp,1}}$$

$$k_2 = \frac{k_1}{k_n} = \frac{1}{k_n}$$

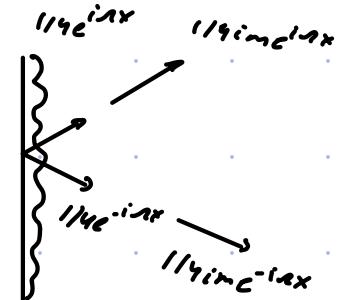
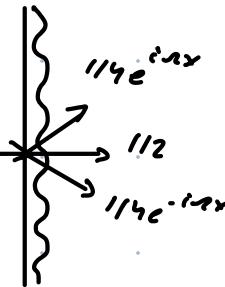
Ответ: $J \sim 1 + 2m \cos \Omega x$ Контраст для поглощающей пластины не зависит от k_n

9.28. Две последовательно расположенные вплотную друг к другу решетки с функциями пропускания $\tau_1(x) = (1 + \cos \Omega x)/2$ и $\tau_2(x) = \exp(im \cos \Omega x)$, $m \ll 1$ освещаются плоской нормально падающей монохроматической волной. Как изменится отношение интенсивностей волн, дифрагировавших в ± 1 -е порядки дифракции, если сдвинуть первую решетку вдоль оси x на четверть периода? Какова разность фаз колебаний поля в ± 1 -х порядках дифракции?

$$\tau_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{imx} + \frac{1}{2} e^{-imx}$$

$$\tau_2(x) = \cos(m \cos \Omega x) + i \sin(m \cos \Omega x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_2(x) = 1 + i \sin(m \cos \Omega x) = 1 + \frac{im}{2} e^{imx} + \frac{im}{2} e^{-imx} \\ \tau_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{imx} + \frac{1}{2} e^{-imx} \end{array} \right.$$



$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{imx} + \frac{1}{2} e^{-imx} + \frac{1}{2} im e^{imx} + \frac{1}{2} im e^{-imx} + \frac{im}{8} + \\ &+ \frac{1}{2} im e^{-imx} + \frac{1}{8} im e^{-imx} = \frac{im}{8} \end{aligned}$$

$$1) A_+ = \frac{1}{2} (e^{imx} + im e^{imx}) = \frac{1}{2} e^{imx} (1 + im) \quad (1)$$

$$A_- = \frac{1}{2} e^{-imx} (im + 1) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} J_+ &= \frac{1}{16} (1+m)^2 \\ J_- &= 1 \end{aligned}$$

$$2) A'_+ = \frac{1}{2} (e^{i(\Omega x - \frac{\pi}{2})} + im e^{imx}) = \frac{1}{2} e^{imx} (im - i) = \frac{1}{2} e^{imx} (im - i) \quad (3)$$

$$A'_- = \frac{1}{2} (e^{-i(\Omega x - \frac{\pi}{2})} + im e^{-imx}) = \frac{1}{2} e^{-imx} (i + im) = \frac{1}{2} (m + 1) e^{-imx}$$

$$A'_- = \frac{m+1}{2} e^{-imx} \quad (4)$$

$$J'_+ = \frac{1}{16} (1-m)^2 \quad J'_- = \frac{1}{16} (1+m)^2$$

$$\frac{J'_+}{J'_-} = \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} = \frac{1-2m+m^2}{1+2m+m^2} = \frac{1-2m}{1+2m} = \frac{(1-2m)^2}{1-4m^2}$$

$$\frac{J'_+}{J'_-} = \frac{1-4m+4m^2}{1} \approx 1-4m$$

$$\frac{J'_+}{J'_-} = 1$$

$$\varphi_1 = \alpha x - \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_2 = \alpha x - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{O}_{\text{GBEF}}: \frac{J_+}{J_-} = \left(\frac{1-m}{1+m} \right)^2 \approx 1 - 4m; \sigma^2 = 0$$

9.66. На рис. 531 показана оптическая система, состоящая из двух одинаковых линз L_1 и L_2 с фокусным расстоянием $f = 50$ см. В их общей фокальной плоскости Φ установлена решетка с узкими щелями и периодом $d_0 = 2,5 \cdot 10^{-2}$ см. Предмет («пешка», изображенная на рисунке) располагается во «входной» плоскости Π_1 (передняя фокальная плоскость линзы L_2) и освещается параллельным пучком света ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см). При этом в «выходной» плоскости Π_2 (задней фокальной плоскости линзы L_2) возникает сфокусированное и при этом размноженное (мультилинированное) изображение предмета. Определить:

1) период возникающей в выходной плоскости периодической структуры мультилинированного изображения;

2) при каком смещении предмета влево от входной плоскости (из P_1 в некоторую плоскость P_3) изображение предмета (и при этом мультиплицированное) вновь окажется сфокусированным.

$$\Delta_m = m \cdot \frac{d_0}{f} \quad d_m = \sin d_m$$

$$R = k \sin \Delta_m = m \cdot \frac{k d_0}{f} \quad (1)$$

$$\rho_m = \rho_0 \cdot m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$J(x) = \sum C_m e^{im\pi x}$$

$$d = \frac{f_d}{d_o} = \frac{0,5 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{2,5 \cdot 10^{-9}} = 10^{-7} m = 1 nm \quad z=L$$

$$e^{-i(kx \sin \theta + k z \cos \theta)} = e^{-i k x \sin \theta} e^{-i k l (1 - 2 \frac{x^2}{l^2})}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\varphi_n = kL / \left(1 - \frac{d^2}{2}\right) = kL - \chi_k L \frac{R_m^2}{2k^2} = kL - \frac{L}{2k} R_m^2$$

$$2\varphi_m = \frac{L}{2k} R_m^2 = 2\varepsilon \quad \frac{L}{2k} \frac{m^2 \cdot k^2 \cdot d_0^2}{f^2} = 2\varepsilon$$

$$\frac{L \cdot m^2 \cdot 2\pi d_0}{2d_f f^2} = 2\pi \quad L = \frac{2\pi f^2}{d_0^2 m^2} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 0.95}{2.5^2 \cdot 10^{-8}} = 4m$$

$$\text{For } T_BFT: \quad 1) d = \frac{df}{ds_0} = 1\text{ m} \quad 2) L = 2d \left(\frac{f}{ds_0} \right)^2 = 4\text{ m}$$

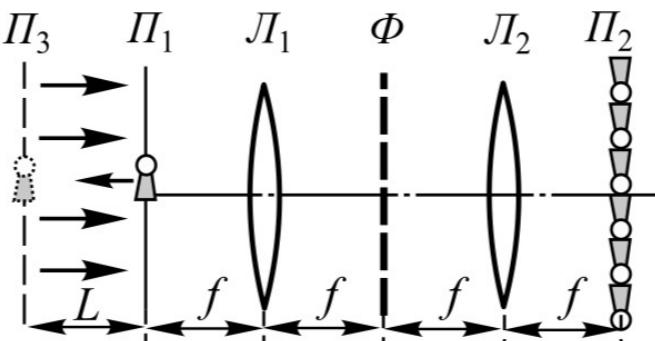


Рис. 531

9.32. При голограммировании в лазерном излучении плоского предмета A опорный пучок света создавался с помощью призмы Pr , находящейся в плоскости предмета (рис. 517). Где расположены мнимое и действительное изображения предмета при просвечивании голограммы Γ ? Излучение лазера считать плоской монохроматической волной. Угол отклонения луча призмой равен θ . Расстояние от предмета до голограммы равно L .

$$S_0 = a e^{-ikx \sin \theta} = a e^{-ix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} S_n &= a e^{ip} \quad (2) \quad p = kR = k\sqrt{L^2 + x^2} = \\ &= kL \sqrt{1 + \left(\frac{x}{L}\right)^2} = \\ &= kL \left(1 + \frac{x^2}{2L^2}\right) \end{aligned}$$

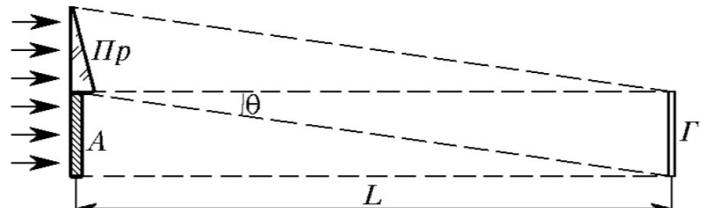


Рис. 517

$$\left(\frac{x}{L}\right)^2 \ll 1$$

$$p = kL + \frac{x^2}{2L} \quad (3)$$

$$S = a (e^{ip} + e^{-ix})$$

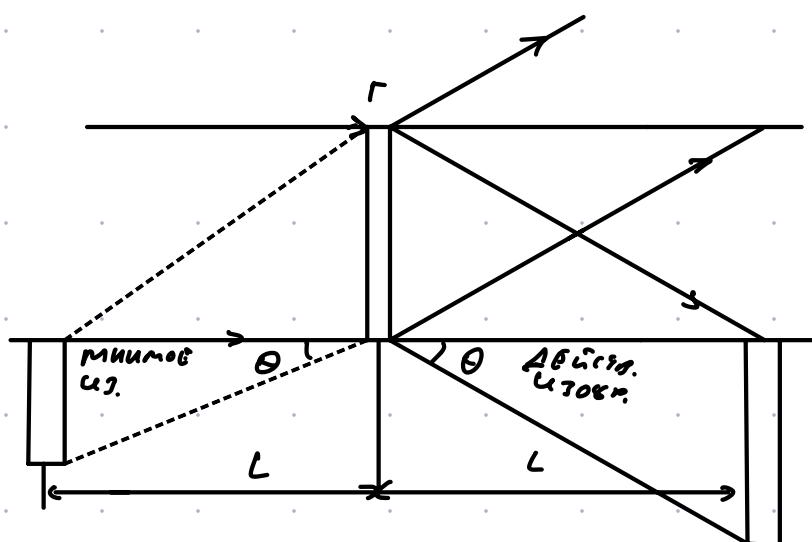
$$J(x) = S \cdot S^*$$

$$J = a^2 (1 + e^{i(p+ix)} + e^{-i(p+ix)} + 1) = 2a^2 (1 + \cos(p+ix))$$

$$T(x) \sim I(x) \sim 1 + \cos(p+ix)$$

$$S_1 \sim 1 + \underbrace{\frac{1}{2} e^{i(p+ix)}}_{\text{минимум}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-i(p+ix)}}_{\text{极大ум}}$$

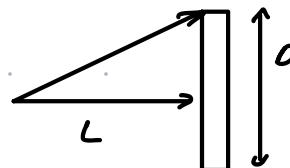
Ответ:



9.35. Получена голограмма небольшого предмета, расположенного на расстоянии $L = 50$ см от нее. Каким должен быть размер D фотопластинки, чтобы записать на голограмме детали размером $b \approx 0,01$ мм? Какая неменохроматичность света $\Delta\lambda$ допустима при записи голограммы? Длина волны света $\lambda = 0,5$ мкм.

$$b \geq \frac{1}{D}L \Rightarrow D \geq \frac{1}{b}L = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{10^{-5}} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,5 \text{ см}$$

$$\Delta = \sqrt{L^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} - L = L \sqrt{1 + \left(\frac{D}{2L}\right)^2} - L = L \left(1 + \frac{D^2}{4L^2}\right) - L$$



$$\Delta = \frac{D^2}{8L} \leq \frac{\Delta^2}{D} \rightarrow \Delta \leq \frac{8L\Delta^2}{D^2} = \frac{8L\Delta^2 b^2}{D^2} = \frac{8b^2}{L}$$

$$\Delta \leq \frac{8 \cdot 10^{-10}}{0,5} = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 1,6 \text{ нм}$$

$$\text{Ответ: } D \geq \frac{1}{b}L = 2,5 \text{ см}; \Delta \leq \frac{8b^2}{L} = 1,6 \text{ нм}$$

9.46. Осевая голограмма точечного источника, расположенного на расстоянии $L = 20$ см перед фотопластинкой, возникает при интерференции плоской опорной волны и предметной сферической волны, исходящей из этого источника. Найти положения изображений источника, восстановленных с помощью той же опорной волны, если вплотную к фотопластинке приложить отрицательную линзу с фокусным расстоянием $f = -10$ см.

$$-\frac{1}{f_1} = \frac{1}{L} + \frac{1}{z_1}$$

$$\frac{1}{z_1} = -\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{f_1}\right)$$

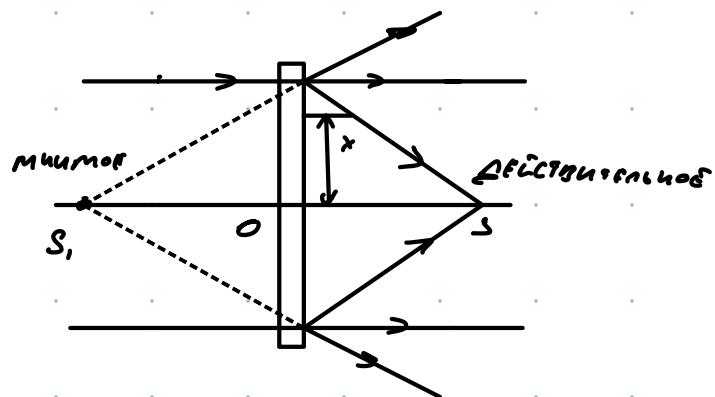
$$z_1 = -\frac{L \cdot f_1}{L + f_1} = -\frac{200}{30} \approx -6,7 \text{ см}$$

$$-\frac{1}{f_1} = -\frac{1}{L} + \frac{1}{z_2}$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{L} - \frac{1}{f_1} = \frac{f_1 - L}{L \cdot f_1}$$

$$z_2 = \frac{L \cdot f_1}{f_1 - L} = \frac{20 \cdot 10}{10 - 20} = -20 \text{ см}$$

$$z_3 = -f = -10 \text{ см}$$



Ответ: Линза оставляет мнимое изображ. мнимым,

расположением от голограммы на расстояние $z_1 = -f_1 \cdot \frac{L}{f_1 - L} = -6,7 \text{ см}$

Ближнее действ. изобр. становится мнимым, рассто. на расст.

$z_2 = \frac{L \cdot |f|}{|f|-L} = -20\text{ см}$. Кроме того, на риссе $z_3 = -f = -10\text{ см}$
 (в реальной линии) получены числовые значения изображения изображений

линий.

9.52. В слое фотоэмульсии толщиной $L = 50\text{ мкм}$ регистрируется результат интерференции двух пучков света ($\lambda = 0,5\text{ мкм}$), распространяющихся под углом $\alpha = 60^\circ$ друг к другу (рис. 523). Оценить относительную ширину $\Delta\lambda/\lambda$ спектра отраженной волны при освещении полученной в результате фотообработки объемной отражательной решетки параллельным пучком белого света, распространяющимся вдоль оси z .

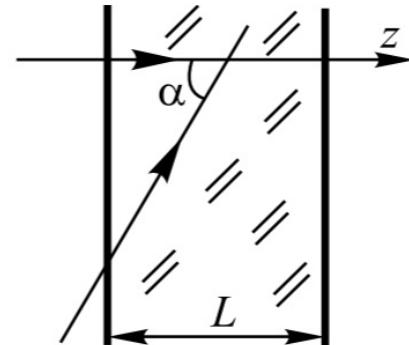


Рис. 523

$$S = S_1 + S_2 = a \cdot e^{ikz} + a \cdot e^{ik(z \cos \alpha + x \sin \alpha)}$$

$$J = S \cdot S^* = a^2 (1 + e^{ik(z - z \cos \alpha - x \sin \alpha)} + e^{-ik(z - z \cos \alpha - x \sin \alpha)} + 1) =$$

$$= a^2 (2 + 2e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$$

$$J = 2a^2 (1 + \cos(k(z - z \cos \alpha - x \sin \alpha)))$$

При $z = 0$

$$J(x) = 2a^2 [1 + \cos(kx \sin \alpha)]$$

$$k \Delta x \sin \alpha = 2\pi \quad \Delta x = \frac{\pi}{\sin \alpha}$$

При $x = 0$

$$J(z) = 2a^2 [1 + \cos(kz(1 - \cos \alpha))]$$

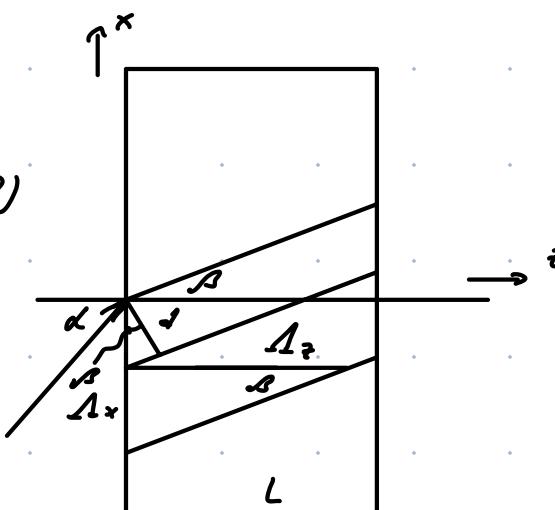
$$k \Delta z (1 - \cos \alpha) = 2\pi \quad \Delta z = \frac{\pi}{1 - \cos \alpha}$$

$$t_{\partial \beta} = \frac{\Delta x}{\Delta z} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

$$d = \Delta x \cos \beta = \frac{\Delta x \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\lambda \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha} \quad (5) \quad N = \frac{L}{\Delta z} = \frac{L(1 - \cos \alpha)}{\lambda} = \frac{8 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{\pi}{2}}{8 \cdot 10^{-7}} = 50$$



$$\lambda' = 2ds \sin\beta = \lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{N} = \frac{1}{50} = 0,02$$

Ответ: После фотовспышки из "среды" возникнет решётка зеркальных плоск - иллюзий, составленных из углов $\beta = d/\lambda$ с осью z . Расстояние от гами $d = \frac{\lambda}{2 \sin \beta}$, а их число при толщине среды L составляет $N = \frac{2L}{d \sin^2 \beta} = 50$. Такого же и число отражений от этих плоскостей когерентных волн, длина которых λ' определяется условием Брегга-Бюргеля $2ds \sin \beta = \lambda'$, откуда следует, что $\lambda' = \lambda(L)$. Отн. величина $\Delta \lambda'/\lambda = 1/N = 1/50 = 0,02$

9.33. Найти амплитудный коэффициент пропускания $\tau(x)$ голограммы точечного источника света, если в качестве опорной волны используется нормально падающая на плоскость голограммы плоская волна. Расстояние от источника до голограммы равно L . Считать, что прозрачность голограммы пропорциональна интенсивности света при записи. Найти положение действительного и мнимого изображений при восстановлении изображения нормально падающей плоской волной. Как изменится положение восстановленных изображений, если при записи использовать наклонный опорный пучок с углом наклона θ ? Оценить минимальный размер a_{\min} голограммы, при котором полностью используется разрешающая способность фотоэмульсии, равная n [линий/мм]. Найти размер b восстановленного изображения.

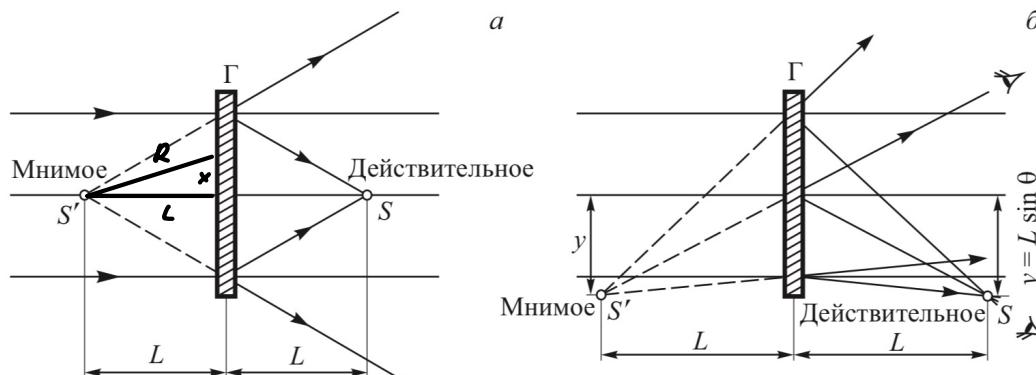


Рис. 664

$$S = S_0 + S_n = a + a e^{i\varphi} = a(1 + e^{i\varphi}) \quad (1)$$

$$\varphi = kL = k\sqrt{L^2 + x^2} = kL \sqrt{1 + (\frac{x}{L})^2}$$

$$\varphi = kL(1 + \frac{x^2}{2L^2}) = kL + \frac{kx^2}{2L} \quad (?)$$

$$J = S \cdot S^* = \alpha^2 (1 + e^{ikx}) (1 + e^{-ikx}) = \alpha (1 + e^{ikx} + e^{-ikx} + 1) =$$

$$= 2\alpha^2 (1 + \cos kx)$$

$$J = 2\alpha^2 \cdot (1 + \cos [kL + \frac{kx^2}{2L}])$$

$$T(x) \sim 1 + \cos [kL + \frac{kx^2}{2L}]$$

$$kL + \frac{kx_{min}^2}{2L} - kL - \frac{kx_m^2}{2L} = 2\pi$$

$$\frac{k \cdot \alpha x \cdot 2x_m}{2m} \approx 2\pi \quad \alpha x = \frac{\pi L}{x_m}$$

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad \alpha x \geq \frac{1}{n} \quad \frac{\pi L}{x_m} = \frac{1}{n} \rightarrow x_m = a_{min} = \pi L n$$

$$\delta \approx \frac{2\pi}{2a_{min}} = \frac{1}{n}$$

$$S_0 = \alpha e^{-ik \sin \theta x} = \alpha e^{-inx}$$

$$S = S_0 + S_n = \alpha (e^{-inx} + e^{inx})$$

$$J = S \cdot S^* = 2\alpha^2 (1 + \cos(p \cdot nx))$$

ОТВЕТ: $T(x) \sim 1 + \cos [kL + \frac{kx^2}{2L}]$. Полос изображ. при

записи с нормально наложенной плоской волной

изображено на рис. 66а, полос. изображение при записи

с наложенной волной — на рис. 66б. Минимальные разности

голографии $a_{min} \approx \pi L$. Размер записи изобр. $\delta \approx 1/n$

9.36. При записи голограммы предмета, находящегося на расстоянии $L = 1$ м, используется излучение Не-Не лазера ($\lambda \approx 6300 \text{ \AA}$). Восстанавливается изображение с помощью протяженного квазимонохроматического источника с угловым размером $\alpha = 10^{-4} \text{ рад}$. Каков минимальный размер деталей в восстановленном изображении? Какова при этом требуемая монохроматичность?

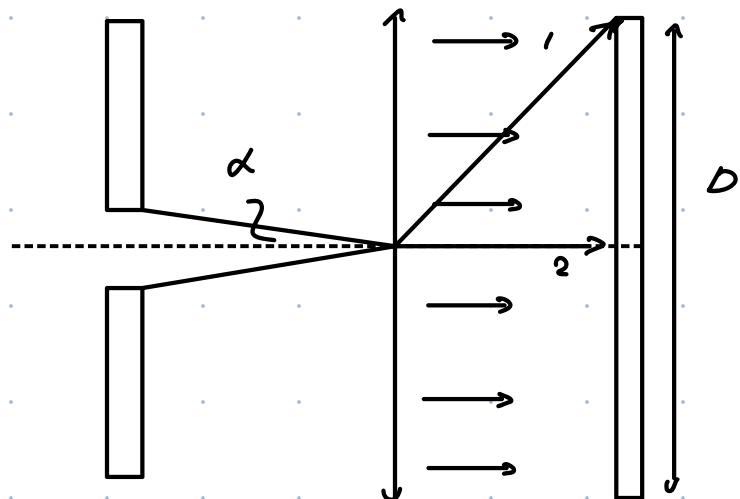
$$\beta \geq \frac{d}{D} L$$

$$D \geq \frac{dL}{\beta}$$

$$D_{\min} \approx \frac{dL}{8} (1)$$

$$\frac{d}{D_{\min}} \approx d \quad \frac{\lambda \cdot \beta}{\lambda L} \approx d$$

$$\beta \approx \lambda L = 10^{-4} \text{ м} = 10^{-2} \text{ см}$$



$$\begin{aligned} d &= \sqrt{L^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} - L = \\ &= L \sqrt{1 + \left(\frac{D}{2L}\right)^2} - L = L \left(1 + \frac{D^2}{2 \cdot 4L^2}\right) - L = \underbrace{\frac{D^2}{8L}}_{\Delta \lambda} \leq \frac{d^2}{\alpha \lambda} \\ \Delta \lambda &= \frac{d^2 \cdot 8L}{D^2} = \frac{\lambda^2 \cdot 8L \beta^2}{\lambda^2 L^2} = \frac{8 \beta^2}{L} = \frac{8 \cdot 10^{-8}}{1} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ см} \end{aligned}$$

Ответ: Минимальный размер деталей $d \approx \lambda L = 10^{-2} \text{ см}$

Требуемая монохроматичность $\Delta \lambda \leq 8 \beta^2 L \approx 8 \cdot 10^{-6} \text{ см}$

9.51. Для записи голограммы Френеля предмет использует-ся плоская монохроматическая волна с $\lambda = 7000 \text{ \AA}$. Восстановление изображения производится вначале той же волной, а затем волной с $\lambda = 3500 \text{ \AA}$. Как изменится при этом минимально разрешимый по-перечный размер деталей изображения?

Указание. Масштабные изменения удобней анализировать на примере голограммы точечного источника.

$$L = \frac{L_0 \cdot \lambda_0}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad d &= d_0 & 2) \quad d &= \frac{d_0}{2} \\ L &= L_0 & L &= 2L_0 \end{aligned}$$

$$\Delta\varphi = k(\sqrt{L^2 + x^2} - L) =$$

$$= kL \left(\sqrt{1 + \left(\frac{x}{L}\right)^2} - 1 \right)$$

$$\Delta\varphi \approx \frac{2\varepsilon}{\lambda} L \left(1 + \frac{x^2}{2L^2} - 1 \right) = \frac{2\varepsilon}{\lambda} \frac{x^2}{2L} \quad \left(\frac{x}{L}\right)^2 \ll 1$$

$$\Delta\varphi_{\min} \approx \frac{\pi c}{\lambda L} (x_{m+1}^2 - x_m^2) = 2\pi$$

$$\frac{\Delta x \cdot x_m \cdot x}{\Delta L} = 2\pi \rightarrow \Delta x = \frac{\Delta L}{x_m} \quad \Delta x_1 = \Delta x_2$$

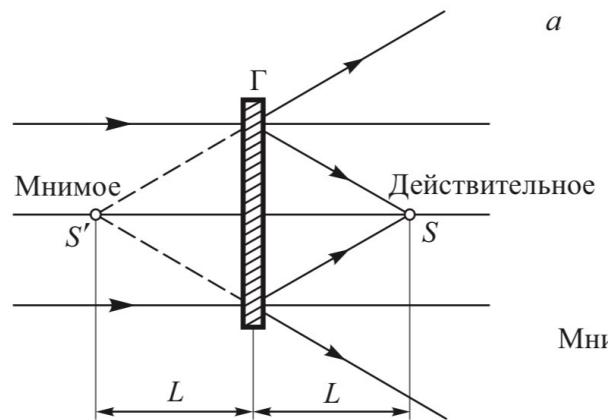


Рис. 6

Ответ: Минимально разрешимый перечный размер деталей изображения не изменился

9.78. При записи голограммы точечного источника S_1 , расположенного на расстоянии $R_1 = 60$ см от фотопластинки Φ , по методу Габора вместо плоской опорной волны использована сферическая опорная волна от когерентного точечного источника S_2 , расположенного на расстоянии $R_2 = 90$ см от фотопластинки (рис. 542). Определить положения действительного и мнимого изображений при просвечивании записанной голограммы нормально падающей плоской волной той же длины, что и при записи.

$$\begin{aligned} S &= e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2} = \\ &= e^{i\varphi_1} / (1 + e^{i\alpha\varphi}) \quad (1) \\ J \sim S \cdot S^* &= 1 + e^{i\alpha\varphi} + e^{-i\alpha\varphi} = \\ &= 2(1 + \cos\alpha\varphi) \end{aligned}$$

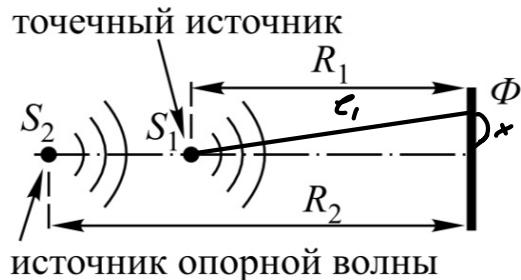


Рис. 542

$$\Delta\varphi = k\Delta \quad \Delta = c_2 - c_1 = \sqrt{R_2^2 + x^2} - \sqrt{R_1^2 + x^2} = R_2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{R_2}\right)^2} - R_1 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{R_1}\right)^2} \quad (2)$$

$$\Delta\varphi = k(R_2 - R_1 + \frac{x^2}{2} (\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1})) = \underbrace{k(R_2 - R_1 + \frac{x^2(R_1 - R_2)}{2R_1 R_2})}_{J} \quad (3)$$

$$T \sim J \quad J$$

$$P = \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} = \frac{90 \cdot 60}{30} = 180 \text{ cm}$$

$$J \sim 1 + \frac{1}{2} e^{i\alpha\varphi} + \frac{1}{2} e^{-i\alpha\varphi} = 1 + A e^{-i\frac{x^2}{2P}} + A e^{i\frac{x^2}{2P}}$$

Ответ: Оба изображения (реальное и мнимое) находятся на

$$\text{расст } P = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 180 \text{ см}$$

Неделя 12. Дисперсия волн. Групповая скорость

10.4. Плоское волновое возмущение распространяется в среде с линейным законом дисперсии $v = a + b\lambda$, где v — фазовая скорость, a и b — постоянные. Показать, что каково бы ни было возмущение, форма его, непрерывно изменяясь, будет периодически восстанавливаться по истечении времени $\tau = d\lambda/dv = 1/b$.

Показать, что отношение пути s , пройденного возмущением за промежуток времени τ , к продолжительности этого промежутка равно групповой скорости.

Указание. Любое плоское волновое возмущение в любой момент времени может быть получено суперпозицией синусоид. Каждая из синусоид перемещается со своей фазовой скоростью в одном и том же направлении. Вследствие этого непрерывно деформируется форма возмущения. Утверждение, сформулированное в задаче, будет доказано, если показать, что существует такое время τ , по истечении которого точно восстанавливается первоначальное взаимное расположение синусоид. Достаточно провести рассуждение для трех синусоид; обобщение на большее число синусоид тривиально.

$$v = a + b\lambda \quad (1) \\ \omega = v\lambda \quad (2) \quad \Rightarrow \omega(\lambda) = a\lambda + b\lambda^2$$

$$u = \frac{d\omega}{d\lambda} = a$$

$$\psi(x, t) = \int A(\lambda) e^{i(kx - \omega t)} d\lambda = e^{-i\omega b t} \int A(\lambda) e^{i\lambda(x - at)} d\lambda$$

$$\text{Чтобы } \tau = \frac{1}{b}$$

$$e^{-i\omega b \cdot \frac{1}{b}} = e^{-i\omega} = 1$$

$$\psi(x, t) = \psi(x - at, 0)$$

$$\frac{dv}{d\lambda} = b \Rightarrow \tau = \frac{d\lambda}{dv} = \frac{1}{b}$$

$$s = ut = a \cdot \frac{1}{b}$$

$$\frac{s}{\tau} = a = u$$

Ответ: форма возмущения восс-ся через время $\tau = \frac{1}{b}$, т.е. вернувшись к исходному состоянию групповой скорости u . Отн. $s = \frac{a}{b}$ к $\tau = \frac{1}{b}$ равно групповой скорости $u = a$

10.67. Предположим, что концентрация N_e электронов в атмосфере Земли изменяется с высотой h по линейному закону $N_e = \alpha h$, достигая на высоте $h_0 = 40$ км значения $(N_e)_0 = 2,5 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$. При радиозондировании атмосферы вертикально вверх посыпается короткий электромагнитный импульс со средней частотой $f_0 = 10 \text{ МГц}$. Найти время, через которое импульс возвратится на Землю, отразившись от ионосферного слоя с критической концентрацией электронов. На какой высоте h_{kp} произойдет отражение?

$$f_{kp} = \sqrt{\frac{e^2 N}{\epsilon_0 m}} = f_0$$

$$N_0 = \alpha h_0 \rightarrow \alpha = \frac{N_0}{h_0}; \quad N = \frac{f_0^2 \epsilon_0 m}{e^2}$$

$$\alpha h = \frac{f_0^2 \epsilon_0 m}{c^2}$$

$$h_{kp} = \frac{f_0^2 \epsilon_0 m}{\alpha c^2} = \frac{10^{14} \cdot 3,14 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^6}{(4,8 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 3,5 \cdot 10^6} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ см} = 20 \text{ км}$$

$$\tau = \frac{2h_{kp}}{v} = \frac{2h_{kp}}{c/2} = \frac{4h_{kp}}{c} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 2,7 \cdot 10^{-5} \text{ с} = 2,7 \text{ мкс}$$

$$\text{Ответ: } h_{kp} = \frac{\pi f_0^2 m}{\alpha c^2} = 2 \cdot 10^6 \text{ см} = 20 \text{ км}$$

$$\tau = \frac{4h_{kp}}{c} = 0,27 \text{ мкс}$$

10.77. Короткий радиоимпульс длительностью $\tau = 0,2 \text{ мкс}$ на несущей частоте $v_0 = 100 \text{ МГц}$ распространяется в ионосфере, критическая длина волны для которой $\lambda_{kp} = 10 \text{ м}$. Оценить дистанцию, которую импульс пробегает в ионосфере без заметного искажения формы.

$$k(\omega_0 + \Delta\omega) = k\omega_0 + \underbrace{\frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \Delta\omega}_{\Delta\omega \ll \omega_0} + \frac{1}{2} \frac{d^2 k}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \Delta\omega^2 + \dots$$

$$-\bar{\epsilon} \ll \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 k}{d\omega^2} \right) (\Delta\omega)^2 \quad \text{---} \ll \bar{\epsilon} \quad (1)$$

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega_c} \right)^2} = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_c^2} \right)^{1/2} \quad (2)$$

$$\Delta\omega \cdot \tau \approx 2\pi$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad (4)$$

$$\omega_p = \frac{c \cdot 2\pi}{\lambda_{kp}} \quad (5)$$

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_c^2} \right)$$

$$\frac{d^2 k}{d\omega^2} = \frac{-1 \cdot \omega_p^2}{c \omega_c^2} \quad (3)$$

$$-\bar{\epsilon} \ll \frac{-1}{2} \frac{\omega_p^2}{c \omega_c^2} (\Delta\omega)^2 \quad ?$$

$$? \ll \frac{\frac{I_0 \cdot 2\pi \cdot (2\pi f_0)^2}{c^2} \cdot r^2}{(\frac{c \cdot 2\pi}{\lambda_{de}})^2 \cdot (\frac{2\pi}{r})^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow ? \ll \frac{\frac{I_0^2 \cdot \rho \cdot \lambda_{de}^2 \cdot r^2}{c^2}}{(\frac{c \cdot 2\pi}{\lambda_{de}})^2} = \frac{10^{26} \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-14}}{9 \cdot 10^8} = \frac{4}{3} \cdot 10^7 \text{ н} \approx 1,33 \cdot 10^7 \text{ н} \approx 10 \text{ км}$$

$$\text{Ответ: } ? \ll \frac{\frac{I_0^2 \cdot r^2 \lambda_{de}^2}{c^2}}{(\frac{c \cdot 2\pi}{\lambda_{de}})^2} \approx 10 \text{ км}$$

10.75. При изучении ионизированной оболочки Земли — ионосфера — применяется метод дисперсионного интерферометра. С космического зонда, падающего вертикально вниз (в гравитационном поле Земли) со скоростью $v = 1 \text{ км/с}$, передатчики излучают радиоволны на частотах f_0 и $3f_0$, $f_0 = 30 \text{ МГц}$. Приемник, расположенный в точке падения зонда на Землю, принимает эти сигналы и обрабатывает их. Нижняя частота принятого сигнала умножается на 3 и вычитается из частоты принятого сигнала на высокой частоте, а получившаяся приведенная разница частот $|\Delta f|$ измеряется. Определить концентрацию электронов N_e в ионосфере, соответствующую моменту измерения, если в этот момент $|\Delta f| = 5 \text{ Гц}$. Считать, что $N_e(h)$ — медленная функция от высоты h : $\frac{dN_e(h)}{dh} \cdot 1 \text{ км} \ll N_e(h)$. Для исследуемого участка ионосферы можно считать $(2\pi f_0)^2 \gg \omega_{\text{пл}}^2$, $\omega_{\text{пл}}$ — плазменная частота.

$$f_1' = f_0 \left(1 + \frac{v}{u_1}\right)$$

$$f_2' = 3f_0 \left(1 + \frac{v}{u_2}\right)$$

$$\Delta f = 3f_1' - f_2' = 3f_0 v \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) \quad (1)$$

$$u_1 = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f}\right)^2} \quad \Delta f = \frac{3f_0 v}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f_1}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_0}{f_2}\right)^2}} \right)$$

$$\Delta f = \frac{3f_0 v}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{f_0}{f_1}\right)^2} - \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{f_0}{f_2}\right)^2} \right)$$

$$\Delta f = \frac{3f_0 v}{c} \frac{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{f_0}{f_1}\right)^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{f_0}{f_2}\right)^2}{1} = \frac{3f_0 v f_0^2}{2c} \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)$$

$$\Delta f = \frac{4 \pi N e^2}{3 c f_0} \quad (2)$$

$$\omega_p^2 = \frac{4 \pi N e^2}{m}$$

$$f_0^2 = \frac{N e^2}{\pi m} \quad (3)$$

$$\frac{3 \Delta f c f_0}{4 v} = \frac{N e^2}{\pi m}$$

$$N = \frac{3}{4} \frac{\Delta f \cdot c \cdot f_0 \cdot \pi m}{v \cdot c^2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^{-14}}{10^5 \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20}} = 4,15 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$$

$$\text{Ответ: } N_e = \frac{3 \pi A f}{c} \frac{e^2}{m f_0} = 9,19 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$$

10.21. Импульсное излучение пульсара CP 1919+21 на частоте $v_1 = 80$ МГц достигает Земли на $\Delta t = 7$ с позже, чем соответствующий импульс на частоте $v_2 = 2000$ МГц. Оценить расстояние L до пульсара, если принять среднюю концентрацию электронов в межзвездном пространстве равной $N \approx 0,05 \text{ см}^{-3}$.

$$v_p \cdot v_{rp} = c^2 \quad (1)$$

$$v_p = \frac{c}{\gamma} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\frac{v_p}{c})^2}} \quad (2)$$

$$v_{rp} = c \cdot \sqrt{1 - (\frac{w_p}{c})^2} \quad (3)$$

$$\Delta t = \frac{L}{u_1} - \frac{L}{u_2} \Rightarrow L = \frac{\Delta t}{\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}} \quad (4)$$

$$k = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{w_p}{c})^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{w_p}{c})^2}} \right] = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{1 - \frac{w_p^2}{2u_1^2}} - \frac{1}{1 - \frac{w_p^2}{2u_2^2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{c} \left[\frac{\frac{2u_1^2}{2u_1^2 - w_p^2} - \frac{2u_2^2}{2u_2^2 - w_p^2}}{2u_1^2 - w_p^2} \right] = \frac{2}{c} \frac{w_1^2(2u_2^2 - w_p^2) - w_2^2(2u_1^2 - w_p^2)}{(2u_1^2 - w_p^2)(2u_2^2 - w_p^2)}$$

$$k = \frac{2}{c} \frac{w_p^2(u_1^2 - u_2^2)}{2u_1^2 \cdot u_2^2} = \frac{w_p^2 \cdot u_1^2}{2cu_1^2 u_2^2} = \frac{w_p^2}{2cu^2}$$

$$u_2^2 - u_1^2 \approx u_1^2$$

$$k = \frac{w_p^2}{2cu_1^2} \quad (5')$$

$$L = \frac{\Delta t \cdot 2c u_1^2}{w_p^2} \quad (6')$$

$$\Delta t = \frac{L}{u_1} - \frac{L}{u_2} \Rightarrow L = \frac{\Delta t}{\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}} \quad (4)$$

$$w_p = \frac{q \pi m e^2}{m} \quad (7)$$

$$L = \frac{2cat(\frac{q \pi m}{m})^2 m}{8 \pi N e^2} = \frac{2 \pi m cat}{N c^2} \cdot j_i^2$$

$$L = \frac{6,78 \cdot 9,1 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 7}{5 \cdot 10^{-2} \cdot 4,8^2 \cdot 10^{-20}} \cdot 64 \cdot 10^{14} \approx 700 \cdot 10^{18} \text{ см} \approx 7 \cdot 10^{20} \text{ см} \approx 700 \text{ сж. лет.}$$

$$1 \text{ сж. лет.} = 9,96 \cdot 10^{12} \text{ км} \approx 10^{13} \text{ см}$$

$$\text{Ответ: } L = \frac{2 \pi m cat}{N c^2} \cdot j_i^2 \approx 7 \cdot 10^{20} \approx 700 \text{ сж. лет.}$$

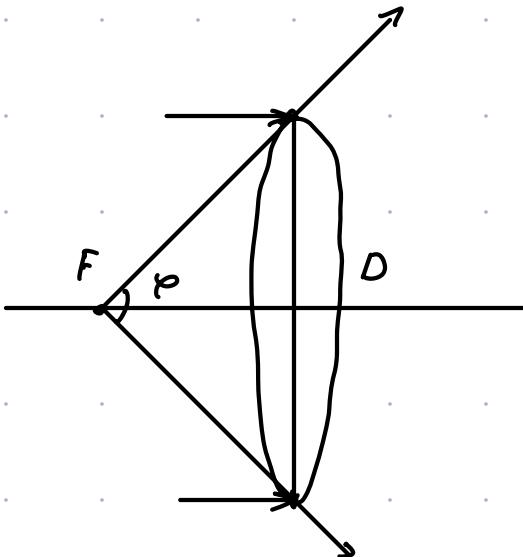
10.25. Параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 0,1$ нм падает на тонкую двояковыпуклую линзу из берилля (плотность берилля $\rho = 1,85$ г/см³, порядковый номер $Z = 4$, относительная атомная масса $A = 9$) с поверхностями одинаковых радиусов кривизны $R = 40$ см. Диаметр линзы считать равным $D = 9$ см. Найти угол расхождения φ пучка после линзы.

$$n = \sqrt{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2}$$

$$n = \sqrt{1 - \frac{\pi k N e^2 / c^2}{m c^2 \pi^2}} = \sqrt{1 - \frac{N e^2 \lambda^2}{\hbar m c^2}}$$

$$\frac{e^2}{m c^2} = r_{kn} = 7,8 \cdot 10^{-17} \text{ см} (0)$$

$$n = \sqrt{1 - \frac{N \cdot r_{kn} \cdot \lambda^2}{\hbar}} \quad (1)$$



$$N = \frac{M \cdot \rho \cdot Z}{m} = \frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 1,85 \cdot 4}{9} = 6,93 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3} (2)$$

$$n = \sqrt{1 - \frac{6,93 \cdot 10^{23} \cdot 7,8 \cdot 10^{-17} \cdot 10^{-16}}{3,14}} = \sqrt{1 - 6,9 \cdot 10^{-6}} = 1 - 2,2 \cdot 10^{-6} \rightarrow$$

$$\rightarrow n-1 = -2,2 \cdot 10^{-6} < 0$$

$$\frac{1}{F} = (n-1) \cdot \frac{2}{R} \quad F = \frac{R}{2(n-1)}$$

$$\rho = \frac{D}{F} = \frac{D \cdot 2(n-1)}{R} = \frac{9 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6}}{40 \cdot 10^{-2}} \approx 10^{-6} \text{ Па}$$

$$\Delta \rho = \frac{\lambda}{D} = \frac{10^{-8}}{9} \approx 10^{-9} \text{ Па}$$

$$\Delta \rho < \rho$$

$$\text{Ответ: } \rho = \frac{D \cdot 2(n-1)}{R} \approx 10^{-6} \text{ Па}$$

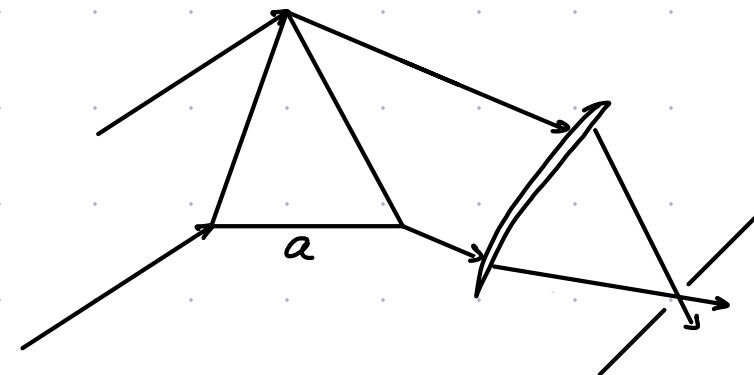
$$\Delta \rho \approx \frac{\lambda}{D} \approx 10^{-9} \text{ Па} < \rho$$

T9

$$\tau \approx -\frac{a_d}{c} \frac{dn}{dx} = -\frac{0,03 \text{ m} \cdot 600 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot (-10^8)}{3,4 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 6 \cdot 10^{-12} \text{ s} = 6 \text{ ns}$$
$$\Delta \vartheta = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{6 \cdot 10^{-12} \text{ s}} \approx 170 \text{ rad/s}$$

DRIFTER: $T \approx 6 \text{ ns}$

$$\Delta \vartheta \approx 170 \text{ rad/s}$$



10.36. Световой луч распространяется в поле тяжести параллельно поверхности Земли. Пренебрегая движением воздуха, определить величину отклонения луча на пути 1 км. Считать давление $P = 1$ атм, температуру воздуха $T = 300$ К, коэффициент преломления воздуха при этих условиях $n = 1 + 3 \cdot 10^{-4}$.

$$n(z) = n_0 + \frac{dn}{dz} z$$

$$\frac{dn}{dz} \approx \frac{\mu g}{R T} \frac{dn}{dx} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{dn}{dz}$$

$$\Theta(x) = \int_0^x \frac{dn}{dz} dx$$

$$\Delta z = \int_0^x \Theta(x) dx = \int_0^x \left(\int_0^x \frac{dn}{dz} dx \right) dx$$

$$\Delta z = \frac{\Delta n}{n} \frac{\mu g}{R T} \int_0^x \int_0^x dz dx = \frac{\Delta n}{n} \frac{\mu g}{R T} \frac{x^2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{1} \cdot \frac{0,029 \cdot 9,81}{8,314 \cdot 300} \cdot \frac{10^8}{2} \approx 1,8 \text{ см}$$

$$\text{Ответ: } \Delta z = \frac{\Delta n}{n} \frac{\mu g}{R T} \frac{x^2}{2} \approx 1,8 \text{ см}, R - \text{грав. пост.}$$

11. Иерархия поляризации света

11.9. В интерференционном опыте Юнга между щелью S и щелями S_1 и S_2 (рис. 551) введен поляроид P , главные оси которого параллельны или перпендикулярны к щелям S_1 и S_2 . Как изменится

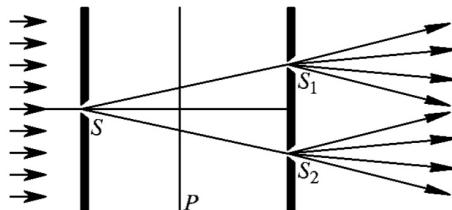
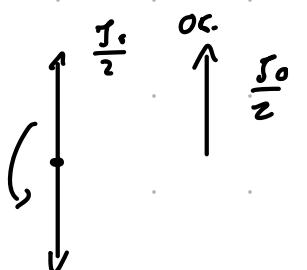


Рис. 551

интерференционная картина на экране, если щели S_1 и S_2 прикрыть пластинками в полволны, ориентированными взаимно перпендикулярно друг к другу (параллельно и перпендикулярно к щелям)? Что произойдет, если поляроид P повернуть на 90° ? Какая картина будет наблюдаться, если убрать поляроид? Рассмотреть ту же задачу, если вместо пластиинки в полволны используется пластиинка в четверть волны. Щели S_1 и S_2 предполагаются узкими (порядка длины волны), а расстояние между ними большим по сравнению с их шириной.



$$J = z \cdot \frac{J_0}{2} (1 + \cos(\rho + \alpha\rho))$$

$$J_1 = 2 J_0 (1 + \cos \rho) - \text{без полр. и плас. (0)}$$

$$J_2 = 2 \frac{J_0}{2} (1 + \cos \rho) - \text{с пол. сущ. плас. (1)}$$

$$J_2 = 2 \frac{J_0}{2} (1 + \cos(\rho + \hat{\epsilon})) = J_0 (1 - \cos \rho) \quad \text{Constitutive relation. (2)}$$

$$\Lambda = \frac{\lambda L}{d} : \text{const}$$

$$J_3 = J_0 (1 + \cos(\varphi - \Sigma)) =$$

$$= T_0(1 - \cos\varphi) / 3$$

НОСИЕ ИЗОБРАЗИТЕЛЬНОГО МИРА

UE 90°

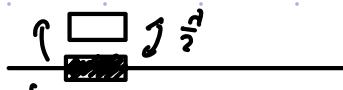
$$J_S = J_0(1 + \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})) = J_0(1 + \sin\varphi)$$

$$J_c = J_0 (1 - \sin \phi) - \text{нрн нодж}$$

с низоме

ном на 90°

$T_7 = ? T_0 - \text{mph. sec. slope}$



ОЗЕРСКИЙ РАЙОН

Интегреру. Полосы симбозятся на полосах синтеза, и
если изогнутые полигоны на 90° они симбозятся в
противоположных стоках на полосах синтеза.
И если один из них, изогнутый; если скруглённый, то
изогнутые интегреречные полосы есть изогнуты, то
изогнутые полосы как правило обвёрнуты. При изогнутых
полосах в изогнутых зонах зоны происходят симбозные
полосы на изогнутых синтезах полос; если в этом случае
скруглить полигон на 11° , то интегреречные полосы пропадут

11.16. Смесь света, поляризованного по кругу, и естественного рассматривается через кристаллическую пластинку в четверть волны николь. При вращении николя вокруг оси светового пучка найдено, что максимальная интенсивность света, прошедшего через систему, в $m = 3$ раза превосходит минимальную интенсивность. Найти отношение интенсивности света \mathcal{I}_k , поляризованного по кругу, к интенсивности естественного света \mathcal{I}_e .

$$J_h = A_{0x}^2, A_{0y}^2$$

$$J_h = 2A_{0x}^2$$

$$J_{h\max} = J_h \quad J_c' = \frac{J_c}{2}$$

$$J_{h\min} = 0$$

$$J_{h\max} = J_h + \frac{J_c}{2}$$

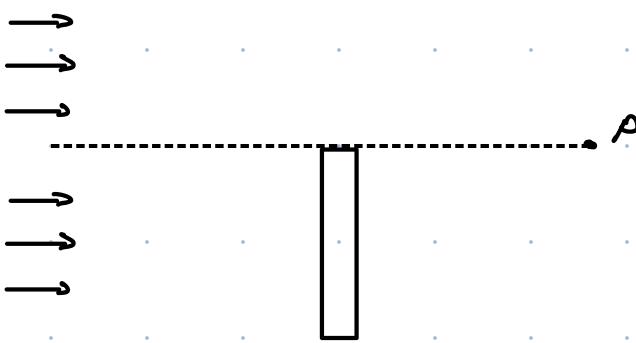
$$J_{h\min} = \frac{J_c}{2}$$

$$J_h + \frac{J_c}{2} = m \cdot \frac{J_c}{2} \rightarrow g_h = \frac{(m-1)J_c}{2}$$

$$\frac{J_h}{J_c} = \frac{m-1}{2} = 1$$

$$\text{OТВЕТ: } \frac{J_h}{J_c} = \frac{m-1}{2} = 1$$

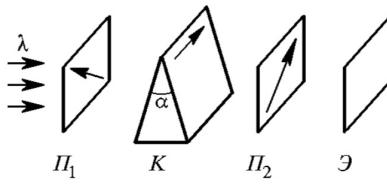
T10

$$\Delta \rho_x = \frac{2\pi}{\lambda} n a =$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda} n \cdot \frac{\lambda}{4(m-1)} = \frac{\pi n}{2(m-1)}$$
$$\Delta \rho_y = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 1 \cdot a = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4(m-1)} =$$
$$= \frac{\pi}{2(m-1)}$$

$$\Delta \rho = \Delta \rho_x - \Delta \rho_y = \frac{\pi n}{2(m-1)} - \frac{\pi}{2(m-1)} = \frac{\pi}{2}$$

Деление полеиз. с правильной полоской, т.к. симметрия
расположения осей от $\pi/2$. Ост. полоски право и

ОТВЕТ: Ост. полоски $\theta = 1$

11.54. Параллельный пучок естественного света интенсивностью \mathcal{J}_0 и длиной волны λ падает на систему из двух скрещённых поляроидов P_1 и P_2 и клина K из кварца с малым преломляющим углом α . Показатели преломления кварца равны n_e и n_o . Оптическая ось клина параллельна его ребру и составляет угол 45° с разрешенными направлениями поляроидов (рис. 559). Пройдя через систему, свет падает на белый экран \mathcal{E} . Найти распределение интенсивности света $\mathcal{J}(x)$ на экране. Что увидит наблюдатель на экране \mathcal{E} , если между ним и поляроидом P_2 расположить линзу так, чтобы экран оказался в ее фокальной плоскости?



$$E_{n_2} = \frac{\mathcal{J}_0}{2\sqrt{2}} (e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi_e}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} J_{n_2} &= \frac{\mathcal{J}_0^2}{8} (1 - e^{i(\varphi_e - \varphi_0)} - e^{-i(\varphi_e - \varphi_0)}) = \\ &= \frac{\mathcal{J}_0}{8} (2 - 2 \cos \Delta\varphi) \end{aligned}$$

$$J_{n_2} = \frac{\mathcal{J}_0}{4} (1 - \cos \Delta\varphi) \quad (1')$$

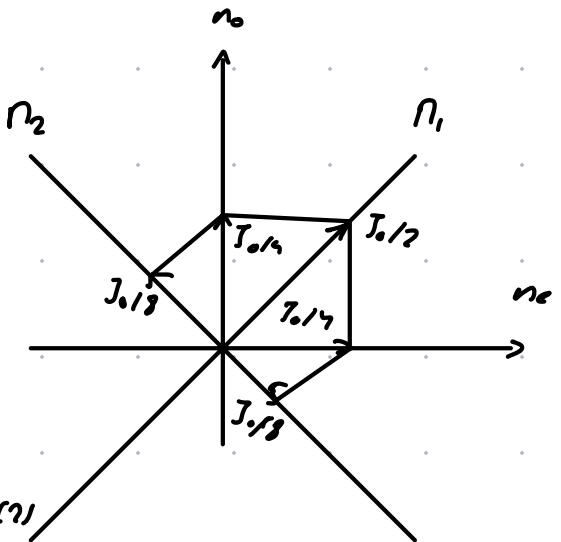
$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= k \cdot \alpha = \\ &= k(d n_e - d n_o) \end{aligned}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} dx (n_e - n_o) \quad (2)$$

$$dx = \frac{2\pi}{\lambda} d\Lambda (n_e - n_o)$$

$$\Delta = \frac{d}{dx(n_e - n_o)} \quad (3)$$

$$y = xf = d(n_e - n_o) f \quad (4)$$



Ответ: $J = \frac{\mathcal{J}_0}{4} (1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} dx (n_e - n_o))$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число,

шага x отсчитываемого от ребра илица. При $f \ll \lambda$ можно

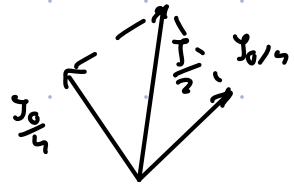
забыть, что на краю имеются два специальных места и

расстояния $y = d(n_e - n_o) f$, где f — фокусное расстояние.

T''

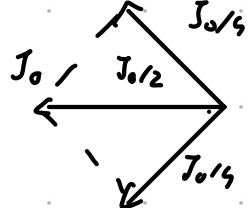
1) $d = \frac{5}{4} r_1$

2) $d = r_2$

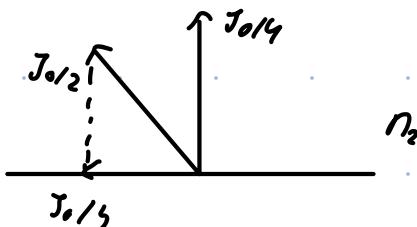
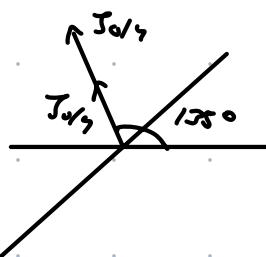
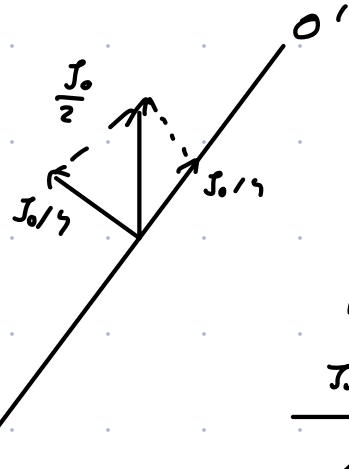


$J_2 = 0$

3) $d = \frac{3}{2} r_3$



$J_3 = \frac{J_0}{2}$



Ortsvektor: $J_1 = J_0/4; J_2 = 0; J_3 = J_0/2$

11.60. Показатель преломления кристаллического кварца для длины волны $\lambda = 589$ нм равен $n_o = 1,544$ для обыкновенного луча и $n_e = 1,553$ для необыкновенного луча. На пластинку из кварца, вырезанную параллельно оптической оси, нормально падает линейно поляризованный свет указанной длины волны, занимающий спектральный интервал $\Delta\lambda = 40$ нм. Найти толщину пластиинки d и направление поляризации падающего света, если свет после пластиинки оказался неполяризованным.

$$\frac{d^2}{\Delta\lambda} < \Delta$$

$$\Delta = d(n_e - n_o)$$

$$\frac{d^2}{\Delta\lambda} < d(n_e - n_o)$$

$$d > \frac{\Delta^2}{\Delta(n_e - n_o)} = \frac{(589 \cdot 10^{-7})^2}{90 \cdot 10^{-7} \cdot 0,009} = 0,96 \text{ мм} \approx 1 \text{ мм}$$

$$d > 1 \text{ мм}$$

Ответ: $d > \frac{\Delta^2}{\Delta(n_e - n_o)} = 1 \text{ мм}$, падающие свет должны быть исполюризованы под углом 45° к опт. оси пластиинки

T12

$$\bar{E}_{1x} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \hat{x}, \bar{E}_{2x} = E_0 \hat{x}$$

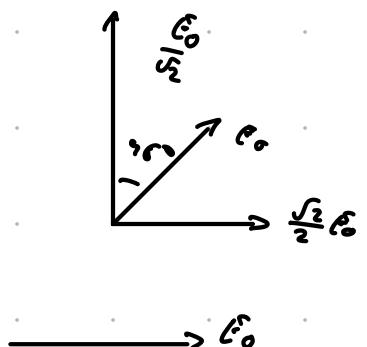
$$\bar{E}_{res,3} = \bar{E}_{1x} + \bar{E}_{2x} = \left(\frac{E_0}{\sqrt{2}} + E_0 \right) \hat{x} \quad \bar{E}_{res,3} = \bar{E}_{1x} - \bar{E}_{2x} = \left(\frac{E_0}{\sqrt{2}} - E_0 \right) \hat{x}$$

$$J_{max} = \left| \frac{E_0}{\sqrt{2}} + E_0 \right|^2 \approx \frac{5}{2} |E_0|^2 \quad J_{min} = \left| \frac{E_0}{\sqrt{2}} - E_0 \right|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right)^2 E_0^2 \approx \frac{1}{2} E_0^2$$

$$V = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}}$$

$$V = \frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Ответ: } V = \frac{2}{3}$$



11.89. Явление самофокусировки объясняется зависимостью показателя преломления от интенсивности света ($n = n_0 + n_2 E^2$, где E_0 — амплитуда напряженности электрического поля в световой волне). Одним из самых больших значений n_2 обладает сероуглерод ($n_2 = 2 \cdot 10^{-11}$ ед. СГСЭ). Мощный пучок лазерного излучения с параболической зависимостью интенсивности от расстояния от центра пучка ($\mathcal{I} = \mathcal{I}_0(1 - r^2/r_0^2)$ при $r < r_0$ и $\mathcal{I} = 0$ при $r > r_0$) проходит сквозь слой сероуглерода толщиной $L = 5$ см. Найти, на каком расстоянии от кюветы с сероуглеродом сфокусируется лазерный пучок ($\mathcal{I}_0 = 5 \cdot 10^8$ Вт/см², $r_0 = 5$ мм.*).

$$-L \frac{dn}{dr} = \frac{F}{r} \quad (1)$$

$$\mathcal{I} = I \bar{S} / = \frac{c}{4\pi} \frac{E_0^2}{r^2} \quad (1)$$

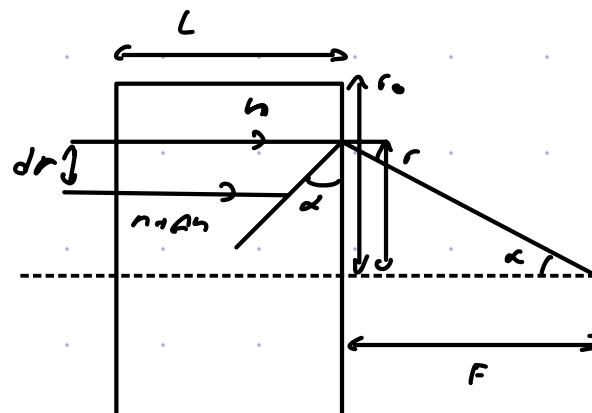
$$E_0^2 = \frac{8\pi I}{c}$$

$$E_0^2 = \frac{8\pi}{c} \mathcal{I}_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \quad (2)$$

$$n = n_0 + n_2 \cdot \frac{8\pi}{c} \mathcal{I}_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \quad (3)$$

$$L \cdot n_2 \cdot \frac{8\pi}{c} \mathcal{I}_0 \cdot \frac{2r}{r_0^2} = \frac{F}{r}$$

$$F = \frac{r_0^2 c}{16\pi L n_2 \mathcal{I}_0} = \frac{25 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 10^{10}}{16 \cdot 3^{14} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^8} = 0,0223 \cdot 10^6 \text{ см} = 223 \text{ см} \approx 3 \text{ м}$$



$$\text{Ответ: } F = R = \frac{c r_0^2}{16\pi n_2 L \mathcal{I}_0} \approx 3 \text{ м}$$

11.126. Экспериментатор, недовольный малым коэффициентом преобразования лазерного излучения с длиной волны $\lambda = 1064$ нм (неодимовый лазер) во вторую гармонику ($\lambda = 532$ нм), решил после первого кристалла-удвоителя поставить еще один кристалл, чтобы перекачать остаток инфракрасного излучения во вторую гармонику (рис. 585). Каково должно быть расстояние L между кристаллами? Показатели преломления воздуха для данных длин волн равны соответственно $n_1 = 1,0002742$ и $n_2 = 1,0002782$.

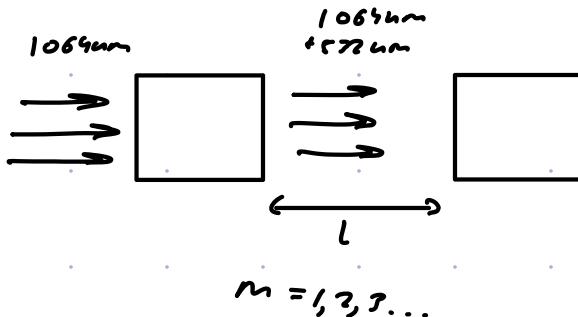
$$\Delta = m \cdot \lambda_2$$

$$L n_2 - L n_1 = m \lambda_2$$

$$L = \frac{m \lambda_2}{n_2 - n_1}$$

$$L_{\min} = \frac{532 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 10^{-6}} \approx 13,3 \text{ см}$$

$$L = m \cdot L_{\min} = 13,3 \cdot m$$



Ответ: Волна второй гармоники должна быть разбита на целое число частей волны, т.е. отношение основной к дробной части должно быть целым числом, т.е.

$$L_{\min} = \frac{\lambda_2}{n_2 - n_1} \approx 13,3 \text{ см}; L = 13,3 \cdot m, m = 1, 3, 7, \dots$$

Г7

$$J(t) = J_0 \cdot e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} \quad (1)$$

$$n = n_0 + n_2 \cdot J(t) \quad a_n = n_2 J(t)$$

$$a_n = n_2 J_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} \quad (2)$$

$$\Delta \varphi(t) = \alpha (w_0 t - k z)$$

$$\Delta \varphi(t) \approx -k n L + k n_0 L = -k \alpha n L$$

$$\Delta \varphi(t) = -\frac{2\pi}{\lambda} n_2 J_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} \cdot L \quad (3)$$

$$w = \frac{dw}{dt} \quad \alpha w = \frac{d\Delta \varphi}{dt} \rightarrow \alpha w = \frac{2\pi n_2 J_0 \alpha t}{\lambda \tau^2} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} \quad (4)$$

$$\alpha w = \alpha w_0 \left(\frac{t}{\tau}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^m} \rightarrow m=1 \quad \alpha w = \alpha w_0 \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} \quad (5)$$

$$\alpha w_0 = \frac{4\pi n_2 J_0 L}{\lambda \tau}$$

$$\Delta \vartheta_0 = \frac{c \omega_0}{2 \varepsilon} = \frac{2 n_2 J_0 L}{\lambda T}$$

$$\Delta \vartheta = \Delta \vartheta_0 = \frac{4 n_2 J_0 L}{\lambda T} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^6}{10^{-4} \cdot 10^{-11}} = 64 \cdot 10^{11} \text{ rad} \approx 6 \cdot 10^{12} \text{ rad}$$

$$\text{Ответ: } \Delta \vartheta \approx \frac{4 n_2 J_0}{\lambda T} \approx 6 \cdot 10^{12} \text{ rad}$$

11.88. Нелинейный интерферометр Фабри-Перо представляет собой тонкую пластинку из вещества, показатель преломления которого пропорционален квадрату напряженности электрического поля: $n = n_0 + n_2 E^2$. Пластинка покрыта высокоотражающими покрытиями с коэффициентом отражения по энергии $\rho = 99\%$. Определить уровень плотности S мощности лазерного излучения с $\lambda = 1,051$ мкм, пропускаемого таким интерферометром, если $n_0 = 3,5$, $n_2 = 10^{-9}$ ед. СГСЭ, а толщина пластины $d = 12$ мкм.

$$2dn = m \lambda \quad (1)$$

$$n = n_0 + m_0 = \frac{2dn_0}{d} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 3,5}{1,051 \cdot 10^{-6}} = 79,92$$

$$m = 90$$

$$n = \frac{m \lambda}{2d} = \frac{80 \cdot 1,051 \cdot 10^{-6}}{79,92 \cdot 10^{-6}} = 3,50 \quad (2)$$

$$E^2 = \frac{n - n_0}{n_0} = \frac{3,50 - 3,5}{10^{-9}} = \frac{1}{2} \cdot 10^7 \text{ В/м. СРСЭ}$$

$$\gamma = \xi = \frac{C}{\epsilon_0} (E, H) = \frac{C_0}{\epsilon_0} E^2 \quad (3)$$

$$B = H = nE$$

$$J_{\text{ макс}} = \frac{C n (E \epsilon)^2}{4 \pi} (1 - \rho)$$

$$J_{\text{ макс}} = \frac{C n n_0 E^2}{4 \pi} (1 - \rho) = \frac{\pi \cdot 10^{10} \cdot 3,5^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^7}{4 \cdot 79,92} (1 - 0,99) = 10^{15} \frac{\text{В/см}^2}{\text{с.см}^2} = 10^9 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$$

$$\text{Ответ: } J = \frac{C}{\epsilon_0} \xi E^2 (1 - \rho) = 10^{15} \frac{\text{А/см}^2}{\text{с.см}^2} = 10^9 \frac{\text{А}}{\text{см}^2}$$

$$E^2 = \frac{n - n_0}{n_0} = \frac{1}{2} \cdot 10^7 \text{ В/м. СРСЭ}$$

11.128. Наблюдатель находится в тумане между двух фонарей одинаковой мощности: красного (длина волны $\lambda_1 = 700$ нм) и синего ($\lambda_2 = 400$ нм) цветов, расстояние между которыми равно $L = 500$ м. На каком расстоянии от красного фонаря яркости обоих источников для наблюдателя одинаковы? Считать, что рассеяние света в тумане подчиняется закону Рэлея.

$$J = A e^{-\alpha x}$$

$$\alpha = \frac{B}{\lambda^4}$$

$$A e^{-\frac{\alpha x}{\lambda_1^4}} = A e^{-\frac{\alpha(L-x)}{\lambda_2^4}}$$

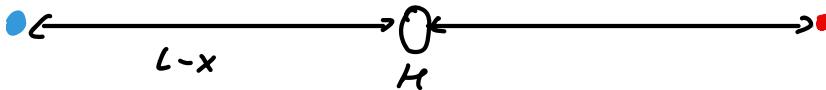
$$\frac{x}{\lambda_1^4} = \frac{L-x}{\lambda_2^4}$$

$$\lambda_2^4 x = \lambda_1^4 (L-x)$$

$$256x = 2401(L-x) \rightarrow 2657x = 2401 \cdot 500$$

$$x \approx 451,8 \text{ м}$$

$$\text{Ответ: } x \approx 451,8 \text{ м}$$



11.125. Оценить плотность мощности J световой волны, при которой в оптических материалах начинают проявляться нелинейные эффекты. Учесть, что для этого достаточно, чтобы нелинейная добавка к показателю преломления составила 10^{-4} .

Указание. Отношение нелинейной добавки к показателю преломления по порядку величины равно $\Delta n_{\text{нл}}/n \sim E/E_{\text{вн}}$, где $E_{\text{вн}}$ — внутриатомное поле, создаваемое зарядом ядра для внешних электронов.

$$J = |\vec{S}|^2 = \frac{c}{8\pi} E^2 n$$

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{E}{E_{\text{вн}}} \rightarrow E_{\text{вн}} = \frac{e}{r^2} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ эз. с.с.з}$$

$$r \approx 10^{-8} \text{ см}$$

$$E = \frac{\Delta n E_{\text{вн}}}{n} = \frac{\Delta n e}{n r^2}$$

$$J = \frac{c}{8\pi} \frac{\Delta n^2 c^2 \pi}{n r^4} \quad \boxed{n = 1,5}$$

$$J = \frac{C}{8\pi} \frac{\Delta n^2 c^2}{n r^2} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{8 \cdot 7,14} \cdot \frac{10^{-8} \cdot (9,8 \cdot 10^{-10})^2}{1,5 \cdot 10^{-22}} \approx 2 \cdot 10^{13} \text{ A} \cdot \text{cm}^2 = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

$$\text{Очевидно: } J = \frac{Cn}{8\pi} \left(\frac{\Delta n}{n} \right)^2 E_{\text{пн}}^2 \approx 2 \cdot 10^7 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$

$$E_{\text{пн}} \approx \frac{c}{r^2} \approx 5 \cdot 10^6 \text{ В/м. СГСЭ - вибромагнитное поле}$$

11.90. Гауссов пучок неодимового лазера ($\lambda = 1 \text{ мкм}$) с радиальным распределением поля по сечению $E = E_0 e^{-r^2/R^2}$ ($R = 3 \text{ мм}$) и с плоским волновым фронтом падает на плоскопараллельную пластинку толщиной $d = 1 \text{ см}$, сделанную из нелинейного вещества, показатель преломления которого зависит от интенсивности: $n = n_0 + n_2 E^2$ ($n_2 = 10^{-11} \text{ ед. СГСЭ}$). Оценить, при какой мощности лазера возможно уменьшить диаметр пучка (фокусировка) после прохождения пластиинки.

$$\frac{R}{f} > \frac{d}{2R} \rightarrow f < \frac{2R^2}{d} \quad (1)$$

$$E^2 = E_0^2 e^{-\frac{2r^2}{R^2}} = E_0^2 \left(1 - \frac{2r^2}{R^2}\right) \quad (2)$$

$$n = n_0 + n_2 E_0^2 \left(1 - \frac{2r^2}{R^2}\right) \quad (3)$$

$$\Delta = f(1 - \cos d) = f\left(1 - 1 + 28 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \lambda \cdot \frac{r^2}{f^2/2} \quad (4)$$

$$\Delta = \alpha n \cdot d \quad (5)$$

$$\alpha n = n_2 E_0^2 \frac{2r^2}{R^2} \quad (6)$$

$$\frac{r^2}{2f} = \frac{n_2 E_0^2 2r^2 d}{R^2} \rightarrow E_0^2 = \frac{R^2}{4n_2 d R^2} = \frac{\lambda^2 \lambda}{4n_2 d R^2}$$

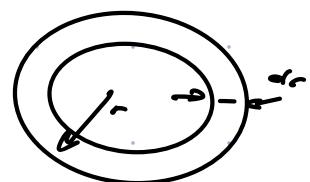
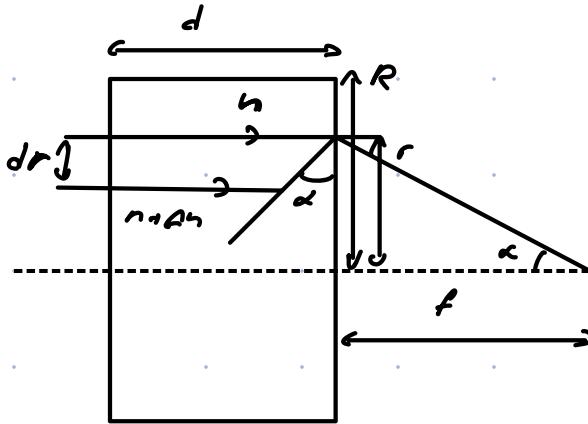
$$E_0^2 = \frac{d}{8n_2 d} \quad (7)$$

$$S = \frac{C}{8\pi} E_0^2 e^{-\frac{2r^2}{R^2}}$$

$$P = \int 2\pi r dr S(r) = \frac{C E_0^2}{8\pi} \int_0^\infty r dr e^{-\frac{2r^2}{R^2}} =$$

$$= \frac{C E_0^2}{4} \left(-\frac{R^2}{2} e^{-\frac{2r^2}{R^2}} \right) \Big|_0^\infty = \frac{C E_0^2}{8} R^2 = \frac{C P^2}{8} \cdot \frac{\lambda}{8n_2 d} =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 10^{-4} \cdot 9 \cdot 10^{-7}}{64 \cdot 10^{11} \cdot 1} = 0,7 \cdot 10^{15} \frac{W}{m^2} = 0,7 \cdot 10^8 \text{ Вт}$$



Очевидно: Рассчитанная мощность поглощена, если интенсивность падала

$$S > \frac{C}{4\pi} E_0^2 = \frac{C}{4\pi} \frac{\lambda}{2m_d} \frac{3\rho r}{cm^2 \cdot c}$$

$$P = \frac{CR^2 d}{64 \cdot m_d} \approx 0,7 \cdot 10^{15} \frac{3\rho r}{c} = 0,4 \cdot 10^3 Br$$