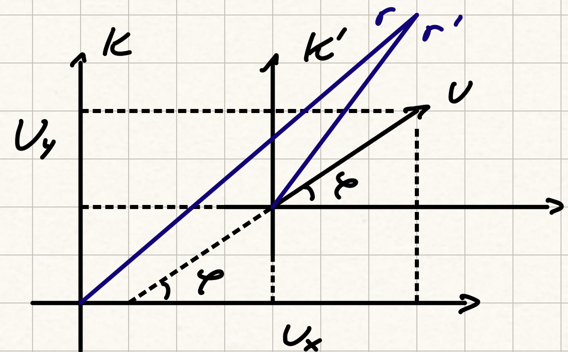
Сурженко Эдуард Б01-304 Задание №1 по теории поля

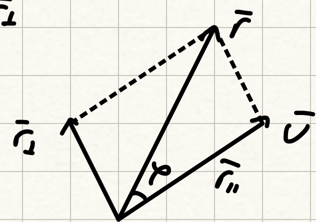
1. Начало координат системы K' движется со скоростью $\mathbf{V} = (V_x, V_y)$ относительно системы K, а оси координат составляют со скоростью $\mathbf{V}$ те же самые углы, что и оси системы K. Записать матрицу преобразований Лоренца от системы K к системе K' (а также обратного преобразования). Определить положение осей (x', y') в системе K в момент времени $t = 0$ по часам системы K.
Указание: представить радиус-вектор в виде суммы параллельного и перпендикулярного скорости $\mathbf{V}$ векторов: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$, где $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{V})\mathbf{V}/V^2, \quad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{V})\,\mathbf{V}/V^2$.

$\bar{r} = \bar{r}_{\parallel} + \bar{r}_{\perp}$, где $\bar{r}_{\parallel} = \dfrac{(\bar{r}\cdot\bar{v})v}{v^2}$

$\bar{r}_{\perp} = \bar{r} - \dfrac{(\bar{r}\cdot\bar{v})v}{v^2}$



Запишем преобразования Лоренца для компонентов $\bar{r}_{\parallel}$ и $\bar{r}_{\perp}$



Преобразования Лоренца

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Если ввести новую сист. координат связанную с K', но повёрнутую так, чтобы ось x данной с.к. была $\parallel$ скорости, тогда $|\bar{r}_{\perp}|$ сохр., а $|\bar{r}_{\parallel}'| = \gamma(|\bar{r}_{\parallel}| - \beta ct)$, т.е. при обратном повороте получим, что $\bar{r}_{\perp}' = \bar{r}_{\perp}$, $\bar{r}_{\parallel}' = \gamma(\bar{r}_{\parallel} - \beta ct)$, также при таком повороте не затрагивается ось времени $ct' = \gamma(ct - \beta|\bar{r}_{\parallel}|)$

$$\bar{r}' = \bar{r}_{\perp}' + \bar{r}_{\parallel}' = \bar{r} - \frac{(\bar{r}\cdot\bar{v})\bar{v}}{v^2} + \gamma\frac{(\bar{r}\cdot\bar{v})\bar{v}}{v^2} - \beta ct = \bar{r} + (\gamma - 1)\frac{(\bar{r}\cdot\bar{v})\bar{v}}{v^2} - \gamma v t$$

$$x' = x + (\gamma - 1)\frac{(xv_x + yv_y)v_x}{v_x^2 + v_y^2} - \gamma v_x t$$

$$y' = y + (\gamma - 1)\frac{(xv_x + yv_y)v_y}{v_x^2 + v_y^2} - \gamma v_y t$$

$$z' = z$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \beta \frac{x v_x + y v_y}{|v|}\right)$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c} v_x & -\frac{\gamma}{c} v_y & 0 \\ -\frac{\gamma}{c} v_x & 1 + \frac{(\gamma-1) v_x^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1) v_x v_y}{v^2} & 0 \\ -\frac{\gamma}{c} v_y & \frac{(\gamma-1) v_x v_y}{v^2} & 1 + \frac{(\gamma-1) v_y^2}{v^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma & \gamma \frac{v_x}{c} & \gamma \frac{v_y}{c} & \gamma \frac{v_z}{c} \\ \hline \gamma \frac{v_\alpha}{c} & \multicolumn{3}{c}{\delta_{\alpha\beta} + (\gamma - 1) \frac{v_\alpha v_\beta}{|v|^2}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Учитывая, что $\cos\varphi = \frac{v_x}{v}$, а $\sin\varphi = \frac{v_y}{v}$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta\cos\varphi & -\gamma\beta\sin\varphi & 0 \\ -\gamma\beta\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\cos^2\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ -\gamma\beta\sin\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{матрица преобразования Лоренца} \\ \text{от системы } K \text{ к системе } K' \ - \ \Lambda}} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Матрица обратного преобразования находится с помощью замены v на $-v$

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta\cos\varphi & \gamma\beta\sin\varphi & 0 \\ \gamma\beta\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\cos^2\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ \gamma\beta\sin\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём положение осей (x', y') в системе K в момент времени $t=0$ по часам системы K:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta\cos\varphi & \gamma\beta\sin\varphi & 0 \\ \gamma\beta\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\cos^2\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ \gamma\beta\sin\varphi & (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi & 1+(\gamma-1)\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

При $t=0$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+(\gamma-1)\cos^2\varphi)x + (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi\, y \\ (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi\, x + (1+(\gamma-1)\sin^2\varphi)y \\ z \end{pmatrix}$$

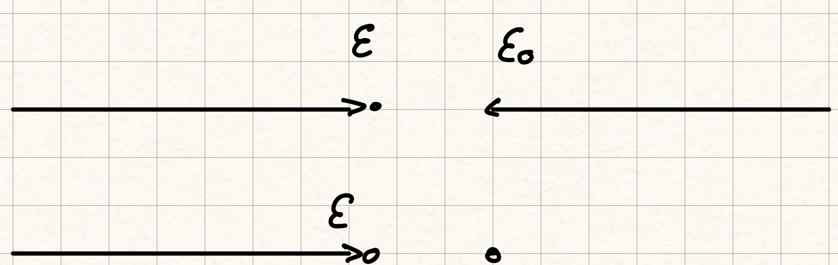
$y'=0$ - ось x' $\Rightarrow$ $(\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi\, x + (1+(\gamma-1)\sin^2\varphi)y = 0$

$y = -\dfrac{(\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi}{1+(\gamma-1)\sin^2\varphi}x$ - ур-ие оси x'

$x'=0$ - ось y' $\Rightarrow$ $(1+(\gamma-1)\cos^2\varphi)x + (\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi\, y = 0$

$y = -\dfrac{1+(\gamma-1)\cos^2\varphi}{(\gamma-1)\sin\varphi\cos\varphi}x$ - ур-ие оси y'

3. Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ. Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью?



$$p^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \bar{p}\right)$$

Общий импульс

$$p_1^i + p_2^i = \left(\frac{2\mathcal{E}_0}{c}, \vec{0}\right)$$

В СО, где один покоится

$$p_1^i + p_2^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c} + mc, \vec{p}\right)$$

$$\frac{4\mathcal{E}_0^2}{c^2} = \left(\frac{\mathcal{E}}{c} + mc\right)^2 - \bar{p}^2 = \underbrace{\boxed{\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \bar{p}^2}}_{m^2c^2} + 2\mathcal{E}m + m^2c^2 =$$

$//\ p^i p_i = m^2c^2\ //$

$$= 2m^2c^2 + 2\mathcal{E}m$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{2\mathcal{E}_0^2}{mc^2} - mc^2}$$ $\{c = 1$, эн-ия в ГэВ, $mc^2 = 0{,}938$ ГэВ$\}$

$$\mathcal{E} = \frac{2\cdot(5000)^2}{0{,}938} - 0{,}938 \approx 5{,}33\cdot 10^7 \text{ ГэВ}$$

4. Доказать, что трехмерные тензоры $\delta_{\alpha\beta}$ и $e_{\alpha\beta\gamma}$ являются инвариантными тензорами. Вычислить свертки
а) $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\mu}\delta_{\mu\alpha}$;
б) $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma}$, $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma}$, $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma}$;
покоординатно проверить, что $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ эквивалентно $c_\alpha =$
$= e_{\alpha\beta\gamma}a_\beta b_\gamma$.

Доказательство для символа Кронекера

□

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Условие инвар. тензора $2^{\text{го}}$ ранга:

$x'_\alpha = L_{\alpha\mu}x_\mu$ - вращ. коорд

Комп. тензора $\delta_{\alpha\beta}$ трансформ как $\delta'_{\alpha\beta} = L_{\alpha\mu}L_{\beta\nu}\delta_{\mu\nu}$,

где L - орт. матр ($L^T L = E$)

Применим к $\delta_{\alpha\beta}$: $\delta'_{\alpha\beta} = L_{\alpha\mu}L_{\beta\nu}\delta_{\mu\nu}$

$\delta_{\mu\nu} = 1$ при $\mu = \nu$, иначе $\delta_{\mu\nu} = 0$, получаем

$$\delta'_{\alpha\beta} = \sum_{\mu} L_{\alpha\mu} L_{\beta\mu}$$

Для ортог. матр. справедливо $L_{\alpha\mu} L_{\beta\mu} = \delta_{\alpha\beta}$

$\delta'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ для $\forall$ вращ. $\Rightarrow$ $\delta_{\alpha\beta}$ - инвар. тензор ■

Доказательство инвариантности тензора Леви-Чивиты $e_{\alpha\beta\gamma}$

□

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1, & \text{для чётных перестановок } 123 \\ -1, & \text{для нечётных перестановок } 123 \\ 0, & \text{если два индекса равны} \end{cases}$$

Для ортогональной матрицы вып-ся $\det L = \pm 1$, для правильного вращения (без отражений) $\det L = +1$

Из линала знаем, что $L_{\alpha\mu} L_{\beta\nu} L_{\gamma\lambda} e_{\mu\nu\lambda} = \det L \cdot e_{\alpha\beta\gamma}$,

т.е. $e'_{\alpha\beta\gamma} = \det L \cdot e_{\alpha\beta\gamma} = e_{\alpha\beta\gamma}$, т.е. компоненты тензора Леви-Чивиты не изм. при вращ. коорд, следовательно $e_{\alpha\beta\gamma}$ - инвариант третьего ранга ■

Вычислим свёртки:

а) $C = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{\gamma\mu} \delta_{\mu\alpha}$

$\delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}$, аналогично с остальными

$\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\gamma\mu} = \delta_{\alpha\mu}$

$\delta_{\alpha\mu} \delta_{\mu\alpha} = \delta_{\alpha\alpha}$

$$C = \delta_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} \delta_{\alpha\alpha} = 3$$

$$\boxed{\delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{\gamma\mu} \delta_{\mu\alpha} = 3}$$

б) • $e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\nu\gamma} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\gamma} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\gamma} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\gamma} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\gamma} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & 3 \end{pmatrix} =$

$= \delta_{\gamma\mu}(\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\nu}) - \delta_{\gamma\nu}(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu}) + 3(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}) =$

$= \delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} + 3\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - 3\delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}$

- $e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\beta\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\beta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\mu} = 3\delta_{\alpha\mu} - \delta_{\alpha\mu} = 2\delta_{\alpha\mu}$

- $e_{\alpha\beta\gamma} \cdot e_{\alpha\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\alpha} = 6$

Покоординатно проверим, что $\bar{c} = [\bar{a} \times \bar{b}]$ экв. $c_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$

$$\begin{cases} c_1 = \underbrace{e_{123}}_{1} a_2 b_3 + \underbrace{e_{132}}_{-1} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases}$$

$$\bar{c} = [\bar{a} \times \bar{b}] \iff \begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases}$$

Действ. экв.

5. Раскрыть в тензорных обозначениях выражения:
$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\operatorname{rot}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $\operatorname{rot}(f\mathbf{A})$, $\operatorname{div}(f\mathbf{A})$, $\operatorname{div}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.
Вычислить: а) $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega},\mathbf{r}]$, $\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{a}$ — постоянные векторы; б) $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{div}\mathbf{r}$, $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}(r)$, $\operatorname{div}\mathbf{a}(r)$, $(r \equiv |\mathbf{r}|)$.

1) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A} = [\nabla \times [\nabla \times \bar{A}]]$

$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A})_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta(e_{\gamma\mu\nu}\nabla_\mu A_\nu) = \underbrace{e_{\alpha\beta\gamma}e_{\gamma\mu\nu}}_{e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma}}\nabla_\beta\nabla_\mu A_\nu =$

$= (\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})\nabla_\beta\nabla_\mu A_\nu = \nabla_\alpha \underbrace{\nabla_\beta A_\beta}_{\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \operatorname{div}\bar{A}} - \underbrace{\nabla_\beta\nabla_\beta}_{\Delta} A_\alpha$

$\Rightarrow \operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A} = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{A} - \Delta\bar{A})_\alpha$

2) $(\operatorname{rot}[\bar{a},\bar{b}])_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta e_{\gamma\mu\nu} a_\mu b_\nu = e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma}\nabla_\beta a_\mu b_\nu =$

$= (\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})(a_\mu\nabla_\beta b_\nu + b_\nu\nabla_\beta a_\mu) =$

$$= a_\alpha \nabla_\beta b_\beta - a_\beta \nabla_\beta b_\alpha + b_\beta \nabla_\beta a_\alpha - b_\alpha \nabla_\beta a_\beta$$

$$(\mathrm{rot}\,[\bar{a}, \bar{b}])_\alpha = (\bar{a}\,\mathrm{div}\,\bar{b} - \bar{b}\,\mathrm{div}\,\bar{a} - (\bar{a}, \nabla)\bar{b} + (\bar{b}, \nabla)\bar{a})_\alpha$$

3) $(\mathrm{rot}(f\bar{A}))_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta (f A_\gamma) = e_{\alpha\beta\gamma}(A_\gamma \nabla_\beta f + f \nabla_\beta A_\gamma)$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}(f\bar{A}) = [\mathrm{grad}\, f \times \bar{A}] + f\,\mathrm{rot}\,\bar{A}$$

4) $\mathrm{div}(f\bar{A}) = \nabla_\alpha (f A_\alpha) = f \nabla_\alpha A_\alpha + A_\alpha \nabla_\alpha f = f\,\mathrm{div}\,\bar{A} + (\mathrm{grad}\, f, \bar{A})$

5) $\mathrm{div}[\bar{a} \times \bar{b}] = \nabla_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma = b_\gamma e_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha a_\beta + a_\beta e_{\alpha\beta\gamma} \nabla_\alpha b_\gamma =$

$$= b_\gamma e_{\gamma\alpha\beta} \nabla_\alpha a_\beta - a_\beta e_{\beta\alpha\gamma} \nabla_\alpha b_\gamma = (\bar{b}, \mathrm{rot}\,\bar{a}) - (\bar{a}, \mathrm{rot}\,\bar{b})$$

6) $(\mathrm{grad}(\bar{a} \cdot \bar{b}))_\alpha = \nabla_\alpha a_\beta b_\beta = a_\beta \nabla_\alpha b_\beta + b_\beta \nabla_\alpha a_\beta =$

$$= a_\beta \underbrace{(\nabla_\beta b_\alpha + \nabla_\alpha b_\beta - \nabla_\beta b_\alpha)}_{(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})\nabla_\mu b_\nu} + b_\beta (\nabla_\beta a_\alpha + \nabla_\alpha a_\beta - \nabla_\beta a_\alpha) \ominus$$

$$\ominus\; e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\mu\nu} \nabla_\mu b_\nu$$

$$(\mathrm{grad}(\bar{a}, \bar{b}))_\alpha = a_\beta (\nabla_\beta b_\alpha + e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\mu\nu} \nabla_\mu b_\nu) + b_\beta (\nabla_\beta a_\alpha + e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\mu\nu} \nabla_\mu a_\nu) =$$

$$= a_\beta \nabla_\beta b_\alpha + e_{\alpha\beta\gamma} a_\beta e_{\gamma\mu\nu} \nabla_\mu b_\nu + b_\beta \nabla_\beta a_\alpha + e_{\alpha\beta\gamma} b_\beta e_{\gamma\mu\nu} \nabla_\mu b_\nu =$$

$$= (\bar{a}, \bar{\nabla})\bar{b} + (\bar{b}, \bar{\nabla})\bar{a} + [\bar{a} \times \mathrm{rot}\,\bar{b}] + [\bar{b} \times \mathrm{rot}\,\bar{a}]$$

a) $(\mathrm{rot}\,[\bar{\omega}, \bar{r}])_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x} e_{\gamma\mu\nu} \omega_\mu x_\nu =$

$$= e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\mu\nu} \omega_\mu \frac{\partial x_\nu}{\partial x_\beta} = e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\mu\nu} \omega_\mu \delta_{\nu\beta} = \overbrace{e_{\alpha\beta\gamma} e_{\gamma\mu\beta}}^{2\delta_{\alpha\mu}} \omega_\mu =$$

$$= 2\delta_{\alpha\mu} \omega_\mu = 2\omega_\alpha$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}[\bar{\omega}, \bar{r}] = 2\bar{\omega}$$

$\bullet\ (\mathrm{grad}(\bar a, \bar r))_\alpha = \partial_\alpha(a_\beta x_\beta) = a_\beta \dfrac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} = a_\beta \delta_{\beta\alpha} = a_\alpha$

$\Rightarrow\ \mathrm{grad}(\bar a, \bar r) = \bar a$

б) $\bullet\ (\mathrm{grad}\, r)_\alpha = \dfrac{\partial r}{\partial x_\alpha}$

$x_\alpha x_\alpha = r^2$

$2 x_\alpha dx_\alpha = 2r\,dr$

$$\boxed{\frac{\partial r}{\partial x_\alpha} = \frac{x_\alpha}{r}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(x_\beta x_\beta)^{1/2} = \cancel{2} x_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \frac{1}{\cancel{2}\underbrace{(x_\beta x_\beta)^{1/2}}_{r}} = x_\beta \delta_{\beta\alpha} \frac{1}{r} = \frac{x_\alpha}{r}$$

$\mathrm{grad}\, r = \vec n = \dfrac{\bar r}{r}$

$\bullet\ \mathrm{div}\, \bar r = 3$, это как свёртка $\dfrac{\partial x_\alpha}{\partial x_\alpha}$

$\bullet\ ((\bar a \cdot \bar\nabla)\bar r)_\alpha = a_\beta \nabla_\beta x_\alpha = a_\beta \dfrac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} = a_\beta \delta_{\alpha\beta} = a_\alpha$

$\Rightarrow\ (\bar a, \bar\nabla)\bar r = \bar a$

$\bullet\ (\mathrm{grad}\, f(r))_\alpha = \dfrac{\partial f(r)}{\partial x_\alpha} = \dfrac{\partial f(r)}{\partial r} \dfrac{\partial r}{\partial x_\alpha} = n_\alpha f'(r)$

$\Rightarrow\ \bar\nabla f(r) = \bar n f'(r) = \dfrac{\bar r}{r} f'(r)$

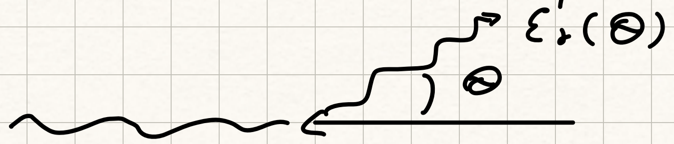
$\bullet\ (\mathrm{rot}\, \bar a(r))_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} \dfrac{\partial}{\partial x_\beta} a_\gamma(r) = e_{\alpha\beta\gamma} \dfrac{\partial a_\gamma(r)}{\partial r} \dfrac{\partial r}{\partial x_\beta} =$

$= [\bar n \times \bar a'(r)]_\alpha$

$\bullet\ \mathrm{div}\, \bar a(r) = \nabla_\alpha a_\alpha(r) = \dfrac{\partial a_\alpha(r)}{\partial x_\alpha} = \dfrac{\partial a_\alpha(r)}{\partial r} \dfrac{\partial r}{\partial x_\alpha} = n_\alpha a_\alpha'(r) =$

$= (\bar n, \bar a'(r))$

6. Для получения γ-квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $\mathcal{E} = 200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon = 2$ эВ. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния.



$\mathcal{E}_\gamma = 2$ эВ $\qquad \mathcal{E}_e = 200$ ГэВ

$c = 1$ — пусть так

$p_e^i = (\mathcal{E}, \bar{p}_e) \qquad p_e'^i = (\mathcal{E}', \bar{p}_e')$

$p_\gamma^i = (\mathcal{E}, \bar{p}_\gamma) \qquad p_\gamma'^i = (\mathcal{E}', \bar{p}_\gamma')$

$$p_e^i + p_\gamma^i = p_e'^i + p_\gamma'^i$$

$$p_e'^i = p_e^i + p_\gamma^i - p_\gamma'^i$$

$$p_e'^i p'_{ie} = m^2c^2 = (p_e^i + p_\gamma^i - p_\gamma'^i)(p_{ie} + p_{i\gamma} - p'_{i\gamma}) =$$

$$= \underbrace{p_e^i p_{ie}}_{m^2c^2} + \underbrace{p_\gamma^i p_{i\gamma}}_{0} + \underbrace{p_\gamma'^i p_{i\gamma}}_{0} + 2p_e^i p_{i\gamma} - 2p_e^i p'_{i\gamma} - 2p_\gamma^i p'_{i\gamma}$$

$$p_e^i p_{i\gamma} - p_e^i p'_{i\gamma} - p_\gamma^i p'_{i\gamma} = 0$$

$$(\mathcal{E}_e \mathcal{E}_\gamma - \vec{p}_e \vec{p}_\gamma) - (\mathcal{E}_e \mathcal{E}'_\gamma - \vec{p}_e \vec{p}'_\gamma) - (\vec{p}_\gamma \mathcal{E}'_\gamma - \vec{p}_\gamma \vec{p}'_\gamma) = 0$$

$$\left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2 \Rightarrow \mathcal{E}^2 - p^2 = m^2$$

$$\vec{p}_e \vec{p}_\gamma = -|\vec{p}_e||\vec{p}_\gamma| = -\mathcal{E}_\gamma \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2}$$

$$\vec{p}_e \vec{p}'_\gamma = -\mathcal{E}'_\gamma \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2}\cos\theta$$

$$\vec{p}_\gamma \vec{p}'_\gamma = \mathcal{E}_\gamma \mathcal{E}'_\gamma \cos\theta$$

$$\mathcal{E}_\gamma\left(\mathcal{E}_e + \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2}\right) - \mathcal{E}'_\gamma\left(\mathcal{E}_e + \cos\theta\sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2}\right) -$$

$$-\mathcal{E}_\gamma \mathcal{E}'_\gamma (1 - \cos\theta) = 0$$

$$\mathcal{E}'_\gamma = \frac{\mathcal{E}_\gamma\left(\mathcal{E}_e + \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2}\right)}{\mathcal{E}_e + \cos\Theta\sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2} + \mathcal{E}_\gamma(1-\cos\Theta)}$$

$\Theta = \pi$, $\mathcal{E}'_\gamma = \mathcal{E}_e$ (при рассеянии назад)

$$\mathcal{E}'_\gamma(\pi) = \frac{\mathcal{E}_\gamma\left(\mathcal{E}_e + \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - mc^2}\right)}{\mathcal{E}_e - \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2} + 2\mathcal{E}_\gamma} \approx \frac{\mathcal{E}_\gamma \cdot 2\mathcal{E}_e}{2\mathcal{E}_\gamma} \approx 173 \text{ ГэВ}$$

7. В ускорителе на встречных пучках идет реакция

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^- .$$

Зная энергию $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ каждого из пучков e^+ и e^- соответственно, найти энергию и импульсы μ^+ и μ^-. Каков энергетический порог этой реакции? Найти пороговое условие в общем случае $\mathcal{E}^+ \neq \mathcal{E}^-$. Сравнить порог реакции в частном случае $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^-$ с порогом в случае, когда ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$$

- Зная $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$ найти эн-ию и импульсы μ^+ и μ^-
  - Найти порог в общ. случае $\mathcal{E}^+ \neq \mathcal{E}^-$
  - Сравнить порог реакции в частн. случае $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}^-$

с порогом, когда эл-ны неподвиж

$\mathcal{E}$, $P \to Pc$, $m \to mc^2$ (размерности)

$S = (\mathcal{E}_{e^+} + \mathcal{E}_{e^-})^2 - (P_{e^+} + P_{e^-})^2 = (M_{\mu^+} + M_{\mu^-})^2$ — усл. порога

1) Найти эн. и имп.

$P_+^\mu = (\mathcal{E}^+, 0, 0, P_+)$, $P_+ = \sqrt{(\mathcal{E}^+)^2 - m_e^2}$

$P_-^\mu = (\mathcal{E}^-, 0, 0, -P_-)$, $P_- = \sqrt{(\mathcal{E}^-)^2 - m_e^2}$

Полный 4-импульс $P = (\mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^-, 0, 0, P_+ - P_-)$

$S = (\mathcal{E}^+)^2 + (\mathcal{E}^-)^2 + 2\mathcal{E}^+\mathcal{E}^- - (P_+^2 + P_-^2 - 2P_+P_-) =$

$= 2\mathcal{E}^+\mathcal{E}^- + 2m_e^2 + 2P_+P_-$

Эн. и имп. в ЦМ

$$E^*_\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}, \quad p^*_\mu = \sqrt{\frac{s}{4} - m_\mu^2}$$

Перех. в лаб. СО $\quad V_{cm} = \dfrac{P_+ - P_-}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}, \quad \gamma_{cm} = \dfrac{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}{\sqrt{s}}$

μ^+ им. поляр. угол Θ^* отн. оси z (μ^+ и μ^- разл. в прот. напр. в ЦМ)

$$P^*_{\mu^+} = (E^*, p^*\sin\theta^*, 0, p^*\cos\theta^*)$$

$$E_{\mu^+} = \gamma_{cm}(E^* + V_{cm}\, p^* \cos\Theta^*)$$

$$\begin{cases} P^x_{\mu^+} = p^*\sin\Theta^* \\ P^y_{\mu^+} = 0 \\ P^z_{\mu^+} = \gamma_{cm}(p^*\cos\Theta^* + V_{cm} E^*) \end{cases}$$

$$P^*_{\mu^-} = (E^*, -p^*\sin\theta^*, 0, -p\cos\theta^*)$$

$$E_{\mu^-} = \gamma_{cm}(E^* - V_{cm}\, p^* \cos\Theta^*)$$

$$\begin{cases} P^x_{\mu^-} = -p^*\sin\theta^* \\ P^y_{\mu^-} = 0 \\ P^z_{\mu^-} = \gamma_{cm}(-p^*\cos\Theta^* + V_{cm} E^*) \end{cases}$$

2) $\varepsilon^+ \neq \varepsilon^-$

$$s = 4m_\mu^2 \Rightarrow 2\varepsilon^+\varepsilon^- + 2m_e^2 + 2P_+P_- = 4m_\mu^2$$

3) $\varepsilon^+ = \varepsilon^-$

$$\underset{e^-}{\bullet}\xrightarrow[p]{\varepsilon} \qquad \xleftarrow[-p]{\varepsilon}\underset{e^+}{\bullet}$$

$$4\varepsilon^2 = (m_{\mu^+} + m_{\mu^-})^2 = 4m_\mu^2$$

$$\varepsilon = m_\mu$$

4) эл. покоится

$$(\varepsilon + m_e)^2 - \left(\sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2}\right)^2 = 4m_\mu^2$$

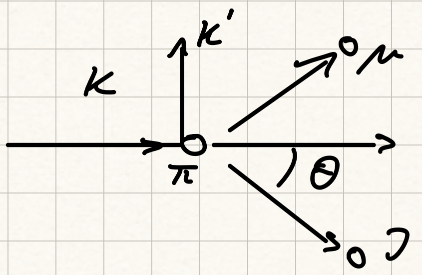
$$2\varepsilon m_\varepsilon + 2m_e^2 = 4m_\mu^2$$

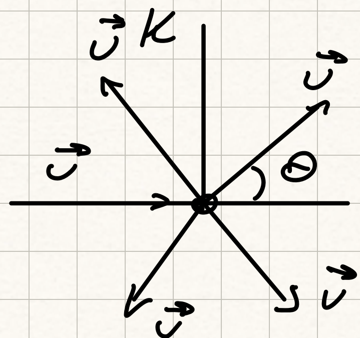
$$\varepsilon = \frac{2m_\mu^2 - m_e^2}{m_e} = \frac{2m_\mu^2}{m_e} \gg m_\mu$$ (гораздо больше)

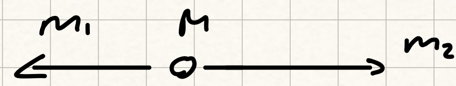
8. Для нейтрино, образующихся при распаде π-мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π-мезона $\approx$ 140 МэВ, масса μ-мезона $\approx$ 105 МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя π-мезона распад $\pi \to \mu + \nu$ происходит изотропно. Построить график углового распределения, соответствующий параметрам задачи.

$m_\pi = 140$ МэВ, $m_\mu = 105$ МэВ, $m_\nu = 0$

$\pi \to \mu + \nu$







$$\varepsilon'_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c^2$$

$$dN \sim \underbrace{\frac{d\Omega}{4\pi}} = \overbrace{d\varphi'}^{2\pi} \sin\theta' d\theta'$$

$$dN = \frac{1}{2} |d\cos\theta'|$$

$$\varepsilon_\nu = \frac{\varepsilon'_\nu + v p'_{x\nu}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\varepsilon'_\nu + v \frac{\varepsilon'_\nu}{c} \cos\theta'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \varepsilon'_\nu \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\theta'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

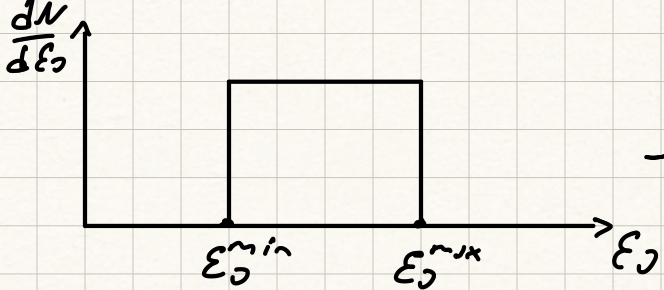
max эн: $\varepsilon_\nu^{max} = \varepsilon'_\nu \dfrac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

min эн: $\varepsilon_\nu^{min} = \varepsilon'_\nu \dfrac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$\cos\theta' = \frac{c}{v}\left[\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon'_\nu}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1\right]$$

$$dN = \frac{c}{2v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{d\varepsilon_\nu}{\varepsilon'_\nu} \to \frac{dN}{d\varepsilon_\nu} = \frac{c}{2v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{\varepsilon'_\nu}$$ – энерг. спектр

ср. эн-ия: $\bar{\varepsilon}_\nu = \dfrac{\varepsilon'_\nu}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$



– РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОМЕРНОЕ
(ГРАФИК ЭН. СПЕКТРА)

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - v/c}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$

$$d\cos\theta' = \frac{d\cos\theta\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right) - \frac{v}{c}d\cos\theta\left(\cos\theta - \frac{v}{c}\right)}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^2} =$$

$$= d\cos\theta\,\frac{1 - v^2/c^2}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}$$

$$dN = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^2}\frac{d\Omega}{4\pi} \approx \frac{\frac{1}{\gamma^2}}{\left(\frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2}\right)^2}\frac{d\Omega}{4\pi} \approx \frac{4\gamma^2}{(1+(\gamma\theta)^2)^2},$$

ГДЕ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{v}{c}\right)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\left(1-\frac{v}{c}\right)}}$

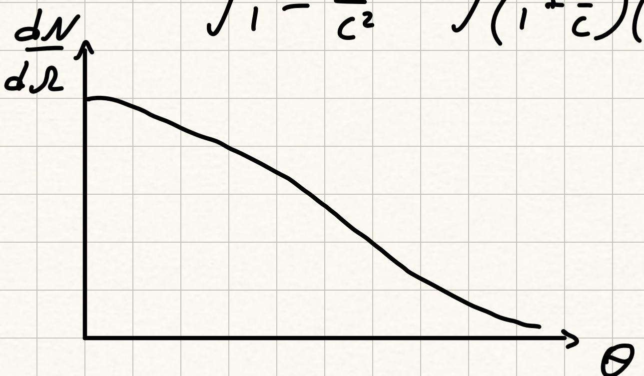


ГРАФИК УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

10. Показать, что однородное магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное по оси z, может быть описано векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = \{0, Hx, 0\}\,.$$

Градиентным преобразованием перейти к потенциалу $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}, \mathbf{r}]$.

$A^i(\varphi, \bar{A})$

$$\bar{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi$$

$$\bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A}$$

Запишем градиентное (комбинированное) преобразование

$$\bar{A}' = \bar{A} + \operatorname{grad} f$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \qquad f = f(\bar{r}, t)$$

$$A'^i = A^i - \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix} \qquad \bar{H} = \operatorname{rot} \bar{A}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ Hx \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rot} \bar{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\bar{H}$ может быть описано вторым потенциалом $\bar{A} = \{0, Hx, 0\}$

С помощью градиентного преобразования перейдём к

потенциалу $\bar{A}' = \frac{1}{2}[\bar{H} \times \bar{r}]$

$$\bar{A}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -Hy \\ Hx \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}' - \bar{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -Hy \\ Hx \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ Hx \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} Hy \\ Hx \\ 0 \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix}$$

Для сущ. такой f необх, чтобы смешанные произв совпадали:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}H \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{2}H$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

$\Rightarrow$ такая f сущ-ет

$$f = -\frac{1}{2}Hxy + \text{const}$$

11. Прямыми вычислениями доказать, что векторный потенциал

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\int\limits_0^1 \xi\, d\xi\, [\mathbf{r},\, \mathbf{H}(\xi\,\mathbf{r})]$$

соответствует магнитному полю $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (при условии $\operatorname{div}\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$).

Док-ть, что $\bar{H}(\bar{r}) = \operatorname{rot}\bar{A}(\bar{r})$, при $\operatorname{div}\bar{H}(\bar{r}) = 0$

и векторный потенциал $\bar{A}(\bar{r}) = -\int\limits_0^1 \xi\, d\xi\, [\bar{r} \times \bar{H}(\xi\bar{r})]$

$$\nabla \times \bar{A}(\bar{r}) = -\int\limits_0^1 \xi\, d\xi\, \nabla \times [\bar{r} \times \bar{H}(\xi\bar{r})]$$

$$\nabla \times (\bar{a} \times \bar{b}) = (\bar{b}\cdot\nabla)\bar{a} - (\bar{a}\cdot\nabla)\bar{b} + \bar{a}(\nabla\cdot\bar{b}) - \bar{b}(\nabla\cdot\bar{a})$$

$\bar{a} = \bar{r}$, $\bar{b} = \bar{H}(\xi\bar{r})$

- $$(\bar{H}\cdot\nabla)\bar{r} = \left((H_1, H_2, H_3)\cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \bar{H}$$

- $(\bar{r}\cdot\nabla)\bar{H}(\xi\bar{r})$

Пусть $\xi\bar{r} = \bar{u} = (\xi x_1, \xi x_2, \xi x_3)$

произв по x_j

$$\frac{\partial H_i(u)}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial H_i}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \xi\, \frac{\partial H_i}{\partial u_j}$$

$$(r\cdot\nabla) H_i(u) = \sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} x_j\, \xi \frac{\partial H_i}{\partial u_j} = \xi \sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial H_i}{\partial u_j}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial H_i}{\partial u_j} = (\bar{r}\cdot\nabla_u) H_i = \frac{d}{d\xi} H_i(\xi\bar{r})$$

$$(\bar{r}\cdot\nabla)\bar{H}(\xi\bar{r}) = \xi\frac{d}{d\xi}\bar{H}(\xi\bar{r})$$

- $\bar{r}(\nabla\cdot\bar{H}(\xi\bar{r})) = 0$, по усл

- $\bar{H}(\xi\bar{r})(\nabla\cdot\bar{r}) = 3\bar{H}(\xi\bar{r})$

$$\nabla\times[\bar r\times\bar H(\xi\bar r)]=\bar H(\xi\bar r)-\xi\frac{d}{d\xi}\bar H(\xi\bar r)+0-3\bar H(\xi\bar r)=$$
$$=-2\bar H(\xi\bar r)-\xi\frac{d}{d\xi}\bar H(\xi\bar r)$$

Подставим $\nabla\times\bar A(\bar r)=+\int_0^1\xi d\xi\left[+2\bar H(\xi\bar r)+\xi\frac{d}{d\xi}\bar H(\xi\bar r)\right]$

$$\int_0^1\xi^2\frac{d}{d\xi}\bar H(\xi\bar r)d\xi=\left/\begin{matrix}u=\xi^2 & dv=\frac{d}{d\xi}\bar H(\xi\bar r)d\xi\\ du=2\xi d\xi & v=\bar H(\xi\bar r)\end{matrix}\right/=$$

$$=\xi^2\bar H(\xi\bar r)\Big|_0^1-\int_0^1 2\xi\bar H(\xi\bar r)d\xi=\bar H(\bar r)-2\int_0^1\xi\bar H(\xi\bar r)d\xi$$

$$\nabla\times\bar A(\bar r)=\int_0^1 2\xi\bar H(\xi\bar r)d\xi+\int_0^1\xi^2\frac{d}{d\xi}\bar H(\xi\bar r)d\xi=$$

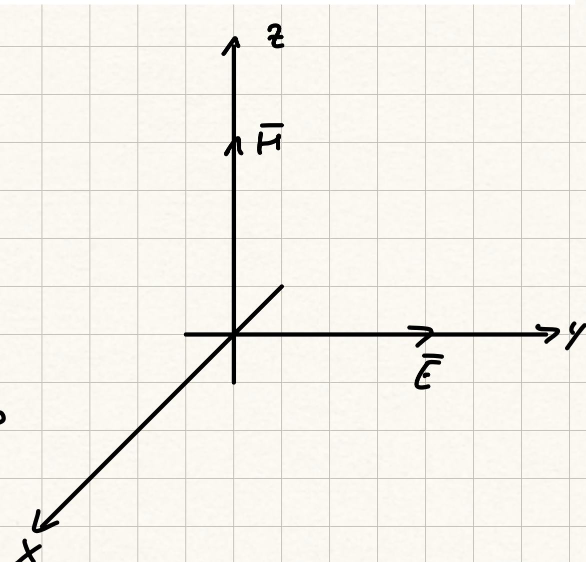
$$=\int_0^1 2\xi\bar H(\xi\bar r)d\xi+\bar H(\bar r)-2\int_0^1\xi\bar H(\xi\bar r)d\xi=\bar H(\bar r)$$

$$\Rightarrow\ \nabla\times\bar A(\bar r)=\bar H(\bar r)$$

12. Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в перпендикулярных однородных и постоянных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В случае $|\mathbf{E}|<|\mathbf{H}|$ определить скорость дрейфа Используя графический редактор, построить графики траекторий движения $\mathbf{r}(t)$ частицы в случаях $E=H/2$, $E=H$ и $E=2H$ при условии, что в начале движения частица покоилась в начале координат.

$\bar E\perp\bar H$

Реш. в лаб СО.



$$mc\frac{du^i}{dS}=\frac{e}{c}F^{ij}u_j$$

$u^i(S)=?\quad u^i(0)=\dfrac{p^i(0)}{mc}$, $\bar E_0$, $\bar p_0$

$$mc\frac{du^i}{dS}=\frac{e}{c}F^i_j u^j$$

$$\dot u^i=\frac{e}{mc^2}F^i_j u^j$$

$$\dot u=Au$$

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow F^i_j = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ E & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{e}{mc^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & H & 0 \\ E & -H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \frac{eE}{mc^2} & 0 \\ 0 & -\lambda & \frac{eH}{mc^2} & 0 \\ \frac{eE}{mc^2} & -\frac{eH}{mc^2} & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\dot{u}^3 = 0 \qquad u^3 = \frac{p_z(0)}{mc} \qquad u^3 = \frac{dz}{ds} = \frac{p_z(0)}{mc}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{p_z(0)}{mc} s + \underbrace{\frac{p_z(0)}{mc} s(0)}_{z_0}$$

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda\left(\lambda^2 + \left(\frac{eH}{mc^2}\right)^2\right) + \frac{eE}{mc^2}\left(\lambda \frac{eE}{mc^2}\right) = \lambda\left(\lambda^2 + \left(\frac{e}{mc^2}\right)^2 (E^2 - H^2)\right)$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_{2,3} = \pm \frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2 - H^2}$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{eE}{mc^2} \\ 0 & 0 & \frac{eH}{mc^2} \\ \frac{eE}{mc^2} & -\frac{eH}{mc^2} & 0 \end{pmatrix} \qquad h_1 = \begin{pmatrix} H \\ E \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2 - H^2} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2 - H^2} & 0 & \frac{eE}{mc^2} \\ \frac{eE}{mc^2} & -\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2 - H^2} & \frac{eH}{mc^2} \\ \frac{eE}{mc^2} & -\frac{eH}{mc^2} & -\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2 - H^2} \end{pmatrix} \qquad h_2 = \begin{pmatrix} E \\ H \\ \sqrt{E^2 - H^2} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = -\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2 - H^2} \qquad \begin{pmatrix} \frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2 - H^2} & 0 & \frac{eE}{mc^2} \\ 0 & \frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2 - H^2} & \frac{eH}{mc^2} \\ \frac{eE}{mc^2} & -\frac{eH}{mc^2} & -\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2 - H^2} \end{pmatrix} \qquad h_2 = \begin{pmatrix} -E \\ -H \\ \sqrt{E^2 - H^2} \end{pmatrix}$$

$$u(s) = c_1 \begin{pmatrix} H \\ E \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2-H^2}\,s} \begin{pmatrix} E \\ H \\ \sqrt{E^2-H^2} \end{pmatrix} + c_3 e^{-\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2-H^2}\,s} \begin{pmatrix} -E \\ -H \\ \sqrt{E^2-H^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathcal{E}(0)}{mc^2} \\ \frac{P_x(0)}{mc} \\ \frac{P_3(0)}{mc} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} H \\ E \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} E \\ H \\ \sqrt{E^2-H^2} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -E \\ -H \\ \sqrt{E^2-H^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathcal{E}(0)}{mc^2} = c_1 H + c_2 E - c_3 E \\ \frac{P_x(0)}{mc} = c_1 E + c_2 H - c_3 H \\ \frac{P_3(0)}{mc} = c_2\sqrt{E^2-H^2} + c_3\sqrt{E^2-H^2} \end{cases}$$

$$c_3 + c_2 = \frac{P_3(0)}{mc\sqrt{E^2-H^2}}$$

$$\frac{\mathcal{E}(0)E}{mc^2} - \frac{P_x(0)H}{mc} = c_2(E^2-H^2) - c_3(E^2-H^2)$$

$$c_2 - c_3 = \frac{\frac{\mathcal{E}(0)E}{c} - P_x(0)H}{mc(E^2-H^2)}$$

$$c_2 = \frac{1}{2mc}\left(\frac{P_3(0)}{\sqrt{E^2-H^2}} + \frac{\frac{\mathcal{E}(0)E}{c} - P_x(0)H}{E^2-H^2}\right) = \frac{1}{2}(A+B)$$

$$c_3 = \frac{1}{2mc}\left(\frac{P_3(0)}{\sqrt{E^2-H^2}} - \frac{\frac{\mathcal{E}(0)E}{c} - P_x(0)H}{E^2-H^2}\right) = \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\frac{\mathcal{E}(0)H}{mc^2} - \frac{P_x(0)E}{mc} = c_1(H^2-E^2) \Rightarrow c_1 = \frac{1}{E^2-H^2}\left(\frac{P_x(0)E}{mc} - \frac{\mathcal{E}(0)H}{mc^2}\right)$$

$$u(s) = c_1 \begin{pmatrix} H \\ E \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2-H^2}\,s} \begin{pmatrix} E \\ H \\ \sqrt{E^2-H^2} \end{pmatrix} + c_3 e^{-\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2-H^2}\,s} \begin{pmatrix} -E \\ -H \\ \sqrt{E^2-H^2} \end{pmatrix}$$

$\underline{E > H}$

$$\frac{e}{mc}\sqrt{E^2-H^2} = \Omega$$

$$u = \frac{1}{E^2-H^2}\left(\frac{p_x(0)E}{mc} - \frac{\varepsilon(0)H}{mc^2}\right)\begin{pmatrix}H\\E\\0\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}E\operatorname{sh}\Omega s\\H\operatorname{sh}\Omega s\\\sqrt{E^2-H^2}\operatorname{ch}\Omega s\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}E\operatorname{ch}\Omega s\\H\operatorname{ch}\Omega s\\\sqrt{E^2-H^2}\operatorname{sh}\Omega s\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}ct\\x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{E^2-H^2}\left(\frac{p_x(0)E}{mc} - \frac{\varepsilon(0)H}{mc^2}\right)\begin{pmatrix}H\\E\\0\end{pmatrix} + \frac{A}{\Omega}\begin{pmatrix}E\operatorname{sh}\Omega s\\H\operatorname{sh}\Omega s\\\sqrt{E^2-H^2}\operatorname{ch}\Omega s\end{pmatrix} + \frac{B}{\Omega}\begin{pmatrix}E\operatorname{ch}\Omega s\\H\operatorname{ch}\Omega s\\\sqrt{E^2-H^2}\operatorname{sh}\Omega s\end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix}t_0\\x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$E < H$

$$\frac{e}{mc}\sqrt{E^2-H^2} = i\frac{e}{mc}\sqrt{H^2-E^2} = i\Omega$$

$$u = \frac{1}{E^2-H^2}\left(\frac{p_x(0)E}{mc} - \frac{\varepsilon(0)H}{mc^2}\right)\begin{pmatrix}H\\E\\0\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}E\sin\Omega s\\H\sin\Omega s\\\sqrt{E^2-H^2}\cos\Omega s\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}E\cos\Omega s\\H\cos\Omega s\\\sqrt{E^2-H^2}\sin\Omega s\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}ct\\x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{E^2-H^2}\left(\frac{p_x(0)E}{mc} - \frac{\varepsilon(0)H}{mc^2}\right)\begin{pmatrix}H\\E\\0\end{pmatrix} + \frac{A}{\Omega}\begin{pmatrix}E\sin\Omega s\\H\sin\Omega s\\\sqrt{E^2-H^2}\cos\Omega s\end{pmatrix} + \frac{B}{\Omega}\begin{pmatrix}E\cos\Omega s\\H\cos\Omega s\\\sqrt{E^2-H^2}\sin\Omega s\end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix}t_0\\x_0\\y_0\end{pmatrix}$$

$H^2 - E^2 = inv$

$(\bar{E}\cdot\bar{H}) = 0$ В НАШ. СЛУЧАЕ

$E < H \Rightarrow \exists$ СО $: E' = 0 \quad H^2 - E^2 = H'^2 \Rightarrow H' = \sqrt{H^2-E^2}$

$E = H$

$$ct = \frac{cp_{x_0}E - \varepsilon_0 H}{mc^2(E^2-H^2)}Hs + \frac{E - p_{x_0}cH}{e(E^2-H^2)^{\frac{3}{2}}}E\operatorname{sh}\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2-H^2}\,s + \frac{p_{y_0}c}{e(E^2-H^2)}E\cdot$$

$$\cdot\left(\operatorname{ch}\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2-H^2}\,s - 1\right) \underset{E\to H}{=} \frac{\varepsilon_0}{mc^2}s + H\frac{p_{y_0}e}{2m^2c^3}s^2 + H^2e^2\frac{\varepsilon_0 - p_{x_0}c}{6m^3c^6}s^3$$

$$x = \frac{cp_{x_0} - \varepsilon_0 H}{mc^2(E^2-H^2)}Es + \frac{\varepsilon_0 E - p_{x_0}cH}{e(E^2-H^2)^{3/2}}H\operatorname{sh}\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2-H^2}\,s +$$

$$+\frac{p_{y_0}c}{e(E^2-H^2)}H\left(\operatorname{ch}\frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2-H^2}\,s - 1\right) \underset{E\to H}{=} \frac{p_{x_0}}{mc}s + \frac{p_{y_0}e}{2m^2cH}Hs^2 + \frac{H^2c^2(\varepsilon_0 - p_{x_0})}{6m^3c^6}s^3$$

$$y = \frac{\varepsilon_0 E - p_{x0} c H}{e(E^2 - H^2)}\left(ch\, \frac{e}{mc^2}\sqrt{E^2 - H^2}\, s - 1\right) + \frac{p_{y0} c}{e\sqrt{E^2 - H^2}}\, sh\, \frac{e}{mc}\sqrt{E^2 - H^2} \underset{E \to H}{=}$$

$$= \frac{p_{y0}}{mc} s + eH\, \frac{\varepsilon_0 - p_{x0} c}{2 m^2 c} s^2$$

$$z = \frac{p_{z0}}{mc} s$$

Сист K' движ отн сист K $E' = 0$

$E'_y = \gamma(E_y - \beta H_z)$. Потребуем, чтобы $E'_y = 0$, тогда $\beta = \frac{E}{H} \Rightarrow \bar{v} = c\frac{E}{H}\bar{e}_x$

$\bar{E}_\parallel = \bar{E}'_\parallel \qquad \bar{H}_\parallel = \bar{H}'_\parallel$

$\bar{E}_\perp = \gamma\left(\bar{E}'_\perp - \frac{1}{c}[\bar{v} \times \bar{H}]\right) \qquad \bar{H}_\perp = \gamma\left(\bar{H}'_\perp + \frac{1}{c}[\bar{v} \times \bar{H}]\right)$

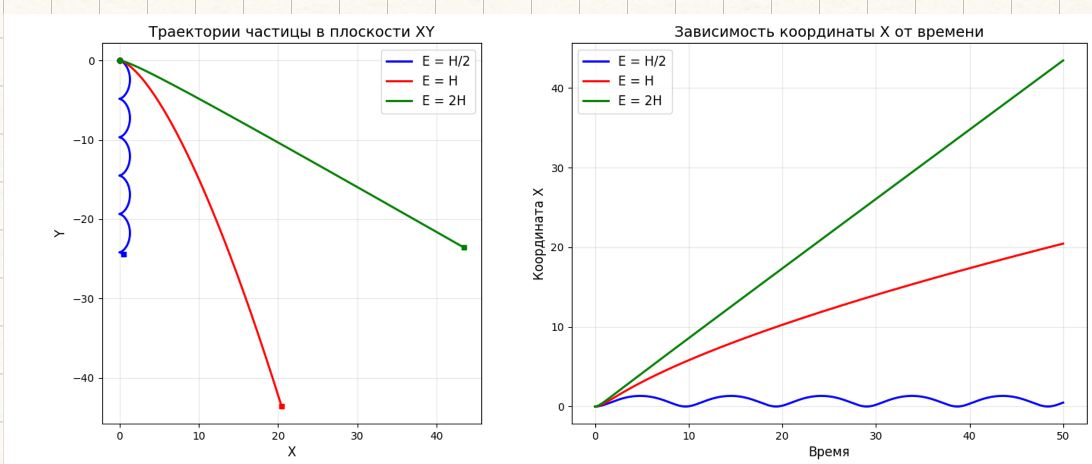
$\bar{E} = -\frac{1}{c}[\bar{v} \times \bar{H}]$

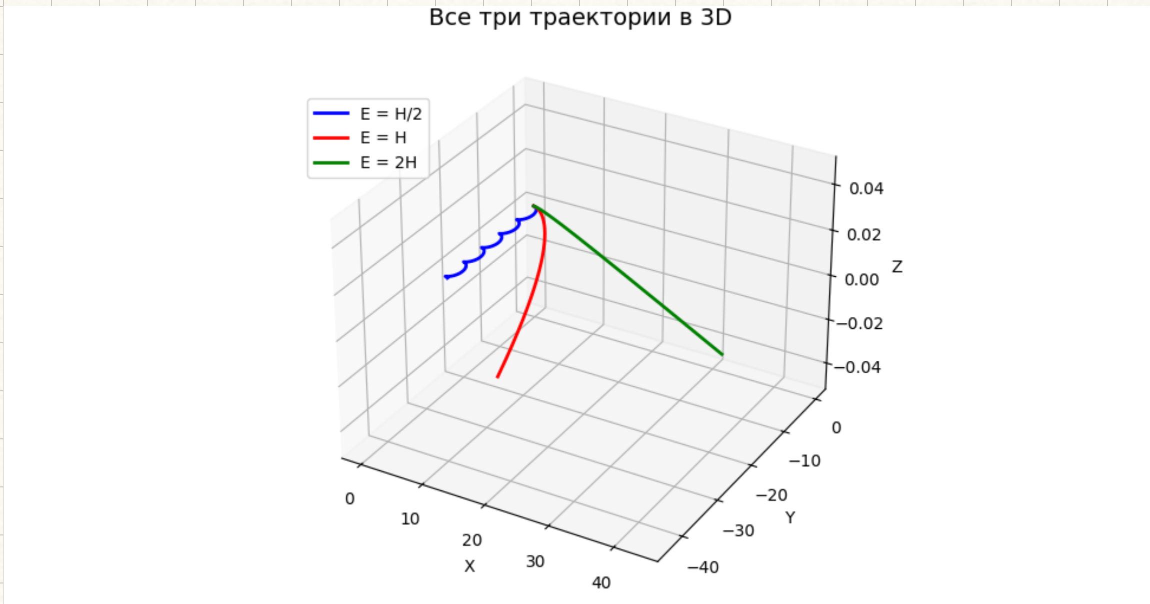
Скорость дрейфа $\bar{v} = c\frac{E}{H}\bar{e}_x$, т.к. в системе K' $E' = 0$, а $H' \neq 0$ в ней движ по окр

Движ по окр

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = eE + \frac{e}{c}[\bar{v} \times \bar{H}]$$

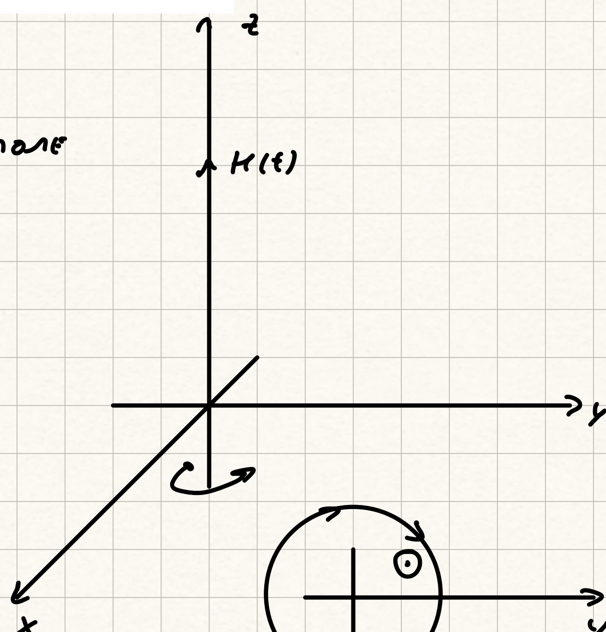
$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{e}{c}[\bar{v}_\perp \times \bar{H}] = \frac{e}{c}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ H \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{e}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x H \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \gamma m \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \gamma m \frac{dv_y}{dt} &= 0 \\ \gamma m \frac{dv_z}{dt} &= v_x H \end{aligned}$$





13. а) Частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Определить изменение энергии частицы за один оборот, если магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля). Доказать, что величина $p_\perp^2/H$ остается постоянной

(т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2. Получить формулу для адиабатического инварианта в случае, когда импульс частицы направлен произвольно.



$\left|\frac{\partial H}{\partial t}\right| \neq 0$ Индуцированное вихревое эл. поле

производит работу над частицей

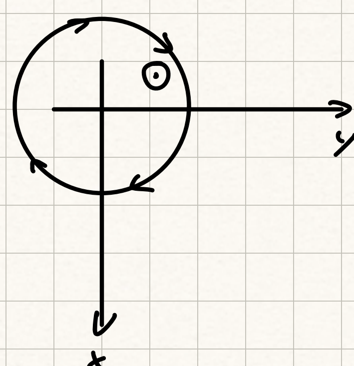
Вычислим изм. эн-ии за период:

$$\Delta \mathcal{E} \approx \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} T = \mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\cdot\frac{2\pi}{ceH} = \frac{\pi}{ec}\cdot\frac{1}{H}\cdot\frac{\partial \mathcal{E}^2}{\partial t} =$$

$$= \frac{\pi}{ec}\cdot\frac{1}{H}c^2\frac{\partial p_\perp^2}{\partial t}$$

$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + p_\perp^2c^2$

$p_\parallel = 0$



$$\Omega = \frac{ceH}{\mathcal{E}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi\mathcal{E}}{ceH}$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

$$\int \mathrm{rot}\,\bar{E}\,ds = \oint \bar{E}\,d\bar{l} = -\frac{1}{c}\int\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}ds = -\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Φ - поток через поверхность, натянутую на контур

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e(\bar{v}, \bar{E})$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{e}{c}[\bar{v} \times \bar{H}]$$

$$\Delta\mathcal{E} = e\int_0^T (\bar{v}, \bar{E})dt = -e\oint \bar{E}d\bar{l} = -eE \cdot 2\pi R = -eE \cdot 2\pi \frac{p_\perp^2}{eH} =$$

$$= e\frac{1}{c}\pi R^2 \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{e}{c}\pi\left(\frac{p_\perp c}{eH}\right)^2 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{e}{c}\pi\left(\frac{p_\perp \cdot c}{eH}\right)^2 \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\pi c}{eH}\frac{\partial p_\perp^2}{\partial t}$$

$$\frac{p_\perp^2}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial p_\perp^2}{\partial t}$$

$$\frac{1}{H} \cdot \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{p_\perp^2}\frac{\partial p_\perp^2}{\partial t}$$

$$d(\ln H) = d(\ln p_\perp^2)$$

$$d\ln\frac{p_\perp^2}{H} = 0$$

$$\frac{p_\perp^2}{H} = const \text{ (инвариант)}$$

$$H_1 \to H_2$$

$$r = \frac{p_\perp c}{eH}$$

$$\frac{p_{1\perp}^2}{H_1} = \frac{p_{2\perp}^2}{H_2} \Rightarrow \frac{p_{2\perp}}{p_{1\perp}} = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{p_{2\perp}}{p_{1\perp}} \cdot \frac{H_1}{H_2} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}$$

$p_\parallel^2 + p_\perp^2 = const$, если $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Поле неоднор. но пост $\Rightarrow$ можно перейти в СО част. в Oxy поле однор, но не постоянно $\Rightarrow$ своб. и пред.

14. Магнитное поле, направленное по оси z вдоль этой оси, убывает с постоянным градиентом $\partial H_z/\partial z = -h = \text{const}$. Может ли поле во всем пространстве оставаться параллельным оси z? Найти радиальные компоненты поля вне оси z. Представить картину силовых линий.

Из ур-ия Максвелла для магнитного поля

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$, пусть $\vec{B} = (0, 0, B_z(x, y, z))$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = -h \neq 0$$

Нет, поле не может оставаться чисто параллельным оси z во всём пр-ве, т.к. это нарушило условие $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Найдём радиальные компоненты вне оси z

$B = (B_r, 0, B_z)$, где $B_r = B_r(r, z)$, $B_z = B_z(r, z)$

В цил. коорд: $\nabla \cdot \bar{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$

По усл на оси $(r=0)$ $\frac{\partial B_z}{\partial z} = -h$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) - h = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r B_r) = hr$$

$$r B_r = \frac{hr^2}{2} + C$$

при $r \to 0$ поле должно быть конечным, поэтому $C = 0$

$$B_r(r, z) = \frac{hr}{2}$$

Полное поле $\bar{B}(r, z) = \left(\frac{hr}{2}, 0, B_0 - hz\right)$

Ур-ие силовых линий: $\frac{dr}{B_r} = \frac{dz}{B_z}$

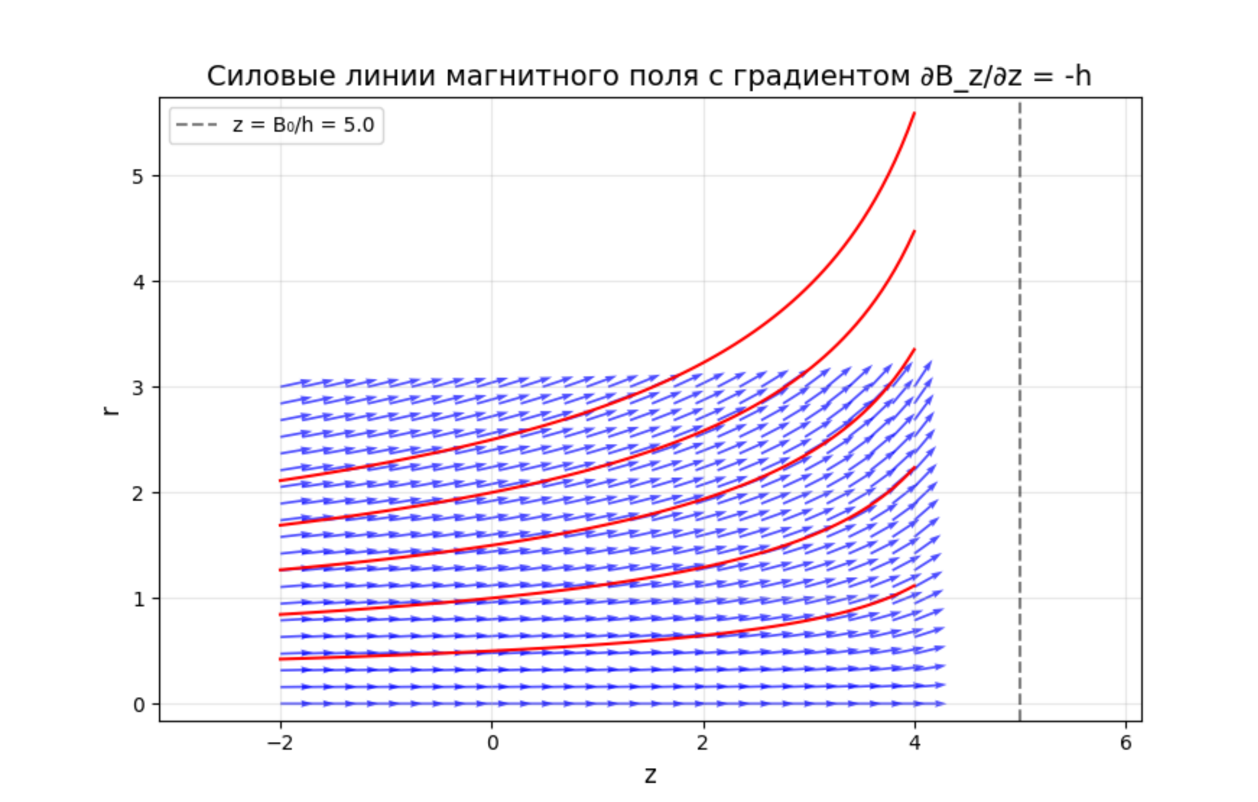
$$\frac{dr}{hr/2} = \frac{dz}{B_0 - hz}$$

$$\frac{2}{h}\int \frac{dr}{r} = \int \frac{dz}{B_0 - hz}$$

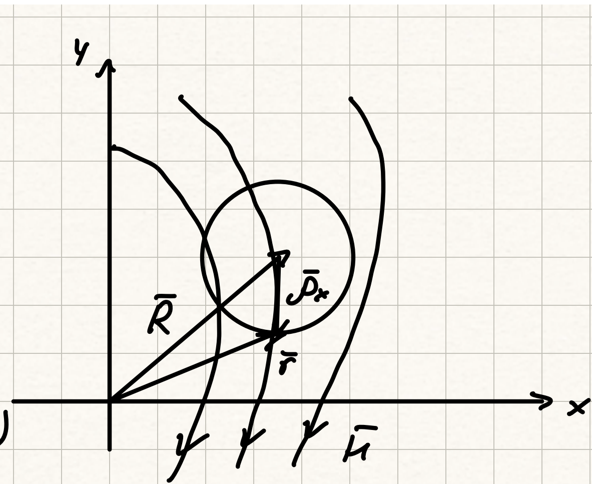
$$\frac{2}{h}\ln r = -\frac{1}{h}\ln(B_0 - hz) + C$$

$$\ln r^2 = -\ln(B_0 - hz) + c$$

$$r^2(B_0 - hz) = const$$



15. Получить формулу $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь (компактную систему стационарно движущихся заряженных частиц) в неоднородном постоянном магнитном поле.



$\bar R$ – радиус-вектор ведущего центра орбиты

$\bar r$ – полный радиус-вектор центра орбиты

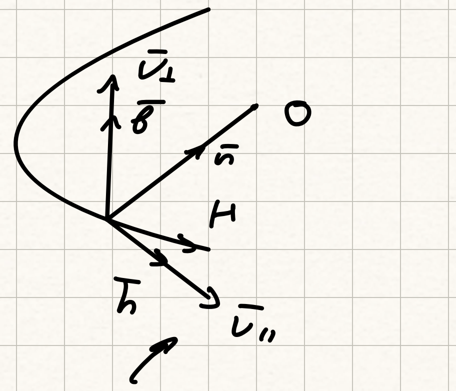
$\bar \ell$ – характ. размер диполя/ расстояние, на котором ($\bar H(r) = \bar H$)

$\bar\rho_\perp = \bar\rho$ – радиус-вектор отн-но ведущего центра (причём $\bar\rho \perp \bar H$) $|\bar\rho| \simeq |\rho_л|$ – ларморовский радиус

$\bar v = \dot{\bar R}$ – скорость центра орбиты

$\bar H(R) = H(\bar R)\,\bar h(R)$, $\bar v_\parallel = \bar h \cdot v_\parallel$, $\bar v_\perp = v_\perp \bar b$

$\bar v_\perp = [\bar\omega_n \times \bar\rho_n]$ - лин. скор. вращ. диполя



сопровожд. базис

По условию

1) $\tilde\ell \ll R \to \bar H = const$ (слабо неоднор)
$\wedge\ \dot H = 0$ (пост)

2) нет внеш. ист. $j = 0$, $j_{вн} = 0$ =>

=> $rot\,\bar H = \bar 0$, $div\,\bar H = 0$

Рассм $K_{\tilde\ell} = \{\bar r : |\bar r_i - \bar R| < \tilde\ell\}$ круг с $\tilde N$ заряж частицами = компактная система заряж. частиц ≈ магнитные диполь (т.к. движ заряда <=> рамка с током <=> магн. диполь)

$\forall$ частицы $\bar r_\alpha = \bar R + \bar\rho_\alpha$ $(\bar\rho_\alpha \perp \bar H)$

$R_Л = \dfrac{c\cdot p_\perp}{e\cdot H}$ - ларморовский радиус

$\omega_Л = \dfrac{-ecH}{\varepsilon}$ - ларморовская круговая частота

$\boxed{1}$ Рассм ур-ие движ. системы

$\bar F_i = m\ddot{\bar r}_i = \frac{e}{c}[\bar v \times \bar H(\bar r)] = \frac{e}{c}[\dot{\bar r}\times\bar H(\bar r)] \approx$ //разлож. в Тейлора// $\approx$

$\approx \frac{e}{c}[\dot{\bar r}\times(\bar H(\bar R) + (\bar\rho_\perp\cdot\bar\nabla_H)\bar H(\bar R))] = \frac{e}{c}([\dot{\bar r}\times\bar H(\bar R)] + [\dot{\bar r}\times(\bar\rho_\perp\cdot\bar\nabla_H)\bar H(\bar R)])$

$\boxed{2}$ Для системы, считая её как одно целое:

$\langle\bar\rho_\perp\rangle = \langle\dot{\bar\rho}_\perp\rangle = \langle\ddot{\bar\rho}_\perp\rangle = 0$

$\bar F_\Sigma = \langle\sum\bar F_i\rangle = \sum\langle\frac{e}{c}([\dot{\bar r}_i\times\bar H(\bar R)] + [\dot{\bar r}_i\times(\bar\rho_{\perp i}\cdot\bar\nabla_H)\bar H(\bar R)])\rangle =$

$= \sum\langle\frac{e}{c}([\dot{\bar R}\times\bar H(\bar R)] + \underbrace{[\dot{\bar\rho}_\perp\times\bar H(\bar R)]}_{0} + [\dot{\bar\rho}_{\perp i}\times(\bar\rho_{\perp i}\cdot\bar\nabla_H)\bar H(\bar R)] +$

$+ [\dot{\bar R}\times(\underbrace{\bar\rho_{\perp i}}_{0}\cdot\bar\nabla_H)\bar H(\bar R)] \ominus$

Определение: магнитный момент (связ. с вращ. заряж. частицы вокруг силовой линии магнитного поля) $\overset{def}{=} \bar\mu = \langle\frac{e}{2c}[\bar\rho\times\dot{\bar\rho}]\rangle$

$\langle[\dot{\bar\rho}\times(\bar\rho_\perp\cdot\bar\nabla_H)\bar H(R)]\rangle = \underbrace{\langle\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\bar\rho_\perp\times(\bar\rho_\perp\bar\nabla_H)\bar H(\bar R)]\rangle}_{0} -$

$-\langle\frac{1}{2}[\bar\rho_\perp\times(\dot{\bar\rho}_\perp\cdot\bar\nabla_H)\bar H(\bar R)]\rangle + \langle\frac{1}{2}[\dot{\bar\rho}_\perp\times(\bar\rho_\perp\cdot\bar\nabla_H)\bar H(\bar R)]\rangle =$

$= \langle\frac{1}{2}[\dot{\bar\rho}_\perp(\bar\rho_\perp\cdot\bar\nabla_H) - \bar\rho_\perp(\dot{\bar\rho}_\perp\bar\nabla_H))\times\bar H(\bar R)]\rangle = //[\bar a\times[\bar b\times\bar c]]// =$

$$= \langle \frac{1}{2}[[\bar\nabla_H \times [\dot{\bar\rho}_\perp \times \bar\rho_\perp]] \times \bar H(\bar R) \rangle$$

$$\ominus \ \frac{e}{2c} \langle [[\bar\nabla_H \times [\dot{\bar\rho}_\perp \times \bar\rho_\perp]] \times \bar H(\bar R) \rangle = [\bar\nabla_H \times (-\bar\mu)] \times \bar H(\bar R) =$$

$$= [\bar\mu \times [\bar\nabla_H \times \bar H]] = \bar\nabla(\bar\mu \cdot \bar H) - \bar H(\bar\mu, \bar\nabla_H) =$$

$// \ \bar\nabla \times \bar H = \mathrm{rot}\, \bar H \quad \bar\nabla_H \bar H = \mathrm{div}\, \bar H \ //$

$$= -\bar\mu(\underbrace{\bar\nabla_H \bar H(\bar R)}_{\mathrm{div}\,\bar H = 0}) + [\bar\mu \times \underbrace{\mathrm{rot}\, \bar H}_{\mathrm{rot}\,\bar H = 0}] + (\bar\mu, \bar\nabla_H) \bar H(\bar R)$$

$\bar F = (\bar\mu \cdot \bar\nabla_H) \bar H(\bar R)$ – СРЕДНЯЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА МАГНИТНЫЙ ДИПОЛЬ В СЛАБОМЕНЯЮЩЕМСЯ ПОЛЕ

16. Найти уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы в неоднородном постоянном магнитном поле и скорость поперечного дрейфа. (Поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты.)

НАЙДЁМ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДИПОЛЯ:

ИЗ ПРЕД. ЗАДАЧИ $\bar F = \sum \bar F_i = m_\Sigma \bar a_\Sigma \Rightarrow \ddot{\bar R} = \frac{e}{mc}[\dot{\bar R} \times \bar H] + \frac{1}{m}(\bar\mu \bar\nabla)\bar H$

ПУСТЬ $m=1$. ПОЛНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДИПОЛЯ МОЖНО ОПИСАТЬ ЧЕРЕЗ $\bar U_\parallel, \bar U_\perp$,

$\bar V_\perp = [\bar\omega_H \times \bar\rho_H]$

$\bar U_\parallel$ – ПРОДОЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ЦЕНТРА ОРБИТЫ. $\bar U_\perp$ – ПОПЕРЕЧНАЯ СКОРОСТЬ (СКОРОСТЬ ДРЕЙФА)

$\bar V_\perp$ – ВРАЩ. ОТН. ЦЕНТРА ОРБИТЫ

$$\dot{\bar U}_\parallel + \dot{\bar U}_\perp = \frac{e}{mc}[(\bar U_\parallel + \bar U_\perp) \times \bar H(\bar R)] + \frac{1}{m}(\bar\mu \cdot \bar\nabla)\bar H(\bar R) = \omega_H[(\cancel{\bar U_\parallel} + \bar U_\perp) \times \bar h(\bar R)] +$$

$\bar U_\parallel \parallel \bar h$

$+ \frac{1}{m}(\bar\mu \cdot \bar\nabla)\bar H(\bar R)$ – УР-ИЕ ДВИЖ. ДИПОЛЯ $(*)$

РАСПИШЕМ $\bar\mu$ ДЛЯ ДИПОЛЯ

$$\bar\mu = \frac{e}{2c}[\bar\rho \times \dot{\bar\rho}] \ominus \ \dot{\bar\rho} = \frac{e}{mc}[\dot{\bar\rho} \times \bar H(\bar R)] \leftarrow \text{интегр} \ \ominus \ \frac{e^2}{2mc^2}[\bar\rho \times [\bar\rho \times \bar H(\bar R)]] =$$

$$= // \bar\rho \perp \bar H // = \frac{e^2}{2mc^2}\rho_H^2 H \cdot (-\bar h)$$

по правилу прав. тройки

$\Rightarrow \bar{\mu} = -\mu \bar{h}$, где $\mu = \frac{\cancel{e^2}}{2m\cancel{c^2}} \frac{e^2 p_\perp^2}{e^2 H^2} \cancel{H} = \frac{p_\perp^2}{2mH} = \mu = const$ в силу адиаб. инварианта

иначе $\mu = \frac{e}{2c}\omega_n \rho_n^2$

Считая, что $U_\perp << U_{\parallel} \Rightarrow |\dot{U}_\perp| << |\dot{U}_{\parallel}|$, т.к. $\dot{v} = \frac{dv}{dt} \sim \frac{\Delta \ell}{\Delta t} \sim v$

$\Delta \ell$ – насколько далеко улетели частицы в след. неоднор. поле

Из $(*)$ $\omega_n[\bar{U}_\perp \times \bar{h}(\bar{R})] + \frac{1}{m}(\bar{\mu}\bar{\nabla})\bar{H}(\bar{R})$

$\Rightarrow$ учитывая $\bar{U}_\perp << \bar{U}_{\parallel}$

$$\dot{\bar{U}}_{\parallel} = U_{\parallel} \cdot \dot{\bar{h}} + \dot{U}_{\parallel} \cdot \bar{h} = \frac{eH(R)}{mc^2}[U_\perp \cdot \bar{b} \times \bar{h}] + \frac{1}{m}(-\bar{h} \cdot \bar{\nabla}_n)\bar{H}(\bar{R})\bar{h}(\bar{R})$$

N_1: $\dot{\bar{h}} = \frac{\Delta \bar{h}}{\Delta \bar{R}} \cdot \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta t} = \frac{d\bar{h}}{dR_i} \cdot \frac{dR_i}{dt} = (\bar{U}_{\parallel} \cdot \bar{\nabla})\bar{h} = U_{\parallel}(\bar{h} \cdot \bar{\nabla})\bar{h}$

N_2: $(-\bar{h} \cdot \bar{\nabla}_n)_R \bar{H}(\bar{R})\bar{h}(\bar{R}) = -\{\bar{h}(\bar{h}\bar{\nabla}_n \bar{H}) + \bar{H}(\bar{h}\bar{\nabla}_n)\bar{h}\}$

$$\dot{\bar{U}}_{\parallel} = \dot{U}_{\parallel} \cdot \bar{h} + U_{\parallel}^2(\bar{h}\bar{\nabla})\bar{h} = \omega[U_\perp \bar{b} \times \bar{h}] - \frac{\mu \bar{h}}{m}(\bar{h} \cdot \bar{\nabla}_n H) - \frac{\mu H}{m}(\bar{h}\bar{\nabla}_n)\bar{h} =$$

по ф-ле Френеля $(\bar{h} \cdot \bar{\nabla}_n)\bar{h} = \frac{\bar{n}}{\rho_{кр}} = \dot{U}_{\parallel}\bar{h} + U_{\parallel}^2 \frac{\bar{n}}{\rho_{кр}} = \omega[U_\perp \bar{b} \times \bar{h}] -$

$- \frac{\mu \bar{h}}{m}(\bar{h} \cdot \bar{\nabla}_n \cdot H) - \frac{\mu H}{m}\frac{\bar{n}}{\rho_{кр}} = \dot{\bar{U}}_{\parallel}$ $(**)$

Найдём $\bar{U}_{др} = \bar{U}_\perp$, для этого $h \times (**)$

$$0 + \frac{U_{\parallel}^2 \bar{b}}{\rho_{кр}} = +\bar{b} \cdot \omega U_\perp - 0 - \bar{b}\frac{\mu H}{m \rho_{кр}}$$

$$\Rightarrow \bar{U}_\perp = \bar{U}_{др} = U_\perp \bar{b} = \frac{U_{\parallel}^2 + \frac{\mu H}{m}}{\omega_n \rho_{кр}}\bar{b} = \frac{U_{\parallel}^2 + \frac{eH\omega_n \rho_n^2}{2c \cdot m \cdot c = \varepsilon}}{\omega_n \cdot \rho_{кр}} =$$

$$= \frac{ceH\omega_n \rho_n^2}{2\varepsilon} = \frac{\omega_n^2 \rho_n^2}{2} = \frac{\rho_\perp^2}{2} = \frac{U_{\parallel}^2 + \frac{U_\perp^2}{2}}{\omega_n \cdot \rho_{кр}} = U_\perp$$

Найдём $\bar{U}_{\parallel}$, для этого $[\bar{h} \cdot (**)]$

$$\dot{U}_{\parallel} + 0 = 0 - \frac{\mu}{m}(\bar{h} \cdot \bar{\nabla}_n \bar{H}) = 0$$

$$\dot{U}_{\parallel} = -\frac{\mu}{m}h_i\frac{\partial H}{\partial R_i} \approx -\frac{\mu}{m}h_i\frac{\Delta H}{\Delta R_i} = -\frac{\mu}{m}\frac{1}{U_{\parallel}}\frac{\Delta H}{\Delta t} = -\frac{e\omega_n \rho_n^2}{2cm}\frac{1}{U_{\parallel}} \cdot \dot{H} =$$

$$= \frac{-U_\perp^2}{2H}\frac{1}{U_{\parallel}} \cdot \dot{H}$$