Если при каждом значении $\alpha \in E \subset R$ функция $f(x;\alpha)$ интегрируема по Риману как функция от x на отрезке $[a;b]$, то интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x;\alpha)\,dx \tag{1}$$

называют *собственным интегралом, зависящим от параметра* α. Наряду с интегралами вида (1) рассматривают интегралы более общего вида

$$\Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x;\alpha)\,dx, \tag{2}$$

зависящие от параметра.

1. Непрерывность интеграла по параметру. Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике

$$K = \{(x;\alpha)\colon\ a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}, \tag{3}$$

то интеграл (1) есть непрерывная функция параметра α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$.

В частности, если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна в прямоугольнике K и $\alpha_0 \in [\alpha_1;\alpha_2]$, то

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} \int_a^b f(x;\alpha)\,dx = \int_a^b \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(x;\alpha)\,dx, \tag{4}$$

т. е. возможен предельный переход под знаком интеграла (1).

2. Найти предел:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0} \int_0^1 \sqrt{1+\alpha^2x^4}\,dx;$

$f(x,\alpha) = \sqrt{1+\alpha^2x^4}$ непр. в

$K = \{(x,\alpha): 0 \le x \le 1, -1 \le \alpha \le 1\}$ непр.

как суперп непр на $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ непр на $\forall$ замкн. и огр прямоуг.

$\Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^1 f(x,\alpha)\,dx = \int_0^1 \lim\limits_{\alpha\to 0} f(x,\alpha)\,dx = \int_0^1 f(x,0)\,dx = \int_0^1 dx = 1$ по Th о предельном переходе под интеграл

2. 1) 1;

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и принимает положительные значения на отрезке $[0;1]$. Доказать, что функция

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\, f(x)\,dx$$

разрывна при $\alpha = 0$.

1) $I(0) = 0$

2) $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} f(x)\,dx = \underbrace{\int_0^\delta}_{I_1(\alpha,\delta)} + \underbrace{\int_\delta^1}_{I_2(\alpha,\delta)} \qquad \delta\in(0,1)$

$\forall x\in[\delta;1] \quad 0 \le \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} \le \frac{\alpha}{x^2} \le \frac{\alpha}{\delta^2}$

f непр $[0,1] \Rightarrow$ огр. и $\exists \max f = M$

$\int_\delta^1 \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} f(x)\,dx \le \int_\delta^1 \frac{\alpha M}{x^2}\,dx = M\alpha\left(\frac{1}{\delta}-1\right) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$

3) $\forall x\in[0,\delta]$: т.к f непр., то $\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta(\varepsilon)>0: |f(x)-f(0)|<\varepsilon$

$-\varepsilon < f(x)-f(0) < \varepsilon \Rightarrow f(0)-\varepsilon < f(x) < f(0)+\varepsilon$

$\Rightarrow [f(0)-\varepsilon]\underbrace{\int_0^\delta \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\,dx}_{\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\Big|_0^\delta} \le \underbrace{\int_0^\delta \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2} f(x)\,dx}_{I_1(\delta,\alpha)} \le [(f(0)+\varepsilon)]\underbrace{\int_0^\delta \frac{\alpha}{x^2+\alpha^2}\,dx}_{\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\Big|_0^\delta}$

$\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\Big|_0^\delta = \operatorname{arctg}\frac{\delta}{\alpha} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ при $\alpha\to 0 \quad I_1(\delta,\alpha) \to f(0)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I(\alpha) = I_1(\alpha;\delta) + I_2(\alpha;\delta) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} f(0)\cdot\frac{\pi}{2}$ и $f(0)>0$ по усл-ию

$\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha) \neq I(0)$ и $I(\alpha)$ разрывна при $\alpha=0$

4. Найти $\Phi'(\alpha)$, если:

5) $\Phi(\alpha) = \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} e^{\alpha^4 x^2}\, dx;$

3. Дифференцирование интегралов, зависящих от параметра. Если функции $f(x;\alpha)$ и $\dfrac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны в прямоугольнике (3), то интеграл (1) — непрерывно дифференцируемая на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$ функция, производную которой можно вычислить по *правилу Лейбница*

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}\, dx. \qquad (6)$$

Если функции $f(x;\alpha)$ и $\dfrac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}$ непрерывны в прямоугольнике (3), функции $\varphi(\alpha)$ и $\psi(\alpha)$ дифференцируемы на отрезке $[\alpha;\alpha_2]$, а их значения принадлежат отрезку $[a;b]$, то интеграл (2) — функция, дифференцируемая на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, причем

$$\Phi'(\alpha) = f(\psi(\alpha);\alpha)\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha);\alpha)\varphi'(\alpha) + \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x;\alpha)}{\partial\alpha}\, dx. \qquad (7)$$

По правилу Лейбница

$\psi(\alpha) = \sin\alpha$ $\Rightarrow$

$\varphi(\alpha) = \cos\alpha$

$$\Phi'(\alpha) = e^{\alpha^4\sin^2\alpha}\cos\alpha + e^{\alpha^4\cos^2\alpha}\sin\alpha + \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} \underbrace{\frac{\partial}{\partial\alpha} e^{\alpha^4 x^2}}_{4\alpha^3 x^2\cdot e^{\alpha^4x^2}} dx = e^{\alpha^4\sin^2\alpha}\cos\alpha + e^{\alpha^4\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha + 4\alpha^3\int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} x^2 e^{\alpha^4x^2} dx$$

5) $\Phi'(\alpha) = 4\alpha^3 \int\limits_{\cos\alpha}^{\sin\alpha} x^2 e^{\alpha^4x^2}\, dx + \cos\alpha\cdot e^{\alpha^4\sin^2\alpha} + \sin\alpha\cdot e^{\alpha^4\cos^2\alpha};$

17. С помощью дифференцирования интеграла $\int\limits_0^b \dfrac{dx}{x^2+\alpha^2}$ по параметру α, где $\alpha>0$, вычислить интеграл $\int\limits_0^b \dfrac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} := I$

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_0^b \frac{dx}{x^2+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\Big|_0^b = \boxed{\frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha}}$$

$$\Phi'(\alpha) = \int\limits_0^b \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{x^2+\alpha^2}\right)dx = \int\limits_0^b \frac{-2\alpha}{(x^2+\alpha^2)^2}\,dx = -2\alpha\int\limits_0^b \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = -2\alpha I$$

дифф по параметру

$$\Phi'(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+b^2/\alpha^2}\left(-\frac{b}{\alpha^2}\right) = -\frac{1}{\alpha^2}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} - \frac{b}{\alpha(b^2+\alpha^2)} = -2\alpha I$$

явно

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{b}{2\alpha^2(b^2+\alpha^2)}$$

17. $\dfrac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{\alpha} + \dfrac{b}{2\alpha^2(\alpha^2+b^2)}$.

18. Применяя дифференцирование по параметру α, вычислить интеграл $I(\alpha)$, если:

3) $I(\alpha) = \int\limits_0^\pi \ln\dfrac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}\dfrac{dx}{\cos x}$, $|\alpha|<1$;

1) $g(x,\alpha) = \dfrac{1}{\cos x}\dfrac{1+\alpha\cos x}{1-\alpha\cos x}$ для $|\alpha|\le A<1$ $\quad g(x,\alpha)\sim\dfrac{1}{\cos x}(2\alpha\cos x) = 2\alpha$ в окр-ти $x=\dfrac{\pi}{2}$

дробь ост огранич., на прямоуг $R=\{(x,\alpha)\,|\,x\in[0,\pi],\ \alpha\in[-A;A]\}$, $A<1$

$g(x,\alpha)$ непрер.

$|\alpha|<1 \Rightarrow 1-\alpha^2\cos^2x>0$ произв по α непр и огр. $\Rightarrow$

можно дифф.

2) $g(x,\alpha) = \frac{1}{\cos x}\left[\ln(1+\alpha\cos x) - \ln(1-\alpha\cos x)\right]$

$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \left[\frac{\cos x}{1+\alpha\cos x} + \frac{\cos x}{1-\alpha\cos x}\right]\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{1-\alpha^2\cos^2 x}$

$I'(\alpha) = 2\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{1-\alpha^2\cos^2 x} = 4\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{1-\alpha^2\cos^2 x}$ в силу четности

3) $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx \quad \left(1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\right) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$I'(\alpha) = 4\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)\left(1-\frac{\alpha^2}{1+t^2}\right)} = 4\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)-\alpha^2} = 4\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{\underbrace{(1-\alpha^2)}_{a^2=1-\alpha^2}+t^2} = \frac{4}{a}\frac{\pi}{2},\ a>0$

$I'(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$

4) $I(\alpha) = \int I'(\alpha)\,d\alpha = 2\pi\arcsin\alpha + C$

5) $I(0) = \int\limits_0^{\pi}\frac{1}{\cos x}\ln 0\,dx = 0 \Rightarrow C = 0$, $I(\alpha) = 2\pi\arcsin\alpha$

3) $2\pi\arcsin\alpha$;

Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E (1–5).

$E_2 = (1;+\infty)$

1. 1) $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, $E = [\alpha_0;+\infty)$, $\alpha_0 > 1$;

а) $(1;+\infty)$

$\sup\limits_{\alpha\in E_2}\int\limits_{\xi}^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \sup\limits_{\alpha\in E_2}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_{\xi}^{+\infty} = \sup\limits_{\alpha\in E_2}\frac{1}{(\alpha-1)\xi^{\alpha-1}}$

$\sup\limits_{\alpha>1} = +\infty \quad \forall\xi>1 \Rightarrow$ сх. неравномерно

б) $[\alpha_0,+\infty)$, $\alpha_0>1$

$\alpha_0>1 \qquad \sup\limits_{\alpha\geq\alpha_0} = \frac{1}{(\alpha_0-1)\xi^{\alpha_0-1}} \to 0 \qquad \xi\to+\infty$

($\downarrow$ по α) сх-ть по $\alpha\geq\alpha_0>1$ равномерна

1. Определение равномерной сходимости интеграла. В этом параграфе определение, признаки сходимости и критерий равномерной сходимости формулируются для несобственных интегралов вида

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx. \tag{1}$$

Соответствующие утверждения аналогично формулируются для других типов несобственных интегралов.

Интеграл (1), сходящийся для каждого $\alpha\in E$, называют *равномерно сходящимся на множестве* E, если для каждого $\varepsilon>0$ существует такое число δ_ε, что для всех $\alpha\in E$ и для всех $\xi\geqslant\delta_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_\xi^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Если существует число $\varepsilon_0>0$ такое, что для любого $\delta\in[\alpha;+\infty)$ найдутся числа $\alpha_\delta\in E$ и $\xi_\delta\in[\delta;+\infty)$ такие, что

$$\left|\int\limits_{\xi_\delta}^{+\infty} f(x;\alpha_\delta)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0, \tag{3}$$

то интеграл (1), сходящийся для каждого $\alpha\in E$, *сходится неравномерно на множестве* E.

Интеграл (1) сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sup_{\alpha\in E}\int\limits_\xi^{+\infty} f(x,\alpha)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad \xi\to+\infty. \tag{4}$$

2) $I(\alpha) = \int\limits_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$, $E = (0;\alpha_0)$, $\alpha_0 < 1$; $E_2 = (0,1)$

а) $(0;1)$ $\sup\limits_{\alpha\in E_2}\int\limits_0^{\xi}\frac{dx}{x^\alpha} = \sup\limits_{\alpha\in E_2}\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_0^{\xi} = \sup\limits_{\alpha\in E_2}\frac{\xi^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

$\xi^{1-\alpha} = \exp\{(1-\alpha)\ln\xi\} \underset{\alpha\to1^-}{\to} 1$, а $1-\alpha\to0^+ \Rightarrow \sup\limits_{\alpha<1} = +\infty \quad \forall\xi>0$

$\Rightarrow$ сх. неравномерно

б) $(0;\alpha_0)$, $\alpha_0<1$ $\quad x^{-\alpha}\le x^{-\alpha_0}$ $\quad \forall\alpha\in(0;\alpha_0)$, $0\le x\le 1$

$$\sup_{\alpha\in(0;\alpha_0)}\int_0^{\xi} x^{-\alpha}dx=\frac{\xi^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}\to 0,\ \xi\to 0$$ $\Rightarrow$ сх. равномерно $\alpha\in(0;\alpha_0)$

6. Доказать, что интеграл $I(\alpha)$ сходится равномерно на множестве E_1 и сходится неравномерно на множестве E_2.

3) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}$, $E_1=(-\infty;0]$, $E_2=[0;+\infty)$;

$$\int_{\xi}^{+\infty}\frac{dx}{4+(x-\alpha)^6}=\int_{\xi-\alpha}^{+\infty}\frac{dt}{4+t^2}\qquad t=x-\alpha$$

а) $E_1=(-\infty;0]$ $\quad \sup\limits_{\alpha\le 0}=\int\limits_{\xi}^{}\frac{dt}{4+t^6}\to 0,\ \xi\to+\infty$ — сход-е сх. равн по $\alpha\le 0$

б) $E_2=[0;+\infty)$ $\quad \forall\xi$ $\quad \sup\limits_{\alpha\ge 0}=\int\limits_{-\infty}\frac{dt}{4+t^6}=c>0\not\to 0$ — сх неравн.

4) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$, $E_1=[0;2]$, $E_2=[0;+\infty)$;

$t=x-\alpha$ $\quad \int\limits_{\xi-\alpha}^{+\infty}e^{-t^2}dt$

а) $E_1=[0;2]$ $\quad \sup\limits_{0\le\alpha\le 2}=\int\limits_{\xi-2}^{\infty}e^{-t^2}dt\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0$ — сх. равномерно

б) $E_2=[0;+\infty)$ $\quad \forall\xi$ $\quad \sup\limits_{\alpha\ge 0}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\ \not\xrightarrow[\xi\to\infty]{}0$ — не сх. равномерно

Исследовать интеграл $I(\alpha)$ на равномерную сходимость на множестве E (7,8).

3) $I(\alpha)=\int\limits_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}dx$, $E=(0;+\infty)$;

Замечание: при исслед. на равном. сход в интеграле нельзя делать замену, завис от пар-ра

$$\int_{\xi}^{+\infty}\sqrt{\alpha}\,e^{-\alpha x^2}dx=\int_{\sqrt{\alpha}\xi}^{+\infty}e^{-t^2}dt$$

$t=\sqrt{\alpha}x$ $\quad\forall\xi$ $\quad \sup\limits_{\alpha>0}=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\not\to 0$ $\quad(\xi\to+\infty)$ — сх неравн.

$\sup\limits_{\alpha\ge\alpha_0}=\int\limits_{\sqrt{\alpha_0}\xi}^{+\infty}e^{-t^2}dt\to 0$ $\quad\xi\to+\infty$ $\quad$ сх равном. по $\alpha\ge\alpha_0>0$

4) $I(\alpha)=\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^\alpha}\,dx$, $E=[0;+\infty)$;

$$\int_1^{+\infty} \frac{x \sin x^2}{x(1+x^\alpha)}\,dx$$

$f(x,\alpha) = x \sin x^2$ не зав. от α и имеет огр. первообр.

$-\frac{1}{2}\cos x^2$

$g(x) = \frac{1}{x(1+x^\alpha)}$ $\downarrow$ по x $\forall \alpha \geq 0$

$|g(x,\alpha)| \leq \frac{1}{x} \to 0,\ x \to +\infty$

инт-л сх. равном по $\alpha \geq 0$ по пр Дирихле (=0) нош-ся, надо пок-ть по пр Коши?

3. Признак Дирихле равномерной сходимости интеграла. Интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x;\alpha)g(x;\alpha)\,dx$$

сходится равномерно по α на множестве E, если при каждом фиксированном $\alpha \in E$ функции f, g, g'_x непрерывны по x на множестве $[a;+\infty)$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) $g(x;\alpha) \to 0$ при $x \to +\infty$ равномерно относительно $\alpha \in E$;

2) функция $g'_x(x;\alpha)$ для каждого фиксированного $\alpha \in E$ не меняет знака при изменении x на промежутке $[a;+\infty)$;

3) функция f для каждого $\alpha \in E$ имеет ограниченную первообразную, т. е. существует число $M > 0$ такое, что

$$\left|\int_a^x f(t;\alpha)\,dt\right| \leqslant M$$

для всех $x \in [a;+\infty)$ и для всех $\alpha \in E$.

---

6) $I(\alpha) = \int_0^1 \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^\alpha}$, $E = (0;2)$.

$\int_0^\delta \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^\alpha}$ $\quad 0 < \delta < 1$

$t = 1/x \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$

$$\int_{1/\delta}^{\infty} \sin t \cdot t^{\alpha-2}\,dt \Rightarrow \sup_{\alpha\in E} \int_{1/\delta}^{\infty} \underbrace{t^0 \sin t\,dt}_{\alpha=2} = \int_{1/\delta}^{+\infty} \sin t\,dt = -\cos t\Big|_{1/\delta}^{+\infty} = \cos 1/\delta \not\to 0$$

$\left(\exists\, \delta_n = \frac{1}{2\pi n} : \cos\frac{1}{\delta} = 1\right) \Rightarrow$ сх. неравном.

7. 1) Сходится неравномерно; 2) сходится неравномерно; 3) сходится неравномерно; 4) сходится равномерно; 5) сходится неравномерно; 6) сходится неравномерно.

---

1. Исследуйте на равномерную сходимость на множествах $E_1 = [a_0, +\infty)$ $a_0 > 0$ и $E_2 = (0, +\infty)$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

a) E_1: $f(x,\alpha) = \sin \alpha x$

$\forall \alpha > 0$ имеет первообр

$-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}$, если $\alpha \geq \alpha_0$

$\left|-\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{\alpha_0}$ при $\alpha \geq \alpha_0 > 0$

$g(x,\alpha) = \frac{1}{x}$ $\downarrow$ по x, не зав от α $\quad g(x,\alpha) \to 0,\ x \to +\infty$ не зав от α

инт-л сход равном по призн Дирихле при $\alpha \geq \alpha_0 > 0$

4. Критерий Коши равномерной сходимости интеграла. Интеграл (1) сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда выполняется *условие Коши*: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_\varepsilon \in (a;+\infty)$ такое, что для любых $\xi' \in [\delta_\varepsilon;+\infty)$, $\xi'' \in [\delta_\varepsilon;+\infty)$ и для всех $\alpha \in E$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x;\alpha)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Если условие Коши не выполняется, т. е. существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in (a;+\infty)$ найдутся числа $\alpha_\delta \in E$, ξ'_δ и ξ''_δ, где $\xi'_\delta \geqslant \delta$, $\xi''_\delta \geqslant \delta$, такие, что

$$\left|\int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} f(x;\alpha_\delta)\,dx\right| \geqslant \varepsilon_0, \qquad (5)$$

то интеграл (1) не является равномерно сходящимся на множестве E.

б) E_2: инт-л сход. неравномерно по кр. Коши

$\exists \varepsilon > 0 : \forall b' > 1 \ \exists \xi > b', \exists \alpha > 0 : \left| \int\limits_{\xi}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right| \geq \varepsilon$

$$\int\limits_{\xi}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int\limits_{\alpha\xi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int\limits_{2\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = C > 0$$

$\alpha x = t$, $\xi = 2\pi n$, $\alpha = \frac{1}{n}$

2. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$, б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$, в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx$.

1. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Если функции $f(x;\alpha)$ и $f'_\alpha(x;\alpha)$ непрерывны на множестве

$$G = \{(x;\alpha) \colon \ a \leqslant x < +\infty, \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\},$$

интеграл $I(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx$ сходится при каждом $\alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha]$, то

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x;\alpha)\,dx \tag{1}$$

при $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ (*правило Лейбница*).

2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости интеграла. Если на промежутке $[a;+\infty)$ существует функция $\varphi(x)$ такая, что $|f(x;\alpha)| \leqslant \varphi(x)$ для всех $x \in [a;+\infty)$ и для всех $\alpha \in E$, и если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, то интеграл (1) сходится *абсолютно* и *равномерно* на множестве E.

а) $\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\sin \alpha x}{x} = \frac{x \cos \alpha x}{x} = \cos \alpha x$,

но $\int\limits_0^{\infty} \cos \alpha x \, dx$ расходится

$\text{Я}\ \Phi(\alpha;\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, $\beta > 0$

$g(\beta, x) = \frac{e^{-\beta x}}{x} \searrow$ на $(0;+\infty)$ и $\sin \alpha x$ имеет ог. первообр

сх. равн по пр Дирихле

$F(\alpha, x) = \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha}$, при этом $\Phi(0, \beta) = 0$

и $\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{e^{-\beta x} \sin \alpha x}{x}\right) = e^{-\beta x} \cos \alpha x$ $\quad |e^{-\beta x} \cos \alpha x| \leq e^{-\beta x}$

инт-л сход равномерно по пр Вейерштрасса

$\Rightarrow$ можно дифф. $\Phi'_\alpha(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x \, dx$ по пр Лейбница

$\text{Я}\ \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x \, dx$, $\beta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Re}(\beta - i\alpha) = \beta > 0$ инт-л сход.

$\cos \alpha x = \mathrm{Re}(e^{i\alpha x}) \Rightarrow J = \mathrm{Re} \int\limits_0 e^{-\beta x} e^{i\alpha x} dx = \mathrm{Re} \int\limits_0^{\infty} e^{-(\beta - i\alpha)x} dx = \mathrm{Re} \left.\frac{e^{-(\beta - i\alpha)x}}{-(\beta - i\alpha)}\right|_0^{\infty} = \mathrm{Re} \frac{1}{\beta - i\alpha}$

$= \mathrm{Re} \frac{\beta + i\alpha}{\beta^2 + \alpha^2} = \frac{\beta}{\beta^2 + \alpha^2}$

интегр. : $\Phi(\alpha;\beta) - \underbrace{\Phi(0;\beta)}_{=0} = \beta \int\limits_0^{\alpha} \frac{dt}{\beta^2 + t^2} = \mathrm{arctg} \frac{\alpha}{\beta}$

$\Rightarrow \Phi(\alpha;\beta) = \mathrm{arctg} \frac{\alpha}{\beta}$

инт-л сх равном. по β: $\sin \alpha x$ имеет ог.

первообр., $g(\beta, x) = e^{-\beta x}/x \searrow 0$ при $x>0, \beta \geq 0$, $x \to \infty$

по призн. Дирихле сх. равном. по $\beta \in [0;1]$ и

$e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}$ непр на $G = \{(x;\beta) : 0 \leq x < +\infty, 0 \leq \beta \leq 1\}$

$\Rightarrow$ $\Phi(\alpha;\beta)$ непр. по β на $[0,1]$ и непр. справа в $\beta = 0$

$\Rightarrow$ можно перейти к пределу под знаком инт-ла

$$\lim_{\beta \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \to +0} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}$$, в силу нечетности $\frac{\sin \alpha x}{x}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

б) $\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}$ непрер. $\forall \alpha, x$; $\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\right) = -\frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}$

сх. равномерно на $[\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$

$\forall x \in [0;A]$ $\left|\frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\right| \leq \frac{x}{1+x^2}$ сх равном по призн Вейерштрасса

$\approx x$ сход.

$\forall x \in [A;+\infty)$ $f(x) = \frac{x}{1+x^2} \searrow 0$ и $g(x,\alpha) = \sin \alpha x$

имеет огр первообр. $\left|-\frac{\cos \alpha A}{\alpha}\right| \leq \frac{1}{\alpha}$ $\forall \alpha \geq \alpha_0 > 0$ $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\alpha_0}$

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$$ по прав. Лейбница

из пункта а) инт-л Дирихле $\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \alpha > 0$

сход. и ; $I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\right) dx$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx$$

дифф. почленно : $I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx = I(\alpha)$

$I''(\alpha) - I(\alpha) = 0$ Общее решение: $I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$

$$|I(\alpha)| \leq I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$\alpha \to +\infty: \quad \begin{matrix} e^{-\alpha} \to 0 \\ e^{\alpha} \to \infty \end{matrix} \Rightarrow C_1 = 0 \ : \ I(\alpha) = C_2 e^{-\alpha}$

$I(0) = \frac{\pi}{2} = C_2 \Rightarrow I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \ \alpha > 0$, в силу чётности

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

в) $I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx = -J(\alpha) \Rightarrow J(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2} e^{-\alpha}\right)'_{\alpha} =$

$= \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \ \alpha > 0 \Rightarrow J(\alpha) = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha}, \alpha > 0$, в силу нечётности

$J(\alpha) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha \, e^{-|\alpha|}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

Используя интеграл Дирихле (12), вычислить интеграл (2–4).

2(3). $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\,dx;$ $\quad u = x^2, \ du = 2x\,dx \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} \frac{du}{2\sqrt{u}}$

$= \frac{1}{2} \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du}_{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ (при $x \to 0$ $\frac{\sin x^2}{x} \sim x$; при $x \to +\infty$ сх условно по пр Дирихле)

3) $\pi/4$;

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\,dx;$ $\quad \sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}, \ \theta = \alpha x$

$J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{3\sin\alpha x - \sin 3\alpha x}{4x} dx = \frac{3}{4} \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx}_{\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha} - \frac{1}{4} \underbrace{\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 3\alpha x}{x}}_{\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(3\alpha)} = \frac{\pi}{4} \operatorname{sign}\alpha$

3. 1) $(\pi/4) \operatorname{sign} \alpha$;

1. Пусть $a > 0$, $b > 0$. С помощью дифф. по пар-ру вычислить интеграл:

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\,dx;$ $\quad$ 1) при $x \to 0$: $e^{-ax^2} - e^{-bx^2} = (1 - ax^2 + O(x^4))$

$-(1 - bx^2 + O(x^4)) = -(a-b)x^2 + O(x^4)$

$\Rightarrow \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} = -(a-b)x + O(x^3)$ инт-л сход-ся

при $x \to +\infty$ $\quad |e^{-ax^2} - e^{-bx^2}| \le e^{-\min(a,b)x^2} \Rightarrow \left|\frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\right| \le \frac{e^{-\min(a,b)x^2}}{x}$

сход при $a > 0, b > 0 \Rightarrow I(\alpha)$ сход. $\forall a, b > 0$

$\frac{\partial}{\partial a} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} = -\frac{x^2 e^{-ax^2}}{x} = -x e^{-ax^2}$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx \quad \forall a \in [a_0, a_1] \quad \forall x \geq 0 \quad |x e^{-ax^2}| \leq x e^{-a_0 x^2}$$

$\int_0^\infty x e^{-a_0 x^2} dx = \frac{1}{2a_0}$ сход. инт-л сх-ся равном. по пр Вейерштрасса

2) по правилу Лейбница $I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\right) dx = -\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx$

$u = ax^2,\ du = 2ax\,dx$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-u} \frac{du}{2a} = \frac{1}{2a}\int_0^\infty e^{-u} du = \frac{1}{2a} = I'(a)$$

3) $I(a) = \int I'(a)\, da = -\frac{1}{2}\int \frac{da}{a} = -\frac{1}{2}\ln a + C$

$I(a=b) = \int_0^\infty \frac{e^{-bx^2} - e^{-bx^2}}{x} dx = 0 \Rightarrow 0 = I(b) = -\frac{1}{2}\ln b + C \Rightarrow \frac{1}{2}\ln b$

$\Rightarrow I(a) = -\frac{1}{2}\ln a + \frac{1}{2}\ln b = \frac{1}{2}\ln\frac{b}{a}$

3) $0{,}5\ln(b/a)$;

6. С помощью дифференцирования по параметру вычислить интеграл:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x}\, dx,\ \beta > 0$;

1) $x \to 0$: $1 - \cos\alpha x = \frac{(\alpha x)^2}{2} + O(x^4) \Rightarrow \frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x} \sim O(x)$ $\int_0^\varepsilon < \infty$

$x \to \infty$ $\left|\frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x}\right| \leq \frac{2}{x} e^{-\beta x}$; $\int_1^\infty \frac{e^{-\beta x}}{x}$ сход-ся $\forall x \in (0; \pi/\alpha)$

$\Rightarrow I(\alpha, \beta)$ сход-ся

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1-\cos\alpha x}{x} e^{-\beta x}\right) = \frac{x\sin\alpha x}{x} e^{-\beta x} = \sin\alpha x\, e^{-\beta x}$$

$|\sin\alpha x\, e^{-\beta x}| \leq e^{-\beta x}$ $\int_0^\infty e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta} < \infty$ инт-л сход. равном. по признаку Вейерштрасса.

2) по правилу Лейбница $I'(\alpha) = \int_0^\infty \sin\alpha x\, e^{-\beta x} dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$

Если $\alpha > 0$, то для любого $\beta \in R$ справедливы формулы

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \quad (4)$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\, dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \quad (5)$$

$I'(\alpha) = \frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}$

3) $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{t}{\beta^2+t^2} dt = \frac{1}{2}\ln(\beta^2+t^2)\Big|_{t=0}^{t=\alpha} = \frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}$ $(I(0) = 0 \Rightarrow C = 0)$

$u = \beta^2 + t^2,\ du = 2t\,dt$

6. 1) $\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin \lambda x \, dx, \ \alpha > 0, \ \beta > 0, \ \lambda \neq 0;$

1) $x \to 0$: $e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} = (\beta - \alpha)x + O(x^2)$, $\sin \lambda x \sim \lambda x$

$\Rightarrow \forall x \in [0, \varepsilon]$ $\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} = O(x)$

$x \to +\infty$ $|e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}| \le e^{-\min(\alpha,\beta)x} \Rightarrow \left| \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin \lambda x \right| \le \frac{e^{-\min(\alpha,\beta)x}}{x}$ –

инт-л сход равном. по пр Вейерштрасса

2) $I'_\alpha(\alpha, \beta, \lambda) \overset{?}{=} \int\limits_0^{+\infty} \frac{-xe^{-\alpha x}}{x} \sin \lambda x \, dx = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \lambda x \, dx = -\frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2}$

$\alpha \ge \alpha_0 > 0$

$|e^{-\alpha x} \sin \lambda x| \le e^{-\alpha_0 x}$ сх равном по $\alpha \ge \alpha_0 > 0$ по пр Вейерштр

$(*)$ $I'_\alpha(\alpha, \beta, \lambda) = -\frac{\lambda}{\alpha^2 + \lambda^2}$ верно при $\alpha \ge \alpha_0 > 0$

Фактически, по теор. о дифф $\forall [\alpha_1, \alpha_2], \alpha_2 > \alpha_1 > 0$

$\forall \alpha > 0$ $\exists [\alpha_1, \alpha_2] \ni \alpha$ $(*)$ верно $\forall \alpha > 0$

$I(\alpha, \beta, \lambda) = -\operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\lambda} + C(\beta, \lambda)$

$I(\beta, \beta, \lambda) = -\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\lambda} + \underbrace{C(\beta, \lambda)}_{= \operatorname{arctg} \beta/\lambda} = 0;$ $I(\alpha, \beta, \lambda) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\lambda}$

$\alpha \ge \alpha_0 > 0$

3) $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{\lambda} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\lambda}$;

---

5) $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x\sqrt{1-x^2}} \, dx;$ 1) $x \to 1$ $f(x, \alpha) \sim \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{c_1}{\sqrt{1-x}}$ $\alpha \neq 0$

$I(\alpha) \overset{\text{сх.}}{\sim} \int\limits_0^{\to 1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int\limits_{0 \leftarrow}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ – сх. $1 - x = t$

Наш инт-л сх $\forall \alpha$ по пр сравнения

$I'(\alpha) \overset{?}{=} \int\limits_0^{\to 1} \frac{x}{1+\alpha^2 x^2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \, dx = \int\limits_0^{\to 1} \frac{1}{(1+\alpha^2 x^2)\sqrt{1-x^2}} \, dx$

$|\ldots| \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ – инт-л сход. по призн Вейерштрасса равном.

$$I'(\alpha)=\int_0^{\pi/2}\frac{1-\sin t}{(1+\alpha^2\cos^2 t)\sin t}dt=\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)\left(1+\frac{\alpha^2}{1+u^2}\right)} \ominus$$

$x=\cos t$

$dx=-\sin t\,dt$

$u=\mathrm{tg}\,t$

$t=\mathrm{arctg}\,u,\ dt=\frac{1}{1+u^2}du$

$$\ominus \int_0^{+\infty}\frac{du}{\underbrace{1+\alpha^2}_{=\beta^2}+u^2}=\frac{1}{\beta}\mathrm{arctg}\frac{u}{\beta}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}}$$

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})+C$$

$$C=I(0)=0 \qquad I(\alpha)=\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{\alpha^2+1})$$

5) $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$;

---

13. Используя интеграл Эйлера–Пуассона (19), доказать, что: $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Инт-л Эйлера-Пуассона

13.4) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\operatorname{ch}\beta x\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{\beta^2/(4\alpha)},\quad \alpha>0$;

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Rightarrow\int_0^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$t=\sqrt{\alpha}x,\ dx=\frac{dt}{\sqrt{\alpha}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(x+\gamma)^2}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha u^2}du=2\int_0^{\infty}e^{-\alpha u^2}du=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$x+\gamma=u$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}\operatorname{ch}\beta x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-\alpha x^2+\beta x}+e^{-\alpha x^2-\beta x})dx=\frac{e^{\beta^2/4\alpha}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\alpha(x-\beta/2\alpha)^2}+e^{-\alpha(x+\beta/2\alpha)^2}\right]dx$$

$$=\frac{e^{\beta^2/4\alpha}}{\cancel{2}}\cancel{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{\beta^2/4\alpha}$$

Вычислить интеграл (15–19).

4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha x}{x^2(1+x^2)}dx$; 1) $x\to 0$ $\quad \sin^2\alpha x\sim(\alpha x)^2 \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha x}{x^2(1+x^2)}\simeq\frac{\alpha^2x^2}{x^2}=\alpha^2 \quad \int_0^{\varepsilon}<\infty$

$x\to\infty \quad \left|\frac{\sin^2(\alpha x)}{x^2(1+x^2)}\right|\le\frac{1}{x^4}$ инт-л сход.

$|\alpha|\le A \quad \forall x\ge 0$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin^2\alpha x}{x^2(1+x^2)}\right)=\frac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\le\min\left\{\frac{2|\alpha|}{1+x^2},\frac{1}{x(1+x^2)}\right\}\le M(x)=\begin{cases}2A, & 0\le x<1\\ \frac{1}{x(1+x^2)}, & x\ge 1\end{cases}$$

инт-л сход. равном. по призн. Вейерштр.

2) $\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\sin 2\alpha x}{x(1+x^2)}\right)=\frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}$ аналог. сход. равном. по п. Вейерштр.

инт-л Лапласа

3) $I''(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{2\cos 2\alpha x}{1+x^2}dx=2\cdot\frac{\pi}{2}e^{-2|\alpha|}=\pi e^{-2|\alpha|}$

$I'(\alpha) = \frac{-\pi}{2} e^{-2|\alpha|} + C_1; \; I'(0) = -\frac{\pi}{2} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{2}$

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}|\alpha| + \frac{\pi}{4} e^{-2|\alpha|} + C_2; \; I(0) = \frac{\pi}{4} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{\pi}{4}$

$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}|\alpha| + \frac{\pi}{4} e^{-2|\alpha|} - \frac{\pi}{4}$

4) $\frac{\pi}{4}(2|\alpha| - 1 + e^{-2|\alpha|})$;

1. Доказать равенство;

3) $\mathrm{B}(p;q) = \mathrm{B}(q;p), \; p > 0, \; q > 0$;

4) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$;

3) $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$

$u = 1-t, \; du = -dt$

$B(p,q) = \int_1^0 (1-u)^{p-1} u^{q-1} \cdot (-du) = \int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,du = B(q,p)$

4) $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \; 0 < p < 1$

$p = 1/2 \Rightarrow \left(\Gamma(1/2)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin \pi/2} = \pi \Rightarrow$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Интеграл

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx, \tag{1}$$

сходящийся при $p > 0$, называют *гамма-функцией*, а интеграл

$$\mathrm{B}(p;q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx, \tag{2}$$

сходящийся при $p > 0$ и $q > 0$, называют *бета-функцией*.

Интегралы (1) и (2) называют также *эйлеровыми интегралами второго и первого рода* соответственно.

Отметим основные формулы для интеграла (I):

а) *формула понижения*

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p), \quad p > 0; \tag{3}$$

б) *формула дополнения*

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}, \quad 0 < p < 1. \tag{4}$$

Так как $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$, то из формулы (3) следует, что

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in N.$$

Связь между бета-функцией и гамма-функцией выражается формулой

$$B(p;q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p > 0, \; q > 0. \tag{5}$$

Используя эйлеровы интегралы, вычислить интеграл (7–12).

1.2) $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}}$; 1) $t = \frac{x+1}{3}$ $\quad dx = 3\,dt$ $\quad x=1: t=0$; $x=2: t=1$

$2-x = 2-(3t-1) = 3(1-t)$ | $1+x = 1+(3t-1) = 3t$

$\Rightarrow (2-x)(1+x)^3 = 3(1-t)(3t)^3 = 81t^3(1-t)$

$\sqrt[4]{\ldots} = 3t^{3/4}(1-t)^{1/4}$

2) $I = \int_0^1 \frac{3\,dt}{3t^{3/4}(1-t)^{1/4}} = \int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{-1/4}\,dt = B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac14\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac14\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)$

3) по ф-ле понижения $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}$; $p = \frac14 \Rightarrow \Gamma\left(\frac14\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right) = \frac{\pi}{\sin \pi/4} = \pi\sqrt{2}$

2) $\pi\sqrt{2}$;

9.2 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\,dx$; $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{(1+x)^2} = B\left(\frac54, \frac34\right) = \frac{\Gamma\left(\frac54\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)}{\underset{=1!}{\Gamma(2)}} =$

$= \frac{\frac14 \Gamma\left(\frac14\right)\cdot\Gamma\left(\frac34\right)}{1} = \frac14 \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ $\quad p = \frac54;\; q = \frac34;\; p+q = 2$

2) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$;

128) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \, dx$;

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \, dx = \int_0^1 t^4 (1-t^2)^{5/2} dt = \int_0^1 v^2 (1-v)^{5/2} \frac{dv}{2\sqrt{v}}$$

$\sin x = t \qquad t^2 = v$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v^{3/2}(1-v)^{5/2} dv = \frac{1}{2} B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(5/2)\cdot\Gamma(7/2)}{5!} = \frac{1}{2\cdot 5!}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{3\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{2^9} = \frac{3\pi}{2^9} = \boxed{\frac{3\pi}{512}}$$

8) $\frac{3\pi}{512}$;

Найти интеграл в смысле главного значения (248–255).

248. v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx$. **249.** v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, dx$.

248) $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \sin x \, dx$

$$\int_{-a}^{a} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_{-a}^{a} = -\cos a + \cos a = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \, dx = 0}$$

249) $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \, dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \cos x \, dx =$

$$\lim_{a\to\infty} \sin x \Big|_{-a}^{a} = \lim_{a\to\infty} 2\sin a \quad \boxed{\text{не имеет предела}}$$

7. Метод выделения главной части. Этот метод основан на следующем утверждении: если подынтегральная функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = g(x) + R(x)$, где $R(x)$ — функция абсолютно интегрируемая, то функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно либо абсолютно интегрируемы, либо условно интегрируемы, либо неинтегрируемы.

Обычно представление функции $f(x)$ в указанном виде удается получить, выделяя ее главную часть при $x \to +\infty$.

8. Интеграл в смысле главного значения (в смысле Коши). *Интегралом в смысле главного значения функции* $f(x)$, $x \in R$, называется

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

Этот предел обозначается $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким образом, по определению

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx.$$

Если существует несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, то существует и интеграл в смысле главного значения, и оба интеграла равны. Из существования интеграла в смысле главного значения не следует существование соответствующего несобственного интеграла. В самом деле,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{+a} x\,dx = \lim_{a\to+\infty} \frac{x^2}{2}\Big|_{-a}^{+a} = 0,$$

а $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$, очевидно, не существует.

248. 0. **249.** Не существует.

Представить функцию $f(x)$ интегралом Фурье (1–4).

1. 1) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |x| < \tau, \\ 0, & \text{если} \quad |x| > \tau; \end{cases}$

непр на $\mathbb{R}\setminus\{\pm\tau\}$

1. 1) $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau y}{y} \cos xy \, dy$;

f четн $\Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty} a(y) \cos xy \, dy$

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\tau} \cos yt\,dt = \frac{2}{\pi}\frac{\sin ty}{y}\Big|_0^{\tau} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin \tau y}{y} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin \tau y}{y} \cos xy\,dy}$$

1. Интеграл Фурье. Пусть функция $f(x)$ кусочно непрерывна на любом отрезке действительной прямой, абсолютно интегрируема на R и имеет в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные. Тогда в точках непрерывности функция f представляется в виде *интеграла Фурье*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(x-t)\,dt, \qquad (1)$$

а в точках разрыва функции f левую часть равенства (1) следует заменить на

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Если непрерывная, абсолютно интегрируемая на R функция f имеет в каждой точке $x \in R$ конечные односторонние производные, то в случае, когда эта функция является четной, справедливо равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos xy\,dy, \qquad (2)$$

где

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos yt\,dt, \qquad (3)$$

а в случае, когда f — нечетная функция, выполняется равенство

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(y)\sin xy\,dy, \qquad (4)$$

где

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\sin yt\,dt. \qquad (5)$$

Формулу (1) можно записать в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iy(x-t)}\,dt,$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения.

2. Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье. Функцию f, определяемую формулой

$$\widehat{f}(y) = \text{v.p.}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt, \qquad (7)$$

называют *преобразованием Фурье* функции f и обозначают также и через $F[f]$, а функцию $\widehat{f}$, определяемую формулой

$$\widetilde{f}(y) = \text{v.p.}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}\,dt, \qquad (8)$$

называют *обратным преобразованием Фурье* функции f и обозначают $F^{-1}[f]$.

Если функция f абсолютно интегрируема на R, то интегралы (7) и (8) существуют как несобственные, а не только в смысле главного значения.

2.3) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } |x| \leqslant \pi/2, \\ 0, & \text{если } |x| > \pi/2; \end{cases}$

$f(x)$ чётна $= \int_0^{+\infty} a(y)\cos xy\,dy$

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\cos yt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos t\cos yt\,dt$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos t\cos yt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[\cos(1+y)t + \cos(1-y)t]\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(1+y)\frac{\pi}{2}}{1+y} + \frac{\sin(1-y)\frac{\pi}{2}}{1-y}\right] \Rightarrow$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1+y)\frac{\pi}{2}}{1+y} + \frac{\sin(1-y)\frac{\pi}{2}}{1-y}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{1+y}\overset{\backslash 1-y}{} + \frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{1-y}\overset{\backslash 1+y}{}\right] = \frac{2}{\pi}\,\frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{1-y^2}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos \pi y/2}{1-y^2}\cos xy\,dy$$

3) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\pi y/2)}{1-y^2}\cos xy\,dy;$

5. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее нечетным образом на интервал $(-\infty; 0)$, если:

1) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & \text{если } x > \pi; \end{cases}$

$f(x) = \int_0^{+\infty} b(y)\sin xy\,dy$ в силу нечетности

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin yt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\sin yt\,dt; \quad \int_0^{\pi}\sin t\sin yt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(1-y)t - \cos(1+y)t]\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(1-y)\pi}{1-y} - \frac{\sin(1+y)\pi}{1+y}\right] = \frac{\sin y\pi}{1-y^2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi y}{1-y^2}\sin xy\,dy$$

5. 1) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\pi y}{1-y^2}\sin xy\,dy;$

6. Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$, продолжив ее четным образом на интервал $(-\infty;0)$, если:

1) $f(x)=e^{-\alpha x},\ x\geqslant 0,\ \alpha>0$;

$f(x)=e^{\alpha x}$ продолжим по чётности, $f(x)$ непр на $\mathbb{R}$

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos yt\,dt}_{\alpha/(\alpha^2+y^2)}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}\Rightarrow f(x)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha^2+y^2}\cos xy\,dy$$

6. 1) $f(x)=\dfrac{2\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\alpha^2+y^2}\,dy$;

3. Найдите преобразование Фурье:

а) $f(x)=e^{-\alpha|x|},\ \alpha>0$; б) $f(x)=\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2},\ \alpha>0$;

$x=-t,\ dx=-dt$

а) $$F[f]=\text{v.p.}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha|t|}e^{-ity}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha t}e^{ity}dt+\int_0^{\infty}e^{-\alpha t}\cdot e^{-ity}dt\right)$$

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^{\infty}e^{-(\alpha-iy)x}dx+\int_0^{\infty}e^{-(\alpha+iy)x}dx\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\alpha-iy}+\frac{1}{\alpha+iy}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$$

$x/\alpha=t\Rightarrow dt=\frac{dx}{\alpha}$

б) $f(x)=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+x^2},\ \alpha>0$ чётная

$$F[f]=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixy}}{\alpha^2+x^2}dx=\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\cos xy\,dx=\frac{2\alpha}{\alpha^2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\cos yx}{1+(x/\alpha)^2}dx=$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\cos y\alpha t}{1+t^2}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}e^{-\alpha|y|}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\alpha|y|}$$

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$ (7–9).

8. 1) $f(x)=xe^{-\alpha|x|},\ \alpha>0$; 2) $f(x)=e^{-x^2/2}$;

1)
$$F[xf(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)e^{-iyx}dx=$$

св-во 5
$$=i\frac{d}{dy}F[y]=i\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iyx}dx\right]$$

4) *Преобразование Фурье производной.* Если функция f и ее производные до n-го порядка включительно непрерывны и абсолютно интегрируемы на R, то

$$F[f^{(k)}]=(iy)^kF[f],\quad k=1,2,...,n. \tag{9}$$

5) *Производная преобразования Фурье.* Если функция f непрерывна на R, а функции $f(x),\ xf(x),\ ...,\ x^nf(x)$ абсолютно интегрируемы на R, то функция $\widehat{f}(y)=F[y]$ имеет на R производные до n-го порядка включительно, причем

$$\widehat{f}^{(k)}(y)=(-i)^kF[x^kf(x)],\quad k=1,2,...,n. \tag{10}$$

$$f_0(x)=e^{-\alpha|x|}\to F_0(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}$$

$$F[y]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\alpha|x|}e^{-iyx}dx=i\frac{d}{dy}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}\right)$$

$$=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{-2\alpha y}{(\alpha^2+y^2)^2}\Rightarrow F[y]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\alpha|x|}e^{-iyx}dx=-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{\alpha y}{(y^2+\alpha^2)^2}$$

8. 1) $F[f]=-i\sqrt{\dfrac{8}{\pi}}\dfrac{\alpha y}{(y^2+\alpha^2)^2}$;

2) $f(x)=e^{-x^2/2}$, $F[f]$ - ?

$$F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2}-ixy-\frac{y^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x+iy)^2}{2}\right)e^{-y^2/2}dx=\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x+iy)^2}{2}}d\left(\frac{x+iy}{\sqrt{2}}\right)=\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{\pi}}\cdot$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=\frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=e^{-y^2/2}$$

2) $F[f]=e^{-y^2/2}$;

5) $f(x)=\frac{d}{dx}\left(x^2e^{-|x|}\right)$; $F[f]=F\left[\frac{d}{dx}(x^2e^{-|x|})\right]=iyF[x^2e^{-|x|}]$

$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+y^2}$

$$\frac{d^2}{dy^2}F[e^{-|x|}]=F[-x^2f(x)]=-F[x^2f(x)]\Rightarrow F[x^2e^{-|x|}]=-\frac{d^2}{dy^2}\overline{F[e^{-|x|}]}=$$

$$=-\frac{d^2}{dy^2}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+y^2}\right)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{6y^2-2}{(y^2+1)^3}=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3};\ F[f]=iyF[x^2e^{-|x|}]=2i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,y\,\frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3}$$

5) $F[f]=2i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,y\,\frac{1-3y^2}{(1+y^2)^3}$;

10. Пусть $\widehat{f}(y)=F[f(x)]$. Доказать, что:

2) $F[f(x-\alpha)]=e^{-i\alpha y}\widehat{f}(y)$, $\alpha\in R$;

3) $F[\cos\alpha x\cdot f(x)]=\dfrac{\widehat{f}(y-\alpha)+\widehat{f}(y+\alpha)}{2}$, $\alpha\in R$;

$\text{''}\hat{f}(y)$

2) $$F[f(x-\alpha)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-\alpha)e^{-ixy}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\alpha y}e^{-iuy}du=e^{-i\alpha y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-iuy}du$$

$e^{-i(u+\alpha)y}=$
$=e^{-iuy}e^{-i\alpha y}$

$u=x-\alpha$
$dx=du$

$$=e^{-i\alpha y}\hat{f}(y)$$

3) $$F[\cos\alpha x\cdot f(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha x\, f(x)e^{-ixy}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x})e^{-ixy}dx$$

константа нормир. подразумев.

$\text{''}\dfrac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\left(e^{-ix(y-\alpha)}+e^{-ix(y+\alpha)}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix(y-\alpha)}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-ix(y+\alpha)}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\hat{f}(y-\alpha)+\hat{f}(y+\alpha)\right]$$

13. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x)=xe^{-|x|^3}$ есть бесконечно дифференцируемая функция.

$$F[y]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-iyx}dx=\int_{-\infty}xe^{-|x|^3}e^{-iyx}dx$$

пок-ем, что $F^m[y] = \frac{d^m}{dy^m}\int x e^{-|x|^3} e^{-iyx} dx = \int x e^{-|x|^3} \frac{\partial^m}{\partial y^m} e^{-iyx} dx =$

$= \int (-ix)^m x e^{-|x|^3} e^{-iyx} dx = (-i)^m \int x^{m+1} e^{-|x|^3} e^{-iyx} dx$

$x \to 0: \ g_m(x) \sim |x|^{m+1}; \ \int_{-1}^{1} |x|^{m+1} dx < \infty \quad \forall m \geq 0$

$x \to \infty: \ |x|^{m+1} e^{-|x|^3} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ и $\int_1^{+\infty} |x|^{m+1} e^{-x^3} dx$ сход. по пр. Вейерш. равном. $(x^{m+1}e^{-x^3} \leq x^{m+1} e^{-x^2};$

$\int_0^{\infty} x^{m+1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{m+2}{3}\right)$ – сход.)

$\Rightarrow \forall m \quad g_m(x) \in L^1_R$

по теор. о диффо под знаком инт-ла $\Phi(y,x) = x e^{-|x|^3} e^{-iyx}$

$\frac{\partial^m}{\partial y^m}\Phi(y,x) = (-ix)^m x e^{-|x|^3} e^{-iyx}$ и $\left|\frac{\partial^m}{\partial y^m}\Phi(y,x)\right| = g_m(x) \in L^1_R \Rightarrow$

m любое и $F^m[y] = \int \frac{\partial^m}{\partial y^m}\Phi(y,x) dx$ (при этом каждая произв. непрер.)

---

14. Пусть $\widehat{f}(y)$ — преобразование Фурье функции $1/(1+|x|^5)$. Доказать, что:
1) $\widehat{f}(y)$ имеет непрерывную на R производную третьего порядка.
3) $\widehat{f}(y) = o(1/y^5)$ при $y \to \infty$.

$\hat{f}(y) = F\left[\frac{1}{1+|x|^5}\right]$

1) $f(x) = \frac{1}{1+|x|^5}$ непр. на $\mathbb{R}$

$f(x), xf(x), x^2 f(x), x^3 f(x) \in L^1_R \Rightarrow \hat{f}(x)$ трижды непр. диффо.

3) $\hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{y^5}\right), y \to \infty$

$f(x) = \varphi(|x|^5), \ \varphi(t) = \frac{1}{1+t}$ – беск диффо. в окр $t=0$

$g(x) = |x|^5$ непр.

$g'(x) = 5x^4 \operatorname{sign} x$

$g''(x) = 20|x|^3$

$g'''(x) = 60x^2 \operatorname{sign} x$

$g^{IV}(x) = 120|x|$ – непр. на $\mathbb{R}$ и абс интегр

$g^{V}(x) = 120 \operatorname{sign} x$ кусочно-непр. $\xrightarrow{y\to\infty} 0$

Теорема 22.8. 1) *Пусть функция f имеет период $2l$ и при всех x существует $f^{(k-1)}(x)$ — кусочно-гладкая функция на $[-l;l]$, $l>0$. Тогда коэффициенты Фурье f удовлетворяют условию $a_n, b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $k = 1, 2, \ldots$).*

2) *Пусть функция f имеет период $2l$, причём $f^{(k-2)}$ непрерывна в любой точке, а $f^{(k-1)}$ — кусочно непрерывно дифференцируемая функция на $[-l;l]$, $l>0$. Тогда коэффициенты Фурье f удовлетворяют условию $a_n, b_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$, $n \to \infty$ (здесь $k = 2, 3, \ldots$).*

по Th о порядке убыв. коэфф.

$\varphi(g(x)) = f(x)$ – кус-гладк. $\Rightarrow F[f^{V}] = (iy)^5 F[f] = (iy)^5 \hat{f}(y)$, $\hat{f}(y) = o\left(\frac{1}{y^5}\right), y \to \infty$

---

58. δ-функция не порождается никакой локально интегрируемой функцией.

Пусть $\exists f(x)$ лок интегр. $(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx$, пусть $\varphi_\varepsilon(x) \geq 0$: $\varphi(0) = 1$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-\varepsilon;\varepsilon]$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$

Тогда $\overset{\varphi(0)}{1} = (\delta, \varphi_\varepsilon) = \left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x) dx\right| \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x)| dx \quad (f \in L^1_{loc})$

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Топологические пространства. Множество X называют *топологическим пространством*, если в нем задана система $\Omega = \{G\}$ его подмножеств, удовлетворяющая следующим условиям:

1) пересечение любой конечной совокупности множеств системы Ω принадлежит этой системе;

2) объединение любой совокупности множеств системы Ω принадлежит этой системе;

3) $X \in \Omega$, $\varnothing \in \Omega$.

Систему Ω называют *топологией топологического пространства* X, а множества системы Ω — его *открытыми множествами*.

Для каждой точки $x \in X$ всякое содержащее ее множество $G \in \Omega$ называют ее *окрестностью*.

Если у любых двух точек топологического пространства существуют непересекающиеся окрестности, то пространство называют *хаусдорфовым* или *отделимым*.

Множества, дополнительные к открытым, называют *замкнутыми*.

Всякую подсистему $\mathcal{D}$ системы Ω открытых множеств топологического пространства называют его *базой топологии*, если любое открытое множество пространства является объединением некоторой совокупности множеств из $\mathcal{D}$.

Систему $\mathcal{D}(x)$ окрестностей точки x топологического пространства X называют *локальной базой топологии в этой точке*, если, какова бы ни была окрестность V точки x в пространстве X, существует такая окрестность $U \in \mathcal{D}(x)$, что $U \subset V$.

Точку $x \in X$ называют *точкой прикосновения* множества $E \subset X$, если любая окрестность точки x содержит точки множества E.

Точку $x \in X$ называют *предельной точкой* множества $E \subset X$, если любая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку множества E, отличную от x.

Совокупность всех точек прикосновения множества $E \subset X$ называют его *замыканием* $\overline{E}$.

Множество E называют *плотным* в пространстве X, если $\overline{E} = X$.

Последовательность точек $x_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называют *сходящейся* в пространстве X, если существует такая точка $x \in X$, что для каждой ее окрестности $U(x)$ существует такой номер n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется включение $x_n \in U(x)$. В этом случае точку x называют *пределом последовательности* $(x_1; \ldots; x_n; \ldots)$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. В следующем пункте будет дано обобщение понятия предела последовательности точек топологического пространства.

$\varepsilon \to 0 : \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x)| dx \to 0 \Rightarrow \forall \delta > 0\ \exists \varepsilon :$

$|(\delta, \varphi_\varepsilon)| < \delta \qquad \delta = \frac{1}{2} : \exists \varepsilon : \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x)| dx < \frac{1}{2}$

но $(\varphi_\varepsilon, \delta) = 1$ противоречие

3. Обобщенные функции. *Пространством основных функций* D называют множество всех бесконечно дифференцируемых финитных функций $\varphi\colon R \to C$ со следующим определением сходимости последовательностей: последовательность $\varphi_n \in D$ называют *сходящейся к функции* $\varphi \in D$, если существует такой отрезок $[a; b]$, что $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [a; b]$, $n = 1, 2, \ldots$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [a; b]$ и на этом отрезке последовательность функций φ_n и последовательности всех их производных $\varphi_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно сходятся соответственно к функции φ и к ее производным $\varphi^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в D.

Функции, заданные на пространстве основных функций, называют обычно *функционалами* и вместо $f(\varphi)$ пишут (f, φ).

Функционал $f\colon D \to R$ называют *линейным*, если для любых $\varphi \in D$, $\psi \in D$ и любых λ, $\mu \in C$ выполняется условие

$$(f, \lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(f, \psi).$$

Функционал $f\colon D \to C$ называют *непрерывным*, если из условия $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в D следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (f, \varphi_n) = (f, \varphi)$.

Всякий линейный непрерывный функционал f, заданный на пространстве основных функций D, называют *обобщенной функцией* (на D), и их совокупность обозначают D'.

Функцию $f\colon R \to C$ называют *локально интегрируемой*, если она абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке.

Обобщенную функцию

$$(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx \tag{1}$$

называют *обобщенной функцией, порожденной локально интегрируемой функцией* $f\colon R \to R$.

Другим примером обобщенной функции является δ-функция $\delta(x)$

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D.$$

Сдвинутой δ-функцией $\delta(x - x_0)$ называют обобщенную функцию, ставящую в соответствие каждой основной функции φ число $\varphi(x_0)$.

Можно показать, что δ-функция не порождается никакой локально интегрируемой функцией.

Последовательность обобщенных функций $f_n \in D'$, $n = 1, 2, \ldots$, называют *сходящейся к обобщенной функции* $f \in D'$, если для любой функции $\varphi \in D$ выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} (f_n, \varphi) = (f, \varphi).$$

Производной обобщенной функции f называют функционал на D, обозначаемый f' и определяемый равенством

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi'), \quad \varphi \in D. \tag{2}$$

Производные порядка $n = 2, 3, \ldots$ определяют по формуле

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Из этих определений следует, что

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}), \quad \varphi \in D, \quad f^{(0)} = f, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Для любой обобщенной функции из D' любая ее производная также обобщенная функция из D'.

Таким образом, обобщенные функции имеют производные любого порядка.

60. Существуют ли в пространстве D' пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx$? Если они существуют, то чему равны?

Да

послед $T_n \in \mathcal{D}'$ обобщ ф-ций сход. к $T \in \mathcal{D}'$, если $\forall \varphi \in \mathcal{D} \to$ $\lim\limits_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$, возьмём $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ — беск дифф. финитн. ф-ции.

т.е φ имеет компактн носитель (огранич множ. обнул.)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos(nx)\varphi(x)\,dx = \Big[\underbrace{\frac{\sin nx}{n}}_{=0}\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(nx)\varphi'(x)\,dx = -\frac{1}{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(nx)\varphi'(x)\,dx$$

φ' — финитная и непр. $\Rightarrow |(T_n, \varphi)| = \left|\int \cos(nx)\varphi\right| \le \frac{1}{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)|\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow T_n(\varphi) \to 0\ \forall \varphi$

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos nx = 0$

для $\sin(nx)$: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin(nx)\varphi(x)\,dx = -\frac{\cos nx}{n}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(nx)\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos(nx)\varphi'(x)\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall\varphi$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(nx) = 0$

60. 0, 0.

4. Докажите, что в D' справедливы равенства:

а) $\lim\limits_{a\to+0}\dfrac{a}{a^2+x^2} = \pi\delta(x)$; б) $\lim\limits_{a\to+0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{a} = \pi\delta(x)$.

а) пусть $\underset{\in D}{\varphi(x)} = \varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & |x|>\varepsilon \\ \neq 0, & |x|\leq\varepsilon \end{cases}$ $\quad \varepsilon>0$

$\left(\dfrac{a}{a^2+x^2}, \varphi\right) \in L_R \quad \forall a>0 \quad = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dfrac{a\,\varphi_\varepsilon(x)}{x^2+a^2}\,dx$

$\exists\, \underset{\text{огр на } \mathbb{R}}{\varphi'}(\xi(x)) = \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \lambda(x) \quad \forall x\neq 0$ по Th Лагранжа

$\xi(x)\in(0;x)$

$\varphi\in D, \varphi'\in D \Rightarrow \lambda(x)$ огр. $|\lambda(x)|\leq M \quad \forall x\neq 0$

$\varphi(x) = \varphi(0) + x\lambda(x)$

$\left(\dfrac{a}{x^2+a^2}, \varphi\right) = \underbrace{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dfrac{a\varphi(0)}{a^2+x^2}\,dx}_{=I_1} + \underbrace{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dfrac{a\,x\,\lambda(x)}{x^2+a^2}\,dx}_{=I_2}$

$I_1 = a\varphi(0)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dfrac{dx}{x^2+a^2} = a\varphi(0)\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\Big|_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \varphi(0)\cdot 2\operatorname{arctg}\dfrac{\varepsilon}{a} \xrightarrow{a\to+0} 2\varphi(0)\dfrac{\pi}{2} = \pi\varphi(0)$

$|I_2| \leq Ma\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dfrac{|x|\,dx}{x^2+a^2} = 2Ma\int\limits_{0}^{\varepsilon}\dfrac{x\,dx}{x^2+a^2} = Ma\ln(x^2+a^2)\Big|_0^{\varepsilon} = \underbrace{Ma\ln(\varepsilon^2+a^2)}_{\to 0} - \underbrace{2M\ln a}_{\to 0} \xrightarrow[a\to+0]{} 0$

$\lim\limits_{a\to+0} I_2 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{a\to+0}\left(\dfrac{a}{x^2+a^2}, \varphi\right) = \pi\varphi(0) + 0 = (\pi\delta(x), \varphi) \Rightarrow \lim\limits_{a\to+0}\dfrac{a}{x^2+a^2} = \pi\delta(x)$.

б) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{a} \in L_R \quad \forall a>0$

Пусть $\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x), \varepsilon>0 \quad \forall x\neq 0 \quad \varphi'(\xi(x)) = \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \lambda(x)$, $\xi(x)\in(0;x)$ по Th. Лагр.

$|\lambda(x)|\leq M \quad \forall x\neq 0$ и $\varphi(x) = \varphi_0 + x\lambda(x)$

$\left(\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{a}, \varphi\right) = \varphi(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{a}\,dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\dfrac{x}{a}\lambda(x)\,dx = I_1 + I_2$

$I_1 = \varphi(0)\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{a}}{x}\,dx}_{\text{инт-л Дирихле}} = \pi\varphi(0)$

$|I_2| \leq M\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\sin\dfrac{x}{a}\,dx\right| = 2M\left|\int\limits_{0}^{\varepsilon}\sin\dfrac{x}{a}\,dx\right| = 2M\left|-a\cos\dfrac{x}{a}\Big|_0^{\varepsilon}\right| = 2Ma\left(1-\cos\dfrac{\varepsilon}{a}\right) \xrightarrow[a\to+0]{} 0$

$\lim\limits_{a\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{a}, \varphi\right) = \pi\varphi(0) + 0 = (\pi\delta(x), \varphi) \Rightarrow \lim\limits_{a\to+0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{a} = \pi\delta(x)$.

68. Производная f' обобщенной функции $f\in D'$ также является обобщенной функцией из D'.

Пусть $T \in \mathcal{D}'$, определим T' как новый функционал на $\mathcal{D}$

$(T', \varphi) = -(T, \varphi')$

1) линейность: T и $\varphi \to \varphi'$ линейны $\Rightarrow T' : \varphi \to -T(\varphi')$ линеен

2) непрер-сть: если $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}$, то $(T', \varphi_n) \to 0$ нужно проверить

если $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}$: $\varphi_n \in K \subset \mathbb{R}$ – фикс компакт: $\forall n$ $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$

и $\forall k$ $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(x)| \to 0 \Rightarrow \varphi_n'$ тоже имеет носитель внутри

K и $\forall k$ $\sup\limits_x |(\varphi_n')^{k}(x)| = \sup\limits_x |\varphi_n^{(k+1)}(x)| \to 0 \Rightarrow \varphi_n' \to 0$ в $\mathcal{D} \Rightarrow (T, \varphi_n') \to 0$

Тогда $(T', \varphi_n) = -(T, \varphi_n') \to 0$ и $T \in \mathcal{D}' \Rightarrow T' \in \mathcal{D}'$

70. Если f и g — обобщенные функции, а λ, $\mu \in C$, то $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.

Пусть $f, g \in \mathcal{D}'$ по св-ву $(a', b) = -(a, b')$ $\forall b \in \mathcal{D}$

$\lambda f + \mu g$: $(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda (f, \varphi) + \mu (g, \varphi) \in \mathcal{D}'$

$([\lambda f + \mu g]', \varphi) = -(\lambda f + \mu g, \varphi') = -[\lambda (f, \varphi') + \mu (g, \varphi')]$

$\quad \parallel$

$\lambda [-(f, \varphi')] + \mu [-(g, \varphi')] = \lambda (f', \varphi) + \mu (g', \varphi) \Rightarrow (\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$

В задачах 71–77 вычислить производные обобщенных функций.

71. $y = \theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \geqslant x_0, \\ 0 & \text{при} \quad x < x_0. \end{cases}$

$\langle (\theta(x - x_0))', \varphi \rangle = -\langle \theta(x - x_0), \varphi' \rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x - x_0) \varphi'(x) dx = -\int\limits_{x_0}^{+\infty} \varphi'(x) dx$

$= -(0 - \varphi(x_0)) = \varphi(x_0) = \langle \delta(x - x_0), \varphi \rangle \Rightarrow y' = \delta(x - x_0)$

71. $y' = \delta(x - x_0)$.

72. $y = \delta(x - x_0)$. $\langle (\delta(x - x_0))', \varphi \rangle = -\langle (\delta(x - x_0)), \varphi' \rangle = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \varphi'(x) dx$

$= -\varphi'(x_0)$

Док-во импульсного св-ва δ-функции: $\lessdot\, \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ непр неотр.

$\int\limits_{-1}^{1} \eta(u) du = 1$ и $\eta_n(u) = n\eta(nu)$, тогда $\forall n$ η_n гладкий и неотриц:

$(\eta_n(u) = 0 \;\; \forall |u| > \frac{1}{n})$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta_n(u) du = \int\limits_{-1/n}^{1/n} n \eta(nu) du = \int\limits_{-1}^{1} \eta(v) dv = 1$

$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$: $I_n = \int\limits_{-\infty} \eta_n(x - x_0) \varphi(x) dx$ $u = x - x_0$, $dx = du$

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \eta_n(u)\,\varphi(u+x_0)\,du = \int \eta_n(u)[\varphi(u+x_0)-\varphi(x_0)]\,du + \varphi(x_0)\underbrace{\int \eta_n(u)\,du}_{=1} \Rightarrow$$

$$I_n = \varphi(x_0) + \int \eta_n(u)[\varphi(u+x_0)-\varphi(x_0)]\,du$$, φ непр в $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:$

$\forall u: |u|<\delta \hookrightarrow |\varphi(u+x_0)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$ и $\operatorname{supp}\eta_n \in |u|<\frac{1}{n}<\delta$

$$\Rightarrow \ \le \int \eta_n(u)\underbrace{|\varphi(u+x_0)-\varphi(x_0)|}_{<\varepsilon}\,du \le \underbrace{\int \eta_n(u)\,du}_{=1}\,\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow$$

$$I_n = \varphi(x_0) + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \varphi(x_0)$$

$\delta(x-x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\eta_n(x-x_0)}_{=\varphi(x_0)} \in \mathcal{D}'$ сходим в $\mathcal{D}' \Leftrightarrow \forall\varphi \to \int \eta_n(x-x_0)\varphi(x)\,dx$

$\to (\delta(x-x_0),\varphi)$

72. $y' = -\varphi'(x_0)$.

---

73. $y = |x|$. $\langle |x|', \varphi\rangle = -\langle x, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi'(x)\,dx$

$$-\int_{-\infty}^{0} |x|\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} |x|\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0}(-x)\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{\infty} x\varphi'\,dx$$

$$= -x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0}(-1)\varphi(x)\,dx = 0 + \int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx$$ (φ финитная)

$$= x\varphi(x)\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} 1\cdot\varphi(x)\,dx = 0 - \int_{0}^{\infty}\varphi(x)\,dx = -\int_{0}^{\infty}\varphi(x)\,dx$$

$$\langle |x|', \varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sign}(x)\varphi(x)\,dx = \langle \operatorname{sign} x, \varphi\rangle$$

73. $y' = \operatorname{sign} x$. $\Rightarrow y' = \operatorname{sign} x$

---

84. Если f — кусочно гладкая на R функция, имеющая в точках $x_1, ..., x_n$ разрывы первого рода со скачками $p_1, p_2, ..., p_n$, то

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} + \sum_{k=1}^{n} p_k\delta(x-x_k),$$

где f' — обобщенная производная функции f, а $\frac{df(x)}{dx}$ — обобщенная функция, порожденная обычной при $x \ne x_k$, $k = 1, 2, ..., n$, производной функции f.

$$(f', \varphi) = (f, \varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\int_{x_0}^{x_1} f(x)\varphi'(x)\,dx - \ldots =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_1} + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} + \int_{x_n}^{+\infty}$$ (разбиваем по точкам разрыва 1 р. + гладка на каждом отр.)

$[x_k, x_{k+1}]$: $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\varphi'(x)\,dx = f(x)\varphi(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\varphi(x)\,dx$ ($\sum_{k=0}^{n-1}\ldots$ и

φ - финитн.) $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f\varphi'\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(x)\varphi(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$ $\left(\begin{matrix} x_0 = -\infty \\ x_n = +\infty \end{matrix}\right)$

$$= (f(x_k^+) - f(x_k^-))\varphi(x_k) = p_k\varphi(x_k) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \sum_{k=1}^{n} p_k\varphi(x_k)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi'(x)\,dx \Rightarrow \langle f', \varphi\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx - \sum_{k=1}^{n} p_k\varphi(x_k)$$

$$\Rightarrow \underset{\in \mathcal{D}'}{f'} = f'_{usual} + \sum_{k=1}^{n} p_k\delta(x-x_k)$$

$$\langle \delta(x-x_k), \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_k)\varphi(x)dx = \varphi(x_k) \Rightarrow$$

$$\langle p_k\delta(x-x_k), \varphi\rangle = p_k\varphi(x_k) \text{ и } \sum_k p_k\delta(x-x_k) : \langle \sum_{k=1}^{n} p_k\delta(x-x_k), \varphi\rangle =$$
$$\sum_{k=1}^{n} \langle p_k\delta(x-x_k), \varphi\rangle = \sum_{k=1}^{n} p_k\varphi(x_k)$$

5. Найдите в D'

$$\lim_{\xi\to+0} \frac{x\xi}{(x^2+\xi^2)^2}.$$

из Т4 а) $\lim_{\xi\to+0} \frac{\xi}{x^2+\xi^2} \overset{\mathcal{D}'}{=} \pi\delta(x)$

$$\Rightarrow \lim_{\xi\to+0} \left(\frac{\xi}{x^2+\xi^2}\right)' = \pi\delta'(x) \in \mathcal{D}'$$

$F(x) = \frac{\xi}{x^2+\xi^2}$ непр диффо., обобщ произв = обычн.

$$F'(x) = -\frac{2x\xi}{(x^2+\xi^2)^2} \Rightarrow \lim_{\xi\to0} \frac{x\xi}{(x^2+\xi^2)^2}(-2) = \pi\delta'(x) \Rightarrow \lim_{\xi\to+0} \frac{x\xi}{(x^2+\xi^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\delta'(x)$$

6. Упростите в D' выражения:

а) $(\cos x + e^{2x})\,\delta(x)$;

б) $(\cos x + e^{2x})\,\delta'(x)$;

в) $(\cos x + e^{2x})\,\delta''(x)$.

$$f(x)\delta^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f^{(k)}(0)\delta^{(n-k)}(x) \ ?$$

по свой-ву $\langle a(x)\delta(x), \varphi(x)\rangle = \langle a(0)\delta(x), \varphi(x)\rangle = a(0)\varphi(0)$

а) $(\cos x + e^{2x})\delta(x) = (\cos 0 + e^0)\delta(x) = 2\delta(x)$

б) $\langle(\cos x + e^{2x})\delta', \varphi\rangle = \langle \delta', (\cos x + e^{2x})\varphi(x)\rangle = -\langle \delta, (f(x)\varphi(x))'\rangle =$

$= -[(f(x)\varphi(x))']_{x=0}$; $(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$; $f(0) = 2$, $f'(x) = -\sin x + 2e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 2$

$\Rightarrow -[2\varphi(0) + 2\varphi'(0)]$ и $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$, $\langle \delta', \varphi\rangle = -\varphi'(0) \Rightarrow -2\varphi(0) - 2\varphi'(0) =$

$= 2(-\varphi'(0)) - 2\varphi(0) = 2(\delta', \varphi) - 2(\delta, \varphi) \Rightarrow (\cos x + e^{2x})\delta'(x) = 2\delta'(x) - 2\delta(x)$

в) $\langle(\cos x + e^{2x})\delta''(x), \varphi\rangle = \langle \delta'', f\varphi\rangle = \langle \delta, (f\varphi)''\rangle = (f\varphi)''|_{x=0}$

$(f\varphi)'' = f''\varphi + 2f'\varphi' + \varphi'' f$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 2$; $f''(x) = -\cos x + 4e^{2x} \Rightarrow$

$f''(0) = 3 \Rightarrow (f\varphi)''|_0 = 3\varphi(0) + 2\cdot 2\varphi'(0) + 2\varphi''(0) = 3\varphi(0) + 4\varphi'(0) + 2\varphi''(0)$ $(\langle \delta'', \varphi\rangle = \varphi''(0))$

$= 2\varphi''(0) - 4(-\varphi'(0)) + 3\varphi(0) = 2\langle \delta'', \varphi\rangle - 4\langle \delta', \varphi\rangle + 3\langle \delta, \varphi\rangle \Rightarrow (\cos x + e^{2x})\delta''(x) =$

$2\delta''(x) - 4\delta'(x) + 3\delta(x)$