2 Задание Наумов В Б01-303

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 ноября)

I. Особые точки однозначного характера

§12: ~~1(2, 6)~~; ~~2(7)~~; 8(~~3, 7~~); 15(~~4, 8~~); ~~17(7)~~; ~~20(5)~~; 26(5)*.

1. Найти и исследовать все особые точки функции f (для полюса указать порядок)
$$f(z) = \frac{\cos^2\left(z+\frac{1}{z}\right) - \sin^2\left(z-\frac{1}{z}\right)}{\sin(2z)\cos\frac{2}{z}} \operatorname{th}\frac{1}{z+i}.$$

2*. Пусть регулярная в кольце $G = \{z|\ 0 < |z| < 1\}$ функция f такова, что найдутся действительные числа $A > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$, при которых справедливо неравенство
$$|f(z)| \le \frac{A}{|z|^\alpha}, \quad \forall z \in G.$$
Определить тип особой точки 0 для функции f при различных α.

3. Пусть $f(w)$ — целая функция, $g(z)$ имеет существенно особую точку при $z = a$. Какого типа особую точку может иметь $f(g(z))$ при $z = a$?

II. Вычеты и вычисление интегралов

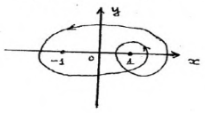
§13: ~~2(5)~~; ~~3(4)~~; ~~4(3, 6)~~; ~~5(5)~~.

4. Вычислить, если возможно, вычеты функции $\frac{z}{\cos\frac{1}{z}}$ в точках $z = 0$ и $z = \infty$. Если невозможно, объяснить почему.

§14: ~~1~~(6); 2(~~2, 9, 17, 24~~); ~~3(1)~~.

5. Вычислить интеграл от функции $f(z) = \frac{z^2}{z^2-1}\sin\frac{1}{z}$:

а) по малой петле гладкого контура, изображенного на рисунке;
б) по всему контуру.



§23: ~~1(3, 5, 8)~~; ~~2(8, 13, 20)~~.

6. Вычислить интеграл
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 3ix + 4}\,dx.$$

7. Используя равенство
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$
вычислить интеграл
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+ix}\,dx.$$

III. Принцип аргумента и теорема Руше

§15: 1(~~3, 7, 8*, 10~~).

8. а) Найти число корней многочлена $4z^6 + 4z^3 + 9z - 4$ в круге $|z| < 1$.
б) Найти число корней уравнения $5z^3 + 6\sin(z^2) = 0$ в круге $|z| < 1$.

9. Применяя теорему Руше и теорию вычетов, вычислить интеграл
$$\oint\limits_{|z|=1} z^6\left(\frac{1}{3z^4+z+1}\right)dz.$$

10. Пусть функция $f(z)$ непостоянна и регулярна в области D. Верно ли, что:

а) если область D односвязна, то и область $f(D)$ односвязна;
б) если D неодносвязна, то и $f(D)$ неодносвязна?

11. Пусть целая функция не принимает значений, лежащих в некоторой области G комплексной плоскости. Докажите, что эта функция постоянна.

I. Особые точки однозначного характера.

1. Классификация изолированных особых точек. Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки $a \neq \infty$, т. е. в кольце

$$0 < |z - a| < \rho,$$

но не регулярна в точке a. Тогда точка a называется *изолированной особой точкой однозначного характера функции* $f(z)$.

1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z)$;
2) *полюсом*, если существует бесконечный предел $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$;
3) *существенно особой точкой*, если не существует (ни конечного, ни бесконечного) предела функции $f(z)$ в точке a.

$$I_{\text{пр}}(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{и} \quad I_{\text{гл}}(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n,$$

Теорема 12.1. *Пусть точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ есть изолированная особая точка функции f. Пусть функция f представлена своим рядом Лорана с центром в точке a.*

1) *Для того, чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ была устранимой особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана отсутствовала (т. е. $I_{гл}(z) \equiv 0$).*

2) *Чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ была полюсом, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $I_{гл}(z)$ содержала конечное число ненулевых слагаемых.*

3) *Чтобы точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана $I_{гл}(z)$ содержала бесконечное число ненулевых слагаемых.*

П12:

№1(2,6)

1. Доказать, что точка $z = a$ является устранимой особой точкой для следующих функций:

2) $\dfrac{\sin z}{z}$ $(a = 0)$; 6) $\dfrac{1}{e^z - 1} - \dfrac{1}{\sin z}$ $(a = 0)$;

2) $\square$ $\dfrac{\sin z}{z}$ $(a=0)$ устранима, если $I_{гл} \equiv 0$

ряд Лорана в кольце $0<|z|$

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = \underbrace{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}}_{I_{пр}}$$

$\Rightarrow I_{гл} \equiv 0 \to$ УОТ $\blacksquare$

6) $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{\sin z}$ $(a=0)$

$\square$ $\frac{1}{e^z-1}$ рег для $z \neq 2i\pi k$

$\frac{1}{\sin z}$ рег для $z \neq \pi k$

$\Rightarrow$ в кольце $0<|z|<\pi$ функция регулярна и $a=0$ – особая точка

$$\frac{\sin z - e^z + 1}{(e^z-1)\sin z} \sim \frac{z - 1 - z - \frac{z^2}{2} + 1 + o(z^2)}{\left(1 + z + \frac{z^2}{2} - 1 + o(z^2)\right)\left(z + o(z^2)\right)}$$

$$\sim \frac{-z^2/2 + o(z^2)}{z^2 + o(z^2)} \sim -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}\right] = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ УОТ $\boxed{\text{Д}}$

№2(7)

2. Доказать, что точка $z = a$ является полюсом следующих функций:

7) $\dfrac{z}{(e^z+1)^2}$ $(a = \pi i)$;

Следствие 12.1. *Точка $a \in \mathbb{C}$ является полюсом функции f тогда и только тогда, когда существуют окрестность $\mathring{B}_\rho(a)$, натуральное число $m \geqslant 1$ и регулярная в круге $B_\rho(a)$ функция p такие, что $p(a) \neq 0$ и справедливо равенство*

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z-a)^m}, \quad z \in \mathring{B}_\rho(a). \qquad (12.7)$$

$\square$

функция регулярна при $e^z + 1 \neq 0 \Rightarrow z \neq i(\pi + 2\pi k)$

$\Rightarrow a = \pi i$ ОТ в кольце $0 < |z - \pi i| < 2\pi$

$(e^z+1)' = e^z \neq 0$ ноль первого порядка

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-\pi i)^2} \cdot \frac{z}{h_1^2(z)} \Rightarrow$ полюс $\boxed{\text{Д}}$

В свою очередь, точка $a=\infty$ является полюсом функции f тогда и только тогда, когда существуют окрестность $\mathring{B}_\rho(\infty)$, число $m \geqslant 1$, регулярная в $\mathring{B}_\rho(\infty)$ функция h, у которой существует конечный предел $h(\infty) \neq 0$, такие, что справедливо равенство

$$f(z) = z^m h(z), \quad z \in \mathring{B}_\rho(\infty). \tag{12.8}$$

№8(3,7)

8. Найти все изолированные особые точки однозначного характера для следующих функций и определить их вид:

3) $z^2 \sin \frac{z}{z+1}$; 7) $e^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{z}}$;

3) $z^2 \sin \frac{z}{z+1}$ не регулярна в точке $z=-1$ и $z=\infty$

$\lim\limits_{z\to\infty} \sin \frac{z}{z+1} = \sin 1$

$\Rightarrow z^2 \sin \frac{z}{z+1} = z^2 h_1(z)$ и $z=\infty$ полюс 2-го порядка (П2П)

$\lim\limits_{z\to -1} z^2 \sin\frac{z}{z+1} = \lim\limits_{t\to 0} (t-1)^2 \sin\left(1-\frac{1}{t}\right)$

$t_n = \frac{1}{1-n\pi} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-n\pi}-1\right)^2 \sin(\pi n) = 0$

$t_n = \frac{1}{1-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}-1\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = 1$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{z\to -1} \Rightarrow z=-1$ СОТ

3) $z=\infty$ — полюс второго порядка; $z=-1$ — существенно особая точка;

7) $e^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}}$

функция не рег при $\frac{\pi}{z} = \pi k \Rightarrow z = \frac{1}{k}$; $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$\lim\limits_{z\to\frac{1}{k}} e^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}} = ?$ пусть $w = \frac{\pi}{z}$

$\lim\limits_{z\to\frac{1}{k}} e^{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{z}} = \lim\limits_{w\to\pi k} e^{\operatorname{ctg} w}$

Заметим, что $e^{ctg\,\omega_n}$ = функция от $\mathbb{R}$

$\omega_n = \pi k + \frac{1}{n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} e^{ctg(\pi k + \frac{1}{n})} = +\infty$

$\omega_n = \pi k - \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{ctg(\pi k - \frac{1}{n})} = -\infty$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{z\to\frac{1}{k}} e^{ctg\frac{\pi}{k}}$

$\Rightarrow z = \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ СОТ

Заметим, что $z=0$ не изолированная особая точка т.к $z_k = \frac{1}{k} \to z_0 = 0$

$z=\infty$: аналогично случаю с $z = \frac{1}{k}$

т.к $\omega = \frac{\pi}{z} \to 0$ и посл $\omega_n = \frac{1}{n}$ так же подх

и $\omega_n = -\frac{1}{n} \Rightarrow z = \infty$ СОТ

7) $z = \frac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$ и $z = \infty$ — существенно особые точки;

№15(4,8)

15. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид, если:

4) $f(z) = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}(z-1)} + \dfrac{1}{z^2 - 6z + 5}$;

8) $f(z) = \dfrac{\mathrm{tg}\, z e^{\mathrm{tg}\, z}}{\mathrm{tg}\, 4z}$;

4) $\dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}(z-1)} + \dfrac{1}{z^2 - 6z + 5}$

для $\frac{1}{4\,\mathrm{sh}(z-1)} \hookrightarrow \mathrm{sh}(z-1) = 0 \Rightarrow z - 1 = i\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = 1 + i\pi k$

для $\frac{1}{z^2 - 6z + 5} \hookrightarrow z^2 - 6z + 5 = 0 \to z_1 = 1$

$z_2 = 5$

и $z = \infty$

$z = 1$ "пересекается" $\to$ проверим: $t = z - 1$

$$\lim'_{z\to 1}\left[\frac{1}{4\,sh(z-1)}+\frac{1}{(z-1)(z-5)}\right]=\lim'_{t\to 0}\left[\frac{1}{4\,sh\,t}+\frac{1}{t(t-4)}\right]$$

$$=\lim'_{t\to 0}\left[\frac{t(t-4)+4\,sh\,t}{4\,sh\,t\cdot t(t-4)}\right]=\lim'_{t\to 0}\left[\frac{t^2-4t+4t+o(t^2)}{(4t+o(t^2))\,t(t-4)}\right]$$

$$=\lim'_{t\to 0}\left[\frac{t^2+o(t^2)}{-16t^2+o(t^2)}\right]=-\frac{1}{16}\Rightarrow z=1 \text{ УОТ}$$

Остальные не переч.:

$z=1+i\pi k$: $sh(z-1)=0$, $sh(z-1)'=ch(z-1)\neq 0$ при $z=1+i\pi k$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\,sh(z-1)}=\frac{h_1(z)}{(z-1-i\pi k)}$$ $=$ $z=1+i\pi k$; $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ полюс первого порядка

$z=5$: $$\frac{1}{(z-5)(z-1)}=\frac{h_2(z)}{(z-5)}\Rightarrow$$ $z=5$ полюс первого порядка (П1П)

$z=\infty$: $z_k=1+i\pi k\to\infty \Rightarrow$ $z=\infty$ неиз. ОТ пред т. полюсов

4) $z=5$ — полюс первого порядка, $z=1$ — устранимая особая точка, $z=1+\pi ki$ ($k\in\mathbb{Z},\ k\neq 0$) — полюсы первого порядка, $z=\infty$ — предельная точка полюсов;

8) $$\frac{tg(ze^{tg z})}{tg(4z)}$$

особые точки:

$tg z$: имеет полюс при $\cos z=0 \Rightarrow z=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$ 1п

$tg z=0$ при $\sin z=0\Rightarrow z=\pi k, k\in\mathbb{Z}$ П1П

$\operatorname{tg} 4z$: $z = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ П1П

$z = \frac{\pi k}{4}$ нуль 1п

$\operatorname{tg}(ze^{\operatorname{tg} z})$ при $\cos(ze^{\operatorname{tg} z}) = 0 \Leftrightarrow ze^{\operatorname{tg} z} = \frac{\pi}{2} + \pi k$ полюс порядка?

$\sin(ze^{\operatorname{tg} z}) = 0 \Leftrightarrow ze^{\operatorname{tg} z} = \pi k$ нуль 1п

$\operatorname{tg} z$: $z_0 = \frac{\pi}{2} + \pi k$ П1П $\Rightarrow e^{\operatorname{tg} z} = e^{\frac{1}{z - z_0} h(z)}$ СОТ

$\rightarrow \dfrac{\operatorname{tg}(ze^{\operatorname{tg} z})}{\operatorname{tg} 4z}$ тоже имеет СОТ ($\operatorname{tg} 4z = 0$ не влияет)

$\Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + \pi k$ СОТ

$\operatorname{tg} 4z$: $z_0 = \frac{\pi k}{4}$: $k \equiv 2 \pmod 4$

совпадает с $\frac{\pi}{2} + \pi k$, уже учтены

$k \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow z = \pi p$ УОТ $\qquad z = \pi k$ УОТ

$k \equiv 1, 3 \pmod 4 \Rightarrow z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} p \qquad z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$ П1П

$\operatorname{tg}(z) = \pm 1 \Rightarrow e^{\pm 1} \Rightarrow \nexists k$: $ze^{\operatorname{tg} z} = \pi k$

иначе $\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{2} p\right) e^{\pm 1} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$ П1П

$z = \infty$ предельная точка

8) $z = \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — устранимые особые точки, $z = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ — полюсы первого порядка, $z = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ — существенно особые точки, $z = \infty$ — предельная точка полюсов и существенно особых точек;

Следствие 12.2. *Пусть функции g, h: $\mathrm{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$ регулярны, причем функция h имеет в точке a нуль k-го порядка ($k \geqslant 0$), а функция g имеет в точке a нуль m-го порядка ($m \geqslant 1$). Тогда, если $m > k$, то функция $f(z) = \dfrac{h(z)}{g(z)}$ имеет в точке a полюс $(m-k)$-го порядка, а если $m \leqslant k$, то функция f имеет в точке a устранимую особую точку.*

№17(7)

17. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид, если:

7) $f(z) = \dfrac{(z-2)(3z^2-4z-4)}{1-\sin\frac{\pi}{z}}$;

7) $f(z) = \dfrac{3(z-2)^2\left(z+\frac{2}{3}\right)}{1-\sin\frac{\pi}{z}}$

$\sin\frac{\pi}{z} = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{z} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

$z_k = \dfrac{2}{4k+1}$

заметим, что $z_k = \dfrac{2}{4k+1} \to z_0 = 0$

$\left(1-\sin\frac{\pi}{z}\right)' = \cos\frac{\pi}{z}\cdot\frac{\pi}{z^2} = 0$ верно

$\left(\cos\frac{\pi}{z}\cdot\frac{\pi}{z^2}\right)' = \left(-\sin\frac{\pi}{z}\cdot\frac{\pi^2}{z^4} - 2\cos\frac{\pi}{z}\cdot\frac{\pi}{z^3}\right) \neq 0$

$\Rightarrow z_k = \dfrac{2}{4k+1}$ ноль второго порядка

$\Rightarrow k=0;\ \dfrac{2}{4k+1} = 2 \Rightarrow \dfrac{(z-2)^2}{(z-2)^2}h_1(z) \Rightarrow z=2$ УОТ

$k=-1;\ \dfrac{2}{4k+1} = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{\left(z+\frac{2}{3}\right)}{\left(z+\frac{2}{3}\right)^2}h_2(z) \Rightarrow z=-\frac{2}{3}$ полюс 1 порядка

для $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}$ $\dfrac{1}{\left(z-\frac{2}{4k+1}\right)^2}\cdot h_3(z) \Rightarrow z = \dfrac{2}{4k+1}$ полюс 2 порядка $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,-1\}$

$\Rightarrow z=0$ пред т. полюсов (НОТ)

$z=\infty$: $z^3\cdot h_4(z) \Rightarrow z=\infty$ полюс 3 порядка

7) $z = \dfrac{2}{4k+1}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, $k \neq -1$) — полюсы второго порядка, $z = -\dfrac{2}{3}$ — полюс первого порядка, $z = \infty$ — полюс третьего порядка, $z = 2$ — устранимая особая точка, $z = 0$ — предельная точка полюсов;

№20(5)

20. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид, если:

5) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh}\pi z - \cos\dfrac{i\pi}{z}}{\left(i - e^{\pi/z}\right)^2}$;

$$i - e^{\frac{\pi}{z}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{\pi}{z}} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$$

$$\frac{\pi}{z} = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_k = -\frac{2i}{1+4k}$$

$$\left(i - e^{\frac{\pi}{z_k}}\right)' = \underbrace{e^{\frac{\pi}{z_k}}}_{i} \cdot \frac{1}{z_k^2} \neq 0$$

проверим является ли $z_k = -\dfrac{2i}{1+4k}$ нулём числителя

заметим, что $\operatorname{sh}(\pi z) - \cos\dfrac{i\pi}{z} = -i\sin(i\pi z) - \cos\dfrac{i\pi}{z}$

$$-i\sin\left(\frac{2\pi}{1+4k}\right) - \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}_{\equiv 0} = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{1+4k}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{1+4k} = \pi \cdot m \Rightarrow 2 = m(1+4k) \Rightarrow m \vdots 2 \Rightarrow m = \pm 2$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 = 1+4k \Rightarrow k = 0 \\ -1 = 1+4k \Rightarrow k \notin \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ при $k=0 \Rightarrow z = -2i$ является нулём числ

$$\left(-i\sin(i\pi z) - \cos\left(\frac{i\pi}{z}\right)\right)' = \pi\cos(i\pi z) - i\pi\sin\left(\frac{i\pi}{z}\right)\cdot\frac{1}{z} = 0$$

$$\underbrace{\pi\cos(2\pi)}_{-1} - \underbrace{i\pi\sin\left(\frac{i\pi}{-2i}\right)}_{-1} \cdot \frac{1}{-2i} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(z+2i)}{(z+2i)^2} h_1(z) \Rightarrow z = -2i \text{ П1П}$$

при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{\left(z+\frac{2i}{4k+1}\right)^2} h_2(z) \Rightarrow z = -\frac{2i}{4k+1}, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ПВП

Заметим, что $z_k = \frac{-2i}{4k+1} \to z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 0$ предельная точка полюсов (ПОТ)

$z = \infty$;

пусть $t = \frac{1}{z}$, $t \to 0$: $\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{t}\right) - \cos(i\pi t)}{\left(i - e^{\pi t}\right)^2}$

имеет в окрестности $t = 0$ такие же особенности что и $\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{t}\right)$

$\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{t}\right) = -i \sin\left(i\frac{\pi}{t}\right)$

при $i\frac{\pi}{t} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow t_k = \frac{2i}{4k+1}$: $-i\sin\left(i\frac{\pi}{t_k}\right) = -i$

при $i\frac{\pi}{t} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow t_k = \frac{2i}{4k-1}$: $-i\sin\left(i\frac{\pi}{t_k}\right) = i$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{t\to 0} \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{t}\right) \Rightarrow t = 0 \Leftrightarrow z = \infty$ СОТ

5) $z = -\frac{2i}{1+4k}$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0)$ — полюсы второго порядка, $z = -2i$ — полюс первого порядка, $z = \infty$ — существенно особая точка, $z = 0$ — предельная точка полюсов;

№ Т1

1. Найти и исследовать все особые точки функции f (для полюса указать порядок)
$$f(z) = \frac{\cos^2\left(z+\frac{1}{z}\right) - \sin^2\left(z-\frac{1}{z}\right)}{\sin(2z)\cos\frac{2}{z}} \operatorname{th}\frac{1}{z+i}.$$

$$\cos^2\left(z+\frac{1}{z}\right) - \sin^2\left(z-\frac{1}{z}\right) = \frac{1+\cos\left(2z+\frac{2}{z}\right)}{2} - \frac{1-\cos\left(2z-\frac{2}{z}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(2z+\frac{2}{z}\right) + \cos\left(2z-\frac{2}{z}\right)\right) = \cos(2z)\cos\left(\frac{2}{z}\right)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\cos(2z)\cos\left(\frac{2}{z}\right)}{\sin(2z)\cos\left(\frac{2}{z}\right)} \operatorname{th}\frac{1}{z+i}$$

$$\cos\left(\frac{2}{z}\right) = 0: \ \frac{2}{z} = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow z = \frac{4}{\pi + 2\pi k}$$

в $z = \dfrac{4}{\pi+2\pi k}$: $\quad \cos\left(\dfrac{2}{z}\right) = 0$

$$\cos\left(\frac{2}{z}\right)' = \underbrace{\sin\left(\frac{2}{z}\right)}_{\pm 1}\cdot\frac{2}{z^2} \neq 0$$

$$\frac{\cos(2z)}{\sin(2z)}\operatorname{th}\frac{1}{z+i}: \quad \operatorname{ctg}(2z) = 0 \text{ или не опр:}$$
$$\text{при } 2z = \frac{\pi}{2}m$$

$$\Rightarrow \frac{8}{\pi+2\pi k} = \frac{\pi}{2}m \Rightarrow 16 = \pi^2(1+2k)m$$
$$\nexists\, k, m$$

$$\operatorname{th}\frac{1}{z+i} \Rightarrow \operatorname{th}\left[\frac{1}{\frac{4}{\pi+2\pi k}+i}\right] = \operatorname{th}\left[\frac{\pi+2\pi k}{4+\pi i+2i\pi k}\right] = 0 \text{ или не опр}$$

$$\frac{\pi+2\pi k}{4+\pi i+2i\pi k} = \frac{\pi i}{2}m \Rightarrow \frac{2}{m} = \frac{4i-\pi-2\pi k}{1+2k} \Rightarrow \nexists\, m,k \text{ т.к. } \operatorname{Im} \text{ л.ч} \neq \operatorname{Im} \text{ п.ч}$$

$\Rightarrow$ $z = \dfrac{4}{\pi + 2\pi k}$ УОТ

при $z \neq \dfrac{4}{\pi + 2\pi k}$: $f(z) = ctg\, 2z \cdot th\, \dfrac{1}{z+i}$

$\cos(2z) = 0$: $2z = \frac{\pi}{2} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$

$\sin'(2z) = 0$: $2z = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = \frac{\pi}{2}k$

$\sin(2z)' = \cos(2z) \cdot 2 \neq 0$ (нуль 1 порядка)

$ch\left(\dfrac{1}{z+i}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{z+i} = i\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \Rightarrow z = \dfrac{1}{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)} - i$

$= sh\left(\dfrac{1}{z+i}\right) \cdot \dfrac{1}{(z+i)^2} \neq 0$ (нуль 1 порядка)

$sh\left(\dfrac{1}{z+i}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{z+i} = i\pi k \Rightarrow z = \dfrac{1}{i\pi k} - i$

заметим что нули $\cos(2z)$ не совп с $\sin(2z)$ (очев)

аналогично для $ch\left(\dfrac{1}{z+i}\right)$ и $sh\left(\dfrac{1}{z+i}\right)$ (очев)

но так же не совпадают "перекрёстно" т.к

нули $\cos(2z)$ и $\sin(2z)$: $z = \frac{\pi}{2}k$ и $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \in \mathbb{R}$, что не верно

для $sh\left(\frac{1}{z+i}\right)$ и $ch\left(\frac{1}{z+i}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\left(z - \frac{\pi}{2}k\right)} h_1(z)$ и $\dfrac{1}{\left(z + i - \frac{1}{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)}\right)} h_2(z)$

$\Leftrightarrow$ $z = \frac{\pi}{2}k$ – полюс 1 порядка

$z = \frac{1}{i\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)} - i$ полюс 1 порядка

$z_k = \frac{\pi}{2}k \to z_\infty = \infty \Rightarrow z = \infty$ неиз ОТ, предельная т. полюсов

№ Т3

цeлая $\equiv$ регулярная в $\mathbb{C}$

3. Пусть $f(w)$ — целая функция, $g(z)$ имеет существенно особую точку при $z = a$. Какого типа особую точку может иметь $f(g(z))$ при $z = a$?

Теорема 19.4 (Сохоцкий). *Пусть функция $f\colon \overset{\circ}{B}_\varepsilon(a) \to \mathbb{C}$ регулярна, а точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции f. Тогда для любого числа $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к точке a, и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

Заметим, что условие регулярности функции в $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(a)$ следует из опр. особой точки.

УОТ: пусть $f(w) \equiv 1$ (очевидно целая), тогда $f(g(z)) \equiv 1$

$\lim\limits_{z\to\infty} f(g(z)) = 1 \Rightarrow$ УОТ

СОТ: т.к. $g(z)$ имеет СОТ в $z=a$,

возьмём $f(w) = w$ (очевидно целая), тогда $f(g(z)) = g(z)$.

и $z = a$ СОТ для $f(g(z))$

Полюс: не может, пойдём от противного, пусть $f(g(z))$ имеет

полюс в $z = a \Leftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(g(z)) = \infty$

f – целая $\Rightarrow \lim\limits_{z\to a} f(g(z)) = f\left(\lim\limits_{z\to a} g(z)\right)$

Но по теореме Сохоцкого, для $\forall A \in \overline{\mathbb{C}} \hookrightarrow \exists \{z_n\}$:

$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = A$

$\Rightarrow$ возьмём $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$: $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n) = A < \infty$

тогда $\lim\limits_{z\to a} f(g(z)) = f(\lim\limits_{z\to a} g(z))$

(если $\exists \lim$) $= f(\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)) = f(A) < \infty$

$\Rightarrow$ противоречие $\boxtimes$

$f(g(z))$ может иметь УОТ и СОТ

и не может полюс

II Вычеты и вычисление интегралов

Определение 13.1. Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка регулярной функции $f : \overset{\circ}{\mathrm{B}}_\rho(a) \to \mathbb{C}$, $\rho > 0$. Пусть $\gamma_r := \{z \mid |z-a| = r\}$ — положительно ориентированная окружность, причем $0 < r < \rho$. Тогда *вычетом функции f в точке a* называется число

$$\operatorname*{res}_a f := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz. \tag{13.1}$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n.$$

$$\operatorname*{res}_a f = c_{-1}.$$

Лемма 13.2. *Пусть функция $f\colon \overset{\circ}{\mathrm{B}}_\rho(a) \to \mathbb{C}$ представима в виде*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad z \in \overset{\circ}{\mathrm{B}}_\rho(a),$$

где функции P и Q регулярны в круге $\mathrm{B}_\rho(a)$, причем

$$P(a) \neq 0, \qquad Q(a) = 0, \qquad Q'(a) \neq 0. \tag{13.8}$$

Тогда справедлива формула

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \tag{13.9}$$

Лемма 13.1. *Пусть a — полюс функции f порядка m. Тогда для любого $m_0 \geqslant m$ справедлива формула*

$$\operatorname*{res}_a f = \frac{1}{(m_0-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{m_0-1}}{dz^{m_0-1}} \left[(z-a)^{m_0} f(z)\right]. \tag{13.4}$$

$m_0 = 1$: $\operatorname*{res}_a f = \lim\limits_{z\to a} \left[(z-a)f(z)\right]$

Для УОТ верно, что $I_{2n} = 0 \Rightarrow c_{-1} = 0 \Rightarrow \operatorname{res} f = 0$

п13

№2(5)

Из выражения $\operatorname*{res}_a f(z) = c_{-1}$, для разл $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ видно что замена $t = z - a$ "сохраняет" res: $\operatorname*{res}_0 f(t) = c_{-1}$, где $f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^n$

2. Найти вычеты следующих функций во всех их конечных особых точках:

5) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$;

$$\frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} \Rightarrow \text{особые точки: } z = 1 \quad z = \pm i$$

$$= \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-1)^2}$$

для $z = i$: $\operatorname*{res}_i f = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{(z-i)}{(z-i)(z+i)(z-1)^2} = \lim\limits_{z\to i} \dfrac{1}{(z+i)(z-1)^2} = \dfrac{1}{2i(z-i)^2}$

$= \dfrac{1}{4} \Rightarrow$ $\dfrac{1}{4}$ при $z = i$

для $z = -i$ $\operatorname*{res}_{-i} f = \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z+i}{(z-i)(z+i)(z-1)^2} = \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{1}{(z-i)(z-1)^2} = \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{4}$ при $z = -i$

для $z = 1$:

$$\underset{1}{\text{res}}\, f = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \frac{(z-1)^2}{(z^2+1)(z-1)^2} =$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} \frac{1}{z^2+1} = \lim_{z\to 1} \frac{-2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2}$ при $z=1$

5) $-\frac{1}{2}$ при $z = 1$, $\frac{1}{4}$ при $z = i$, $\frac{1}{4}$ при $z = -i$;

№3(4)

3. Найти $\underset{z=a}{\text{res}}\, f(z)$, если:

4) $f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)$, $a = 0$;

$$z^2 \cos\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{1-z}{z^2}\right)^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{4n+2}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} (-z)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} (-1)^k \cdot \frac{z^k}{z^{4n+2}}$$

$$\underset{0}{\text{res}}\, f = C_{-1} \Rightarrow \frac{z^k}{z^{4n+2}} = \frac{1}{z} \Rightarrow 4n+2-k = 1$$

$4n = 3+k$; $k \le 2n$

$$\left.\begin{matrix} k = 4m-3 \\ 4m-3 \le 2n \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4n = 4m \Rightarrow \begin{cases} m = n \\ 4m-3 \le 2n \end{cases} \Rightarrow 4n-3 \le 2n$$

$2n \le 3 \Rightarrow n = 1$

$\Rightarrow k = 1$

$$\Rightarrow \underset{0}{\text{res}}\, f = \frac{-1}{2} \cdot C_2^1 \cdot (-1) = 1 \Rightarrow \underset{0}{\text{res}}\, f = 1$$

4) 1;

Residue at infinity [edit]

In general, the residue at infinity is defined as:

$$\operatorname{Res}(f(z),\infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

Wiki

Лемма 13.3. *Пусть ∞ — устранимая особая точка функции f. Тогда $\operatorname{res}_{\infty} f$ можно вычислить по формуле*

$$\operatorname{res}_{\infty} f = \lim_{z\to\infty} \left[z\left(f(\infty) - f(z)\right)\right]. \tag{13.13}$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -c_{-1},$$

В нашем курсе не доказывается (хотя выводится из определ. за 2 строчки), поэтому лучше не использовать

Так же из формулы видно что замена влияет на res f, поэтому надо быть аккуратными!

№4(3,6)

4. Найти вычеты следующих функций в бесконечности:

3) $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$;

6) $z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

3) $\operatorname{res}_{\infty} f = \lim\limits_{z\to\infty}\left[-\dfrac{z\sin\frac{1}{z}}{z-1}\right] \ominus$

заметим, что $\lim\limits_{z\to\infty} z\sin\frac{1}{z} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$

$\ominus \lim\limits_{z\to\infty}\left[z\sin\frac{1}{z}\right]\lim\limits_{z\to\infty}\left[\dfrac{-1}{z-1}\right] = 0$

3) 0;

6) $z\cos^2\frac{\pi}{z} - z\left(\dfrac{1+\cos\frac{2\pi}{z}}{2}\right) = \dfrac{z}{2} + \dfrac{z}{2}\cos\dfrac{2\pi}{z}$

$\dfrac{z}{2} + \dfrac{z}{2}\cos\dfrac{2\pi}{z} = \dfrac{z}{2} + \dfrac{z}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{z}\right)^2 + o\left(\dfrac{1}{z^3}\right)\right) \Rightarrow c_{-1} : -\dfrac{z}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{z}\right)^2$

$\Rightarrow \operatorname{res}_{\infty} f = -c_{-1} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot(2\pi)^2 = \pi^2 \Rightarrow \operatorname{res}_{\infty} f = \pi^2$

6) π^2.

№5(5)

5. Найти вычеты следующих функций во всех их особых точках и в бесконечности:

5) $\sin z \sin\dfrac{1}{z}$;

особые точки: $z=0$ и $z=\infty$

при $z=0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\frac{1}{z^{2k+1}}$$ если раскрыть произв сумм то получим сумму с членами

$$\frac{z^{2n+1}}{z^{2k+1}}=\frac{1}{z^{2k-2n}}\neq\frac{1}{z} \text{ т.к. } \nexists k,n: \underset{2(k-n)=1}{} \Rightarrow C_{-1}=0 \Rightarrow \operatorname{res}_0 f=0$$

В точке $z=\infty$: разложение такое же, но $\operatorname{res}_\infty f=-C_{-1}=0$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_\infty f=0$$

5) 0 при $z=0$ и $z=\infty$;

ТЧ

4. Вычислить, если возможно, вычеты функции $\frac{z}{\cos\frac{1}{z}}$ в точках $z=0$ и $z=\infty$. Если невозможно, объяснить почему.

$$\cos\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{\pi}{2}+\pi k \Rightarrow z_k=\frac{2}{\pi+2\pi k},\ \left(\cos\frac{1}{z}\right)'=\underset{\neq 0}{\sin\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z^2}}$$

заметим, что $z_k=\frac{2}{\pi+2\pi k}\underset{k\to\infty}{\to} z_0=0 \Leftrightarrow \frac{h_1(z)}{\left(z-\frac{2}{\pi+2\pi k}\right)} \Rightarrow z_k=\frac{2}{\pi+2\pi k}$ П1П

$\Rightarrow z_0=0$ не изолированная

$\Rightarrow \operatorname{res}_0 f$ не опр

$z=\infty$: $z\cdot h_2(z)\Rightarrow z=\infty$ П1П

$$\frac{z}{\cos\frac{1}{z}}=\frac{z}{1-\frac{1}{2z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)}=z\left(1+\frac{1}{2z^2}+o\left(\frac{1}{z^2}\right)\right)$$

$$=C_{-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow \operatorname{res}_\infty f=-\frac{1}{2}$$

n 14

Теорема 13.1 (Коши о вычетах). *Пусть задана область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ (см. определения 7.1, 7.2), пусть $\overline{G} := G \bigcup \Gamma$. Пусть*

функция f определена и регулярна на G всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ (при этом имеется в виду, что все a_k различны и если $\infty \in \in G$, то $\infty = a_n$) и пусть к тому же функция f определена и непрерывна на $\overline{G} \setminus (\bigcup\limits_{k=1}^{n} a_k)$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f. \qquad (13.14)$$

Следствие 13.1. *Пусть функция f регулярна во всей комплексной плоскости, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, \ldots, a_n \in \overline{\mathbb{C}}$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{a_k} f = 0. \qquad (13.17)$$

№1(6)

1. Вычислить интегралы от рациональных функций:

6) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{dz}{z^2(z^2-7z+12)}$.

6) Найдём ОТ функции: $z=0$, $z=4$, $z=3$ и $z=\infty$

из них $|z+i|<2$: $z=0$

$$\Rightarrow \oint\limits_{|z+i|=2} \frac{dz}{z^2(z^2-7z+12)} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_0 f$$

заметим, что $z=0$ П2П $\hookrightarrow$ $\displaystyle\operatorname*{res}_0 f = \lim_{z\to0}{}' \frac{d}{dz} \frac{z^2}{z^2(z^2-7z+12)}$

$$= \lim_{z\to0}{}' \frac{d}{dz} \cdot \frac{1}{z^2-7z+12} = \lim_{z\to0}{}' \left[-\frac{2z-7}{(z^2-7z+12)^2}\right] = \frac{7}{144}$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{|z+i|=2} \frac{dz}{z^2(z^2-7z+12)} = \frac{7\pi i}{72}$$

6) $\frac{7\pi i}{72}$.

№2(2, 9, 17, 24)

2. Вычислить интегралы:

2) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2}\,dz$;

ОТ: $z=2$ и $z=1$, $z=\infty$

$|z|<4 \Rightarrow z=2$ и $z=1$

можно решить через $\operatorname{res}_\infty f$

$$\operatorname{res}_2 f = \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}\right] = \lim_{z\to 2} e^{\frac{1}{z-1}} = e$$

$z=1$: пусть $t=z-1$ (сдвиг "сохраняет" res)

$$\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t-1} = -\frac{e^{\frac{1}{t}}}{1-t} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{t^n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}t^k$$

при перемножении получим ряд с членами $C_m t^m$: $m=k-n$

$\Rightarrow k-n=-1 \Rightarrow k=n-1\geq 0 \Rightarrow n\geq 1$

$$C_{-1}: -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{t} = -\frac{1}{t}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = -\frac{1}{t}(e-1) \Rightarrow C_{-1} = 1-e$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=4} f(z) = 2\pi i(e+1-e) = 2\pi i$$

2) $2i$;

9) 9) $\oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z}{z^2+9} \operatorname{ch} \frac{z}{z-2}\, dz;$

OT: $z = \pm 3i$, $z = 2$, $z = \infty$

$|z-i| < 3 \Rightarrow z = 3i,\ z = 2$, вне лежат $z = -3i$

$z = \infty$

$$\Rightarrow \oint\limits_{|z-i|=3} \frac{z}{z^2+9} \operatorname{ch} \frac{z}{z-2}\, dz = -2\pi i \left(\operatorname*{res}_{-3i} f + \operatorname*{res}_{\infty} f\right)$$

$$\operatorname*{res}_{-3i} f = \left.\frac{z}{2z} \operatorname{ch} \frac{z}{z-2}\right|_{z=-3i} = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{3i}{2+3i} = \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{9+6i}{13}$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \lim_{z\to\infty} z\left(0 - \frac{z}{z^2+9} \operatorname{ch} \frac{z}{z-2}\right) = \lim_{z\to\infty} -\frac{z^2}{z^2+9} \operatorname{ch} \frac{z}{z-2}$$

$$= -\operatorname{ch} 1$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{|z-i|} \frac{z}{z^2+9} \operatorname{ch} \frac{z}{z-2}\, dz = -2\pi i \left(-\operatorname{ch} 1 + \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{9+6i}{13}\right)$$

$$= \pi i \left(2 \operatorname{ch} 1 - \operatorname{ch} \frac{9+6i}{13}\right)$$

9) $\pi i \left(2 \operatorname{ch} 1 - \operatorname{ch} \frac{9+6i}{13}\right);$

17) 17) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{(z-i)\sin\frac{1}{iz}}{(z-3i)^2}\,dz;$

ОТ: $z=3i,\ z=0,\ z=\infty$

$|z|<1 \Rightarrow z=0$, СОТ

по следствию из т. Коши: $\sum\limits_{a_k} \operatorname{res}\limits_{a_k} f = 0 \Rightarrow$ найдём в точках $z=3i$ и $z=\infty$

$$\operatorname{res}_{3i} f = \lim_{z\to 3i} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-3i)^2}{(z-3i)^2}(z-i)\sin\frac{1}{iz}\right] = \lim_{z\to 3i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)\sin\frac{1}{iz}\right]$$

$$= \lim_{z\to 3i}\left[\sin\frac{1}{iz} - (z-i)\cos\frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{iz^2}\right] = -\sin\frac{1}{3} + \frac{2}{9}\cos\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f = \lim_{z\to\infty}\left[z\left(0 - \frac{(z-i)\sin\frac{1}{iz}}{(z-3i)^2}\right)\right] = \lim_{z\to\infty}\left[-\frac{z^2+o(z^2)}{z^2+o(z^2)}\sin\frac{1}{iz}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_0 f = 0 - \left(\frac{2}{9}\cos\frac{1}{3} - \sin\frac{1}{3} - 0\right) = \sin\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\cos\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\left(\sin\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\cos\frac{1}{3}\right)$$

17) $2\pi i\left(\sin\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\cos\frac{1}{3}\right);$

№24

24) $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{z\,dz}{(\pi-3z)(1+\cos 3z)}.$

ОТ: $z=\infty$, $z=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi k$

$|z-1|<1 \Rightarrow \left|\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi k-1\right|<1$

при $k\geqslant 0 \hookrightarrow \frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi k-1<1 \Rightarrow \pi+2\pi k<6$

$\Rightarrow k<1 \Rightarrow k=0$

при $k<0 \hookrightarrow -\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi m+1<1 \Rightarrow -\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi m<0$

пусть $k=-m$

$\frac{2}{3}\pi m<\frac{\pi}{3}$

$2m<1$ $\nexists m$

$\Rightarrow |z-1|<1 \hookrightarrow z=\frac{\pi}{3}$

пусть $t=z-\frac{\pi}{3}$ $\quad 3z=3t+\pi$

$$f(t)=\frac{t+\frac{\pi}{3}}{3t(1+\cos(3t+\pi))}=\frac{t+\frac{\pi}{3}}{3t(1-\cos(3t))}$$

$$f(t)=\frac{t+\frac{\pi}{3}}{-3t\left(\frac{9t^2}{2}-\frac{(3t)^4}{4!}+\frac{(3t)^6}{6!}+o(t^6)\right)}=\frac{t+\frac{\pi}{3}}{-\frac{27}{2}t^3}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{9t^2}{12}+\frac{2(3t)^4}{6!}+o(t^4)\right)}$$

$$=\frac{t+\frac{\pi}{3}}{-\frac{27}{2}t^3}\left(1+\frac{9t^2}{12}-\frac{2(3t)^4}{6!}+\frac{81}{144}t^4+o(t^4)\right)$$

$t^{-1}: -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{27}\cdot\frac{9}{12}=-\frac{\pi}{54}$

$$\Rightarrow \oint\limits_{|z-1|=1} f(z)\,dz=2\pi i\cdot -\frac{\pi}{54}=-\frac{\pi i}{27}$$

24) $-\frac{\pi^2 i}{27}$.

№3(1)

3. Сделав соответствующую замену переменной, свести данный интеграл к интегралу по замкнутому контуру в $\mathbb{C}$ и вычислить его:

1) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} \quad (a > 1);$

пусть $z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)$

тогда $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$dz = e^{i\varphi} \cdot i d\varphi = iz\,d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{dz}{iz}$

$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz/iz}{a + \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{2}{i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2a\cdot z+1}$ пусть $g(z) = \frac{1}{z^2+2az+1}$

ОТ: $z^2+2az+1=0 \Rightarrow z = -a \pm \sqrt{a^2-1}$

$\left|-a \pm \sqrt{a^2-1}\right| < 1$ при $- \Rightarrow \left|-a-\sqrt{a^2-1}\right| = \left|a+\sqrt{a^2-1}\right|$

$> |a| > 1$ не подх

при $+ \Rightarrow \left|-a+\sqrt{a^2-1}\right| = \left|a-\sqrt{a^2-1}\right| < 1$ подх

пусть $A = -a+\sqrt{a^2-1}$

$B = -a-\sqrt{a^2-1}$

$\operatorname{res}_A g = \lim\limits_{z\to A} \frac{(z-A)}{(z-A)(z-B)} = \lim\limits_{z\to A} \frac{1}{z-B} = \frac{1}{A-B} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}$

$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=1} g(z)\,dz = \frac{\pi i}{\sqrt{a^2-1}}$

$$\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz = \frac{2}{i}\oint\limits_{|z|=1} g(z)\,dz = \frac{2}{i}\cdot\frac{\pi i}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

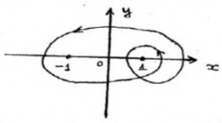
1) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$;

№ Т5

5. Вычислить интеграл от функции $f(z)=\frac{z^2}{z^2-1}\sin\frac{1}{z}$:

а) по малой петле гладкого контура, изображенного на рисунке;

б) по всему контуру.



Обозначим малую петлю γ, весь контур Γ

а) Заметим, что γ является положительно ориентированной границей (по опр)

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot \operatorname*{res}_{1} f$$

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2-1}\sin\frac{1}{z} = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)}\sin\frac{1}{z}$$

$$\operatorname*{res}_{1} f = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{(z-1)}\frac{z^2}{(z+1)}\sin\frac{1}{z} = \lim_{z\to 1}\frac{z^2}{(z+1)}\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\sin 1$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \pi i\sin 1$$

б) обозначим $\tilde{\gamma} = \Gamma \setminus \gamma$ = внешняя часть контура
(так же полож. ориент)

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\gamma} f(z)dz + \oint_{\tilde{\gamma}} f(z)dz$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{res}_1 f\right) + 2\pi i \left(\operatorname{res}_1 f + \operatorname{res}_{-1} f\right) = 2\pi i \left(2\operatorname{res}_1 f + \operatorname{res}_{-1} f\right)$$

из а) $\hookrightarrow \operatorname{res}_1 f = \frac{1}{2}\sin 1$

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z\to -1} \frac{(z+1)}{(z+1)} \frac{z^2}{(z-1)} \sin\frac{1}{z} = \lim_{z\to -1} \frac{z^2}{(z-1)} \sin\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\sin 1$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(2\operatorname{res}_1 f + \operatorname{res}_{-1} f\right) = 3\pi i \sin 1$$

№ 23

Справочные сведения

1. Метод вычисления несобственных интегралов с помощью теоремы Коши о вычетах (см. § 14) состоит в следующем. Пусть требуется вычислить интеграл от действительной функции $f(x)$ по какому-либо (конечному или бесконечному) интервалу (a, b) оси $\mathbb{R}$. Тогда (a, b) дополняется какой-нибудь кривой Γ, которая вместе с интервалом (a, b) ограничивает некоторую область D в $\mathbb{C}$. Если функция $f(x)$ регулярно продолжается в D (и непрерывно в $\overline{D}$), за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то по теореме Коши о вычетах получаем

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = \int_a^b f(x)\,dx + \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z) \right).$$

Тогда исходный интеграл $I = \int_a^b f(x)\,dx$ удается вычислить, если удается вычислить интеграл $\int_{\Gamma} f(z)\,dz$ или выразить его через I.

2. Заметим, что в теореме Коши ∂D (граница области D) должна иметь конечную длину. Если $(a,\, b) = \mathbb{R}$, то часто удобно выбирать отрезок $[-R,\, R]$ действительной оси, а в качестве дополняющей кривой Γ — полуокружность $\Gamma = \Gamma_R$ радиуса $R > 0$, расположенную в верхней полуплоскости (рис. 23.1), т. е.

$$\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}.$$

При этом может быть использована следующая теорема.

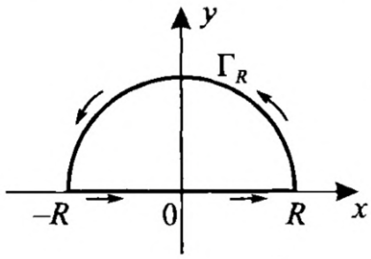


Рис. 23.1

Теорема 1. *Пусть функция f регулярна в верхней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, \ldots, a_n$ и непрерывна вплоть до действительной оси. Тогда, если*

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} f(z)\, dz = 0, \qquad (1)$$

где $\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, то

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z) \right). \qquad (2)$$

Напоминание из учебника Петровича:

Определение 25.3. Пусть $f \in L_R[a,b]$ на любом конечном отрезке $[a;b]$. Если существует конечный $\lim\limits_{B\to+\infty} \int_{-B}^{B} f(x)\, dx$, то он называется интегралом от функции f по всей числовой прямой в смысле главного значения и обозначается

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

L_R - мн-во абс. интегрируемых функ.

№ 1(3, 5, 8)

Напоминание $|a-b| \geqslant |a| - |b|$

(нерав. Треугольника) $|a+b| \geqslant |a| - |-b| = |a| - |b|$

1. Вычислить интегралы:

3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2}$;

3) рассмотрим $\oint\limits_{D_R} \frac{dz}{z^2-2iz-2}$, где $D_R = \Gamma_R + I_R$

пусть $f(z) = \frac{1}{z^2-2iz-2}$

Найдём особые точки: $z^2-2iz-2 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 1 + i$

$z = \infty$

при $R > \sqrt{2}$, особые точки $z_{1,2} \in D_R$,

$\Gamma_R = \{ z \mid |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0 \}$

$I_R = \{ z \mid \operatorname{Re} z \in [-R, R], \operatorname{Im} z = 0 \}$

$$\oint\limits_{D_R} f(z)dz = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{1+i} f + \operatorname*{res}_{-1+i} f \right) = -2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{\infty} f$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = \lim_{z\to\infty} z\left[0 - \frac{1}{z^2-2iz-2}\right] = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^2+O(z^2)} = 0$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{D_R} f(z)dz = -2\pi i \cdot 0 = 0$$

т.к. $|a-b| \geq |a| - |b| \Rightarrow \lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^2-2iz-2} \leq$

$$\leq \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{|z^2-(2iz+2)|} \leq \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{|z^2|-|2iz|-2}$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{R^2-2R-2} = \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R}{R^2-2R-2} = 0$$

$$\Rightarrow (v.p) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2} = -2\pi i \cdot \underset{\infty}{res}\, f(z) = 0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2} \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{сходится}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2} = (v.p) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2} = 0$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2ix - 2} = 0$$

3) 0;

5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\, dx$;

5) $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx \Rightarrow \oint\limits_{D_R} \frac{z^4+1}{z^6+1} dz$$

ОТ: $z = \infty$

$z = z = e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right)}$

$\Rightarrow R = 1$

для $\operatorname{Im} z \geq 0$: $z_{1,2,3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},\ i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

$$\Rightarrow \oint\limits_{D_R} \frac{z^4+1}{z^6+1} dz = 2\pi i \sum_{i=1,2,3} \underset{z=z_i}{res} f$$

$$\underset{z_i}{res} f = \frac{z_i^4+1}{6z_i^5} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z_i} + \frac{1}{6} \frac{1}{z_i^5} \overset{z_i^6 = -1}{=} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{z_i} - z_i\right)$$

$$\operatorname*{res}_{i} f = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{i} - i\right) = \frac{1}{6}\cdot -2i$$

$$\operatorname*{res}_{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} f = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}+i} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$\operatorname*{res}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{-\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \oint_{D_R} \frac{z^4+1}{z^6+1}dz = 2\pi i \sum_{i=1,2,3} \operatorname*{res}_{z_i} f = \frac{\pi i}{3}\left(-2i + \frac{2}{\sqrt{3}+i} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + \frac{2}{-\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{3}\left(-3i + \frac{2}{\sqrt{3}+i} + \frac{2}{-\sqrt{3}+i}\right) = \frac{\pi i}{3}(-4i) = \frac{4\pi}{3}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{z^4+1}{z^6+1}dz \le \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \left|\frac{z^4+1}{z^6+1}\right| dz \le \lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{|z^4|+1}{|z^6|-1}dz$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{R^4+1}{R^6-1}\cdot \pi R = 0$$

$$\Rightarrow (v.p)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \frac{4\pi}{3}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \text{ сходится}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}dx = \frac{4\pi}{3}$$

5) $\frac{4\pi}{3}$;

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} \Rightarrow \oint\limits_{D_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3}$ OT: $z = \pm i$, $z = \infty$ $\Rightarrow R > 1$

$$\oint\limits_{D_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_i f$$

$$\operatorname{res}_i f = \frac{1}{2!} \lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-i)^3}{(z-i)^3(z+i)^3}\right] = \frac{1}{2} \lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2} \cdot \frac{1}{(z+i)^3} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to i} \frac{12}{(z+i)^5} = 6 \cdot \frac{1}{(2i)^5} = \frac{3}{16i}$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{D_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3} = 2\pi i \cdot \frac{3}{16i} = \frac{3\pi}{8}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3} \leq \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{|(z^2+1)^3|} \leq \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{dz}{(|z^2|-1)^3} = \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R}{(R^2-1)^3} = 0$$

$$\Rightarrow (v.p) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}; \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} \sim \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}$$

8) $\frac{3\pi}{8}$.

Лемма 2 (*Жордана*). *Пусть функция $g(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0 > 0\}$ и пусть $\lim\limits_{R\to+\infty} M(R) = 0$, где*

$$M(R) = \max_{z\in\Gamma_R} |g(z)|,\ \Gamma_R = \{z\colon |z| = R, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}.$$

Тогда, если $\alpha > 0$, то

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} g(z)e^{i\alpha z}\,dz = 0.$$

№2 (8, 13, 20)

8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5}\,dx;$

$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5}dx$, рассмотрим $J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)e^{i(x-1)}}{x^2+4x+5}dx$

тогда $I = \operatorname{Im} J$

к функции $f(z) = g(z)\cdot e^{iz}$, где $g(z) = \frac{(z-3)e^{-i}}{z^2+4z+5}$

ОТ: $z = -2 \pm i \Rightarrow R > \sqrt{5}$
$z = \infty$

применима лемма Жордана:

$$\lim_{R\to+\infty} \max_{\Gamma_R} |g(z)| = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} g(z)\cdot e^{iz}dz = 0$$

$$\operatorname*{res}_{z_0=-2+i} f = \frac{(z-3)e^{i(z-1)}}{2z+4}\Bigg|_{z=-2+i} = \frac{(-5+i)e^{i(-3+i)}}{2i}$$

$$(v.p)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \oint_{D_R} f(z)dz \quad \left(\text{т.к.} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0\right) = 2\pi i \cdot \frac{(-5+i)e^{i(-3+i)}}{2i}$$

$$= \pi \cdot (-5+i)e^{i(-3+i)}$$

$$(v.p)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5}dx = \operatorname{Im}\,(v.p)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)e^{i(x-1)}}{x^2+4x+5}dx = \operatorname{Im}\left(\pi(-5+i)e^{i(-3+i)}\right)$$

$$= \frac{\pi}{e}(3\sin 3 + \cos 3)$$

докажем сходимость $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5}dx$

замена $t = x-1 \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-2)\sin t}{(t+3)^2+1}dt$

применим признак Дирихле сходимости на промежутке $(-\infty; A] \cup [A, +\infty)$

A выберем так, что $\dfrac{(t-2)}{(t+3)^2+1}$ монотонна.

$$\int_A^B \sin t\, dt = -\cos t\Big|_A^B = \cos A - \cos B < 2 \;;\; B < +\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t-2}{(t+3)^2+1} = 0 \Rightarrow \text{на } [A, +\infty) \text{ сходится}$$

на $(-\infty; -A]$ аналогично

На $[-A, A]$ нет особенностей $\Rightarrow$ сходится на всей оси

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)\sin(x-1)}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{\pi}{e}(5\sin 3+\cos 3)$$

8) $\pi e^{-1}(5\sin 3 + \cos 3)$;

13) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}\,dx$;

$$13)\quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(8x-3)}{4x^2-7x+5}\,dx$$

пусть $t = x - \frac{7}{8}$, $dt = dx$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(8t+4)}{4t^2+\frac{31}{16}}\,dt \qquad \text{рассмотрим } J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(8t+4)}}{t^2+\frac{31}{16}}\,dt$$

$$I = \operatorname{Re} J$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(8t+4)}}{4t^2+\frac{31}{16}}\,dt \Rightarrow \oint_{D_R} \frac{e^{i(8z+4)}}{4z^2+\frac{31}{16}}\,dz$$

ОТ: $z = \infty$

$z = \pm \frac{\sqrt{31}}{8} i$

$\Rightarrow R > \frac{\sqrt{31}}{8}$

$$\oint \frac{e^{i(8z+4)}}{4z^2+\frac{31}{16}}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{\frac{\sqrt{31}}{8}i} f$$

$$\operatorname*{res}_{\frac{\sqrt{31}}{8}i} f = \left.\frac{e^{i(8z+4)}}{8z}\right|_{z=\frac{\sqrt{31}}{8}i} = \frac{e^{-\sqrt{31}+4i}}{\sqrt{31}\,i}$$

$$\Rightarrow \oint \frac{e^{i(8z+4)}}{4z^2+\frac{31}{16}}dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{\frac{\sqrt{31}}{8}i} f = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\sqrt{31}+4i}}{\sqrt{31}\, i}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{31}} \cdot e^{-\sqrt{31}+4i}$$

Применим лемму Ж:

$$f(z) = g(z)\cdot e^{8zi} \quad ; \; g(z) = \frac{e^{4i}}{4z^2+\frac{31}{16}}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \max_{z\in\Gamma_R} |g(z)| = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i(8z+4)}}{4z^2+\frac{31}{16}}dz = 0$$

$$\Rightarrow (v.p)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(8t+4)}}{4t^2+\frac{31}{16}}dt = \frac{2\pi}{\sqrt{31}} e^{-\sqrt{31}+4i}$$

$$\Rightarrow (v.p)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(8t+4)}{4t^2+\frac{31}{16}}dt = \operatorname{Re}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{31}} e^{-\sqrt{31}+4i}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{31}} e^{-\sqrt{31}}\cos 4$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(8t+4)}{4t^2+\frac{31}{16}}dt \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \Rightarrow \text{сходится}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3-8x)}{4x^2-7x+5}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{31}} e^{-\sqrt{31}}\cos 4}$$

Вот где ошибка

20) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin(2-x)}{(x^2+2)^2}\, dx.$

20) $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin(2-x)}{(x^2+2)^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x^3 \sin(x-2)}{(x^2+2)^2} dx$

$\Rightarrow J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{-x^3 e^{(x-2)i}}{(x^2+2)^2} dx \quad ; \quad I = \operatorname{Im} J$

$\Rightarrow \oint\limits_{D_R} \frac{-z^3 e^{(z-2)i}}{(z^2+2)^2} dz \qquad$ OT: $z = \infty$

$z = \pm\sqrt{2}\cdot i$

$\Rightarrow R > \sqrt{2}$

$= 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{\sqrt{2}i} f$

$\operatorname*{res}\limits_{\sqrt{2}i} f = \lim\limits_{z\to\sqrt{2}i} \frac{d}{dz} \cdot \frac{(z-i\sqrt{2})^2 e^{(z-2)i} (-z^3)}{(z-i\sqrt{2})^2(z+i\sqrt{2})^2} = \lim\limits_{z\to\sqrt{2}i} \frac{d}{dz} \frac{-z^3 e^{(z-2)i}}{(z+i\sqrt{2})^2}$

$= \lim\limits_{z\to i\sqrt{2}} \frac{e^{i(z-2)} z^2 \left(-iz^2 + (\sqrt{2}-1)z - 3i\sqrt{2}\right)}{(z+i\sqrt{2})^3}$

$= \frac{e^{i(i\sqrt{2}-2)} (i\sqrt{2})^2 \left(-i(i\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}-1)i\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}\right)}{(i\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3}$

$= \frac{e^{-2i-\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2}-2)}{4}$

$\Rightarrow \oint\limits_{D_R} \frac{-z^3 e^{(z-2)i}}{(z^2+2)^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-2i-\sqrt{2}}(\sqrt{2}-2)}{4} = \frac{\pi i}{2} e^{-2i-\sqrt{2}} (\sqrt{2}-2)$

для $f(z)=g(z)\cdot e^{zi}$, $g(z)=\dfrac{-z^3e^{-2i}}{(z^2+2)^2}$ применим лемму Ж:

$$\lim_{R\to+\infty}\max_{\Gamma_R}|g(z)| = \lim_{R\to+\infty} c\cdot\frac{R^3}{R^4} = \lim_{R\to+\infty} c\cdot\frac{1}{R} = 0,\ c=\text{const}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R}\frac{-z^3e^{(z-2)i}}{(z^2+2)^2}dz = 0$$

$$\Rightarrow (v.p)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-x^3e^{(x-2)i}}{(x^2+2)^2}dx = \frac{\pi i}{2}e^{-2i-\sqrt2}(\sqrt2-2)$$

$$\Rightarrow (v.p)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-x^3\sin(x-2)}{(x^2+2)^2}dx = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi i}{2}e^{-2i-\sqrt2}(\sqrt2-2)\right)$$

$$=\frac{\pi(\sqrt2-2)}{2}\ \frac{\cos 2}{e^{\sqrt2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-x^3\sin(x-3)}{(x^2+2)^2}dx$$

применим признак сходимости Дирихле на $(-\infty;A]\cup[A,+\infty)$

A такая, что $\dfrac{-x^3}{(x^2+2)^2}$ монотонна

$$\int_A^B\sin(x-3)\,dx = -\cos(x-3)\Big|_A^B = \cos(A-3)-\cos(B-3) < 2$$

$B<+\infty$

$$\frac{-x^3}{(x^2+2)^2}$$ монотона на $[A, +\infty)$

аналогично для $(-\infty, A)$

на $[-A, A]$ сходится т.к нет особенностей $\Rightarrow$ сходится

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin(x-3)}{(x^2+2)^2} dx = \frac{\pi(\sqrt{2}-2)}{2} \frac{\cos 2}{e^{\sqrt{2}}}$$

20) $\frac{\pi(\sqrt{2}-2)}{2} \frac{\cos 2}{e^{\sqrt{2}}}$.

№6

6. Вычислить интеграл
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-3ix+4}\, dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-3ix+4} dx \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-3ix+4} dx - \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2-3ix+4} dx = \frac{1}{2i}(I_1 - I_2)$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-3ix+4} dx \Rightarrow \oint_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2-3iz+4} dz$$

ОТ: $z=\infty$

$z=4i$, $z=-i$

$\Rightarrow R>4$

$$\oint_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2-3iz+4} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{4i} f$$

$$\operatorname{res}_{4i} f = \frac{e^{iz}}{2z-3i}\Bigg|_{z=4i} = \frac{e^{-4}}{5i}$$

$$\Rightarrow \oint_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2-3iz+4}dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-4}}{5i} = \frac{2\pi}{5}e^{-4}$$

лемма Ж: $\lim\limits_{R\to+\infty} \max\limits_{\Gamma_R} |g(z)|$, где $g(z) = \dfrac{1}{z^2-3iz+4}$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2} = 0 \Rightarrow \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2-3iz+4}dz = 0$$

$$\Rightarrow (v.p) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-3ix+4}dx = \frac{2\pi}{5}e^{-4}$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2-3ix+4}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2+3it+4}dt \Rightarrow \oint_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+3iz+4}dz$$

пусть $t=-x$, $dt=-dx$

ОТ: $z=\infty$, $z=i$, $z=-4i$

$\Rightarrow R>1$

$$\oint_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+3iz+4}dz = 2\pi i \operatorname{res}_i f$$

$$\operatorname{res}_i f = \frac{e^{iz}}{2z+3i}\Bigg|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{5i} \Rightarrow \oint_{D_R} \frac{e^{iz}}{z^2+3iz+4}dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{5i} = \frac{2\pi}{5}e^{-1}$$

лемма Ж: $\lim\limits_{R\to+\infty} \max |g(z)|$, где $g(z) = \dfrac{1}{z^2+3iz+4}$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^2} = 0$$

$$\Rightarrow (v.p)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2-3ix+4}\,dx = \frac{2\pi}{5}e^{-1}$$

$$\Rightarrow (v.p)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-3ix+4}\,dx = \frac{1}{2i}\left(\frac{2\pi}{5}e^{-4} - \frac{2\pi}{5}e^{-1}\right) = \frac{\pi}{5i}\left(e^{-4}-e^{-1}\right)$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2-3ix+4}\,dx \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится (нет особенностей)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x^2-3ix+4} = -\frac{\pi i}{5}\left(e^{-4}-e^{-1}\right)$$

№7

7. Используя равенство
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$
вычислить интеграл
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+ix}\,dx.$$

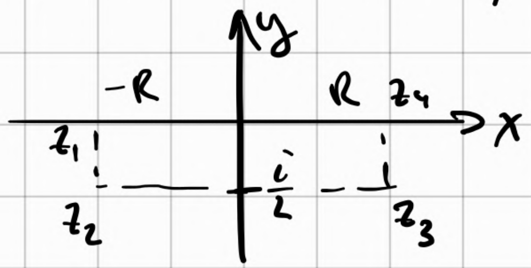
Теорема 7.1 (Коши). *Для всякой регулярной функции $f : G \to \mathbb{C}$, заданной в односвязной области G, справедливо равенство*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0, \qquad (7.2)$$

где интеграл берется по любой простой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, принадлежащей области G.

Рассмотрим Γ_R = граница прямоуг с вершинами

в точках $z_1 = -R$, $z_2 = -R - \frac{i}{2}$, $z_3 = +R - \frac{i}{2}$, $z_4 = +R$



(получено из соображений, что $-x^2 + xi = -\left(x - \frac{i}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$)

рассмотрим функцию $f(z) = e^{-z^2}$, $z = x + iy$

$|z|^2 = x^2 - y^2$

по интегральной т. Коши: $\oint\limits_{\Gamma_R} e^{-z^2} = 0$

для $[z_1; z_2]$ и $[z_3, z_4]$ имеем:

$$|f(z)| = e^{-(R^2 - y^2)} \leqslant e^{\frac{1}{4} - R^2}$$

$\Rightarrow$ интеграл по этим отрезкам $\to 0$ при $R \to \infty$

На $[z_2, z_3]$: $f(z) = e^{-(x - \frac{i}{2})^2} = e^{-x^2 + xi + \frac{1}{4}} = f(x) \cdot e^{xi + \frac{1}{4}}$

тогда $\oint\limits_{\Gamma_R} e^{-z^2} = 0$

$$\Rightarrow \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx - e^{\frac{1}{4}} \int_{-R}^{R} e^{-x^2 + xi} dx + \alpha(R) = 0, \quad \alpha(R) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

перейдя к пределу: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 + xi} dx = e^{-\frac{1}{4}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = e^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}$

III. Принцип аргумента и теорема Руше.

2. Приращение аргумента функции действительного переменного. *Приращением аргумента непрерывно дифференцируемой функции* $z(t)$ на отрезке $[0,1]$ (при условии $z(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0,1]$) называется число

$$\Delta_{[0,1]} \arg z(t) = \operatorname{Im} \int\limits_0^1 \frac{z'(\tau)}{z(\tau)}\, d\tau.$$

3. Приращение аргумента z вдоль кривой, не проходящей через точку $z = 0$. *Приращение аргумента z вдоль ориентированной непрерывной кривой γ*, заданной параметрически с помощью непрерывной функции $z(t)$, $t \in [0,1]$, такой, что $0 \notin \gamma$, называется число

$$\Delta_\gamma \arg z = \Delta_{[0,1]} \arg z(t),$$

1. Принцип аргумента

Теорема. *Пусть D — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$ с кусочно-гладкой положительно ориентированной границей Γ, и пусть функция $f(z)$ регулярна в $\overline{D} = D \cup \Gamma$, за исключением конечного числа полюсов, принадлежащих области D, кроме того $f(z) \neq 0$ для любого*

$z \in \Gamma$. Тогда приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль кривой Γ удовлетворяет равенству

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = 2\pi(N - P),$$

где N и P соответственно число нулей и число полюсов функции $f(z)$ в области D с учетом их порядков.

5. Логарифмическое свойство приращения аргумента функции вдоль кривой. Если функции f_1, f_2 и кривая γ удовлетворяют условиям приведенного выше определения, то справедливо равенство (называемое *логарифмическим свойством*)

$$\Delta_\gamma \arg \left(f_1(z) \cdot f_2(z)\right) = \Delta_\gamma \arg f_1(z) + \Delta_\gamma \arg f_2(z). \tag{1}$$

Теорема Руше. *Пусть $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ — ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ, а функции $f(z)$ и $g(z)$ регулярны в $\overline{D}$, причем*

$$|f(z)| > |g(z)|$$

для всех $z \in \Gamma$. Тогда функция $f(z)$ и функция $h(z) = f(z) + g(z)$ имеют в D одинаковое число нулей с учетом их порядков.

(кратности)

n15

№1 (3, 7, 10)

1. Найти число корней уравнений в областях, указанных в скобках:

3) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ $(\{z\colon |z| < 1\})$;

3) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$

обозначим $D = \{z \mid |z| < 1\}$

$\Gamma = \{z \mid |z| = 1\}$

$f(z) = -5z^4$

$g(z) = z^7 + z^2 - 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} |f(z)|_{z\in\Gamma} = 5\cdot|z|^4 = 5 \\ |g(z)|_{z\in\Gamma} = |z^7 + z^2 - 2| \leq |z^7| + |z^2| + |-2| = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)|$ для $z \in \Gamma$ $\Rightarrow$ по Т. Руше $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют одинаковое число „0"

$f(z) = 0 \Rightarrow -5z^4 = 0 \Rightarrow z = 0$

1 корн, кр 4 $\Rightarrow z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ имеет 4 корн

3) 4 корня;

7) $z^6 - 6z + 10 = 0$ $(\{z\colon |z| > 1\})$;

7) $f(z) = z^6 + 10$ $\qquad D = \{z \mid |z| > 1\}$

$g(z) = -6z$ $\qquad \Gamma = \{z \mid |z| = 1\}$

$|f(z)|_\Gamma = |z^6 + 10| = |10 - (-z^6)| \geq |10| - |-z^6| = 9.$

$|g(z)|_\Gamma = |-6z| = 6 \Rightarrow |f(z)| > |g(z)|$ на Γ

7) 6 корней;

$f(z) = 0 \Rightarrow z^6 + 10 = 0$ 6 корней $|z| > 1$ $\Rightarrow z^6 - 6z + 10 = 0$ 6 корней

10) 10) $z^6 + 3z^4 + 2z^3 + 1 = 0$ $(\{z\colon |z| < 2\})$.

$$z^6 + 3z^4 + 2z^3 + 1 = (z^3+1)^2 + 3z^4$$

$D = \{z \mid |z| < 2\}$

$\Gamma = \{z \mid |z| = 2\}$

$\bar{D} = D \cup \Gamma$

$f(z) = (z^3+1)^2$

$g(z) = 3z^4$

$$\left|f(z)\right|_{z\in\Gamma} = |z^3+1|^2 = |z^3+1|^2 \geq (|z|^3 - 1)^2 = 49$$

$$\left|g(z)\right|_{z\in\Gamma} = |3z^4| = 3\cdot 16 = 48$$

$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)|$ на Γ

$f(z) = 0 \Rightarrow (z^3+1)^2 = 0$

$z^3 = -1$ 3 корня $|z|<2$

из-за квадрата $\Rightarrow$ кр 2

$\Rightarrow$ 6 нулей

$\Rightarrow z^6 + 3z^4 + 2z^3 + 1 = 0$

6 нулей 10) 6 корней.

№ 8

8. а) Найти число корней многочлена $4z^6 + 4z^3 + 9z - 4$ в круге $|z| < 1$.

б) Найти число корней уравнения $5z^3 + 6\sin(z^2) = 0$ в круге $|z| < 1$.

а) $4z^6 + 4z^3 + 9z - 4$

$D = \{z \mid |z| < 1\}$

$\Gamma = \{z \mid |z| = 1\}$

$f(z) = 9z$

$g(z) = 4z^6 + 4z^3 - 4 = 4(z^6 + z^3 - 1)$

найдём максимум $|g(z)|$, пусть $z^3 = t$, $|t| = |z^3| = 1$

и рассмотрим $|t^2 + t - 1|^2$

$$|t^2 + t - 1|^2 = (t^2 + t - 1)(\bar{t}^2 + \bar{t} - 1) \ominus$$

т.к $t\cdot\bar{t}=1 \Rightarrow \bar{t}=t^{-1}$, $\bar{t}^2=t^{-2}$

$\ominus\ (t^2+t-1)(t^{-2}+t^{-1}-1)=1+\cancel{t}-t^2+\cancel{t^{-1}}+1-\cancel{t}-t^{-2}-\cancel{t^{-1}}+1$

$=3-(t^2+t^{-2})=3-2\cos 2t \Rightarrow \max|4\cdot\sqrt{3-2\cos 2z^3}|=4\sqrt{5}$

$\Rightarrow \underset{z\in\Gamma}{|g(z)|}\leq 4\sqrt{5}$

$\underset{z\in\Gamma}{|f(z)|}=|9z|=9 \qquad \Rightarrow |f(z)|>|g(z)|$ на Γ

$f(z)=0 \Rightarrow 9z=0$ 1 корь в $|z|<1$

$\Rightarrow 4z^6+4z^3+9z-4=0 \quad |z|<1$

имеем 1 корь

б) $5z^3+6\sin(z^2)=0 \qquad |z|<1 \qquad D=\{z\,|\,|z|<1\}$

$\Gamma=\{z\,|\,|z|=1\}$

$f(z)=6\sin(z^2)$

$g(z)=5z^3$

$\underset{z\in\Gamma}{|f(z)|}=|6\sin(z^2)|$, пусть $z^2=t$, $|t|=|z^2|=1$

$t=x+iy$

найдём $\min|\sin t|^2$

$|\sin t|^2=\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y$, найдём $\begin{cases}\min(\sin^2x+\operatorname{sh}^2y)\\ \text{при } x^2+y^2-1=0\end{cases}$

$\Rightarrow$ по методу Лагранжа: $L=\sin^2x+\operatorname{sh}^2y-\lambda(x^2+y^2-1)$

$\frac{\partial L}{\partial x}=2\sin x\cdot\cos x-2\lambda x=\sin 2x-2\lambda x=0$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2\,\mathrm{sh}\,y \cdot \mathrm{ch}\,y - 2\lambda y = \mathrm{sh}\,2y - 2\lambda y = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 2\lambda x \\ \mathrm{sh}\,2y = 2\lambda y \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin 2x}{x} = \frac{\mathrm{sh}\,2y}{y} \quad (\text{при } x, y \neq 0)$$

$$\text{но } \frac{\sin 2x}{x} < 1 < \frac{\mathrm{sh}\,2y}{y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |\sin t|^2 = \sin^2 1 + \mathrm{sh}^2 0 = \sin^2 1 \qquad \sin 1 < 1 < \mathrm{sh}\,1$$

$$\text{и} \quad \sin^2 0 + \mathrm{sh}^2 1 = \mathrm{sh}^2 1 \qquad \Rightarrow \min|\sin t| = 1$$

$$\Rightarrow |\sin z^2| \geq \sin 1 \Rightarrow \left.|f(z)|\right|_\Gamma = 6\,|\sin z^2| \geq 6 \sin 1$$

$$\left.|g(z)|\right|_\Gamma = |5z^3| = 5$$

покажем, что $\sin 1 > \frac{5}{6}$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(4p+1)!} - \frac{1}{(4p+3)!} \right)}_{>0} \Rightarrow \sin 1 > \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)| \text{ на } \Gamma$$

$$f(z) = 0 \Rightarrow 6\sin(z^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z^2 = \pi \cdot k, & k \in \mathbb{Z} \\ |z| < 1 \Rightarrow & k = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \end{cases}$$

1 корн, 2 кр.

$$\Rightarrow 5z^3 + 6\sin z^2 = 0 \quad \text{2 нуля}$$

№ T9

9. Применяя теорему Руше и теорию вычетов, вычислить интеграл
$$\oint\limits_{|z|=1} z^6 \left(\frac{1}{3z^4+z+1}\right) dz.$$

$$\oint\limits_{|z|=1} z^6 \cdot \frac{1}{3z^4+z+1} dz$$

ОТ: $z=\infty$

$3z^4+z+1=0$

$3z^4+z+1=0$ имеет 4 нуля на $\mathbb{C}$ (по основной т. Алгебры)

покажем, что в нули: $|z|<1$:

$3z^4+z+1=0$

$D=\{z \,/\, |z|<1\}$

$\Gamma=\{z \,/\, |z|=1\}$

$$\begin{cases} h(z)=3z^4 \\ g(z)=z+1 \end{cases}$$

$\left|h(z)\right|_{z\in\Gamma} = |3z^4| = 3$

$\Rightarrow |h(z)|>|g(z)|$

$\left|g(z)\right|_{z\in\Gamma} = |z+1| \le |z|+|1| = 2$

$h(z)=0 \Rightarrow 3z^4=0$ 1 ноль, кр 4 $\Rightarrow 3z^4+z+1=0$ имеет 4 нуля

$$\Rightarrow \oint\limits_{|z|=1} z^6 \frac{1}{3z^4+z+1} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\infty} f$$

$$\operatorname{res}_{\infty} f = -C_{-1}: \quad z^6 \cdot \frac{1}{3z^4+z+1} = \frac{z^2}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-3}+\frac{1}{3}z^{-4}}$$

$$= \frac{z^2}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}z^{-3} - \frac{1}{3}z^{-4} + o(z^{-6})\right) = \frac{z^2}{3} - \frac{1}{9} \cdot z^{-1} - \frac{1}{9} z^{-2} + o(z^{-4})$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_a f = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \oint_{|z|=1} z^6 \cdot \frac{1}{3z^4 + z + 1} dz = -\frac{2\pi i}{9}$$

№ T10

10. Пусть функция $f(z)$ непостоянна и регулярна в области D. Верно ли, что:

а) если область D односвязна, то и область $f(D)$ односвязна;
б) если D неодносвязна, то и $f(D)$ неодносвязна?

а) D = односвязн обл (Петрович, 3 часть)

Определение 21.8. Область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется односвязной, если любая замкнутая кусочно-гладкая кривая $\Gamma \subset G$ является границей ограниченного открытого множества D, целиком принадлежащего G.

пусть $D \equiv \mathbb{C}$

$f(z) = e^z$

тогда $f(D) = e^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ не односвязная

$\Rightarrow$ нет

б) D = неодносвязна

$D \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = z(z-1)$

покажем, что $f(D) = \mathbb{C}$ (односвязн)

$\forall t \in \mathbb{C}$: $z(z-1) = t \Rightarrow z^2 - z - t = 0$

$\Rightarrow$ корень $z = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4t}}{2}$

Если $t \neq 0$: то $z=0$ не корень и корни $z_1, z_2 \in D$

Если $t=0$: $z = 1$ и 0, $1 \in D \Rightarrow \forall t \in \mathbb{C}$ (односвязн)
$\exists z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

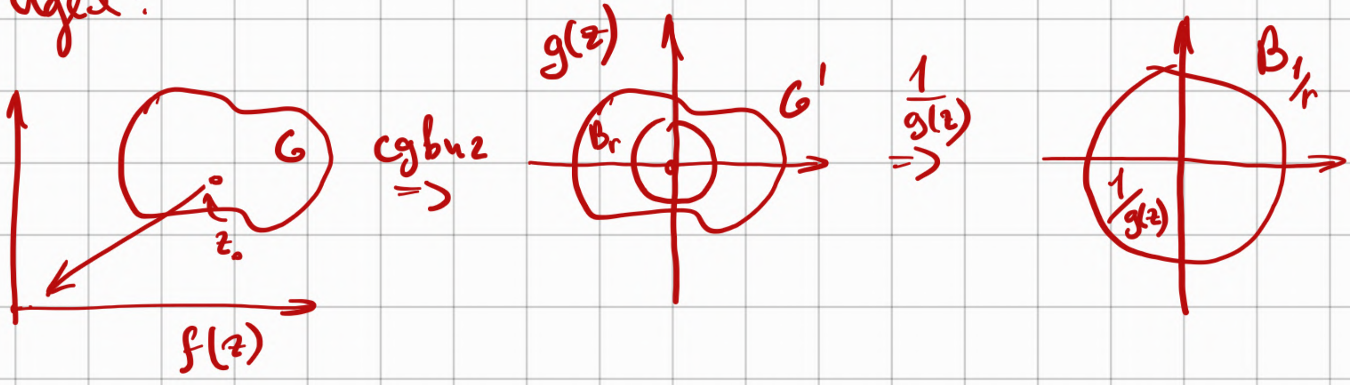
$\Rightarrow$ нет

№ Т11

11. Пусть целая функция не принимает значений, лежащих в некоторой области G комплексной плоскости. Докажите, что эта функция постоянна.

Следствие 19.1 (теорема Лиувилля). *Если целая функция f ограничена в некоторой окрестности бесконечности, то она постоянна.*

Идея:



$\square$

Обозначим функцию $f(z)$, не принимает значения в G

Выберем точку $z_0 \in G$ и рассмотрим сдвиг

$G' = \{z - z_0 \mid z \in G\}$ или просто $G' = G - z_0$

тогда $0 \in G'$, т.к G' открытая $\Rightarrow \exists r > 0 : B_r(0) \subset G'$

пусть $g(z) = f(z) - z_0$, тогда $g(\mathbb{C}) \cap G' = \varnothing$

$\Rightarrow g(\mathbb{C}) \cap B_r(0) = \varnothing \Rightarrow |g(z)| \geq r \quad \forall z \in \mathbb{C}$

рассмотрим $h(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ (целая, т.к $g(z) \neq 0$)

$\Rightarrow |h(z)| \leq \dfrac{1}{r} \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow$ по т. Лиувилле

$h(z) = const \Rightarrow g(z) = const \Rightarrow f(z) = const$ $\blacksquare$