

$$3. y'' + 3y' + 2y = 0.$$

1. Чтобы решить однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\alpha_0 y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \dots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n y = 0, \quad (1)$$

все состоят характеристическое уравнение

$$\alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n = 0 \quad (2)$$

и наше это корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Общее решение уравнения (1) есть сумма, состоящая из частных решений y_i для каждого простого корня λ_i уравнения (2) и линейной комбинации

$$(C_{n+1} + C_{n+2}x + C_{n+3}x^2 + \dots + C_{n+k}x^{k-1})e^{\lambda x}, \quad (3)$$

для каждого кратного корня λ уравнения (2), где k — кратность корня λ ; C_i — произвольные постоянные. Коэффициенты уравнения (3) и корни λ здесь могут быть комплексными или вещественными.

$$7. y'' = 6y' + 18y = 0.$$

Если же все коэффициенты уравнения (1) вещественные, то решение можно написать в вещественной форме и в случае комплексных корней λ . Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \pm i\beta$ общее решение включает слагаемые

$$C_m + e^{i\beta x} \cos \beta x + C_{m+1} e^{i\beta x} \sin \beta x,$$

если эти корни простые, и слагаемым

$$P_{k-1}(x)e^{i\beta x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x)e^{i\beta x} \sin \beta x,$$

если каждый из корней $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ имеет кратность k . Здесь P_{k-1} и Q_{k-1} — многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену в (3); их коэффициенты — произвольные постоянные.

$$12. y'' - 6y' + 9y = 0.$$

$$\text{Хар. ур-е: } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \Rightarrow y = e^{3x} (C_1 + C_2 x)$$

$$12. y = e^{3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

$$23. y^{IV} - y''' + 2y' = 0.$$

$$\text{Хар. ур-е: } \lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda = 0; \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda^3 - \lambda^2 + 2 = 0; \quad \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda^2(\lambda+1) - 2(\lambda^2-1) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -1, \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{3,4} = 1 \pm i$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x (C_3 \cos x + C_4 \sin x) \quad 23. y = C_1 e^{-x} + C_2 + e^x (C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

$$31. y^{IV} + 6y''' + 12y'' + 8y' = 0.$$

$$\text{Хар. ур-е: } \lambda^4 + 6\lambda^3 + 12\lambda^2 + 8\lambda = 0; \quad \lambda (\lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8) = 0; \quad \lambda (\lambda + 2)^3 = 0$$

$$y = C_1 + e^{-2x} (C_2 x^2 + C_3 x + C_4). \quad 31. y = C_1 + e^{-2x} (C_2 x^2 + C_3 x + C_4).$$

$$35. y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$$

$$\text{Хар. ур-е: } \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0; \quad (\lambda^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2i, \quad \lambda_{3,4} = 2i$$

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 x + C_4) \sin 2x$$

График вижуально.

$$35. y = (C_1 x + C_2) \cos 2x + (C_3 x + C_4) \sin 2x.$$

$$47. y'' + 4y = 4xe^{-2x} - \sin 2x.$$

2. Для неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью, состоящей из суммы и произведения функций b_0, b_1, \dots, b_n , a_0, a_1, \dots, a_n , $\cos \beta x$, $\sin \beta x$, частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для решения с правой частью $P(x)e^{ax}$, если $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$, частное решение имеет вид

$$y_1 = Q_m(x)e^{ax}, \quad (4)$$

где $Q_m(x)$ — многочлен того же степени, что и $P_m(x)$, если $a = 0$, если $a \neq 0$, то корень характеристического уравнения (2), а если a — корень, то $P(x)e^{ax}$ решает уравнение (1) только тогда, когда коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, которые появляются в линейных выражениях и пропорциях коэффициентов, подставлены в левые частиях уравнения и правой части уравнения.

Если в правую часть уравнения входит синус и косинус, то можно выразить через показательную функцию по формуле Эйлера

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}, \quad (5)$$

и свести задачу к уже рассмотренному случаю.

Если же коэффициенты левой части уравнения вещественные, то можно обйтись без перехода к комплексным функциям (5). Для решения с правой частью

$$e^{ax} (P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x) \quad (6)$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^a e^{ax} (R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x), \quad (7)$$

где $a = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень характеристического уравнения, и s равен единице, если корни $\alpha + \beta i$ вида $\alpha + i\beta$, в противном случае, в $R_m(x)$ и $T_m(x)$ должны присутствовать члены x^s и x^{s+1} .

Чтобы найти коэффициенты многочленов R_m и T_m , надо подставить (7) в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

При этом общий вид частного решения уравнения (1) определяется

коэффициентами и правой частью уравнения (6).

Чтобы определить коэффициенты R_m и T_m , в уравнении (7) нужно подставить (6), то частное решение отыскивается по следующему правилу:

«Частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + \dots + f_n$ — это сумма частных решений уравнений с той же левой частью и правой частями f_1, \dots, f_n ».

Однако решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же левой частью.

$$\text{Хар. ур-е: } \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

$$3. y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Пример. Решить уравнение

$$y''' - 6y'' + 9y = xe^{3x} + e^{3x} \cos 2x. \quad (8)$$

Характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9 = 0$ имеет корень $\lambda = 3$ кратности 3. Поэтому общее решение однородного уравнения (8) имеет вид $y_0 = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{3x}$.

Правильность (8) следует из двух слагаемых (8) (для первого $s = 0$ и для второго $s = \beta = 3 - 2i$). Так как эти частные решения, то надо искать отдельные частные решения уравнений

$$y''' - 6y'' + 9y = xe^{3x}, \quad (9)$$

$$y''' - 6y'' + 9y = e^{3x} \cos 2x. \quad (10)$$

Число $s = 3$ является корнем кратности 3, поэтому частное решение уравнения (9) согласно (4) имеет вид $y_1 = x^3 e^{3x}$.

Подставляем $y_1 = x^3 e^{3x}$, имеем $a = 3/3 = 1$, $\beta = -2i$.

Частное решение уравнения (10) согласно (4) имеет вид $y_2 = x^3 e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Общее решение уравнения (8) равно $y = y_0 + y_1 + y_2$, где y_0 ,

y_1 и y_2 — ука занные.

Однород. ур. (OУ)

$$\text{Хар. ур.: } \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i \Rightarrow y_0 = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x \quad \text{общее реш. одн. ур. (OУ)}$$

Неоднор. ур. (НУ)

$$1) y'' + 4y = 4xe^{-2x}, \quad y_1 = x^s Q_m(x)e^{dx} \quad d=-2, s=0 \Rightarrow y_1 = (ax+b)e^{-2x}$$

$$\text{Подст } y_1 \text{ и сразу поделим на } e^{-2x}: -2a - 2a + 4ax + 4b + 4ax + 4b = 4x$$

$$y_1' = ae^{-2x} - 2(ax+b)e^{-2x} \quad y_1'' = -2a - 2y_1'$$

$$\begin{cases} -4a + 8b = 0 \\ 8a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x}$$

$$2) y'' + 4y = -\sin 2x, \quad y_2 = x^s e^{dx} (P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$$

$$d=0, \beta=2, s=1, m=0 \Rightarrow y_2 = ax \cos 2x + bx \sin 2x$$

y_2 уже можно подст. Но упростим!

y'' - нечет

ПР. часть нечет, в ст. произв. в лев. части чет \Rightarrow ищем $y_2 = ax \cos 2x$ - нечет

$$y_2' = a \cos 2x - 2ax \sin 2x, \quad y_2'' = -2a \sin 2x - 2a \sin 2x - 4ax \cos 2x$$

$$-4a \sin 2x - 4ax \cos 2x + 4ax \cos 2x = -\sin 2x \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = \frac{1}{4}x \cos 2x$$

$$47. y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + \frac{1}{4}x \cos 2x.$$

$$y = y_0 + y_1 + y_2 = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + \frac{1}{4}(2x+1)e^{-2x} + \frac{1}{4}x \cos 2x$$

56. $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$

OPOY: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2 \Rightarrow y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$

ЧРНУ: $y_1 = x^s Q_m(x)e^{dx}, \quad d=-2, s=1 \Rightarrow y_1 = ax^2 e^{-2x}$

$$y_1' = 2ax e^{-2x} - 2ax^2 e^{-2x} \quad y_1'' = 2ae^{-2x} - 4axe^{-2x} - 2y_1'$$

$$\text{CPASY gen. na } e^{-2x}: 2a - 4ax + 4ax + 4ax^2 - 4ax^2 = 2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y_1 = x^2 e^{-2x}$$

$$y = (C_1 + C_2 x + x^2) e^{-2x}$$

$$56. y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x) + x^2 e^{-2x}.$$

$$107. y''' - 2y'' + 2y' = 20 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$\text{OPOY: } \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0 \quad \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1 \pm i \Rightarrow y_0 = C_1 + (C_2 \sin x + C_3 \cos x) e^x$$

$$\text{ПР.ЧАСТЬ: } 20 \sin^2 \frac{x}{2} = 10 - 10 \cos x$$

$$1) y''' - 2y'' + 2y' = 10, m=0, f=0, S=1 \Rightarrow y_1 = ax \Rightarrow a=5 \Rightarrow y_1 = 5x$$

$$2) y''' - 2y'' + 2y' = -10 \cos x, \alpha=0, \beta=1, S=0, m=0 \Rightarrow y_2 = a \cos x + b \sin x$$

$$\begin{aligned} \cos x: -b + 2a + 2b &= -10 & 2a + b &= -10 & a &= -4 \\ \sin x: a + 2b - 2a &= 0 & 2b - a &= 0 & b &= -2 \end{aligned} \Rightarrow y_2 = -4 \cos x - 2 \sin x$$

$$y = C_1 + (C_2 \sin x + C_3 \cos x) e^x + 5x - 4 \cos x - 2 \sin x$$

$$107. y = C_1 + e^x(C_2 \cos x + C_3 \sin x) + 5x - 4 \cos x - 2 \sin x.$$

$$131. y^{IV} - y'' - 2y = 12 \sin 3x \cos 2x - 6(e^{-2x} + \sin 5x).$$

$$\text{OPOY: } \lambda^4 - \lambda^2 - 2 = 0 \quad (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i, \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{2}$$

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-x\sqrt{2}} + C_4 e^{x\sqrt{2}}$$

$$12 \sin 3x \cos 2x = 12 \cdot \frac{1}{2} (\sin(3x+2x) + \sin(3x-2x)) = 6 \sin 5x + 6 \sin x \Rightarrow$$

$$\text{ПР.ЧАСТЬ: } 6 \sin x - 6e^{-2x}$$

$$\text{ЧРНУ: 1) } y'' - y'' - 2y = 6 \sin x;$$

$$6 \text{ неявн. чет. ПР, ПР.Ч. Невн., } \alpha=0, \beta=1, S=1, m=0 \Rightarrow y_1 = ax \cos x$$

$$y_1' = a \cos x - a x \sin x \quad y_1'' = -a \sin x - a \sin x - a x \cos x$$

$$y_1''' = -2a \cos x - y_1' \quad y_1'''' = 2a \sin x - y_1''$$

$$\sin x: 2a + 4a = 6 \Rightarrow a=1 \quad y_1 = x \cos x$$

$$\cos x: 2ax - 2ax = 0$$

$$2) y'' - y''' - 2y = -6e^{-2x}; \quad \begin{cases} \lambda=2, \\ \lambda^2=4, \\ \lambda^3=-2 \end{cases} \Rightarrow y_2 = Ae^{-2x}$$

$$e^{-2x}: 16A - 4A - 2A = -6 \quad A = -\frac{3}{5} \quad y_2 = -\frac{3}{5}e^{-2x}$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-3x} + C_4 e^{3x} - \frac{3}{5} e^{-2x} + x \cos x$$

$$131. y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-x\sqrt{2}} + C_4 e^{x\sqrt{2}} + x \cos x - \frac{3}{5} e^{-2x}$$

$$153. y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}.$$

Линейное неоднородное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (11)$$

с любой правой частью $f(x)$ решается методом вариации постоянных. Пусть найдено общее решение $y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$, линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогда решение уравнения (11) ищется в виде

$$y = C_1(x) y_1 + \dots + C_n(x) y_n.$$

Функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{aligned} C'_1 y_1 + \dots + C'_n y_n &= 0 \\ C'_1 y'_1 + \dots + C'_n y'_n &= 0 \\ C'_1 y_1^{(n-2)} + \dots + C'_n y_n^{(n-2)} &= 0 \\ a_0(C'_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)}) &= f(x). \end{aligned}$$

$$OPOY: \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$$

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

$$OPHY: y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{2x} = 0 \\ C_1'(x) e^x + 2C_2'(x) e^{2x} = \frac{1}{1+e^x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2'(x) = -\frac{1}{e^x} \frac{1}{1+e^x} \\ C_2'(x) = \frac{1}{e^{2x}} \frac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

$$C_1(x) = - \int \frac{dx}{e^x(e^x+1)} = \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} = - \int \frac{du}{u^3+u^2} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} - \frac{1}{u+1} \right) du = -Pn(e^x+1) + x + e^x + C$$

$$\frac{1}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1} \quad (AU+B)(U+1) + (U^2+1)AU^2 + AU + BU + B + U^2 = 1 \\ B=1 \quad A=-1 \quad C=1$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{e^{2x}(e^x+1)} = \begin{cases} e^x = u \\ e^x dx = du \end{cases} = \int \frac{du}{u^4+u^3} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3} - \frac{1}{u+1} \right) du = x + e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} - Pn(1+e^x) + C$$

$$\frac{1}{u^3(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u^3} + \frac{D}{u+1} \Rightarrow U^3 A + U^2 A + U^2 B + UB + (U+C+DU^3) = 1 \\ A=1 \quad B=-1 \quad C=1 \quad D=-1$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (e^x + e^{-x}) [x - Pn(1+e^x)] + e^x + \frac{1}{2}$$

$$153. y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (e^x + e^{-x}) [x - \ln(1+e^x)] + e^x + \frac{1}{2}$$

4. Уравнение Эйлера

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (12)$$

сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$ (или $x = e^t$ при $x < 0$). Для полученного уравнения с постоянными коэффициентами характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \dots (\lambda-n+1) + \dots + a_{n-2} \lambda(\lambda-1) + a_n = 0.$$

При составлении этого уравнения каждое произведение $x^k y^{(k)}$ в (12) заменяется на произведение k убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \dots (\lambda-k+1)$.

Пример. Решить уравнение
 $x^3 y''' - x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$

Сделать характеристическое уравнение и решить его:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2(\lambda-1) - 2\lambda = 0. \quad (14)$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda+2) - 2(\lambda-1) - 2\lambda = 0. \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -2.$$

При таких 3-х одинаковых корнях характеристическое уравнение имеет вид (см. пример 3).

$$y = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^t + C_4 e^{-2t}.$$

Чтобы решить уравнение (14), сначала делим обе части на x^3 и получаем характеристическое уравнение

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - 2(\lambda-1) - 2\lambda = 0. \quad (\lambda-1)^2(\lambda+2) - 2(\lambda-1) - 2\lambda = 0. \quad (\lambda-1)^2(\lambda+2) = 0.$$

Так как член 2 не является членом характеристического уравнения, то члены равняются нулю: $\lambda = 1, \lambda = 1, \lambda = -2$. Поэтому в уравнении (12) имеем

Следовательно, общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} y &= (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^t + C_4 e^{-2t} = \\ &= (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^t + \frac{C_4}{x^2} e^{-2t}. \end{aligned}$$

При $x < 0$ получаем аналогичную формулу, но с $|t|$ вместо t .

$$593. x^2y'' - xy' + y = 8x^3.$$

$$\begin{aligned} x &= e^t \\ y'_x &= \frac{y'_t}{e^t} = e^{-t} y'_t \\ y''_x &= e^{-2t} (y''_t - y'_t) \end{aligned}$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (y''_t - y'_t) - e^t \cdot e^{-t} y'_t + y = 8e^{3t}$$

$$y''_t - 2y'_t + y = 8e^{3t}$$

ОПОУ: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow y_0 = (C_1 + C_2 t)e^t$

ЧРНУ: $y_1 = ae^{3t} \Rightarrow e^{3t}: ga - 6a + a = 8 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y_1 = 2e^{3t}$

$$y = X(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3$$

$$593. y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + 2x^3.$$

$$598. x^2y'' - 2y = \sin \ln x.$$

т.к. $\ln x > 0 \Rightarrow x > 0$

$$\begin{aligned} x &= e^t \\ y'_x &= e^{-t} y'_t \\ y''_x &= e^{-2t} (y''_t - y'_t) \end{aligned}$$

$$y''_t - y'_t - 2y = \sin x$$

ОПОУ: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_0 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$

ЧРНУ: $y_1 = a \cos t + b \sin t \Rightarrow \cos t: -a - b - 2a = 0 \Rightarrow a = 0,1$
 $\sin t: -b + a - 2b = 1 \Rightarrow b = -0,3 \Rightarrow y_1 = 0,1 \cos t - 0,3 \sin t$

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^2 + 0,1 \cos \ln x - 0,3 \sin \ln x$$

$$598. y = C_1 x^2 + C_2 x^{-1} + 0,1 \cos \ln x - 0,3 \sin \ln x.$$

В задачах 613—618 построить линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (возможно более низкого порядка), имеющие данные частные решения.

$$613. y_1 = x^2 e^x.$$

Более низкого порядка нельзя

$$\lambda = 1, S = 3 \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$613. y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

$$617. y_1 = xe^x, y_2 = e^{-x}.$$

$$1) \lambda = 1, S = 2$$

$$2) \lambda = -1, S = 1 \Rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow y''' - y'' - y' + y = 0$$

Более низкого порядка нельзя

$$617. y''' - y'' - y' + y = 0.$$

1. Решить уравнение $y'' - ay' + 2y = e^x \cos x$, где $a \in \mathbb{R}$ — действительный параметр.

ОПОУ: $\lambda^2 - a\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{2}$

$$a > 2: \lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{2} \Rightarrow y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$a=2: \lambda_{1,2} = \frac{a}{2} \Rightarrow y_0 = e^{\frac{ax}{2}} (C_1 + C_2)$$

$$a<2: \lambda_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} i \Rightarrow y_0 = e^{\frac{dx}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} x \right)$$

УРНу: $e^x \cos x \quad j=1 \pm i$

$$a=2: j\text{-корень характерист. урн.} \Rightarrow y_1 = x e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$a \neq 2: y_1 = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 6y, \\ \dot{y} = 8x + 9y. \end{cases}$$

получ. уз (2)

$$\text{где} \quad \ddot{x} = -5\dot{x} - 6\dot{y} = -5\dot{x} - 48x - 9 \cdot (6y) = -5\dot{x} - 48x + 9\dot{x} + 45x \\ \ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0; \quad \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} \quad \text{т.к.} \quad C_1 e^t + 3C_2 e^{3t} = -5C_1 e^t - 5C_2 e^{3t} - 6y$$

$$y = -C_1 e^t - \frac{4}{3} C_2 e^{3t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} C_1 e^{3t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} C_2 e^t$$

Пример. Решить систему $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 5x + 2y$. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 + 2i$ находим собственный вектор (a, b) :

$$\begin{cases} (1-3)a - b = 0, \\ 5a + (1-3)b = 0. \end{cases}$$

Можно взять $a = 1, b = 1 - 2i$. Имеем частное решение $x = e^{(3+2i)t}$, $y = (1-2i)e^{(3+2i)t}$.

Так как данная система с вещественными коэффициентами, то правильное соответствующее корень $\lambda = 3 - 2i$, можно не искать, оно будет получено в результате решения общего решения. Это оно будет давать для вещественных решений, надо взять вещественную и минимую части найденного комплексного решения. Так как $e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + i \sin 2t)$, то

$$\begin{cases} x_1 = Re^{(3+2i)t} = e^{3t} \cos 2t, \\ y_1 = Im(e^{(3+2i)t}) = e^{3t} \sin 2t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = Re^{(3-2i)t} = e^{3t} \cos 2t, \\ y_2 = Im(e^{(3-2i)t}) = e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t). \end{cases}$$

Общее решение выражается через подынтегральное значение постоянных решений:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{3t} \cos 2t + C_2 e^{3t} \sin 2t,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3t} (\cos 2t + 2 \sin 2t) + C_2 e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t).$$

$$5. \quad \begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y, \\ \dot{y} = 10x + 7y. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & -4 \\ 10 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 35 + 40 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0; \quad \lambda_1 = 1 \pm 2i$$

$$\lambda_1 = 1 + 2i: \quad \begin{cases} -(6+2i)\alpha_1 - 4\beta_1 = 0 \\ 10\alpha_1 + (6-2i)\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = -\frac{3+i}{2}\alpha_1 \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^t \left[C_1 \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ 3 \cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ 3 \sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned} x &= 2C_1 e^t \sin(2t) + 2C_2 e^t \cos(2t) \\ y &= C_1 e^t \sin(2t) - 3C_2 e^t \sin(2t) - 3C_1 e^t \cos(2t) - C_2 e^t \cos(2t) \end{aligned}$$

$$5. \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -\cos 2t - \sin 2t \\ 2 \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -\cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t - 2 \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$12. \quad \begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

$$\ddot{x} = -5\dot{x} + 4\dot{y} = -5\dot{x} - 4x - \dot{x} - 5x \Rightarrow \ddot{x} + 6\dot{x} + 9 = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3 \Rightarrow x = e^{-3t}(C_1 + C_2 t)$$

$$4y = e^{-3t}(-3C_1 - 3C_2 t + C_2 + 5C_1 + 5C_2 t) = e^{-3t}(2C_1 + C_2 + 2C_2 t)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$12. \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Пример. Решить систему $\dot{x} = y + 1, \dot{y} = 2e^t - x$. Исключаем из первого уравнения имеем $y = \dot{x} - 1$. Подставляя во второе уравнение, получаем $\ddot{x} = 2e^t - x$. Решив это уравнение второго порядка (методами § 11), найдем $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t - 1$. Значит, $y = \dot{x} - 1 = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + e^t - 1$.

Для решения системы (где \dot{x} означает $\frac{dx}{dt}$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases} \quad (1)$$

или, в векторной записи, $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, где \mathbf{x} — вектор, A — матрица:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

надо найти корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Каждому простому корню λ_i характеристического уравнения соответствует решение $C_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}^i$, где C_i — произвольный постоянный, \mathbf{v}^i — собственный вектор матрицы A , соответствующий этому λ_i .

$$23. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y - z, \\ \dot{y} = 9x - 6y + 3z, \\ \dot{z} = 20x - 20y + 10z. \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 9 & -6-\lambda & 3 \\ 20 & -20 & 10-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(6+\lambda)(\lambda-10)+60] - 2[9(10-\lambda)-60] +$$

$$+180 - (6+\lambda)20 = \lambda^2 - 4\lambda - \lambda^3 + 4\lambda^2 + 18\lambda - 60 + 180 - 120 - 20\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$$

$$= -\lambda(\lambda-3)(\lambda-2) = 0 \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$$\lambda_1 = 0: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 9 & -6 & 3 \\ 20 & -20 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 9 & -8 & 3 \\ 20 & -20 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & -8 & 3 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3: \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 9 & -9 & 3 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 20 & -20 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & z & y \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$23. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$31. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + 2y + z. \end{cases}$$

м у λ .

Если для кратного корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов v^1, \dots, v^k , какова его кратность, то ему соответствует решение $C_1 v^1 e^{\lambda t} + \dots + C_k v^k e^{\lambda t}$.

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 4] - 2[2(1-\lambda) - 4] + 2[4 - 2(1-\lambda)] =$$

$$= (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) + 8(\lambda+1) = 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 - 4 + 4\lambda + 8\lambda + 8 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = \\ = -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda^2 + 9\lambda + 5 = (\lambda+1) \cdot (-\lambda^2) + 4(\lambda+1)(\lambda + \frac{5}{4}) = -(\lambda+1)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) = \\ = -(\lambda+1)^2(\lambda+5) = 0; \quad \lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = 5$$

$$\lambda_{1,2} = -1: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad m=k=2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5: \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$31. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пример. Решить систему $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 5x + 2y$.

Составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2+\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \quad \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 + 2i$ находим собственный вектор (a, b) :

$$\begin{cases} (4-\lambda)a - b = 0, \\ 5a + (2+\lambda)b = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - 2bi = 0, \\ 5a + (1+2i)b = 0. \end{cases}$$

Можно взять $a = 1, b = -2i$. Ищем частное решение $x = e^{3+2it}$

$$y = (1 - 2it)e^{3+2it}$$

Так как данная система с коэффициентами, то решением соответствующего корня $\lambda = 3 + 2i$, можно не исключать, что оно будет компоновано с наименшим решением. Частное решение имеет вид e^{3+2it} . Для решения, как написано выше, нужно члены чистого наименшего решения. Так как $e^{3+2it} = e^{3t}(\cos 2t + i \sin 2t)$, то

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re}(e^{3+2it}) = e^{3t} \cos 2t, \\ y = \operatorname{Im}(e^{3+2it}) = e^{3t} \sin 2t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \operatorname{Im}(e^{3+2it}) = e^{3t} \sin 2t, \\ y = \operatorname{Im}(-2it)e^{3+2it} = e^{3t}(\sin 2t - 2 \cos 2t). \end{cases}$$

Одно решение определяется через два наименших линейно независимых решений:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{3t} \cos 2t + C_2 e^{3t} \sin 2t,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3t} \sin 2t + C_2 e^{3t}(\sin 2t - 2 \cos 2t).$$

$$46. \begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y + z, \\ \dot{y} = 7x - 3y + z, \\ \dot{z} = 4x - 2y + 2z. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 1 \\ 7 & -3-\lambda & 1 \\ 4 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)[(7-\lambda)(2-\lambda) + 2] + 4[7(2-\lambda) - 4] - 14 + 4(3+\lambda) =$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 4) + 4(10 - 7\lambda) - 2 + 4\lambda = 7\lambda^2 + 7\lambda - 28 - \lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 40 - 28\lambda - 2 + 4\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 13\lambda + 10 = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda^2 - 8\lambda - 5\lambda + 10 =$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) = 0; \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$\lambda_1 = 2; \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 7 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2+i: \begin{cases} (5-i)\alpha_2 - 4\beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ 7\alpha_2 - (5+i)\beta_2 + \gamma_2 = 0 \\ 4\alpha_2 - 2\beta_2 - i\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad -(2+i)\alpha_2 + (1+i)\beta_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = \frac{2+i}{1+i}\alpha_2 \\ \gamma_2 = \frac{2}{1+i}\alpha_2 \end{cases}$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2+i \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{2t} \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2 \cos t - \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2 \cos t + 2 \sin t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} \right]$$

$$46. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ 2 \cos t - \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2 \cos t + 2 \sin t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}.$$

Каждому простому корню λ_i характеристического уравнения соответствует решение $C_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$, где C_i – произвольный вектор, \mathbf{v}_i – собственный вектор A , соответствующий этому λ_i .

Если для царского корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов $\mathbf{v}_1^1, \dots, \mathbf{v}_k^1$, known that it is приступает, то ему соответствует решение $C_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}_1^1 + \dots + C_k e^{\lambda t} \mathbf{v}_k^1$.

Если для корня λ кратности k имеется только линейно независимые собственные векторы, и $m < k$, то решением, соответствующим этому корню, является произведение многочленов степеней $k-m$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_1 + b_1 t + \dots + dt^{k-m})e^{\lambda t}, \\ x_2 &= (p_1 + q_1 t + \dots + st^{k-m})e^{\lambda t}. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы найти коэффициенты a_1, \dots, a_k , надо подставить решение (3) в систему (1). Принесят коэффициенты подобных членов в левые и правые части уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно a_1, \dots, a_k . Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты a_1, \dots, a_k , а также извлечь из решения (3) вида

Найдем для каждого λ решение узкого вида и склоняю, их, общее решение системы (1).

$$68. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = -6x - 4y + 3z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 3z. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -6 & -4-\lambda & 3 \\ -2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(2+\lambda) [\lambda^2 + 7\lambda + 12 - 6] - [18 + 6\lambda + 6] - [-12 - 8 - 2\lambda] =$$

$$= -2\lambda^2 - 14\lambda - 12 - \lambda^3 - 7\lambda^2 - 6\lambda - 6\lambda - 24 + 2\lambda + 12 = -(\lambda^3 + 9\lambda^2 + 24\lambda + 16) =$$

$$= -(\lambda^3 + \lambda^2 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 16\lambda + 16) = -(\lambda+1) \cdot (\lambda+4)^2 = 0; \quad \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -4$$

$$\lambda_1 = -1: \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

коэффициенты этой системы равны элементам детерминанта (5) при $\lambda = 2$. Из (6) находим $2\alpha = -\beta - \gamma$. Значит, вектор $(1, -2, 2)$ – собственный, и

$$x = e^{2t}, \quad y = -2e^{2t}, \quad z = 2e^{2t} \quad (7)$$

– частное решение системы (1).

Для царского корня $\lambda = 1$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. При $\lambda = 1$ из (5) получаем

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ее порядок $n = 3$, ранг $r = 2$. Число линейно независимых собственных векторов равно $m = n - r = 1$. Корень $\lambda = 1$ имеет кратность $k = 2$. Так как $k > m$, то решению надо явить в виде произведения многочленов степени $k - m = 1$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$x = (a + b)t, \quad y = (c + dt)e^t, \quad z = (f + gt)e^t. \quad (8)$$

Чтобы найти коэффициенты a, b, \dots, g , подставим (8) в систему (4) и приравняем коэффициенты при подобных членах. Получим систему

$$\begin{aligned} b + d + g &= 0, & b = a + c + f, \\ -2b - d - g &= 0, & d = -2a - c - f, \\ 2b + d + g &= 0, & g = 2a + c + f. \end{aligned} \quad (9)$$

Найдем общее решение этой системы. Из двух левых уравнений имеем $b = 0, g = -d$. Подставляем это в остальные уравнения, получаем

$$0 = a + c + f + f, \quad d = -2a - c - f \quad (10)$$

(остальные уравнения будут следствием написанных). Решаем систему (10), например, относительно a и f :

$$a = -d, \quad f = d - c.$$

Таким образом, все неизвестные выражены через c и d . Положим $c = C_1, d = C_2$, имеем $a = -C_2, b = 0, f = d = C_2 - C_1, g = -C_1$. Общее решение системы (9) найдено.

Подставляем найденные значения a, b, \dots, g в (8) и прибавляем частное решение (7), умноженное на C_1 , получим общее решение системы (1):

$$\begin{aligned} x &= -C_2 e^t + C_2 e^{2t}, & y = (C_1 + C_2 t) e^t - 2C_2 e^{2t}, \\ z &= (C_2 - C_1 - C_2 t) e^t + 2C_2 e^{2t}. \end{aligned}$$

$$\lambda_{2,3} = -4 : \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad k-m=1 \Rightarrow \text{нужен рум. 6 фунг. } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \\ et+f \end{pmatrix} e^{-4t}$$

Получим f (1) и приведи к консп.:

$$\begin{aligned} -4a = -2a + c - e & \quad a = \zeta_2 & a - 4b = -2b + d - f & \quad b = \zeta_3 \\ -4c = -6a - 4c + 3e \Rightarrow c = 2a = 2\zeta_2 & \quad c - 4d = -6b - 4d + 3f \Rightarrow f = 2b = 2\zeta_3 & \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_2 t + \zeta_3 \\ 0 + \zeta_2 \\ 2\zeta_2 t + 2\zeta_3 \end{pmatrix} e^{-4t} \\ -4e = -2a + 2c - 3e & \quad c = 0 & e - 4f = -2b + 2d - 3f & \quad a = d = \zeta_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_1 e^{-4t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$68. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3 e^{-4t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Пример 3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Δ для системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

из условия $\det(\Delta - \lambda I) = 0$ для каждого λ — система линейных уравнений, которую называют характеристическим уравнением. Итак, решим $\det(\Delta - \lambda I) = 0$

и получим $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$ — характеристические корни.

Из условия $(\Delta - \lambda_1 I) = 0$ получим пропорциональные векторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, можно обозначить векторы так

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 h_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_2 h_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_3 h_3$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

$$79. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y + z, \\ \dot{y} = -2x + 3y - z, \\ \dot{z} = -5x + 4y - z. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ -5 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4) + (2+2\lambda - 5) + (-8 + 15 - 5\lambda) =$$

$$= 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 3 - 5\lambda + 7 = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = -(\lambda - 2)^3 = 0; \lambda_{1,2,3} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h_i = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{присоед. к } h_1: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{присоед. к } h_2: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = e^{2t} \left(C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + C_3 \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right)$$

$$79. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left[t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + C_3 e^{2t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$88. \begin{cases} \dot{x} = 9x - 6y - 2z, \\ \dot{y} = 18x - 12y - 3z, \\ \dot{z} = 18x - 9y - 6z. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -6 & -2 \\ 18 & -12-\lambda & -3 \\ 18 & -9 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)[\lambda^2 + 18\lambda + 72 - 27] + 6[-18 \cdot 6 - 18 \cdot \lambda + 3 \cdot 18] - 2[-18 \cdot 9 + (12+\lambda) \cdot 18] = \\ = 9\lambda^2 + 9 \cdot 18\lambda + 45 \cdot 9 - \lambda^3 - 18\lambda^2 - 45\lambda - 6 \cdot 18\lambda + 6 \cdot 18 - 36\lambda = \\ = -(\lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27) = -(\lambda + 3)^3 = 0; \quad \lambda_{1,2,3} = -3$$

$$\lambda_{1,2,3} = -3 : \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[m=2]{k=3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Т.к. 2-я и 3-я строки $A+3E$ одинаковы, рассчит $h_3^2 = h_3^3 \Rightarrow$

При deg. к h_2 : $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 & | & 2 \\ 18 & -9 & -3 & | & 3 \\ 18 & -9 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{e}^{3t} \left(h_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + h_3 \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right)$$

6. Частичное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}_i = a_{1i}x_1 + \dots + a_{ni}x_n + f_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций $b_0 + b_1t + \dots + b_mt^m$, $e^{\alpha t}$, $\cos \beta t$, $\sin \beta t$. Это делается по тем же правилам, что для однородных уравнений с постоянными коэффициентами (см. § 11; о сложении измененных, если $f_i(t) = P_m(t)e^{\alpha t}$, где $P_m(t)$ — многочлен степени m), то частичное решение (13) является в виде $t^k Q_m(t)e^{\alpha t}$, а в виде

$$x_i = Q_{m+k}(t)e^{\alpha t}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Если $Q_{m+k}(t)$ — многочлен степени $m+k$ с постоянными коэффициентами, то находим $s = 0$, если не корень характеристического уравнения (2), и если s — корень, то симметрической прямостью этого корня (или, точнее, s на 1 больше наибольшей из степеней многочленов, на которые умножается $e^{\alpha t}$ в общем решении однородной системы). Неизвестные коэффициенты многочленов определяются путем подстановки выражений (14) в данную систему (13) и сравнения коэффициентов равных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда $f_i(t)$ содержит $e^{\alpha t} \cos \beta t$ и $e^{\alpha t} \sin \beta t$, а число $\gamma = \alpha + \beta i$ является нормой характеристического уравнения.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^{3t}(t + \sin t), \\ \dot{y} = x + 2y + t e^{3t} \cos t. \end{cases} \quad (15)$$

Сначала для однородной системы $\dot{x} = 4x - y$, $\dot{y} = x + 2y$ находим корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ и как в п. 2 отыскиваем общее решение

$$x_0 = (C_1 + C_2 t)^3 e^{3t}, \quad y_0 = (C_1 t + C_2 - C_1 t)^3 e^{3t}.$$

В системе (15) для функции $t e^{3t}$, $t e^{3t} \sin t$, $t e^{3t} \cos t$ числа $\alpha + \beta i$ соответственно равны 3, $3+i$, $3-i$. Поэтому надо отдельно найти частные решения систем

$$\dot{x} = 4x - y + t e^{3t}, \quad \dot{y} = x + 2y, \quad (16)$$

$$\dot{x} = 4x - y + t e^{3t} \sin t, \quad \dot{y} = x + 2y + t e^{3t} \cos t. \quad (17)$$

Для системы (16) $\alpha + \beta i = 3 = \lambda_1 = \lambda_2$, $x = 2$, $m = 1$. Согласно (14), частное решение можно искать в виде

$$x_1 = (at^2 + bt^2 + ct + d)e^{3t}, \quad y_1 = (ft^2 + gt^2 + ht + j)e^{3t}.$$

Для системы (17) $\alpha + \beta i = 3 \neq \lambda_{1,2}$, $x = 0$, $m = 1$. Частное решение имеет вид

$$x_2 = (kt + l)e^{3t} \sin t + (mt + n)e^{3t} \cos t,$$

$$y_2 = (pt + q)e^{3t} \sin t + (rt + s)e^{3t} \cos t.$$

Отыскиваем значения коэффициентов a, b, \dots , общее решение системы (15) напишем в виде

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad y = y_0 + y_1 + y_2.$$

$$154. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^t, \\ \dot{y} = 5x - y - (2t + 6)e^t. \end{cases}$$

$$\text{OC(DY): } \begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 10 = \lambda^2 + 9, \quad \lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$$\lambda = 3i: \begin{cases} (1-3i)\alpha_1 - 2\beta_1 = 0 \\ 5\alpha_1 - (1+3i)\beta_1 = 0 \end{cases} \quad \alpha_1 = \frac{2}{1-3i} \beta_1 \Rightarrow h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2C_1 \cos 3t + 2C_2 \sin 3t \\ y_1 = C_1 (\cos 3t + 3 \sin 3t) + C_2 (\sin 3t - 3 \cos 3t) \end{cases}$$

для част. $\lambda=1, s=0, m=1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (at+b)e^t \\ y_1 = (ct+d)e^t \end{cases}$ могут б. част. и приводн козр.

$$\begin{cases} a = a - 2C_1 - 2 \\ c = 5a - C_2 - 2 \\ a+b = b - 2d \\ C+d = 5b - d - 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-1 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = e^t \\ y_1 = -te^t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$$

$$154. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}$$

$$159. \begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y + 4z + \sin t + \cos t, \\ \dot{y} = 3x + 4y - 5z - \sin t - \cos t, \\ \dot{z} = x + y - 2z, \end{cases}$$

OC(DY): $\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 & 4 \\ 3 & 4+\lambda & -5 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 4+4\lambda-3-5\lambda+2\lambda-2\lambda^2+\lambda^2-\lambda^3 = (\lambda+1)(1-\lambda^2) = 0; \lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 1$

$$\lambda_{1,2} = -1: \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 3 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} h_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{При соед. к } h_2: \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 & | & 0 \\ 3 & 5 & -5 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1: \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

УРНС(У): $\lambda=0, s=0, m=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \sin t + b \cos t \\ y_1 = c \sin t + d \cos t \\ z_1 = e \sin t + f \cos t \end{cases} \Rightarrow$ заметим, что $\begin{cases} -x-2=y \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t \left(C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \left[t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right) + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$159. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 4. Методом вариации постоянных решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y + \frac{1}{2} \sin t. \end{cases}$$

△ Линейную однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$ решаем методом исключений. Её решение имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = \frac{1}{2} [(C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t], \end{cases}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение заданной линейной неоднородной системы уравнений ищем в виде

$$\begin{cases} x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t, \\ y = \frac{1}{2} [(C_1(t) - C_2(t)) \cos t + (C_1(t) + C_2(t)) \sin t], \end{cases}$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, которые находятся подстановкой x и y в заданную систему уравнений.

Подстановка x и y в заданную систему уравнений дает следующую линейную алгебраическую систему для $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$\begin{cases} C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t = 0, \\ C_1(t) \sin t - C_2(t) \cos t = \frac{1}{2} \sin t, \end{cases}$$

Отсюда находим $\dot{C}_1(t) = 1$, $\dot{C}_2(t) = -\operatorname{ctg} t$ и, значит, $C_1(t) = t + C_1$, $C_2(t) = -\ln |\sin t| + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя найденные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$, получим общее решение заданной системы уравнений

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + t \cos t - \sin t \ln |\sin t|, \\ y &= \frac{1}{2} [(C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t] + (t - \ln |\sin t|) \cos t + \end{aligned}$$

▲

$$183. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - \frac{1}{1+e^{-t}}, \\ \dot{y} = -3x - 2y - \frac{1}{1+e^{-t}}. \end{cases}$$

$$\text{O(OY): } \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 + 6 = \lambda(\lambda-1) = 0; \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$$

$$X_0 = C_1 + C_2 e^t \Rightarrow y_0 = -C_2 e^t - \frac{3}{2} C_1$$

$$\text{Ищем реш. б. вже } \begin{cases} X = C_2(t) e^t + C_1(t) \\ Y = -C_2(t) e^t - \frac{3}{2} C_1(t), \end{cases} \text{ но же б. ищт}$$

$$\begin{aligned} C_1'(t) + C_2'(t) e^t + C_2(t) e^t &= 3(C_1(t) + 3(C_1(t) e^t - 2(C_2(t) e^t - 3(C_1(t) - \frac{1}{1+e^{-t}} \\ -\frac{3}{2} C_1'(t) - C_1'(t) e^t - C_2'(t) e^t &= -3(C_1(t) - 3(C_1(t) e^t + 2(C_2(t) e^t + 3(C_1(t) - \frac{1}{1+e^{-t}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C_1'(t) + C_2'(t) e^t = -\frac{1}{1+e^{-t}} \\ -3C_1'(t) - 2C_2'(t) e^t = -\frac{2}{1+e^{-t}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(t) = \frac{4}{1+e^{-t}} \\ C_2'(t) = -\frac{5e^{-t}}{1+e^{-t}} \end{cases}$$

$$C_1(t) = \int \frac{4}{1+e^{-t}} dt = 4 \int \frac{d(1+e^t)}{1+e^t} = 4 \ln(e^t + 1) + \tilde{C}_1$$

$$C_2(t) = -5 \int \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} dt = 5 \int \frac{d(1+e^{-t})}{1+e^{-t}} = 5 \ln(e^{-t} + 1) + \tilde{C}_2$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(4 \ln(e^t + 1) + 5e^t \ln(e^{-t} + 1) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-6 \ln(e^{-t} + 1) - 5e^{-t} \ln(e^{-t} + 1) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$183. \begin{cases} x = -2C_1 - C_2 e^t + 4 \ln(1+e^t) + 5e^t \ln(1+e^{-t}), \\ y = 3C_1 + C_2 e^t - 6 \ln(1+e^t) - 5e^{-t} \ln(1+e^{-t}). \end{cases}$$

Пример 3. С помощью матричной экспоненты решить следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = x + 3y, \quad x(0) = 1, \end{cases}$$

△ Для матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ находим собственное значение

$\lambda = 2$ кратности два. Ему соответствуют собственный вектор $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

и присоединенный вектор $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В базисе из векторов h_1, h_2

матрица A принимает нормальную матричную форму $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Из определения матричной экспоненты находим,

$$e^{tJ} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Если через H обозначить матрицу, у которой первая строка — базис h_1 , а вторая — базис h_2 , то

$$e^{tJ} = H^{-1} J H = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Определив C_1 и C_2 из начальных условий, находим решение задачи Коши: $x = y = e^{2t}$.

8. Повозительной функцией e^A матрицы A называется сумма

$$e^A = e^0 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (18)$$

где E — единичная матрица. Ряд расходится для любой матрицы A .

Свойства e^A :

a) если $A = BC^T$, то $e^A = C^T e^B C^{-1}$;

b) если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$, $e^{AB} = e^A e^B$;

c) матрица $X(t) = e^{At}$ удовлетворяет уравнению $\frac{dX}{dt} = AX$;

Методы отыскания e^A :

1) путем решения системы дифференциальных уравнений;

2) путем применения метода матричной экспоненты;

3) путем использования (в частном случае) $J = A + \lambda E$ и начальных условий $x(0) = 1$, $x_1(0) = 0$ при $\lambda \neq 1$ (x_1 — 1-я компонента вектора x).

С помощью матричной экспоненты решить задачу Коши для линейных однородных систем уравнений с начальными условиями $x(0) = C_1$, $y(0) = C_2$ (117-131):

С. 11; 117; 124; 128 (для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y(0) = 0$):

$$117. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0; \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= B e^t + C e^{3t} & \text{при } t=0: \begin{cases} E = B + C \\ A = B + 3C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = \frac{A-E}{2} \\ B = \frac{3E-A}{2} \end{cases} & C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ Ae^{tA} &= Be^t + 3(Ce^{3t}) & B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$117. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

$$124. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0; \quad \lambda_{1,2} = 3$$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= B e^{3t} + (t e^{3t}) & \text{при } t=0: E = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ Ae^{tA} &= 3B e^{3t} + (e^{3t} + 3t e^{3t}) & C = A - 3B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$124. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

$$128. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0; \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$$

$$e^{tA} = (B+iC) e^{2t} (\cos 3t + i \sin 3t) + (B-iC) e^{2t} (\cos 3t - i \sin 3t) = e^{2t} (2B \cos 3t - 2i \sin 3t)$$

$$Ae^{tA} = e^{2t} (4B \cos 3t - 4i \sin 3t) + e^{2t} (-6B \sin 3t - 6i \cos 3t)$$

$$\text{при } t=0: E = 2B, \quad 2C = \frac{4B-A}{3} = \frac{2E-A}{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$128. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t & -\sin 3t \\ \sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

2. Решить задачу Коши: $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \bar{x}_0$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$,
 $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, и $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ — заданные число и столбец, $\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$ — искомая вектор-функция.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -a \\ 0 & \lambda & a \\ a & a & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + a^2\lambda - a^2\lambda = -\lambda^3 = 0; \lambda_{1,2,3} = 0$$

$$e^{tA} = B + Ct + Dt^2 \quad \text{при } t=0: \quad E=B$$

$$Ae^{tA} = 2Dt + C$$

$$A^2 e^{tA} = 2D$$

$$D = \frac{1}{2} A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -a^2 & -a^2 & 0 \\ a^2 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}a^2t^2 & -\frac{1}{2}a^2t^2 & -at \\ \frac{1}{2}a^2t^2 & 1 + \frac{1}{2}a^2t^2 & at \\ at & at & 1 \end{pmatrix} \bar{X}_0$$

3. а) Записать (в векторном виде) общее решение системы $\dot{x} = Ax$, если матрица

$$A \text{ в базисе } \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \bar{h}_5 \text{ имеет вид } A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

б) Найти матрицу $e^{A'}$.

a) $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_5$ — некор. базис $\Rightarrow \bar{X} = S e^{A't} S^{-1} \cdot \bar{I}$, где $S = (h_1^1, \dots, h_5^1)$,
 $\bar{I} = (I_1, \dots, I_5)^T$ — const

$$\delta) e^{A'} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 5. Операционным методом решить задачу Коши

$$y'' - 4y' + 3y = 2(e^t + e^{2t}), \quad t \geq 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

Будем считать, что при $t < 0$ $y(t) \equiv 0$ и правая часть уравнения тождественный нуль. Тогда так проложенное на всю числовую ось решение удовлетворяет исходному уравнению и его начальным условиям. Если $y(t) = Y(p)$, то в силу свойств преобразования Лапласа и начальных условий $y'(t) = pY(p) + 1$, $y''(t) = p^2Y(p) + p - 1$. Продолженная пулем при $t < 0$ вправо часть уравнения имеет следующее преобразование:

Лаплас функцию $2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right)$. Переход в исходном уравнении в преобразование Лапласа, т. е. умножив его на e^{-pt} и интегрировав по t от p до бесконечности, получим алгебраическое уравнение для $Y(p)$ вида

$$p^2Y(p) + p - 1 - 4[pY(p) + 1] + 3Y(p) = 2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right).$$

Если считать комплексный параметр p таким, что $Re p > 3$, то из алгебраического уравнения находим

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-3)} \left[\frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3} - p + 5 \right].$$

Разложим правую часть на простые дроби:

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{(p-3)^2}$$

Принимая выражение для $Y(p)$, находим

$$A = -2, \quad B = -1, \quad C = 1, \quad D = 1.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение

$$y(t) = (t+1)e^{2t} - (t+2)e^t.$$

Операционным методом решить при $t \geq 0$ задачу Коши (172-183):

172. $y'' - 3y' + 2y = e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

$$P^2F - 1 - 3PF + 2F = \frac{1}{P+1}; \quad F(P^2 - 3P + 2) = \frac{1}{P+1} + 1 \Rightarrow$$

172. $y = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{3}{2}e^t + \frac{4}{3}e^{2t}$.

$$F = \frac{P+2}{(P+1)(P-1)(P-2)} = \frac{A}{P+1} + \frac{B}{P-1} + \frac{C}{P-2} \Rightarrow P=1: A=\frac{1}{6} \quad P=2: C=\frac{4}{3}$$

$$\text{затм. и получ. } P=1: B=-\frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{3}{2}e^t + \frac{4}{3}e^{2t}$$

$$182. \quad y'' + 4y = 4(\cos 2t + \sin 2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$\begin{aligned} p^2 F - 1 + 4F &= \frac{4p}{p^2+4} + \frac{8}{p^2+4} \Rightarrow F = \frac{4p}{(p^2+4)^2} + \frac{8}{(p^2+4)^2} + \frac{1}{p^2+4} \\ \frac{8}{(p^2+4)^2} + \frac{1}{p^2+4} &= \frac{-p^2+4+4+p^2}{(p^2+4)^2} + \frac{1}{p^2+4} = -\frac{p^2-4}{(p^2+4)^2} + \frac{2}{p^2+4} \end{aligned}$$

$$y = t \sin 2t - t \cos 2t + \sin 2t$$

$$182. \quad y = (1+t) \sin 2t - t \cos 2t.$$

Решить операционным методом задачу Коши при $t \geq 0$ (187-197):

$$189. \quad \begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y + e^{2t}, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

$$x(t) = F(p), \quad y(t) = G(p)$$

$$\begin{cases} pF - 1 = F + G + \frac{1}{p-2} \\ pG - 2 = -2F + 4G + \frac{1}{p-2} \end{cases} \quad \begin{aligned} G &= (p-1)F - 1 - \frac{1}{p-2} \\ (p-4)(p-1)F - (p-4) - \frac{p-4}{p-2} - 2 &= -2F + \frac{1}{p-2} \end{aligned}$$

$$F(p-2)(p-3) = p-1 + \frac{p-3}{p-2}$$

$$p=3, \quad p=2$$

$$F = \frac{1}{p-3} + \frac{1}{(p+2)^2}, \quad G = \frac{\widehat{p-1}}{p-3} + \frac{\widehat{p-1}}{(p+2)^2} - 1 - \frac{1}{p+2} = \frac{2}{p-3} + \frac{1}{(p+2)^2}$$

$$\begin{cases} x = e^{3t} + te^{2t} \\ y = 2e^{3t} + te^{2t} \end{cases}$$

$$189. \quad x = e^{3t} + te^{2t}, \quad y = 2e^{3t} + te^{2t}.$$

$$194. \quad \begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y + 4, \\ \dot{y} = -4x - 4y + 4t, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 3. \end{cases}$$

$$X(t) = F(p), \quad Y(t) = G(p)$$

$$\begin{cases} pF = 4F + 5G + \frac{4}{p} \\ pG - 3 = -4F - 4G + \frac{4}{p^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{1}{5}[F(p-4) - \frac{4}{p}] \\ \frac{p+4}{5}[F(p-4) - \frac{4}{p}] - 3 = -4F + \frac{4}{p^2} \end{cases}$$

$$F(p^2+4) = 4 \frac{p+4}{p} + 15 + \frac{20}{p^2}$$

$$F = 4 \frac{p+4}{p(p^2+4)} + \frac{15}{p^2+4} + \frac{20}{p^2(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+4} \quad \begin{aligned} A &= 4 & C &= -4 \\ B &= 5 & D &= -14 \end{aligned}$$

$$F = \frac{4}{P} + \frac{5}{P^2} - 4 \frac{P}{P^2+4} + 7 \frac{2}{P^2+4}$$
$$G = -\frac{3}{P} - \frac{4}{P^2} + \frac{6P}{P^2+4} - 4 \frac{2}{P^2+4}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= 4 + 5t - 4(\cos 2t) + 7 \sin 2t \\ y &= -3 - 4t + 6 \cos 2t - 4 \sin 2t \end{aligned}$$

194. $x = 4 + 5t - 4 \cos 2t + 7 \sin 2t$, $y = 6 \cos 2t - 4 \sin 2t - 3 - 4t$.

