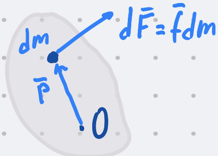
14.10. Используя принцип виртуальных перемещений, доказать, что равенство нулю главного вектора **R** и главного момента $\mathbf{M}_O$ сил, действующих на твердое тело, является необходимым и достаточным условием равновесия свободного твердого тела.



Теорема 7.1 (принцип виртуальных перемещений). *Для того чтобы положение* $\mathbf{R}^0$ *голономной системы с идеальными связями было положением равновесия, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении работа активных сил на любом виртуальном перемещении системы была равна нулю:*

$$\delta A = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \;\; \forall \delta\mathbf{R} \in (7.5). \qquad (7.9)$$

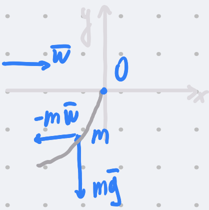
$$\bar V = \bar V_0 + \bar\omega \times \bar p \;\; / \cdot dt \Rightarrow \delta\bar r = \delta\bar r_0 + d\bar\varphi \times \bar p$$

Если трактовать $\bar V_0$ и $\bar\omega$ как вирт.

$$\delta A = \int \bar f \cdot \delta\bar r\, dm = \int [\bar f \cdot \delta\bar r_0 + \bar f \cdot (d\bar\varphi \times \bar p)]\, dm = \bar R \cdot d\bar r_0 + \int d\bar\varphi \cdot (\bar p \times \bar f)\, dm = \bar R \cdot d\bar r_0 + \bar M_0 \cdot d\bar\varphi$$

$\bar r^0$ пол. равн $\Leftrightarrow \forall\, \delta\bar r_0, d\bar\varphi \mapsto \delta A = 0 \Rightarrow \bar R = 0, \bar M_0 = 0$

14.20. Точка подвеса однородной нити движется с постоянным ускорением **w** вдоль горизонтальной оси Ox. Найти форму нити в положении её относительного равновесия в системе координат Oxy, движущейся поступательно с точкой подвеса O.



Выберем произв точку на нити с массой m

14.20. Прямая линия $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{g}{w}$.

14.29. Материальная точка может двигаться без трения по поверхности $f(x,y,z) = 0$ в силовом поле

$$\{F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)\}.$$

Показать, что решение относительно x, y, z, λ системы уравнений

$$F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \; f(x,y,z) = 0$$

определяет положение равновесия точки и обратно, любому положению равновесия соответствует решение этой системы.

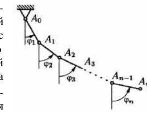
ПВП: $\delta A = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z = 0$

Пусть виртуальное перемещение колечка задается величинами δx, δy, δz. Продифференцировав уравнения, задающие форму прута, получим, что на виртуальном перемещении должны выполняться условия

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$$

учтем ур связи: $\mathcal{L} = \delta A + \lambda\varphi \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial z} = 0 \\ f = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \; f(x,y,z) = 0$

14.40. Маятник составлен из n одинаковых стержней массы m и длины L каждый, последовательно соединенных друг с другом шарнирами ($n-$звенный маятник). Маятник может совершать движение в вертикальной плоскости, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через точку A_0 закрепления конца первого стержня. Составить уравнения, определяющие положения относительного равновесия системы.



К задачам 14.39, 14.40

Теорема 7.2. *Для того чтобы положение* $\mathbf{q}^0$ *было положением равновесия стационарной голономной системы, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении все обобщенные силы были равны нулю:*

$$Q_k(\mathbf{q}^0) = \left(\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k}\right)_{\mathbf{q}^0} = 0;\quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7.15)$$

Если механическая система является *консервативной*, то обобщенные силы выражаются через потенциальную энергию системы $\Pi(\mathbf{q})$ формулами

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Rightarrow Q_k(\mathbf{q}) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial q_k};\quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7.16)$$

В этом случае условия равновесия (7.15) принимают вид

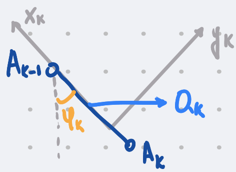
$$\left.\frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial q_k}\right|_{\mathbf{q}^0} = 0;\quad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (7.17)$$

т.е. *положениям равновесия консервативной системы соответствуют стационарные точки потенциальной энергии.*

$$s_i = \sin\varphi_i$$
$$c_i = \cos\varphi_i$$
$$t_i = \operatorname{tg}\varphi_i$$

$$\Pi = -mgl\Big[\tfrac12 c_1 + \underbrace{(c_1 + \tfrac12 c_2) + \ldots + (c_1 + \ldots + \tfrac12 c_n)}_{n-1}\Big] \Rightarrow \Pi = -mgl\Big[(n-1+\tfrac12)c_1 + (n-2+\tfrac12)c_2 + \ldots + \tfrac12 c_n\Big] \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} = mgl\,(n-k+\tfrac12)\,s_k$$

$$\mathbf{Q}^{ин} = \mathbf{Q}^{пер} + \mathbf{Q}^{кор} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}};\quad V = T^{отн} - T$$



$$T_k^r = \frac12 m (V_k^r)^2 + \frac12 \hat{J}_{yy}\dot\varphi_k^2$$

$$T_k^a = \frac12 m\left[(V_k^r)^2 + (V_k^e)^2\right] + \frac12 \bar\Omega^T \hat{J}\,\bar\Omega$$

$$\Omega = \bar{w} + \dot{\bar\varphi}_k = \begin{bmatrix} -w\cos\varphi_k \\ w\sin\varphi_k \\ \dot\varphi_k \end{bmatrix},\quad \hat{J} = \operatorname{diag}\left(0, \frac{ml^2}{12}, \frac{ml^2}{12}\right)$$

в гл. осях

$$V_k = -\frac12 m (V_k^e)^2 - \frac12 \frac{ml^2}{12} w^2 \sin^2\varphi_k$$

$$V = \Big[\tfrac12 s_1^2 + \tfrac1{12} s_1^2 + (s_1 + \tfrac12 s_2)^2 + \tfrac1{12} s_2^2 + \ldots + (s_1 + \ldots + \tfrac12 s_n)^2 + \tfrac1{12} s_n^2\Big]\cdot\left(-\tfrac12 m l^2 w^2\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = \Big[(s_1 + \ldots + \tfrac12 s_k) + \tfrac16 s_k + \underbrace{2(s_1 + \ldots + s_k + \tfrac12 s_{k+1}) + \ldots + 2(s_1 + \ldots + \tfrac12 s_n)}_{n-k}\Big]\cdot\left(-\tfrac12 m l^2 w^2 c_k\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = \Big[(n-k+\tfrac12)s_1 + \ldots + (n-k+\tfrac12)s_{k-1} + \overbrace{(n-k+\tfrac14)s_k + \tfrac1{12}s_k}^{A} + (n-(k+1)+\tfrac12)s_{k+1} + \ldots + \tfrac12 s_n\Big]\left(-ml^2w^2c_k\right)$$

$$A = (n-k+\tfrac12)s_k - \tfrac14 s_k + \tfrac1{12} s_k = (n-k+\tfrac12)s_k - \tfrac16 s_k$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = \left[\sum_{i=1}^{k} \left(n-k+\frac{1}{2}\right) S_i + \sum_{i=k+1}^{n} \left(n-i+\frac{1}{2}\right) S_i - \frac{1}{6} S_k\right] \left(-m l^2 \omega^2 C_k\right)$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = 0, \quad k = \overline{1,n}$$

$$m l^2 \omega^2 C_k \cdot \left[\sum_{i=1}^{k} \left(n-k+\frac{1}{2}\right) S_i + \sum_{i=k+1}^{n} \left(n-i+\frac{1}{2}\right) S_i - \frac{1}{6} S_k\right] = m g l \left(n-k+\frac{1}{2}\right) S_k$$

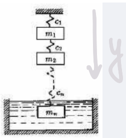
$$\frac{l}{g} \omega^2 C_k \cdot \left[\sum_{i=1}^{k} \left(n-k+\frac{1}{2}\right) S_i + \sum_{i=k+1}^{n} \left(n-i+\frac{1}{2}\right) S_i - \frac{1}{6} S_k\right] = \left(n-k+\frac{1}{2}\right) t_k$$

Сходится с ответом

$$\sum_{i=1}^{n} \left(n-i+\frac{1}{2}\right) S_i - \sum_{i=1}^{k} (k-i) S_i = \sum_{i=1}^{k} (1) + \sum_{i=k+1}^{n} (1) - \sum_{i=1}^{k} (2) = \sum_{i=1}^{k} \left(n-k+\frac{1}{2}\right) S_i + \sum_{i=k+1}^{n} \left(n-i+\frac{1}{2}\right) S_i$$

14.40. $\frac{\omega^2 L}{g}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)\sin\varphi_i - \frac{1}{6}\sin\varphi_k - \sum_{i=1}^{k}(k-i)\sin\varphi_i\right] = \left(n-k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi_k \quad \left(k=\overline{1,n}\right).$

17.8. Система состоит из n грузов, которые последовательно связаны между собой и с неподвижной опорой пружинами жесткости c_i и могут перемещаться по вертикали. На последний груз m_n действует сила вязкого трения $F = -\beta v$, $\beta > 0$. Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.



К задаче 17.8

I способ

$$m_i \ddot{y}_i + \beta \dot{y}_i \delta_{in} - c_{i+1}(y_{i+1} - y_i) + c_i (y_i - y_{i-1}) = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix}$$

$$(*) \quad A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = 0$$

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$, производная которой $\dot V$ в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с V, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

$$V(X,\dot X) = \underbrace{\frac{1}{2}\dot X^T A \dot X}_{T} + \underbrace{\frac{1}{2} X^T C X}_{\Pi} > 0$$

$$\dot V = \dot X^T A \ddot X + X^T C \dot X \overset{(*)}{=}$$

$$= \dot X^T(-B\dot X - \cancel{CX}) + \cancel{X^T C \dot X} = -\dot X^T B \dot X = -\beta \dot y_n^2 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{п.р. ас. уст}}$$

II способ

$V = E = T + \Pi$, $\dot V = N_F$, $F = -\beta \dot x_n$ $N_F = F\dot x = -\beta \dot x_n^2$

Теорема Барбашина-Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости: *если в некоторой окрестности положения равновесия $\vec x = \vec 0$ существует функция Ляпунова $V(\vec x)$ такая, что*

$$\dot V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i \begin{cases} = 0, & \vec x \in M \\ < 0, & \vec x \notin M \end{cases},$$

где M — некоторое множество, выбранное так, что единственной целой траекторией исследуемой автономной системы, лежащей в M, является $\vec x \equiv \vec 0$, то

а) если $V(\vec x)$ имеет минимум в положении равновесия $\vec x = \vec 0$, то это положение равновесия асимптотически устойчиво;

б) если $V(\vec x)$ знаконеопределена в окрестности $\vec x = \vec 0$, то положение равновесия $\vec x = \vec 0$ неустойчиво.

$\dot V = -\beta \dot x_n^2 \Rightarrow M\{\dot x_n = 0\}$

д-жем, что не сущ таких движ. сист при которых груз m_n покоится

из того, что груз покоится $\Rightarrow$ C_n имеет пост длину $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ груз m_{n-1} покоится $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ сист покоится $\Rightarrow$ $\boxed{\text{п.р. ас. уст}}$

Th Б-К

Исследуйте на устойчивость нулевое решение с помощью прямого метода Ляпунова:

Т1.

$$\begin{cases} \dot x = -x^3 - y^3 + xy^3, \\ \dot y = x^3 - y^3 - x^4. \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{4}(x^4 + y^4) > 0$$

$$\dot V = x^3 \dot x + y^3 \dot y = x^3(-x^3 - y^3 + xy^3) + y^3(x^3 - y^3 - x^4) =$$

$$= -x^6 - \cancel{x^3 y^3} + \cancel{x^4 y^3} + \cancel{y^3 x^3} - y^6 - \cancel{x^4 y^3} = -x^6 - y^6 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{П.Р. ас. уст.}}$$

Т2.

$$\begin{cases} \dot x = x + y + x^3, \\ \dot y = x - y - y^3. \end{cases}$$

система лин. прибл: $\begin{cases} \dot x = x + y \\ \dot y = x - y \end{cases}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\text{П.Р. Не уст}}$

Th. Ляпунова об уст по л.п.

Теорема. *Если все корни характеристического уравнения (3) имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от нелинейных членов в (1). Если же среди корней характеристического уравнения есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво — тоже независимо от нелинейных членов в (1).*

Т3.

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y. \end{cases}$$

Примечание к задаче Т3

Функцию Ляпунова искать в виде $V = (ax + by)^2 + cx^4$.

$V = (ax+by)^2 + cx^4 > 0$ при $c>0$

$\dot{V} = 2(ax+by)(a\dot{x}+b\dot{y}) + 4cx^3\dot{x} =$

$-ax^3-3(a-2b)x+(a-2b)y$

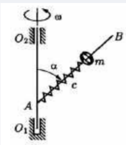
$= 2(ax+by)(ay-3ax-ax^3+6bx-2by)+4cx^3(y-3x-x^3)$

При $a=2b$ $\dot{V} = -4(2x+y)b^2x^3 + 4cx^3(y-3x-x^3) =$

$= -8b^2x^4 - 4b^2x^3y + 4cx^3y - 12cx^4 - 4cx^6 = 4(c-b^2)x^3y - 4(2b^2+3c)x^4 - 4cx^6$

При $\begin{cases} a=2b \\ c=b^2 \end{cases}$ $\dot{V} = -20cx^4 - 4cx^6 < 0 \Rightarrow$ п.р. ас. уст

15.2. Стержень AB, образующий угол α с вертикалью, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси O_1O_2, проходящей через его конец A. По стержню может двигаться без трения колечко массы m, соединенное с точкой A пружиной жесткости c. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0. Найти положения относительного равновесия колечка и исследовать их устойчивость.



$\alpha = const$

$\Pi = mgl\cos\alpha - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\alpha + \frac{1}{2}c(l-l_0)^2$ (1)

$\Pi_l = c(l-l_0) + mg\cos\alpha - m\omega^2 l \sin^2\alpha = 0$ (2)

1) при $c \neq m\omega^2\sin^2\alpha$ $\quad l = \dfrac{cl_0 - mg\cos\alpha}{c - m\omega^2\sin^2\alpha}$ – п.р.

Теорема. *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Th. Л-Д

$\Pi_{ll} = c - m\omega^2\sin^2\alpha$

- $\Pi_{ll} > 0$ при $c > m\omega^2\sin^2\alpha \Rightarrow$ уст
- $\Pi_{ll} < 0$ при $c < m\omega^2\sin^2\alpha \Rightarrow$ неуст

Th. Ляпунова

Теорема 1. *Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнается уже по членам второго порядка в разложении функции П в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

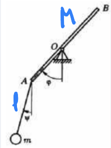
2) при $c = m\omega^2\sin^2\alpha$

$\Pi = const \Rightarrow l$ - любой — неуст п.р.

по опр

15.2. Положение равновесия $l = \dfrac{cl_0 - mg\cos\alpha}{c - m\omega^2\sin^2\alpha}$ устойчиво при $c > m\omega^2\sin^2\alpha$ и неустойчиво при $c < m\omega^2\sin^2\alpha$. При $l_0 c = mg\cos\alpha = l_0 m\omega^2\sin^2\alpha$ любое положение колечка является положением равновесия.

15.13. Груз массы m подвешен на невесомой нерастяжимой нити длины l к точке A однородного стержня массы M, который может вращаться вокруг своей неподвижной точки O ($AO = l_1$, $OB = l_2$). Движение происходит в вертикальной плоскости. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.



К задаче 15.13

$$\Pi = Mg\frac{l_2-l_1}{2}\cos\varphi - mg(l\cos\psi + l_1\cos\varphi)$$

$$\Pi_\varphi = -\frac{1}{2}Mg(l_2-l_1)\sin\varphi + mgl_1\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi}$$

$$\Pi_\psi = mgl\sin\psi = 0 \Rightarrow \boxed{\psi_{1,2}=0}$$

$$\Pi_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}Mg(l_2-l_1)\cos\varphi + mgl_1\cos\varphi$$

$$\Pi_{\psi\psi} = mgl\cos\psi > 0 \text{ при } \psi=\psi_{1,2}$$

$$C = \begin{bmatrix} \Pi_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & \Pi_{\psi\psi} \end{bmatrix} \quad \operatorname{sign}\Delta_2 = \operatorname{sign}\Delta_1 = \Pi_{\varphi\varphi}$$

$$\Pi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g\left[\overset{\varphi_1}{\underset{\varphi_2}{\mp}} M(l_2-l_1) \pm 2ml_1\right]$$

Теорема. *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

$C_1>0,\ C_2\gtrless 0$ при $2ml_1 > M(l_2-l_1)$

Th. Л-Д → $\boxed{\text{П.Р. } \varphi_1, \psi_1 \text{ уст}}$

Th. Ляпунова → $\boxed{\text{П.Р. } \varphi_2, \psi_2 \text{ неуст}}$

Теорема 1. *Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнается уже по членам второго порядка в разложении функции* Π *в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

$C_1\gtrless 0,\ C_2>0$ при $2ml_1 < M(l_2-l_1)$

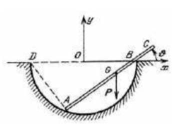
Th. Л-Д → $\boxed{\text{П.Р. } \varphi_2, \psi_2 \text{ уст}}$

Th. Ляпунова → $\boxed{\text{П.Р. } \varphi_1, \psi_1 \text{ неуст}}$

При $2ml_1 = M(l_2-l_1)$ Π не зависит от $\varphi \Rightarrow$ φ_3 – любой, $\psi_3=0$ неуст П.Р. по опр

15.13. При $2ml_1 > M(l_2-l_1)$ положение равновесия $\varphi_1=0$, $\psi_1=0$ устойчиво, а положение равновесия $\varphi_2=\pi$, $\psi_2=0$ неустойчиво, и, наоборот, при $2ml_1 < M(l_2-l_1)$ положение равновесия $\varphi_1=0$, $\psi_1=0$ неустойчиво, а положение равновесия $\varphi_2=\pi$, $\psi_2=0$ устойчиво. В случае $2ml_1 = M(l_2-l_1)$ имеет место континуум неустойчивых положений равновесия φ_3 – любое, $\psi_3=0$.

15.26. Тяжёлый однородный стержень длины l и массы m, опираясь на край полусферической чаши радиуса r, нижним концом может скользить по её внутренней гладкой поверхности. Геометрические параметры удовлетворяют условию $r<l<2r$. Определить значение угла наклона θ стержня к линии горизонта в положении равновесия. Исследовать устойчивость положений равновесия.



К задаче 15.26

$$GB = AB - AG = 2r\cos\theta - \frac{l}{2}$$

$$\Pi = -mg\left(2r\cos\theta - \frac{l}{2}\right)\sin\theta \sim \left(-4\cos\theta + \frac{l}{r}\right)\sin\theta$$

$$\Pi_\theta = -4\cos 2\theta + \frac{l}{r}\cos\theta = -8\cos^2\theta + 4 + \frac{l}{r}\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta_{1,2} = \frac{1}{16}\cdot\frac{l}{r} \pm \frac{1}{16}\sqrt{\frac{l^2}{r^2} + 128}$$

$$\Pi_{\theta\theta} = 8\sin 2\theta - \frac{l}{r}\sin\theta = \sin\theta\left(16\cos\theta - \frac{l}{r}\right)$$

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \Pi_{\theta\theta} > 0 \text{ при } \cos\theta > \frac{1}{16}\frac{l}{r}$$

Th. Л-Д

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{l}{r} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{l^2}{r^2} + 128}\right) - \text{уст П.Р.}$$

Теорема. *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{l}{r} - \frac{1}{16}\sqrt{\frac{l^2}{r^2} + 128}\right) - \text{неуст П.Р.}$$

Th. Ляпунова

Теорема 1. *Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнается уже по членам второго порядка в разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

15.26. $\varphi \approx \arccos 0.92$, устойчиво. ???

Т4. Материальная точка находится в однородном поле тяжести на гладкой поверхности, определяемой уравнением (ось Oz направлена вертикально вверх):

$$z = \sin(x+y) - \cos y.$$

Найдите все положения равновесия материальной точки и исследуйте их устойчивость.

$$\Pi = mgz \sim z = \sin(x+y) - \cos y$$

$$\Pi_x = \cos(x+y) = 0 \Rightarrow x+y = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\Pi_y = \cos(x+y) + \sin y = 0 \Rightarrow y = \pi k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi m \\ y = \pi n \end{cases} - \text{П.Р.}$$

$$C = \begin{bmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{xy} \\ \Pi_{xy} & \Pi_{yy} \end{bmatrix}$$

1) $-\sin(x+y) > 0$

$\sin^2(x+y) - \sin(x+y)\cos y - \sin^2(x+y) > 0 \Rightarrow \begin{matrix} \sin(x+y) < 0 \\ \cos y > 0 \end{matrix}$

$x+y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$y = 2\pi k$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k) \\ y = 2\pi k \end{cases} \quad \text{уст. П.Р.} \quad \text{Th. Л-Д}$$

2) $$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k) \\ y = 2\pi k \end{cases} \quad \text{неуст. П.Р.} \quad \text{Th. Ляпунова}$$
