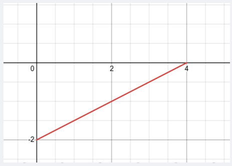
1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской кривой Г:

4) $\int\limits_\Gamma \frac{ds}{y-x}$, Г — отрезок с концами $(0;-2)$ и $(4;0)$;



$y=\frac{1}{2}x-2,\ 0\leqslant x\leqslant 4 \qquad x=2y+4,\ -2\leqslant y\leqslant 0$

$$x=\varphi(y), \quad c\leqslant y\leqslant d,$$

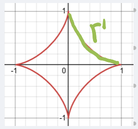
$$\int\limits_\Gamma F(x;y)\,dx=\int\limits_c^d F(\varphi(y);y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy.$$

$$\int\limits_\Gamma \frac{ds}{y-x}=\int\limits_{-2}^{0}\frac{dy}{y-2y-4}\cdot\sqrt{1+4}=-\sqrt{5}\int\limits_{-2}^{0}\frac{dy}{y+4}=-\sqrt{5}\ln 2+\sqrt{5}\ln 4=-\sqrt{5}\ln 2$$

4) $-\sqrt{5}\ln 2$;

Вычислить криволинейный интеграл по плоской кривой Г (4–11).

9. $\int\limits_\Gamma (x^{4/3}+y^{4/3})\,ds$, Г — астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.



$x=a\cos^3 t \qquad x'_t=-3a\cos^2 t\sin t$

$y=a\sin^3 t$

$0<t<2\pi \qquad y'_t=3a\sin^2 t\cos t$

$$\int\limits_\Gamma F(x;y;z)\,ds=\int\limits_\alpha^\beta F(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=3a\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}=3a\cos t\sin t=\frac{3}{2}a\sin 2t,\quad 0<t<\pi/2$$

$$x^{4/3}+y^{4/3}=a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)=a^{4/3}[(\cos^2 t+\sin^2 t)^2-2\cos^2 t\sin^2 t]=$$

$$=a^{4/3}\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2t\right)=\frac{1}{2}a^{4/3}(2-1+\cos^2 2t)=\frac{1}{2}a^{4/3}(1+\cos^2 2t)$$

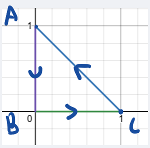
$$\int\limits_\Gamma=4\int\limits_{\Gamma'}(x^{4/3}+y^{4/3})\,ds=4\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{1}{2}a^{4/3}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos^2 2t)\sin 2t\,dt=\left\{\begin{matrix}u=\cos 2t\\ du=-2\sin 2t\,dt\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{3}{2}a^{7/3}\int\limits_{-1}^{1}(1+u^2)\,du=3a^{7/3}\int\limits_0^1(1+u^2)\,du=3a^{7/3}\left(1+\frac{1}{3}\right)=4a^{7/3}$$

9. $4a^{7/3}$.

Вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Г, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (29, 30).

4) $\int\limits_\Gamma (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, Г — граница треугольника с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$.



$$\int\limits_\Gamma=I_1+I_2+I_3$$

$AB:\ x=0,\ 0\leqslant y\leqslant 1\Rightarrow I_1=\int\limits_1^0 y^2\,dy=\frac{1}{3}$

$BC:\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow I_2=\int\limits_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$

$CA:\ y=1-x,\ 0\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow \quad I_3=-\int\limits_0^1(\cancel{x^2}+(1-x)^2-\cancel{x^2}+(1-x)^2)\,dx=-\frac{2}{3}$

$$\int\limits_\Gamma=0$$

4) 0.

85. Найти массу, распределенную с линейной плотностью $\rho(x;y)$ по дуге AB плоской кривой Γ, если:

4) Γ: $y^2 = x$, $A(1;1)$, $B(4;2)$; $\rho(x;y) = y$;

4) $(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})/12$;

$$m = \int\limits_\Gamma \rho(x,y)\,ds = \int_1^2 y\sqrt{1+(2y)^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{1+4y^2}\,dy^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1+4y^2\right)^{3/2}\Big|_1^2 = \boxed{\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)}$$

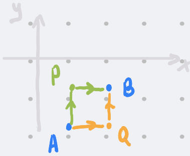
---

110. Найти работу поля $\mathbf{F} = (4x - 5y; 2x + y)$ вдоль дуги AB кривой Γ, где $A(1;-9)$, $B(3;-3)$, если:

1) Γ — ломаная APB, где $P(1;-3)$;

2) Γ — ломаная AQB, где $Q(3;-9)$;

$$A = \int\limits_\Gamma \mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}.$$



1) AP: $x = 1$, $-9 \le y \le -3$ $\qquad$ PB: $y = -3$, $1 \le x \le 3$

$$A_1 = \int_{-9}^{-3}(2+y)\,dy = -6 + \frac{9}{2} + 18 - \frac{81}{2} = -24 \qquad A_2 = \int_1^3 (4x+15)\,dx = 18 + 45 - 2 - 15 = 46$$

$$A = A_1 + A_2 = \boxed{22}$$

110. 1) 22; 2) 106;

2) AQ: $y = -9$, $1 \le x \le 3$ $\qquad$ QB: $x = 3$, $-9 \le y \le 3$

$$A_1 = \int_1^3 (4x+45)\,dx = 18 + 45\cdot 3 - 2 - 45 = 106 \qquad A_2 = \int_{-9}^{-3}(6+y)\,dy = -18 + \frac{9}{2} + 54 - \frac{81}{2} = 0$$

$$A = A_1 + A_2 = \boxed{106}$$

---

46. $\int\limits_\Gamma (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$, Γ — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy,$$

$$Q = x^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$P = 2xy - y \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \Rightarrow \int\limits_\Gamma = \iint\limits_S dx\,dy \overset{S_{эл}}{=} \boxed{\pi ab}$$

46. πab.

---

100. Пусть G — ограниченная плоская область с кусочно гладкой границей ∂G, ориентированной так, что область G находится (локально) слева от касательного к ∂G вектора. Доказать, что площадь μG можно вычислять по любой из формул

$$S = \oint\limits_{\partial G} x\,dy = -\oint\limits_{\partial G} y\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial G} x\,dy - y\,dx. \qquad (36)$$

Рассм. $I = \int\limits_{\partial G^+} \overbrace{(Ax+By)}^{P}dx + \overbrace{(Cx+Dy)}^{Q}dy$ Заметим, что $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = C - B \Rightarrow$

$I = (C-B)\underbrace{\iint\limits_G dx\,dy}_{S} \Rightarrow S = \frac{I}{C-B} \Rightarrow$ при $A=B=D=0$, $C=1$: $\boxed{S = \int\limits_{\partial G^+} x\,dy}$

при $A=C=D=0$, $B=1$: $\boxed{S = -\int\limits_{\partial G^+} y\,dx}$

Т.к. $\int\limits_{\partial G^+} x\,dy = -\int\limits_{\partial G^+} y\,dx$, возьмем ср. ар.: $\boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial G^+} x\,dy - y\,dx}$

Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой Γ с началом в точке A и концом в точке B (56–68).

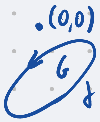
59. $\int\limits_\Gamma 2xy\,dx + x^2\,dy,\ \ A(0;0),\ \ B(-2;-1).$

$$\int\limits_\Gamma 2xy\,dx + x^2dy = \int\limits_\Gamma d(x^2y)\ ,\quad U = x^2y \Rightarrow \begin{array}{l} U(A)=0 \\ U(B)=-4 \end{array} \Rightarrow \int\limits_\Gamma = U(B)-U(A) = -4$$

59. -4.

Т.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$, где γ — простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0;0)$, ориентированная против хода часовой стрелки.

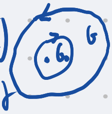
Пусть $\partial G = \gamma$

1) 

$$P = -\frac{y}{x^2+y^2}\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q = \frac{x}{x^2+y^2}\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \Rightarrow \int\limits_\gamma \overset{\text{ф-ла Грина}}{=} 0$$

2) 

G_0 - круг обл. окр. $(0,0)$

$G_1 = G \setminus G_0$

$$\int\limits_{\partial\Gamma\uparrow} + \int\limits_{\partial G_0\downarrow} = \int\limits_{\partial G_1\uparrow} \overset{\text{«}0\text{»}}{=} \Rightarrow \int\limits_{\gamma\uparrow} = \int\limits_{\partial G_0\uparrow} \Rightarrow \begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{array} \Rightarrow \int\limits_\gamma = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t}{r^2}\,dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

---

37. Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2 = 2x$.

$\sigma = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$

$G = \{(x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ - круг с $R=1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\underbrace{\iint\limits_G dx\,dy}_{\text{Пл. } G} = \pi\sqrt{2}$$

37. $\pi\sqrt{2}$.

---

51. Найти площадь поверхности тора $x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi$, $y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi$, $z = a\sin\psi$, $0 < a \leqslant b$.

$$[\bar r'_\varphi, \bar r'_\psi] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ -(b+a\cos\psi)\sin\varphi & (b+a\cos\psi)\cos\varphi & 0 \\ -a\sin\psi\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi & a\cos\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \bar e_1\, a(b+a\cos\psi)\cos\psi\cos\varphi + \bar e_2\, a(b+a\cos\psi)\sin\varphi\cos\psi + \bar e_3\, a(b+a\cos\psi)\sin\psi$$

$$|[\bar r'_\varphi, \bar r'_\psi]|^2 = a^2(b+a\cos\psi)^2(\cos^2\psi\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\psi + \sin^2\psi) = a^2(b+a\cos\psi)^2$$

$$S=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b+a\cos\psi)\,d\psi = 2\pi\cdot ab\cdot 2\pi = \boxed{4\pi^2 ab}$$

51. $4\pi^2 ab.$

Т.2. Вычислить площадь части сферы, заключенной между двумя параллельными плоскостями. Можно рассматривать сферу, заданную уравнением $x^2+y^2+z^2=R^2$, и плоскости $z=c$, $z=c+h$, $c, c+h\in[-R,R]$. Зависит ли ответ от каких-либо параметров, кроме радиуса сферы R и расстояния между плоскостями h (при условии, что обе плоскости пересекают сферу)?

$$x=R\cos\varphi\cos\psi \qquad R\sin\psi_1=c \qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$
$$y=R\sin\varphi\cos\psi \qquad R\sin\psi_2=c+h \;\Rightarrow\; \psi_1\leqslant\psi\leqslant\psi_2$$
$$z=R\sin\psi$$

$$S=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{\psi_1}^{\psi_2} R^2\cos\psi\,d\psi = 2\pi R^2\int_{\psi_1}^{\psi_2}\cos\psi\,d\psi = 2\pi R^2(\sin\psi_2-\sin\psi_1) = 2\pi R^2\left(\frac{c+h}{R}-\frac{c}{R}\right) = \boxed{2\pi Rh}$$

Вычислить интегралы (1–13).

1. $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, где:

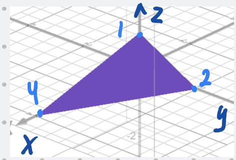
1) S — часть плоскости $x+2y+4z=4$, выделяемая условиями $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$;

имеет вид

$$\iint\limits_S f(x;y;z)\,dS = \iint\limits_D f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \quad (4)$$

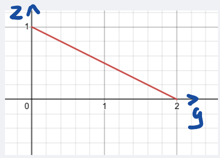
$$x=4-2y-4z$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-2 \quad \frac{\partial x}{\partial z}=-4 \quad \Rightarrow \iint\limits_S (x+y+z)\,dS = \iint\limits_G (4-2y-4z+y+z)\sqrt{1+4+16}\,dy\,dz =$$



$$=\sqrt{21}\iint\limits_G (4-y-3z)\,dy\,dz = \sqrt{21}\int_0^2 dy\int_0^{1-\frac{1}{2}y}(4-y-3z)\,dz =$$

$$=\sqrt{21}\int_0^2\left[4-2y-y+\frac{1}{2}y^2-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{2}y\right)^2\right]dy = \frac{\sqrt{21}}{8}\int_0^2(20-12y+y^2)\,dy =$$



$$=\frac{\sqrt{21}}{8}\left(40-24+\frac{8}{3}\right) = \boxed{\frac{7}{3}\sqrt{21}}$$

1) $7\sqrt{21}/3$;

18. Определить координаты центра масс однородных поверхностей:

1) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$;

$$x=R\cos\varphi\cos\psi$$
$$y=R\sin\varphi\cos\psi \qquad G=\left\{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$z=R\sin\psi$$

$$M=\iint\limits_S dS = \iint\limits_G R^2\cos\psi\,d\varphi\,d\psi = R^2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos\psi\,d\psi = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$x_c=\frac{1}{M}\iint\limits_S x\,dS = \frac{R^3}{M}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\cos^2\psi\,d\psi = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{\pi R^3}{4} = \frac{R}{2}$$

В силу симм. $\boxed{x_c=y_c=z_c=\frac{R}{2}}$

18. 1) $\left(\frac{R}{2};\frac{R}{2};\frac{R}{2}\right)$;

Вычислить интегралы (26–43).

37. 1) $\iint\limits_S yz\,dz\,dx$; S — внешняя сторона части эллипсоида $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,\ z\geqslant 0.$

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy=\iint\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}du\,dv.$$

$$\begin{aligned} x&=a\cos\varphi\cos\psi\\ y&=b\sin\varphi\cos\psi\\ z&=c\sin\psi\end{aligned}\qquad \begin{vmatrix} 0 & bc\sin\varphi\cos\psi\cos\psi & 0\\ -a\sin\varphi\cos\psi & b\cos\varphi\cos\psi & 0\\ -a\cos\varphi\sin\psi & -b\sin\varphi\sin\psi & c\cos\psi\end{vmatrix}=abc^2\sin^2\varphi\cos^3\psi$$

1) $\pi abc^2/4$;

$$\iint\limits_S yz\,dz\,dx=abc^2\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\psi\cos^3\psi\,d\psi=abc^2\pi\int_0^{\pi/2}\cos^3\psi\,d\cos\psi=\boxed{\frac14\pi abc^2}$$

38. $\iint\limits_S (2x^2+y^2+z^2)\,dy\,dz$, S — внешняя сторона боковой поверхности конуса $\sqrt{y^2+z^2}\leqslant x\leqslant H$.

$x^2=y^2+z^2$, сделаем цикл замену: $\begin{aligned} x&=z\\ y&=x\\ z&=y\end{aligned}$ $\Rightarrow z^2=x^2+y^2$

$x=r\cos\varphi \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

$y=r\sin\varphi \quad 0\leqslant r\leqslant H$

38. $-3\pi H^4/2$.

$$\iint\limits_S=-\iint\limits_G\left(2(x^2+y^2)+x^2+y^2\right)dx\,dy=-3\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^H r^3\,dr=-3\cdot 2\pi\cdot\frac{H^4}{4}=\boxed{-\frac32\pi H^4}$$

42. $\iint\limits_S x^6\,dy\,dz+y^4\,dz\,dx+z^2\,dx\,dy$, S — нижняя сторона части эллиптического параболоида $z=x^2+y^2,\ z\leqslant 1.$

$x=r\cos\varphi \quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

$y=r\sin\varphi \quad 0\leqslant r\leqslant 1$

$$\iint\limits_S=-\iint\limits_G\begin{vmatrix} x^6 & y^4 & (x^2+y^2)^2\\ 1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 2y\end{vmatrix}dx\,dy=-\iint\limits_G\left[x^6\cdot(-2x)+y^4(-2y)+(x^2+y^2)^2\right]dx\,dy=$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(-2r^7\cancel{\cos^7\varphi}-2r^5\cancel{\sin^5\varphi}+r^4\right)r\,dr=-2\pi\int_0^1 r^5\,dr=-2\pi\cdot\frac16=\boxed{-\frac{\pi}{3}}$$

42. $-\pi/3$.

44. Найти производную функции f в точке M по данному направлению, если:

1) $f=3x^4+y^3+xy$, $M(1;2)$, по направлению луча, образующего с осью x угол $135°$;

$\operatorname{grad} f=(12x^3+y,\ 3y^2+x)^T \quad \operatorname{grad} f(M)=(14,\ 13)^T$

$\bar p=\dfrac{\overline{AM}}{AM}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt2},\ \dfrac{1}{\sqrt2}\right)^T$

$$\frac{\partial f}{\partial e}=(\operatorname{grad} f(M),\ \bar p)=-\frac{14}{\sqrt2}+\frac{13}{\sqrt2}=\boxed{-\frac{1}{\sqrt2}}$$

44. 1) $-1/\sqrt2$;

48. Найти наибольшее значение $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{l}}$ в точке M, если:
1) $f = xy^2 - 3x^4y^5$, $M(1;1)$;

$$\mathrm{grad} f = (y^2 - 12x^3y^5,\ 2xy - 15x^4y^4)^T$$

$$\mathrm{grad} f(M) = (-11, -13)^T$$

$$\bar{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)^T \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l} = (\bar{l}, \mathrm{grad} f) \leqslant |\mathrm{grad} f|$$

$$|\mathrm{grad} f(M)| = \sqrt{11^2 + 13^2} = \sqrt{290} - \max$$

48. 1) $\sqrt{290}$;

13. Пусть u — дифференцируемое поле, $f(t)$ — дифференцируемая функция, $t \in R$. Доказать, что
$$\mathrm{grad}\, f(u) = f'(u)\, \mathrm{grad}\, u.$$

$$\mathrm{grad} f(u) = \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x}, \frac{\partial f(u)}{\partial y}, \frac{\partial f(u)}{\partial z}\right)^T = \left(f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}, f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)^T = f'(u)\, \mathrm{grad} u$$

19. Пусть функция $f(r)$ дифференцируема, $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$, $r = |\mathbf{r}|$.
Доказать, что $\nabla f(r) = f'(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}$.

$$\nabla f(r) = \mathrm{grad} f(r) = f'(r) \cdot \mathrm{grad}\, r = \frac{f'(r)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = f'(r)\frac{\bar{r}}{r}$$

15. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, $\mathbf{r} = \mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z$, $r = |\mathbf{r}|$. Найти $\mathrm{grad}\, u$, если:
3) $u = 1/r$; 5) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{r})$;
6) $u = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{r})$;

3) $\mathrm{grad} u = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\bar{r}}{r} = -\frac{\bar{r}}{r^3}$ 5) $u = (a_x \cdot x, a_y \cdot y, a_z \cdot z)^T \Rightarrow \mathrm{grad} u = \bar{a}$

6) $u = ([\bar{a}, \bar{b}], \bar{r}) \Rightarrow \mathrm{grad} u = [\bar{a}, \bar{b}]$

37. Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать их и проверить, используя символ ∇ и правила действия с ним (α, β — числа, u, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — дифференцируемые скалярное и векторные поля):

2) $\mathrm{div}(u\,\mathbf{a}) = (\mathrm{grad}\, u, \mathbf{a}) + u\, \mathrm{div}\, \mathbf{a}$.

$$\mathrm{div}(u\bar{a}) = (\nabla, u\bar{a}) = (\nabla_u, u\bar{a}) + (\nabla_a, u\bar{a}) = (\mathrm{grad} u, \bar{a}) + u \cdot \mathrm{div}\bar{a}$$

$$\mathrm{div}(u\bar{a}) = \frac{\partial(ua_x)}{\partial x} + \frac{\partial(ua_y)}{\partial y} + \frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = a_x\frac{\partial u}{\partial x} + a_y\frac{\partial u}{\partial y} + a_z\frac{\partial u}{\partial z} + u\frac{\partial a_x}{\partial x} +$$
$$+ u\frac{\partial a_y}{\partial y} + u\frac{\partial a_z}{\partial z} = (\mathrm{grad} u, \bar{a}) + u\, \mathrm{div}\bar{a}$$

39. Выразить в координатной форме $\mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, u$.

$$\mathrm{div}\, \mathrm{grad} u = (\nabla, \mathrm{grad} u) = (\nabla, \nabla u) = (\nabla, \nabla) u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z}$$

40. Найти:
1) $\mathrm{div}(u\, \mathrm{grad}\, u)$;

$$\mathrm{div}(u\, \mathrm{grad} u) = (\nabla, u\nabla u) = (\nabla_u u, \nabla u) + u(\nabla_{\nabla u}, \nabla u) = (\nabla u)^2 + u\Delta u$$

40. 1) $(\mathrm{grad}\, u)^2 + u\, \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, u \equiv (\nabla u)^2 + u\Delta u$;

41. Найти ($\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$), $r = |\mathbf{r}|$):
3) $\operatorname{div} r\mathbf{c}$, $\mathbf{c} = \text{const}$;
6) $\operatorname{div}(f(r)\mathbf{c})$, $\mathbf{c} = \text{const}$; 7) $\operatorname{div}[\mathbf{c}, \mathbf{r}]$, $\mathbf{c} = \text{const}$;

3) $\operatorname{div} r\bar{c} = (\nabla, r\bar{c}) = (\nabla_r r, \bar{c}) = \frac{1}{r}(\bar{r}, \bar{c})$

41 3) $(\mathbf{r}, \mathbf{c})/r$;
6) $(\mathbf{r}, \mathbf{c})f'(\mathbf{r})/r$; 7) 0;

6) $\operatorname{div}(f(r), \bar{c}) = (\nabla_f f(r), \bar{c}) = f'(r) \cdot \frac{(\bar{r}, \bar{c})}{r}$

7) $\operatorname{div}[\bar{c}, \bar{r}] = \frac{\partial(c_y z - c_z y)}{\partial x} + \frac{\partial(c_z x - c_x z)}{\partial y} + \frac{\partial(c_x y - c_y x)}{\partial z} = 0$

---

49. Проверить указанные равенства в координатной форме, а также записать и проверить их, используя символ ∇ и правила действия с ним (α, β — числа, u, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — дифференцируемые скалярное и векторные поля, $\mathbf{c}$ — постоянный вектор):
1) $\operatorname{rot}(\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}) = \alpha \operatorname{rot}\mathbf{a} + \beta \operatorname{rot}\mathbf{b}$; 2) $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{c}) = [\operatorname{grad} u, \mathbf{c}]$;
3) $\operatorname{rot}(u\,\mathbf{a}) = u \operatorname{rot}\mathbf{a} + [\operatorname{grad} u, \mathbf{a}]$; 4) $\operatorname{rot}[\mathbf{c}, \mathbf{a}] = \mathbf{c} \operatorname{div}\mathbf{a} - (\mathbf{c}, \nabla)\,\mathbf{a}$;
5) $\operatorname{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{a} \operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div}\mathbf{a} + (\mathbf{b}, \nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \nabla)\,\mathbf{b}$;
6) $\operatorname{div}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b})$.

3) $\operatorname{rot}(u\bar{a}) = [\nabla, u\bar{a}] = [\nabla_u u, \bar{a}] + u[\nabla_{\bar{a}}, \bar{a}] = [\operatorname{grad} u, \bar{a}] + u \operatorname{rot}\bar{a}$

5) $\operatorname{rot}[\bar{a}, \bar{b}] = [\nabla, [\bar{a}, \bar{b}]] = \bar{a} \cdot (\bar{\nabla}, \bar{b}) - \bar{b}(\bar{\nabla}, \bar{a}) = \bar{a} \operatorname{div}\bar{b} - \bar{b} \operatorname{div}\bar{a}$

6) $\operatorname{div}[\bar{a}, \bar{b}] = (\nabla, [\bar{a}, \bar{b}]) = (\nabla_{\bar{a}}, \bar{a}, \bar{b}) + (\nabla_{\bar{b}}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \operatorname{rot}\bar{a}) + (\bar{a}, \operatorname{rot}\bar{b})$

---

50. Найти ($\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы, $u(r)$ — дифференцируемое поле):
5) $\operatorname{rot}(u(r)\mathbf{r})$.

5) 0.

$\operatorname{rot}(u(r), \bar{r}) = [\nabla, u\bar{r}] = [\nabla_u u, \bar{r}] + u[\nabla_{\bar{r}}, \bar{r}] = \frac{u'}{r}\overset{=0}{[\bar{r}, \bar{r}]} + u\overset{=0}{[\nabla_{\bar{r}}, \bar{r}]} = 0$

---

54. Найти:
2) $\operatorname{rot}[\mathbf{r}, [\mathbf{c}, \mathbf{r}]]$, $\mathbf{c} = \text{const}$.

$\operatorname{rot}[\bar{r}, [\bar{c}, \bar{r}]] = \operatorname{rot}(\bar{c}r^2 - \bar{r}(\bar{r}, \bar{c})) = [\nabla_r r^2, \bar{c}] - \overset{=0}{[\nabla_{\bar{r}}, \bar{r}]}(\bar{r}, \bar{c}) - [\nabla_{(\bar{r},\bar{c})}(\bar{r}, \bar{c}), \bar{r}] =$

$= 2r\left[\frac{\bar{r}}{r}, \bar{c}\right] - [\bar{c}, \bar{r}] = 3[\bar{r}, \bar{c}]$

2) $3[\mathbf{r}, \mathbf{c}]$.

---

45. $\iint\limits_S z\,dx\,dy + (5x + y)\,dy\,dz$, где S:

2) внутренняя сторона эллипсоида $x^2/4 + y^2/9 + z^2 = 1$;
3) внешняя сторона границы области $1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$.

2) $\bar{a} = (5x + y, 0, z)^T$ $\quad \operatorname{div}\bar{a} = 5 + 0 + 1 = 6$

$x = 2r\cos\varphi\cos\psi$
$y = 3r\sin\varphi\cos\psi$ $\quad J = 6r^2\cos\psi$
$z = r\sin\psi$

$\iint\limits_S = -6\iiint\limits_G dx\,dy\,dz = -6 \cdot 6\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi\,d\psi \int\limits_0^1 r^2\,dr = -\frac{6 \cdot 6 \cdot 2}{3} \cdot 2\pi = -48\pi$

2) -48π;

3) $x = r\cos\varphi\cos\psi$ $\qquad J = r^2\cos\psi$
$y = r\sin\varphi\cos\psi$ $\qquad 1<r<2$
$z = r\sin\psi$

$$\iint\limits_S = 6\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi\, d\psi \int_1^2 r^2 dr = 6\cdot 2\pi \cdot 2\cdot \frac{7}{3} = 56\pi$$

3) 56π.

---

52. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S:

3) нижняя сторона части конической поверхности $x^2+y^2=z^2$, $0<z\leqslant H$.

$\bar a = (x^2, y^2, z^2)^T \qquad \operatorname{div}\bar a = 2(x+y+z)$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = h$

$$\Rightarrow \iint\limits_{S_{бок}} + \iint\limits_{S_{кр}} = 2\iiint\limits_S (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dh \int_0^h [\underbrace{\cancel{r(\cos\varphi+\sin\varphi)}}_{0}+h]\, r\,dr =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H \frac{1}{2}h^3 dh = \frac{\pi H^4}{2}$$

$S_{кр}$: $z = H$, $x^2+y^2 \leq z^2 \Rightarrow \iint\limits_{S_{кр}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H H^2 r\,dr = 2\pi\cdot\frac{H^4}{2} = \pi H^4$

$$\iint\limits_{S_{бок}} = \boxed{-\frac{\pi H^4}{2}}$$

3) $-\pi H^4/2$.

---

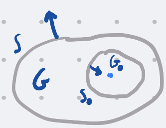
57. Пусть $G \in R^3$ — ограниченная область с гладкой границей S, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S, $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}$:
2) вычислить *интеграл Гаусса*

$$I(x;y;z) = \iint\limits_S \frac{\cos(\widehat{\mathbf{r},\mathbf{n}})}{\mathbf{r}^2}\,dS, \quad (x;y;z) \notin S.$$

$$\cos(\widehat{\bar r,\bar n}) = \frac{(\bar r,\bar n)}{r\cdot \underset{=1}{n}} \Rightarrow I = \iint\limits_S \frac{(\bar r,\bar n)}{r^3}\,dS_{\xi,\eta,\zeta}, \quad S = \partial G$$

$$\operatorname{div}\frac{\bar r}{r^3} = 3\cdot\frac{1}{r^3} - \frac{3}{r^4}r = 0$$

1) $(x,y,z) \notin G$: $I = \iiint\limits_G \operatorname{div}\frac{\bar r}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = 0$



2) $(x,y,z) \in G$: S_0 - сфера (центр (x,y,z)) - огр. шар $\bar G_0 \in G$

$$G_1 = G \setminus \bar G_0,\ \partial G_1 = S\cup S_0 \Rightarrow \iint\limits_{\partial G_1} = \iint\limits_{\substack{S\uparrow \\ наружу}} + \iint\limits_{\substack{S_0\downarrow \\ внутрь}} = \iiint\limits_{G_1} \operatorname{div}\frac{\bar r}{r^3}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = 0 \Rightarrow \iint\limits_{S\uparrow} = \iint\limits_{S_0\uparrow}$$

На S_0 $r=r_0$

$$\underset{S_0}{\iint}\frac{(\bar r,\bar n)}{r^3}\,dS=\underset{S_0}{\iint}\left(\frac{\bar r}{r^3},d\bar S\right)=\frac{1}{r_0^3}\underset{S_0}{\iint}(\bar r,d\bar S)=\frac{1}{r_0^3}\underset{G_0}{\iiint}\operatorname{div}\bar r\cdot d\xi\,d\eta\,d\psi=$$

1-го рода 2-го рода

$$=\frac{1}{r_0^3}\cdot 3\cdot V_{G_0}=\frac{1}{r_0^3}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\pi r_0^3=4\pi$$

$$I=\begin{cases}0, & (x,y,z)\notin\bar G\\ 4\pi, & (x,y,z)\in G\end{cases}$$

---

62. $\int\limits_L y^2\,dx+z^2\,dy+x^2\,dz$, L — граница треугольника с вершинами в точках $(a;0;0)$, $(0;a;0)$, $(0;0;a)$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;1;0)$.

$$\bar n=\frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)^T,\quad \bar m\,(0,1,0),\quad \cos(\widehat{\bar n,\bar m})=\frac{1}{\sqrt3}>0$$

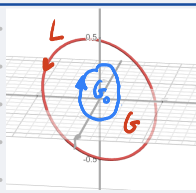
$$\operatorname{rot}\bar a=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2 & z^2 & x^2\end{vmatrix}=-2z\bar i-2x\bar j-2y\bar k$$

62. $-a^3$.

$$\int\limits_L=\underset{S}{\iint}(\operatorname{rot}\bar a,\bar n)\,dS=-\frac{2}{\sqrt3}\underset{S}{\iint}(\overset{a}{\overset{\|}{x+y+z}})\,dS=-\frac{2a}{\sqrt3}\underset{S}{\iint}\overset{\text{пл. пр. тр.}}{\overset{\|}{dS}}=-\frac{2a}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{4}(\sqrt2 a)^2=\boxed{-a^3}$$

---

63. 2) $\int\limits_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}+z\,dz$; где L — окружность $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$, ориентированная положительно относительно вектора $(0;0;1)$.



$L=\partial G$, G_0 - кругл. обл. окр. т. $(0,0)$ $G_1=G\setminus G_0$

$$\underset{\partial G_0\downarrow}{\iint}+\underset{L\uparrow}{\iint}=\underset{\partial G_1\uparrow}{\iint}=\underset{S}{\iint}(\operatorname{rot}\bar a,d\bar S)$$

$$\bar a=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2},z\right)^T\quad \operatorname{rot}\bar a=\begin{vmatrix}\bar i & \bar j & \bar k\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & z\end{vmatrix}=(0,0,0)^T$$

$$\underset{G_1}{\iiint}=0\Rightarrow\underset{L\uparrow}{\iint}=\underset{\partial G_0\uparrow}{\iint}$$

$x=R\cos\varphi$
$y=R\sin\varphi$
$z=-R(\cos\varphi+\sin\varphi)$
$dz=-R(\cos\varphi-\sin\varphi)$

$$\int\limits_0^{2\pi}(1+\underbrace{\cancel{R^2\cos2\varphi}}_{0})\,d\varphi=\boxed{2\pi}$$

2) 2π.

Т.3. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (2x+3y)dydz + (x+y+z)dzdx + (x+2y+3z)dxdy,$$

где S — часть внешней стороны поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+z^2=1$, $x \geq 0$.

$\bar{a} = (2x+3y,\ x+y+z,\ x+2y+3z)^T \quad \operatorname{div}\bar{a} = 2+1+3=6$

$x = 2r\cos\varphi\cos\psi$
$y = 5r\sin\varphi\cos\psi$
$z = r\sin\psi$

$\iint\limits_S = 6\iiint\limits_G dxdydz = 60\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2}\cos\psi d\psi \int\limits_0^1 r^2 dr = 40\pi$

$S = S_{вн} + S_{кр}$

$x=0: \iint\limits_{S_{кр}} 3y\,dydz = \left\{\begin{array}{l} y = 5r\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \\ J = 5r \end{array}\right\} = \int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} 15r^2\sin\varphi\, 5r\,dr\,d\varphi = 65\int\limits_0^1 r^3 dr \int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi = 0$

$S_{вн} = 40\pi - 0 = 40\pi$

Найти поток поля $\mathbf{a}$ через ориентированную нормалью $\mathbf{n}$ поверхность S ($\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $r = |\mathbf{r}|$) (68, 69).

68. 4) $\mathbf{a} = \mathbf{r}/r^3$, S — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$;

$$\iint_S (\mathbf{a},\mathbf{n})\,dS = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS.$$

На S $r = r_0$ $\quad \operatorname{div}\bar{r} = 3$

4) 4π;

$\iint\limits_S (\bar{a},\bar{n})\,dS = \iint\limits_S (\bar{a}, d\bar{S}) = \frac{1}{r_0^3}\iiint\limits_G \operatorname{div}\bar{r}\,dxdydz = \frac{1}{r_0^3}\cdot 3V_G = \frac{3}{r_0^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r_0^3 = 4\pi$

---

94. Найти по формуле Стокса (19) циркуляцию поля $\mathbf{a}$ вдоль контура Г, ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат, если:

4) $\mathbf{a} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; $\Gamma = \{x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ z \geqslant 0\}$;

$\bar{a} = (y, -x, z)^T \quad \operatorname{rot}\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & z \end{vmatrix} = (0, 0, -2)^T$

$\int\limits_\Gamma (\bar{a}, d\bar{r}) = \iint\limits_S (\operatorname{rot}\bar{a}, d\bar{S}) = -2\iint\limits_S dS = -4\pi$ „$S_{кр}$, $r=\sqrt{2}$"

4) -4π;

---

104. Потенциально ли поле $\mathbf{H} = 2I\,\frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2+y^2}$, $(x;y) \neq (0;0)$:
1) в полупространстве $x > 0$;
2) во всем пространстве без оси Oz?

$\operatorname{rot}\bar{a} = \bar{0}$

1) $G = \{x > 0\}$ – поверхн. односвязна $\Rightarrow$ да

104. 1) да; 2) нет.

2) $G=\{x\neq 0,\ y\neq 0\}$ $\quad \mathrm{rot}\,\bar{a} = \bar{\nabla}\times\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$

$$\int_{\Gamma}(\bar{a}, d\bar{r}) = \frac{2I}{R^2}\iint_S(\mathrm{rot}\,\bar{a}; d\bar{S}) = \frac{2I}{R^2}\cdot 2\pi R^2 = 4\pi I \neq 0 \Rightarrow$$ не потенц.

---

112. Является ли поле $\mathbf{a}$ потенциальным, соленоидальным, если ($\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, $r=|\mathbf{r}|$):
1) $\mathbf{a}=\mathbf{r}/r^3$;

112. 1) Потенциально и соленоидально;

$G=R\setminus\{0\}$ – не явл объемно односв.

1) $\mathrm{rot}\,\bar{a}=\bar{0}$, G – поверхн. односв $\Rightarrow$ потенц.

2) $\mathrm{div}\,\bar{a} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\cdot r = 0$

а) $z>0$ – объем-одн $\Rightarrow$ соленоид

б) $r>0$ – не явл объ-одн

$$\iint_S\left(\frac{\bar{r}}{r^3}, d\bar{S}\right) = \frac{1}{R^3}\iint_S(\bar{r}, d\bar{S}) = \frac{1}{R^3}\iiint_G \mathrm{div}\,\bar{r}\,dxdydz = \frac{3}{R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 = 4\pi\neq 0 \Rightarrow$$ не соленоид

✗ **115.** Найти такую дифференцируемую функцию Φ, чтобы поле $\mathbf{a}=\Phi(r)\mathbf{r}$, $\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$, $r=|\mathbf{r}|$, было соленоидальным.

$\bar{a}=f(r)\bar{r}$ $\quad \mathrm{rot}\,\bar{a}=\bar{0}$ $\quad G=R\setminus\{(0,0,0)\}$ – поверхн. одн. $\Rightarrow$ центр поле всегда потенц

$\mathrm{div}\,\bar{a} = 3f(r)+rf'(r)=0 \quad |\cdot r^2$

$3r^2f(r)+r^3f'(r)=0$

$(r^3f(r))'=0 \Rightarrow f(r)=\frac{C}{r^3}$

115. C/r^3.