

Т.п.

Т.1. Дано уравнение $x^2 = y^2$.

- Сколько функций $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?
- Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?
- Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению и условию $y(1) = 1$?
- Сколько непрерывных функций $y : [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

a) $x^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm x \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

б) каждой точке (кроме $x=0$) вдоль оси x или $-x \Rightarrow$ бесконечно много ф-и

б) $y=x, y=-x, y=|x|, y=-|x| \Rightarrow 4$ ф-и

б) $y=x, y=|x| \Rightarrow 2$ ф-и

2) $y=x \Rightarrow 1$ ф-я

№ 3.61

61. Найти в указанной точке частные производные функции $u(x; y)$, заданной явно уравнением:

2) $x \cos y + y \cos u + u \cos x = 1, (0; 1; 0);$

$x=0, y=1: 0 \cdot \cos 1 + 1 \cdot \cos u + u \cos 0 = 1$

$u + \cos u = 1 \Rightarrow F(0, 1, 0) = 0, F'_u(0, 1, 0) = 1 \Rightarrow$ ф-я неявн. ф-и

$U'_x: \cos y - y U'_x \sin u + U'_x \cos x - u \sin x = 0; \quad x=0, y=1, u=0 \Rightarrow$

$\cos 1 + 0 + U'_x - 0 = 0 \Rightarrow U'_x = -\cos 1$

$U'_y: -x \sin y + \cos u - y U'_y \sin u + U'_y \cos x = 0; \quad x=0, y=1, u=0 \Rightarrow$

$0 + 1 - 0 + U'_y = 0 \Rightarrow U'_y = -1$

2) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\cos 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1;$

№ 3.64

64. Найти в указанной точке дифференциал функции $u(x; y)$, заданной явно уравнением:

2) $x^3 + 2y^3 + u^3 - 3xyu + 2y - 3 = 0, \quad \text{а)} (1; 1; 1), \quad \text{б)} (1; 1; -2).$

$X=1, Y=1: 1 + 2 + U^3 - 3U + 2 - 3 = 0 \Rightarrow U^3 - 3U + 2 = 0 \quad F'_u = 3U^2 - 3XY$

а) $F(1, 1, 1) = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow F(1, 1, 1) = 0; \quad F'_u(1, 1, 1) = 0 \Rightarrow$ не ф-я

б) $F(1, 1, -2) = 1 + 2 - 8 + 6 + 2 - 3 = 0 \quad \text{Th. о неявн. ф-и}$

$F'_u(1, 1, -2) = 12 - 3 \neq 0 \quad \text{не ф-я Th. о неявн. ф-и}$

$$U'_x: 3x^2 + 0 + 3U'_x U^2 - 3yU - 3xyU'_x + 0 - 0 = 0$$

$$X=1, y=1, U=-2: 3 + 12U'_x + 6 - 3U'_x = 0 \Rightarrow U'_x = -1$$

$$U'_y: 0 + 6y^2 + 3U'_y U^2 - 3xU - 3xyU'_y + 2 - 0 = 0$$

$$X=1, y=1, U=-2: 6 + 12U'_y + 6 - 3U'_y + 2 = 0 \Rightarrow U'_y = -\frac{14}{9}$$

$$dU = -dx - \frac{14}{9} dy$$

2) a) не существует, 6) $-dx - (14)/(9) dy$.

№ 3.6g

69. Пусть уравнением $f(x-y; y-z; z-x) = 0$, где $f(u; v; w)$ — дифференцируемая функция, определяется дифференцируемая функция $z(x; y)$. Найти $dz(x, y)$.

$$f(x-y; y-z; z-x) = f$$

$$f'_u(dx - dy) + f'_v(dy - dz) + f'_w(dz - dx) = 0$$

$$f'_u dx - f'_u dy + f'_v dy - f'_v dz + f'_w dz - f'_w dx = 0$$

$$dz = \frac{(f'_u - f'_w)dx + (f'_v - f'_u)dy}{f'_v - f'_w}$$

$$69. \frac{(f'_u - f'_w)dx + (f'_v - f'_u)dy}{f'_v - f'_w}.$$

№ 3.75

75. Найти в точке $(1; 2)$ частные производные дифференцируемых функций $u(x; y)$ и $v(x; y)$, заданных неявно уравнениями

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \quad u(1; 2) = v(1; 2) = 0.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = e^{u+v} + x(U'_x + V'_x)e^{u+v} + 2U'_x V + 2UV'_x = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = xe^{u+v}(U'_y + V'_y) + 2U'_y V + 2UV'_y = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = ye^{u+v}(U'_x + V'_x) - (U'_x(1+v) + UV'_x)(1+v)^{-2} = 2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = e^{u+v}(U'_y + V'_y) - (U'_y(1+v) + UV'_y)(1+v)^{-2} = 0$$

$$X=1, y=2, U=V=0: \begin{cases} 1 + U'_x + V'_x = 0 \\ U'_y + V'_y = 0 \\ 2(U'_x - V'_x) - U'_x = 2 \\ 1 + 2(U'_y - V'_y) - U'_y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -U'_x = 1 + V'_x \\ U'_y = -V'_y \\ U'_x = 2 + 2V'_x \\ U'_y = -V'_y - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} U'_x = 0 \\ U'_y = -\frac{1}{3} \\ V'_x = -1 \\ V'_y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$75. \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{3}.$$

N^o 4.43

43. Найти второй дифференциал функции $u(x; y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если $u(x; y)$ — дифференцируемая функция, заданная уравнением и такая, что $u(x_0; y_0) = A$, если:

5) $u^3 + 2yu + xy = 0, u(1; -1) = -1;$

$$3u^2du + 2ydu + 2ydu + dx \cdot y + xdy = 0$$

$$x=1, y=-1, u=-1: 3du - 2dy - 2du - dx + dy = 0 \Rightarrow du = dx + dy$$

$$6u du^2 + 3u^2 d^2u + 2du dy + 2y d^2u + 2dy du + dx dy + dx dy = 0$$

$$-6dx^2 - 6dy^2 - 12dxdy + 3d^2u + 4dy^2 + 4dxdy - 2d^2u + 2dxdy = 0$$

$$d^2u = 6dx^2 + 2dy^2 + 6dxdy$$

5) $6dx^2 + 6dx dy + 2dy^2;$

N^o 4.46

46. Пусть уравнением:

1) $f(x+u; y+u) = 0$;
где f — дважды дифференцируемая функция, определяется дважды дифференцируемая функция $u(x; y)$. Найти $d^2u(x; y)$.

$$f'_1 = f'_{x+u}, f'_2 = f'_{y+u}, f''_{11}, f''_{12}, f''_{22} — \text{аналогично}$$

$$f'_1 dx + f'_1 du + f'_2 dy + f'_2 du = 0 \Rightarrow du = -(f'_1 dx + f'_2 dy) \cdot (f'_1 + f'_2)^{-1}$$

$$dx + du = \frac{f'_1 dx + f'_2 dx - f'_1 dy - f'_2 dy}{f'_1 + f'_2} = \frac{f'_1(dx - dy)}{f'_1 + f'_2}$$

$$dy + du = \frac{f'_1 dy + f'_2 dy - f'_1 dx - f'_2 dx}{f'_1 + f'_2} = -\frac{f'_2(dx - dy)}{f'_1 + f'_2}$$

$$d^2f = f''_{11}(d(x+u))^2 + 2f''_{12}d(x+u) \cdot d(y+u) + f''_{22}(d(y+u))^2 + f'_1 d^2(x+u) + f'_2 d^2(y+u) = 0$$

$$d^2u (f'_1 + f'_2) = -[f''_{11}(d(x+u))^2 + 2f''_{12}d(x+u) \cdot d(y+u) + f''_{22}(d(y+u))^2]$$

$$d^2u = -\frac{(dx - dy)^2}{(f'_1 + f'_2)^3} \cdot [f''_{11} \cdot (f'_1)^2 - 2f''_{12} \cdot f'_1 \cdot f'_2 + f''_{22} \cdot (f'_2)^2]$$

46, 1) $-\frac{(f'_2)^2 f''_{11} - 2f'_1 f'_2 f''_{12} + (f'_1)^2 f''_{22}}{(f'_1 + f'_2)^3} (dx - dy)^2;$

№ 3.105

105. Найти якобиан $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, v)}$ отображения
 $x = r \cos^p \varphi \cos^q \psi, \quad y = r \sin^p \varphi \cos^q \psi, \quad z = r \sin^q \psi, \quad p, q \in N.$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos^p \varphi \cos^q \psi & -r p \cos^{p-1} \varphi \cdot \sin \varphi \cdot \cos^q \psi & -r q \cos^p \varphi \cos^{q-1} \varphi \cdot \sin \psi \\ \sin^p \varphi \cos^q \psi & r p \sin^{p-1} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos^q \psi & -r q \sin^p \varphi \cos^{q-1} \varphi \cdot \sin \psi \\ \sin^q \psi & 0 & q r \sin^{q-1} \psi \cos \psi \end{vmatrix} =$$

но 3-ий столбец.

$$= \sin^q \psi \cdot r^2 p \cdot \cos^2 \psi \cdot \sin^p \varphi \cdot \cos^{p-1} \varphi \cdot (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) +$$

$$+ p q r^2 \sin^q \psi \cos^q \psi \cdot \cos^p \varphi \cdot \sin^{p-1} \varphi \cdot (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi) =$$

$$= p q r^2 (\sin \psi \cos \psi) \cdot (\cos \psi) \cdot (\sin \psi)^{q-1} (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) =$$

$$= p q r^2 (\sin \psi \cos \psi) \cdot (\cos \psi) \cdot (\sin \psi)^{q-1}$$

$$105. pqr^2 (\sin \psi \cos \psi)^{p-1} (\cos \psi)^{2q-1} (\sin \psi)^{q-1}.$$

Т.3. Для отображения $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y,$$

показать, что якобиан отображения в плоскости в \mathbb{R}^2 отличен от нуля, но отображение не является взаимно-однозначным. Найти множество значений отображения f .

$$1) J = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} > 0,$$

$$\text{Но } U(x, y) = U(x, y+2\pi) \Rightarrow \\ V(x, y) = V(x, y+2\pi)$$

отображение не биективное в силу периодичности

$$2) U = \operatorname{Re}(e^{x+iy}), \quad V = \operatorname{Im}(e^{x+iy})$$

e^z принимает все значения кроме 0 \Rightarrow

$$f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$$

Т.4.

Отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ задано координатными функциями

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r > 0.$$

Выразить частные производные r и φ по переменным x и y как функции от r и φ .

$$\begin{cases} 1 = r'_x \cos \varphi + r(-\sin \varphi) \varphi'_x \\ 0 = r'_y \cos \varphi + r(-\sin \varphi) \varphi'_y \\ 0 = r'_x \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \varphi'_x \\ 1 = r'_y \sin \varphi + r \cdot \cos \varphi \cdot \varphi'_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} r'_x \cos\varphi + r(-\sin\varphi)\psi'_x = 1 \\ r'_x \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \psi'_x = 0 \end{cases}$$

$$r'_x = \frac{\Delta u}{\Delta_1} = \cos\varphi$$

$$\psi'_x = \frac{\Delta \psi_1}{\Delta_1} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\begin{cases} r'_y \cos\varphi - r'_y \sin\varphi = 0 \\ r'_y \sin\varphi + r'_y \cos\varphi = 1 \end{cases}$$

$$r'_y = \frac{\Delta u}{\Delta_2} = \sin\varphi$$

$$\psi'_y = \frac{\Delta \psi_2}{\Delta_2} = \frac{\cos\varphi}{r}$$

Ombem

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\Delta \psi_1 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 \\ \sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = -\sin\varphi$$

$$\Delta_{r_1} = \begin{vmatrix} 1 & r \sin\varphi \\ 0 & r \cos\varphi \end{vmatrix} = r \cos\varphi$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & r \sin\varphi \\ \sin\varphi & r \cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

$$\Delta \psi_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 1 \end{vmatrix} = \cos\varphi$$

$$\Delta_{r_2} = \begin{vmatrix} 0 & r \sin\varphi \\ 1 & r \cos\varphi \end{vmatrix} = r \sin\varphi$$

Nº 3.86.

86. Решить уравнение $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, преобразовав его к поляр-

$$XU'_y - YU'_x = 0; X = r \cos\varphi \quad Y = r \sin\varphi$$

$$U'_x = U'_r \cdot r'_x + U'_\varphi \cdot \psi'_x = U'_r \cos\varphi - U'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r} - U_y \text{ Ти}$$

$$U'_y = U'_r \cdot r'_y + U'_\varphi \cdot \psi'_y = U'_r \sin\varphi + U'_\varphi \frac{\cos\varphi}{r}$$

$$r \cos\varphi (U'_r \sin\varphi + U'_\varphi \frac{\cos\varphi}{r}) - r \sin\varphi (U'_r \cos\varphi - U'_\varphi \frac{\sin\varphi}{r}) = 0 \Rightarrow U'_\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$U(r, \varphi) = U(r) = U(x^2 + y^2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

86. 1) $u = f(x^2 + y^2)$, f — произвольная дифференцируемая функция.

Nº 88

88. Решить уравнение, преобразовав его к новым независимым переменным u и v :

$$1) \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = x + y, \quad v = x - y;$$

$$U = x + y \quad U'_x = 1 \quad U'_y = 1$$

$$V = x - y \quad V'_x = 1 \quad V'_y = -1$$

$$\begin{aligned} Z'_x &= Z'_u U'_x + Z'_v V'_x = Z'_u + Z'_v \\ Z'_y &= Z'_u U'_y + Z'_v V'_y = Z'_u - Z'_v \end{aligned} \Rightarrow Z'_u + Z'_v - Z'_u + Z'_v = 0 \Rightarrow Z'_v = 0$$

$$Z = Z(U) = Z(x + y)$$

$$88. 1) z = f(\check{x} + y);$$

N_o91

91. Преобразовать уравнение $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, приняв x за функцию, а $u = y - z$, $v = y + z$ за независимые переменные.

$$\begin{aligned} U &= y - z \quad dX = X'_u dU + X'_v dV = X'_u dy - X'_u dz + X'_v dy + X'_v dz = \\ V &= y + z \\ X &= X(u, v) \quad = (X'_u + X'_v) dy + (X'_v - X'_u) dz \Rightarrow \end{aligned}$$

$$dz = (X'_v - X'_u)^{-1} dx + (X'_u + X'_v)(X'_u - X'_v)^{-1} dy$$

$$U(X'_v - X'_u)^{-1} + V(X'_u + X'_v)(X'_u - X'_v)^{-1} = 0 \Rightarrow U = V(X'_u + X'_v) \Rightarrow \frac{U}{V} = X'_u + X'_v$$

$$91. \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u}{v}$$

N_o51(1)

51. Преобразовать уравнение к полярным координатам, полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad U_x = U'_r \cos \varphi - U'_\varphi \frac{\sin \varphi}{r}, \quad U_y = U'_r \sin \varphi + U'_\varphi \frac{\cos \varphi}{r}$$

$$U'_x = \cos \varphi \quad U'_x = -\frac{\sin \varphi}{r} \quad U'_y = \sin \varphi \quad U'_y = \frac{\cos \varphi}{r} \quad U_g \text{ ТЧ } U \approx 3.86$$

$$\bullet U''_{xx} = (U'_x)'_r \cdot r'_x + (U'_x)'_\varphi \cdot \varphi'_x = \left[U''_{rr} \cos \varphi - \frac{U''_{r\varphi} \sin \varphi}{r} + \frac{U'_{\varphi} \sin \varphi}{r^2} \right] \cdot \cos \varphi +$$

$$+ \left[U''_{r\varphi} \cos \varphi - U'_r \sin \varphi - \frac{U''_{\varphi\varphi} \sin \varphi}{r} + \frac{U'_\varphi \cos \varphi}{r} \right] \cdot \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right) =$$

$$= U''_{rr} \cos^2 \varphi - U''_{r\varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + U'_r \frac{\sin^2 \varphi}{r} + U''_{\varphi\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} - U''_{r\varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r}$$

$$\bullet U''_{yy} = (U'_y)'_r \cdot r'_y + (U'_y)'_\varphi \cdot \varphi'_y = \left[U''_{rr} \sin \varphi + \frac{U''_{r\varphi} \cos \varphi}{r} - \frac{U'_\varphi \cos \varphi}{r^2} \right] \cdot \sin \varphi +$$

$$+ \left[U''_{r\varphi} \sin \varphi + U'_r \cos \varphi + U''_{\varphi\varphi} \frac{\cos \varphi}{r} - U'_\varphi \frac{\sin \varphi}{r} \right] \cdot \frac{\cos \varphi}{r} =$$

$$= U''_{rr} \sin^2 \varphi + U''_{r\varphi} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} + U''_{\varphi\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} - U'_\varphi \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} + U''_{\varphi\varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} + U'_r \frac{\cos^2 \varphi}{r}$$

$$\bullet U''_{yx} = (U'_y)'_r \cdot r'_x + (U'_y)'_\varphi \cdot \varphi'_x = \left[U''_{rr} \sin \varphi + \frac{U''_{r\varphi} \cos \varphi}{r} - \frac{U'_\varphi \cos \varphi}{r^2} \right] \cdot \cos \varphi +$$

$$+ \left[U''_{r\varphi} \sin \varphi + U'_r \cos \varphi + U''_{\varphi\varphi} \frac{\cos \varphi}{r} - U'_\varphi \frac{\sin \varphi}{r} \right] \cdot \left(-\frac{\sin \varphi}{r} \right) =$$

$$= U''_{rr} \frac{\sin 2\varphi}{2} + U''_{r\varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{r} - U''_{r\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{r} + U'_r \cdot \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{r^2} - U'_r \frac{\sin 2\varphi}{2r} - U''_{\varphi\varphi} \frac{\sin 2\varphi}{2r^2}$$

$$U''_{xx} r^2 \cos^2 \varphi + U''_{yx} r^2 \sin 2\varphi + U''_{yy} r^2 \sin^2 \varphi = 0$$

$$r^2 \cos^2 \varphi \left(U''_{rr} \cos^2 \varphi - U''_{r\varphi} \frac{\sin 2\varphi}{r} + 0 + U'_r \frac{\sin^2 \varphi}{r} + U''_{\varphi\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \right) +$$

$$r^2 \sin 2\varphi \left(U''_{rr} \frac{\sin 2\varphi}{2} + U''_{r\varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{r} + U'_r \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi}{r^2} - U'_r \frac{\sin 2\varphi}{2r} - U''_{\varphi\varphi} \frac{\sin 2\varphi}{2r^2} \right) +$$

$$r^2 \sin^2 \varphi \left(U''_{rr} \sin^2 \varphi + U''_{r\varphi} \frac{\sin 2\varphi}{r} - U'_r \frac{\sin 2\varphi}{r^2} + U'_r \frac{\cos^2 \varphi}{r} + U''_{\varphi\varphi} \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \right) = 0$$

$$r^2 U''_{rr} = 0$$

$$2) r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0;$$

№52

52. Преобразовать уравнение, принимая u и v за новые независимые переменные:

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, u = x - at, v = x + at;$

$Z''_{tt} = a^2 Z''_{xx}, u = x - at, v = x + at$

$Z'_x = Z'_u U'_x + Z'_v V'_x = Z'_u + Z'_v$

$Z'_t = Z'_u U'_t + Z'_v V'_t = a(-Z'_u + Z'_v)$

$Z''_{xx} = Z''_{uu} + Z''_{vu} + Z''_{uv} + Z''_{vv} = Z''_{uu} + 2Z''_{uv} + Z''_{vv}$

$$\begin{aligned} Z''_{tt} &= a[(-Z''_{uu} + Z''_{vu})(-a) + (-Z''_{uv} + Z''_{vv}) \cdot a] = \\ &= a^2 (Z''_{uu} - 2Z''_{uv} + Z''_{vv}) \end{aligned}$$

$$a^2 (Z''_{uu} - 2Z''_{uv} + Z''_{vv}) = a^2 (Z''_{uu} + 2Z''_{uv} + Z''_{vv}) \Rightarrow Z''_{uv} = 0$$

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0;$

№ 2.2

Исследовать функцию $u(x; y)$ на экстремум (1-8) 2) $u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3;$

§5: 2(2); 9; 10*; 13(1); 18(1).
§8: 19(1), 21(2); 25(6); 31(3); 36*.

$$\begin{aligned} U'_x &= 6xy - 12 = 0 \Rightarrow XY = 2 \Rightarrow (1, 1), (-2, -1) \\ U'_y &= 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \Rightarrow X^2 + Y^2 = 5 \Rightarrow (1, 2), (-1, -2) \end{aligned}$$

Четыре решенийий боят не может, т.к. свободная к упр-ю 4-го порядка

$$U''_{xx} = 6y \quad d^2 f = 6[y(dx^2 + dy^2) + 2x dx dy]$$

$$U''_{yy} = 6y \Rightarrow d^2 f = 12(dx^2 + dy^2 + dx dy) \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array} \Rightarrow \text{лок. мин.}$$

$$U''_{xy} = 6x \quad 1) (1, 1): d^2 f = 12(dx^2 + dy^2 + dx dy) \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array} \Rightarrow \text{лок. мин.}$$

$$2) (-1, -1): d^2 f = -12(dx^2 + dy^2 + dx dy) \begin{bmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array} \Rightarrow \text{лок. макс.}$$

$$3) (2, 1): d^2 f = 6(dx^2 + dy^2 + 4dx dy) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{array} \Rightarrow \text{ким лок. экстру}$$

$$4) (-2, -1): d^2 f = -6(dx^2 + dy^2 + 4dx dy) \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{array} \Rightarrow \text{ким лок. экстру}$$

$$U(1, 1) = 3 \cdot 1^2 + 1^3 - 12 - 30 + 3 = -25 \text{ мин.}$$

$$U(-1, -1) = -3 \cdot 1^2 - 8 + 12 + 30 + 3 = 31 \text{ макс.}$$

2) минимум $u(1; 2) = -25$, максимум $u(-1; -2) = 31$;

№9

9. Найти все стационарные точки функции $u = x^4 + y^4 - 2x^2$ и исследовать ее на экстремум. Можно ли использовать при этом достаточные условия строгого экстремума?

$$\begin{aligned} u'_x &= 4x^3 - 4x = 0 & X(X^2 - 1) = 0 & (0,0) \quad (1,0) \quad (-1,0) \\ u'_y &= 4y^3 = 0 & y = 0 \end{aligned}$$

$$u''_{xx} = 12x^2 - 4 \quad d^2u = (12x^4 - 4)dx^2 + 12y^2dy^2$$

$$\begin{aligned} u''_{yy} &= 12y^2 \\ u''_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (0,0): d^2u = -4dx^2 - \text{отриц. пакур.}$$

$$\begin{aligned} \Delta u(0,0) &= u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) = (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - 2(\Delta x)^2 = \\ &= (\Delta x)^2((\Delta x)^2 - 2) + (\Delta y)^4 \end{aligned}$$

Если $0 < |\Delta x| < \sqrt{2}$, $\Delta y = 0 \Rightarrow \ominus$ Если $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0 \Rightarrow \oplus$ Нем лок. экстру.

$(\pm 1, 0)$: $d^2u = 8dx^2 - \text{паконс. пакур.}$

$$\begin{aligned} \Delta u(\pm 1, 0) &= u(\pm 1 + \Delta x, \Delta y, 0) - u(\pm 1, 0) = (\pm 1 + \Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - \\ &- 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 = (\pm 4\Delta x + 6(\Delta x)^2 \pm 4(\Delta x^3) + (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - 2 \mp 4\Delta x - \\ &- 2(\Delta x)^2 + 1 = 4(\Delta x)^2 \pm 4(\Delta x^3) + (\Delta x)^4 + (\Delta y)^4 = (\Delta x)^2(2 \pm \Delta x)^2 + (\Delta y)^4 \geq 0 \end{aligned}$$

Если $\Delta u = 0 \Rightarrow \Delta y = 0$, $\Delta x = 0 \Rightarrow$ 2 симметрич. лок. мин

9. Стационарные точки $(\pm 1, 0)$, $(0,0)$, минимум $u(\pm 1, 0) = -1$.
Нельзя, так как d^2u в стационарных точках не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, ни неопределенной квадратичной формой.

Исследовать функцию $u(x; y; z)$ на экстремум (13–15)

13. 1) $u = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - xy + x$;

$$\text{№13.1} \quad u'_x = 2x - y + 1 = 0 \quad x = -1/3 \quad (-2/3, -1/3, -1)$$

$$u'_y = 2y - x = 0 \quad y = -1/3$$

$$u'_z = 2z + 2 = 0 \quad z = -1$$

$$u''_{xx} = 2 \quad u''_{xz} = 0 \quad d^2u = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 - 2dxdy$$

$$u''_{yy} = 2 \quad u''_{yz} = -1$$

$$u''_{zz} = 2 \quad u''_{yz} = 0 \quad d^2u(-2/3, -1/3, -1) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dxdy)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{array} \Rightarrow \text{лок. мин} \quad u(-2/3, -1/3, -1) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

13. 1) Минимум $u(-2/3; -1/3; -1) = -1/3$;

N^o 18.1

18. Исследовать на строгий экстремум каждую непрерывно дифференцируемую функцию $u = u(x; y)$, заданную явно уравнением:

$$1) x^2 + y^2 + u^2 + 2x - 2y + 4u - 3 = 0;$$

$$2x \, dx + 2y \, dy + 2u \, du + 2 \, dx - 2 \, dy + 4 \, du = 0$$

$$(x+1) \, dx + (y-1) \, dy = -(u+2) \, du \quad (*)$$

$$du = [(x+1) \, dx + (y-1) \, dy] \, (-u-2)^{-1} \quad x=-1, y=1 - \text{cm.t.}$$

$$1 + 1 + u^2 - 2 - 2 + 4u - 3 = 0 \Rightarrow u^2 + 4u - 5 = 0 \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = -5$$

упр. (*), dx и dy -const: $dx^2 + dy^2 = -(u+2) \, du^2 \rightarrow 0$, т.к. cm.t.

$$d^2u = -(dx^2 + dy^2) (u+2)^{-1}$$

$(-1, 1, 1)$: $d^2u = -\frac{1}{3}(dx^2 + dy^2)$ отриц. опр. \Rightarrow лок. макс

$(-1, 1, 5)$: $d^2u = \frac{1}{3}(dx^2 + dy^2)$ плюс опр. \Rightarrow лок. мин

18. 1) Минимум $u_1(-1; 1) = -5$, максимум $u_2(-1; 1) = 1$;

III. Экстремумы функций многих переменных

2.5. Вstationарной точке квадратичная форма второго дифференциала положительно подопределенна.

- a) Может ли эта точка быть точкой строгого локального минимума?
- b) Может ли эта точка быть точкой строгого локального максимума?
- c) Может ли эта точка не быть точкой локального экстремума (даже нестрогого)?

a) да, критич. птнр 5.9

б) нет

б) да, критич. птнр для отр. опр 5.9

19. Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y)$ относитель-но заданного уравнения связи:

1) $u = xy$, $x + y - 1 = 0$;

§5: 19(1), 21(2); 25(6); 31(3);

$$y = 1-x, \quad u = x(1-x) = x - x^2 \Rightarrow \max \text{ f. T. } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\text{Чтдм } \max \quad u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

19. 1) Максимум $u(1/2; 1/2) = 1/4$;

21. Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y)$ относитель-но заданного уравнения связи:

2) $u = 1 - 4x - 8y$, $x^2 - 8y^2 = 8$;

$$\mathcal{L} = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = -4 + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = -8 - 16\lambda y = 0 \\ x^2 - 8y^2 = 8 \end{cases} \quad \begin{aligned} \lambda &= 0 - \text{не кагд} \Rightarrow x = \frac{2}{\lambda}, y = -\frac{1}{8\lambda} \\ \frac{4}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} &= 8 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 4, y = \mp 1 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda$$

$$\mathcal{L}''_{yy} = -16\lambda$$

$$\mathcal{L}''_{xy} = 0$$

$$d^2\mathcal{L} = 2\lambda(dx^2 - 8dy^2)$$

$$\text{реш. ур. сб.: } 2x dx - 16y dy = 0 \Rightarrow dx = 8\frac{y}{x} dy$$

$$\lambda = \frac{1}{2}, x=4, y=-1: d^2\mathcal{L} = 4dy^2 - 8dx^2 = -4dy^2 - \text{отриц.}\ \text{окр} \Rightarrow U(4, -1) = -7 - \text{макс}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}, x=-4, y=1: d^2\mathcal{L} = 4dy^2 + 8dx^2 = 4dy^2 + \text{полож.}\ \text{окр} \Rightarrow U(-4, 1) = 9 - \text{мин}$$

2) минимум $u(-4; 1) = 9$, максимум $u(4; -1) = -7$;

25. Найти условные экстремумы функции $u = f(x; y; z)$ при заданном уравнении связи:

6) $u = x - y + 2z, x^2 + y^2 + 2z^2 = 16$;

$$\mathcal{L} = X - Y + 2Z + \lambda(x^2 + y^2 + 2z^2 - 16)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2\lambda} (\lambda \neq 0 \text{ ил. ноль}) \\ \mathcal{L}'_y = -1 + 2\lambda y = 0 \quad y = \frac{1}{2\lambda} \\ \mathcal{L}'_z = 2 + 4\lambda z = 0 \quad z = -\frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 16 \quad 4 \cdot \frac{1}{4\lambda^2} = 16 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \pm \frac{1}{4} \\ x = -y = z = \mp 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda \quad \mathcal{L}''_{xy} = 0$$

$$\mathcal{L}''_{yy} = 2\lambda \quad \mathcal{L}''_{xz} = 0 \Rightarrow d^2\mathcal{L} = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + 2dz^2)$$

$$\mathcal{L}''_{zz} = 4\lambda \quad \mathcal{L}''_{yz} = 0 \quad \lambda > 0 (\lambda = \frac{1}{4}): \text{полож.}\ \text{окр} \Rightarrow U(-1, 1, -1) = -8 \text{ мин}$$

6) минимум $u(-2; 2; -2) = -8$, максимум $u(2; -2; 2) = 8$;

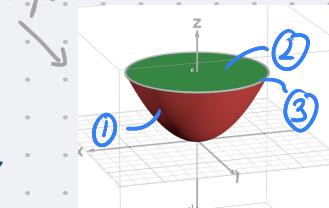
$$\lambda < 0 (\lambda = -\frac{1}{4}): \text{отриц.}\ \text{окр} \Rightarrow U(2, -2, 2) = 8 \text{ макс}$$

№31

Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции u на заданном множестве (28-33).

3) $u = x + y + z, x^2 + y^2 \leq z \leq 1$;

можно ли рисовать



$$G = \{x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

$$\text{Граф. ф. } G: U'_x = 1 \quad U'_y = 1 \quad U'_z = 1 \Rightarrow \text{смакс. Т. } \theta$$

1) $U = x + y + z, z = x^2 + y^2 \leq 1$

$$U = x + y + x^2 + y^2$$

$$U'_x = 1 + 2x = 0 \Rightarrow U(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

2) $U = x + y + z, z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$
 $U = x + y + 1, \text{смакс. Т. } \theta$

2) $U = x + y + z, z = 1, x^2 + y^2 \leq 1$
 $U = x + y + 1, \text{смакс. Т. } \theta$

$$3) U = x + y + z, x^2 + y^2 = z \Rightarrow U = x + y + 1, x^2 + y^2 = 1$$

$$L = x + y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} L_x' &= 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y' &= 1 + 2\lambda y = 0 \Rightarrow 2\lambda = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} \\ x^2 + y^2 &= 1 \quad x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad U\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2} \\ x^2 + y^2 &= 1 \quad U\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$3) M = 1 + \sqrt{2}, m = -1/2;$$

23. Указать функцию, непрерывную на измеримом множестве, но не интегрируемую на этом множестве (для сравнения см. достаточное условие интегрируемости).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & 0 < x < y < 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad G = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\int_0^1 dy \int_0^y f dx = \int_0^1 dy \left(\int_0^y f dx + \int_y^1 f dx \right) = \int_0^1 dy \left(\int_0^y \frac{dx}{y^2} - \int_y^1 \frac{dx}{x^2} \right) = \int_0^1 dy \left(\frac{x}{y^2} \Big|_0^y + \frac{1}{x} \Big|_y^1 \right) = \int_0^1 dy = 1$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f dy = \int_0^1 dx \left(\int_0^x f dy + \int_x^1 f dy \right) = \int_0^1 dx \left(\int_0^x \frac{dy}{x^2} + \int_x^1 \frac{dy}{y^2} \right) = \int_0^1 dx \left(-\frac{y}{x^2} \Big|_0^x - \frac{1}{y} \Big|_x^1 \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \left(-\frac{1}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) = - \int_0^1 dx = -1$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f dy \neq \int_0^1 dy \int_0^y f dx \Rightarrow \text{не унт. на } [0, 1] \times [0, 1]$$

Т.6. Пусть функция f двух переменных определена на прямугольнике $P = [a, b] \times [c, d]$.

a) Верно ли, что если функция $f(x, \cdot)$ интегрируема на $[c, d]$ при всех $x \in [a, b]$, а функция $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ интегрируема на $[a, b]$, то функция f интегрируема на P ?

b) Верно ли, если функция f интегрируема на P , то функция $f(x, \cdot)$ интегрируема на $[c, d]$ при всех $x \in [a, b]$?

a) нет (предыдущий пример)

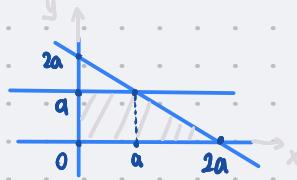
b) нет: $f(0, y) = \begin{cases} 1, & y \in Q \\ 0, & y \in R \setminus Q \end{cases}$ — не унт при $x=0$

В задачах 78–81 для заданного множества G записать интеграл $\iint f(x; y) dx dy$ в виде повторных интегралов с разными порядками интегрирования.

79. G — четырехугольник, ограниченный прямыми ($a > 0$):

1) $x = 0, y = 0, y = a, x + y = 2a$;

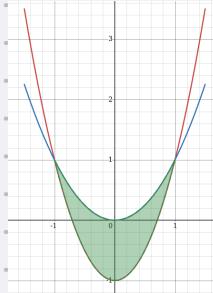
$$\int_0^a dx \int_0^a f(x, y) dy + \int_a^{2a} dx \int_0^{2a-x} f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_0^{2a-y} f(x, y) dx$$



83. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

15) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2x^2-1} f(x; y) dy$;

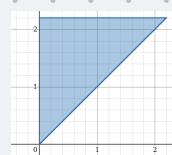
$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2x^2-1} f(x, y) dy &= \int_0^{\sqrt{5}} dy \int_0^x f(x, y) dx + \int_0^{\sqrt{5}} dy \int_x^{\sqrt{4y+1}} f(x, y) dx + \\ &+ \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{4y+1}}^x f(x, y) dx \end{aligned}$$



85. Вычислить повторные интегралы, переменив порядок интегрирования:

3) $\int_0^a dx \int_x^a (a^2 - y^2)^\alpha dy, a > 0, \alpha > 0$;

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_x^a (a^2 - y^2)^\alpha dy &= \int_0^a dy \int_0^y (a^2 - y^2)^\alpha dx = \\ &= \int_0^a y (a^2 - y^2)^\alpha dy = -\frac{1}{2} \int_0^a (a^2 - y^2)^\alpha d(a^2 - y^2) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(a^2 - y^2)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^a = \frac{a^{2(\alpha+1)}}{2(\alpha+1)} \end{aligned}$$



Вычислить двойные интегралы (90–94):

90. 1) $\iint_G (x \sin y + y \cos x) dx dy, G = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

$$I = \iint_G (x \sin y + y \cos x) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin y + y \cos x) dy$$

$$I_0 = \left. \left(-x \cos y + \frac{1}{2} y^2 \cos x \right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{\pi^2}{8} \cos x + x$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi^2}{8} \cos x + x \right) dx = \left(\frac{\pi^2}{8} \sin x + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}$$

1) $\pi^2/4$;

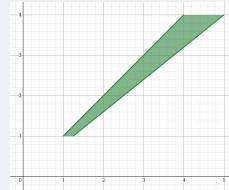
8) $\iint_G \sqrt{x-y} dx dy, G = \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{5}x \leq y \leq x, \\ 1 \leq y \leq 4 \end{array} \right\}$

$$I = \iint_G \sqrt{x-y} dx dy = \int_1^4 dy \int_y^{\frac{5}{4}y} \sqrt{x-y} dx$$

$$I_0 = \frac{2}{3} (x-y)^{\frac{3}{2}} \Big|_y^{\frac{5}{4}y} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}y \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$I = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \int_1^4 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{5} (4^{\frac{5}{2}} - 1) = \frac{1}{30} (32-1) = \frac{31}{30}$$

8) $31/30$:

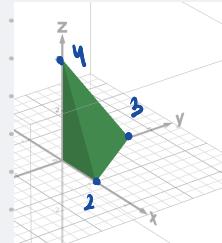
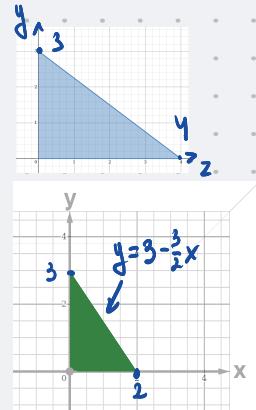


133. В повторном интеграле, заменив порядок интегрирования на указанный, рассчитать пределы интегрирования:

$$2) \int_0^4 dz \int_0^{3z/4} dy \int_0^{2-2y/3-z/2} f(x; y; z) dx, (x; y; z);$$

$y = 3 - \frac{3}{2}z$, $2 - \frac{2}{3}y - \frac{1}{2}z$ — бортика z .

$$\begin{aligned} & \int_0^4 dz \int_0^{3z/4} dy \int_0^{2-2y/3-z/2} f(x; y; z) dx = \\ & = \int_0^2 dx \int_0^{3-3/2x} dy \int_0^{4-2x-4/3y} f(x; y; z) dz \end{aligned}$$



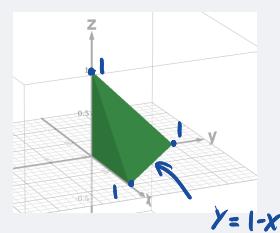
139. Вычислить интеграл $\iiint_G f(x; y; z) dx dy dz$, если:

2) $f(x; y; z) = (1+x+y+z)^{-3}$; область G ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

$$\begin{aligned} I &= \iiint_G f(x; y; z) dx dy dz = \iint \int f(x; y; z) dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3} dz \end{aligned}$$

$$I_0 = -\frac{1}{2} (1+x+y+z)^2 \Big|_0^{1-x-y} = -\frac{1}{2} \left[2^{-2} - (1+x+y)^{-2} \right]$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \underbrace{[(1+x+y)^{-2} - 2^{-2}]}_{I_1} dy$$



$$I_1 = -(1+x+y)^{-1} \Big|_0^{1-x} - \frac{1}{4}y \Big|_0^{1-x} = -2^{-1} + (1+x)^{-1} - \frac{1}{4}(1-x)$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-2^{-1} + (1+x)^{-1} - \frac{1}{4}(1-x) \right] dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}$$

2) $(8 \ln 2 - 5)/16$

175. Вычислить интегралы по кубу $Q_n = [0; a]^n \in R^n$, $n \geq 2$:

$$2) \int_{Q_n} \sum_{k=1}^n x_k dx;$$

$$\begin{aligned} \int_{Q_n} \sum_{k=1}^n x_k dx &= \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \dots \int_0^a dx_{n-1} \int_0^a \sum_{k=1}^n x_k dx_n = \int_0^a x_1 dx_1 \int_0^a \dots \int_0^a dx_n + \\ &+ \int_0^a dx_1 \int_0^a x_2 dx_2 \int_0^a \dots \int_0^a dx_n + \dots + \int_0^a dx_1 \int_0^a \dots \int_0^a x_n dx_n = n \cdot \int_0^a x_1 dx_1 \int_0^a \dots \int_0^a dx_n = \\ &= n \cdot a^{n-1} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{n a^{n+1}}{2} \end{aligned}$$

2) $na^{n+1}/2$

176. Вычислить интегралы по пирамиде $\Pi_n = \{0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1 \leq a\}$:

$$2) \int_{\Pi_n} x_1 x_2 \dots x_n dx;$$

$$\int_{\Pi_n} x_1 x_2 \dots x_n dx = \int_0^a x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \int_0^{x_2} x_3 dx_3 \dots \int_0^{x_{n-1}} x_n dx_n =$$

$$= \int_0^a x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{n-1}} \frac{3}{2} dx_n = \dots = \frac{a^{2n}}{(2n)!!}$$

$$n=1: \int_0^a x_1 dx_1 = \frac{a^2}{2}, \quad n=2: \int_0^a \frac{x_1^3}{2} = \frac{a^4}{2 \cdot 4}, \quad n=3: \int_0^a \frac{x_1^5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{a^6}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

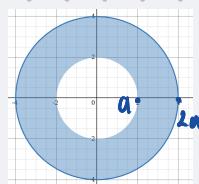
2) $a^{2n}/(2n)!!$

Вычислить интегралы, перейдя к полярным координатам (106–109).

$$3) \iint_G |xy| dx dy, \quad G = \{a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4a^2\};$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} r^3 |\cos \varphi \sin \varphi| dr = \frac{15a^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &= 15a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{15}{2} a^4 \end{aligned}$$

3) $15a^4/2$



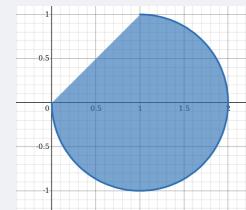
№107

2) $\iint_G y \, dx \, dy, G = \{x^2 + y^2 \leq 2x, x > y\};$

$$x^2 + y^2 \leq 2x \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 1, r^2 \leq 2r \cos \varphi$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^2 r^2 \sin \varphi \cdot dr + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \sin \varphi dr =$$

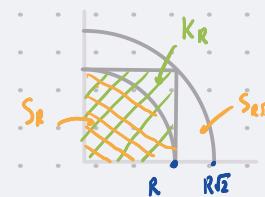
$$= \frac{8}{3} \left[\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi \right] = -\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{4} \cos \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{6}$$

2) $-1/6;$

№110

3) вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$

$$(1) \quad \iint_{S_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{S_{R/2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$



$$\iint_{K_R} = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{R^2} e^{-y^2} dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\iint_{S_R} = \int_0^R d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \left\{ \begin{array}{l} r^2 = t \\ 2r dr = dt \end{array} \right\} = \frac{\pi}{4} \int_0^{R^2} e^{-t} dt = \frac{\pi}{4} (-e^{-t}) \Big|_0^{R^2} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

нагер 6 (1): $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$

$$R \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

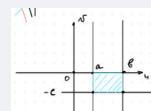
124. 1) $f(x; y) = x + y$, G ограничено линиями $xy = a$, $xy = b$,
 $y = x$, $y = x - c$, где $0 < a < b$, $0 < c$;

$$\begin{aligned} XY = U \\ Y - X = V \end{aligned} \Rightarrow \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = y + x = f(x, y)$$

⇒ лин. изогр.

$$\iint_G dU dv = \int_a^b du \int_{-c}^0 dv = (b-a) \cdot c$$

1) $c(b-a)$;



5) $f(x; y) = x^4 - y^4$, $G = \{x > 0, 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2\}$.

$$\begin{aligned} XY = U \\ x^2 - y^2 = V \end{aligned} \Rightarrow \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -2(x^2 + y^2) \quad \frac{x^4 - y^4}{2(x^2 + y^2)} = \frac{x^2 - y^2}{2} = \frac{1}{2}V$$

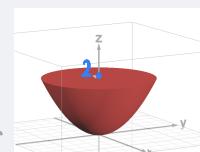
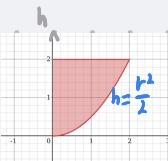
$$\frac{1}{2} \iint_G V dU dv = \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_1^2 V dv = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \int_1^2 du = \frac{3}{4}$$

5) 3/4.

146. Вычислить интеграл $\iiint_G f(x; y; z) dx dy dz$, перейдя к шароидическим координатам, если:

3) $f(x; y; z) = x^2 + y^2$, $G = \{(x^2 + y^2)/2 \leq z \leq 2\}$;

$$\begin{aligned} X = r \cos \psi \\ Y = r \sin \psi \\ Z = h \end{aligned} \quad G = \left\{ \begin{array}{l} r \leq h \leq 2 \\ 1 \leq r \leq 2 \end{array} \right\}$$



3) $16\pi/3$;

$$\iint_G (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{r^2/2} r^3 dr = 2\pi \int_0^2 \int_0^{r^2/2} r^3 dr \cdot \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{r^2/2} = \frac{\pi}{2} \int_0^2 4h dh = 2\pi \left. \frac{h^3}{3} \right|_0^2 = \frac{16\pi}{3}$$

147. Показать, что при переходе к обобщенным сферическим координатам:

$$x = ar \cos \varphi \cos \psi, \quad y = br \sin \varphi \cos \psi, \quad z = cr \sin \psi$$

имеем отображение равен $J = abc r^2 \cos \psi$.

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \begin{vmatrix} a \cos \psi \cos \varphi & -a r \sin \psi \cos \varphi & -a r \cos \psi \sin \varphi \\ b \sin \psi \cos \varphi & b r \cos \psi \cos \varphi & -b r \sin \psi \sin \varphi \\ c \sin \psi & 0 & c r \cos \psi \end{vmatrix} \stackrel{\text{по 3-ей строке}}{\downarrow} = c \sin \psi \cdot r^2 ab \cdot \cos \psi \sin \psi +$$

$$+ c r^2 \cos \psi \cdot ab (\cos^2 \psi \cos^2 \varphi + \cos^2 \psi \sin^2 \varphi) = abcr^2 \cos \psi (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi) = abcr^2 \cos \psi$$

148. Пусть $G = \{x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1\}$. Вычислить интеграл:

2) $\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$;

$$X = \arccos \psi \cos \varphi$$

$$Y = br \sin \psi \cos \varphi$$

$$Z = cr \sin \psi$$

$$X^2 + Y^2 = (a^2 + b^2)r^2 \cos^2 \varphi$$

$$\begin{aligned}
 \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 (a^2 + b^2) r^2 \cos^2 \psi abc r^2 \cos \psi dr = \\
 &= \frac{4}{5} \pi (a^2 + b^2) abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi d\psi = \frac{4}{5} \pi \cdot abc (a^2 + b^2) I_0 = \frac{8}{15} abc (a^2 + b^2) \underline{I_0}
 \end{aligned}$$

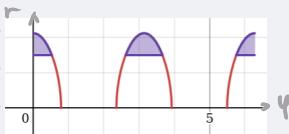
$$I_0 = \frac{1}{3} \sin x \cos^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

6. Найти площадь области, ограниченной кривыми (можно использовать полярные координаты):

$$2) (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \geq a > 0);$$

$$r^4 = 2a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Rightarrow r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi \Rightarrow \cos 2\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{6}$$

$$G = \left\{ \begin{array}{l} a < r < a\sqrt{2\cos 2\varphi} \\ -\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6} \end{array} \right\}$$



$$2) (3\sqrt{3} - \pi)a^2/3;$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\varphi - 1) d\varphi = 2a^2 \left(\sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{\pi}{6} \right) = 2a^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2$$

8. Найти площадь области, ограниченной кривыми (можно воспользоваться обобщенными полярными координатами; см. задачу 119, § 8):

$$6) \sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad a > 0, \quad b > 0;$$

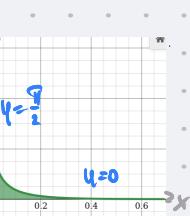
$$\begin{aligned} X &= \arccos^6 \varphi \Rightarrow \sqrt{r} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 1 \Rightarrow G = \left\{ \begin{array}{l} 0 < r < 1 \\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \\ y &= \arcsin^6 \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} a \cos^6 \varphi & -8 \arccos^5 \varphi \sin \varphi \\ a \sin^6 \varphi & 8 \arcsin^5 \varphi \cos \varphi \end{vmatrix} = 8abr \cos^5 \varphi \sin^5 \varphi$$

$$S = \iint_G dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 8abr \cos^5 \varphi \sin^5 \varphi dr = 8ab \int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} \sin^5 \varphi \cos^5 \varphi d\varphi = 4ab \cdot I$$

$$I = \frac{1}{2^5} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2^5} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \begin{cases} u = \cos t \\ du = -\sin t dt \end{cases} = \frac{1}{2^5} \int_{-1}^1 (1-u^2)^2 du =$$

$$= \frac{1}{2^7} \int_0^1 (1-3u+3u^4-u^6) du = \frac{1}{2^7} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{8 \cdot 35} \Rightarrow S = \frac{ab}{70}$$



$$6) ab/70;$$

10. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой
 $(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$,
если $\Delta = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$.

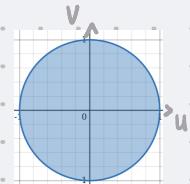
$$U = a_1x + b_1y + c_1, \\ V = a_2x + b_2y + c_2$$

$$\frac{D(U,V)}{D(X,Y)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 = \Delta \neq 0$$

$$U = r\cos\psi \Rightarrow G = \{0 < r < 1\} \\ V = r\sin\psi \Rightarrow \{0 < \psi < 2\pi\}$$

$$S = \iint_G dx dy = \frac{1}{|D|} \iint_{G_1} dU dV = \frac{1}{|D|} \iint_{G_1} dr d\psi = \frac{1}{|D|} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^1 r dr = \frac{\pi}{|D|}$$

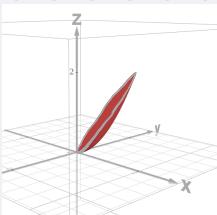
$$10. \frac{10}{|\Delta|}.$$



№15.5

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (см. формулы (24), (25)) (12, 13).

$$5) z = x^2 + y^2, z = x + y;$$



$$X = r\cos\psi \\ Y = r\sin\psi \Rightarrow G = \left\{ r^2 < h < r(\cos\psi + \sin\psi), 0 < r < \cos\psi + \sin\psi, \psi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \right\}$$

$$V = \iiint_G r \cdot (ra - r^2) dr d\psi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\psi \int_0^a r(a - r) dr \quad I_0 = a \int_0^a r^2 dr - \int_0^a r^3 dr = \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{12}a^4$$

$$V = \frac{1}{12} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (a\cos\psi + a\sin\psi)^4 d\psi = \frac{\pi}{8}$$

$$5) \pi/8;$$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями (можно использовать сферические координаты) (16, 17).

$$3) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x, a > 0;$$

$$X = r\cos\psi \cos\psi \\ Y = r\sin\psi \cos\psi \\ Z = r\sin\psi$$

$$r^4 = a^3 r \cos\psi \cos\psi \Rightarrow r = \sqrt[3]{a^3 \cos\psi \cos\psi}$$

$$G = \left\{ 0 < r < \sqrt[3]{a^3 \cos\psi \cos\psi}, -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$V = \iiint_G r^2 \cos\psi dr d\psi = \int_0^{\pi/2} d\psi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt[3]{a^3 \cos\psi \cos\psi}} r^2 \cos\psi dr = \frac{a^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\psi d\psi) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\psi d\psi) = \frac{2}{3}a^3 I_0$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\psi)^2 dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} a^3$$

$$3) \pi a^3 / 3;$$

21. Найти объем параллелепипеда, ограниченного плоскостями
 $a_1x + b_1y + c_1z = \pm d_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = \pm d_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = \pm d_3$,
 считая, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$U = a_1x + b_1y + c_1z$$

$$V = a_2x + b_2y + c_2z$$

$$W = a_3x + b_3y + c_3z$$

$$\frac{D(U,V,W)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta \neq 0$$

$$G = \{-d_1 < U < d_1, -d_2 < V < d_2, -d_3 < W < d_3\}$$

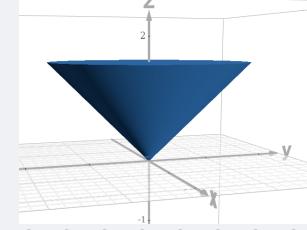
$$V = \iiint_G \frac{1}{|\Delta|} dU dV dW = \frac{1}{|\Delta|} \int_{-d_1}^{d_1} du \int_{-d_2}^{d_2} dv \int_{-d_3}^{d_3} dw = 8 \frac{d_1 d_2 d_3}{|\Delta|}$$

$$21. 8d_1 d_2 d_3 / |\Delta|.$$

63. Найти координаты центра масс тела с плотностью ρ :

$$4) \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, \rho = \rho_0 z^2;$$

$$\begin{aligned} X &= r \cos \varphi \\ Y &= r \sin \varphi \\ Z &= \lambda \end{aligned} \Rightarrow G = \{0 < r < h, r < \lambda < h, 0 < \varphi < 2\pi\}$$



$M_x = M_y = 0$ - это можно рассчитать

$$M_x = \iiint_G \rho x dx dy dz = \rho_0 \iiint_G \lambda^2 r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\lambda = \rho_0 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^h r^2 dr \int_0^h \lambda^2 d\lambda = 0$$

$$M_y = \rho_0 \iiint_G \lambda^2 r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\lambda = \rho_0 \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^h r^2 dr \int_0^h \lambda^2 d\lambda = 0$$

$$M_z = \rho_0 \iiint_G \lambda^3 r dr d\varphi d\lambda = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_0^h \lambda^3 d\lambda = \frac{2\pi}{4} \rho_0 \int_0^h (h^4 - r^4) r dr =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \rho_0 \left(\frac{1}{2} h^4 r^2 \Big|_0^h - \frac{1}{6} h^6 \Big|_0^h \right) = \frac{1}{6} \pi \rho_0 h^6$$

$$M = \rho_0 \iiint_G \lambda^2 r dr d\varphi d\lambda = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_0^h \lambda^2 d\lambda = \frac{2}{3} \pi \rho_0 \int_0^h (h^3 - r^3) r dr =$$

$$= \frac{2}{5} \pi \rho_0 \left(\frac{1}{2} h^3 r^2 \Big|_0^h - \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^h \right) = \frac{1}{5} \pi \rho_0 h^5$$

$$Z_c = \frac{M_z}{M} = \frac{\frac{1}{6} \pi \rho_0 h^6}{\frac{1}{5} \pi \rho_0 h^5} = \frac{5}{6} h, \quad X_c = Y_c = 0$$

$$4) x_C = y_C = 0, z_C = 5h/6;$$

