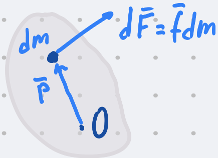
14.10. Используя принцип виртуальных перемещений, доказать, что равенство нулю главного вектора **R** и главного момента $\mathbf{M}_O$ сил, действующих на твердое тело, является необходимым и достаточным условием равновесия свободного твердого тела.



Теорема. *Чтобы некоторое допускаемое идеальными удерживающими связями состояние равновесия системы действительно было ее состоянием равновесия на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого момента времени из этого интервала элементарная работа активных сил на любом виртуальном перемещении равнялась нулю, т. е. чтобы выполнялось условие*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu \cdot \delta \boldsymbol{r}_\nu = 0 \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{4}$$

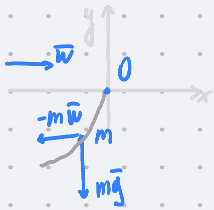
$$\bar V = \bar V_0 + \bar\omega \times \bar p \;\Big/\cdot dt \Rightarrow \delta\bar r = \delta\bar r_0 + d\bar\varphi \times \bar p$$

Если трактовать $\bar V_0$ и $\bar\omega$ как вирт.

$$\delta A = \int \bar f\cdot\delta\bar r\, dm = \int\left[\bar f\cdot\delta\bar r_0 + \bar f\cdot(d\bar\varphi\times\bar p)\right] dm = \bar R\cdot d\bar r_0 + \int d\bar\varphi\cdot(\bar p\times\bar f)\, dm = \bar R\cdot d\bar r_0 + \bar M_0\cdot d\bar\varphi$$

$\bar r^{\circ}$ пол. равн $\Leftrightarrow \forall\, \delta\bar r_0, d\bar\varphi \hookrightarrow \delta A = 0 \Rightarrow \boxed{\bar R = 0,\ \bar M_0 = 0}$

14.20. Точка подвеса однородной нити движется с постоянным ускорением **w** вдоль горизонтальной оси Ox. Найти форму нити в положении её относительного равновесия в системе координат Oxy, движущейся поступательно с точкой подвеса O.



Выберем произв точку на нити с массой m

14.20. Прямая линия $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$, где $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{g}{w}$.

14.29. Материальная точка может двигаться без трения по поверхности $f(x, y, z) = 0$ в силовом поле

$$\{F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z)\}.$$

Показать, что решение относительно x, y, z, λ системы уравнений

$$F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\quad F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = 0,\quad F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = 0,\quad f(x,y,z) = 0$$

определяет положение равновесия точки и обратно, любому положению равновесия соответствует решение этой системы.

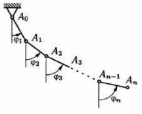
ПВП: $\delta A = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z = 0$

Пусть виртуальное перемещение колечка задается величинами δx, δy, δz. Продифференцировав уравнения, задающие форму прута, получим, что на виртуальном перемещении должны выполняться условия

$$\varphi = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$$

учтем ур связи: $\mathcal{L} = \delta A + \lambda\varphi \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \\ f = 0 \end{cases} \Rightarrow$ $F_x + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0,\ F_y + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0,\ F_z + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0,\ f(x,y,z) = 0$

14.40. Маятник составлен из n одинаковых стержней массы m и длины L каждый, последовательно соединенных друг с другом шарнирами (n – звенный маятник). Маятник может совершать движение в вертикальной плоскости, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через точку A_0 закрепления конца первого стержня. Составить уравнения, определяющие положения относительного равновесия системы.



К задачам 14.39, 14.40

Теорема 7.2. *Для того чтобы положение* $\mathbf{q}^0$ *было положением равновесия стационарной голономной системы, необходимо и достаточно, чтобы в этом положении все обобщенные силы были равны нулю:*

$$Q_k(\mathbf{q}^0) = \left(\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right)_{\mathbf{q}^0} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.15}$$

Если механическая система является *консервативной*, то обобщенные силы выражаются через потенциальную энергию системы $\Pi(\mathbf{q})$ формулами

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \Rightarrow Q_k(\mathbf{q}) = -\frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial q_k}; \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.16}$$

В этом случае условия равновесия (7.15) принимают вид

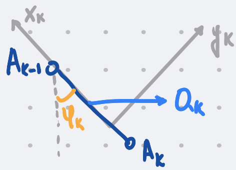
$$\left.\frac{\partial \Pi(\mathbf{q})}{\partial q_k}\right|_{\mathbf{q}^0} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.17}$$

т.е. *положениям равновесия консервативной системы соответствуют стационарные точки потенциальной энергии.*

$$S_i = \sin\varphi_i$$
$$C_i = \cos\varphi_i$$
$$t_i = \operatorname{tg}\varphi_i$$

$$\Pi = -mgl\Big[\tfrac{1}{2}c_1 + \underbrace{+\,c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 + \ldots\ldots + c_1 + \ldots + \tfrac{1}{2}c_n}_{n-1}\Big] \Rightarrow \Pi = -mgl\Big[\left(n-1+\tfrac{1}{2}\right)c_1 + \left(n-2+\tfrac{1}{2}\right)c_2 + \ldots\ldots + \tfrac{1}{2}c_n\Big] \Rightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_k} = mgl\left(n-k+\tfrac{1}{2}\right)s_k$$

$$\mathbf{Q}^{ин} = \mathbf{Q}^{пер} + \mathbf{Q}^{кор} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}; \quad V = T^{отн} - T$$



$$T_k^r = \frac{1}{2}m(V_k^r)^2 + \frac{1}{2}J_{yy}\dot{\varphi}_k^2$$

$$T_k^a = \frac{1}{2}m\left[(V_k^r)^2 + (V_k^e)^2\right] + \frac{1}{2}\bar{\Omega}^T \hat{J}\,\bar{\Omega}$$

$$\Omega = \bar{\omega} + \dot{\bar{\varphi}}_k = \begin{bmatrix} -\omega\cos\varphi_k \\ \omega\sin\varphi_k \\ \dot{\varphi}_k \end{bmatrix}, \quad \hat{J} = \operatorname{diag}\left(0, \frac{ml^2}{12}, \frac{ml^2}{12}\right)$$

в гл. осях

$$V_k = -\frac{1}{2}m(V_k^e)^2 - \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\omega^2\sin^2\varphi_k$$

$$V = \Big[\tfrac{1}{2}s_1^2 + \tfrac{1}{12}s_1^2 + \left(s_1 + \tfrac{1}{2}s_2\right)^2 + \tfrac{1}{12}s_2^2 + \ldots\ldots + \left(s_1 + \ldots + \tfrac{1}{2}s_n\right)^2 + \tfrac{1}{12}s_n^2\Big]\cdot\left(-\tfrac{1}{2}ml^2\omega^2\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_k} = \Big[\left(s_1 + \ldots + \tfrac{1}{2}s_k\right) + \tfrac{1}{6}s_k + \underbrace{+\,2\left(s_1 + \ldots + s_k + \tfrac{1}{2}s_{k+1}\right) + \ldots + 2\left(s_1 + \ldots + \tfrac{1}{2}s_n\right)}_{n-k}\Big]\cdot\left(-\tfrac{1}{2}ml^2\omega^2 c_k\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi_k} = \Big[\left(n-k+\tfrac{1}{2}\right)s_1 + \ldots + \left(n-k+\tfrac{1}{2}\right)s_{k-1} + \overbrace{\left(n-k+\tfrac{1}{4}\right)s_k + \tfrac{1}{12}s_k}^{A} + \left(n-(k+1)+\tfrac{1}{2}\right)s_{k+1} + \ldots + \tfrac{1}{2}s_n\Big]\left(-ml^2\omega^2 c_k\right)$$

$$A = \left(n-k+\tfrac{1}{2}\right)s_k - \tfrac{1}{4}s_k + \tfrac{1}{12}s_k = \left(n-k+\tfrac{1}{2}\right)s_k - \tfrac{1}{6}s_k$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = \left[\sum_{i=1}^{k}\left(n-k+\frac{1}{2}\right)s_i + \sum_{i=k+1}^{n}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)s_i - \frac{1}{6}s_k\right]\left(-ml^2\omega^2 c_k\right)$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial V}{\partial \varphi_k} = 0, \quad k=\overline{1,n}$$

$$ml^2\omega^2 c_k\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}\left(n-k+\frac{1}{2}\right)s_i + \sum_{i=k+1}^{n}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)s_i - \frac{1}{6}s_k\right] = mgl\left(n-k+\frac{1}{2}\right)s_k$$

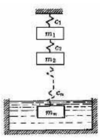
$$\frac{l}{g}\omega^2 c_k\cdot\left[\sum_{i=1}^{k}\left(n-k+\frac{1}{2}\right)s_i + \sum_{i=k+1}^{n}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)s_i - \frac{1}{6}s_k\right] = \left(n-k+\frac{1}{2}\right)t_k$$

Сходится с ответом

$$\sum_{i=1}^{n}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)s_i - \sum_{i=1}^{k}(k-i)s_i = \sum_{i=1}^{k}(1) + \sum_{i=k+1}^{n}(1) - \sum_{i=1}^{k}(2) = \sum_{i=1}^{k}\left(n-k+\frac{1}{2}\right)s_i + \sum_{i=k+1}^{n}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)s_i$$

14.40. $\frac{\omega^2 L}{g}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(n-i+\frac{1}{2}\right)\sin\varphi_i - \frac{1}{6}\sin\varphi_k - \sum_{i=1}^{k}(k-i)\sin\varphi_i\right] = \left(n-k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi_k \quad \left(k=\overline{1,n}\right).$

17.8. Система состоит из n грузов, которые последовательно связаны между собой и с неподвижной опорой пружинами жесткости c_i и могут перемещаться по вертикали. На последний груз m_n действует сила вязкого трения $F=-\beta v$, $\beta>0$. Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.



К задаче 17.8

I способ

$$m_i\ddot{y}_i + \beta\dot{y}_i\delta_{in} - c_{i+1}(y_{i+1}-y_i) + c_i(y_i - y_{i-1}) = 0$$

$$X=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_n \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix}$$

Матр. I способ

$$(*)\quad A\ddot{X} + B\dot{X} + CX = 0$$

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$, производная которой $\dot V$ в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с V, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

$$V(X,\dot X) = \underbrace{\frac{1}{2}\dot X^T A \dot X}_{T} + \underbrace{\frac{1}{2} X^T C X}_{П} > 0$$

$$\dot V = \dot X^T A \ddot X + X^T C \dot X \overset{(*)}{=}$$

$$= \dot X^T(-B\dot X - CX) + \cancel{X^T} C \dot X = -\dot X^T B \dot X = -\beta \dot y_n^2 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{п.р. ас. уст}}$$

Th. Ляпунова об ас.уст.

II способ

$V = E = T + П$, $\dot V = N_F$, $F = -\beta \dot x_n$ $N_F = F\dot x = -\beta \dot x_n^2$

$\dot V = -\beta \dot x_n^2 \Rightarrow M\{\dot x_n = 0\}$

Теорема Барбашина-Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости: *если в некоторой окрестности положения равновесия $\vec x = \vec 0$ существует функция Ляпунова $V(\vec x)$ такая, что*

$$\dot V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i \begin{cases} = 0, & \vec x \in M \\ < 0, & \vec x \notin M \end{cases},$$

где M — некоторое множество, выбранное так, что единственной целой траекторией исследуемой автономной системы, лежащей в M, является $\vec x \equiv \vec 0$, то

а) если $V(\vec x)$ имеет минимум в положении равновесия $\vec x = \vec 0$, то это положение равновесия асимптотически устойчиво;

б) если $V(\vec x)$ знаконеопределена в окрестности $\vec x = \vec 0$, то положение равновесия $\vec x = \vec 0$ неустойчиво.

д-жем, что не сущ таких движ. сист при которых груз m_n покоится

Из того, что груз покоится $\Rightarrow$ C_n имеет пост длину $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ груз m_{n-1} покоится $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ сист покоится $\Rightarrow$ $\boxed{\text{п.р. ас. уст}}$

Th Б-К

Исследуйте на устойчивость нулевое решение с помощью прямого метода Ляпунова:

Т1.

$$\begin{cases} \dot x = -x^3 - y^3 + xy^3, \\ \dot y = x^3 - y^3 - x^4. \end{cases}$$

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$, производная которой $\dot V$ в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с V, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

$$V = \frac{1}{4}(x^4 + y^4) > 0$$

$$\dot V = x^3\dot x + y^3 \dot y = x^3(-x^3 - y^3 + xy^3) + y^3(x^3 - y^3 - x^4) =$$

$$= -x^6 - \cancel{x^3 y^3} + \cancel{x^4 y^3} + \cancel{y^3 x^3} - y^6 - \cancel{x^4 y^3} = -x^6 - y^6 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{П.Р. ас. уст.}}$$

Th. Ляпунова об ас.уст.

Т2.

$$\begin{cases} \dot x = x + y + x^3, \\ \dot y = x - y - y^3. \end{cases}$$

I способ

Теорема (Четаева о неустойчивости). *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция $V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ такая, что в сколь угодно малой окрестности (1) существует область $V > 0$ и во всех точках области $V > 0$ производная $\dot V$ в силу этих уравнений принимает положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.*

$V = xy > 0$ при $\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$

$$\dot V = \dot x y + x \dot y = \cancel{xy} + y^2 + x^3 y + x^2 - \cancel{xy} - xy^3 \sim x^2 + y^2 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{П.Р. Не уст}}$$

Th. Четаева

II способ

Теорема. *Если все корни характеристического уравнения (3) имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво независимо от нелинейных членов в (1). Если же среди корней характеристического уравнения есть хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво — тоже независимо от нелинейных членов в (1).*

система лин. прибл: $\begin{cases} \dot x = x + y \\ \dot y = x - y \end{cases}$

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\text{П.Р. Не уст}}$$

Th. Ляпунова об уст по л.п.

Т3.

$$\begin{cases} \dot x = y - 3x - x^3, \\ \dot y = 6x - 2y. \end{cases}$$

Примечание к задаче Т3

Функцию Ляпунова искать в виде $V = (ax+by)^2 + cx^4$.

$V = (ax+by)^2 + cx^4 > 0$ при $c>0$

$\dot V = 2(ax+by)(a\dot x + b\dot y) + 4cx^3\dot x =$

$-ax^3 - 3(a-2b)x + (a-2b)y$

$= 2(ax+by)(ay - 3ax - ax^3 + 6bx - 2by) + 4cx^3(y - 3x - x^3)$

При $a=2b$ $\dot V = -4(2x+y)b^2x^3 + 4cx^3(y-3x-x^3) =$

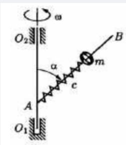
$= -8b^2x^4 - 4b^2x^3y + 4cx^3y - 12cx^4 - 4cx^6 = 4(c-b^2)x^3y - 4(2b^2+3c)x^4 - 4cx^6$

При $\begin{cases} a=2b \\ c=b^2 \end{cases}$ $\dot V = -20cx^4 - 4cx^6 < 0 \Rightarrow$ п.р. ас. уст

Th. Ляпунова об ас.уст.

Теорема. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, производная которой $\dot V$ в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с V, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

15.2. Стержень AB, образующий угол α с вертикалью, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси O_1O_2, проходящей через его конец A. По стержню может двигаться без трения колечко массы m, соединенное с точкой A пружиной жесткости c. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0. Найти положения относительного равновесия колечка и исследовать их устойчивость.



$\alpha = const$

$\Pi = mgl\cos\alpha - \frac{1}{2}m\omega^2 l^2 \sin^2\alpha + \frac{1}{2}c(l-l_0)^2$ (1)

$\Pi_l = c(l-l_0) + mg\cos\alpha - m\omega^2 l \sin^2\alpha = 0$ (2)

1) при $c \neq m\omega^2\sin^2\alpha$ $\boxed{l = \frac{cl_0 - mg\cos\alpha}{c - m\omega^2\sin^2\alpha}}$ – п.р.

Теорема. *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

Th. Л-Д

$\Pi_{ll} = c - m\omega^2\sin^2\alpha$

- $\Pi_{ll} > 0$ при $c > m\omega^2\sin^2\alpha \Rightarrow$ уст
- $\Pi_{ll} < 0$ при $c < m\omega^2\sin^2\alpha \Rightarrow$ неуст

Th. Ляпунова о Неуст

Теорема 1. *Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнается уже по членам второго порядка в разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

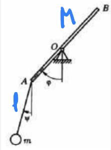
2) при $c = m\omega^2\sin^2\alpha$

$\Pi = const \Rightarrow$ l - любой — неуст п.р.

по опр

15.2. Положение равновесия $l = \frac{cl_0 - mg\cos\alpha}{c - m\omega^2\sin^2\alpha}$ устойчиво при $c > m\omega^2\sin^2\alpha$ и неустойчиво при $c < m\omega^2\sin^2\alpha$. При $l_0c = mg\cos\alpha = l_0m\omega^2\sin^2\alpha$ любое положение колечка является положением равновесия.

15.13. Груз массы m подвешен на невесомой нерастяжимой нити длины l к точке A однородного стержня массы M, который может вращаться вокруг своей неподвижной точки O $(AO = l_1,\ OB = l_2)$. Движение происходит в вертикальной плоскости. Найти положения равновесия системы и исследовать их устойчивость.



К задаче 15.13

$$\Pi = Mg\frac{l_2-l_1}{2}\cos\varphi - mg(l\cos\psi + l_1\cos\varphi)$$

$$\Pi_\varphi = -\frac{1}{2}Mg(l_2-l_1)\sin\varphi + mgl_1\sin\varphi \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \pi}$$

$$\Pi_\psi = mgl\sin\psi = 0 \Rightarrow \boxed{\psi_{1,2} = 0}$$

$$\Pi_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}Mg(l_2-l_1)\cos\varphi + mgl_1\cos\varphi$$

$$\Pi_{\psi\psi} = mgl\cos\psi > 0 \text{ при } \psi = \psi_{1,2}$$

$$C = \begin{bmatrix} \Pi_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & \Pi_{\psi\psi} \end{bmatrix} \qquad \operatorname{sign}\Delta_2 = \operatorname{sign}\Delta_1 = \Pi_{\varphi\varphi}$$

$$\Pi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g\left[\overset{\varphi_1}{\mp} M(l_2-l_1) \underset{\varphi_2}{\pm} 2ml_1\right]$$

Теорема. *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

$C_1 > 0,\ C_2 \gtrless 0$ при $2ml_1 > M(l_2-l_1)$

Th. Л-Д → $\boxed{\text{П.Р. } \varphi_1, \psi_1 \text{ уст}}$

→ $\boxed{\text{П.Р. } \varphi_2, \psi_2 \text{ неуст}}$ Th. Ляпунова о неуст

Теорема 1. *Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнается уже по членам второго порядка в разложении функции* Π *в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

$C_1 \gtrless 0,\ C_2 > 0$ при $2ml_1 < M(l_2-l_1)$

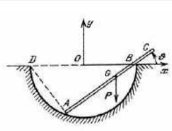
Th. Л-Д → $\boxed{\text{П.Р. } \varphi_2, \psi_2 \text{ уст}}$

→ $\boxed{\text{П.Р. } \varphi_1, \psi_1 \text{ неуст}}$ Th. Ляпунова о неуст

При $2ml_1 = M(l_2-l_1)$ Π не зависит от φ ⇒ $\boxed{\varphi_3 - \text{любой},\ \psi_3 = 0 \quad \text{неуст П.Р.}}$ по опр

15.13. При $2ml_1 > M(l_2 - l_1)$ положение равновесия $\varphi_1 = 0,\ \psi_1 = 0$ устойчиво, а положение равновесия $\varphi_2 = \pi,\ \psi_2 = 0$ неустойчиво, и, наоборот, при $2ml_1 < M(l_2 - l_1)$ положение равновесия $\varphi_1 = 0,\ \psi_1 = 0$ неустойчиво, а положение равновесия $\varphi_2 = \pi,\ \psi_2 = 0$ устойчиво. В случае $2ml_1 = M(l_2 - l_1)$ имеет место континуум неустойчивых положений равновесия φ_3 – любое, $\psi_3 = 0$.

15.26. Тяжёлый однородный стержень длины l и массы m, опираясь на край полусферической чаши радиуса r, нижним концом может скользить по её внутренней гладкой поверхности. Геометрические параметры удовлетворяют условию $r < l < 2r$. Определить значение угла наклона θ стержня к линии горизонта в положении равновесия. Исследовать устойчивость положения равновесия.



К задаче 15.26

$$GB = AB - AG = 2r\cos\theta - \frac{l}{2}$$

$$\Pi = -mg\left(2r\cos\theta - \frac{l}{2}\right)\sin\theta \sim \left(-4\cos\theta + \frac{l}{r}\right)\sin\theta$$

$$\Pi_\theta = -4\cos 2\theta + \frac{l}{r}\cos\theta = -8\cos^2\theta + 4 + \frac{l}{r}\cos\theta = 0$$

$$\cos\theta_{1,2} = \frac{1}{16}\cdot\frac{l}{r} \pm \frac{1}{16}\sqrt{\frac{l^2}{r^2} + 128}$$

$$\Pi_{\theta\theta} = 8\sin 2\theta - \frac{l}{r}\sin\theta = \sin\theta\left(16\cos\theta - \frac{l}{r}\right)$$

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \Pi_{\theta\theta} > 0 \text{ при } \cos\theta > \frac{1}{16}\frac{l}{r}$$

Th. Л-Д

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{l}{r} + \frac{1}{16}\sqrt{\frac{l^2}{r^2} + 128}\right) - \text{уст П.Р.}$$

Теорема. *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{l}{r} - \frac{1}{16}\sqrt{\frac{l^2}{r^2} + 128}\right) - \text{неуст П.Р.}$$

Теорема 1. *Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнается уже по членам второго порядка в разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

Th. Ляпунова о неуст

15.26. $\varphi \approx \arccos 0.92$, устойчиво. ???

Т4. Материальная точка находится в однородном поле тяжести на гладкой поверхности, определяемой уравнением (ось Oz направлена вертикально вверх):

$$z = \sin(x+y) - \cos y.$$

Найдите все положения равновесия материальной точки и исследуйте их устойчивость.

$$\Pi = mgz \sim z = \sin(x+y) - \cos y$$

$$\Pi_x = \cos(x+y) = 0 \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\Pi_y = \cos(x+y) + \sin y = 0 \Rightarrow y = \pi k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi m \\ y = \pi n \end{cases} - \text{П.Р.}$$

Теорема. *Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий локальный минимум, то это положение равновесия устойчиво.*

$$C = \begin{bmatrix} \Pi_{xx} & \Pi_{xy} \\ \Pi_{xy} & \Pi_{yy} \end{bmatrix}$$

1) $-\sin(x+y) > 0$

$\sin^2(x+y) - \sin(x+y)\cos y - \sin^2(x+y) > 0$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \sin(x+y) < 0 \\ \cos y > 0 \end{matrix}$$

$x + y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$y = 2\pi k$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k) \\ y = 2\pi k \end{cases} \quad \text{уст. П.Р.}$$

Th. Л-Д

2) $$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k) \\ y = \pi k \end{cases} \quad \text{неуст. П.Р.}$$

Th. Ляпунова о неуст

Теорема 1. *Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это узнается уже по членам второго порядка в разложении функции Π в ряд в окрестности положения равновесия без необходимости рассматривания членов высших порядков, то положение равновесия неустойчиво.*

16.6. Показать, что амплитудные векторы $\mathbf{u}_j$ и $\mathbf{u}_k$, соответствующие различным собственным частотам малых колебаний консервативной системы, линейно независимы.

При практическом нахождении решения (19) можно поступать следующим образом. Ищем решение системы (10) в виде

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u}\sin(\omega t + \alpha).$$

Подставив это выражение для $\boldsymbol{q}$ в уравнение (10) и сократив затем на $\sin(\omega t + \alpha)$, получим уравнение для амплитудного вектора $\boldsymbol{u}$

$$(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{A})\boldsymbol{u} = 0 \qquad (\lambda = \omega^2). \tag{21}$$

$U_j^T A U_k = 0 \ (j \neq k)$:

симм.

$$C U_k = \mu_k A U_k \ / \cdot U_j^T$$
$$C U_j = \mu_j A U_j \ / \cdot U_k^T$$

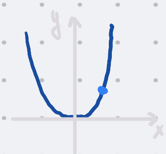
$\ominus \Longrightarrow (\mu_k - \mu_j)\, U_j^T A U_k \xRightarrow{\mu_k \neq \mu_j} U_j^T A U_k = 0$

U_k и U_j ЛНЗ $(j \neq k)$:

от противного $]\,\exists\, \partial_i \neq 0$:

$\sum \partial_i U_i = 0 \ / \cdot U_j^T A \xRightarrow{U_k \perp U_j} \partial_j U_j^T A U_j = 0 \Rightarrow \partial_j = 0$ противоречие

16.17. Тяжёлое колечко массы m может скользить по гладкой проволочной параболе $2l\,y = x^2$ (ось Oy направлена вертикально вверх). Показать, что период малых колебаний колечка вблизи положения равновесия совпадает с периодом математического маятника длины l.



$$П = mgy = \frac{1}{2} mg \frac{x^2}{\ell}$$

$$П_x = mg\frac{x}{\ell} = 0 \Rightarrow x = 0 - \text{п.р.}$$

в п.р.

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \cancel{\left(\frac{x\dot{x}}{\ell}\right)^2}\right)$$

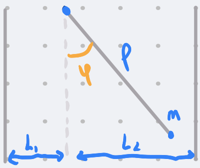
$A = [m] \quad C = \left[\frac{mg}{\ell}\right] \quad \left(\frac{mg}{\ell} - m\omega^2\right) U = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \omega_{мм} \Rightarrow T = T_{мм}$

мат маятник

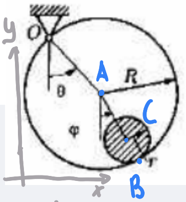
$$\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k}\, \dot{q}_i \dot{q}_k$$

$$c_{ik} = \left(\frac{\partial^2 П}{\partial q_i\, \partial q_k}\right)_0,$$

16.30. Точка подвеса математического маятника массы m и длины l расположена между двумя вертикальными стенками. Расстояния L_1 и L_2 между точкой подвеса маятника и стенками удовлетворяют неравенству $L_1 + L_2 \ll l$. Считая удары массы о стенки абсолютно упругими, найти такое значение $\dot{\varphi}(0)$, чтобы частота колебаний равнялась $\dfrac{l}{L_1 + L_2}\sqrt{\dfrac{g}{l}}$, если $\varphi(0) = 0$



16.51. По внутренней поверхности полого цилиндра радиуса R и массы m, который может свободно качаться вокруг горизонтальной образующей O, катится без проскальзывания однородный цилиндр радиуса $r = \frac{R}{4}$ и той же массы. Найти малые колебания системы вблизи устойчивого положения равновесия.



$$\Pi = -mg(\overbrace{R\cos\theta}^{\text{полый}} + \underbrace{R\cos\theta + (R-r)\cos\varphi}_{\text{однородный}}) \sim \frac{1}{2}mg(2R\theta^2 + (R-r)\varphi^2) \Rightarrow \theta = \varphi = 0 - \text{п.р.}$$

$$R = 4r \Rightarrow \Pi = \frac{1}{2}mgr(8\theta^2 + 3\varphi^2)$$

Найдем ω:

$$\overline{V}_B = \dot{\overline{\theta}} \times \overline{OB} = \overbrace{\underbrace{\dot{\overline{\theta}} \times \overline{OA}}_{V_A} + \dot{\overline{\varphi}} \times \overline{AC}}^{V_c} + \overline{\omega} \times \overline{CB}, \quad \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{\omega} \times \overline{CB} = \dot{\overline{\theta}} \times \overline{AB} - \dot{\overline{\varphi}} \times \overline{AC}$$

$$\omega r = R\dot{\theta} - (R-r)\dot{\varphi}, \quad R = 4r \Rightarrow \omega = 4\dot{\theta} - 3\dot{\varphi}$$

Т.к. нам необх T в п.р.: $V_c = |\dot{\theta}R + \dot{\varphi}(R-r)|$ – в п.р.

$$T = \underbrace{mR^2}_{\frac{1}{2}J_0}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R\dot{\theta} + (R-r)\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mr^2\left[32\dot{\theta}^2 + 16\dot{\theta}^2 + 24\dot{\theta}\dot{\varphi} + 9\dot{\varphi}^2 + 8\dot{\theta}^2 - 12\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{9}{2}\dot{\varphi}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}mr^2\left[56\dot{\theta}^2 + 12\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{27}{2}\dot{\varphi}^2\right]$$

$$C = mgr\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A = mr^2\begin{bmatrix} 56 & 6 \\ 6 & 27/2 \end{bmatrix} \quad |C - \lambda A| = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 8g - 56\lambda r & -6\lambda r \\ -6\lambda r & 3g - \frac{27}{2}\lambda r \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} \frac{4}{3}g - \frac{28}{3}\lambda r & -\lambda r \\ -6\lambda r & 3g - \frac{27}{2}\lambda r \end{vmatrix} = 12\cdot\begin{vmatrix} \frac{2}{3}g - \frac{14}{3}\lambda r & -\lambda r \\ -3\lambda r & 3g - \frac{27}{2}\lambda r \end{vmatrix} = 0$$

$$2g - 9g\lambda r - 14g\lambda r + 63\lambda^2 r^2 - 3\lambda^2 r^2 = 0 \Rightarrow 60\lambda^2 r^2 - 23\lambda gr + 2g^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{23gr \pm gr\sqrt{23^2 - 4\cdot 60\cdot 2}}{2\cdot 60r^2} = \frac{23g \pm 7g}{2\cdot 60r} \quad \lambda_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{g}{r} \quad \lambda_2 = \frac{2}{15}\cdot\frac{g}{r}$$

$$\lambda_1: \ (C - \lambda_1 A)U = 0, \text{ вынесли } mgr \begin{bmatrix} 8 - 14 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 3 - \frac{27}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$56 \cdot \frac{2}{15}$$

$$\lambda_2: \ (C - \lambda_2 A)U = 0, \text{ вынесли } mgr, \text{ домножили на } 15 \begin{bmatrix} 120 - 112 & -12 \\ -12 & 45 - 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 18 \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

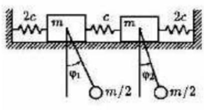
$$\begin{bmatrix} \theta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \left(C_{11}\cos(w_1 t) + C_{12}\sin(w_1 t) \right) + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \left(C_{21}\cos(w_2 t) + C_{22}\sin(w_2 t) \right)$$

16.51. $\begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \left[\theta_{10} \cos\left(\sqrt{\frac{2g}{15\,r}} t \right) + \dot{\theta}_{10} \sqrt{\frac{15\,r}{2g}} \sin\left(\sqrt{\frac{2g}{15\,r}} t \right) \right] +$

$+ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \left[\theta_{20} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{4\,r}} t \right) + \dot{\theta}_{20} \sqrt{\frac{4\,r}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{4\,r}} t \right) \right],$ $\theta_{10}, \dot{\theta}_{10}, \theta_{20}, \dot{\theta}_{20}$ –

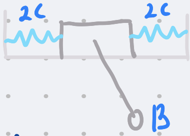
начальные значения главных координат $\theta_1 = \frac{4\theta + \varphi}{13}$, $\theta_2 = \frac{\theta - 3\varphi}{13}$.

16.70. Два груза массы m каждый, соединенные между собой пружиной жесткости c, а с неподвижными стенками пружинами жесткости $2c$ каждая, могут скользить по гладкой горизонтальной направляющей. К каждому грузу подвешен математический маятник массы $\frac{m}{2}$ и длины l. Используя симметрию системы, найти её малые колебания. При вычислениях положить $2cl = mg$.

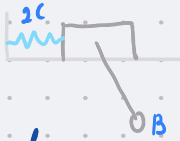


К задаче 16.70

в силу симм. сист: 1)



2)



в противофазе — в фазе

1) $\Pi = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2cx^2 + \frac{m}{2} gl(1-\cos\varphi) \sim 2cx^2 + \frac{1}{4} mgl\varphi^2 \Rightarrow x=0, \varphi=0$ – п.р.

в п.р. $V_B = \dot{x} + \dot{\varphi} l \Rightarrow$

в п.р. $T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}(\dot{x} + l\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2} m\left(\frac{3}{2}\dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{1}{2} l^2\dot{\varphi}^2\right)$

$$A = m\begin{bmatrix} 3/2 & l/2 \\ l/2 & l^2/2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4c & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} mgl \end{bmatrix},\ 2cl = mg \Rightarrow C = m\begin{bmatrix} 2\frac{g}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} gl \end{bmatrix}$$

$$|C - \lambda A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\frac{g}{l} - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda l \\ -\frac{1}{2}\lambda l & \frac{1}{2} gl - \lambda\frac{l^2}{2} \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2\frac{g}{l} - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda l \\ -\lambda l & gl - \lambda l^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$2g^2 - 2\lambda gl - \frac{3}{2}\lambda gl + \frac{3}{2}\lambda^2 l^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 l^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 l^2 - \frac{7}{2}\lambda gl + 2g^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}\frac{g}{l}}$$

$$\lambda_{1,2}: (C - \lambda_{1,2} A) U_{1,2} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 \pm 3\sqrt{17}\cdot\frac{g}{l} & 7 \pm \sqrt{17}\, g \\ 7 \pm \sqrt{17}\, g & 3 \pm \sqrt{17}\, gl \end{bmatrix} \Rightarrow U_{1,2} = \begin{bmatrix} (3 \pm \sqrt{17})\, l \\ -7 \mp \sqrt{17} \end{bmatrix}$$

подставил λ и • на $-\frac{1}{8}$

2) $C = \begin{bmatrix} 2c & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} \frac{g}{l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} gl \end{bmatrix}$, A – из п.1 $\Rightarrow |C - \lambda A| = 0 \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l} - \frac{3}{2}\lambda & -\frac{1}{2}\lambda l \\ -\lambda l & gl - \lambda l^2 \end{vmatrix} = \lambda^2 l^2 - \frac{5}{2}\lambda gl + 2g^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{g}{l},\ \lambda_4 = 2\cdot\frac{g}{l}}$$

$$\lambda_3:\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\frac{g}{\ell} & -\frac{1}{4}g\\ -\frac{1}{4}g & \frac{1}{4}g\ell\end{bmatrix} \Rightarrow u_3=\begin{bmatrix}\ell\\1\end{bmatrix} \qquad \lambda_4=\begin{bmatrix}-2\frac{g}{\ell} & -g\\ -g & -\frac{1}{2}g\ell\end{bmatrix} \quad u_4=\begin{bmatrix}\ell\\-2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}X_1\\ \ell\varphi_1\\ X_2\\ \ell\varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{matrix}3+\sqrt{17} & 3-\sqrt{17}\\ -7-\sqrt{17} & -7+\sqrt{17}\\ -3-\sqrt{17} & -3+\sqrt{17}\\ 7+\sqrt{17} & 7-\sqrt{17}\end{matrix}}_{\substack{X_1=-X_2\\ \varphi_1=-\varphi_2}} & \underbrace{\begin{matrix}1 & 1\\ 1 & -2\\ 1 & 1\\ 1 & -2\end{matrix}}_{\substack{X_1=X_2\\ \varphi_1=\varphi_2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\cos(w_1t+\varphi_1)\\ C_2\cos(w_2t+\varphi_2)\\ C_3\cos(w_3t+\varphi_3)\\ C_4\cos(w_4t+\varphi_4)\end{bmatrix}$$

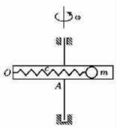
16.70.

$$\begin{pmatrix}x_1\\ l\varphi_1\\ x_2\\ l\varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & \sqrt{57}-7 & \sqrt{57}+7\\ 1 & -2 & 11-\sqrt{57} & -11-\sqrt{57}\\ 1 & 1 & -\sqrt{57}+7 & -\sqrt{57}-7\\ 1 & -2 & -11+\sqrt{57} & 11+\sqrt{57}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\theta_{10}\cos(\omega_1t)+(\dot\theta_{10}/\omega_1)\sin(\omega_1t)\\ \theta_{20}\cos(\omega_2t)+(\dot\theta_{20}/\omega_2)\sin(\omega_2t)\\ \theta_{30}\cos(\omega_3t)+(\dot\theta_{30}/\omega_3)\sin(\omega_3t)\\ \theta_{40}\cos(\omega_4t)+(\dot\theta_{40}/\omega_4)\sin(\omega_4t)\end{bmatrix},$$

$\omega_1^2=\frac{g}{2l}$, $\omega_2^2=\frac{2g}{l}$, $\omega_3^2=\frac{(11-\sqrt{57})}{4}\frac{g}{l}$ $\omega_4^2=\frac{(11+\sqrt{57})}{4}\frac{g}{l}$, где

θ_{i0}, $\dot\theta_{i0}$ $(i=\overline{1,4})$ – начальные значения главных координат

17.1. Внутри горизонтальной шероховатой трубки (см. рисунок), вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, пересекающей ось трубки, может перемещаться шарик массы m, соединённый с концом трубки O пружиной жесткости c. При недеформированной пружине центр шарика находится на оси вращения. Пренебрегая действием силы тяжести, найти условия, при которых положение относительного равновесия шарика будет асимптотически устойчиво.



К задаче 17.1

Т.к. шероховата, действует $Q=-\beta\dot{x}$, $\beta>0$

$m\ddot{x}+\beta\dot{x}-mw^2x+cx=0$

$A\lambda^2+B\lambda+C=m\lambda^2+\beta\lambda+c-mw^2$

Необх. усл: $c-mw^2>0$

Кр. Р-Г: $\begin{bmatrix}\beta & c-mw^2\\ 0 & m\end{bmatrix}$ $\begin{matrix}\beta>0\\ \beta m>0\end{matrix}$ $\Rightarrow$ ас. уст при $c-mw^2>0$

17.1. $c-m\omega^2>0$.

17.26. Цилиндр, заполненный жидкостью вязкости β (см. рисунок), может скользить без трения по горизонтальной направляющей. В цилиндре находится поршень, который может перемещаться относительно цилиндра. Масса цилиндра с жидкостью и масса поршня соответственно равны M и m. Цилиндр и поршень соединены с неподвижными стенками пружинами жесткости k. Показать, что положение равновесия системы асимптотически устойчиво.

К задаче 17.26

$M\ddot{x}+\beta(\dot{x}-\dot{y})+kx=0$

$m\ddot{y}+\beta(\dot{y}-\dot{x})+ky=0$

$A=\begin{bmatrix}M & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}\beta & -\beta\\ -\beta & \beta\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix}M\lambda^2+\beta\lambda+k & -\beta\lambda\\ -\beta\lambda & m\lambda^2+\beta\lambda+k\end{vmatrix}=Mm\lambda^4+M\beta\lambda^3+Mk\lambda^2+m\beta\lambda^3+\cancel{\beta^2\lambda^2}+$$

$$+\beta k\lambda+km\lambda^2+k\beta\lambda+k^2-\cancel{\beta^2\lambda^2}=$$

$$= Mm\lambda^4 + (M+m)\beta\lambda^3 + (M+m)k\lambda^2 + 2k\beta\lambda + k^2$$

необх. усл. $\operatorname{sign} a_0 = \ldots = \operatorname{sign} a_4 > 0$ выполняется

$$\begin{bmatrix} 2k\beta & k^2 & 0 & 0 \\ (M+m)\beta & (M+m)k & 2k\beta & k^2 \\ 0 & Mm & (M+m)\beta & (M+m)k \\ 0 & 0 & 0 & Mm \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 2k\beta > 0$

$\Delta_3 = 2k\beta[(M+m)^2 k\beta - 2Mmk\beta] - k^2(M+m)^2\beta^2 =$

$= k^2\beta^2[(M+m)^2 - 2Mm] = k^2\beta^2(M^2+m^2) > 0$

$\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0$ $\Rightarrow$ п.р. ас. уст

Кр. Р-Г в ф. Л-Ш

17.30. Динамика склерономной системы описывается уравнениями $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$, где матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ положительно определены, а симметричная матрица $\mathbf{B}$ соответствует знакопостоянной квадратичной форме. Доказать, что равновесие системы $\mathbf{q} = 0$ асимптотически устойчиво в том и только в том случае, если $\mathbf{u}_k\mathbf{B}\mathbf{u}_s \neq 0$, $s = \overline{1, n}$, где $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$ – амплитудные векторы консервативной системы $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$.

$A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq = 0$, $A, C > 0$, B - симм., знакопост.

д-ть: $q = 0$ ас. уст $\Leftrightarrow Bu_s \neq 0$

д-во: $\exists q = U\theta$: $U^T A U = E$, $U^T C U = \Lambda$ - диаг. $\quad BU = [Bu_1 \ldots Bu_n]$

$U^T / \; AU\ddot{\theta} + BU\dot{\theta} + CU\theta = 0 \Rightarrow$

$\ddot{\theta} + B'\dot{\theta} + \Lambda\theta = 0$

$q = he^{\lambda t}$

$(\lambda^2 + B'\lambda + \Lambda)h = 0$

$(h^1 - ih^2)B(h^1 + ih^2)$ $\quad \bar{h}B'h =$

$h^1 B h^1 + h^2 B h^2$

Заметим, что, в силу свойств симметрии матриц A и K и косой симметрии матрицы Γ, имеем

$$\bar{h} \cdot Ah = h^1 \cdot Ah^1 + h^2 \cdot Ah^2 = a \quad (h = h^1 + ih^2),$$
$$\bar{h} \cdot Kh = h^1 \cdot Kh^1 + h^2 \cdot Kh^2 = k,$$
$$\bar{h} \cdot \Gamma h = 2ih^1 \cdot \Gamma h^2 = 2ig,$$

где a, k, g — вещественные числа, причем $a > 0$, $k > 0$.

Из найденного квадратного уравнения выводим

$$\lambda = \frac{-g \pm \sqrt{g^2 + ak}}{a},$$

откуда и следует вещественность λ.

Корни λ находятся из характеристического уравнения

$$\det(-\lambda^2 A + i\lambda\Gamma + K) = 0,$$

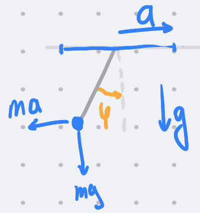
17.30. Динамика склерономной системы описывается уравнениями $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$, где матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ положительно определены, а симметричная матрица $\mathbf{B}$ соответствует знакопостоянной квадратичной форме. Доказать, что равновесие системы $\mathbf{q} = 0$ асимптотически устойчиво в том и только в том случае, если $\mathbf{u}_k\mathbf{B}\mathbf{u}_s \neq 0$, $s = \overline{1, n}$, где $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$ – амплитудные векторы консервативной системы $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$.

2018

17.30. Движение склерономной системы в линейном приближении описывается уравнениями $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$, где матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ положительно определены, а симметрическая матрица $\mathbf{B}$ отвечает знакопостоянной квадратичной форме. Доказать, что равновесие системы $\mathbf{q} = 0$ асимптотически устойчиво в том и только в том случае, если $\mathbf{B}\mathbf{u}_s \neq 0$, $s = \overline{1, n}$, где $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ — совокупность амплитудных векторов, определяющих малые колебания консервативной системы $\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} = 0$.

2002

18.3. Точка подвеса математического маятника длины l движется по горизонтальной прямой по закону $s = \frac{1}{2}at^2 + A\sin(\omega t)$. Найти движение маятника в системе отсчёта, движущейся по закону $s = \frac{1}{2}at^2$. Исследовать случай резонанса.



Отсчитываем φ отн-но п.р.

Введем $\bar{g}' = \bar{g} + \bar{a}$, $g' = \sqrt{g^2 + a^2}$

$$\Pi = mg'l(1-\cos\varphi) \approx \frac{1}{2} mg'l\varphi^2 \qquad T_{отн} = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mg'l\varphi = mlA\omega^2 \sin\omega t$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g'}{l}\varphi = \frac{A}{l}\omega^2 \sin\omega t$$

ОУ: $\ddot{\varphi} + \frac{g'}{l}\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_{общ} = C\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, $\omega_0^2 = \frac{\sqrt{a^2+g^2}}{l}$

$$D = -\omega^2 \cdot \frac{1}{2} ml^2 + \frac{1}{2} mg'l = \frac{1}{2} ml^2(\omega_0^2 - \omega^2) \sim \omega_0^2 - \omega^2$$

$$W = \frac{1}{D} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad \psi = \arg W = 0$$

$$\varphi_{частн} = \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}\cdot\frac{A}{l}\omega^2 \sin\omega t \Rightarrow \varphi = C_1\cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t + \frac{\omega^2}{|\omega_0^2-\omega^2|}\cdot\frac{A}{l}\sin\omega t$$

$\varphi(0) = \varphi_0$: $C_1 = \varphi_0$

$\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$: $C_2 = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} - \frac{\omega^3}{\omega_0|\omega_0^2-\omega^2|}\cdot\frac{A}{l}$

$$\varphi = \varphi_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{\omega^3}{\omega_0|\omega_0^2-\omega^2|}\cdot\frac{A}{l}\sin\omega_0 t + \frac{\omega^2}{|\omega_0^2-\omega^2|}\cdot\frac{A}{l}\sin\omega t$$

$$\varphi = \varphi_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{\omega^2}{\omega_0|\omega_0^2-\omega^2|}\cdot\frac{A}{l}(\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t)$$

?

18.3. $\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{a}{g} + \left(\varphi_0 + \operatorname{arctg}\frac{a}{g}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \frac{gA\omega^2}{l^2\omega_0^2}\frac{[\omega_0\sin(\omega t) - \omega\sin(\omega_0 t)]}{\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}$, где $\omega_0^2 = \frac{\sqrt{g^2+a^2}}{l} \approx \frac{g}{l}\left(1+\frac{a^2}{2g^2}\right)$, $\frac{aA\omega^2}{g^2+a^2} << 1$, $\omega \neq \omega_0$.

При $\omega = \omega_0$ и малых t

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\frac{a}{g} + \left(\varphi_0 + \operatorname{arctg}\frac{a}{g}\right)\cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + \frac{g}{l\omega_0^2}\frac{A}{2l}[\sin(\omega_0 t) - \omega_0 t\cos(\omega_0 t)].$$

пр. Лопиталя

Резонанс: $\lim\limits_{\omega\to\omega_0} \frac{\omega^2}{\omega_0|\omega_0^2-\omega^2|}(\omega_0\sin\omega t - \omega\sin\omega_0 t) =$

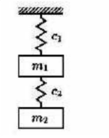
$$= \lim_{\omega\to\omega_0}\frac{\omega^2}{-2\omega_0\omega}\cdot(\omega_0 t\cos\omega t - \omega\sin\omega_0 t) = \frac{1}{2}(\omega_0\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t)$$

При $\omega\to\omega_0$: $\varphi = \varphi_0\cos\omega_0 t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{A}{2l}(\omega_0\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t)$

?

18.25. Массы m_1 и m_2, последовательно подвешенные на невесомых пружинах жёсткости c_1 и c_2, могут двигаться по вертикали. К массе m_1 приложена вертикальная сила $F(t) = a\sin(pt)$. При заданных c_1, m_1 и p найти начальные условия системы и значения параметров c_2 и m_2, при которых амплитуда вынужденных колебаний массы m_1 равна нулю (успокоитель колебаний без трения).

18.26. Решить предыдущую задачу, считая, что на массу m_1 действует также сила сопротивления $F = -\beta v_1$.



К задаче 18.25

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad \Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) x_1^2 - c_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2$$

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$D = -p^2 A + pB + C = \begin{bmatrix} -p^2 m_1 - \beta p + c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & -\omega^2 m_2 + c_2 \end{bmatrix}$$

$$W = D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot \begin{bmatrix} c_2 - p^2 m_2 & c_2 \\ c_2 & c_1 + c_2 - p^2 m_1 - \beta p \end{bmatrix}$$

расс элемент $W_{11} = \dfrac{c_2 - p^2 m_2}{\det D}$

Пусть $p_0 = \sqrt{\dfrac{c_2}{m_2}}$, $\det D(\omega_0) = \begin{vmatrix} -p_0^2 m_1 - \beta_1 p_0 + c_1 + c_1 & -c_2 \\ -c_2 & 0 \end{vmatrix} = -c_2^2 \neq 0$,

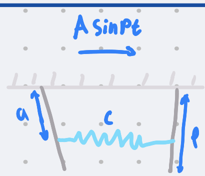
а $W_{11}(p_0) = 0$ − антирезонанс (груз m_1 покоится)

$$\boxed{c_2 - p^2 m_2 = 0}$$

18.25. $c_2 - m_2 p^2 = 0$.
18.26. $c_2 - m_2 p^2 = 0$.

18.37. Два одинаковых однородных стержня длины l и массы m каждый подвешены своими концами к горизонтальной опоре. Стержни соединены пружиной жесткости c. Расстояние между точкой подвеса и точкой крепления пружины для каждого стержня равно a, длина пружины в ненапряженном состоянии равна расстоянию между точками подвеса стержней. Опора совершает горизонтальные колебания по закону $A\sin(pt)$. Считая углы отклонения стержней от вертикали малыми, найти движение системы.

18.38. При каких частотах p возможен резонанс в системе, описанной в предыдущей задаче?



ур-я колеб: $A\ddot{q} + Cq = Q$ замена $q = U\theta$

$U^T \cdot / \; AU\ddot{\theta} + CU\theta = Q$; $U^T A U = E$, $U^T C U = \Lambda = \mathrm{diag}\{\omega_k^2\}$

$\ddot{\theta} + \Lambda\theta = U^T Q$ − необх. найти на какие осцил. сила проец.

$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) \Rightarrow A = \frac{1}{3} m l^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

из соображ. симм.: $U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

в фазе   в противофазе

Учитывая нормировку: $U = \sqrt{\frac{3}{ml^2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$Q_1 = Q_2 = mlAp^2 \sin pt \Rightarrow Q = Q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$U^T Q \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ проец. только на U_1

18.37. $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) \\ A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} D \sin(pt)$,

где $\omega_1^2 = \frac{3g}{2l}$, $\omega_2^2 = \frac{3g}{2l} + 6\frac{ca^2}{ml^2}$, $D = \frac{3\,Ap^2}{(3g - 2lp^2)}$.

18.38. $p = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$.

для случая в фазе: $\Pi_1 = \frac{1}{2} mgl(1 - \cos\varphi) \approx \frac{1}{4} mgl\varphi_1^2$ $\quad T_1 = \frac{1}{6} ml\dot{\varphi}_1^2$

$\frac{1}{3} ml\ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} mgl = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$ $\quad$ при $\boxed{p = \sqrt{\frac{3g}{2l}}}$ – резонанс

18.43. Для каждой координаты от указанного внешнего воздействия найти и построить графически на комплексной плоскости амплитудно-фазовую характеристику системы, заданной уравнениями динамики:

д) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x + y = A\sin(\omega t)$, $\quad \ddot{y} + \dot{y} + y - x = 0$;

д) $W_{11} = \frac{(1 - \omega^2 + i\omega)\left[(\omega^4 - 4\omega^2 + 2) + i\omega(3\omega^2 - 3)\right]}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)^2 + (3\omega^3 + 3\omega)^2}$,

$W_{12} = \frac{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2) + i\omega(3\omega^2 - 3)}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)^2 + (3\omega^3 + 3\omega)^2}$;

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\dot{x} + x + y = A\sin\omega t \\ \ddot{y} + \dot{y} + y - x = 0 \end{cases}$$

$A = E \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$D = -\omega^2 A + i\omega B + C = \begin{bmatrix} -\omega^2 + 2i\omega + 1 & 1 \\ -1 & -\omega^2 + i\omega + 1 \end{bmatrix}$

$$W = D^{-1} = \frac{1}{\det D} \begin{bmatrix} -\omega^2 + i\omega + 1 & 1 \\ -1 & -\omega^2 + 2i\omega + 1 \end{bmatrix}$$

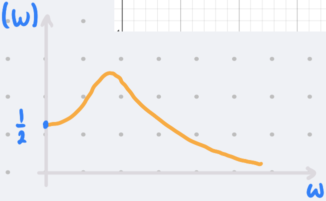
$$\det D = (-\omega^2 + 2i\omega + 1)(-\omega^2 + i\omega + 1) + 1 = \omega^4 - i\omega^3 - \omega^2 - 2i\omega^3 - 2\omega^2 + 2i\omega - \omega^2 + i\omega + 1 + 1 =$$
$$= \omega^4 - 3i\omega^3 - 4\omega^2 + 3i\omega + 2$$

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot e^{i\omega t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{bmatrix} \cdot e^{i\omega t}$$

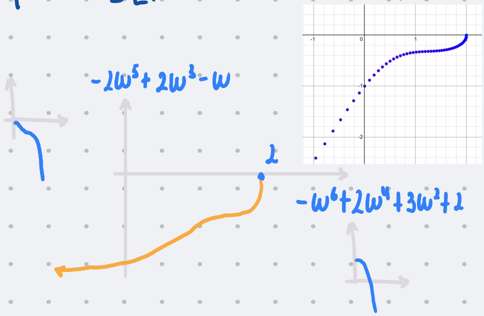
$$W_{11} = \frac{-\omega^2 + i\omega + 1}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2) + i(3\omega - 3\omega^3)} = \frac{(-\omega^2 + i\omega + 1)\left[(\omega^4 - 4\omega^2 + 2) + i(3\omega^3 - 3\omega)\right]}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)^2 + (3\omega - 3\omega^3)^2} =$$

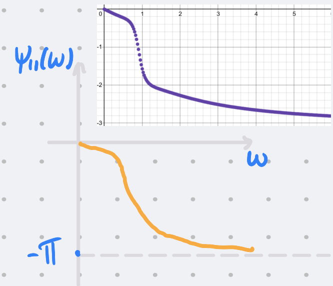
$$= \frac{(-\omega^6 + 2\omega^4 + 3\omega^2 + 2) + i(-2\omega^5 + 2\omega^3 - \omega)}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)^2 + (3\omega - 3\omega^3)^2}$$

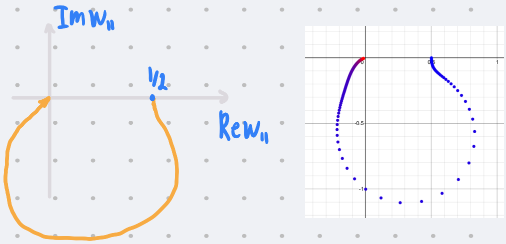
$$R_{11} = \frac{\sqrt{(-\omega^6 + 2\omega^4 - 3\omega^2 + 2)^2 + (2\omega^5 - 2\omega^3 + \omega)^2}}{(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)^2 + (3\omega - 3\omega^3)^2}$$



$$\varphi_{11} = \arg\left[(-w^6+2w^4+3w^2+2)+i(-2w^5+2w^3-w)\right]$$

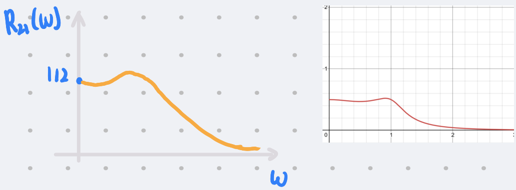






$$W_{21} = -\frac{(w^4-4w^2+2)+i(3w^3-3w)}{(w^4-4w^2+2)^2+(3w-3w^3)^2}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{(w^4-4w^2+2)^2+(3w-3w^3)^2}}$$



$$\varphi_{21} = -\arg\left[(w^4-4w^2+2)+i(3w^3-3w)\right]$$