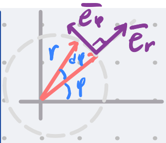
1.18. Движение точки задано в полярных координатах $r(t)$ и $\varphi(t)$. Показать, что вектор ускорения точки коллинеарен ее радиусу-вектору, если $r^2\dot\varphi = \text{const}$.

Дано: $\bar r = \begin{bmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix}$

$r^2\dot\varphi = const$

Д-ть: $\bar W \parallel \bar r$



$\frac{\partial \mathbf r}{\partial q_1} = H_1 \mathbf e_1$

$|d r_\varphi| = r|d\varphi| \Rightarrow H_\varphi = r$

$|d r_r| = |dr| \Rightarrow H_r = 1$

$V^2 \overset{\text{очев онб}}{=} \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$

$W_k = \frac{1}{H_k}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(V^2/2)}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial(V^2/2)}{\partial q_k}\right)$; $\Rightarrow W_\varphi = \frac{1}{r}\cdot \underbrace{(r^2\dot\varphi)}_{const}{}^{\cdot} = 0 \Rightarrow \bar W \parallel \bar r$

1.25. Радиус-вектор $\mathbf r$, скорость $\mathbf v$ и ускорение $\mathbf w$ движущейся точки связаны соотношением $\mathbf w = a(\mathbf v \times \mathbf r)$, где $a = \text{const} > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\mathbf r$ и $\mathbf v$.

Дано: $\bar W = a(\bar V \times \bar r)$,

$a = const > 0$

$\rho(\bar r, \bar V) - ?$

1-й способ:

из 1-го сема по матану: $K = \frac{1}{\rho} = \frac{\dot{\bar r} \times \ddot{\bar r}}{|\dot{\bar r}|^3}$

$$\rho = \frac{V^3}{|\bar V \times [a(\bar V\times\bar r)]|} = \frac{V^3}{V\cdot|a(\bar V\times\bar r)|} = \frac{V^2}{a|\bar V\times\bar r|}$$

2-й способ:

$\mathbf w = \frac{dv}{dt}\boldsymbol\tau + \frac{v^2}{\rho}\mathbf n.$

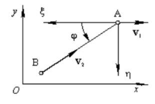
$\bar W = a(\bar V\times\bar r) \Rightarrow \bar W \perp \bar V, \bar W \perp \bar r$

$\bar W = \dot V\cdot\bar\tau + \frac{V^2}{\rho}\bar n \ \backslash\cdot\bar V$ справа

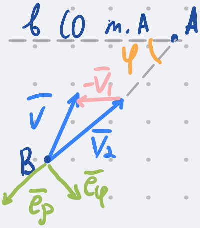
$\underbrace{\bar W\cdot\bar V}_{0,\ \text{т.к. } \bar W\perp\bar V} = \dot V\cdot\bar\tau\cdot\bar V + \frac{V^2}{\rho}\overset{0}{\bar n\cdot\bar V} = 0$

$\dot V\cdot\underbrace{\bar\tau\cdot\bar V}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \dot V = 0 \Rightarrow \bar W = \frac{V^2}{\rho}\bar n \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{V^2}{a|\bar V\times\bar r|}}$

1.31. Убегающий A движется по прямой с постоянной скоростью $\mathbf{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной по величине скоростью $\mathbf{v}_2$, направленной по BA. Найти траекторию сближения $AB = r(\varphi)$ в системе отсчета, связанной с убегающим, если в начальный момент угол φ между вектором скорости $\mathbf{v}_1$ и прямой BA не равен нулю $\varphi_0 \ne 0$ (см. рис. к задаче 1.29).



К задаче 1.29



Дано: $\bar V_1 = const$ $\bar V_2 = const$
$\varphi_0 \ne 0$

$AB = r(\varphi)$ — ?

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1 \mathbf{e}_1$$

$$\begin{cases} V_\rho = \frac{d\rho}{dt} = -V_2 + V_1\cos\varphi \\ V_\varphi = \rho\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -V_1\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{V_2 - V_1\cos\varphi}{V_1\sin\varphi}\,d\varphi$$

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho} = \frac{V_2}{V_1}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} - \int_{\varphi_0}^{\varphi} ctg\,\varphi\, d\varphi$$

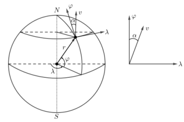
$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi} \underset{t = tg\,\varphi/2}{=} \int_{tg\,\varphi_0/2}^{tg\,\varphi/2}\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t} = \int_{tg\,\varphi_0/2}^{tg\,\varphi/2}\frac{dt}{t}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} ctg\,\varphi\, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\sin\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\cdot\left(\frac{tg\,\varphi/2}{tg\,\varphi_0/2}\right)^{\frac{V_2}{V_1}}$$

1.31. $\frac{r}{r_0} = \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\left(tg\frac{\varphi}{2}\Big/tg\frac{\varphi_0}{2}\right)^{v_2/v_1}$

T1. Используя сферические координаты (r, λ - долгота, φ - широта), определить, какую кривую опишет корабль, идущий под постоянным курсовым углом α к географическому меридиану. Корабль принять за точку, движущуюся по поверхности земного шара (Рис. 1). Считая, что модуль скорости v корабля не изменяется, определить проекции ускорения корабля на оси сферических координат, модуль ускорения и радиус кривизны траектории.



T1

$$\bar r = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$V = const$, $\angle(\bar e_\varphi, \bar v) = \alpha$

Ур-е кривой — ?

w_k — ? $k = \{r, \lambda, \varphi\}$

w — ?

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1 \mathbf{e}_1$$

$$V_\varphi = v\cos\alpha = \frac{d\varphi}{dt}\cdot r$$

$$V_\lambda = v\sin\alpha = \frac{d\lambda}{dt}\cdot r\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v\cos\alpha}{r} \\ \frac{d\lambda}{dt} = \frac{v\sin\alpha}{r\cos\varphi} \end{cases} \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,d\lambda$$

$\Downarrow$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})} \underset{u=\varphi+\frac{\pi}{2}}{=} \int_{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}^{\varphi+\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sin u} \underset{\text{из пред задачи}}{=} \int_{tg(\varphi_0/2+\frac{\pi}{4})}^{tg(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4})}\frac{dt}{t}$$

$$\ln\frac{tg(\varphi/2+\pi/4)}{tg(\varphi_0/2+\pi/4)} = ctg\,\alpha\,(\lambda-\lambda_0)$$

$$tg(\varphi/2+\pi/4) = tg(\varphi_0/2+\pi/4)\cdot\exp[ctg\,\alpha(\lambda-\lambda_0)]$$ — ур-е кривой

из геометрии: $H_r = 1,\ H_\varphi = r,\ H_\lambda = r\cos\varphi$

$v_k = H_k \dot q_k.$ $\quad V_r = \dot r,\ V_\varphi = r\dot\varphi,\ V_\lambda = \dot\lambda\, r\cos\varphi$

опр ОНБ

$$V^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi\,\dot\lambda^2$$

$$W_k = \frac{1}{H_k}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(V^2/2)}{\partial \dot q_k}\right) - \frac{\partial(V^2/2)}{\partial q_k}\right);$$

$$\boxed{W_r} = \overset{0}{\ddot r} - r\dot\varphi^2 - r\cos^2\varphi\cdot\dot\lambda^2 = -r\frac{V^2\cos^2\alpha}{r^2} - r\cdot\frac{V^2\sin^2\alpha}{r^2\cos^2\varphi}\cdot\cos^2\varphi = \boxed{-\frac{V^2}{r}}$$

$$\boxed{W_\varphi} = \frac{1}{r}\left[r^2\ddot\varphi + 2r\dot r\dot\varphi + r^2\dot\lambda^2\cdot\cos\varphi\sin\varphi\right] =$$

$$= r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi + r\dot\lambda^2\cos\varphi\sin\varphi = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}\cdot\frac{V^2}{r^2}\, r\cos\varphi\sin\varphi = \boxed{\frac{V^2\sin^2\alpha\cdot tg\,\varphi}{r}}$$

$$\boxed{W_\lambda} = \frac{r^2}{r\cos\varphi}\left[\ddot\lambda\cos^2\varphi - 2\cos\varphi\sin\varphi\,\dot\varphi\dot\lambda\right] = r(\ddot\lambda\cos\varphi - 2\sin\varphi\,\dot\varphi\dot\lambda) =$$

$$= r\left[\cancel{\cos\varphi}\,\frac{V\sin\alpha}{\cancel{r}}\cdot\frac{V\cos\alpha}{r\cos^2\varphi}\cdot\sin\varphi - 2\sin\varphi\cdot\frac{V\cos\alpha}{\cancel{r}}\cdot\frac{V\sin\alpha}{r\cos\varphi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2r}V^2 tg\,\varphi\cdot\sin2\alpha - \frac{1}{r}V^2 tg\,\varphi\sin2\alpha = \boxed{-\frac{V^2 tg\,\varphi\sin2\alpha}{2r}}$$

$$W^2 = W_r^2 + W_\varphi^2 + W_\lambda^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{W} = \sqrt{\frac{V^4}{r^2} + \frac{V^4\sin^4\alpha\, tg^2\varphi}{r^2} + \frac{V^4 tg^2\varphi\sin^2 2\alpha}{4r^2}} =$$

$$= \frac{V^2}{r}\sqrt{1 + tg^2\varphi\sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \boxed{\frac{V^2}{r}\sqrt{1+\sin^2\alpha\, tg^2\varphi}}$$

$$V = const \Rightarrow a = a_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = V^2\cdot\frac{r}{V^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\, tg^2\varphi}}$$

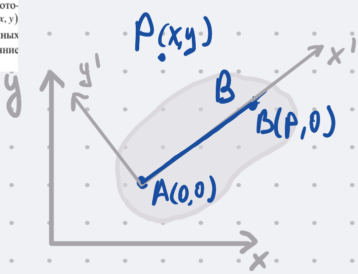
$$\boxed{\rho = \frac{r}{\sqrt{1+\sin^2\alpha\, tg^2\varphi}}}$$

№3.2

3.2. Плоская фигура движется в своей плоскости. В некоторый момент отношение величин скоростей двух её точек $A(x,y)$ и $B(x,y)$ равно $\lambda \neq 1$. Найти геометрическое место возможных положений мгновенного центра скоростей, если расстояние между точками равно a.

Дано: $\dfrac{v_B}{v_A} = \lambda \neq 1$, $AB = a$,

$P(x,y)$ – ?



перейдем в СО x' связанную с телом, начало отсчета в т. A

М.Ц.С.: $v_A \cdot AP = v_B \cdot BP$; $v_B = \lambda v_A \Rightarrow AP = \lambda BP$

$AP^2 = x^2 + y^2 \qquad BP^2 = (a-x)^2 + y^2 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 = \lambda^2 a^2 - 2\lambda^2 ax + \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2$

$(1-\lambda^2)x^2 + 2\lambda^2 ax + (1-\lambda^2)y^2 = \lambda^2 a^2$

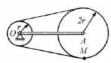
$x^2 + 2\dfrac{\lambda^2}{1-\lambda^2}ax + y^2 = \dfrac{\lambda^2 a^2}{1-\lambda^2}$; $\dfrac{\lambda^2 a^2}{1-\lambda^2} + \dfrac{\lambda^4 a^2}{(1-\lambda^2)^2} = \dfrac{\lambda^2 a^2 - \lambda^4 a^2 + \lambda^4 a^2}{(1-\lambda^2)^2} = \left(\dfrac{\lambda a}{1-\lambda^2}\right)^2$

$$\boxed{\left(x + \frac{\lambda^2 a}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\lambda a}{1-\lambda^2}\right)^2}$$

3.2. Окружность $\left(x + \dfrac{a\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\dfrac{a\lambda}{1-\lambda^2}\right)^2$ в системе координат, связанной с фигурой так, что $A(0,0)$, $B(a,0)$.

№ 3.20

3.20. Кривошип OA длины l вращается вокруг центра O неподвижной шестерёнки радиуса r и несет на конце A ось другой шестерёнки радиуса $R = 2r$. Угловая скорость и угловое ускорение кривошипа в рассматриваемый момент – ω и ε. Шестерёнки соединены между собой охватывающей их цепью. Найти величины скорости и ускорения точки M подвижной шестерёнки в момент, когда $AM \perp OA$.

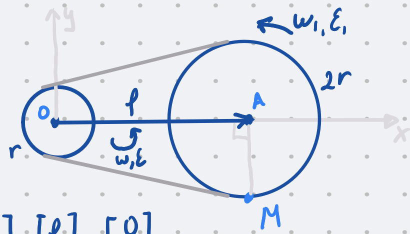


К задаче 3.20

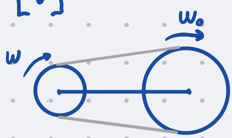
Дано: $l, r, \omega, \varepsilon$

$AM \perp OA$

v_M, W_M – ?



1) $\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{\omega}_1 \times \bar{AM}$; $\bar{V}_A = \cancel{\bar{V}_0}^{\,0} + \bar{\omega} \times \bar{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ l\omega \\ 0 \end{bmatrix}$



в СО кривошипа: $\omega r = \omega_0 \cdot 2r \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{2}\omega$

в НСО: $\bar{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} = \bar{\omega} + \bar{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\omega}{2} \end{bmatrix}$

$\bar{\omega}_1 \times \bar{AM} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{V}_M = \begin{bmatrix} r\omega \\ l\omega \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{V_M = \omega\sqrt{l^2 + r^2}}$

2) $\overline{W}_M = \overline{W}_A + \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{\rho} - \omega_1^2 \overline{\rho}$

$$\overline{W}_A = \overline{\varepsilon} \times \overline{\rho} - \omega^2 \overline{\rho} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \omega^2 \rho \\ \rho\varepsilon + 0 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \rho \\ \rho\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_M = \begin{bmatrix} -\omega^2 \rho \\ \rho\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \rho + \varepsilon r + 0 \\ \rho\varepsilon + 0 + \omega^2 r/2 \\ 0 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 \rho + \varepsilon r \\ \rho\varepsilon + \omega^2 r/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W_M = \sqrt{(\omega^2 \rho - \varepsilon r)^2 + \left(\rho\varepsilon + \frac{\omega^2 r}{2}\right)^2}$$

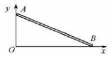
3.20. $v_M = \omega\sqrt{l^2 + r^2}$, $w_M = \sqrt{\left(\varepsilon l + \frac{\omega^2 r}{2}\right)^2 + \left(\omega^2 l - \varepsilon r\right)^2}$.

№3.21

Дано: $V_A = const$

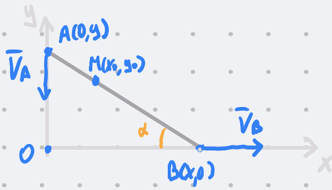
д-ть, что $W_M \perp Oy$,

$W_M \sim x^{-3}$



3.21. Концы A и B стержня движутся по двум взаимно перпендикулярным прямым Ox и Oy. Скорость точки A постоянна. Показать, что ускорение любой точки стержня перпендикулярно Oy и изменяется обратно пропорционально кубу расстояний этой точки от оси Oy.

К задаче 3.21



□1) A - м.ц.у., т.к. $\bar V_A = const$

$\bar{AM} \parallel \bar{AB} \Rightarrow \bar W_M \parallel \bar W_B \Rightarrow \bar W_M \perp Oy$

2) Пусть изв. коорд. т. A, B, M

стержень жесткий $\Rightarrow AM = const,\ AB = const$

$$\bar W_M = \overset{0}{\cancel{\bar W_A}} + \bar\varepsilon \times \bar{AM} - \omega^2 \bar{AM} \Rightarrow W_{M_x} = \varepsilon AM \sin\alpha - \omega^2 AM\cos\alpha$$

$$W_{M_y} = \varepsilon AM\cos\alpha - \omega^2 AM\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$ или A - м.ц.у. $\Rightarrow tg\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$

$$\bar V_B = \bar V_A + \bar\omega \times \bar{AB} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_A \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} AB_x \\ AB_y \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A = \omega AB_x = \omega x$$

$$\cos\alpha = \frac{x_0}{AM} = \frac{x}{AB} \Rightarrow \omega = \frac{V_A}{x} = \frac{V_A}{x_0}\cdot\frac{AM}{AB}$$

$$W_{M_x} = tg\alpha\cdot\omega^2\cdot AM\cdot\sin\alpha - \omega^2 AM\cos\alpha = \omega^2 AM\left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right) =$$

$$= \omega^2 AM\left(\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right) = \omega^2 AM\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 2\cos\alpha\right) =$$

$$= \omega^2 AM\left(\frac{AM}{x_0} - 2\frac{x_0}{AM}\right) = \boxed{\frac{AM^4}{AB^2} V_A^2 \left(\frac{1}{x_0^3} - \frac{2}{AM^2}\cdot\frac{1}{x_0}\right)}$$

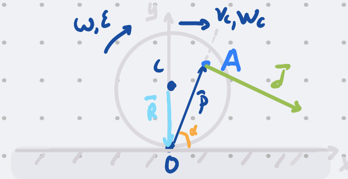
3.25. Диск радиуса R катится по прямой без скольжения. Скорость и ускорение центра C диска в данный момент равны $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{w}_C$. Найти нормальное и тангенциальное ускорения точки $A(x, y)$ диска ($x \neq 0, \quad y \neq 0$).

№3.25

Дано: V_c, W_c, R

$W_n, W_\tau - ?$

Без проскальзывания: $\omega = \frac{V_c}{R}$, $\varepsilon = \frac{W_c}{R}$



$$\bar{W}_A = \bar{W}_c + \bar{\varepsilon} \times \bar{CA} - \omega^2 \cdot \bar{CA} = \begin{bmatrix} \varepsilon R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y-R \\ 0 \end{bmatrix} - \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y-R \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cancel{\varepsilon R} + y\varepsilon - \cancel{\varepsilon R} - \omega^2 x \\ \omega^2 R - \omega^2 y - x\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\varepsilon - \omega^2 x \\ \omega^2 R - x\varepsilon - \omega^2 y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\rho} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : W_\rho = \frac{1}{\rho} \bar{W}_c \cdot \bar{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left[(y\cancel{\varepsilon} - \omega^2 x)x - (\cancel{x\varepsilon} + \omega^2 y - \omega^2 R)y \right] = \frac{-\omega^2}{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2-yR) \Rightarrow$$

$$\boxed{W_n = \frac{V_c^2 (x^2+y^2-yR)}{R^2 \sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} \perp \bar{\rho}$$

$$W_d = \frac{1}{d} \bar{W}_c \cdot \bar{d} = \frac{1}{d} \left[(y\varepsilon - \omega^2 x)y + (x\varepsilon + \omega^2 y - \omega^2 R)x \right] = \frac{\varepsilon (x^2+y^2) - \omega^2 R x}{d} \Rightarrow$$

$$\boxed{W_\tau = \frac{W_c (x^2+y^2) - V_c^2 x}{R \sqrt{x^2+y^2}}}$$

3.25. $w_{A\tau} = \dfrac{w_C (x^2+y^2) - v_C{}^2 x}{R\sqrt{x^2+y^2}}$, $w_{An} = \dfrac{v_C{}^2 (x^2+y^2-yR)}{R^2 \sqrt{x^2+y^2}}$.

3.36. Точка движется в плоскости. Известны её скорость $\mathbf{v}(t)$ и радиус $\rho(t)$ кривизны её траектории. Найти угловую скорость и угловое ускорение сопровождающего точку трехгранника ($\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$).

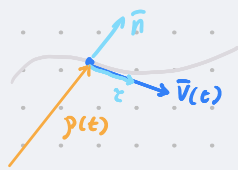
К задаче 3.35

№3.36

Дано: $\bar{V}(t)$, $\rho(t)$

$\bar{\varepsilon}, \bar{\omega} - ?$

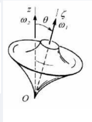
$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = \frac{V}{\rho} \Rightarrow \bar{\omega} = \bar{b} \cdot \frac{|\bar{V}|}{\rho} = \bar{b} \cdot \frac{\bar{V} \cdot \bar{\tau}}{\rho} \\ &\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \bar{b} \left(\frac{\dot{\bar{V}} \cdot \bar{\tau}}{\rho} - \frac{\bar{V} \cdot \bar{\tau} \dot{\rho}}{\rho^2} \right) \end{aligned}}$$



3.36. $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{b}\dfrac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}}{\rho}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b}\left(\dfrac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\tau}}{\rho} - \dfrac{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} \dot{\rho}}{\rho^2} \right)$.

№ 4.4

4.4. Юла вращается вокруг своей оси симметрии $O\zeta$ с постоянной по величине угловой скоростью ω_1. Ось $O\zeta$ равномерно вращается вокруг неподвижной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$, образуя с ней постоянный угол θ (регулярная прецессия). Найти угловую скорость и угловое ускорение юлы.



К задаче 4.4

Дано: $\omega_1, \omega_2, \theta$

$\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$ – ?

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \cos\theta}}$$

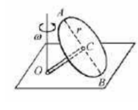
Введем $\bar{e}_{\omega_1} = \dfrac{\bar{\omega}_1}{\omega_1}$

$$\bar{\varepsilon} = (\omega_1 \cdot \bar{e}_{\omega_1})^{\cdot} = \underbrace{\dot{\omega}_1}_{=0,\ \text{т.к. } \omega = const} \bar{e}_{\omega_1} + \omega_1 \dot{\bar{e}}_{\omega_1} = \omega_1 \cdot \bar{\omega}_2 \times \bar{e}_{\omega_1} = \bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1 \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \sin\theta}$$

4.4. $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\cos\theta}$, $\varepsilon = \omega_2\omega_1\sin\theta$

№ 4.10

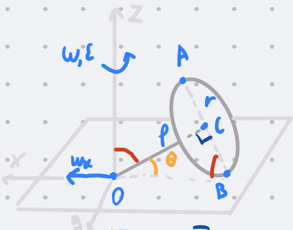
4.10. Тонкое колесо радиуса r, жестко насаженное под прямым углом на стержень OC длины $l = r\sqrt{3}$, катится по плоскости без скольжения. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение стержня OC, описывающего коническую поверхность с неподвижной вершиной O, равны по величине ω и ε. Определить величины угловой скорости, углового ускорения колеса, а также величины ускорений его точек A и B.



К задаче 4.10

Дано: $r,\ l = r\sqrt{3},\ \omega, \varepsilon$

$\omega_к, \varepsilon_к, w_A, w_B$ – ?



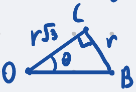
$$\bar{V}_C = \underbrace{\bar{V}_O}_{=0} + \bar{\omega} \times \bar{OC} = \underbrace{\bar{V}_B}_{=0} + \bar{\omega}_к \times \bar{BC} \Rightarrow \omega \cdot OC \cdot \cos\theta = \omega_к \cdot BC \cos\theta$$

$$\omega_к = \omega \cdot \frac{OC}{BC} = \frac{l}{r}\omega \Rightarrow \boxed{\omega_к = \sqrt{3}\omega}$$

Введем $\bar{e}_{\omega_к} = \dfrac{\bar{\omega}_к}{\omega_к} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_к = \dot{\omega}\bar{e}_{\omega_к} + \omega_к \dot{\bar{e}}_{\omega_к} = \sqrt{3}\varepsilon \cdot \bar{e}_{\omega_к} + \bar{\omega} \times \bar{\omega}_к$

$$\varepsilon_к = \sqrt{(\sqrt{3}\cdot\varepsilon)^2 + (\omega \cdot \sqrt{3}\omega)^2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_к = \sqrt{3(\varepsilon^2 + \omega^4)}}$$

$$\bar{W}_B = \underbrace{\bar{W}_O}_{=0} + \bar{\varepsilon}_к \times \bar{OB} + \bar{\omega}_к \times \underbrace{(\bar{\omega}_к \times \bar{OB})}_{=0} = \bar{\varepsilon}_к \times \bar{OB} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}\varepsilon \\ \omega_к \cdot \omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r/\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\omega_к \cdot \omega \cdot r}{\sin\theta} \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow tg\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30° \Rightarrow \boxed{W_B = \frac{\omega_к \cdot \omega \cdot r}{\sin\theta} = 2\sqrt{3}\cdot\omega^2 r}$$

$$\bar{W}_A = \bar{W}_B + \overset{①}{\bar{\varepsilon}_к \times \bar{BA}} + \overset{②}{\bar{\omega}_к} \times \overset{③}{(\bar{\omega}_к \times \bar{BA})} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\omega^2 r \\ -3\varepsilon r \\ -\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega^2 r \\ -3\varepsilon r \\ -2\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix}$$

① $\begin{bmatrix} \sqrt{3}\varepsilon \\ \sqrt{3}\omega^2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2r\sin\theta \\ 0 \\ 2r\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega^2 r \\ -3\varepsilon r \\ -\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix}$

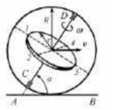
② $\begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2r\sin\theta \\ 0 \\ 2r\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3\omega r \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ ③ $\begin{bmatrix} \sqrt{3}\omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -3\omega r \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\sqrt{3}\omega^2 r \end{bmatrix}$

$$\boxed{W_A = r\sqrt{9\omega^4 + 9\varepsilon^2 + 12\omega^4} = r\sqrt{9\varepsilon^2 + 21\omega^4}}$$

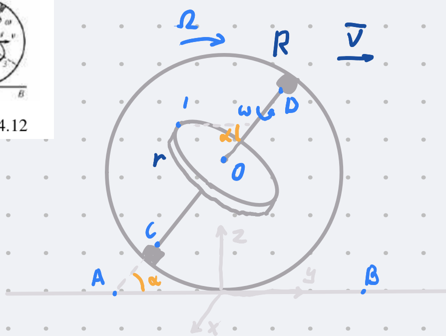
4.10. $\omega_a = \sqrt{3}\omega$, $\varepsilon_a = \sqrt{3(\varepsilon^2 + \omega^4)}$, $w_A = r\sqrt{9\varepsilon^2 + 21\omega^4}$, $w_B = 2\sqrt{3}\omega^2 r$.

№4.12

4.12. Тонкий обруч радиуса R катится без скольжения по прямой AB. Скорость центра обруча постоянна и равна $\mathbf{v}$. В плоскости обруча укреплена ось CD, вокруг которой с постоянной по величине угловой скоростью ω вращается диск радиуса r. Центры диска и обруча совпадают, плоскость диска перпендикулярна CD. В положении, когда ось CD образует угол α с прямой AB, найти скорость и ускорение точек 1, 3 и 2, 4 диска, соответственно расположенных на концах диаметра, лежащего в плоскости обруча, и диаметра, перпендикулярного плоскости обруча.



К задаче 4.12



Дано: $\bar{V}, R, r, \alpha$

V_1, w_1 - ?

В задавальнике нужно только для 1 точки

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega} + \bar{\Omega}$$

Без скольжения: $\Omega = \frac{V}{R}$,

$$\bar{\Omega} = \begin{bmatrix} -V/R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega\cdot\cos\alpha \\ \omega\cdot\sin\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{\omega}_a = \begin{bmatrix} -V/R \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\bar{V}_1 = \bar{V} + \bar{\omega}_a \times \bar{O}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -V/R \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -r\sin\alpha \\ r\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega r \\ V + \frac{V}{R} r\cos\alpha \\ \frac{V}{R}\cdot r\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$V_1^2 = \omega^2 r^2 + \left(V + \frac{V}{R} r\cos\alpha\right)^2 + V^2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin^2\alpha = \omega^2 r^2 + V^2 + 2\frac{V^2}{R} r\cos\alpha + \frac{V^2}{R^2} r^2\cos^2\alpha +$$

$$+ \frac{V^2}{R^2} r^2 \sin^2\alpha = \omega^2 r^2 + V^2 + 2V^2 \frac{r}{R}\cos\alpha + V^2 \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow$$

$$V_1 = \sqrt{\omega^2 r^2 + V^2 + 2V^2 \frac{r}{R}\cos\alpha + \left(V\frac{r}{R}\right)^2}$$

$$\bar{\varepsilon}_a = \dot{\bar{\omega}} + \underset{0}{\dot{\bar{\Omega}}} = \underset{0}{\dot{\omega}} \bar{e} + \omega \dot{\bar{e}} = \bar{\Omega} \times \bar{\omega}$$

$$\bar{W}_1 = \underbrace{\bar{W}}_{0,\ \text{т.к. } \bar{V}=const} + \overbrace{\bar{\varepsilon}_a \times \bar{O}_1}^{0,\ \text{т.к.}\ \parallel} + \bar{\omega}_a \times (\bar{\omega}_a \times \bar{O}_1) = \bar{\omega}_a \times (\bar{\omega}_a \times \bar{O}_1) = \begin{bmatrix} -V/R \\ \omega\cos\alpha \\ \omega\sin\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \omega r \\ \frac{V}{R} r\cos\alpha \\ \frac{V}{R}\cdot r\sin\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ r\sin\alpha\left(\omega^2 + \frac{V^2}{R^2}\right) \\ -r\cos\alpha\left(\omega^2 + \frac{V^2}{R^2}\right) \end{bmatrix} \Rightarrow W_1 = r\left(\frac{V^2}{R^2} + \omega^2\right)$$

4.12. $v_1 = \sqrt{v^2 + 2v^2 \frac{r}{R}\cos\alpha + \left(v\frac{r}{R}\right)^2 + \omega^2 r^2}$,

$w_1 = w_3 = r\left(\frac{v^2}{R^2} + \omega^2\right)$

№4.23

4.23. При движении прямой (оси Ox) известны ускорения $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$ точек с координатами x_1 и x_2 соответственно. Найти ускорение точки этой прямой с произвольным значением координаты x.

$\bar{W}_1, \bar{W}_2, X_1, X_2$

$\bar{W}(x)$ - ?

$$\bar{W}_2 = \bar{W}_1 + \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{X_1X_2} + \omega_1 \times (\omega_1 \times \overline{X_1X_2}) \Rightarrow \bar{W}_2 - \bar{W}_1 = \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{X_1X_2} + \omega_1 \times (\omega_1 \times \overline{X_1X_2})$$

$$\overline{X_1X_2} = k\cdot\overline{X_1X} \Rightarrow k = \frac{X_2 - X_1}{X - X_1}$$

$$\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{X_1 X} + \bar{w}_1(\bar{w}_1 \times \overline{X_1 X}) = \bar{w}_1 + \frac{1}{k}\left[\varepsilon \times \overline{X_1 X_2} + w_1 \times (w_1 \times \overline{X_1 X_2})\right] = \bar{w}_1 + \frac{1}{k}(\bar{w}_2 - \bar{w}_1)$$

$$\bar{w} = \bar{w}_1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\bar{w}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\bar{w}_2 \Rightarrow \boxed{\bar{w} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\bar{w}_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\bar{w}_2}$$

4.23. $\mathbf{w} = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\mathbf{w}_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\mathbf{w}_2$.

№4.30

4.30. В рассматриваемый момент угловая скорость и угловое ускорение тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равны $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ соответственно. Показать, что вращательная компонента ускорения какой-либо точки тела совпадает с касательной, а осестремительная компонента – с нормальной в том и только в том случае, когда эта точка лежит в плоскости, содержащей векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Дано: $\bar{\omega}, \bar{\varepsilon}$

д-ть: $\bar{W}_{вр} = \bar{W}_{\tau}$, $\bar{W}_{oc} = \bar{W}_n \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}, \bar{\omega}, \bar{r}$ - компланарны

$\square$ $\bar{W}_{вр} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$, $\bar{W}_{\tau} = \dot{V} \cdot \bar{\tau} = ([\bar{\varepsilon} \times \bar{r}] \cdot \bar{\tau}) \cdot \bar{\tau}$

$\bar{W}_{вр} = \bar{W}_{\tau} \Leftrightarrow \bar{\varepsilon} \times \bar{r} = ([\bar{\varepsilon} \times \bar{r}] \cdot [\bar{\omega} \times \bar{r}]) \cdot \dfrac{\bar{\omega} \times \bar{r}}{|\bar{\omega} \times \bar{r}|^2}$ $/ \cdot \bar{\varepsilon}$ слева

$\bar{\varepsilon} \cdot (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) = \bar{\varepsilon} \cdot [\bar{\omega} \times \bar{r}] \cdot ([\bar{\varepsilon} \times \bar{r}] \cdot [\bar{\omega} \times \bar{r}]) \cdot \dfrac{1}{|\bar{\omega} \times \bar{r}|^2}$

$\bar{\varepsilon} \cdot (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}) = 0 \Rightarrow \bar{W}_{вр} = \bar{W}_{\tau} \Leftrightarrow \bar{\varepsilon} \cdot [\bar{\omega} \times \bar{r}] = 0 \Leftrightarrow \bar{\varepsilon}, \bar{\omega}, \bar{r}$ - компланарны

$\bar{W} = \bar{W}_{вр} + \bar{W}_{oc} = \bar{W}_{\tau} + \bar{W}_n = \bar{W}_{вр} + \bar{W}_n \Rightarrow \bar{W}_n = \bar{W}_{oc}$ $\blacksquare$

4.56. Ориентация осей $Oxyz$, жестко связанных с твердым телом, относительно поступательно движущейся системы отсчета $OXYZ$ может быть задана ортогональной матрицей $A(t)$ – таблицей направляющих косинусов. Показать, что угловое перемещение твердого тела из начального положения в конечное может быть осуществлено одним поворотом (теорема Эйлера).

Указание. При решении воспользоваться тем фактом, что орт $\mathbf{u}$ оси конечного поворота удовлетворяет уравнению $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

найдем собств. вектор $\bar{u}$

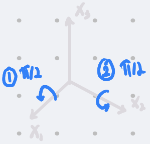
$A\bar{u} = \bar{u}$

$\det(A\bar{u} - \bar{u}) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} A + \lambda \operatorname{tr} A - 1 = 0$

$\lambda_1 = 1$ (λ_2 и λ_3 нет необх. искать) $\Rightarrow$

$\bar{u}$ - остается неизм. при повороте тела $\Rightarrow$ поворот вокруг $\bar{u}$

T2. Твердое тело поворачивают на угол $\pi/2$ относительно оси x_1 неподвижного базиса x, а затем – на угол $\pi/2$ вокруг оси x_2 того же базиса. Найти матрицу ориентации базиса ξ, связанного с телом, относительно x, если в начальный момент базисы x и ξ совпадают. Найти вектор соответствующего конечно поворота и углы Эйлера.



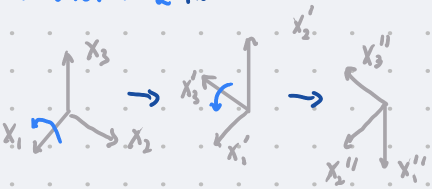
Решение 1: Активная точка зрения

(предпочтительней, т.к. повороты даны в одном базисе)

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix}\cos\varphi&0&\sin\varphi\\0&1&0\\-\sin\varphi&0&\cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{bmatrix}}$$

Решение 2: Пассивная точка зрения



$$A_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{bmatrix}}$$

2) ψ – поворот вокруг $\bar{i}_3$ $\qquad \psi=0$

θ – поворот вокруг $\bar{i}_1'$ $\quad\Rightarrow\quad \theta=90^\circ$

φ – поворот вокруг $\bar{i}_3''$ $\qquad \varphi=90^\circ$

1-й способ

$$\Lambda=\Lambda_\theta\circ\Lambda_\varphi=\left(\cos\frac{\pi}{4}+\bar{i}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)\circ\left(\cos\frac{\pi}{4}-\bar{k}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(1+\bar{i})\circ(1-\bar{k})=$$

$$=\frac{1}{2}(1-\bar{k}+\bar{i}+\bar{j})\Rightarrow\bar{\rho}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\qquad\alpha=2\arccos\lambda_0=2\arccos\frac{1}{2}=2\cdot60^\circ=120^\circ$$

2-й способ

$$\cos\varphi=\frac{\operatorname{tr}A-1}{2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=120^\circ$$

$$x=\pm\frac{a_{32}-a_{23}}{2\sin\varphi},\quad y=\pm\frac{a_{13}-a_{31}}{2\sin\varphi},\quad z=\pm\frac{a_{21}-a_{12}}{2\sin\varphi}.$$

$$\bar{\rho}=\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

4.66. Поворот твердого тела задается углами Эйлера ψ, θ и φ. С помощью кватернионов найти угол и направляющие косинусы оси конечного поворота тела.

Дано:

$$\bar{i}_3 \xrightarrow{\psi} \bar{i}_1' \xrightarrow{\theta} \bar{i}_3'' \xrightarrow{\varphi}$$

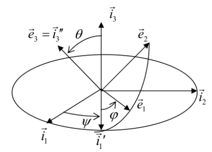


Рис. 3

$$\Lambda_\psi = \overset{c_1}{\cos\frac{\psi}{2}} + \bar{i}_3 \overset{s_1}{\sin\frac{\psi}{2}}$$

$$\Lambda_\theta = \overset{c_2}{\cos\frac{\theta}{2}} + \bar{i}_1' \overset{s_2}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Lambda_\varphi = \overset{c_3}{\cos\frac{\varphi}{2}} + \bar{i}_3'' \overset{s_3}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

углы Эйлера $\Rightarrow$ пассивная т.зр.

$$\Lambda = \Lambda_\psi \circ \Lambda_\theta \circ \Lambda_\varphi$$

$$\Lambda \circ M = \lambda_0\mu_0 - (\vec{\lambda}, \vec{\mu}) + \lambda_0\vec{\mu} + \mu_0\vec{\lambda} + \vec{\lambda}\times\vec{\mu}.$$

все штрихи можно убрать, т.к. кватернион поворота имеет одинаковые координаты в i, i', i''

$$\Lambda_\psi \circ \Lambda_\theta = c_1c_2 + c_1s_2\bar{i}_1 + c_2s_1\bar{i}_3 + s_1s_2\bar{i}_2$$

$$\Lambda = c_1c_2c_3 - c_2s_1s_3 + c_1c_2s_3\bar{i}_3 + c_3c_1s_2\bar{i}_1 + c_3c_2s_1\bar{i}_3 + c_3s_1s_2\bar{i}_2 + s_2s_1s_3\bar{i}_1 -$$

$$- c_1s_2s_3\bar{i}_2 = c_2(c_1c_3 - s_1s_3) + \bar{i}_3\cdot c_2(c_1s_3 + s_1c_3) + \bar{i}_2\cdot s_2(s_1c_3 - c_1s_3) +$$

$$+ \bar{i}_1\cdot s_2(c_1c_3 + s_1s_3)$$

Компоненты кватерниона

$$\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\psi+\varphi}{2} \ // \ c_+$$

$$\lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\psi-\varphi}{2} \ // \ c_-$$

$$\lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\psi-\varphi}{2} \ // \ s_-$$

$$\lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\cdot\sin\frac{\psi+\varphi}{2} \ // \ s_+$$

Нормировка:

$$s_2^2\cdot c_-^2 + s_2^2s_-^2 + c_2^2s_+^2 = s_2^2 + c_2^2s_+^2 =$$

$$= s_2^2 + c_2^2s_+^2 - c_2^2 + c_2^2 = 1 - c_2^2(1 - s_+^2) =$$

$$= 1 - c_2^2c_+^2 = 1 - \lambda_0^2$$

$$\alpha = 2\arccos\lambda_0$$

$$\gamma_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{1-\lambda_0^2}} \quad i = 1, 2, 3$$

4.66. Угол и направляющие косинусы оси поворота – $\alpha = 2\arccos\lambda_o$, $\gamma_i = \lambda_i\big/\sqrt{1-\lambda_o^2}$, где $\lambda_0 = \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi+\varphi}{2}$, $\lambda_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi-\varphi}{2}$, $\lambda_2 = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi-\varphi}{2}$, $\lambda_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi+\varphi}{2}$ – компоненты кватерниона поворота.

4.70. Тонкий диск обкатывает без скольжения неподвижный конус с углом 90° при вершине так, что линия касания вращается вокруг оси конуса с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Найти угол и положение оси конечного поворота диска в момент времени $t=\frac{\pi}{\Omega}$.

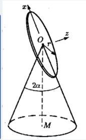
$\omega=\Omega\sin\alpha=\frac{\Omega}{\sqrt2}$

$\omega_r=\omega=\frac{\Omega}{\sqrt2}$

пассивная т. зр.,

Дано: Ω, $t=\frac{\pi}{\Omega}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$

α, γ_i -?



поворот вокруг верт. оси:

$\varphi_1=\Omega t=\pi$, $\Lambda_1=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt2}(\bar i+\bar k)\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{\sqrt2}\bar i-\frac{1}{\sqrt2}\bar k$

поворот вокруг оси Z: $\varphi_2=\omega_r t=\frac{\pi}{\sqrt2}$, $\Lambda_2=\underbrace{\cos\frac{\pi}{2\sqrt2}}_{c}+\bar k\cdot\underbrace{\sin\frac{\pi}{2\sqrt2}}_{s}$

$\Lambda=\Lambda_1\circ\Lambda_2=\frac{1}{\sqrt2}\left[+s-c\bar i-c\bar k+s\bar j\right]$

$\varphi=2\arccos\lambda_0\Rightarrow\cos\varphi=2\cdot\frac{s^2}{2}-1=s^2-1=-c^2=-\cos^2\frac{\pi}{2\sqrt2}$

$\gamma_1=\gamma_3=-\frac{\sqrt2\,c}{\sqrt2\sqrt{1+c^2}}=-\frac{\cos\frac{\pi}{2\sqrt2}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{2\sqrt2}}}$ Где ошибка?

$\gamma_2=\frac{\sin\frac{\pi}{2\sqrt2}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{\pi}{2\sqrt2}}}$

4.70. $\cos\varphi=-\cos^2\left(\pi/\sqrt8\right)$,

$$\gamma_1=\gamma_3=\frac{\cos\left(\pi/\sqrt8\right)}{\sqrt{1+\cos^2\left(\pi/\sqrt8\right)}},\quad \gamma_2=\frac{\sin\left(\pi/\sqrt8\right)}{\sqrt{1+\cos^2\left(\pi/\sqrt8\right)}}.$$

№4.85

4.85. Положение твердого тела с неподвижной точкой определяется кватернионом $\Lambda(t)=\cos\frac{\varphi(t)}{2}+\mathbf{e}(t)\sin\frac{\varphi(t)}{2}$, то есть его положение в момент времени t есть поворот из начального положения на угол $\varphi(t)$ вокруг вектора $\mathbf{e}(t)$. Найти угловую скорость тела.

$\Lambda=\overbrace{\cos\frac{\varphi(t)}{2}}^{c}+\bar e(t)\cdot\underbrace{\sin\frac{\varphi(t)}{2}}_{s}$

$\bar\omega$ -?

$\bar R=\Lambda\circ\bar r^0\circ\tilde\Lambda$

$\bar V=\dot{\bar r}=\dot\Lambda\circ\bar r^0\circ\tilde\Lambda+\Lambda\circ\bar r^0\circ\dot{\tilde\Lambda}=\dot\Lambda\circ\tilde\Lambda\circ\bar R-\bar R\circ\dot\Lambda\circ\tilde\Lambda$

$|\Lambda|=1\Rightarrow\Lambda\circ\tilde\Lambda=1\Rightarrow\dot\Lambda\circ\tilde\Lambda+\Lambda\circ\dot{\tilde\Lambda}=0$, где $\dot\Lambda=\dot\lambda_0+\sum_1^3\dot\lambda_k\bar i_k$

$\widetilde{(\dot\Lambda\circ\tilde\Lambda)}=(\Lambda\circ\dot{\tilde\Lambda})=-(\dot\Lambda\circ\tilde\Lambda)\Rightarrow\mathrm{sqal}(\dot\Lambda\circ\tilde\Lambda)=0\Rightarrow$

$V=2(\dot\Lambda\circ\tilde\Lambda)\times\bar R=\bar\omega\times\bar R$

$2s^2=2-2c^2=\cos\varphi-1$

$\bar\omega=(-s\cdot\dot\varphi+c\cdot\dot\varphi\,\bar e+2s\dot{\bar e})\circ(c-s\bar e)\overset{\mathrm{sqal}=0}{=}s^2\dot\varphi\bar e+c^2\dot\varphi\bar e+2sc\dot{\bar e}-2s^2\dot{\bar e}\times\bar e=$

$=\bar e\dot\varphi+\dot{\bar e}\sin\varphi+\bar e\times\dot{\bar e}(1-\cos\varphi)$

4.85. $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{e}\dot\varphi+\dot{\mathbf{e}}\sin\varphi+\mathbf{e}\times\dot{\mathbf{e}}(1-\cos\varphi)$.

T3

T3. Доказать свойство ассоциативности кватернионного умножения: для любых кватернионов Λ, M и N выполняется $\Lambda \circ (M \circ N) = (\Lambda \circ M) \circ N$.

$$\Lambda \circ M = \lambda_0\mu_0 - (\vec{\lambda}, \vec{\mu}) + \lambda_0\vec{\mu} + \mu_0\vec{\lambda} + \vec{\lambda} \times \vec{\mu}.$$

$\Lambda = \lambda_0 + \bar{\lambda}$

$M = \mu_0 + \bar{\mu}$

$N = \vartheta_0 + \bar{\vartheta}$

Д-ть: $\Lambda \circ (M \circ N) = (\Lambda \circ M) \circ N$

$$\Lambda \circ (M \circ N) = (\lambda_0 + \bar{\lambda}) \circ (\mu_0\vartheta_0 - \bar{\mu}\cdot\bar{\vartheta} + \mu_0\bar{\vartheta} + \vartheta_0\bar{\mu} + \bar{\mu}\times\bar{\vartheta}) =$$

$$= \lambda_0\mu_0\vartheta_0 - \lambda_0\bar{\mu}\cdot\bar{\vartheta} - \mu_0\bar{\lambda}\cdot\bar{\vartheta} - \vartheta_0\cdot\bar{\lambda}\bar{\mu} - \bar{\lambda}\cdot[\bar{\mu}\times\bar{\vartheta}] + \lambda_0\mu_0\bar{\vartheta} + \lambda_0\vartheta_0\bar{\mu} + \lambda_0\bar{\mu}\times\bar{\vartheta} + \mu_0\vartheta_0\bar{\lambda} - (\bar{\mu}\cdot\bar{\vartheta})\bar{\lambda} + \mu_0\bar{\lambda}\times\bar{\vartheta} + \vartheta_0\bar{\lambda}\times\bar{\mu} + \bar{\mu}(\bar{\lambda}\cdot\bar{\vartheta}) - \bar{\vartheta}(\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu})$$

$$(\Lambda\circ M)\circ N = (\lambda_0\mu_0 - \bar{\lambda}\bar{\mu} + \lambda_0\bar{\mu} + \mu_0\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\times\bar{\mu})\circ(\vartheta_0 + \bar{\vartheta}) = \lambda_0\mu_0\vartheta_0 - \vartheta_0\bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda_0\bar{\mu}\cdot\bar{\vartheta} - \mu_0\bar{\lambda}\cdot\bar{\vartheta} - [\bar{\lambda}\times\bar{\mu}]\cdot\bar{\vartheta} + \lambda_0\mu_0\bar{\vartheta} - (\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu})\bar{\vartheta} + \vartheta_0\lambda_0\bar{\mu} + \vartheta_0\mu_0\bar{\lambda} + \vartheta_0\cdot\bar{\lambda}\times\bar{\mu} + \lambda_0\bar{\mu}\times\bar{\vartheta} + \mu_0\bar{\lambda}\times\bar{\vartheta} - \bar{\lambda}(\bar{\vartheta}\cdot\bar{\mu}) + \bar{\mu}(\bar{\vartheta}\cdot\bar{\lambda})$$

$$(\bar{\vartheta}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = (\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\vartheta}) = \bar{\lambda}\cdot[\bar{\mu}\times\bar{\vartheta}]$$

T4. Решить кинематические уравнения Пуассона $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda \circ \omega$ и $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\omega \circ \Lambda$ для $\omega = \mathrm{const}$ и дать геометрическую интерпретацию полученным решениям.

1) $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega}_x \circ \Lambda$, $\bar{\omega}_x = const$

вращение вокруг неподв. оси

проверим, что $\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \frac{\bar{\omega}_x}{\omega_x}\sin\frac{\varphi}{2}$, где $\varphi = \int_0^t \omega_x(t)\,dt$ — решение

$$\frac{1}{2}\bar{\omega}_x\circ\Lambda = -\frac{1}{2}\omega_x\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\bar{\omega}_x\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\dot{\Lambda} = -\frac{1}{2}\dot{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{\bar{\omega}_x}{\omega_x}\dot{\varphi}\cos\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2}\omega_x\sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\bar{\omega}_x\cos\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\bar{\omega}_x\circ\Lambda$$

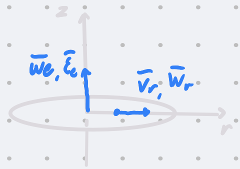
2) $\dot{\Lambda} = \frac{1}{2}\Lambda\circ\bar{\omega}_\xi$, $\bar{\omega}_\xi = const$,

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \underbrace{\frac{d'\bar{\omega}}{dt}}_{=\bar{0},\ \text{т.к. } \bar{\omega}_\xi = const} + \overbrace{\bar{\omega}\times\bar{\omega}}^{\bar{0}} = \bar{0}$$

аналогично, вращение вокруг неподв. оси

$\Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \frac{\bar{\omega}_\xi}{\omega_\xi}\sin\frac{\varphi}{2}$, где $\varphi = \int_0^t \omega_\xi(t)\,dt$ — решение

2.9. В некоторый момент переносные угловая скорость и угловое ускорение соответственно равны $\boldsymbol{\omega}_e = \mathbf{e}_z\omega_e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{e}_z\varepsilon_e$. Какими должны быть относительные скорость $\mathbf{v}_r = \mathbf{e}_r v_r$ и ускорение $\mathbf{w}_r = \mathbf{e}_r w_r$ точки, движущейся по оси Or цилиндрической системы координат $Or\varphi z$, чтобы её абсолютное ускорение было равно нулю?



Дано: $\bar\omega_e = \bar e_z \omega_e$
$\bar\varepsilon_e = \bar e_z \varepsilon_e$
$\bar W_a = \bar 0$
по оси Or, цил. Orφz
$\bar V_r, \bar W_r$ -?

$$\bar W_a = \bar W_r + \bar W_e + \bar W_к = \bar 0$$

$$W_e = \cancel{\bar W_o}^{0} + \bar\varepsilon_e \times \bar p + \bar\omega_e \times (\bar\omega_e \times p) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -r\omega_e^2 \\ r\varepsilon_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

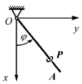
$$\bar W_к = 2\bar\omega_e \times \bar V_r = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2V_r\omega_e \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} W_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r\omega_e^2 \\ r\varepsilon_e \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2V_r\omega_e \\ 0 \end{bmatrix} = \bar 0 \Rightarrow$$

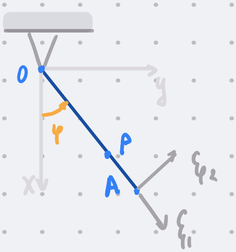
$$\boxed{\bar W_r = \bar e_r \omega^2 r \qquad \bar V_r = -\bar e_r \frac{\varepsilon_e r}{2\omega_e}}$$

2.9. $\mathbf{w}_r = \mathbf{e}_r \omega_e^2 r$, $\mathbf{v}_r = -\mathbf{e}_r \dfrac{\varepsilon_e r}{2\omega_e}$.

2.16. Стержень OA совершает колебания в плоскости Oxy по закону $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t)$. По стержню скользит колечко P. Пренебрегая размерами колечка, найти величины его абсолютной скорости и абсолютного ускорения, если $OP = \frac{1}{2}at^2$.



К задаче 2.16



Дано: $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t)$
$OP = \frac{1}{2}at^2$
V_a, W_a -?

Введем $O\xi$, связ со стержнем

$$\bar V_a = \bar V_r + \bar V_e; \quad \bar V_r = \begin{bmatrix} at \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar V_e = \cancel{\bar V_o}^{0} + \bar\omega \times \bar{OP} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} OP \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ OP\cdot\dot\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar V_a = \begin{bmatrix} at \\ \frac{1}{2}at^2\dot\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow V_a^2 = a^2t^2 + \frac{1}{4}a^2t^4\dot\varphi^2 = \frac{a^2t^2}{4}(4 + \dot\varphi^2)$$

$$\boxed{V_a = \frac{at}{2}\sqrt{4 + \varphi_0^2\omega^2\cos^2(\omega t)}}$$

$$\bar W_a = \bar W_r + \bar W_e + \bar W_к \qquad \bar W_r = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar W_e = \cancel{\bar W_o}^{0} + \bar\varepsilon \times \bar{OP} + \bar\omega_e \times (\bar\omega_e \times \bar{OP}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} OP \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ OP\cdot\dot\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot\varphi^2 OP \\ \ddot\varphi \cdot OP \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar W_к = 2\bar\omega \times \bar V_r = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\varphi \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} at \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\dot\varphi at \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar W_a = \begin{bmatrix} a - \dot\varphi^2 OP \\ \ddot\varphi\, OP + 2\dot\varphi a t \\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow W_a^2 = \left(a - \frac12\dot\varphi^2 a t^2\right)^2 + \left(\frac12\ddot\varphi a t^2 + 2\dot\varphi a t\right)^2 =$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\left(2 - [\varphi_0 w t \cdot \cos(wt)]^2\right)^2 + \left(4\varphi_0 w t\cos(wt) - \varphi_0 w^2 t^2 \sin(wt)\right)^2\right]$$

$$W_a = \frac a2 \sqrt{[2-(\varphi_0 w t\cos(wt))]^2 + \varphi_0^2 w^2 t^2 [4\cos(wt) - wt\sin(wt)]^2}$$

2.16. $v = \frac{at}{2}\sqrt{4+\varphi_0^2(\omega t)^2\cos^2(\omega t)}$,

$w = \frac a2\sqrt{\left[2-\varphi_0^2(\omega t)^2\cos^2(\omega t)\right]^2 + \varphi_o^2(\omega t)^2\left[4\cos(\omega t) - (\omega t)\sin(\omega t)\right]^2}$

2.38. Точка движется по эллипсу, уравнение которого в полярных координатах $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$. Движение происходит в соответствии с законом площадей $r^2\dot\varphi = C$, где C – постоянная величина. Эллипс вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через фокус. Найти величины абсолютных скоростей и ускорения точки в зависимости от r.

К такой приближенной модели приводит учет влияния несферичности Земли на движение спутника в плоскости земного экватора.

введем Oryz, связ с эллипсом.

$$\bar V_a = \bar V_r + \bar V_e \; ; \; \bar V_e = \cancel{\bar V_0}^0 + \bar w\times\bar r = \begin{bmatrix}0\\0\\w\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}r\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\rw\\0\end{bmatrix}$$

Дано: $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$

$r^2\dot\varphi = C$, $\bar w = const$

$V_a(r), W_a(r)$ -?

$\dot r = \frac{\dot\varphi p e\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2}$ $\qquad V_r^* = \dot r$

$\dot\varphi = \frac{C}{r^2}$ $\qquad V_\varphi = r\dot\varphi$

$r + re\cos\varphi = p \Rightarrow \cos\varphi = \frac{p-r}{re}$

$$\dot r^2 = \left(\frac{C}{r^2}\cdot r^2\frac{e\sin\varphi}{p}\right)^2 = \left(\frac{Ce}{p}\right)^2\left[1-\left(\frac{p-r}{re}\right)^2\right] = C^2\left[\left(\frac ep\right)^2 - \left(\frac{p-r}{pr}\right)^2\right] =$$

$$= C^2\left[\left(\frac ep\right)^2-\left(\frac1r-\frac1p\right)^2\right]$$

$$\bar V_a = \begin{bmatrix}\dot r\\ r\dot\varphi + rw\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow V_a = \sqrt{\left(wr+\frac Cr\right)^2 + C^2\left[\left(\frac ep\right)^2 - \left(\frac1r-\frac1p\right)^2\right]}$$

$$\bar W_a = \bar W_r + \bar W_e + \bar W_k$$

$$\bar W_e = \cancel{\bar W_0}^0 + \cancel{\bar\varepsilon_e}^0\times\bar r + \bar w\times(\bar w\times\bar r) = \begin{bmatrix}0\\0\\w\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\rw\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-w^2 r\\0\\0\end{bmatrix}$$

$V^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 \qquad W_r = \ddot r - r\dot\varphi^2$

В силу з-на площадей $W_\varphi = 0$

можно проверить:

$$W_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi \qquad \ddot\varphi = -\frac{2\dot r C}{r^3} \qquad W_\varphi = -\frac{2C}{r^2}\cdot\dot r + 2\dot r\frac{C}{r^2} = 0$$

$$\bar W_k = 2\bar\omega\times\bar V_r = 2\begin{bmatrix}0\\0\\\omega\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\dot r\\ r\dot\varphi\\ 0\end{bmatrix} = 2\omega\begin{bmatrix}-r\dot\varphi\\ \dot r\\ 0\end{bmatrix}$$

$$2\dot r\ddot r = \left[-C^2\left(\frac1r-\frac1p\right)^2\right]^\bullet = 2C^2\cdot\left(\frac1r-\frac1p\right)\cdot\frac{\dot r}{r^2}$$

$$\ddot r = C^2\left(\frac1r-\frac1p\right)\cdot\frac1{r^2}$$

$$W_r = C^2\left(\frac1r-\frac1p\right)\cdot\frac1{r^2} - r\frac{C^2}{r^4} = -\frac{C^2}{pr^2}$$

$$\bar W_a = \begin{bmatrix}W_r\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\omega^2 r\\0\\0\end{bmatrix} + 2\omega\begin{bmatrix}-r\dot\varphi\\ \dot r\\ 0\end{bmatrix}$$

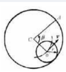
2.38. $v^2 = \left(\omega r + \frac{C}{r}\right)^2 + C^2\left[\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac1r - \frac1p\right)^2\right],$

$w^2 = \left(\omega^2 r + 2\omega\frac{C}{r} + \frac{C^2}{r^2 p}\right)^2 + 4\omega^2 C^2\left[\frac{e^2}{p^2} - \left(\frac1r - \frac1p\right)^2\right].$

$$W_a^2 = \left(2\frac{C^2}{r^3} + \omega^2 r + 2\omega r\dot\varphi\right)^2 + (2\omega\dot r)^2$$

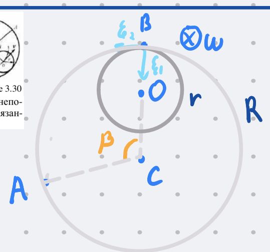
$$\boxed{W_a = \sqrt{\left(\omega^2 r + 2\omega\frac{C}{r} + \frac{C^2}{pr^2}\right)^2 + 4\omega^2 C^2\left[\left(\frac{e}{p}\right)^2 - \left(\frac1r - \frac1p\right)^2\right]}}$$

3.30. Цилиндр радиуса r катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиуса R. Угол между линией центров цилиндров CO и радиусом неподвижного цилиндра, проходящим через точку A, равен β. Скорость центра O движущегося цилиндра постоянна по величине и равна v. Найти величины скорости и ускорения точки A неподвижного цилиндра относительно системы координат, связанной с подвижным цилиндром.



К задаче 3.30

Дано: $r, R, \beta,$
$V = const,$
$V_A^r, W_A^r - ?$



1) $\bar V_A^a = \bar V_A^e + \bar V_A^r = \bar 0 \Rightarrow \bar V_A^r = -\bar V_A^e$

$\bar V_A^e = \cancelto{0}{\bar V_B} + \bar\omega\times\bar{BA}$

$\omega = \frac{V}{r}, \quad AB = 2R\sin\frac{\beta}{2} \Rightarrow \boxed{V_A^r = 2V\frac{R}{r}\sin\frac{\beta}{2}}$

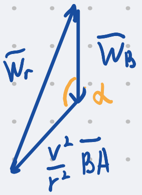
2) $\bar W_A = \bar W_e + \bar W_r + \bar W_k = \bar 0$

$$\bar W_e = \bar W_B + \cancelto{0}{\bar\varepsilon}\times\bar{BA} - \omega^2\bar{BA}$$

$$\bar W_k = 2\bar\omega\times\bar V_{Ar} = -2\bar\omega\times(\bar\omega\times\bar{BA}) = -2\bar\omega\,(\cancelto{0}{\bar\omega\,\bar{BA}}) + 2\omega^2\bar{BA}$$

$$\overline{W}_r = -\overline{W}_e - \overline{W}_k = -\left[\overline{W}_B + \frac{V^2}{r^2}\overline{BA}\right]$$

$$\overline{W}_B = \overline{W}_0 - \omega^2\overline{OB}, \quad \overline{W}_0 = -\frac{V^2}{R-r}\frac{\overline{OB}}{OB} \Rightarrow \overline{W}_B = \overline{BO}\cdot V^2\left(\frac{1}{(R-r)r}+\frac{1}{r^2}\right) = \frac{RV^2}{(R-r)r^2}\cdot\overline{BO}$$



$$\varphi = 90 - \frac{\beta}{2}, \quad \alpha = 180 - \varphi = 90 + \frac{\beta}{2}$$

$$\cos\alpha = -\sin\frac{\beta}{2} = -s$$

$$W_r^2 = \left(\frac{RV^2}{(R-r)r^2}\cdot BO\right)^2 + \left(\frac{V^2}{r^2}\cdot BA\right)^2 + 2\sin\frac{\beta}{2}\,\frac{V^2}{r^2}BA\cdot\frac{Rr}{(R-r)r^2}V^2 =$$

$$= \frac{R^2V^4}{r^4(R-r)^2}\left[r^2 + \underbrace{4(R-r)^2s^2 + 4s^2(R-r)\cdot r}_{4(R-r)s^2(R-\cancel{r}+\cancel{r})}\right]$$

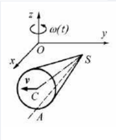
$$\boxed{W_r = \frac{RV^2}{r^2(R-r)}\sqrt{r^2 + 4R(R-r)\sin^2\frac{\beta}{2}}}$$

3.30. $v_A = 2v\frac{R}{r}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$, $\quad w_A = \frac{v^2R}{r^2(R-r)}\sqrt{r^2+4R(R-r)\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}$.

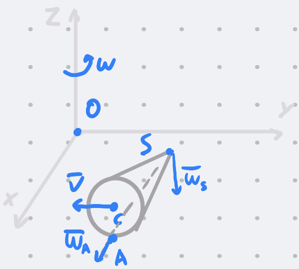
4.25. Горизонтальная плоскость вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$. По плоскости катится без скольжения конус так, что центр его основания движется относительно плоскости с постоянной по величине скоростью v в направлении, указанном на рисунке. Высота конуса h, угол при вершине 2β. Найти величины абсолютных угловой скорости и углового ускорения конуса.

Дано: $\overline{\omega}(t)$, $V = const$, h, 2β

$\omega_a, \varepsilon_a - ?$



К задаче 4.25



$$\overline{\omega}_a = \overset{\overline{\omega}}{\overset{\parallel}{\overline{\omega}_e}} + \overline{\omega}_r$$

$$\overline{V}_c = \overline{\omega}_A \times \overline{AC} \Rightarrow$$

$$V = \omega_A\cdot SC\cdot\sin\beta \Rightarrow \omega_A = \frac{V}{h\sin\beta}$$

$$\boxed{\omega_a = \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{V}{h\sin\beta}\right)^2}}$$

$$\overline{\varepsilon}_a = \overline{\varepsilon}_e + \overline{\varepsilon}_r + \overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_r$$

$$\overline{\varepsilon}_r = \overset{0}{\cancel{\dot{\omega}_A}}\,\overline{e} + \omega_A\cdot\dot{\overline{e}} = \overline{\omega}_s \times \overline{\omega}_A$$

$$\overline{V}_c = \overline{\omega}_s \times \overline{SC} \Rightarrow V = \omega_s\cdot SC\cdot\sin(90+\beta) \Rightarrow \omega_s = \frac{V}{h\cos\beta}$$

$$\varepsilon_a = \underset{\text{вдоль } Oz}{\dot{\overline{\omega}}} + \underbrace{\overline{\omega}_s \times \overline{\omega}_A + \overline{\omega}\times\overline{\omega}_A}_{\text{сонаправлены}}$$

$$\boxed{\varepsilon_a = \sqrt{\dot{\omega}^2 + \left[\frac{V}{h\sin\beta}\left(\omega - \frac{V}{h\cos\beta}\right)\right]^2}}$$

T5. Конус II (Рис. 2) с углом при вершине $\alpha_2 = 45^\circ$ катится без скольжения по внутренней стороне неподвижного конуса I с углом при вершине $\alpha_1 = 90^\circ$. Высота OO_1 подвижного конуса равна l, а скорость центра его основания O_1 постоянна по величине и равна v. Вдоль высоты конуса OO_1 движется точка M по закону $OM = f(t)$. Найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент, когда $OM = MO_1$.

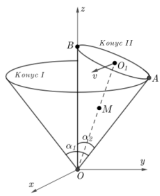
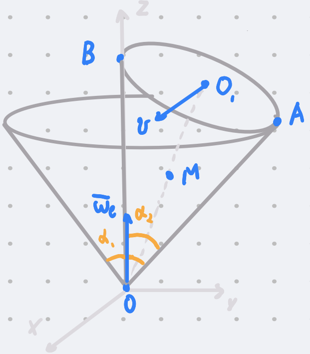


Рис. 2: К задаче Т3



Дано: $\alpha_2 = 45^\circ$, $\alpha_1 = 90^\circ$
$OO_1 = l$, v, $OM = f(t)$
$OM = MO_1$
V_a, W_a – ?

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r$$

$$\overline{V}_e = \frac{1}{2}\overline{V} \qquad \overline{V}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f}_y \\ \dot{f}_z \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{V}_a = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}V \\ \dot{f}_y \\ \dot{f}_z \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{V_a = \sqrt{\frac{1}{4}V^2 + (\dot{f}(t))^2}}$$

$$\overline{V}_{O_1} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \overline{w}_e \times \overline{OO_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ OO_{1y} \\ OO_{1x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w\,OO_{1y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \sin\frac{\alpha}{2},\ C = \cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow w = \frac{V}{l\,s}$$

$$\overline{W}_a = \overline{W}_e + \overline{W}_r + \overline{W}_k \qquad W_k = 2\,\overline{w}_e \times \overline{V}_r = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{f}_y \\ \dot{f}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2w\dot{f}_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{f}(t)_y \\ \ddot{f}(t)_z \end{bmatrix} \qquad \overline{W}_e = \cancel{\overline{\varepsilon}_e \times \overline{OM}}^{\,0} + \overline{w}_e \times (\overline{w}_e \times \overline{OM}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}w\,OO_{1y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}w^2 OO_{1y} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{W}_a = \begin{bmatrix} 0 + 0 - 2w\dot{f}_y \\ -\frac{1}{2}w^2 OO_{1y} + \ddot{f}_y + 0 \\ 0 + \ddot{f}_z + 0 \end{bmatrix}$$

$$W_a^2 = (\ddot{f}\cdot C)^2 + (\ddot{f}\cdot s - \frac{1}{2}w^2 l s)^2 + (2w\dot{f}s)^2 = \ddot{f}^2 - \ddot{f}w^2 l s^2 + \frac{1}{4}w^4 l^2 s^2 + 4w^2\dot{f}^2 s^2$$

$$\boxed{W_a = \sqrt{\ddot{f}^2 - \ddot{f}\frac{V^2}{l} + \frac{1}{l^2}\frac{V^4}{2-\sqrt{2}} + 4\frac{V^2\dot{f}^2}{l^2}}}$$

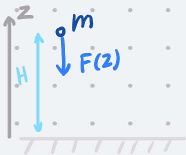
5.7. Камень массы m отпущен без начальной скорости на высоте H над Землей. Пренебрегая силами сопротивления, найти время падения T, по истечении которого камень достигнет высоты h, если сила притяжения меняется с высотой z по закону $\frac{\gamma m M}{(R+z)^2}$, где γ – гравитационная постоянная, M и R – масса и радиус Земли. В выражении для времени падения перейти к пределу при $R \to \infty$ (случай однородного поля тяжести).

Дано: m, H, T, h

$$F(z) = \frac{\gamma m M}{(R+z)^2}$$

$T - ?$

$\lim\limits_{R\to\infty} T - ?$



$$m\ddot{z} = -\frac{\gamma m M}{(R+z)^2} \qquad X(z) = \dot{z}(t)$$

$$\ddot{z}(t) = X \cdot X'(z)$$

$$X \cdot X' = -\frac{\gamma M}{(R+z)^2} \Rightarrow \int_0^V X\,dX = -\int_H^z \frac{\gamma M}{(R+z)^2}\,dz$$

$$\frac{V^2}{2} = \gamma M\left(\frac{1}{R+z} - \frac{1}{R+H}\right) = \frac{1}{2}\dot{z}^2$$

$$\dot{z}^2 = 2\gamma M\left(\frac{1}{R+z} - \frac{1}{R+H}\right) = 2\gamma M \frac{1}{R+H}\cdot\left(\frac{\overbrace{R+H}^{a}}{R+z} - 1\right) = \frac{2\gamma M}{a}\cdot\left(\frac{a}{R+z} - 1\right)$$

$$u = R+z, \quad dt = \sqrt{\frac{a}{2\gamma M}} \cdot \frac{du}{\sqrt{\frac{a}{u} - 1}} = \left\{\begin{matrix} V = \sqrt{\frac{a}{u} - 1} \quad u = \frac{a}{V^2+1} \\ du = -\frac{2aV}{(V^2+1)^2}\,dV \end{matrix}\right\} = -\sqrt{\frac{a}{2\gamma M}} \cdot \frac{2a}{(V^2+1)^2}$$

$V = tg\, t$,

$$tg^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}, \Rightarrow \sqrt{\frac{2\gamma M}{a^3}} \int_0^T dt = -2\int_{arctg V}^{0} \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt = -\left(\frac{\sin 2t}{2} + t\right)\Bigg|_{arctg V}^{0} = \frac{1}{2}\sin(2 arctg V) + arctg V;$$

$$dV = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

$$\sin(2 arctg V) = 2\sin(arctg V)\cdot\cos(arctg V) = 2\cdot\frac{V}{\sqrt{1+V^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+V^2}} = \frac{2V}{1+V^2} = \frac{2V}{1+\frac{a}{u} - 1} = \frac{2uV}{a}$$

$$\varphi = arctg\sqrt{x-1}$$

$$tg\,\varphi = \sqrt{x-1} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{\frac{u(a-u)}{a^2}}$$

$$\|$$

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2\gamma M}}\left(\frac{uV}{a} + arctg V\right) = \sqrt{\frac{a^3}{2\gamma M}}\cdot\left(\frac{u}{a}\sqrt{\frac{a}{u} - 1} + arctg V\right) = \sqrt{\frac{a^3}{2\gamma M}}\left(\sqrt{\frac{u^2}{a^2}\left(\frac{a}{u} - 1\right)} + \arccos\sqrt{\frac{u}{a}}\right)$$

$$\gamma M = gR^2 \Rightarrow \boxed{T = \sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}}\left(\sqrt{\frac{(R+h)(H-h)}{(R+H)^2}} + \arccos\sqrt{\frac{R+h}{R+H}}\right)}$$

2) $R \to \infty$: $\frac{R+h}{R+H} = 1 - \frac{H-h}{R+H} = 1 - b, \quad b \to 0$

$$\sqrt{1-b} = 1-\frac{b}{2}+o(b),\ b\to 0$$

$$\arccos(\sqrt{1-b}) = \arccos\left(1-\frac{b}{2}+o(b)\right) = \arcsin\left(\sqrt{1-\left(1-\frac{b}{2}\right)^2+o(b^2)}\right) =$$

$$= \arcsin\left(\sqrt{1-1+b+o(b)}\right) = \arcsin\sqrt{b+o(b)} = \sqrt{b+o(b)},\ b\to 0$$

$$\boxed{\lim_{R\to\infty} T} = \lim_{R\to\infty}\left[\sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}\cdot\frac{(R+h)(H-h)}{(R+H)^2}} + \sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}\cdot\frac{H-h}{R+H}}\right] = \sqrt{\frac{H-h}{2g}} + \sqrt{\frac{H-h}{2g}} = \boxed{\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}}$$

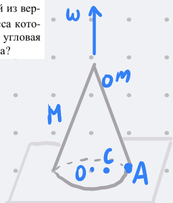
5.7. $T = \sqrt{\frac{(R+H)^3}{2gR^2}}\left(\arccos\sqrt{\frac{R+h}{R+H}} + \sqrt{\frac{(R+h)(H-h)}{(R+H)^2}}\right)$,

$\lim\limits_{R\to\infty} T = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$ – время падения в однородном поле тяжести при отсутствии сопротивления.

6.13. Прямой круговой конус поставлен основанием на гладкий горизонтальный стол. Конусу сообщается угловая скорость ω_0 вокруг его оси симметрии. По его образующей из вершины к основанию опускается материальная точка, масса которой в k раз меньше массы конуса. Чему будет равна угловая скорость конуса, когда точка достигнет основания конуса?

Дано: ω_0, $M = km$

ω - ?



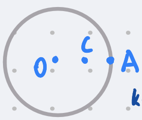
Рассм. сист. конус + м.т.

$$R_z = (M+m)g - N = 0 \Rightarrow \dot{\bar P} = \bar R^e = \bar 0 \Rightarrow V_c = const$$

$$V_c(0) = 0 \Rightarrow \bar r_c = const$$

$$F^e \parallel \text{оси вращ} \Rightarrow \dot{K}_c = 0 \Rightarrow K_c = const \Rightarrow K_c^{нач} = K_c^{кон}$$

$$\bar K_c^{нач} = J_c\bar\omega_0 = \frac{3}{10}MR^2\bar\omega_0$$



$$\bar{OC} = \frac{m}{m+M}R \qquad CA = OA - OC = \frac{MR}{m+M}$$

конуса   м.т.

$$\bar K_c^{кон} = \bar K_c^1 + \bar K_c^2 \qquad \bar K_c^1 = K_o + \bar Q\times\bar{OC} = \frac{3}{10}MR^2\bar\omega + M\bar V_o\times\bar{OC}$$

$$\bar V_o = \cancel{\bar V_c}^{\,0} + \bar\omega\times\bar{CO} \Rightarrow \bar V_o\times\bar{OC} = -(\bar\omega\times\bar{OC})\times\bar{OC} = \bar{OC}\times(\bar\omega\times\bar{OC}) =$$

$$= OC^2\bar\omega - \bar{OC}\,(\cancel{\bar{OC}\cdot\bar\omega})^{0} = OC^2\cdot\bar\omega$$

$$K_c^1 = \left(\frac{3}{10}MR^2 + M\,OC^2\right)\bar\omega = MR^2\left(\frac{3}{10} + \left(\frac{m}{m+M}\right)^2\right)\bar\omega$$

$$K_c^2 = m\bar V_A\times\bar{AC} = m\cdot(\bar\omega\times\bar{CA})\times\bar{AC} = m\cdot\bar{CA}\times\bar\omega\times\bar{CA} = m\,CA^2\bar\omega = m\left(\frac{MR}{m+M}\right)^2\bar\omega$$

$$K_C^{\text{кон}} = \bar{\omega} \cdot MR^2\left(\frac{3}{10} + \frac{m^2}{(m+M)^2} + \frac{mM}{(m+M)^2}\right) = \bar{\omega} MR^2\left(\frac{3}{10} + \frac{m}{m+M}\right) \Rightarrow$$

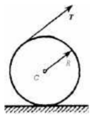
$$\bar{\omega} MR^2\left(\frac{3}{10} + \frac{m}{m+M}\right) = \frac{3}{10} MR^2 \bar{\omega}_0 \Rightarrow$$

$$\bar{\omega}_0 = \frac{3/10 + m/(m+M)}{3/10}\bar{\omega} = \frac{13m + 3M}{3(m+M)}\bar{\omega} = \frac{13+3k}{3(1+k)}\bar{\omega}$$

$$\boxed{\omega = \frac{3(1+k)}{13+3k}\omega_0}$$

6.13. $\omega = \dfrac{3(k+1)}{3k+13}\omega_0$.

6.37. Однородный цилиндр катится по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы T, равной половине веса P цилиндра. Сила T касается цилиндра перпендикулярно его образующей и составляет с горизонтальной плоскостью угол α. Коэффициент трения скольжения равен $f = \frac{1}{3}$. Найти значение угла α^*, при котором возникает скольжение. Найти угловое ускорение цилиндра и ускорение его центра масс для значений угла $\alpha < \alpha^*$ и $\alpha > \alpha^*$.



К задаче 6.37

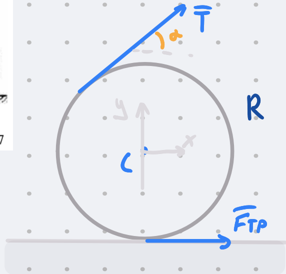
Дано: $T = \frac{1}{2}P$, α

$f = \frac{1}{3}$,

α^* - возн. скольж.

α^* - ?

ε, W_C при $\alpha < \alpha^*$, $\alpha > \alpha^*$ - ?



1) $mW_C = T\cos\alpha^* + F_{тр}$

$T\sin\alpha + N = P \Rightarrow N = \frac{P}{2}(2 - \sin\alpha)$

$mW_C = T\cos\alpha + F_{тр}$

$\dot{K}_C = J_C\varepsilon = R(T - F_{тр})$

Без проск: $W_C = \varepsilon R$, $F_{тр} \leq fN \Rightarrow \frac{1}{2}mR^2\varepsilon = R(T - F_{тр})$

$m\varepsilon R = T\cos\alpha + F_{тр} = 2T - 2F_{тр}$

$F_{тр} = \frac{1}{3}T(2 - \cos\alpha) \leq fN = \frac{1}{3}\cdot\frac{P}{2}(2 - \sin\alpha) \Rightarrow \cos\alpha \leq \sin\alpha$

при $\alpha = \alpha^*$: $\cos\alpha^* = \sin\alpha^* \Rightarrow \boxed{\alpha^* = 45°}$

2) $\alpha < \alpha^*$: $F_{тр} = \frac{1}{3}T(2 - \cos\alpha)$

$$W_C = \frac{1}{m}(T\cos\alpha + F_{тр}) = \frac{P}{2m}\left(\cos\alpha + \frac{1}{3}(2 - \cos\alpha)\right) = \boxed{\frac{g}{3}(\cos\alpha + 1)}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{W_C}{R} = \frac{g}{3R}(1 + \cos\alpha)}$$

3) $\alpha > \alpha^*$: $F_{тр} = fN = \frac{P}{6}(2 - \sin\alpha)$

$$W_C = \frac{1}{m}(T\cos\alpha + F_{тр}) = \frac{P}{6m}(3\cos\alpha + 2 - \sin\alpha)$$

$$\boxed{W_C = \frac{g}{6}(3\cos\alpha + 2 - \sin\alpha)}$$

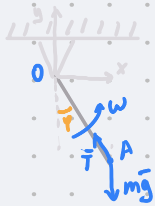
6.37. $\alpha^* = 45°$; при $\alpha < 45°$ $\ddot{x} = r\ddot{\varphi} = \frac{g}{3}(\cos\alpha + 1)$;

при $\alpha > 45°$ $\ddot{x} = \frac{g}{2}[\cos\alpha + f(2 - \sin\alpha)]$, $\dot{\omega} = \frac{g}{r}[1 - f(2 - \sin\alpha)]$.

$$\boxed{\varepsilon} = \frac{R}{\frac{1}{2}mR^2}(T - F_{тр}) = \frac{2P}{2mR}(1 - f(2 - \sin\alpha)) = \boxed{\frac{g}{R}\left(1 - \frac{1}{3}(2 - \sin\alpha)\right)}$$

6.39. Как нужно изменять длину $l(t)$ плоского математического маятника, чтобы угол отклонения маятника от вертикали менялся по линейному закону $\varphi(t)=\omega t$, где $\omega=\text{const}$? Найти также нормальную реакцию в точке подвеса.

Дано: $\varphi(t)=\omega t$,
$\omega=\text{const}$
$l(t)-?$
$T-?$ - в задавальнике

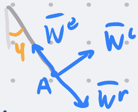


$K_0 = m\omega l^2(t)$, $\dot K_0 = \overline{OA}\times m\bar g$

$\dot K_0 = 2m\omega l\dot l = -mgl\sin\omega t$

$$\int_{l_0}^{l} dl = -\frac{g}{2\omega}\int_0^t \sin\omega t\,dt$$

$$l - l_0 = \frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{\cos(\omega t)-1}{2} \Rightarrow \boxed{l(t) = l_0 - \frac{g}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}}$$



для м.т.: $\bar T + m\bar g = \bar W^e + \bar W^c + \bar W^r$

$W^e = \omega^2 l$ $\quad \bar W^c = 2\bar\omega\times\bar V^r$ $\quad W_A^r = \ddot l = -\frac{g\cos\omega t}{2}$

$T - mg\cos\omega t = m\left(\omega^2 l + \frac{g\cos\omega t}{2}\right)$; $\quad W(0)=0 \Rightarrow \boxed{l_0 = \frac{g}{2\omega^2} > 0}$

$$T = m\cdot\left[\frac32 g\cos\omega t - g\sin^2\frac{\omega t}{2} + \omega^2 l_0\right] =$$

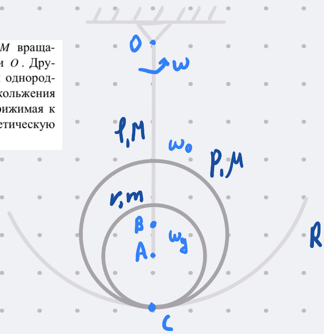
$$= m\cdot\left[\frac32 g\cos\omega t - g\left(\frac{1-\cos\omega t}{2}\right) + \omega^2 l_0\right] =$$

$$= m\cdot\left[2g\cos\omega t - \frac g2 + \omega^2 l_0\right] = \boxed{\frac{mg}{2}\left[\frac{2l_0}{g}\omega^2 - 1 + 4\cos\omega t\right]}$$

6.39. $l(t) = l_0 - \frac{g}{\omega^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}$, $\left(\omega^2 > \frac{2g}{l_0}\right)$
$N = \frac{mg}{2}\left(\frac{2l_0}{g}\omega^2 - 1 + 3\cos\omega t\right) > 0$.

7.4. Однородный стержень OA длины l и массы M вращается с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси O. Другой конец стержня несет ось A, на которую насажен однородный диск радиуса r и массы m. Диск катится без скольжения внутри цилиндрической полости радиуса $R=l+r$, прижимая к ней тонкий обруч радиуса ρ и массы μ. Найти кинетическую энергию системы.

Дано: l, M, ω, r, m,
$R = l + r$, ρ, μ
$T-?$



B - центр обруча

$V_A = \omega_g r = \omega l \Rightarrow \omega_1 = \frac{l}{r}\omega$

$V_B = \omega_0\rho = \omega(l+r-\rho) \Rightarrow \omega_2 = \frac{l+r-\rho}{\rho}\omega$

$$T = T_{ст} + T_g + T_o = \frac12 J_{ст}\omega^2 + \frac12 V_A^2 m + \frac12 J_g\omega_g^2 + \frac12 V_B^2\mu + \frac12 J_o\omega_o^2$$

$\bar V_A = \cancel{\bar V_0}^{0} + \bar\omega\times\overline{OA} \Rightarrow V_A = \omega l$ $\quad \bar V_B = \cancel{\bar V_C}^{0} + \bar\omega_0\times\overline{CA} \Rightarrow V_B = \omega_0\rho = (l+r-\rho)\omega$

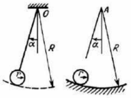
$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}Ml^2\cdot\omega^2 + \frac{1}{2}\omega^2 l^2 m + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\left(\frac{l}{r}\right)^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu(l+r-\rho)^2\omega^2 + \frac{1}{2}\mu\rho^2\cdot\left(\frac{l+r-\rho}{\rho}\right)^2\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\omega^2\left[\frac{1}{3}Ml^2 + l^2 m + \frac{1}{2}ml^2 + \mu(l+r-\rho)^2 + \mu(l+r-\rho)^2\right]$$

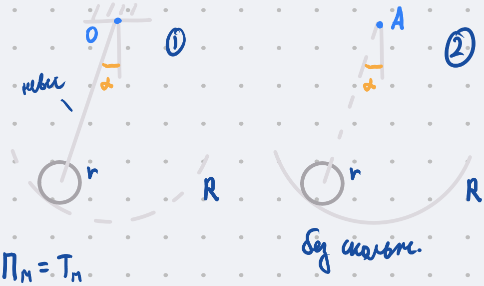
$$\boxed{T = \frac{1}{2}\omega^2\left[\frac{1}{3}Ml^2 + \frac{3}{2}ml^2 + 2\mu(l+r-\rho)^2\right]}$$

7.4. $T = \frac{1}{2}\left[\frac{Ml^2}{3} + \frac{3}{2}ml^2 + 2\mu(l+r-\rho)^2\right]\omega^2$

7.28. Физический маятник состоит из однородного шара радиуса r, подвешенного на невесомом стержне к точке O; нижняя точка шара описывает окружность радиуса R. Другой такой же шар положен в круговой желоб радиуса R и катится по нему без скольжения. В начальный момент центры шаров находятся на одном уровне и начинают движение без начальной скорости. Найти отношение наибольших скоростей центров шаров. При каком соотношении между радиусами R и r эти скорости будут одинаковыми?



К задаче 7.28



Дано: r, R,

1) $\frac{V_2}{V_1}$ -?

2) $V_1 = V_2$, $\frac{R}{r}$ -?

ЗСЭ: $П_м = T_м$

$П_м$ в обоих случаях одинак $\Rightarrow T_{м_1} = T_{м_2}$

① Ω - угл. ск. в нижн. т. $\Rightarrow \Omega = \frac{V_1}{R-r}$

$$T_{m_1} = \frac{1}{2}\left(J_ш + m(R-r)^2\right)\Omega^2 = \frac{1}{2}\cdot m\left[\frac{2}{5}r^2\cdot\frac{V_1^2}{(R-r)^2} + V_1^2\right] \Rightarrow T_{m_1} = \frac{1}{10}mV_1^2\left[2\cdot\left(\frac{r}{R-r}\right)^2 + 5\right.$$

② ω - угл. ск. в нижн. т $\Rightarrow \omega = \frac{V_2}{r}$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2}mV_2^2 + \frac{1}{2}J_ш\omega^2 = \frac{1}{2}mV_2^2\left[1 + \frac{2}{5}\right] = \frac{7}{10}\cdot mV_2^2$$

1) $T_{m_1} = T_{m_2} \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \frac{1}{7}\cdot\frac{2r^2+5R^2-10Rr+5r^2}{(R-r)^2} \Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{5R^2-10Rr+7r^2}}{(R-r)\sqrt{7}}}$

2) $\frac{V_2}{V_1} = 1 \Rightarrow 5R^2 - 10Rr + 7r^2 = 7R^2 - 14Rr + 7r^2 \Rightarrow 2R = 4r \Rightarrow \boxed{R = 2r}$

7.28. $\frac{v_ш}{v_м} = \frac{\sqrt{5R^2-10Rr+7r^2}}{(R-r)\sqrt{7}}$, $R = 2r$.

7.32. Как изменятся импульс $\mathbf{P}$ и кинетическая энергия T плоской фигуры массы m, движущейся в своей плоскости, если в некоторый момент времени закрепить центр инерции фигуры?

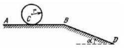
Дано: закрепили C,

$\Delta\bar{P}$, ΔT -?

$\bar{P} = m\bar{V}_c \Rightarrow \Delta\bar{P} = 0 - m\bar{V}_c = -m\bar{V}_c \Rightarrow \boxed{\Delta\bar{P} = -m\bar{V}_c}$

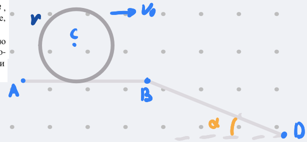
$T = T_c + T_{отн}$, $T_{отн} = const \Rightarrow \Delta T = 0 - \frac{mV_c^2}{2} \Rightarrow \boxed{2\Delta T = mV_c^2}$

7.32. $\Delta\mathbf{P} = -m\mathbf{v}_C$, $2\Delta T = -mv_C^2$, где $\mathbf{v}_C$ – скорость центра инерции фигуры до закрепления



К задаче 7.42

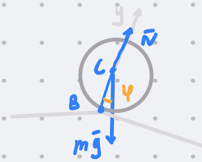
7.42. Шар радиуса r катится без скольжения со скоростью v_0 по горизонтальной плоскости AB. Достигнув точки B, шар, поворачиваясь вокруг нее, перекатывается на наклонную плоскость BD, образующую угол α с горизонтом. Найти значения угла α, при которых проекция силы реакции в угловой точке B на нормаль к траектории центра шара не равна нулю (движение без отрыва).



$$W_{c_0} = \frac{V_0^2}{r}$$

$$\bar N + m\bar g = m\bar W$$

$$N - mg\cos\varphi = -m\frac{V^2}{r}$$



Дано: r, V_0, без отрыва; α-?

гранич. случаи $N=0$: $\cos\varphi_0 = \frac{V^2}{rg} \Rightarrow \frac{V^2}{gr} \le 1$

$$mgr(1-\cos\varphi_0) = \Delta T \quad (1)$$

1) T_1 – по гориз. пл, $\omega_1 = \frac{V_0}{r}$

$$T_1 = \frac12 J_{ш}\omega_1^2 + \frac12 mV_0^2 = \frac12 m\left(\frac25 r^2\cdot\frac{V_0^2}{r^2} + V_0^2\right) = \frac{7}{10}mV_0^2$$

2) T_2 – вращ. вокруг B, аналог. T_1: $T_2 = \frac{7}{10}mV^2$

$$V^2 = gr\cos\varphi_0 \Rightarrow T_2 = \frac{7}{10}mgr\cos\varphi_0$$

подст. в (1): $mgr(1-\cos\varphi_0) = \frac{7}{10}m(gr\cos\varphi_0 - V_0^2)$

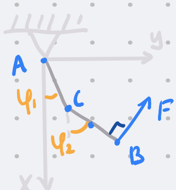
$$gr - gr\cos\varphi_0 = \frac{7}{10}gr\cos\varphi_0 - \frac{7}{10}V_0^2 \Rightarrow \cos\varphi_0 = \frac{10}{17} + \frac{7}{17}\frac{V_0^2}{gr}$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{10}{17} + \frac{7}{17}\frac{V_0^2}{gr}\right) \Rightarrow \boxed{0 \le \alpha \le \arccos\left(\frac{10}{17} + \frac{7}{17}\frac{V_0^2}{gr}\right),\ \frac{V_0^2}{gr} \le 1}$$

7.42. $0 \le \alpha \le \arccos\left(\frac{7}{17}\frac{v_0^2}{gr} + \frac{10}{17}\right),\ \frac{v_0^2}{gr} \le 1.$

7.59. Двойной плоский маятник состоит из двух одинаковых шарнирно соединенных между собой стержней AC и CB длины l. Положение системы определяется углами φ_1, φ_2 между неподвижной осью Ax и стержнями. В точке B стержня CB под прямым к нему углом приложена постоянная по величине сила F. Выяснить, является ли сила F потенциальной.

7.59. F – непотенциальная сила.



Дано: $AC = CB = l$; φ_1, φ_2, $F = const$; F - потенц.?

$\cos\varphi_1 = c_1$, $\sin\varphi_1 = s_1$

$\cos\varphi_2 = c_2$, $\sin\varphi_2 = s_2$

$$\delta A = (\bar F\cdot\bar V_c)dt + ([\overline{CB}\times\bar F]\cdot\dot{\bar\varphi}_2)dt$$

$$\bar V_c = \cancel{\bar V_A}^{\,0} + \dot{\bar\varphi}_1\times\overline{AC} = \begin{bmatrix}0\\0\\\dot\varphi_1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}l c_1\\ l s_1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dot\varphi_1 l s_1\\ \dot\varphi_1 l c_1\\ 0\end{bmatrix}$$

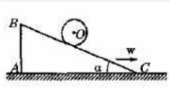
$$\bar{F}\cdot\bar{V}_c = F S_2 \dot{\varphi}_1 l S_1 + F C_2 \dot{\varphi}_1 l C_1 = F\dot{\varphi}_1 l \cos(\varphi_1-\varphi_2) = F\dot{\varphi}_1 l C_{12}$$

$$\delta A = F l \dot{\varphi}_1 C_{12}\, dt + F l \dot{\varphi}_2\, dt = F l C_{12}\, d\varphi_1 + F l\, d\varphi_2$$

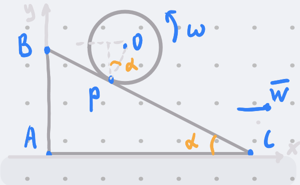
Если F - потенц, то $\delta A = -dU$;

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = F l C_{12} \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = F l, \quad 0 = \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \neq \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2 \partial \varphi_1} = F l S_{12} \Rightarrow \nexists U \Rightarrow$$ F - непот.

9.8. Клин ABC движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением $\mathbf{w}$. На наклонную грань BC клина, образующую угол α с горизонтом, помещается с нулевой относительной скоростью однородный цилиндр, который может катиться по этой грани без скольжения. При каком ускорении клина цилиндр будет двигаться вверх?



Дано: $\bar{W} = \mathrm{const}$, α, без скольж., движ. вверх, W – ?

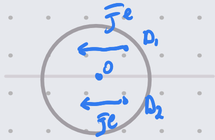


В СО клина: $m\bar{W}^r = \bar{F} \underbrace{- m\bar{W}^e}_{\bar{J}^e} \underbrace{- m\bar{W}^c}_{\bar{J}^к}$

$\bar{J}^e = -m(\bar{W} + \bar{\varepsilon} \times \bar{\rho} - \omega^2 \bar{\rho}) = -m\bar{W}$

$\bar{J}^c = -2m\,\bar{\omega} \times \bar{V}^r = \bar{0}$

Выберите любое обосн.



моменты переносных сил инерции отн O, действ. на симм. расп. dm, уравновеш. друг друга ($M_o^{J^e} = 0$) $\Rightarrow$ можем считать, что J^e проходит через т. O

или

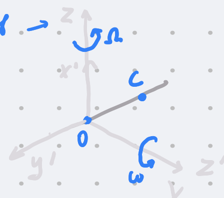
J^e – однородное

$\dot{K}_P = M_P^{J^e} + M_P^{mg} = mW \cdot r \cdot \sin(90 - \alpha) - mgr\sin\alpha > 0 \Rightarrow \boxed{W > g\,\mathrm{tg}\,\alpha}$

9.8. $w > g\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

9.25. Тонкий стержень вращается с постоянной по величине угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси Oy, проходящей перпендикулярно стержню через его точку O. Ось Oy в свою очередь вращается вокруг неподвижной вертикальной оси Oz с постоянной угловой скоростью Ω. На стержень насажено колечко, размерами которого можно пренебречь. Составить дифференциальное уравнение движения колечка относительно стержня, определяя его положение расстоянием s от точки O. Коэффициент трения между колечком и стержнем равен f. В начальный момент стержень занимал вертикальное положение.

кинодр →



Дано: $\omega = \mathrm{const}$, $\bar{\Omega} = \mathrm{const}$, $OC = s$, f, в нач. мом. верт.

$m\bar{W}^r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_{тр} + \bar{J}^e + \bar{J}^c$

$OC = s$, $\bar{V}^r = \dot{s}$, $\bar{W}^r = \ddot{s}$

$\bar{\omega}^e = \bar{\omega} + \bar{\Omega} = \begin{bmatrix} \Omega\cos\omega t \\ \Omega\sin\omega t \\ \omega \end{bmatrix}$ – в Ox' (из н.у.)

$\bar{\varepsilon}^e = \bar{\Omega} \times \bar{\omega} = \begin{bmatrix} \Omega\cos\omega t \\ \Omega\sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\Omega\sin\omega t \\ -\omega\Omega\cos\omega t \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{W}^e = \cancel{\bar{W}_o}^{\,0} + \bar{\varepsilon}^e \times \overline{OC} + \bar{\omega}^e \times (\bar{\omega}^e \times \overline{OC}) = \begin{bmatrix} \omega\Omega\sin\omega t \\ -\omega\Omega\cos\omega t \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega\cos\omega t \\ \Omega\sin\omega t \\ \omega \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} \Omega\cos\omega t \\ \Omega\sin\omega t \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) =$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s\omega\Omega\cos\omega t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega\cos\omega t \\ \Omega\sin\omega t \\ \omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ s\omega \\ -s\Omega\sin\omega t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -(\omega^2 + \Omega^2\sin^2\omega t) \\ \Omega^2\sin\omega t\cos\omega t \\ 2\omega\Omega\cos\omega t \end{bmatrix}$

$$\overline{W}^к = 2\cdot\overline{\omega}^e \times \overline{V}^r = 2\begin{bmatrix}\Omega\cos\omega t\\ \Omega\sin\omega t\\ \omega\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\dot s\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = 2\dot s\begin{bmatrix}0\\ \omega\\ -\Omega\sin\omega t\end{bmatrix} \qquad \overline{g} = \begin{bmatrix}\cos\omega t\\ -g\sin\omega t\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\overline{F}_{тр} = -fN\begin{bmatrix}\mathrm{sign}(\dot s)\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

N уравновешивает проекции сил на y' и z'

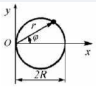
$$N^2 = \left[m(-s\Omega^2\sin\omega t + 2\dot s\omega + g\sin\omega t)\right]^2 + \left[2m\Omega(s\omega\cos\omega t + \dot s\sin\omega t)\right]^2$$

2 ЗН на x': $\ddot s = -g\cos\omega t + s(\omega^2 + \Omega^2\sin^2\omega t) - \frac{1}{m}fN\,\mathrm{sign}(\dot s)$

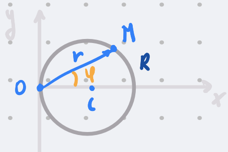
9.25. $\ddot s - s\left(\omega^2 + \Omega^2\sin^2\omega t\right) = g\cos\omega t - fN\mathrm{sign}(\dot s)$, где

$N^2 = \left[m\left(2\dot s\omega - s\Omega^2\sin\omega t\cos\omega t + g\sin\omega t\right)\right]^2 + \left[m2\Omega\left(s\omega\cos\omega t + \dot s\sin\omega t\right)\right]^2$

8.11. Материальная точка массы m движется в центральном поле под действием силы $F_r = -\frac{\alpha m}{r^5}$ $(\alpha = \mathrm{const})$. При каком значении момента импульса K_0 траектория является окружностью $r = 2R\cos\varphi$? Показать, что такая траектория невозможна для других потенциальных центральных сил.



К задаче 8.11



Дано: $F = -\frac{\alpha m}{r^5}$

$\alpha = const$

$r = 2R\cos\varphi$

$K_0 - ?$

(1) ф-ла Бине: $u'' + u = -\frac{F(u)}{mC^2u^2}$, где $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{2R\cos\varphi}$, $C = \frac{K_0}{m}$

$$u'_\varphi = u'_r \cdot r'_\varphi = -\frac{1}{r^2}\cdot(-2R\sin\varphi) = 2Ru^2\sin\varphi$$

$$u''_{\varphi\varphi} = 2R\left(2u\cdot 2Ru^2\sin^2\varphi + u^2\cos\varphi\right), \quad \cos\varphi = \frac{1}{2Ru} \quad \sin^2\varphi = 1 - \frac{1}{4R^2u^2}$$

$$u''_{\varphi\varphi} = 8R^2u^3 - 8R^2u^3\cdot\frac{1}{4R^2u^2} + 2Ru^2\cdot\frac{1}{2Ru} = 8R^2u^3 - 2u + u = 8R^2u^3 - u$$

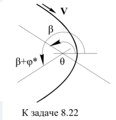
подст в (1): $8R^2u^3 - u + u = -\frac{F(u)}{mC^2u^2} \Rightarrow F(u) = -8R^2C^2u^5m$

$F(r) = -\frac{8R^2C^2m}{r^5} \Rightarrow$ только для сил вида $F = \frac{-\alpha m}{r^5}$

$-\frac{8R^2C^2m}{r^5} = -\frac{\alpha m}{r^5} \Rightarrow \alpha = 8R^2C^2 = 8R^2\frac{K_0^2}{m^2} \Rightarrow K_0 = \frac{m}{R}\sqrt{\frac{\alpha}{8}}$

8.11. $K_o = \frac{m}{R}\sqrt{\frac{\alpha}{8}}$.

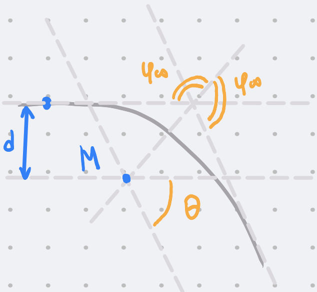
8.22. Комета массы m движется в поле тяготения звезды массы M $(M >> m)$. Величина скорости кометы на бесконечности равна v_∞, а прицельное расстояние – d. Найти уравнение траектории кометы и угол θ, на который отклонится её траектория, когда она снова уйдет в бесконечность.



К задаче 8.22

Дано: $M >> m$, V_∞, d

ур-е, θ -?



$M >> m \Rightarrow$ комета не оказ. вл. на звезду

$$r = \frac{p}{1+e\cos(\varphi+\varphi_0)}, \text{ при } \varphi = 0 \text{ – перицентр} \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

$$\boxed{r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}}, \; e>1, \text{ т.к. } V_\infty > 0$$

$$r \to \infty \text{ при } 1+e\cos\varphi \to 0 \Rightarrow \cos\varphi \to -\frac{1}{e}$$

$$\varphi_\infty = \arccos\left(-\frac{1}{e}\right)$$

$$2\varphi_\infty - \theta = \pi \Rightarrow \theta = 2\varphi_\infty - \pi = 2\arccos\left(-\frac{1}{e}\right) - \pi$$

$$\cos\theta = -\cos 2\varphi_\infty = 1 - 2\cos^2\varphi_\infty$$

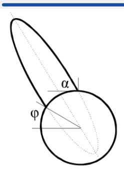
$$K_\infty = d m V_\infty, \quad E_\infty = \frac{mV_\infty^2}{2} = E_0$$

8.22. $\theta = \arccos\frac{(v_\infty^2 d)^2 - (\gamma M)^2}{(v_\infty^2 d)^2 + (\gamma M)^2}$, γ – гравитационная постоянная.

$$e^2 = \frac{d^2 m^3 V_\infty^4 + m\alpha^2}{m\alpha^2} = \frac{d^2 V_\infty^4 + \gamma^2 M^2}{\gamma^2 M^2}$$

$$\cos\theta = 1 - 2\cdot\frac{\gamma^2 M^2}{d^2 V_\infty^4 + \gamma^2 M^2} = \frac{d^2 V_\infty^4 - \gamma^2 M^2}{d^2 V_\infty^4 + \gamma^2 M^2}$$

$$\boxed{\theta = \arccos\frac{d^2 V_\infty^4 - \gamma^2 M^2}{d^2 V_\infty^4 + \gamma^2 M^2}}$$



К задачам 8.24 – 8.26

начальная энергия минимальна.

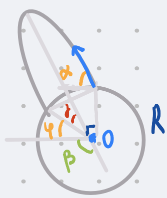
8.24. С Северного полюса под углом α к горизонту запускают снаряд. Какой должна быть величина начальной скорости v_0, чтобы место падения снаряда имело географическую широту φ (географическая широта отсчитывается от экватора, в северном полушарии $\varphi > 0$, а в южном – $\varphi < 0$)? Землю считать однородным шаром радиуса R.

8.25. В условиях предыдущей задачи найти эксцентриситет $e(\alpha, \varphi)$ и фокальный параметр $p(\alpha, \varphi)$ траектории. При каких значениях α снаряд попадает на заданную широту φ_o?

Дано: α, φ_0, R

e, p -?

$\alpha(\varphi_0)$ -?



$$r = \frac{p}{1+e\cos(\varphi+\beta)}$$

выбираем β так, чтобы при $\varphi = 0$ $r = r_{min}$

$$\gamma = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \beta = \pi - \gamma + \varphi = \frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

$$(1)\; r = \frac{p}{1+e\cos(\varphi+\beta)} \Rightarrow (2)\; \dot r = \dot\varphi\cdot\frac{ep\sin(\varphi+\beta)}{(1+e\cos(\varphi+\beta))^2}$$

при $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$V_r = \dot{r}$

$V_\varphi = r \cdot \dot{\varphi}$

(1) $R = \frac{p}{1 - e\sin\beta} \Rightarrow p = R(1 - e\sin\beta)$

(2) $V_0 \cdot \sin\alpha = -\frac{V_0}{R}\cos\alpha \cdot \frac{ep\cos\beta}{(1 - e\sin\beta)^2} \Rightarrow \sin\alpha = -\cos\alpha \cdot \frac{e\cos\beta}{1 - e\sin\beta}$

$$\sin\alpha - e\sin\beta \cdot \sin\alpha = -e\cos\beta\cos\alpha \Rightarrow e\cos(\alpha+\beta) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\boxed{e = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\varphi}{2}\right)}} \qquad \boxed{p} = R\left(1 + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)}\right) = R\left(\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}\right) =$$

$$= R\left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\right) = \boxed{\frac{R}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Чтобы снаряд попал на широту φ_0, $0 < e < 1$

Рассм $e = 1$: $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\varphi_0}{2}\right) = \sin\alpha$

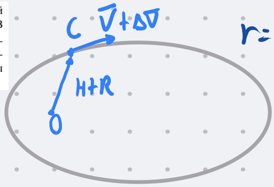
$$\sin\alpha - \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}\right) = 0$$

$$2\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8} - \frac{\varphi_0}{4}\right)\sin\left(\frac{\varphi_0}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Rightarrow \alpha + \frac{\pi}{8} - \frac{\varphi_0}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{8} + \frac{\varphi_0}{4} \Rightarrow$$

$$\boxed{0 < \alpha < \frac{3\pi}{8} + \frac{\varphi_0}{4}}$$

8.25. $e = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\varphi}{2}\right)}$, $p = \dfrac{R}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}$, $0 < \alpha < \frac{3}{8}\pi + \frac{\varphi_0}{4}$.

8.52. Спутник Земли массы m движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом e_0 и фокальным параметром p_0. В положении, когда спутник находится на высоте H от поверхности Земли и имеет скорость $\mathbf{v}$, ему сообщается касательный импульс $\Delta\mathbf{q} = \lambda m\mathbf{v}$ (λ=const). Найти параметры новой орбиты спутника.



$r = H+R$

$$p_0 = \frac{C_0^2}{k} = \frac{r^2 V_\varphi^2}{k}$$

Дано: $m, e_0, p_0, \bar V,$

$\Delta\bar q = \lambda m \bar V$, H, R

p, e — ?

$$\Delta q = \lambda m \bar V = m\Delta\bar V \Rightarrow \Delta\bar V = \lambda\bar V$$

$$C = r(1+\lambda)V_\varphi \qquad p = \frac{C^2}{k} = \frac{r^2(1+\lambda)^2V_\varphi^2}{k}$$

$$p = p_0(1+\lambda)^2$$

$$E_0 = -\frac{mk}{R+H} + \frac{mV_0^2}{2}; \quad E = -\frac{mk}{R+H} + (1+\lambda)^2\frac{mV_0^2}{2} = (1+\lambda)^2\left[-\frac{mk}{R+H} + \frac{mV_0^2}{2}\right] -$$

$$-(\lambda^2+2\lambda)\left(-\frac{mk}{R+H}\right) = (1+\lambda)^2E_0 + (\lambda^2+2\lambda)\cdot\frac{mk}{R+H}$$

$$e_0^2 - 1 = \frac{2E_0C_0^2}{mk^2}, \quad C = (1+\lambda)\cdot C_0$$

$$e^2 = 1 + \frac{2EC^2}{mk^2} = 1 + (1+\lambda)^2\cdot\frac{2EC_0^2}{mk^2} = 1 + (1+\lambda)^2\left[(1+\lambda)^2\cdot\frac{2E_0C_0^2}{mk^2} + 2(\lambda^2+2\lambda)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{mk}{R+H}\cdot\frac{C_0^2}{mk^2}\right] = 1 + (1+\lambda)^2\left[(1+\lambda)^2(e_0^2-1) + (\lambda^2+2\lambda)\cdot\frac{2p_0}{R+H}\right]$$

8.52. $p = p_0(1+\lambda)^2$, $e^2 = 1+(1+\lambda)^2\left[e_0^2 - 1 + \frac{2p_0}{R+H}(\lambda^2+2\lambda)\right]$, где R – радиус Земли.