УДК 517.972

ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ. МОДЕЛЬ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ ЛАНЧЕСТЕРА

И. И. Бакаев

Воронежский государственный университет

Введение

В общем виде модель боевых действий можно описать системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bx + cy + d \\ \dot{y} = ey + fyx + gx + h \end{cases}$$

Коэффициенты a и e характеризуют скорость небоевых потерь, b и f характеризуют скорость потерь из-за воздействия по площадным целям, d и h характеризуют подходящие или отходящие резервы.

Часто в модели имеются только коэффициенты b и f. В этом случае количество жертв пропорционально количеству встреч между противоборствующими сторонами. Наиболее актуально подобное взаимодействие тогда, когда две стороны располагаются на общей территории.

Наибольшее применение модель Ланчестера снискала в форме:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax - cy \pm d \\ \dot{y} = -ey - gx \pm h \end{cases}$$

1. Математическая модель со случайными коэффициентами

В реальных условиях коэффициенты определяются приближённо и зависят от внешних факторов. Их можно моделировать как случайные процессы.

Мы рассматриваем задачу:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -f(t)\dot{x} - \varepsilon(t)x \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = x_1 \end{cases}$$

Обозначим данную задачу (1).

Здесь f(t) – случайный процесс, ε(t) – заданная функция.

Пусть нам известны: $\mathrm{M}[x_0]$, $\mathrm{M}[x_1]$

Будем также считать, что известен характеристический функционал:

$$\varphi_f(u) = \mathrm{M}[e^{i\int_{t_0}^{t_1} f(s)u(s)ds}]$$

Характеристический функционал — преобразование Фурье плотности распределения случайного процесса. [1]

Задача состоит в нахождении математического ожидания решения.

2. Вспомогательная детерминированная модель

Введём обозначение:

$$\mathrm{W} = e^{i\int_{t_0}^{t_1} f(s)u(s)ds}$$

Умножим $\ddot{x} = f(t)\dot{x} - \varepsilon(t)x$ на W и возьмём математическое ожидание:

$$\mathrm{M}[\ddot{x}\mathrm{W}] + \mathrm{M}[f(t)\dot{x}\mathrm{W}] + \mathrm{M}[\varepsilon(t)x\mathrm{W}] = 0$$

Пусть $y(t,u) = \mathrm{M}[x(t)\mathrm{W}]$

Заметим, что $y(t,0) = \mathrm{M}[x(t)]$.

Также заметим, что:

$$\mathrm{M}[\ddot{x}\mathrm{W}] = \frac{\partial^2 y(t,u)}{\partial t^2}, \quad \mathrm{M}[f(t)\dot{x}\mathrm{W}] = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta u(t)}\frac{\partial y(t,u)}{\partial t}$$

Здесь $\dfrac{\delta}{\delta u(t)}$ — вариационная производная. [2]

Найдём теперь $\dfrac{\delta\varphi_f}{\delta u(t)}$ и $\dfrac{\delta y(t,u)}{\delta u(t)}$:

$$\frac{\delta\varphi_f}{\delta u(t)} = \mathrm{M}[if(t)\mathrm{W}], \quad \frac{\delta y(t,u)}{\delta u(t)} = \mathrm{M}[x(t)\mathrm{W}if(t)]$$

Получаем:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta u(t)}\frac{\partial y}{\partial t} + \varepsilon(t)y = 0$$

Умножим $x(t_0) = x_0$ и $\dot{x}(t_0) = x_0$ на W и возьмём математическое ожидание:

$$\mathrm{M}[x(t_0)\mathrm{W}] = \mathrm{M}[x_0\mathrm{W}] = \mathrm{M}[x_0]\mathrm{M}[\mathrm{W}] = \mathrm{M}[x_0]\varphi_f(u),$$

$$\mathrm{M}[\dot{x}\mathrm{W}] = \mathrm{M}[x_1]\mathrm{M}[\mathrm{W}] = \mathrm{M}[x_1]\varphi_f(u),$$

$$y(t_0,u) = \mathrm{M}[x_0]\varphi_f(u),$$

$$\frac{\partial y(t,u)}{\partial t} = \mathrm{M}[x_1]\varphi_f(u)$$

Имеем задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \dfrac{1}{i}\dfrac{\delta}{\delta u(t)}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \varepsilon(t) y = 0 \qquad (*) \\ y(t_0, u) = \mathrm{M}[x_0]\varphi_f(u) \\ \dfrac{\partial y(t,u)}{\partial t} = \mathrm{M}[x_1]\varphi_f(u) \end{cases}$$

В уравнении (*) имеется комплексный коэффициент i^{-1}. Иногда это приводит к усложнению расчётов. Избавимся от i^{-1}. С этой целью введём:

$Y(t,\xi) = y(t, i\xi)$, где ξ — вещественная переменная.

Получаем:

$$\frac{\partial^2 Y(t,\xi)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(t,i\xi)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Y(t,\xi)}{\partial t} = \frac{\partial y(t,i\xi)}{\partial t}$$

$$\frac{\delta}{\delta \xi(t)}\frac{\partial Y(t,\xi)}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta \xi(t)}\frac{\partial y(t,i\xi)}{\partial t} = i\frac{\delta}{\delta u}\frac{\partial y(t,u)}{\partial t}, \text{ при } u = i\xi$$

Таким образом уравнение (*) записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 Y(t,\xi)}{\partial t^2} - \frac{\delta}{\delta \xi(t)}\frac{\partial Y(t,\xi)}{\partial t} + \varepsilon(t) Y(t,\xi) = 0 \qquad (**)$$

3. Численное нахождение математического ожидания решения

Заметим, что $Y(t,0) = y(t,0) = \mathrm{M}[x(t)]$

Пусть $h_t(s) = \begin{cases} 1, \text{ при } s \in [t, t+\gamma] \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$, где γ - вещественное число > 0

Тогда:

$$\int_{t_0}^{t_1} A(s) h_t(s) ds = \int_{t}^{t+\gamma} A(s) ds \approx A(t)\gamma$$

$$\frac{\delta Y(x)}{\delta u(t)} \approx \frac{Y(x+h_t) - Y(x)}{\gamma}$$

Пусть теперь:

$$t_i = t_0 + i\tau$$
$$u_k(s) = kh_t(s)$$
$$Y_k^i = Y(t_i, u_k)$$
$$\varepsilon_i = \varepsilon(t_i)$$

Получаем:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} \approx \frac{Y(t+\tau) - Y(t)}{\tau}$$
$$\frac{\partial Y_k^i}{\partial t} \approx \frac{Y_k^{i+1} - Y_k^i}{\tau}$$
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \approx \frac{Y_k^{i+2} - 2Y_k^{i+1} + Y_k^i}{\tau^2}$$
$$\frac{\delta Y}{\delta u(t)} \approx \frac{Y_{k+1}^i - Y_k^i}{\gamma}$$
$$\frac{\delta}{\delta u(t)} \frac{\partial Y}{\partial t} \approx \frac{Y_{k+1}^{i+1} - Y_{k+1}^i - Y_k^{i+1} + Y_k^i}{\gamma\tau}$$

Подставим данные выражения в уравнение (**) и получим разностное уравнение:

$$\frac{Y_k^{i+2} - 2Y_k^{i+1} + Y_k^i}{\tau^2} - \frac{Y_{k+1}^{i+1} - Y_{k+1}^i - Y_k^{i+1} + Y_k^i}{\tau\gamma} + \varepsilon^i Y_k^i = 0$$

Выразим отсюда Y_k^{i+2}:

$$Y_k^{i+2} = 2Y_k^{i+1} - Y_k^i + \frac{\tau(Y_{k+1}^{i+1} - Y_{k+1}^i - Y_k^{i+1} + Y_k^i)}{\gamma} - \tau\varepsilon^i Y_k^i$$

3. Алгоритм численного нахождения математического ожидания решения задачи (1)

1. Задаём количество точек N, шаг по времени τ , γ, $\mathrm{M}[x_0]$, $\mathrm{M}[x_1]$, a(s), b(s1, s2), $\varphi_f(u)$
2. Пускаем цикл по k ($0 \le k \le N-1$)
3. Считаем $Y_k^0 = \mathrm{M}[x_0]\varphi_f(\sqrt{-1}kh_{t_0})$
4. Печатаем Y_0^0
5. Пускаем цикл по k ($0 \le k \le N-1$)
6. Считаем $Y_k^1 = Y_k^0 + \tau\mathrm{M}[x_1]\varphi_f(\sqrt{-1}kh_{t_0})$
7. Печатаем Y_0^1
8. Пускаем цикл по i ($0 \le i \le N-2$)

9. Пускаем вложенный цикл по k ($0 \le k \le N-i-1$)

10. Считаем $Y_k^{i+2} = 2Y_k^{i+1} - Y_k^i + \dfrac{\tau(Y_{k+1}^{i+1} - Y_{k+1}^i - Y_k^{i+1} + Y_k^i)}{\gamma} - \tau\varepsilon^i Y_k^i$

11. Печатаем Y_0^{i+2}

Заключение

В ходе исследования мы получили разностное уравнение для численного нахождения математического ожидания решения дифференциального уравнения, содержащего стохастический процесс.

Благодарности

Выражаю благодарность своему научному руководителю, д-ру. физ.-мат. наук, профессору, заведующему кафедрой Системного анализа и управления Воронежского государственного университета, Задорожнему Владимиру Григорьевичу за помощь во всех аспектах исследования и бесценный вклад в написание данной статьи.

Литература

1. Задорожний, В. Г. Дифференциальные уравнения со случайными коэффициентами : учебное пособие для вузов / В. Г. Задорожний ; Воронежский государственный университет. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – 98 с.

2. Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа : учебное пособие для вузов / В.Г. Задорожний. – М. – Ижевск : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Институт компьютерных исследований, 2006. – 316 с.

Бакаев Илья Игоревич – студент 4-го курса кафедры Системного анализа и управления Воронежского государственного университета. E-mail: ibakaev1999@gmail.com

Задорожний Владимир Григорьевич (научный руководитель) – д-р. физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Системного анализа и управления Воронежского государственного университета. E-mail: zador@amm.vsu.ru