

Подготовка к экзамену ИиДУ

ИУ6-25Б

2024

1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для неопределённого интеграла.

Опр. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b) , если $F(x)$ диф-ма на (a, b) и $F'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$, где (a, b) может быть любым.

Свойства первообразной:

1. Если $F(x)$ - первообразная $f(x)$ на (a, b) , то $F(x) + C$ тоже первообразная $f(x)$ на (a, b) .
2. Если функция $\Phi(x)$ диф-ма на (a, b) и $\Phi'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$, то $\Phi(x) = const$ на (a, b) .
3. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные $f(x)$ на (a, b) , то $F_1(x) - F_2(x) = C, C = const$.
4. Если функция $f(x)$ непрерывна на (a, b) , то она имеет первообразную на этом интервале.

Свойства неопределённого интеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C$
4. $\int (f_1(x) + \dots + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx + C$
5. $\int Af(x)dx = A \int f(x)dx + C$

Доказательство теоремы:

Теорема. (об интегрировании по частям)

Если $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывные функции, дифференцируемые в (a, b) , то

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

Доказательство.

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow u dv = d(uv) - v du$$

$u(x)$ и $v(x)$ - непрерывны на $[a, b] \Rightarrow \exists$ определённый интеграл от функций:

$$\int_a^b u dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du \Rightarrow \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du \blacktriangle$$

2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей.

Опр. Рациональной дробью называется дробь вида $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ - многочлены от x степени m и n соответственно.

Опр. Дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя: $m < n$, и неправильной, если $m > n$.

Опр. Простейшими дробями называются дроби:

1. $\frac{A}{x-a}$ - I тип
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k \in \mathbb{Z}, k > 1$ - II тип
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ - III тип
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $k \in \mathbb{Z}, k > 1$ - IV тип

Теорема. (о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших) Правильная рациональная дробь $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, $m < n$, где $P_n(x) = a_0(x-x_0)^{k_1} \dots (x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_mx+q_m)^{l_m}$, единственным образом может быть представлена в виде суммы элементарных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = & \frac{1}{a_0} \left(\frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^1} + \right. \\ & + \frac{B_1}{(x-x_s)^{k_s}} + \frac{B_2}{(x-x_s)^{k_s-1}} + \dots + \frac{B_{k_s}}{(x-x_s)^1} + \dots + \\ & + \frac{1x+D_1}{(x^2+xp_1+q_1)^{l_1}} + \frac{2x+D_2}{(x^2+xp_2+q_2)^{l_1-1}} + \dots + \frac{l_1x+D_{l_1}}{(x^2+xp_{l_1}+q_{l_1})^1} + \dots + \\ & \left. \frac{M_1x+N_1}{(x^2+xp_m+q_m)^{l_m}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+xp_m+q_m)^{l_m-1}} + \dots + \frac{M_{l_m}x+N_{l_m}}{(x^2+xp_m+q_m)^1} \right) \end{aligned}$$

Интегрирование простейших дробей:

- I тип:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C$$

- II тип:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

- III тип:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \dots$$

- IV тип:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \dots$$

3. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции.

Свойства определённого интеграла:

Теорема 1. Определённый интеграл алгебраической суммы интегрируемых на $[a, b]$ функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx \pm \dots \pm \int_a^b f_n(x) dx$$

Теорема 2. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad c = \text{const}$$

Теорема 3.

$$\int_a^b c dx = c \int_a^b dx = c(b - a)$$

Теорема 4.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Теорема 5. Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) $\forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \left(\int_a^b f(x) dx \leq 0 \right)$$

Теорема 6. Для любых чисел a, b, c , расположенных в интервале интегрируемости функции $f(x)$ справедливо равенство (при условии, что все эти 3 интервала существуют):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Теорема 7. (об интегрировании неравенства)

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$ и $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ ($f(x) \neq g(x)$), то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

Теорема 8. (об оценке модуля определённого интеграла)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Теорема 9. (об оценке определённого интеграла)

Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Теорема 10. (об инвариантности неравенства)

Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ и функция $\varphi(x) \geq 0$ и интегрируема на $[a, b]$, то

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx$$

Теорема 11. (о среднем)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на $[a, b]$, то \exists точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(c) \int_a^b \varphi(x) dx$$

Доказательство теоремы:**Теорема о сохранении интегралом знака подынтегральной функции (теорема 5).**

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $f(x) \geq 0$ ($f(x) \leq 0$) $\forall x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \left(\int_a^b f(x) dx \leq 0 \right)$$

Доказательство.

Пусть $a < b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k, \text{ где } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Пусть $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$, тогда $f(\xi_k) \geq 0, \Delta x_k > 0 \Rightarrow f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0 \forall k$, тогда:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0 \blacktriangle$$

4. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

Теорема об оценке определённого интеграла (теорема 9).

Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Доказательство.

По условию $m \leq f(x) \leq M$, где $m = \min_{[a,b]} f(x)$, $M = \max_{[a,b]} f(x)$, и $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, тогда

$$\begin{aligned} m \int_a^b f(x) dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \blacktriangle \end{aligned}$$

5. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

Теорема об оценке модуля определённого интеграла (теорема 8).

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Доказательство.

$f(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

По теореме 7:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Тогда по определению модуля:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \blacktriangle$$

6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

Теорема о среднем (теорема 11).

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на $[a, b]$, то \exists точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(c) \int_a^b \varphi(x) dx$$

Доказательство.

$f(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса она достигает на $[a, b]$ наименьшее и наибольшее значения $m = \min_{[a, b]} f(x)$ и $M = \max_{[a, b]} f(x)$ и $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

Пусть $\varphi > 0$: $m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x)$

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx$$

Так как $\varphi(x) > 0$, то $\int_a^b \varphi(x) dx \geq 0$, тогда $m \leq \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \leq M$

По теореме Больцано-Коши $\exists c \in (a, b)$ такая, что:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(c)\varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \Rightarrow \int_a^b f(c)\varphi(x) dx = f(c) \int_a^b \varphi(x) dx, \text{ где } c \in (a, b) \blacktriangle$$

7. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом.

Опр. Функция $Y(x) = \int_a^x f(t) dt$, определённая на $[a, b]$, называется определённым интегралом с переменным верхним пределом, где $[a, x] \subset [a, b]$

Теорема. (о производной от интеграла с переменным верхним пределом)

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна на нём, то

$$Y'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Доказательство.

$$Y(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$Y(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt, (x + \Delta x) \in [a, b]$$

$f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, следовательно, по теореме о среднем:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x, \text{ где } c \in (x, x + \Delta x)$$

По определению производной ($\Delta x \rightarrow 0, x < c < x + \Delta x \Rightarrow c \rightarrow x$):

$$Y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x) \blacktriangle$$

8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

Теорема. (формула Ньютона-Лейбница)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ - \forall первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$

$Y(x) = \int_a^x f(x) dx$ - тоже первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$

Тогда по основной теореме о первообразных: $\int_a^x f(x) dx = F(x) + C, c = const$ (1)

Положим $x = a$: $\int_a^a f(t) dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$

Подставим в (1) и получим: $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$

Положим $x = b$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \blacktriangle$$

9. Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла.

Сделать рисунок. Геометрическая интерпретация определённого интеграла - площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, осью Ox и прямыми $x = a, x = b$

Теорема. (о замене переменной в определённом интеграле)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функции $x = \varphi(t), \varphi'(t), f(\varphi(t))$ непрерывны на $[a, b]$ и $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Доказательство.

Формулы замены переменной в неопределённом интеграле:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то $F(\varphi(t))$ - первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Так как по условию: $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t))|_a^b = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Получим:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \blacktriangle$$

10. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

Периодические функции:

Функция $f(x)$ - периодическая с периодом T и непрерывная на $[a, a + T]$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

Чётные функции:

Функция $f(x)$ - чётная на $[-a, a]$, то есть $\forall x \in [-a, a] f(-x) = f(x)$:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Нечётные функции:

Функция $f(x)$ - нечётная на $[-a, a]$, то есть $\forall x \in [-a, a] f(-x) = -f(x)$:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

Теорема. Если $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывные функции, дифференцируемые в (a, b) , то

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

Доказательство.

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow u dv = d(uv) - v du$$

$u(x)$ и $v(x)$ - непрерывны на $[a, b] \Rightarrow \exists$ определённый интеграл от функций:

$$\int_a^b u dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du \Rightarrow \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du \blacktriangle$$

12. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.

Опр. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x \in [a, +\infty)$. Тогда несобственным интегралом первого рода $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется предел определённого интеграла с переменным верхним пределом $\int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.

Теорема. (признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-ого рода)

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и выполняется неравенство $0 < f(x) \leq \varphi(x) \forall x \in [a, +\infty)$, тогда:

1. если сходится $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ тоже сходится
2. если расходится $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, то $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ тоже расходится

Доказательство.

1) По условию $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится, \Rightarrow , \exists конечный предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(x) dx = M \Rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx \leq M$$

По условию $\forall x \in [a, +\infty) 0 < f(x) \leq \varphi(x)$, тогда по теореме об интегрировании неравенства $0 < \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx \leq M$

Пусть $b_1 \in (b, +\infty)$. Рассмотрим:

$$\int_a^{b_1} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{b_1} f(x) dx > \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ есть функция, возрастающая с возраста-}$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \leq M \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx - \text{сходящийся}$$

2) (от противного)

Предположим, что $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится, тогда по доказательству $^{**1})^{**}$ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ тоже сходится, что противоречит условию, \Rightarrow , $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ расходится \blacktriangle

13. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-ого рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-ого рода.

Опр. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x \in [a, +\infty)$. Тогда несобственным интегралом первого рода $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется предел определённого интеграла с переменным верхним пределом $\int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.

Теорема. (предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-ого рода)

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$, $f(x) \geq 0, g(x) > 0 \forall x \geq a$ и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda (\neq 0)$. Тогда несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство.

По условию и определению предела:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x > M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \varepsilon$$

Рассмотрим неравенство:

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + \lambda < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + \lambda$$

$$(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x) \quad \forall x > M \quad (*)$$

Проинтегрируем правую часть:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx < (\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

1. Пусть $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится, тогда $(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$ тоже сходится, так как $(\lambda + \varepsilon)$ - число, не влияющее на сходимость. По теореме о признаке сходимости по неравенству несобственных интегралов 1-ого рода $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ тоже сходится.
2. Пусть $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится, тогда по теореме о признаке сходимости по неравенству несобственных интегралов 1-ого рода $(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$ тоже расходится.

Аналогично, интегрируя левую часть неравенства (*) получим:

3. Если $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ тоже сходится.
4. Если $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ тоже расходится.

В итоге получим, что интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно. \blacktriangle

14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-ого рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-ого рода.

Опр. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x \in [a, +\infty)$. Тогда несобственным интегралом первого рода $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется предел определённого интеграла с переменным верхним пределом $\int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.

Теорема. (признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-ого рода)

Если функция $f(x)$ непрерывна и знакопеременна на $[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

Доказательство.

$f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ (по условию), $\implies, \forall x \in [a, +\infty)$ справедливо неравенство:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \implies 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ сх-ся (по усл.)} \implies 2 \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ сх-ся (св-во линейности)} \quad (1)$$

$$f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \quad \forall x \in [a, +\infty) \quad (2)$$

Из (1) и (2):

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx \text{ сх-ся (по 1 признаку сравнения по нер-ву)}$$

Тогда:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Оба слагаемых сходятся, $\implies, \int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится \blacktriangle

15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-ого рода и признаки сходимости таких интегралов. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-ого рода.

Опр. Несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b)$ и неограниченной в окрестности точки b , называется сходящимся, если ******существует конечный предел****** при $\epsilon \rightarrow +0$ определённого интеграла $\int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx$$

Аналогично для функции, неограниченной в окрестности точки a .

Теорема. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b)$ и выполняется неравенство $0 < f(x) \leq \varphi(x) \forall x \in [a, b)$, тогда:

1. если сходится $\int_a^b \varphi(x) dx$, то $\int_a^b f(x) dx$ тоже сходится
2. если расходится $\int_a^b f(x) dx$, то $\int_a^b \varphi(x) dx$ тоже расходится

Теорема. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на $[a, b)$, $f(x) \geq 0, g(x) > 0 \forall x \geq a$ и существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda (\neq 0)$. Тогда несобственные интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна и знакопеременна на $[a, b)$ и $\int_a^b |f(x)| dx$ сходится, то $\int_a^b f(x) dx$ сходится.

Доказательство теоремы:

Теорема. (признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-ого рода)

Если функция $f(x)$ непрерывна и знакопеременна на $[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

Доказательство.

$f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ (по условию), $\implies, \forall x \in [a, +\infty)$ справедливо неравенство:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \implies 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ сх-ся (по усл.)} \implies 2 \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ сх-ся (св-во линейности)} \quad (1)$$

$$f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \forall x \in [a, +\infty) \quad (2)$$

Из (1) и (2):

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx \text{ сх-ся (по 1 признаку сравнения по нер-ву)}$$

Тогда:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Оба слагаемых сходятся, $\implies, \int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится \blacktriangle

16. Фигура, ограниченная кривой $y = f(x) \geq 0$ и прямыми $x = a, x = b$ и $y = 0$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла площади этой фигуры.

Сделать рисунок

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a, x = b$ и $y = 0$.

Отрезок $[a, b]$ оси Ox - основание криволинейной трапеции.

Разобьём его на n частичных отрезков точками $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$, где $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

Через точки деления проведём прямые $\parallel Oy$, то есть исходную трапецию разобьём на n трапеций.

Пусть $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$

Составим сумму $(\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - \text{интегральная сумма Римана}$$

где $S_k = f(\xi_k) * \Delta x_k$ - площадь k -ого прямоугольника

$$S_n = \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - \text{площадь ступенчатой фигуры}$$

Будем считать S_n приближённым значением площади криволинейной трапеции. Тогда чем больше n и чем меньше Δx_k , тем более точным будет это приближение. То есть:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

17. Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ - полярные координаты точки, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$. Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла площади этой фигуры.

Сделать рисунок

Пусть дана непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция $\rho = \rho(\varphi)$ и $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq 2\pi$

Разобьём криволинейный сектор лучами на n криволинейных секторов:

$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \dots < \varphi_n = \beta$

$\Delta \varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$

В каждом частичном секторе возьмём произвольно $\tilde{\varphi}_k, k = \overline{1, n}$, то есть $\tilde{\varphi}_k \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$

$\rho(\tilde{\varphi}_k)$ - радиус вектор, соответствующий углу $\tilde{\varphi}_k$

Площадь криволинейного сектора \approx площадь кругового сектора

$$S_n = \sum_{k=1}^n S_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho^2(\tilde{\varphi}_k) \Delta \varphi_k - \text{интегральная сумма функции } \rho^2(\varphi)$$

$\rho = \rho(\varphi)$ непрерывна на $[\alpha, \beta] \implies \rho^2(\varphi)$ тоже непрерывна на $[\alpha, \beta] \implies \exists$ конечный предел:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta \varphi_k \rightarrow 0}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho^2(\tilde{\varphi}_k) \Delta \varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

Итак:

$$S_n = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

18. Тело образованно вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a, x = b$ и $y = 0, a < b$. Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла объёма тела вращения.

Сделать рисунок

Дано тело вращения

Пусть $S(x)$ - площадь поперечного сечения плоскостью $\perp Ox, a \leq x \leq b$, и $S(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$

Проведём плоскости $x = x_0 = a, x = x_1, \dots, x = x_n = b$, они разбивают тело на слои

Выберем в каждом интервале точку $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k), k = \overline{1, n}$

Для каждого значения ξ_k построим цилиндрическое тело, образующие которого $\perp Ox$, а направляющая есть контур сечения тела плоскостью $x = \xi_k$

Объём такого цилиндра $V_k = S(\xi_k)\Delta x_k$

Сложим все такие цилиндры:

$$V_n = \sum_{k=1}^n S(\xi_k)\Delta x_k$$

Получили приближённое значение объёма тела вращения, при увеличении n и уменьшении Δx_k приближение становится более точным. То есть:

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n S(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x) dx, \text{ где } S(x) - \text{площадь поперечного сечения}$$

Если кривая задана $y = f(x)$, то сечения - окружности, площадь которых $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$

Подставим в формулу объёма:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

19. Кривая задана в декартовых координатах уравнение $y = f(x)$, где x и y - декартовы координаты точки, $a \leq x \leq b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

Сделать рисунок

Пусть кривая $y = f(x)$, где $f(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ и имеющая непрерывную первую производную на этом отрезке. Тогда

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Покажем это:

Разобьём дугу AB на n частей точками M_0, M_1, \dots, M_n , абсциссы которых $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Проведём хорды, соединив соседние точки, и получим ломанную, вписанную в дугу AB , эта ломаная состоит из отрезков $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$, где $M_0 = A, M_n = B$

Обозначим их за l_1, l_2, \dots, l_n : $l_i = M_{i-1}M_i$

Периметр этой ломаной $l_n = \sum_{k=1}^n l_k$

С уменьшением длин хорд ломаная по своей форме приближается к дуге AB

Опр. Длиной l дуги AB кривой $y = f(x)$ называется предел длины вписанной в неё ломаной, когда число её звеньев неограниченно растёт, а наибольшая из длин звеньев стремится к нулю:

$$l = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max l_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n l_k \quad (1)$$

При этом предположим, что этот предел существует и не зависит от выбора точек.

Опр. Кривые, для которых предел (1) существует, называются спрямляемыми.

По формуле расстояния между двумя точками на плоскости имеем:

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}, \text{ где}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}),$$

$$y_k = f(x_k),$$

$$y_{k-1} = f(x_{k-1}),$$

$$k = \overline{1, n}$$

$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}$$

По теореме Лагранжа:

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \text{ где } x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

Тогда $l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$ и длина вписанной ломаной:

$$l_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k - \text{интегральная сумма} \quad (*)$$

$f'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, \implies , $\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$ тоже непрерывна на $[a, b]$, поэтому существует предел интегральной суммы (*), который равен определённому интегралу:

$$l = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Получили формулы для вычисления длины дуги кривой в декартовых координатах:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

20. Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0$, где r и φ - полярные координаты точки, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

Сделать рисунок

Имеем:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Найдём:

$$x'_\varphi = r' \cos \varphi - r \sin \varphi$$

$$y'_\varphi = r' \sin \varphi + r \cos \varphi$$

Используем формулу длины дуги графика функции, заданной параметрически:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r')^2 \cos^2 \varphi - 2rr' \sin \cos + r^2 \sin^2 \varphi + (r')^2 \sin^2 \varphi + 2rr' \sin \cos + r^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$$

21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод " $u \cdot v$ ") и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной).

Опр. Линейным ДУ первого порядка называется ДУ, линейное относительно неизвестной функции и её первой производных, т.е. ДУ вида:

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где $a_0(x), a_1(x), g(x)$ - заданные на некотором интервале I функции.

Метод Бернулли

Работает для линейных неоднородных уравнений первого порядка и уравнений Бернулли.

Рассмотрим ДУ: $y' + p(x)y = q(x)$

Производим замену $y(x) = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v, y' = u'v + uv'$

Подставим:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

$$u'v + uv' = q(x) - p(x)uv$$

Приравняем слагаемые и получим систему:

$$\begin{cases} u'v = -p(x)uv \\ uv' = q(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{du}{dx} = -p(x)u \\ \frac{dv}{dx} = \frac{q(x)}{u} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{du}{u} = -p(x)dx \\ \frac{dv}{dx} = \frac{q(x)}{u} \end{cases}$$

Получим (для $u(x)$ не берём константу):

$$\begin{cases} u = e^{\int -p(x) dx} \\ v = \int \frac{q(x)}{e^{\int -p(x) dx}} dx + C \end{cases}$$

Таким образом, общее решение:

$$y = u \cdot v = e^{\int -p(x) dx} \int \frac{q(x)}{e^{\int -p(x) dx}} dx + C e^{\int -p(x) dx}$$

Метод Лагранжа

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln y = \int -p(x) dx + C$$

$$y = C e^{\int -p(x) dx} - \text{общее решение однородного ДУ}$$

Будем искать общее решение неоднородного ДУ в виде $y = C(x)e^{\int -p(x) dx}$, где $C(x)$ - неизвестная функция

$$\text{Найдём производную: } y' = C'(x)e^{\int -p(x) dx} - p(x)C(x)e^{\int -p(x) dx}$$

Подставим в исходное ДУ и найдём $C(x)$:

$$C'(x)e^{\int -p(x) dx} - p(x)C(x)e^{\int -p(x) dx} + p(x)C(x)e^{\int -p(x) dx}y = q(x)$$

$$\frac{dC}{dx} e^{\int -p(x) dx} = q(x)$$

$$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C^*$$

Подставим и получим общее решение:

$$y = e^{\int -p(x) dx} \int \frac{q(x)}{e^{\int -p(x) dx}} dx + C^* e^{\int -p(x) dx}$$

22. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n -ого порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n -ого порядка, допускающих понижение порядка.

Теорема. (Коши о \exists и $!$ решения задачи Коши)

Пусть дано ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, где функция f определена в некоторой области D , содержащей точку $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$. Пусть функция f удовлетворяет следующим условиям:

- $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ - непрерывная функция $n + 1$ переменных в области D
- все частные производные по переменным $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ непрерывны и ограничены в этой области

Тогда найдётся интервал $(x_0 - h, x_0 + h)$, на котором \exists и $!$ решение $y = \varphi(x)$ данного ДУ, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

Интегрирование ДУ n -ого порядка, допускающих понижение степени

23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n -ого порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -ого порядка.

Теорема. (Коши о \exists и $!$ решения задачи Коши)

Пусть дано линейное ДУ $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = g(x)$, где функция $g(x)$ и коэффициенты $a_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) непрерывны в некоторой области D . Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ существует и единственно решение $y = y(x)$ данного линейного ДУ, удовлетворяющее этим начальным условиям.

Свойства частных решений ЛОДУ n -ого порядка

Теорема 1. Если функция $y_0(x)$ является решение ЛОДУ $L[y] = 0$, то функция $Cy_0(x)$, где $C = \text{const}$, тоже является решением ЛОДУ $L[y] = 0$

Доказательство.

$y_0(x)$ - решение ЛОДУ $L[y] = 0$ по усл., $\implies, L[y_0] = 0$

Найдём (по свойству однородности): $L[Cy_0] = CL[y_0] = C \cdot 0 = 0$

$L[Cy_0] = 0 \implies Cy_0(x)$ является решение ЛОДУ $L[y] = 0$ \blacktriangle

Теорема 2. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями ЛОДУ $L[y] = 0$, то функция $y_1(x) + y_2(x)$ тоже является решение ЛОДУ $L[y] = 0$

Доказательство.

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения ЛОДУ $L[y] = 0$ по усл., $\implies, L[y_1] = 0, L[y_2] = 0$

Найдём (по свойству аддитивности): $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0 + 0 = 0$

$L[y_1 + y_2] = 0 \implies (y_1(x) + y_2(x))$ является решение ЛОДУ $L[y] = 0$ \blacktriangle

(далее необязательные свойства)

Следствие. Линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_my_m(x)$ решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ ЛОДУ $L[y] = 0$ тоже является решением этого ЛОДУ.

Доказательство.

$L[y_1] = 0, L[y_2] = 0, \dots, L[y_m] = 0$ по условию

Найдём $L[C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_my_m] = L[C_1y_1] + L[C_2y_2] + \dots + L[C_my_m] =$
 $= C_1L[y_1] + C_2L[y_2] + \dots + C_mL[y_m] = 0$

$L[C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_my_m] = 0 \implies C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_my_m(x)$ является решением ЛОДУ $L[y] = 0$ \blacktriangle

Утверждение. ЛОДУ $L[y] = 0$ всегда имеет тривиальное решение $y \equiv 0$

Теорема. Совокупность решений ЛОДУ $L[y] = 0$ образует линейное пространство.

24. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций.

Опр. Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно-зависимыми на $[a, b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что на $[a, b]$ выполняется равенство $\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \dots + \alpha_ny_n(x) \equiv 0$, где хотя бы одна $\alpha_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$. Если же это тождество выполняется только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно-независимыми на $[a, b]$.

Теорема. Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, то $\forall x \in [a, b] W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$

Доказательство.

По усл. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, $\implies \exists \alpha_i \neq 0$ такие, что $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \dots + \alpha_ny_n = 0$. Дифференцируя $n - 1$ раз получим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \dots + \alpha_ny_n = 0 \\ \alpha_1y_1' + \alpha_2y_2' + \dots + \alpha_ny_n' = 0 \\ \dots \\ \alpha_1y_1^{(n-1)} + \alpha_2y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_ny_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Получили СЛАУ с n неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

Так как хотя бы одна $\alpha_i \neq 0$, то эта система имеет ненулевое решение. Определителем такой системы является определитель Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$. Полученная система имеет ненулевое решение лишь в том случае, когда её определитель равен 0. То есть:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in [a, b] \blacktriangle$$

25. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n -ого порядка.

Опр. Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно-зависимыми на $[a, b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что на $[a, b]$ выполняется равенство $\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \dots + \alpha_ny_n(x) \equiv 0$, где хотя бы одна $\alpha_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$. Если же это тождество выполняется только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно-независимыми на $[a, b]$.

Теорема. Если линейно независимые на $[a, b]$ функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются решениями ЛОДУ с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x) (i = \overline{1, n})$, то определитель Вронского этих функций отличен от нуля $\forall x \in [a, b]$

Доказательство. (методом от противного)

Допустим, что для какой-то точки $x_0 \in [a, b] W(x_0) = 0$

Составим СЛАУ относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

В силу допущения определитель этой системы $W(x_0) = 0, x_0 \in [a, b]$, \implies , эта система имеет ненулевое решение, то есть хотя бы одно из $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ отлично от нуля

Рассмотрим $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$, то есть линейную комбинацию частных решений. Следовательно, эта функция сама является решением того же ЛОДУ, удовлетворяющим начальному условию $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = 0$

Но этим же начальным условиям удовлетворяет и тривиальное решение $y = 0$

По теореме о единственности решения: $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ на $[a, b]$ и $\exists \alpha_i \neq 0$

По определению линейной зависимости функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - линейно зависимые функции. Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение неверно и $\exists x_0 \in [a, b]$ такой, что $W(x_0) \neq 0$.

То есть $W(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ ▲

26. Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n -ого порядка.

Теорема. У каждого ЛОДУ n -ого порядка $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$ с непрерывными коэффициентами $p_i(x), i = \overline{1, n}$, существует ФСР

Доказательство.

Для построения ФСР зададим n^2 чисел (начальные условия):

$$\begin{array}{c|c|c|c} y_1(x_0) = y_{1_0} & y_1'(x_0) = y'_{1_0} & \dots & y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{1_0}^{(n-1)} \\ y_2(x_0) = y_{2_0} & y_2'(x_0) = y'_{2_0} & \dots & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{2_0}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n(x_0) = y_{n_0} & y_n'(x_0) = y'_{n_0} & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n_0}^{(n-1)} \end{array}$$

Эти числа должны удовлетворять следующему условию:

$$\begin{vmatrix} y_{1_0} & y_{2_0} & \dots & y_{n_0} \\ y'_{1_0} & y'_{2_0} & \dots & y'_{n_0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1_0}^{(n-1)} & y_{2_0}^{(n-1)} & \dots & y_{n_0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Точка x_0 - произвольная точка $\in [a, b]$

Тогда получается, что решение $y_i(x), i = \overline{1, n}$, удовлетворяет этим начальным условиям с определителем Вронского $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы на $[a, b]$ и образуют одну из ФСР ЛОДУ n -ого порядка.▲

27. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -ого порядка.

Теорема. Общее решение на $[a, b]$ ЛОДУ n -ого порядка $L[y] = 0$ с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) равно линейной комбинации ФСР с произвольными постоянными коэффициентами, т.е.: $y_{o.o.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$, где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - ФСР ЛОДУ $L[y] = 0$, а $C_1, C_2, \dots, C_n - const$

Доказательство.

1) Докажем, что $C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ - решение ЛОДУ $L[y] = 0$

Подставим его в ДУ:

$$L[y] = L[C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2] + \dots + C_nL[y_n] = 0$$

Следовательно, $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ является решением ЛОДУ $L[y] = 0$

2) Докажем, что $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ - общее решение ЛОДУ $L[y] = 0$

По условию все коэффициенты есть непрерывные функции на $[a, b]$, \implies , выполнены все условия теоремы Коши \exists и ! решения ЛОДУ $L[y] = 0$.

Решение $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ будет общим решением, если найдутся единственным образом постоянные C_i при произвольно заданных начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $x_0 \in [a, b]$

Пусть решение и его производные удовлетворяют этим условиям:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \dots + C_ny_n(x_0) = y_0 \\ C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) + \dots + C_ny'_n(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Это неоднородная СЛАУ относительно C_1, C_2, \dots, C_n . Определитель этой системы является определителем Вронского $W(x_0)$ для линейно независимой системы функций y_1, y_2, \dots, y_n (решение ЛОДУ $L[y] = 0$) и тогда $W(x) \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение C_1, C_2, \dots, C_n для произвольной точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \implies$
 $\implies y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ - общее решение ЛОДУ $L[y] = 0$ ▲

28. Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим ЛОДУ 2-ого порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, $p_i(x)$ - непрерывная на $[a, b]$ функция для $i = \overline{1, n}$.

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - решения этого ЛОДУ, тогда по определению:

$$\begin{cases} y''_1 + p_1(x)y'_1 + p_2(x)y_1 = 0 & | \cdot (-y_2) \\ y''_2 + p_1(x)y'_2 + p_2(x)y_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -y''_1y_2 - p_1(x)y'_1y_2 - p_2(x)y_1y_2 = 0 \\ y''_2y_1 + p_1(x)y'_2y_1 + p_2(x)y_2y_1 = 0 \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим:

$$y''_2y_1 - y''_1y_2 + p_1(x)(y'_2y_1 - y'_1y_2) = 0 \quad (*)$$

Заметим, что:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1y'_2 - y_2y'_1$$

Тогда уравнение (*) примет вид:

$$y''_2y_1 - y''_1y_2 + p_1(x)W(x) = 0 \quad (**)$$

Найдём:

$$\frac{dW(x)}{dx} = (y_1y'_2 - y'_1y_2)' = y'_1y'_2 + y_1y''_2 - y''_1y_2 - y'_1y'_2 = y_1y''_2 - y''_1y_2$$

Подставляя в (**), получим:

$$\frac{dW(x)}{dx} + p_1(x)W(x) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{dW(x)}{W(x)} &= -p_1(x)dx \\ \int_{x_0}^x \frac{dW(x)}{W(x)} &= - \int_{x_0}^x p_1(x) dx \\ \ln |W(x)| - \ln |W(x_0)| &= - \int_{x_0}^x p_1(x) dx\end{aligned}$$

Тогда получим формулу Остроградского-Лиувилля:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}$$

29. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.

Нахождение общего решения ЛОДУ 2-ого порядка при известном частном решении:

Дано ЛОДУ $y''' + p_1(x)y' + p_2y = 0$ и y_1 - его известное частное решение.

Найдём второе решение этого ДУ, которое будет линейно независимо с y_1 :

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2, W(x) \neq 0$$

Найдём производную:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2}$$

Используя формулу Остроградского-Лиувилля, получим:

$$\frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} \implies \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

Отсюда:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

Докажем, что найденное решение y_2 линейно независимо с данным решением y_1 . Найдём $W[y_1, y_2]$:

$$\begin{aligned}W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1} \end{vmatrix} = \\ &= y_1 y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + e^{-\int p_1(x) dx} - y_1 y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx = e^{-\int p_1(x) dx} > 0 \quad \forall x\end{aligned}$$

Следовательно, функции y_1 и y_2 образуют ФСР. Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -ого порядка.

Теорема. Общее решение ЛНДУ n -ого порядка с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x), i = \overline{1, n}$ и функцией $f(x)$ (правая часть) равно сумме общего решения однородного ДУ и какого-либо частного решения неоднородного ДУ: $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$.

Доказательство.

1) Докажем, что $y_{o.n.}$ есть решение ДУ. По условию $L[y_{ч.н.}] = f(x)$, $L[y_{o.o.}] = 0$

$$L[y_{o.n.}] = L[y_{o.o.} + y_{ч.н.}] = L[y_{o.o.}] + L[y_{ч.н.}] = 0 + f(x) = f(x)$$

Следовательно, $y_{o.n.}$ - решение ДУ

2) Докажем, что $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$ - общее решение

$$y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.} = \sum_{i=1}^n C_i y_i + y_{ч.н.} = (\text{по теореме о структуре общего решения})$$

$= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_{ч.н.}$, где y_1, y_2, \dots, y_n - линейно независимые частные решения соответствующего ЛОДУ, причём:

$$W(X) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Так как коэффициенты $p_i(x), i = \overline{1, n}$, - непрерывны на $[a, b]$, то по теореме Коши о существовании и единственности решения задачи Коши существует единственное решение ДУ, удовлетворяющее заданным условиям. Следовательно, надо доказать, что если решение $y_{o.n.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_{ч.н.}$ и его производные удовлетворяют заданным начальным условиям, то из этих условий можно единственным образом определить $C_1, C_2, \dots, C_n, x_0 \in [a, b]$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{ч.н.}(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0' - y_{ч.н.}'(x_0) \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{ч.н.}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

СЛАУ с определителем $W(x) \neq 0, x_0 \in [a, b]$, \implies , существует единственный набор $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$ $y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \dots + C_n^0 y_n(x) + y_{ч.н.}$ - частное решение

Итак, $y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$ ▲

31. Вывести формулу для общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

Дано ЛОДУ 2-ого порядка: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, a_1, a_2 - const$

Будем искать решение в виде $y = e^{\lambda x}$

Найдём $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Подставим в исходное ДУ, после упрощения получим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$$

Пусть $D = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2$ - действительные корни

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$$

$$a_1 = -2\lambda$$

Первое частное решение: $y = e^{\lambda x}$

Найдём второе частное решение:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx = e^{\lambda x} \int \frac{e^{-a_1 x}}{e^{2\lambda x}} dx = e^{\lambda x} \int \frac{e^{2\lambda x}}{e^{2\lambda x}} dx = x e^{\lambda x}$$

ФСР: $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}$

$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$

32. Вывести формулу для общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

Дано ЛОДУ 2-ого порядка: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, a_1, a_2 - const$

Будем искать решение в виде $y = e^{\lambda x}$

Найдём $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Подставим в исходное ДУ, после упрощения получим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$$

Пусть $D < 0$: λ_1, λ_2 - комплексно сопряжённые

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, (\beta \neq 0)$$

Рассмотрим $e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$ - формула Эйлера

Выделим действительную и мнимую части решения:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ и } y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - e^{\alpha x} \beta \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + e^{\alpha x} \beta \cos \beta x \end{vmatrix} = \\ &= \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + e^{2\alpha x} \beta \cos^2 \beta x - \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + e^{2\alpha x} \beta \sin^2 \beta x = \\ &= e^{2\alpha x} \neq 0 \quad \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

То есть $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ линейно независимые частные решения ДУ и образуют ФСР, по теореме о структуре общего решения ЛОДУ:

$$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.

Доказательство теоремы

Теорема. Если $y_1(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x)$, а $y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_2(x)$, то функция $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$ *

Доказательство.

$$\text{По условию } L[y_1] = f_1(x), L[y_2] = f_2(x)$$

$$\text{Найдём } L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1(x) + f_2(x)$$

Следовательно, функция $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$ ▲

34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-ого порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных.

Дано ЛНДУ $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ с непрерывными коэффициентами $p_i(x), i = \overline{1, n}$

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - ФСР соответствующего ЛОДУ

Будем искать решение ЛНДУ в виде: $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1y_1 + C_2y_2$

где $C_1(x), C_2(x)$ - новые неизвестные функции

Найдём $y' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'$

Наложим ограничение: $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$

Тогда $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$

Найдём $y'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''$

Подставим найденные y, y', y'' в исходное ЛНДУ и упростим:

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_2) + C_2(y_2'' + p_1y_2' + p_2y_2) = f(x)$$

$y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1 = 0$ и $y_2'' + p_1y_2' + p_2y_2 = 0$ по условию

Получим $C_1'y_1' + C_2'y_2 = f(x)$

Это верно только при наложенном ограничении, то есть:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$, так как y_1, y_2 составляют ФСР исходного ДУ. Следовательно, коэффициенты C_1, C_2 определены единственным образом.

Пусть $C_1' = \varphi_1(x), C_2' = \varphi_2(x)$

Тогда $C_1 = \int \varphi_1(x) dx, C_2 = \int \varphi_2(x) dx$

Общее решение ЛНДУ: $y_{o.o.} = C_1y_1 + C_2y_2 + y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx$