

## Модуль 2

### 14. Способы задания множеств. Универсальное, конечное, пустое, равные множества. Включения и подмножества. Диаграмма Эйлера–Венна. Мощность конечного множества.

Способы задания множества:

- Перечисление элементов:  
 $A = \{1, 2, a, c\}$   
 $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- Указание общего характеристического свойства:  
 $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ и } \sqrt{x^2 + 1} < 3\}$

**Опр.** Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются **конечными**.  
Конечно множество такое, у которого нет равномощного ему собственного подмножества.

**Опр.** Множества, состоящие из бесконечного числа элементов, называются **бесконечными**.

**Опр.** Множества, не содержащие ни одного элемента, называются **пустыми**. ( $\emptyset$ )

**Опр.** Множества, состоящие из элементов, образующие все возможные множества данной задачи, называются **универсальными** ( $U$ )

**Опр.** Множества, состоящие из одинаковых элементов, называются **равными**.

**Опр.** Множество  $B$  называется **подмножеством** множества  $A$ , если каждый элемент  $B$  является элементом  $A$ .  $B \subseteq A$ . (Говорят, что  $A$  включает  $B$ ).

Если  $B \subset A$ , то множество  $B$  называется **собственным** подмножеством множества  $A$ .

**Свойства включений:**

- $A \subseteq A$
- $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

**Мощность множества (первичное понимание):** Мощностью конечного множества  $A$  называется количество элементов этого множества.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Для изображения операций над множествами используются диаграммы Эйлера–Венна.

---

### 15. Операции над множествами. Свойства операций над множествами.

Над множествами определены следующие операции:

- Объединение:  $A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$
- Пересечение:  $A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$
- Дополнение:  $\overline{A} = \{x : x \notin A\}$
- $A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$
- $A \oplus B = \{x : ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \vee ((x \notin A) \wedge (x \in B))\}$  (Не на пересечении двух множеств).

Свойства операций над множествами:

- **Коммутативность:**
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- **Ассоциативность:**
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **Дистрибутивность:**
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **Идемпотентность:**
  - $A \cup A = A$
  - $A \cap A = A$
- **Поглощение:**
  - $A \cup (A \cap B) = A$
  - $A \cap (A \cup B) = A$
- **Законы де Моргана:**
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- **Законы нуля и единицы:**
  - $A \cup \emptyset = A$
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - $A \cup U = U$
  - $A \cap U = A$
- **Дополнительные свойства:**
  - $A \cup \emptyset = A$
  - $A \cap \emptyset = \emptyset$
  - $A \cup U = U$
  - $A \cap U = A$
  - $\overline{\overline{A}} = A$
  - $A \cup \overline{A} = U$
  - $A \cap \overline{A} = \emptyset$
  - $A \oplus B = B \oplus A$
  - $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
  - $A \oplus A = \emptyset$
  - $A \oplus A \oplus A = A$
- **Частные случаи:**
  - $A \oplus \emptyset = A$
  - $A \oplus U = \overline{A}$
  - $A \oplus \overline{A} = U$
  - $\overline{A \oplus B} = A \oplus B \oplus U$

---

**16. Упорядоченные пары и кортежи. Прямое (декартово) произведение множеств, его свойства и геометрическая интерпретация.**

Пусть есть множества  $A$  и  $B$  ( $A \neq B$ ).

$a \in A, b \in B$

Тогда:

- $\{a, b\} = \{b, a\}$  - неупорядоченные пары (порядок элементов не важен).
- $(a, b) \neq (b, a)$  - упорядоченные пары (важен порядок элементов).

**Опр.** Если  $(a_1, a_2, \dots, a_n) : \{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$ , то такое упорядоченное множество называется **кортежем**.

**Опр.** Множество все кортежей длины  $n$  на множествах  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называется прямым или **декартовым произведением** множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

**Обозначение.**  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$

**Свойства декартового произведения:**

- **Дистрибутивность относительно объединения:**
  - $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
  - $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- **Дистрибутивность относительно пересечения:**
  - $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
  - $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
- **Свойства пустого множества:**
  - $A \times \emptyset = \emptyset$
  - $\emptyset \times B = \emptyset$
- **Декартово произведение с самим собой:**
  - $A \times A \times \dots \times A = A^n$  ( $n$  раз)

**Геометрический смысл.**

Пусть  $A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$  - отрезки.

Геометрический смысл декартового произведения  $A \times B$  заключается в том, что  $A \times B$  - множество координат всех точек заштрихованного прямоугольника, таких, что абсциссы являются элементами множества  $A$ , а ординаты - элементы множества  $B$ .

---

## 17. Отображения и соответствия. Инъективное, сюръективное, биективное отображения. Обратное соответствие. Сечение соответствия.

**Опр. Отображение**  $f$  из множества  $A$  во множество  $B$  задано, если каждому  $x \in A$  соответствует единственный элемент  $y \in B$ .

**Обозначение.**  $f : A \rightarrow B$

Каждое отображение однозначно задаёт множество упорядоченных пар:

$$\{(x, y) : x \in A, y = f(x)\} \subseteq A \times B$$

**Опр.** В общем случае, когда для отображения  $f$  могут  $\exists$  несколько различных элементов из множества  $A$ , имеющих один и тот же образ  $y_0$ , такие элементы  $x$  называются **прообразами** элемента  $y_0$  при отображении  $f$ .

**Пример прообразов.**  $y = \cos(x), 0 \leq y_0 \leq 1$ .

Тогда прообразы  $\{x : x = \arccos y \pm 2\pi n, n \in \mathbb{N}\}$

**Виды отображений:**

- Отображение  $f : A \rightarrow B$  называется **инъективным**, если  $\forall y \in \text{область значения отображения } f \exists!$  прообраз.

**Пример.**  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ . Тогда верно:  $(y_1 = y_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ .

- Отображение  $f : A \rightarrow B$  называется **сюръективным**, если область значения отображения  $f$  полностью совпадает со множеством  $B$ .
- Отображение  $f : A \rightarrow B$  называется **биективным**, если оно одновременно инъективно и сюръективно.

**Пример.**  $y = \arctan(x)$  - биекция на  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

**Опр.** Если отображение не однозначно, то есть некоторым элементам  $x \in A$  соответствует не по одному элементу  $y \in B$ , то есть несколько образов, то имеет место **соответствие** из множества  $A$  во множество  $B$ .

- $\rho \subseteq A \times B$  - задание соответствия из  $A$  в  $B$ .
- $\rho = \emptyset$  - частый случай.
- $\rho = A \times B$  - универсальное соответствие.

**Опр.** Для соответствия определена **область определения**:

- $Def(\rho)$  - множество всех первых компонент упорядоченных пар, составляющих  $\rho$ .  
 $Def(\rho) = \{x : (\exists y \in B), (x, y) \in \rho\}$
- $Res(\rho)$  - множество всех вторых компонент упорядоченных пар, составляющих  $\rho$ .  
 $Res(\rho) = \{y : (\exists x \in A), (x, y) \in \rho\}$

**Опр. Сечением соответствия  $\rho$  по элементу  $x_0 \in A$**  называется множество  $\rho(x_0) = \{y : (x_0, y) \in \rho\}$  всех вторых компонентов пар соответствия  $\rho$  таких, что первым компонентом является  $x_0$ .

**Опр. Сечением соответствия  $\rho$  по множеству  $E \subseteq A$**  называется множество  $\rho(E) = \{y : (x, y) \in \rho, x \in E\}$  всех вторых компонентов пар соответствия  $\rho$  таких, что первым компонентом является элемент множества  $E$ .

**Опр. Обратным соответствием  $\rho^{-1} \subseteq B \times A$**  называется соответствие, определенное как множество пар  $(y, x)$  таких, что  $(x, y) \in \rho$ .

**Обозначение.**  $\rho^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \rho\}$   
 $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$  - инволюция.

## 18. Способы задания соответствий. Бинарные отношения. Способы задания бинарных отношений.

Пусть дано соответствие  $\rho \subseteq A \times B$ .

**Способы его задания:**

- **Один к одному.**  
 $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2\}$   
 $\rho = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$
- **Табличный.**

$Def(\rho)$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$\rho(Def(\rho))$	$\{b_1, b_2\}$	$\{b_2\}$	$\{b_2\}$

- **Матричный.**

$A \setminus B$	$b_1$	$b_2$
$a_1$	1	1
$a_2$		1
$a_3$		1

- **Двудольным орграфом.**

**Опр.** Соответствие  $R \subseteq A \times A$  называется бинарным отношением на множестве  $A$ .

**Обозначение.**  $R \subseteq A^2$

**Пример.**

- $x, y \in \mathbb{N}$
- $x \leq y$  - бинарное отношение (инфиксная запись).
- $(x, y) \in \leq$  - имя бинарного выражения. (постфиксная запись)
- $x, y \in R$  или  $xRy$  - в общем виде.

**Опр.** Бинарное отношение  $R$ , в каждой паре которого компоненты совпадают, равномощное множеству  $A$ , называется диагональю множества  $A$ .

**Обозначение.**  $id_A$

**Способы задания бинарных отношений:**

- **Перечисление пар.**

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_3)\}$$

- **Табличный.**

$R(Def(R))$	$a_1$	$a_2$
$R(Res(R))$	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_3\}$

- **Матрицей бинарного отношения.**

	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$a_1$	1	1	1
$a_2$			1
$a_3$			

- **Двудольным орграфом**

**19. Свойства бинарных отношений: рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность, плотность.**

**График отношения.**

**Свойства бинарных отношений.**

Пусть дано множество  $A$  с  $n = |A|$  и  $R \subseteq A^2$

1. **Рефлексивность.**

- БО  $R$  называется **рефлексивным**, если  $\forall x \in A : xRx$ , то есть  $(x, x) \in R \iff id_A \in R$
  - Если диагональ множества  $A$  ( $id_A$ ) полностью отсутствует в БО  $R$ , то есть  $(x, x) \notin R$ , то такое БО называется **иррефлексивным**.
  - Если часть элементов диагонали присутствует в БО, а часть отсутствует, то такое БО называется **нерефлексивным**.
- Пример.** БО "=" - рефлексивно, а БО " $\neq$ " - иррефлексивно.

## 2. Симметричность.

- БО  $R$  называется **симметричным**, если  $\forall (x, y) \in R : (y, x) \in R$ , то есть  $xRy \Rightarrow yRx$
- Если хотя бы для одной пары условие симметричности не выполняется, то БО  $R$  называется **несимметричным**.
- Матрица симметричного БО симметрична относительно  $id_A$ .
- $R = R^{-1}$

## 3. Антисимметричность.

- БО  $R$  называется **антисимметричным**, если:  $(xRy \text{ и } yRx) \Rightarrow x = y$ .
- Антисимметричность совместима с любыми вариантами рефлексии.

## 4. Транзитивность.

- БО  $R$  называется **транзитивным**, если:  $\forall x, y, z \in A : (xRy \text{ и } yRz) \Rightarrow xRz$
- Если хотя бы для одного набора  $x, y, z \in A : (xRy \text{ и } yRz) \nRightarrow xRz$ , то БО  $R$  называется **нетранзитивным**.

## 5. Плотность.

- БО  $R$  называется **плотным**, если  $\forall x, y \in A : xRy, x \neq y \exists z \in A : xRz \text{ и } zRy$ , то есть для любых различных элементов множества  $A$  можно указать третий элемент из  $A$ , который "встраивается" между первыми двумя.
- **Пример.** Отношение строго неравенства на  $\mathbb{R}$  "<" является плотным (на  $\mathbb{N}$  не является).

**График БО** - график соответствия  $R$ , абсциссой и ординатой которого являются элементы множества  $A$

## 20. Классы отношений: эквивалентность, толерантность. Отношения порядка.

Отношение\Свойства	Ирреф-ть	Рефл-ть	Симметр-ть	Антисимм-ть	Транз-ть
Эквивалентность		+	+		+
Толерантность		+	+		
Частичный порядок		+		+	+
Предварительный порядок(квазипорядок)		+			+
Строгий порядок	+			+	+
Строгий предпорядок	+				+

Дальше про эти классы в 21 и 22 вопросах.

## 21. Разбиение множества. Классы эквивалентности. Фактор-множество. Связь понятий отображения, разбиения, эквивалентности.

**Опр.** Пусть  $A$  - некоторое множество. Семейство *попарно непересекающихся* множеств  $C_i, i = \overline{1, n}$  называется **разбиением** множества  $A$ , если их объединение даёт  $A$ :  $\bigcup_{i=1}^n C_i = A$

**Опр.** Пусть  $R$  - отношение эквивалентности на множестве  $A$  и  $x \in A$ . **Классом эквивалентности**  $[x]_R$  по отношению  $R$  называется множество всех вторых компонентов пар отношения  $R$ , у которых первым компонентом является  $x$ . (Сечение отношения эквивалентности по элементу  $x$ ).

**Теорема.** Для любого отношения эквивалентности на множестве  $A$ , множество классов эквивалентности образует разбиение множества  $A$ . Обратная теорема также верна.

**Опр.** Множество всех классов эквивалентности по данному отношению эквивалентности  $R$  на множестве  $A$  называется фактор-множеством множества  $A$  по отношению  $R$ .

**Обозначение.**  $A/R$

**Пример:**

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

Зададим БО с помощью матрицы:

	a	b	c	d	e
a	1	1			
b	1	1			
c			1		
d				1	1
e				1	1

$$[a]_R = \{a, b\}$$

$$[b]_R = \{a, b\}$$

$$[c]_R = \{c\}$$

$$[d]_R = \{d, e\}$$

$$[e]_R = \{d, e\}$$

$$C_1 = \{a, b\}$$

$$C_2 = \{c\}$$

$$C_3 = \{d, e\}$$

Тогда  $A = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

$$A/R = \{C_1, C_2, C_3\}$$

**Существует связь между эквивалентностью, разбиением и отображением.**

$\forall R \subseteq A^2 \exists f : A \rightarrow A/R$ , то есть для любого БО на множестве  $A$  можно задать отображение множества  $A$  в его фактор-множество  $A/R$ .

Если считать, что  $f(x), x \in A$  - класс эквивалентности для элемента  $x$ , то получим, что  $\forall x \in A$  отображение  $f$  сопоставляет единственный класс эквивалентности, содержащий этот элемент. Отображение  $f$ - сюръективное.

- **Связь между разбиением и эквивалентностью:**

- Каждое отношение эквивалентности на множестве  $A$  порождает разбиение множества  $A$  на классы эквивалентности.
- **Связь между отображением и эквивалентностью:**
  - Отображение  $f$  может также задавать отношение эквивалентности на множестве  $A$ :  $(a, b) \in R$  тогда и только тогда, когда  $f(a) = f(b)$ . В этом случае отношение эквивалентности порождает разбиение множества  $A$  на классы эквивалентности, которые совпадают с прообразами элементов из  $B$ .

## 22. Отношения порядка и сопоставленные им отношения. Упорядоченные множества.

**Опр.** Множества заданного отношения порядка называются упорядоченными множествами.

**Обозначение.**  $(A, \leq)$  (не больше)

Каждому отношению порядка на  $A$  можно сопоставить следующие БО:

- Отношения строго порядка ( $<$ ) (строго меньше)  
Получено путем удаления из классического  $id_A$ . Записывается так:  
 $\forall x, y \in A : \{x < y \Leftrightarrow x \leq y \text{ и } x \neq y\}$
- Отношение, двойственное к классическому порядку ( $\geq$ ) (не меньше)  
 $\forall x, y \in A : \{x \geq y \Leftrightarrow y \leq x\}$
- Отношение, двойственное к строгому ( $>$ ) (строго больше)  
 $\forall x, y \in A : \{x > y \Leftrightarrow x \geq y \text{ и } x \neq y\}$
- Доминированное отношение ( $\triangleleft$ )  
 $x \triangleleft y$ , если  $x < y$  и  $\nexists z \in A : x < z < y$ , то есть не существует элемента между  $x$  и  $y$ .

## 23. Наибольший, максимальный, наименьший, минимальный элементы упорядоченного множества. Верхние и нижние грани множества. Точные верхняя и нижняя грани. Принцип двойственности для упорядоченных множеств.

**Опр.** Элемент  $a \in A$  называется **наибольшим** элементом множества  $A$ , если  $\forall x \in A : x \leq a$ .

**Опр.** Элемент  $b \in A$  называется **максимальным** элементом множества  $A$ , если  $\forall x \in A : x \leq b$  или  $x$  и  $b$  несравнимы.

Аналогично вводятся понятия наименьшего и минимального элемента.

**Опр.** Пусть  $(A, \leq)$  и  $B \subseteq A$ . Элемент  $a \in A$  называется **верхней (нижней) гранью** множества  $B$ , если  $\forall x \in B : x \leq a$  ( $x \geq a$ ).

Грани образуют множества, значит среди них можно выделить наибольший и наименьший элемент.

**Опр.** Наименьший элемент всех верхних граней множества  $B$  называется **точной верхней гранью** множества  $B$  ( $\sup B$ ).

**Опр.** Наибольший элемент всех нижних граней множества  $B$  называется **точной нижней гранью** множества  $B$  ( $\inf B$ ).

**Примечание.** Точная грань может не принадлежать самому множеству, и может даже не существовать.



Можно считать, что для упорядоченных множеств работает **принцип двойственности**:

Если есть  $(A, \leq)$  и есть свойство, доказанное для этого порядка, то это свойство будет справедливо для двойственного порядка, если:

- Заменить  $\leq$  на  $\geq$  и наоборот.
  - Максимальный элемент заменить на минимальный.
  - $\inf$  заменить на  $\sup$  и наоборот.
- 

## 24. Вполне упорядоченное множество. Индуктивное упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке.

**Опр.**  $(A, \leq)$  называется **вполне упорядоченным**, если его любое непустое подмножество имеет наименьший элемент.

**Опр.** Упорядоченное множество  $(A, \leq)$  называется **индуктивным**, если:

- Оно содержит наименьший элемент
- Всякая неубывающая последовательность этого множества имеет точную верхнюю грань.

**Пример.**  $[0; 1]$  на  $\mathbb{R}$

При  $\leq$  наименьший элемент 0 и всегда есть верхняя грань

**Опр.** Пусть имеются 2 индуктивных упорядоченных множества  $(A_1, \leq)$  и  $(A_2, \leq)$ .

Отображение  $f: A_1 \rightarrow A_2$  называется **непрерывным**, если  $\forall$  неубывающей последовательности элементов множества  $A_1$   $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  образ её точной верхней грани равен точной верхней грани последовательности  $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n), \dots$

То есть:  $f(\sup\{a_n\}) = \sup\{f(a_n)\}$ .

**Опр.** Элемент  $a \in A$ ,  $(A, \leq)$  называется **неподвижной точкой** отображения  $f: A \rightarrow A$ , если  $f(a) = a$ .

**Теорема (о неподвижной точке).** Любое непрерывное отображение  $f$  индуктивного упорядоченного множества в себя имеет наименьшую неподвижную точку.

То есть уравнение  $f(x) = x$  имеет решение  $x_0 = f(x_0)$ . И множество решений этого уравнения образует множество неподвижных точек, которое имеет наименьший элемент.

---

## 25. Диаграммы Хассе для конечных упорядоченных множеств.

Любое упорядоченное множество можно представить в виде схемы, в которой каждый элемент изображается точкой на плоскости. Если элемент  $y$  покрывает элемент  $x$ , то  $x$  и  $y$  соединяются отрезком, причем точка  $x$  располагается ниже точки  $y$ . Такие схемы называют диаграммами Хассе.

Короче говоря, диаграмма Хассе - орграф доминированного отношения. На этом орграфе не отмечаются стрелки, а доминированность элементов определяется расположением выше/ниже.

$(\mathbb{N}, \leq)$

...

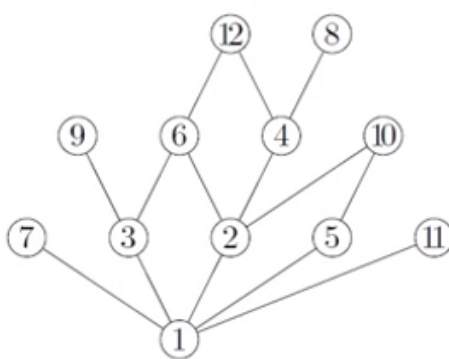
4

3

2

1

$(\{1, 2, \dots, 12\}, |)$



## 26. Мощность множеств. Отношение равномощности. Счетные множества. Нумерации.

**Опр.** Множество  $A$  равномощно ( $\sim$ ) множеству  $B$ , если существует биекция  $f : A \leftrightarrow B$  или  $f^{-1} : B \leftrightarrow A$  (т.е.  $B \sim A$ )

- Отношение равномощности относится к классу эквивалентности.
- Если  $|A|$  обозначение класса эквивалентности по отношению равномощности, то получим мощность множества  $A$ .

**Опр. Мощность множества** - класс эквивалентности по отношению равномощности.

**Опр.** Любое множество, равномощное множеству  $\mathbb{N}$  называется **счетным**.

**Опр.** Биекцию множества  $M$  со множеством  $\mathbb{N}$  называют нумерацией  $\varphi : M \leftrightarrow \mathbb{N}$  (присваивание элементам любого множества числовые значения.)

Пусть даны бесконечные множества  $A$  и  $B$ . Считается, что  $|A| \leq |B|$ , если  $A$  равномощно некоторому подмножеству множества  $B$ .

Тогда имеем:  $|A| \leq |B|$  и  $|B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$  ( $A \sim B$ ).

## 27. Свойства счетных множеств. Равномощные множества.

Свойства счетных множеств:

- Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.
- Для любого бесконечного множества можно выделить 2 непересекающихся между собой счетных подмножества.
- Любое подмножество счетного множества конечно, либо счетно.
- Объединение любого конечного или счетного семейства счетных множеств является счетным.
- Объединение конечного и счетного множества счетно.
- Следующие множества равномощны:
  - а)  $[0; 1] \in \mathbb{R}$
  - б)  $(0; 1) \in \mathbb{R}$
  - в)  $[a; b] \in \mathbb{R}$
  - г)  $(a; b) \in \mathbb{R}$

д)  $\mathbb{R}$

е)  $2^{\mathbb{N}}$  (все подмножества множества  $\mathbb{N}$ )

- **Теорема о квадрате:**

Для произвольного множества  $A$  верно:  $|A| = |A^2|$  (т.е.  $A \sim A^2$ )

- **Теорема Кантора-Бернштейна:**

Для любых двух множеств  $A$  и  $B$  верно одно из трех:

1.  $|A| < |B|$

2.  $|B| < |A|$

3.  $A \sim B$

- Для любого множества  $A$  верно неравенство:  $|2^{\mathbb{N}}| > |A|$

То есть мощность любого счетного множества ограничена, в частности, мощностью булеана.

- Следствие из теоремы о квадрате.

Множество рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  счетно.

Доказательство:

- Каждому рациональному числу  $\frac{a}{b}$  однозначно соответствует упорядоченная пара  $(a, b)$ .
- Следовательно, множество  $\mathbb{Q}$  эквивалентно некоторому бесконечному подмножеству декартового квадрата  $\mathbb{Z}^2$ .
- Согласно теореме о квадрате:  $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}^2$
- Т.к. множества  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Z}^2$  счетны, а любое подмножество счетного множества конечно или счетно, то множество  $\mathbb{Q}$  счетно.  $\triangle$

---

## 28. Свойства счетных множеств при сравнении их мощностей. Теорема Кантора-Бернштейна. Теорема о квадрате.

См. 27 вопрос.

---

## 29. Композиция соответствий: понятие и порядок построения.

**Опр.** Пусть у нас есть два соответствия  $R \subseteq A \times B$  и  $S \subseteq B \times C$ .

Композиция соответствия:  $S \circ R = \{(x, y) : (\exists z \in B), ((x, z) \in R \text{ и } (z, y) \in S)\}$ , то есть пара  $(x, y)$  принадлежит композиции  $S \circ R$ , если существует такой элемент  $z \in B$ , что  $x$  связан с  $z$  через  $R$  и  $z$  связано с  $y$  через  $S$ .

**Пример построения:**

Пусть у нас есть три множества  $A = \{a_1, a_2\}$ ,  $B = \{b_1, b_2\}$ ,  $C = \{c_1, c_2\}$ .

Определим соответствие  $R \subseteq A \times B$ :  $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ .

Определим соответствие  $S \subseteq B \times C$ :  $S = \{(b_1, c_1), (b_2, c_2)\}$ .

Теперь найдём сечение соответствия  $R$  по элементам из  $A$ :

1.  $R(a_1) = \{b_1\}$

После этого ищем сечение соответствия  $S$  по элементам сечения из 1):

$S(b_1) = \{c_1\}$

Нашли пару  $(a_1, c_1)$ , то есть:  $R \circ S(a_1) = \{c_1\}$ . Дальше аналогично.

2.  $R(a_2) = \{b_2\}$

$S(b_2) = \{c_2\}$

Нашли пару  $(a_2, c_2)$ , то есть:  $R \circ S(a_2) = \{c_2\}$ .

Тогда композиция соответствия  $R \circ S = \{(a_1, c_1), (a_2, c_2)\}$ .

Другой пример был представлен на семинаре.

---

### 30. Обобщенная композиция соответствий. Свойства композиции соответствий. Композиция бинарных отношений.

Обобщенная композиция соответствий - это композиция соответствий  $R \subseteq A \times B$  и  $S \subseteq C \times D$ , где множества  $B$  и  $C$  не обязательно равны.

В этом случае ищем  $B \cap C$  и работает также, как и с обычной композицией соответствий.

Пусть также определено соответствие  $G \subseteq E \times F$ , тогда свойства композиции соответствий:

- $(R \circ S) \circ G = R \circ (S \circ G)$
- $R \circ \emptyset = \emptyset \circ R = \emptyset$
- $R \circ (S \cup G) = (R \circ S) \cup (R \circ G)$

**Опр(возможно).** Композицией бинарных отношений  $R \subseteq A^2$  и  $S \subseteq A^2$  называется такое отношение  $(R \circ S) \subseteq A^2$ , что:  $\forall a, c \in A : a(R \circ S)c \Leftrightarrow \exists b \in A : (aRb) \cap (bSc)$ .