2. Полиномиальные представления

Алгебра и полином Жегалкина

Опр. Алгеброй над базисом, состоящим из булевых функций $\wedge, \oplus, 0, 1$, называется **алгеброй Жегалкина**.
Обоз. $< \wedge, \oplus, 0, 1 >$ - алгебра, $F_{ж} = \{\wedge, \oplus, 0, 1\}$ - базис

Свойства операций в базисе Жегалкина

1. $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ - коммутативность
2. $x_1 \wedge (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3)$
3. $x \oplus 0 = x; \qquad x \oplus 1 = \overline{x}$
4. выполняются все свойства конъюнкции и констант булевой алгебры
5. $x \oplus x = 0$

Переход от формулы в базисе Жегалкина к эквивалентной формуле булевом базисе и обратно возможен всегда. Достаточно выразить дизъюнкцию и отрицание в базисе Жегалкина:

- $\overline{x} = x \oplus 1$
- $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1 \overline{x}_2} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus 1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$

$F_{б} \to F_{ж}$

Опр. Формула, имеющая вид суммы по модулю 2 конъюнкций, называется **полиномом Жегалкина** для данной булевой функции.

Пусть f в СДНФ в булевом базисе - дизъюнкция элементарных конъюнкций.
$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3$
Если f_1, f_2 - две любые элементарные конъюнкции, включающие все переменные, то $f_1 \wedge f_2 = 0$.
В базисе Жегалкина: $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2 \oplus f_1 f_2$
При $f_1 \wedge f_2 = 0$: $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2 \oplus 0 = f_1 \oplus f_2$
То есть $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \oplus x_1 x_2 \overline{x}_3 \oplus x_1 \overline{x}_2 x_3$

Получение полинома Жегалкина

$f(x_1, x_2, x_3) = \vee_1(1, 4)$ - значение 1 на 1 и 4 наборах СДНФ.
$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
Получение полинома:
$f = \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \oplus x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) x_3 \oplus x_1 (x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x$
Степень полинома Жегалкина определяется количеством литер в элементарной конъюнкции максимального ранга.

Теорема. Для всякой булевой функции существует полином Жегалкина, причём единственный.