РК 1

Вопросы, оцениваемые в 1 балл

1. Сформулировать определение первообразной.
    - **Опр.** Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F(x)$ диф-ма на (a, b) и $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$, где (a, b) может быть любым
2. Сформулировать определение неопределённого интеграла.
    - **Опр.** Множество всех первообразных функции $f(x)$ на (a, b) называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на (a, b) и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C, C = const$
3. Сформулировать определение определённого интеграла.
    - **Опр.** Пусть $f(x)$ - функция, заданная на отрезке $[a, b]$. Определённым интегралом (интегралом Римана) называется предел интегральной суммы

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

при условии, что $n \to \infty$ и $\max_k \Delta x_k \to 0$, то есть:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

4. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом.
    - **Опр.** Функция $Y(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, определённая на $[a, b]$, называется определённым интегралом с переменным верхним пределом, где $[a, x] \subseteq [a, b]$
5. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода.
    - **Опр.** Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x \in [a, +\infty)$. Тогда несобственным интегралом первого рода $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется предел определённого интеграла с переменным верхним пределом $\int_a^b f(x)\,dx$ при $b \to +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

    - Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.
6. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-го рода.
    - **Опр.** Несобственным интегралом второго рода от функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b)$ и неограниченной в окрестности точки b, называется предел при $\epsilon \to +0$ определённого интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$, если он существует:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

    - Аналогично для функции, неограниченной в окрестности точки a.
7. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.
    - **Опр.** Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x \in [a, +\infty)$. Тогда несобственный интеграл первого рода $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется сходящимся, если **существует конечный предел** определённого интеграла с переменным верхним пределом $\int_a^b f(x)\,dx$ при $b \to +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

- Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.

8. Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.
   - **Опр.** Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x \in [a, +\infty)$. Тогда несобственный интеграл 1-ого рода $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$
9. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 1-го рода.
   - **Опр.** Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x \in [a, +\infty)$. Тогда несобственный интеграл 1-ого рода $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется условно сходящимся, если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, а $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ расходится.
10. Сформулировать определение сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.
    - **Опр.** Несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b)$ и неограниченной в окрестности точки b, называется сходящимся, если **существует конечный предел** при $\epsilon \to +0$ определённого интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

    - Аналогично для функции, неограниченной в окрестности точки a.
11. Сформулировать определение абсолютно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.
    - **Опр.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ и не ограничена в окрестности точки b. Тогда несобственный интеграл 2-ого рода$\int_a^b f(x)\,dx$ называется абсолютно сходящимся, если интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится.
12. Сформулировать определение условно сходящегося несобственного интеграла 2-го рода.
    - **Опр.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ и не ограничена в окрестности точки b. Тогда несобственный интеграл 2-ого рода$\int_a^b f(x)\,dx$ называется условно сходящимся, если $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а $\int_a^b |f(x)|\,dx$ расходится.

Вопросы, оцениваемые в 3 балла

1. Сформулировать и доказать теорему об оценке определённого интеграла.

Теорема. Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Доказательство.
По условию $m \le f(x) \le M$, где $m = min_{[a,b]} f(x), M = max_{[a,b]} f(x)$, и $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, тогда

$$m \int_a^b dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le M \int_a^b dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \blacktriangle$$

2. Сформулировать и доказать теорему о среднем.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на $[a, b]$, то $\exists$ точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c) \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Доказательство.

$f(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса она достигает на $[a, b]$ наименьшее и наибольшее значения $m = min_{[a,b]} f(x)$ и $M = max_{[a,b]} f(x)$ и $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$
Пусть $\varphi > 0$:

$$m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x)$$

$$m \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leq M \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Так как $\varphi(x) > 0$, то $\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq 0$, тогда:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \leq M$$

По теореме Больцано-Коши $\exists\, c \in (a, b)$ такая, что:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \Rightarrow \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \text{ где } c \in (a, b) \blacktriangle$$

3. Сформулировать и доказать теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом.

Теорема. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна на нём, то

$$Y'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Доказательство.
$Y(x) = \int_a^x f(t)\,dt$
$Y(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt, (x + \Delta x) \in [a, b]$
$f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, следовательно, по теореме о среднем:
$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)\int_x^{x+\Delta x} dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x$, где $c \in (x, x + \Delta x)$
По определению производной ($\Delta x \to 0, x < c < x + \Delta x \Rightarrow c \to x$):

$$Y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x) \blacktriangle$$

4. Сформулировать и доказать теорему Ньютона - Лейбница.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство.
Пусть $F(x)$ - $\forall$ первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$
$Y(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ - тоже первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$
Тогда по основной теореме о первообразных: $\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C, c = const \qquad (1)$
Положим $x = a$: $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$
Подставим в (1) и получим: $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$
Положим $x = b$:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \blacktriangle$$

5. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям в определённом интеграле.

Теорема. Если $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывные функции, дифференцируемые в (a, b), то

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Доказательство.
$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$
$u(x)$ и $v(x)$ - непрерывны на $[a, b] \Rightarrow \exists$ определённый интеграл от функций:

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b\ d(uv) - \int_a^b v\,du \Rightarrow \int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du \blacktriangle$$

6. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и выполняется неравенство $0 < f(x) \leq \varphi(x)\ \forall x \in [a, +\infty)$, тогда:

1. если сходится $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже сходится
2. если расходится $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, то $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ тоже расходится

Доказательство.
1) По условию $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, $\implies$, $\exists$ конечный предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b \varphi(x)\,dx = M \implies \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq M$$

По условию $\forall x \in [a, +\infty)\ 0 < f(x) \leq \varphi(x)$, тогда по теореме об интегрировании неравенства
$0 < \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \varphi(x)\,dx \leq M$
Пусть $b_1 \in (b, +\infty)$. Рассмотрим:

$$\int_a^{b_1} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b_1} f(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx \implies \int_a^b f(x)\,dx \text{ есть функция, возрастающая с возрастанием } b$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \leq M \implies \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ - сходящийся}$$

2) (от противного)
Предположим, что $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, тогда по доказательству **1)** $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже сходится, что противоречит условию, $\implies$, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится $\blacktriangle$

7. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$, $f(x) \geq 0, g(x) > 0\ \forall x \geq a$ и существует конечный предел $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda (\neq 0)$. Тогда несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно.
Доказательство.
По условию и определению предела:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x > M \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| < \varepsilon$$

Рассмотрим неравенство:

$$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon$$

$$-\varepsilon + \lambda < \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + \lambda$$

$$(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x) \ \forall x > M \qquad (*)$$

Проинтегрируем правую часть:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < (\lambda + \varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

1. Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, тогда $(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ тоже сходится, так как $(\lambda+\varepsilon)$ - число, не влияющее на сходимость. По теореме о признаке сходимости по неравенству несобственных интегралов 1-ого рода $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже сходится.
2. Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, тогда по теореме о признаке сходимости по неравенству несобственных интегралов 1-ого рода $(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ тоже расходится.
   Аналогично, интегрируя левую часть неравенства $(*)$ получим:
3. Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ тоже сходится.
4. Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже расходится.

В итоге получим, что интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. ▲

8. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-го рода.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна и знакопеременна на $[a, +\infty)$ и $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.
Доказательство.
$f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$ (по условию), $\implies$, $\forall x \in [a, +\infty)$ справедливо неравенство:

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \implies 0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|$$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ сх-ся(по усл.)} \implies 2\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ сх-ся(св-во линейности)} \qquad (1)$$

$$f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)| \ \forall x \in [a, +\infty) \qquad (2)$$

Из (1) и (2):

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\,dx \text{ сх-ся (по 1 признаку сравнения по нер-ву)}$$

Тогда:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\,dx - \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

Оба слагаемых сходятся, $\implies$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится▲

9. Вывести формулу для вычисления площади криволинейного сектора, ограниченного лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой ρ = $\rho(\varphi)$.

- Сделать рисунок

Пусть дана непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция $\rho = \rho(x)$ и $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le 2\pi$
Разобьём криволинейный сектор лучами на n криволинейных секторов:
$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \cdots < \varphi_n = \beta$
$\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$

В каждом частичном секторе возьмём произвольно $\tilde{\varphi_k}, k = \overline{1, n}$, то есть $\tilde{\varphi_k} \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$
$\rho(\tilde{\varphi_k})$ - радиус вектор, соответствующий углу $\tilde{\varphi_k}$
Площадь криволинейного сектора $\approx$ площадь кругового сектора

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \rho^2(\tilde{\varphi_k}) \Delta\varphi_k \text{ - интегральная сумма функции } \rho^2(\varphi)$$

$\rho = \rho(x)$ непрерывна на $[\alpha, \beta] \implies \rho^2(\varphi)$ тоже непрерывна на $[\alpha, \beta] \implies \exists$ конечный предел:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \max_k \Delta\varphi_k \to 0}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \rho^2(\varphi) \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$$

Итак:

$$S_n = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$$

10. Вывести формулу для вычисления длины дуги графика функции $y = f(x)$, отсечённой прямыми $x = a$ и $x = b$.

Пусть кривая $y = f(x)$, где $f(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ и имеющая непрерывную первую производную на этом отрезке. Тогда

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Покажем это:
Разобьём дугу AB на n частей точками $M_0, M_1, \dots, M_n$, абсциссы которых
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
Проведём хорды, соединив соседние точки, и получим ломанную, вписанную в дугу AB, эта ломаная состоит из отрезков $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$, где $M_0 = A, M_n = B$
Обозначим их за $l_1, l_2, \dots, l_n$: $l_i = M_{i-1}M_i$
Периметр этой ломаной $l_n = \sum_{k=1}^{n} l_k$
С уменьшением длин хорд ломаная по своей форме приближается к дуге AB

> **Опр.** Длиной l дуги AB кривой $y = f(x)$ называется предел длины вписанной в неё ломаной, когда число её звеньев неограниченно растёт, а наибольшая из длин звеньев стремится к нулю:
>
> $$l = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max l_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} l_k \qquad (1)$$
>
> При этом предположим, что этот предел существует и не зависит от выбора точек.
> **Опр.** Кривые, для которых предел (1) существует, называются спрямляемыми.

По формуле расстояния между двумя точками на плоскости имеем:

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}, \text{ где}$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$
$\Delta y_k = y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}),$
$y_k = f(x_k),$
$y_{k-1} = f(x_{k-1}),$
$k = \overline{1, n}$

$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}$$

По теореме Лагранжа:

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \text{ где } x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

Тогда $l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$ и длина вписанной ломаной:

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k \text{ - интегральная сумма} \qquad (*)$$

$f'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $\implies$, $\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$ тоже непрерывна на $[a, b]$, поэтому существует предел интегральной суммы $(*)$, который равен определённому интегралу:

$$l = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Получили формулы для вычисления длины дуги кривой в декартовых координатах:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$