

# Подготовка к экзамену ИиДУ

ИУ6-25Б

2024

**1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для неопределённого интеграла.**

**Опр.** Функция  $F(x)$  называется первообразной функции  $f(x)$  на интервале  $(a, b)$ , если  $F(x)$  диф-ма на  $(a, b)$  и  $F'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$ , где  $(a, b)$  может быть любым.

**Свойства первообразной:**

1. Если  $F(x)$  - первообразная  $f(x)$  на  $(a, b)$ , то  $F(x) + C$  тоже первообразная  $f(x)$  на  $(a, b)$ .
2. Если функция  $\Phi(x)$  диф-ма на  $(a, b)$  и  $\Phi'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$ , то  $\Phi(x) = const$  на  $(a, b)$ .
3. Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  - первообразные  $f(x)$  на  $(a, b)$ , то  $F_1(x) - F_2(x) = C, C = const$ .
4. Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $(a, b)$ , то она имеет первообразную на этом интервале.

**Свойства неопределённого интеграла:**

1.  $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2.  $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3.  $\int dF(x) = F(x) + C$
4.  $\int (f_1(x) + \dots + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + \dots + \int f_n(x)dx + C$
5.  $\int Af(x)dx = A \int f(x)dx + C$
6. Если  $\int f(x)dx = F(x) + C$  и  $u = \varphi(x)$ , то  $\int f(u)du = F(u) + C$

**Доказательство теоремы:**

**Теорема.** (об интегрировании по частям)

Если  $u(x)$  и  $v(x)$  - гладкие функции, дифференцируемые на множестве  $\{x\}$ , то

$$\int u dv = uv - \int v du$$

**Доказательство.**

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow u dv = d(uv) - v du$$

$u(x)$  и  $v(x)$  - непрерывны на  $[a, b] \Rightarrow \exists$  определённый интеграл от функций:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du \Rightarrow \int u dv = uv - \int v du \blacktriangle$$

## 2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей.

**Опр.** Рациональной дробью называется дробь вида  $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ , где  $Q_m(x)$  и  $P_n(x)$  - многочлены от  $x$  степени  $m$  и  $n$  соответственно.

**Опр.** Дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя:  $m < n$ , и неправильной, если  $m > n$ .

**Опр.** Простейшими дробями называются дроби:

1.  $\frac{A}{x-a}$  - I тип
2.  $\frac{A}{(x-a)^k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}, k > 1$  - II тип
3.  $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$  - III тип
4.  $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}, k > 1$  - IV тип

**Теорема.** (о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших) Правильная рациональная дробь  $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ ,  $m < n$ , где  $P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1} \dots (x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_mx+q_m)^{l_m}$ , единственным образом может быть представлена в виде суммы элементарных дробей:

$$\begin{aligned} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = & \frac{1}{a_0} \left( \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{A_2}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^1} + \right. \\ & + \frac{B_1}{(x-x_s)^{k_s}} + \frac{B_2}{(x-x_s)^{k_s-1}} + \dots + \frac{B_{k_s}}{(x-x_s)^1} + \dots + \\ & + \frac{C_1x+D_1}{(x^2+xp_1+q_1)^{l_1}} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+xp_2+q_2)^{l_1-1}} + \dots + \frac{C_{l_1}x+D_{l_1}}{(x^2+xp_{l_1}+q_{l_1})^1} + \dots + \\ & \left. \frac{M_1x+N_1}{(x^2+xp_m+q_m)^{l_m}} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+xp_m+q_m)^{l_m-1}} + \dots + \frac{M_{l_m}x+N_{l_m}}{(x^2+xp_m+q_m)^1} \right) \end{aligned}$$

### Интегрирование простейших дробей:

- I тип:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C$$

- II тип:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

- III тип:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \dots$$

- IV тип:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \dots$$

### 3. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции.

#### Свойства определённого интеграла:

**Теорема 1.** Определённый интеграл алгебраической суммы интегрируемых на  $[a, b]$  функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx \pm \dots \pm \int_a^b f_n(x) dx$$

**Теорема 2.** Если  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad c = \text{const}$$

**Теорема 3.**

$$\int_a^b c dx = c \int_a^b dx = c(b - a)$$

**Теорема 4.**

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**Теорема 5.** Если функция  $y = f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq 0$  ( $f(x) \leq 0$ )  $\forall x \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \left( \int_a^b f(x) dx \leq 0 \right)$$

**Теорема 6.** Для любых чисел  $a, b, c$ , расположенных в интервале интегрируемости функции  $f(x)$  справедливо равенство (при условии, что все эти 3 интервала существуют):

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**Теорема 7.** (об интегрировании неравенства)

Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$  ( $f(x) \neq g(x)$ ), то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

**Теорема 8.** (об оценке модуля определённого интеграла)

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Теорема 9.** (об оценке определённого интеграла)

Если  $m$  и  $M$  соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

**Теорема 10.** (об инвариантности неравенства)

Если  $m$  и  $M$  соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на  $[a, b]$  функции  $f(x)$  и функция  $\varphi(x) \geq 0$  и интегрируема на  $[a, b]$ , то

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx$$

**Теорема 11.** (о среднем)

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , а функция  $\varphi(x)$  интегрируема и знакопостоянна на  $[a, b]$ , то  $\exists$  точка  $c \in (a, b)$  такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(c) \int_a^b \varphi(x) dx$$

**Доказательство теоремы:****Теорема о сохранении интегралом знака подынтегральной функции (теорема 5).**

Если функция  $y = f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и  $f(x) \geq 0$  ( $f(x) \leq 0$ )  $\forall x \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \left( \int_a^b f(x) dx \leq 0 \right)$$

**Доказательство.**

Пусть  $a < b$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k, \text{ где } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Пусть  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ , тогда  $f(\xi_k) \geq 0, \Delta x_k > 0 \Rightarrow f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0 \forall k$ , тогда:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0 \blacktriangle$$

**4. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла.**

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

**Теорема об оценке определённого интеграла (теорема 9).**

Если  $m$  и  $M$  соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

**Доказательство.**

По условию  $m \leq f(x) \leq M$ , где  $m = \min_{[a,b]} f(x)$ ,  $M = \max_{[a,b]} f(x)$ , и  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b m dx &\leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \Rightarrow \\ \Rightarrow m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \blacktriangle \end{aligned}$$

**5. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла.**

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

**Теорема об оценке модуля определённого интеграла (теорема 8).**

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**Доказательство.**

$f(x)$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

По теореме 7:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Тогда по определению модуля:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \blacktriangle$$

## 6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

**Теорема о среднем (теорема 11).**

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , а функция  $\varphi(x)$  интегрируема и знакопостоянна на  $[a, b]$ , то  $\exists$  точка  $c \in (a, b)$  такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(c) \int_a^b \varphi(x) dx$$

**Доказательство.**

$f(x)$  непрерывна на  $[a, b] \Rightarrow$  по теореме Вейерштрасса она достигает на  $[a, b]$  наименьшее и наибольшее значения  $m = \min_{[a, b]} f(x)$  и  $M = \max_{[a, b]} f(x)$  и  $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$

Пусть  $\varphi > 0$ :  $m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x)$

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx$$

Так как  $\varphi(x) > 0$ , то  $\int_a^b \varphi(x) dx \geq 0$ , тогда  $m \leq \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \leq M$

По теореме Больцано-Коши  $\exists c \in (a, b)$  такая, что:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x) dx}{\int_a^b \varphi(x) dx} \Rightarrow \int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(c) \int_a^b \varphi(x) dx, \text{ где } c \in (a, b) \blacktriangle$$

## 7. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла с переменным верхним пределом.

**Опр.** Функция  $Y(x) = \int_a^x f(t) dt$ , определённая на  $[a, b]$ , называется определённым интегралом с переменным верхним пределом, где  $[a, x] \subset [a, b]$

**Теорема.** (о производной от интеграла с переменным верхним пределом)

Если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  и непрерывна на нём, то

$$Y'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

**Доказательство.**

$$Y(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$Y(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt, (x + \Delta x) \in [a, b]$$

$f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , следовательно, по теореме о среднем:

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c)(x + \Delta x - x) = f(c)\Delta x, \text{ где } c \in (x, x + \Delta x)$$

По определению производной ( $\Delta x \rightarrow 0, x < c < x + \Delta x \Rightarrow c \rightarrow x$ ):

$$Y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{c \rightarrow x} f(c) = f(x) \blacktriangle$$

## 8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.

**Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.**

**Теорема.** (формула Ньютона-Лейбница)

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Доказательство.**

Пусть  $F(x)$  -  $\forall$  первообразная функции  $f(x)$  на  $[a, b]$

$Y(x) = \int_a^x f(x) dx$  - тоже первообразная функции  $f(x)$  на  $[a, b]$

Тогда по основной теореме о первообразных:  $\int_a^x f(x) dx = F(x) + C, c = const$  (1)

Положим  $x = a$ :  $\int_a^a f(t) dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$

Подставим в (1) и получим:  $\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$

Положим  $x = b$ :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \blacktriangle$$

## 9. Дать геометрическую интерпретацию определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла.

**Сделать рисунок.** Геометрическая интерпретация определённого интеграла - площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, осью  $Ox$  и прямыми  $x = a, x = b$

**Теорема.** (о замене переменной в определённом интеграле)

Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , а функции  $x = \varphi(t), \varphi'(t), f(\varphi(t))$  непрерывны на  $[\alpha, \beta]$  и  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

**Доказательство.**

Формулы замены переменной в неопределённом интеграле:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

Если  $F(x)$  - первообразная функции  $f(x)$ , то  $F(\varphi(t))$  - первообразная функции  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$

По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Так как по условию:  $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Получим:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \blacktriangle$$

**10. Сформулировать свойства определенного интеграла. Интегрирование периодических функций. Интегрирование четных и нечетных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.**

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

**Периодические функции:**

Функция  $f(x)$  - периодическая с периодом  $T$  и непрерывная на  $[a, a + T]$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

**Чётные функции:**

Функция  $f(x)$  - чётная на  $[-a, a]$ , то есть  $\forall x \in [-a, a] f(-x) = f(x)$ :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

**Нечётные функции:**

Функция  $f(x)$  - нечётная на  $[-a, a]$ , то есть  $\forall x \in [-a, a] f(-x) = -f(x)$ :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

**11. Сформулировать свойства определенного интеграла. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определённого интеграла.**

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

**Теорема.** Если  $u(x)$  и  $v(x)$  - непрерывные функции, дифференцируемые в  $(a, b)$ , то

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

**Доказательство.**

$$d(uv) = u dv + v du \Rightarrow u dv = d(uv) - v du$$

$u(x)$  и  $v(x)$  - непрерывны на  $[a, b] \Rightarrow \exists$  определённый интеграл от функций:

$$\int_a^b u dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v du \Rightarrow \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du \blacktriangle$$

**12. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.**

**Опр.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна для  $\forall x \in [a, +\infty)$ . Тогда несобственным интегралом первого рода  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  называется предел определённого интеграла с переменным верхним пределом  $\int_a^b f(x) dx$  при  $b \rightarrow +\infty$ :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.

**Теорема.** (признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-ого рода)

Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны на  $[a, +\infty)$  и выполняется неравенство  $0 < f(x) \leq \varphi(x) \forall x \in [a, +\infty)$ , тогда:

1. если сходится  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ , то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  тоже сходится
2. если расходится  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , то  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  тоже расходится

**Доказательство.**

1) По условию  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  сходится,  $\implies$ ,  $\exists$  конечный предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(x) dx = M \implies \int_a^b \varphi(x) dx \leq M$$

По условию  $\forall x \in [a, +\infty) 0 < f(x) \leq \varphi(x)$ , тогда по теореме об интегрировании неравенства  $0 < \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx \leq M$

Пусть  $b_1 \in (b, +\infty)$ . Рассмотрим:

$$\begin{aligned} \int_a^{b_1} f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^{b_1} f(x) dx > \int_a^b f(x) dx \implies \\ \implies \int_a^b f(x) dx &\text{ есть функция, возрастающая с возрастанием } b \end{aligned}$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \leq M \implies \int_a^{+\infty} f(x) dx - \text{сходящийся}$$

2) (от противного)

Предположим, что  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  сходится, тогда по доказательству 1)  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  тоже сходится, что противоречит условию,  $\implies$ ,  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  расходится  $\blacktriangle$

### 13. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-ого рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-ого рода.

**Опр.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна для  $\forall x \in [a, +\infty)$ . Тогда несобственным интегралом первого рода  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  называется предел определённого интеграла с переменным верхним пределом  $\int_a^b f(x) dx$  при  $b \rightarrow +\infty$ :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.

**Теорема.** (предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-ого рода)

Пусть функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  интегрируемы на отрезке  $[a, b] \subset [a, +\infty)$ ,  $f(x) \geq 0, g(x) > 0 \forall x \geq a$  и существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda (\neq 0)$ . Тогда несобственные интегралы  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно.

**Доказательство.**

По условию и определению предела:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \iff \forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0 : \forall x > M \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda \right| < \varepsilon$$

Рассмотрим неравенство:

$$\begin{aligned} -\varepsilon &< \frac{f(x)}{g(x)} - \lambda < \varepsilon \\ -\varepsilon + \lambda &< \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon + \lambda \end{aligned}$$



$$(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x) \quad \forall x > M \quad (*)$$

Проинтегрируем правую часть:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx < (\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

1. Пусть  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сходится, тогда  $(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$  тоже сходится, так как  $(\lambda + \varepsilon)$  - число, не влияющее на сходимость. По теореме о признаке сходимости по неравенству несобственных интегралов 1-ого рода  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  тоже сходится.
2. Пусть  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  расходится, тогда по теореме о признаке сходимости по неравенству несобственных интегралов 1-ого рода  $(\lambda + \varepsilon) \int_a^{+\infty} g(x) dx$  тоже расходится.

Аналогично, интегрируя левую часть неравенства (\*) получим:

3. Если  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится, то  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  тоже сходится.
4. Если  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  расходится, то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  тоже расходится.

В итоге получим, что интегралы  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  сходятся или расходятся одновременно. ▲

## 14. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-ого рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-ого рода.

**Опр.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена и непрерывна для  $\forall x \in [a, +\infty)$ . Тогда несобственным интегралом первого рода  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  называется предел определённого интеграла с переменным верхним пределом  $\int_a^b f(x) dx$  при  $b \rightarrow +\infty$ :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.

**Теорема.** (признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-ого рода)

Если функция  $f(x)$  непрерывна и знакопеременна на  $[a, +\infty)$  и  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  сходится, то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится.

**Доказательство.**

$f(x)$  непрерывна на  $[a, +\infty)$  (по условию),  $\implies, \forall x \in [a, +\infty)$  справедливо неравенство:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \implies 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ сх-ся (по усл.)} \implies 2 \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ сх-ся (св-во линейности)} \quad (1)$$

$$f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \quad \forall x \in [a, +\infty) \quad (2)$$

Из (1) и (2):

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx \text{ сх-ся (по 1 признаку сравнения по нер-ву)}$$

Тогда:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Оба слагаемых сходятся,  $\implies, \int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится. ▲

## 15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-ого рода и признаки сходимости таких интегралов. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-ого рода.

**Опр.** Несобственный интеграл второго рода от функции  $f(x)$ , непрерывной на  $[a, b)$  и неограниченной в окрестности точки  $b$ , называется сходящимся, если существует конечный предел при  $\varepsilon \rightarrow +0$  определённого интеграла  $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Аналогично для функции, неограниченной в окрестности точки  $a$ .

**Теорема.** Если функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны на  $[a, b)$  и выполняется неравенство  $0 < f(x) \leq \varphi(x) \forall x \in [a, b)$ , тогда:

1. если сходится  $\int_a^b \varphi(x) dx$ , то  $\int_a^b f(x) dx$  тоже сходится
2. если расходится  $\int_a^b f(x) dx$ , то  $\int_a^b \varphi(x) dx$  тоже расходится

**Теорема.** Пусть функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  интегрируемы на  $[a, b)$ ,  $f(x) \geq 0, g(x) > 0 \forall x \geq a$  и существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda (\neq 0)$ . Тогда несобственные интегралы  $\int_a^b f(x) dx$  и  $\int_a^b g(x) dx$  сходятся и расходятся одновременно.

**Теорема.** Если функция  $f(x)$  непрерывна и знакопеременна на  $[a, b)$  и  $\int_a^b |f(x)| dx$  сходится, то  $\int_a^b f(x) dx$  сходится.

### Доказательство теоремы:

**Теорема.** (признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-ого рода)

Если функция  $f(x)$  непрерывна и знакопеременна на  $[a, +\infty)$  и  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  сходится, то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится.

**Доказательство.**

$f(x)$  непрерывна на  $[a, +\infty)$  (по условию),  $\implies, \forall x \in [a, +\infty)$  справедливо неравенство:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \implies 0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$$

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ сх-ся (по усл.)} \implies 2 \int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ сх-ся (св-во линейности)} \quad (1)$$

$$f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)| \forall x \in [a, +\infty) \quad (2)$$

Из (1) и (2):

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx \text{ сх-ся (по 1 признаку сравнения по нер-ву)}$$

Тогда:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

Оба слагаемых сходятся,  $\implies, \int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится.  $\blacktriangle$

**16. Фигура, ограниченная кривой  $y = f(x) \geq 0$  и прямыми  $x = a, x = b$  и  $y = 0$  ( $a < b$ ). Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла площади этой фигуры.**

**Сделать рисунок**

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную кривой  $y = f(x) \geq 0$ , прямыми  $x = a, x = b$  и  $y = 0$ .

Отрезок  $[a, b]$  оси  $Ox$  - основание криволинейной трапеции.

Разобьём его на  $n$  частичных отрезков точками  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ , где  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$

Через точки деления проведём прямые  $\parallel Oy$ , то есть исходную трапецию разобьём на  $n$  трапеций.

Пусть  $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k = \overline{1, n}$

Составим сумму  $(\Delta x_k = x_k - x_{k-1})$ :

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - \text{интегральная сумма Римана}$$

где  $S_k = f(\xi_k) * \Delta x_k$  - площадь  $k$ -ого прямоугольника

$$S_n = \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k - \text{площадь ступенчатой фигуры}$$

Будем считать  $S_n$  приближённым значением площади криволинейной трапеции. Тогда чем больше  $n$  и чем меньше  $\Delta x_k$ , тем более точным будет это приближение. То есть:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

**17. Фигура ограничена лучами  $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$  и кривой  $r = f(\varphi)$ . Здесь  $r$  и  $\varphi$  - полярные координаты точки,  $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ . Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла площади этой фигуры.**

**Сделать рисунок**

Пусть дана непрерывная на  $[\alpha, \beta]$  функция  $\rho = \rho(\varphi)$  и  $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq 2\pi$

Разобьём криволинейный сектор лучами на  $n$  криволинейных секторов:

$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \dots < \varphi_n = \beta$

$\Delta \varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$

В каждом частичном секторе возьмём произвольно  $\tilde{\varphi}_k, k = \overline{1, n}$ , то есть  $\tilde{\varphi}_k \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$

$\rho(\tilde{\varphi}_k)$  - радиус вектор, соответствующий углу  $\tilde{\varphi}_k$

Площадь криволинейного сектора  $\approx$  площадь кругового сектора

$$S_n = \sum_{k=1}^n S_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho^2(\tilde{\varphi}_k) \Delta \varphi_k - \text{интегральная сумма функции } \rho^2(\varphi)$$

$\rho = \rho(\varphi)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta] \implies \rho^2(\varphi)$  тоже непрерывна на  $[\alpha, \beta] \implies \exists$  конечный предел:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta \varphi_k \rightarrow 0}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \rho^2(\tilde{\varphi}_k) \Delta \varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

Итак:

$$S_n = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$$

**18. Тело образованно вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x) \geq 0$ , прямыми  $x = a, x = b$  и  $y = 0, a < b$ . Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла объёма тела вращения.**

**Сделать рисунок**

Дано тело вращения

Пусть  $S(x)$  - площадь поперечного сечения плоскостью  $\perp Ox, a \leq x \leq b$ , и  $S(x)$  - непрерывная функция на  $[a, b]$

Проведём плоскости  $x = x_0 = a, x = x_1, \dots, x = x_n = b$ , они разбивают тело на слои

Выберем в каждом интервале точку  $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k), k = \overline{1, n}$

Для каждого значения  $\xi_k$  построим цилиндрическое тело, образующие которого  $\parallel Ox$ , а направляющая есть контур сечения тела плоскостью  $x = \xi_k$

Объём такого цилиндра  $V_k = S(\xi_k)\Delta x_k$

Сложим все такие цилиндры:

$$V_n = \sum_{k=1}^n S(\xi_k)\Delta x_k$$

Получили приближённое значение объёма тела вращения, при увеличении  $n$  и уменьшении  $\Delta x_k$  приближение становится более точным. То есть:

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n S(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x) dx, \text{ где } S(x) - \text{площадь поперечного сечения}$$

Если кривая задана  $y = f(x)$ , то сечения - окружности, площадь которых  $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$

Подставим в формулу объёма:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

**19. Кривая задана в декартовых координатах уравнение  $y = f(x)$ , где  $x$  и  $y$  - декартовы координаты точки,  $a \leq x \leq b$ . Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.**

**Сделать рисунок**

Пусть кривая  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  - непрерывная функция на  $[a, b]$  и имеющая непрерывную первую производную на этом отрезке. Тогда

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Покажем это:

Разобьём дугу  $AB$  на  $n$  частей точками  $M_0, M_1, \dots, M_n$ , абсциссы которых  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Проведём хорды, соединив соседние точки, и получим ломанную, вписанную в дугу  $AB$ , эта ломаная состоит из отрезков  $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$ , где  $M_0 = A, M_n = B$

Обозначим их за  $l_1, l_2, \dots, l_n$ :  $l_i = M_{i-1}M_i$

Периметр этой ломаной  $l_n = \sum_{k=1}^n l_k$

С уменьшением длин хорд ломаная по своей форме приближается к дуге  $AB$

**Опр.** Длиной  $l$  дуги  $AB$  кривой  $y = f(x)$  называется предел длины вписанной в неё ломаной, когда число её звеньев неограниченно растёт, а наибольшая из длин звеньев стремится к нулю:

$$l = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max l_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n l_k \quad (1)$$

При этом предположим, что этот предел существует и не зависит от выбора точек.

**Опр.** Кривые, для которых предел (1) существует, называются спрямляемыми.

По формуле расстояния между двумя точками на плоскости имеем:

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}, \text{ где}$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

$$\Delta y_k = y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}),$$

$$y_k = f(x_k),$$

$$y_{k-1} = f(x_{k-1}),$$

$$k = \overline{1, n}$$

$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}$$

По теореме Лагранжа:

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \text{ где } x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

Тогда  $l_k = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$  и длина вписанной ломаной:

$$l_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k - \text{интегральная сумма} \quad (*)$$

$f'(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $\implies$ ,  $\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k$  тоже непрерывна на  $[a, b]$ , поэтому существует предел интегральной суммы (\*), который равен определённому интегралу:

$$l = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max_k \Delta x_k \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Получили формулы для вычисления длины дуги кривой в декартовых координатах:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

**20. Кривая задана в полярных координатах уравнением  $r = f(\varphi) \geq 0$ , где  $r$  и  $\varphi$  - полярные координаты точки,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ . Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.**

**Сделать рисунок**

Имеем:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

Найдём:

$$x'_\varphi = r' \cos \varphi - r \sin \varphi$$

$$y'_\varphi = r' \sin \varphi + r \cos \varphi$$

Используем формулу длины дуги графика функции, заданной параметрически:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2} d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2} d\varphi =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 \cos^2 \varphi - 2rr' \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + (r')^2 \sin^2 \varphi + 2rr' \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r')^2 + r^2} d\varphi$$

## 21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод " $u \cdot v$ ") и методом Лагранжа (вариации произвольной постоянной).

**Опр.** Линейным ДУ первого порядка называется ДУ, линейное относительно неизвестной функции и её первой производных, т.е. ДУ вида:

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где  $p(x), q(x)$  - заданные на некотором интервале  $I$  функции.

### Метод Бернулли

Работает для линейных неоднородных уравнений первого порядка и уравнений Бернулли.

Рассмотрим ДУ:  $y' + p(x)y = q(x)$

Производим замену  $y(x) = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v, y' = u'v + uv'$

Подставим:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

$$u'v + uv' = q(x) - p(x)uv$$

Приравняем слагаемые и получим систему:

$$\begin{cases} u'v = -p(x)uv \\ uv' = q(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{du}{dx} = -p(x)u \\ \frac{dv}{dx} = \frac{q(x)}{u} \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{du}{u} = -p(x)dx \\ \frac{dv}{dx} = \frac{q(x)}{u} \end{cases}$$

Получим (для  $u(x)$  не берём константу):

$$\begin{cases} u = e^{\int -p(x) dx} \\ v = \int \frac{q(x)}{e^{\int -p(x) dx}} dx + C \end{cases}$$

Таким образом, общее решение:

$$y = u \cdot v = e^{\int -p(x) dx} \int \frac{q(x)}{e^{\int -p(x) dx}} dx + C e^{\int -p(x) dx}$$

### Метод Лагранжа

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение  $y' + p(x)y = 0$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

$$\ln y = \int -p(x) dx + C$$

$$y = C e^{\int -p(x) dx} - \text{общее решение однородного ДУ}$$

Будем искать общее решение неоднородного ДУ в виде  $y = C(x)e^{\int -p(x) dx}$ , где  $C(x)$  - неизвестная функция

$$\text{Найдём производную: } y' = C'(x)e^{\int -p(x) dx} - p(x)C(x)e^{\int -p(x) dx}$$

Подставим в исходное ДУ и найдём  $C(x)$ :

$$C'(x)e^{\int -p(x) dx} - p(x)C(x)e^{\int -p(x) dx} + p(x)C(x)e^{\int -p(x) dx} = q(x)$$

$$\frac{dC}{dx} e^{\int -p(x) dx} = q(x)$$

$$C(x) = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C^*$$

Подставим и получим общее решение:

$$y = e^{\int -p(x) dx} \int \frac{q(x)}{e^{\int -p(x) dx}} dx + C^* e^{\int -p(x) dx}$$

## 22. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения $n$ -ого порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений $n$ -ого порядка, допускающих понижение порядка.

**Теорема.** (Коши о  $\exists$  и  $!$  решения задачи Коши)

Пусть дано ДУ  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , где функция  $f$  определена в некоторой области  $D$ , содержащей точку  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ . Пусть функция  $f$  удовлетворяет следующим условиям:

- $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  - непрерывная функция  $n + 1$  переменных в области  $D$
- все частные производные по переменным  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  непрерывны и ограничены в этой области

Тогда найдётся интервал  $(x_0 - h, x_0 + h)$ , на котором  $\exists$  и  $!$  решение  $y = \varphi(x)$  данного ДУ, удовлетворяющее начальным условиям  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

### Интегрирование ДУ $n$ -ого порядка, допускающих понижение степени

1. Решение уравнения вида  $y^{(n)} = f(x)$  находится последовательным интегрированием  $n$  раз:

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int (\int f(x) dx + C_1 dx) + C_2 \text{ и так далее}$$

2. Если уравнение  $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)})$  не содержит искомую функцию и её производные  $y', \dots, y^{(k-1)}$ , порядок понижается на  $k$  заменой:  $y^{(k)} = p(x)$ . Уравнение примет вид:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0$$

Находим его общее решение  $p(x) = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$

$$\text{Тогда } y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Находим искомую функцию последовательным интегрированием  $k$  раз и получаем общее решение ДУ.

3. Если уравнение  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)})$  не содержит  $x$ , порядок ДУ можно понизить на 1 заменой  $y' = p(y)$ . Тогда  $y'' = p(y)' = \frac{dp}{dy} y' = \frac{dp}{dy} p = p'p$  и так далее.

В случае ДУ 2-ого порядка получим  $F(y, p, p'p) = 0$

## 23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения $n$ -ого порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -ого порядка.

**Теорема.** (Коши о  $\exists$  и  $!$  решения задачи Коши)

Пусть дано линейное ДУ  $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = g(x)$ , где функция  $g(x)$  и коэффициенты  $a_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) непрерывны в некоторой области  $D$ . Тогда для любой точки  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$  существует и единственно решение  $y = y(x)$  данного линейного ДУ, удовлетворяющее этим начальным условиям.

## Свойства частных решений ЛОДУ $n$ -ого порядка

**Теорема 1.** Если функция  $y_0(x)$  является решение ЛОДУ  $L[y] = 0$ , то функция  $Cy_0(x)$ , где  $C = const$ , тоже является решением ЛОДУ  $L[y] = 0$

**Доказательство.**

$y_0(x)$  - решение ЛОДУ  $L[y] = 0$  по усл.,  $\implies, L[y_0] = 0$

Найдём (по свойству однородности):  $L[Cy_0] = CL[y_0] = C \cdot 0 = 0$

$L[Cy_0] = 0 \implies Cy_0(x)$  является решение ЛОДУ  $L[y] = 0$   $\blacktriangle$

**Теорема 2.** Если функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  являются решениями ЛОДУ  $L[y] = 0$ , то функция  $y_1(x) + y_2(x)$  тоже является решение ЛОДУ  $L[y] = 0$

**Доказательство.**

$y_1(x)$  и  $y_2(x)$  - решения ЛОДУ  $L[y] = 0$  по усл.,  $\implies, L[y_1] = 0, L[y_2] = 0$

Найдём (по свойству аддитивности):  $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0 + 0 = 0$

$L[y_1 + y_2] = 0 \implies (y_1(x) + y_2(x))$  является решение ЛОДУ  $L[y] = 0$   $\blacktriangle$

(далее необязательные свойства)

**Следствие.** Линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами  $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_my_m(x)$  решений  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$  ЛОДУ  $L[y] = 0$  тоже является решением этого ЛОДУ.

**Доказательство.**

$L[y_1] = 0, L[y_2] = 0, \dots, L[y_m] = 0$  по условию

Найдём  $L[C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_my_m] = L[C_1y_1] + L[C_2y_2] + \dots + L[C_my_m] =$

$= C_1L[y_1] + C_2L[y_2] + \dots + C_mL[y_m] = 0$

$L[C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_my_m] = 0 \implies C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_my_m(x)$  является решением ЛОДУ  $L[y] = 0$   $\blacktriangle$

**Утверждение.** ЛОДУ  $L[y] = 0$  всегда имеет тривиальное решение  $y \equiv 0$

**Теорема.** Совокупность решений ЛОДУ  $L[y] = 0$  образует линейное пространство.

## 24. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций.

**Опр.** Функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  называются линейно-зависимыми на  $[a, b]$ , если существуют постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  такие, что на  $[a, b]$  выполняется равенство  $\alpha_1y_1(x) + \alpha_2y_2(x) + \dots + \alpha_ny_n(x) \equiv 0$ , где хотя бы одна  $\alpha_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ . Если же это тождество выполняется только при условии, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , то функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  называются линейно-независимыми на  $[a, b]$ .

**Теорема.** Если функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы на  $[a, b]$ , то  $\forall x \in [a, b] W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$

**Доказательство.**

По усл.  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  линейно зависимы на  $[a, b]$ ,  $\implies, \exists \alpha_i \neq 0$  такие, что  $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \dots + \alpha_ny_n = 0$ . Дифференцируя  $n - 1$  раз получим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \dots + \alpha_ny_n = 0 \\ \alpha_1y_1' + \alpha_2y_2' + \dots + \alpha_ny_n' = 0 \\ \dots \\ \alpha_1y_1^{(n-1)} + \alpha_2y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_ny_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Получили СЛАУ с  $n$  неизвестными  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

Так как хотя бы одна  $\alpha_i \neq 0$ , то эта система имеет ненулевое решение. Определителем такой системы является определитель Вронского  $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ . Полученная система имеет ненулевое



решение лишь в том случае, когда её определитель равен 0. То есть:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in [a, b]_{\blacktriangle}$$

## 25. Сформулировать определения линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -ого порядка.

**Опр.** Функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  называются линейно-зависимыми на  $[a, b]$ , если существуют постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  такие, что на  $[a, b]$  выполняется равенство  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$ , где хотя бы одна  $\alpha_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Если же это тождество выполняется только при условии, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , то функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  называются линейно-независимыми на  $[a, b]$ .

**Теорема.** Если линейно независимые на  $[a, b]$  функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  являются решениями ЛОДУ с непрерывными на  $[a, b]$  коэффициентами  $p_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), то определитель Вронского этих функций отличен от нуля  $\forall x \in [a, b]$

**Доказательство.** (методом от противного)

Допустим, что для какой-то точки  $x_0 \in [a, b]$   $W(x_0) = 0$

Составим СЛАУ относительно  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ :

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

В силу допущения определитель этой системы  $W(x_0) = 0, x_0 \in [a, b]$ ,  $\implies$ , эта система имеет ненулевое решение, то есть хотя бы одно из  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  отлично от нуля

Рассмотрим  $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$ , то есть линейную комбинацию частных решений. Следовательно, эта функция сама является решением того же ЛОДУ, удовлетворяющим начальному условию  $y(x_0) = y'(x_0) = \dots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$

Но этим же начальным условиям удовлетворяет и тривиальное решение  $y = 0$

По теореме о единственности решения:  $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$  на  $[a, b]$  и  $\exists \alpha_i \neq 0$

По определению линейной зависимости функций  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  - линейно зависимые функции. Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение неверно и  $\nexists x_0 \in [a, b]$  такой, что  $W(x_0) \neq 0$ .

То есть  $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]_{\blacktriangle}$

## 26. Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -ого порядка.

**Теорема.** У каждого ЛОДУ  $n$ -ого порядка  $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$  с непрерывными коэффициентами  $p_i(x), i = \overline{1, n}$ , существует ФСР

**Доказательство.**

Для построения ФСР зададим  $n^2$  чисел (начальные условия):

$$\begin{array}{ccccccc}
y_1(x_0) = y_{1_0} & y'_1(x_0) = y'_{1_0} & \dots & y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{1_0}^{(n-1)} \\
y_2(x_0) = y_{2_0} & y'_2(x_0) = y'_{2_0} & \dots & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{2_0}^{(n-1)} \\
\dots & \dots & & \dots \\
y_n(x_0) = y_{n_0} & y'_n(x_0) = y'_{n_0} & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n_0}^{(n-1)}
\end{array}$$

Эти числа должны удовлетворять следующему условию:

$$\begin{vmatrix}
y_{1_0} & y_{2_0} & \dots & y_{n_0} \\
y'_{1_0} & y'_{2_0} & \dots & y'_{n_0} \\
\dots & \dots & & \dots \\
y_{1_0}^{(n-1)} & y_{2_0}^{(n-1)} & \dots & y_{n_0}^{(n-1)}
\end{vmatrix} \neq 0$$

Точка  $x_0$  - произвольная точка  $\in [a, b]$

Тогда получается, что решение  $y_i(x), i = \overline{1, n}$ , удовлетворяет этим начальным условиям с определителем Вронского  $W(x_0) \neq 0$ . Следовательно, функции  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  линейно независимы на  $[a, b]$  и образуют одну из ФСР ЛОДУ  $n$ -ого порядка.  $\blacktriangle$

## 27. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения $n$ -ого порядка.

**Теорема.** Общее решение на  $[a, b]$  ЛОДУ  $n$ -ого порядка  $L[y] = 0$  с непрерывными на  $[a, b]$  коэффициентами  $p_i(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) равно линейной комбинации ФСР с произвольными постоянными коэффициентами, т.е.:  $y_{o.o.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ , где  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  - ФСР ЛОДУ  $L[y] = 0$ , а  $C_1, C_2, \dots, C_n - const$

**Доказательство.**

1) Докажем, что  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  - решение ЛОДУ  $L[y] = 0$

Подставим его в ДУ:

$$L[y] = L[C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] + \dots + C_n L[y_n] = 0$$

Следовательно,  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  является решением ЛОДУ  $L[y] = 0$

2) Докажем, что  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  - общее решение ЛОДУ  $L[y] = 0$

По условию все коэффициенты есть непрерывные функции на  $[a, b]$ ,  $\implies$ , выполнены все условия теоремы Коши  $\exists$  и ! решения ЛОДУ  $L[y] = 0$ .

Решение  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  будет общим решением, если найдутся единственным образом постоянные  $C_i$  при произвольно заданных начальных условиях  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ , где  $x_0 \in [a, b]$

Пусть решение и его производные удовлетворяют этим условиям:

$$\begin{cases}
C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\
C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) = y'_0 \\
\dots \\
C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}
\end{cases}$$

Это неоднородная СЛАУ относительно  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Определитель этой системы является определителем Вронского  $W(x_0)$  для линейно независимой системы функций  $y_1, y_2, \dots, y_n$  (решение ЛОДУ  $L[y] = 0$ ) и тогда  $W(x) \neq 0$ . Следовательно, система имеет единственное решение  $C_1, C_2, \dots, C_n$  для произвольной точки  $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \implies$

$\implies y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  - общее решение ЛОДУ  $L[y] = 0$   $\blacktriangle$

## 28. Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим ЛОДУ 2-ого порядка  $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ ,  $p_i(x)$  - непрерывная на  $[a, b]$  функция для  $i = \overline{1, n}$ .

Пусть  $y_1(x), y_2(x)$  - решения этого ЛОДУ, тогда по определению:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 & | \cdot (-y_2) \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -y_1''y_2 - p_1(x)y_1'y_2 - p_2(x)y_1y_2 = 0 \\ y_2''y_1 + p_1(x)y_2'y_1 + p_2(x)y_2y_1 = 0 \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим:

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p_1(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0 \quad (*)$$

Заметим, что:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

Тогда уравнение (\*) примет вид:

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p_1(x)W(x) = 0 \quad (**)$$

Найдём:

$$\frac{dW(x)}{dx} = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

Подставляя в (\*\*), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dW(x)}{dx} + p_1(x)W(x) &= 0 \\ \frac{dW(x)}{W(x)} &= -p_1(x)dx \\ \int_{x_0}^x \frac{dW(x)}{W(x)} &= - \int_{x_0}^x p_1(x) dx \\ \ln |W(x)| - \ln |W(x_0)| &= - \int_{x_0}^x p_1(x) dx \end{aligned}$$

Тогда получим формулу Остроградского-Лиувилля:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}$$

## 29. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.

**Нахождение общего решения ЛОДУ 2-ого порядка при известном частном решении:**

Дано ЛОДУ  $y'' + p_1(x)y' + p_2y = 0$  и  $y_1$  - его известное частное решение.

Найдём второе решение этого ДУ, которое будет линейно независимо с  $y_1$ :

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2, W(x) \neq 0$$

Найдём производную:

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2}$$

Используя формулу Остроградского-Лиувилля, получим:

$$\frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} \implies \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

Отсюда:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

Докажем, что найденное решение  $y_2$  линейно независимо с данным решением  $y_1$ . Найдём  $W[y_1, y_2]$ :

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx \\ y_1' & y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1} \end{vmatrix} = \\ &= y_1 y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + e^{-\int p_1(x) dx} - y_1 y_1' \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx = e^{-\int p_1(x) dx} > 0 \quad \forall x \end{aligned}$$

Следовательно, функции  $y_1$  и  $y_2$  образуют ФСР. Общее решение имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx$$

### 30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения $n$ -ого порядка.

**Теорема.** Общее решение ЛНДУ  $n$ -ого порядка с непрерывными на  $[a, b]$  коэффициентами  $p_i(x), i = \overline{1, n}$  и функцией  $f(x)$  (правая часть) равно сумме общего решения однородного ДУ и какого-либо частного решения неоднородного ДУ:  $y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$ .

**Доказательство.**

1) Докажем, что  $y_{\text{о.н.}}$  есть решение ДУ. По условию  $L[y_{\text{ч.н.}}] = f(x)$ ,  $L[y_{\text{о.о.}}] = 0$

$$L[y_{\text{о.н.}}] = L[y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}] = L[y_{\text{о.о.}}] + L[y_{\text{ч.н.}}] = 0 + f(x) = f(x)$$

Следовательно,  $y_{\text{о.н.}}$  - решение ДУ

2) Докажем, что  $y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$  - общее решение

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = \sum_{i=1}^n C_i y_i + y_{\text{ч.н.}} = (\text{по теореме о структуре общего решения})$$

$= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_{\text{ч.н.}}$ , где  $y_1, y_2, \dots, y_n$  - линейно независимые частные решения соответствующего ЛОДУ, причём:

$$W(X) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Так как коэффициенты  $p_i(x), i = \overline{1, n}$ , - непрерывны на  $[a, b]$ , то по теореме Коши о существовании и единственности решения задачи Коши существует единственное решение ДУ, удовлетворяющее заданным условиям. Следовательно, надо доказать, что если решение  $y_{\text{о.н.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_{\text{ч.н.}}$  и его производные удовлетворяют заданным начальным условиям, то из этих условий можно единственным образом определить  $C_1, C_2, \dots, C_n, x_0 \in [a, b]$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{\text{ч.н.}}(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0' - y_{\text{ч.н.}}'(x_0) \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{\text{ч.н.}}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

СЛАУ с определителем  $W(x) \neq 0, x_0 \in [a, b]$ ,  $\implies$ , существует единственный набор  $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n = C_n^0$   $y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \dots + C_n^0 y_n(x) + y_{\text{ч.н.}}$  - частное решение

Итак,  $y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$  ▲

### 31. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

Дано ЛОДУ 2-ого порядка:  $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ ,  $a_1, a_2 - const$

Будем искать решение в виде  $y = e^{\lambda x}$

Найдём  $y' = \lambda e^{\lambda x}$  и  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Подставим в исходное ДУ, после упрощения получим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$$

Пусть  $D = 0$ :  $\lambda_1 = \lambda_2$  - действительные корни

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$$

$$a_1 = -2\lambda$$

Первое частное решение:  $y = e^{\lambda x}$

Найдём второе частное решение:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx = e^{\lambda x} \int \frac{e^{-a_1 x}}{e^{2\lambda x}} dx = e^{\lambda x} \int \frac{e^{2\lambda x}}{e^{2\lambda x}} dx = x e^{\lambda x}$$

ФСР:  $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}$

$$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

### 32. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

Дано ЛОДУ 2-ого порядка:  $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ ,  $a_1, a_2 - const$

Будем искать решение в виде  $y = e^{\lambda x}$

Найдём  $y' = \lambda e^{\lambda x}$  и  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Подставим в исходное ДУ, после упрощения получим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

$$D = a_1^2 - 4a_2$$

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$$

Пусть  $D < 0$ :  $\lambda_1, \lambda_2$  - комплексно сопряжённые

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, (\beta \neq 0)$$

Рассмотрим частные решения данного ЛОДУ:

$$y_1^{**} = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) - \text{формула Эйлера}$$

$$y_2^{**} = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} (\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)) = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) - \text{формула Эйлера}$$

По свойству частных решений ЛОДУ, функции  $y_1^* = y_1^{**} + y_2^{**}$  и  $y_2^* = y_1^{**} - y_2^{**}$  также являются частными решениями данного ЛОДУ

$$y_1^* = y_1^{**} + y_2^{**} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x + \cos \beta x - i \sin \beta x) = 2e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_2^* = y_1^{**} - y_2^{**} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x - \cos \beta x + i \sin \beta x) = 2ie^{\alpha x} \sin \beta x$$

По свойству частных решений ЛОДУ, функции  $y_1 = \frac{1}{2}y_1^*$  и  $y_2 = \frac{1}{2i}y_2^*$  также являются частными решениями данного ЛОДУ

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - e^{\alpha x} \beta \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + e^{\alpha x} \beta \cos \beta x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + e^{2\alpha x} \beta \cos^2 \beta x - \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + e^{2\alpha x} \beta \sin^2 \beta x = \\
&= e^{2\alpha x} \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]
\end{aligned}$$

То есть  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$  и  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$  линейно независимые частные решения ДУ и образуют ФСР, по теореме о структуре общего решения ЛОДУ:

$$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

### 33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.

Дано ЛНДУ  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$ , где  $a_i = \text{const}$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Правая часть имеет вид:  $e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$ , где  $P_n(x)$  и  $Q_m(x)$  - многочлены от  $x$  степеней  $n$  и  $m$  соответственно,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Рассмотрим соответствующее однородное ДУ  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$

Характеристическое уравнение:  $\lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$

$$y_{o.n.} = y_{o.o.} + y_{ч.н.}$$

Частное решение неоднородного ДУ находим в виде:

$$y_{ч.н.} = x^r e^{\alpha x} [R_s(x) \cos \beta x + T_s(x) \sin \beta x],$$

$r$  - кратность корней  $\alpha \pm \beta i$  в характеристическом уравнении,  $r = 0$ , если корнем не является  $s = \max(n, m)$ ,  $R_s(x), T_s(x)$  - общий вид многочленов степени  $s$

Неопределённые коэффициенты находим, подставляя решение в исходное ДУ.

Соответствие между видом правой части неоднородного ДУ и видом его частного решения

#### Доказательство теоремы

**Теорема.** Если  $y_1(x)$  есть решение уравнения  $L[y] = f_1(x)$ , а  $y_2(x)$  есть решение уравнения  $L[y] = f_2(x)$ , то функция  $y_1(x) + y_2(x)$  есть решение уравнения  $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$  \*

**Доказательство.**

По условию  $L[y_1] = f_1(x)$ ,  $L[y_2] = f_2(x)$

Найдём  $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1(x) + f_2(x)$

Следовательно, функция  $y_1(x) + y_2(x)$  есть решение уравнения  $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$  ▲

### 34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-ого порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных.

Дано ЛНДУ  $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$  с непрерывными коэффициентами  $p_i(x), i = \overline{1, n}$

Пусть  $y_1(x), y_2(x)$  - ФСР соответствующего ЛОДУ

Будем искать решение ЛНДУ в виде:  $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$

где  $C_1(x), C_2(x)$  - новые неизвестные функции

Найдём  $y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2'$

Наложим ограничение:  $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$

Тогда  $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$

Найдём  $y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2''$

Подставим найденные  $y, y', y''$  в исходное ЛНДУ и упростим:

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_1 (y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_2) + C_2 (y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2) = f(x)$$

$y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1 = 0$  и  $y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2 = 0$  по условию

Получим  $C_1' y_1' + C_2' y_2 = f(x)$

Это верно только при наложенном ограничении, то есть:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Определителем этой системы является определитель Вронского  $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ , так как  $y_1, y_2$  составляют ФСР исходного ДУ. Следовательно, коэффициенты  $C_1, C_2$  определены единственным образом.

Пусть  $C_1' = \varphi_1(x), C_2' = \varphi_2(x)$

Тогда  $C_1 = \int \varphi_1(x) dx, C_2 = \int \varphi_2(x) dx$

Общее решение ЛНДУ:  $y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_1 \int \varphi_1(x) dx + y_2 \int \varphi_2(x) dx$