

РК 2 1

Вопросы, оцениваемые в 1 балл

1) Сформулировать определение общего решения ОДУ n -ого порядка.

- **Опр.** Общим решением ДУ $y' = f(x, y)$ называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:
 1. зависит от одной независимой переменной x и одной произвольной константы C
 2. при любом значении константы C является решением
 3. для любого начального условия $y(x_0) = y_0 \exists C_0 : y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять начальному условию
- **Опр. (Иванков - бан от Марины Ивановны)** Общим решением ДУ n -ого порядка $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ называется функция $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$, обладающая следующими свойствами:
 1. зависит от одной независимой переменной x и n произвольных констант C_1, \dots, C_n
 2. при любых значениях констант C_1, \dots, C_n является решением ДУ
 3. для любого начального условия $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ существуют константы C_0, \dots, C_n такие, что $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$ и все её производные до $n - 1$ включительно будут удовлетворять начальному условию

2) Сформулировать определение задачи Коши для ОДУ n -ого порядка.

- **Опр.** Задачей Коши называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ ДУ $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$ ($y|_{x=x_0} = y_0$)
- **Опр. (Иванков - бан от Марины Ивановны)** Задачей Коши называют задачу нахождения решения $y(x)$ ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

3) Сформулировать определение линейного ОДУ n -го порядка.

- **Опр.** Линейным ДУ n -ого порядка называется ДУ, линейное относительно неизвестной функции и всех её производных, т.е. ДУ вида:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = g(x),$$

где $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), g(x)$ - заданные на некотором интервале I функции.

4) Сформулировать определение линейной зависимости и линейной независимости системы функций на промежутке.

- **Опр.** Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно-зависимыми на $[a, b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что на $[a, b]$ выполняется равенство $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, где хотя бы одна $\alpha_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Если же это тождество выполняется только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно-независимыми на $[a, b]$.

5) Сформулировать определение определителя Вронского системы функций.

- Опр. Определителем Вронского функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называется определитель вида:

$$W = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

6) Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ

- Опр. Совокупность любых n линейно независимых частных решений однородного уравнения n -ого порядка называются его фундаментальной системой решений (ФСР).

7) Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами.

- Опр. (Иванков - бан от Марины Ивановны) Рассмотрим линейное однородное ДУ с постоянными коэффициентами: $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$, где a_0, a_1, \dots, a_n - вещественные числа. Уравнение $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ называется характеристическим уравнением этого ДУ.

Вопросы, оцениваемые в 3 балла

1) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций.

Теорема. Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, то

$$\forall x \in [a, b] \quad W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$$

Доказательство.

По усл. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, \implies , $\exists \alpha_i \neq 0$ такие, что $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$. Дифференцируя $n - 1$ раз получим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \dots + \alpha_n y_n' = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Получили СЛАУ с n неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

Так как хотя бы одна $\alpha_i \neq 0$, то эта система имеет ненулевое решение. Определителем такой системы является определитель Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$. Полученная система имеет ненулевое решение лишь в том случае, когда её определитель равен 0. То есть:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad \forall x \in [a, b] \blacktriangle$$

2) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ.

Теорема. Если линейно независимые на $[a, b]$ функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются решениями ЛОДУ с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$), то определитель Вронского этих функций отличен от нуля $\forall x \in [a, b]$

Доказательство. (методом от противного)

Допустим, что для какой-то точки $x_0 \in [a, b]$ $W(x_0) = 0$

Составим СЛАУ относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

В силу допущения определитель этой системы $W(x_0) = 0, x_0 \in [a, b], \implies$, эта система имеет ненулевое решение, то есть хотя бы одно из $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ отлично от нуля

Рассмотрим $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$, то есть линейную комбинацию частных решений.

Следовательно, эта функция сама является решением того же ЛОДУ, удовлетворяющим начальному условию $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = 0$

Но этим же начальным условиям удовлетворяет и тривиальное решение $y = 0$

По теореме о единственности решения: $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ на $[a, b]$ и $\exists \alpha_i \neq 0$

По определению линейной зависимости функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - линейно зависимые функции.

Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение неверно и $\nexists x_0 \in [a, b]$ такой, что $W(x_0) = 0$.

То есть $W(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$ ▲

3) Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ n -го порядка.

Теорема. У каждого ЛОДУ n -ого порядка $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$ с непрерывными коэффициентами $p_i(x), i = \overline{1, n}$, существует ФСР

Доказательство.

Для построения ФСР зададим n^2 чисел (начальные условия):

$$\begin{array}{ccccccc} y_1(x_0) = y_{1_0} & y_1'(x_0) = y_{1_0}' & \dots & y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{1_0}^{(n-1)} \\ y_2(x_0) = y_{2_0} & y_2'(x_0) = y_{2_0}' & \dots & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{2_0}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n(x_0) = y_{n_0} & y_n'(x_0) = y_{n_0}' & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n_0}^{(n-1)} \end{array}$$

Эти числа должны удовлетворять следующему условию:

$$\begin{vmatrix} y_{1_0} & y_{2_0} & \dots & y_{n_0} \\ y_{1_0}' & y_{2_0}' & \dots & y_{n_0}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1_0}^{(n-1)} & y_{2_0}^{(n-1)} & \dots & y_{n_0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Точка x_0 - произвольная точка $\in [a, b]$

Тогда получается, что решение $y_i(x), i = \overline{1, n}$, удовлетворяет этим начальным условиям с определителем Вронского $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы на $[a, b]$ и образуют одну из ФСР ЛОДУ n -ого порядка. ▲

4) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного ОДУ n -го порядка.

Теорема. Общее решение на $[a, b]$ ЛОДУ n -ого порядка $L[y] = 0$ с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$) равно линейной комбинации ФСР с произвольными постоянными коэффициентами, т.е.: $y_{o.o.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$, где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - ФСР ЛОДУ $L[y] = 0$, а $C_1, C_2, \dots, C_n - const$

Доказательство.

1) Докажем, что $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ - решение ЛОДУ $L[y] = 0$

Подставим его в ДУ:

$$L[y] = L[C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] + \dots + C_n L[y_n] = 0$$

Следовательно, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ является решением ЛОДУ $L[y] = 0$

2) Докажем, что $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ - общее решение ЛОДУ $L[y] = 0$

По условию все коэффициенты есть непрерывные функции на $[a, b]$, \implies , выполнены все условия теоремы Коши \exists и ! решения ЛОДУ $L[y] = 0$.

Решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ будет общим решением, если найдутся единственным образом постоянные C_i при произвольно заданных начальных условиях $y(x_0) = y_0$,

$$y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \text{ где } x_0 \in [a, b]$$

Пусть решение и его производные удовлетворяют этим условиям:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Это неоднородная СЛАУ относительно C_1, C_2, \dots, C_n . Определитель этой системы является определителем Вронского $W(x_0)$ для линейно независимой системы функций y_1, y_2, \dots, y_n (решение ЛОДУ $L[y] = 0$) и тогда $W(x) \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение C_1, C_2, \dots, C_n для произвольной точки $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \implies$
 $\implies y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ - общее решение ЛОДУ $L[y] = 0$ ▲

5) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ n -го порядка.

6) Сформулировать и доказать теорему о наложении (суперпозиции) частных решений линейного неоднородного ОДУ.

7) Сформулировать и доказать свойства частных решений линейного однородного ОДУ

Теорема 1. Если функция $y_0(x)$ является решение ЛОДУ $L[y] = 0$, то функция $C y_0(x)$, где $C = const$, тоже является решением ЛОДУ $L[y] = 0$

Доказательство.

$$y_0(x) - \text{решение ЛОДУ } L[y] = 0 \text{ по усл.}, \implies, L[y_0] = 0$$

$$\text{Найдём (по свойству однородности): } L[C y_0] = C L[y_0] = C \cdot 0 = 0$$

$$L[C y_0] = 0 \implies C y_0(x) \text{ является решение ЛОДУ } L[y] = 0 \text{ ▲}$$

Теорема 2. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями ЛОДУ $L[y] = 0$, то функция $y_1(x) + y_2(x)$ тоже является решение ЛОДУ $L[y] = 0$

Доказательство.

$$y_1(x) \text{ и } y_2(x) - \text{решения ЛОДУ } L[y] = 0 \text{ по усл.}, \implies, L[y_1] = 0, L[y_2] = 0$$

$$\text{Найдём (по свойству аддитивности): } L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0 + 0 = 0$$

$$L[y_1 + y_2] = 0 \implies (y_1(x) + y_2(x)) \text{ является решение ЛОДУ } L[y] = 0 \text{ ▲}$$

Следствие. Линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами

$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_m y_m(x)$ решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ ЛОДУ $L[y] = 0$ тоже является решением этого ЛОДУ.

Доказательство.

$L[y_1] = 0, L[y_2] = 0, \dots, L[y_m] = 0$ по условию

Найдём

$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m] = L[C_1 y_1] + L[C_2 y_2] + \dots + L[C_m y_m] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] + \dots + C_m L[y_m] = 0$$

$$L[C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m] = 0 \implies C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_m y_m(x) \text{ является решением ЛОДУ}$$

$$L[y] = 0 \blacktriangle$$

Утверждение. ЛОДУ $L[y] = 0$ всегда имеет тривиальное решение $y \equiv 0$

Теорема. Совокупность решений ЛОДУ $L[y] = 0$ образует линейное пространство.

8) Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного ОДУ 2-го порядка

Рассмотрим ЛОДУ 2-ого порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, $p_i(x)$ - непрерывная на $[a, b]$ функция для $i = \overline{1, n}$.

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - решения этого ЛОДУ, тогда по определению:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 & | \cdot (-y_2) \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} -y_1''y_2 - p_1(x)y_1'y_2 - p_2(x)y_1y_2 = 0 \\ y_2''y_1 + p_1(x)y_2'y_1 + p_2(x)y_2y_1 = 0 \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим:

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p_1(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0 \quad (*)$$

Заметим, что:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Тогда уравнение (*) примет вид:

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p_1(x)W(x) = 0 \quad (**)$$

Найдём:

$$\frac{dW(x)}{dx} = (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$$

Подставляя в (**), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dW(x)}{dx} + p_1(x)W(x) &= 0 \\ \frac{dW(x)}{W(x)} &= -p_1(x)dx \\ \int_{x_0}^x \frac{dW(x)}{W(x)} &= - \int_{x_0}^x p_1(x) dx \\ \ln |W(x)| - \ln |W(x_0)| &= - \int_{x_0}^x p_1(x) dx \end{aligned}$$

Тогда получим формулу Остроградского-Лиувилля:

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p_1(x) dx}$$

9) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых действительных корней характеристического уравнения.

10) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

11) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

12) Описать метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка и вывести систему соотношений для варьируемых переменных.