3. Маршруты и обходы графов

Опр. Маршрутом, соединяющим вершины x_i, x_j в графе, называется чередующаяся последовательность $x_i u_q x_w u_e \dots u_k x_j$

- Любые 2 соседних элемента связаны отношением инцидентности
- Любые 2 соседних через один связаны отношением смежности относительно стоящего между ними
- **Маршрут не учитывает ориентацию рёбер**
- Вершины и рёбра могут повторяться

Опр. Маршрут без повторяющихся рёбер называют цепью
Опр. Цепь, все вершины которой различны, называют простой
Опр. Простая цепь, начальная и конечная вершины которой совпадают, называется циклом
Опр. Цикл в орграфе называют контуром
Опр. Цепь в орграфе называют путём
Опр. Число рёбер, составляющих в цепь, называют длиной цепи или пути

Связь понятий маршрута и связности

Опр. Граф является связным тогда и только тогда, когда любые 2 различные его вершины соединены маршрутом
Опр. Сильная связность в орграфе подразумевает, что между 2 любыми вершинами существует путь, слабая связность игнорирует направление рёбер
Отношение связности на множестве вершин графа является отношением эквивалентности:

- Рефлексивно, так любая вершина связна сама с собой
- Симметрично, так как для любого маршрута существует обратный по тем же рёбрам
- Транзитивно, так как $x_i \to x_j, x_j \to x_k \implies x_i \to x_k$

Отношение связности разбивает множество вершин графа на классы эквивалентности.
Опр. Вершина графа x_i называется точкой сочленения, если её удаление из графа увеличивает число компонент связности.
Опр. Если существует хотя бы одна точка сочленения, то граф называется разделимым (иначе неразделимым)
Теорема. Вершина x_k связного графа $G(X, U)$ является точкой сочленения, если и только если в графе $\exists x_i \neq x_j \neq x_k$ такие, что любой путь или любая цепь между x_i и x_j проходит через x_k
Опр. Если в графе 1 точка сочленения, он называется односвязным.
Опр. Граф называют i-связным, если для нарушения его связности необходимо удалить не менее i вершин. i называют числом связности.

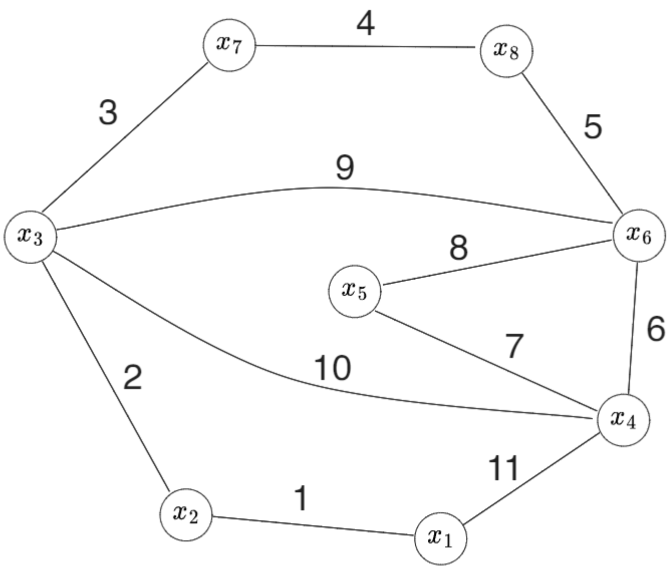
Обходы (Эйлеровы и Гамильтоновы)

Опр. Эйлеровым циклом (обходом) в неографе называют цикл, включающий все рёбра графа и проходящий по каждому ребру только один раз
Можно выделить часть графа, в которой существует эйлеров обход.
Опр. Граф, содержащий эйлеров цикл, называют эйлеровым
Теорема Эйлера. Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда все его вершины имеют чётную степень - сформулирована для неографов
Доказательство.

Необходимость ($\Rightarrow$).
Пусть связные неограф G эйлеров. Следовательно, цикл в G проходит через каждую вершину. Для каждой вершины верно: цикл входит в вершину по одному ребру, а выходит по другому. Таким образом, каждая вершина инцидентна чётному числу рёбер. Так как эйлеров цикл, согласно определению, содержит все рёбра графа, то степени всех вершин чётны.
Достаточность ($\Leftarrow$).
Пусть степени всех вершин связного неографа G чётны. Начнём построение цепи C_1 из вершины x_1. Попав в очередную вершину x_i по некоторому ребру, всегда возможно выйти из неё по другому ребру, так как степень каждому вершины чётная. Тогда окончание цепи C_1 придётся на вершину x_1, то есть C_1 будет циклом. Если при получении цикла C_1 были пройдены все ребра графа G, то G - эйлеров граф. Если были пройдены не все рёбра графа, то будем считать, что пройденные рёбра помечены. Тогда для любой вершины, имеющей непомеченные рёбра среди инцидентных ей рёбер, верно: число непомеченных рёбер чётное. Найдём первую такую вершину x_i и начнём от неё построение цепи C_2 по непомеченным рёбрам. В силу чётности степеней всех вершин и чётности числа непомеченных рёбер имеем: C_2 заканчивается в вершине x_i и будет циклом. Так как граф связный, то циклы C_1, C_2 имеют точку пересечения x_i. Если после построения цикла C_2 в графе ещё остались непомеченные рёбра, аналогично описанному выше строится цикл C_3 и т.д., пока непомеченных рёбер не останется. Так как каждый из построенных циклов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ является эйлеровым подграфом графа G, то в силу связности графа G получаем: граф G - эйлеров.$\blacksquare$
Для эйлеровых графов существует алгоритм Флёри для построения одного из возможных эйлеровых циклов:

1. Выбираем вершину x_i, рассматриваем произвольное ребро и помечаем его как первое, переходим в вершину x_{i+1}
2. Циклически повторяем пункт 1 для x_{i+1}, в качестве номеров используем последовательные натуральные числа
3. Находясь в вершине x_l не следует:
    1. выбирать инцидентное ребро, второй концевой вершиной которого является предыдущая вершина, если есть другие варианты
    2. выбирать ребро-"перешеек", то есть такое ребро, удаление которого нарушит связность графа

Пример:



Теорема. Связный неограф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он может быть представлен объединением циклов, не пересекающихся по рёбрам.