

## Модуль 3

### 31. Понятие графа. Ориентированные и неориентированные графы. Мультиграф. Простой, полный, дополнительный графы.

**Опр.** Графом  $G(X, U)$  называется математический объект, заданный парой множеств  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  - множество вершин графа, и  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  - множество рёбер графа.

**Опр.** Если пара вершин графа  $x_i, x_j$  - неупорядоченные вершины и они соединены ребром  $u_l = \{x_i, x_j\}$ , то такое ребро называется **неориентированным**.

**Опр.** Если пара вершин графа  $x_i, x_j$  - упорядоченные вершины и они соединены ребром  $u_l = (x_i, x_j)$ , то такое ребро называется **ориентированным**.

**Опр.** Граф, состоящий только из неориентированных ребер, называется **неориентированным**. Если же граф состоит только из ориентированных ребер, то он называется **ориентированным**.

**Опр.** Если в графе хотя бы одну пару вершин связывает более чем одно ребро, то такой граф называется **мультиграфом**.

**Опр.** Если концевые вершины ребра совпадают, то такое ребро называется **петлей**.

**Опр.** Если два ребра инциденты одним и тем же двум вершинам, то такие ребра называются **кратными**.

**Опр.** Граф называется **простым**, если в нем нет петель и кратных ребер.

**Опр.** Граф называется **полным**, если две любые его вершины смежны.

**Опр.** Граф  $\overline{G}(X, \overline{U})$  называется **дополнительным** к графу  $G(X, U)$ , если множество его вершин совпадает с множеством вершин графа  $G$ , а множество рёбер  $\overline{U} = U_n \setminus U$ , где  $U_n$  - множество рёбер соответствующего полного графа. Т.е. в дополнительном графе две вершины инциденты одному и тому же ребру тогда и только тогда, когда это ребро отсутствует в исходном графе.

---

### 32. Отношения смежности и инцидентности в графах. Порядок графа, степень и полустепени вершин.

**Опр.** Вершина  $x_i$  инцидента ребру  $u_l$ , если является одной из её концевых вершин.

**Опр.** Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую концевую вершину. (Две вершины называются смежными, если они являются концевыми вершинами одного и того же ребра.)

Отношение инцидентности справедливо для разнородных компонентов (ребро - вершина), а отношение смежности - для однородных (ребро - ребро, вершина - вершина).

**Опр.** Мощность вершин графа  $|X| = n$  называется **порядком** графа.

**Опр.** Число ребер, инцидентных вершине  $x_i \in X$ , называется её **степенью**.

В случае орграфа определены:

- $p^+(x_i)$  - **полустепень захода** (количество входящих в  $x_i$  ориентированных ребер).

- $p^-(x_i)$  - **полустепень исхода** (количество исходящих из  $x_i$  ориентированных ребер).

**Опр.** Если  $p(x_i) = 1$ , то вершина  $x_i$  называется висячей

**Опр.** Если  $p(x_i) = 0$ , то вершина  $x_i$  называется изолированной

Для любой вершины выполняется:  $p(x_i) = p^+(x_i) + p^-(x_i)$ .

### 33. Способы задания графов.

#### 1. Матричный способ:

- Матрица смежности - квадратная матрица  $M$  порядка  $n$  - количество вершин.

$M_{ij} = 1$ , если  $x_i$  смежно  $x_j$

$M_{ij} = 0$ , если  $x_i$  не смежно  $x_j$

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$x_1$		1		1	1	
$x_2$	1		1			
$x_3$		1				
$x_4$	1					
$x_5$	1					1
$x_6$					1	

Она симметрична относительно главной диагонали для неориентированного графа.

- Матрица инцидентностей - прямоугольная матрица  $n \times m$ , где  $n$  - порядок графа,  $m$  - число ребер.

Для неориентированных графов:

- $H_{ij} = 1$ , если  $x_i$  инцидентна  $u_j$
- $H_{ij} = 0$ , иначе
- Сумма столбца = 2

Для ориентированных графов:

- $H_{ij} = 1$ , если  $x_i$  инцидента  $u_j$  и является конечной для него
- $H_{ij} = 0$ , если  $x_i$  не инцидента  $u_j$
- $H_{ij} = -1$ , если  $x_i$  инцидента  $u_j$  и является начальной для него
- Сумма столбца = 0

По строкам матрицы можно вычислить степени и полустепени вершин.

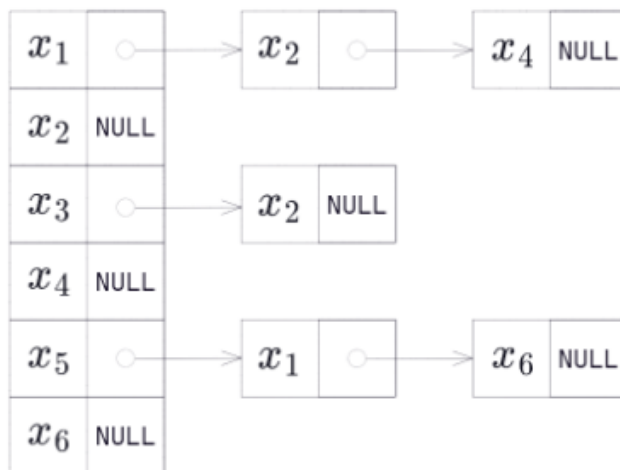
#### 2. Аналитический (основан на понятии отображения.):

- **Обозначение.**  $\Gamma_{x_i}$  - прямое отображение вершины  $x_i$ .

$\Gamma_{x_1} = \{x_2\}$  - исходящие ребра. висяч

$\Gamma_{x_2}^{-1} = \{x_1\}$  - входящие ребра.

#### 3. Списанием (Вектором Айлифа):



#### 4. Массив вершин/ребер:

Откуда	Куда
$x_1$	$x_2$
$x_5$	$x_1$
$x_1$	$x_4$
$x_3$	$x_2$
$x_5$	$x_6$

### 34. Части графа: подграфы и суграфы. Изоморфизм графов.

**Опр.**  $G_1(X_1, U_1)$  - называется **частью** графа  $G(X, U)$ , если он находится в отношении включения к нему:  $X_1 \subseteq X, U_1 \subseteq U$ . ( $G_1 \subseteq G$ )

**Опр.** Часть графа называется **подграфом** графа  $G(X, U)$ , если он находится в отношении строгого включения к нему:  $X_1 \subset X, U_1 \subset U$ . ( $G_1 \subset G$ )

**Опр.** Часть графа называется **суграфом**, если  $X_1 = X$ , а  $U_1 \subseteq U$

**Опр.** Есть два графа  $G_1(X_1, U_1)$  и  $G_2(X_2, U_2)$ . Они называются **изоморфными**, если между множествами вершин  $X_1$  и  $X_2$  установлено взаимно однозначное соответствие, такое, что между множествами  $U_1$  и  $U_2$  устанавливается также взаимно однозначное соответствие, а именно: каждое ребро из множества  $U_2$  инцидентно двум своим концевым вершинам тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины из множества  $X_1$  инцидентны ребру из множества  $U_1$ .

Из определения следует, что в случае изоморфного графа существует две биекции:

- $f_1 : X_1 \leftrightarrow X_2$
- $f_2 : U_1 \leftrightarrow U_2$

**Теорема.** Изоморфизм графом является отношением эквивалентности.

### 35. Теоретико-множественные операции на графах.

Все операции описаны для неографов. Даны графы  $G_1(S_1, U_1)$  и  $G_2(S_2, U_2)$

1. **Объединением** графов  $G_1$  и  $G_2$  называется граф  $G(S, U) = G_1 \cup G_2$  такой, что  $S = S_1 \cup S_2, U = U_1 \cup U_2$
2. **Пересечением** графов  $G_1$  и  $G_2$  называется граф  $G(S, U) = G_1 \cap G_2$  такой, что  $S = S_1 \cap S_2, U = U_1 \cap U_2$
3. **Дополнительным графом** к графу  $G(S, U)$  называется граф  $\bar{G}(S, U)$ , состоящий из того же множества вершин, что и граф  $G$ , и множества рёбер  $\bar{U} = U_n \setminus U$ , где  $U_n$  - множество рёбер соответствующего полного графа.
4. **Композицией** графов  $G_1$  и  $G_2$  называется граф  $G(S, U) = G_1 \circ G_2$ , в котором каждое ребро  $(x_i, x_j)$  присутствует тогда и только тогда, когда в графе  $G_1$  имеется ребро  $(x_i, x_p) \in U_1$ , а в графе  $G_2$  - ребро  $(x_p, x_j) \in U_2$ . При этом имеется в виду, что либо  $S = S_1 = S_2$ , либо  $S = S_1 \cup S_2$ .
5. **Удалением вершины**  $v$  из графа  $G(S, U)$  называется операция, дающая граф  $G - v$ , в котором множество вершин есть  $S \setminus \{v\}$ , а множество рёбер  $U' = \{u | u \in U \setminus E\}$ , где  $E \subset U$  и каждое ребро  $u_i \in E$  инцидентно вершине  $v$ .
6. **Удалением ребра**  $u$  из графа  $G(S, U)$  называется операция, дающая граф  $G - u$ , в котором множество вершин совпадает с множеством вершин исходного графа, множество рёбер есть  $U \setminus \{u\}$
7. **Добавлением ребра**  $u$  в граф  $G(S, U)$  называется операция, дающая граф  $G + u$ , в котором множество вершин совпадает с множеством вершин исходного графа, а множество рёбер есть множество  $U \cup \{u\}$
8. **Стягиванием ребра**  $u = (x_i, x_j)$  графа  $G(S, U)$ , где  $u \in U, \{x_i, x_j\} \subset S$ , называется операция, дающая граф с множеством рёбер  $U \setminus \{u\}$  при отождествлении вершин  $x_i$  и  $x_j$  одной вершине  $v$ , когда рёбра, инцидентные вершинам  $x_i$  и  $x_j$  в исходном графе, становятся инцидентными вершине  $v$  полученного графа. Обозначение:  $G/u$

---

## 36. Маршрут, цепь, цикл, путь, контур в графе. Прямое и обратное транзитивные замыкания.

**Опр. Маршрутом**, соединяющим вершины  $x_i$  и  $x_j$  в графе, называется чередующаяся последовательность  $x_i u_k x_l u_p \dots u_l x_j$ . (Достаточно указывать последовательность вершин  $x_i, x_l, \dots, x_j$ )

**Опр.** Маршрут без повторяющихся рёбер называется **цепью**.

**Опр.** Цепь, все вершины которой различны, называется **простой цепью**.

**Опр.** Простая цепь, начальные и конечные вершины которой совпадают, называется **циклом**.

**Опр.** Цепь в ориентированном графе называется **путем**.

**Опр.** Цикл в орграфе называется **контуром**.

**Опр.** Прямым транзитивным замыканием  $\hat{\Gamma}_{x_i}$  вершины  $x_i$  называется объединение кратных отображений (отображения высших порядков):

$$\hat{\Gamma}_{x_i} = \{x_i\} \cup \Gamma_{x_i} \cup \Gamma_{x_i}^2 \cup \dots \cup \Gamma_{x_i}^n \cup \dots$$

**Опр.** Обратным транзитивным замыканием  $\hat{\Gamma}_{x_i}^{-1}$  вершины  $x_i$  называется объединение всех обратных кратных отображений:

$$\hat{\Gamma}_{x_i}^{-1} = \{x_i\} \cup \Gamma_{x_i}^{-1} \cup \Gamma_{x_i}^{-2} \cup \dots \cup \Gamma_{x_i}^{-n} \cup \dots$$

---

### 37. Понятие связности в графе. Простая и сильная связность.

#### Компоненты связности. Алгоритм Мальгранжа разложения орграфа на компоненты сильной связности.

**Опр.** Неориентированный граф является **связным** тогда и только тогда, когда любые две его различные вершины можно соединить маршрутом. (Для любой вершины  $x_i \in X$  выполняется условие:  $\hat{\Gamma}_{x_i} = X$ )

**Опр. Сильная связность** в орграфе подразумевает, что между двумя любыми вершинами существует именно путь (учитывается направление).

**Опр. Слабая связность** игнорирует направление.

Отношение связности на множестве вершин является отношением эквивалентности.

Отношение связности разбивает множество вершин графа на классы эквивалентности, которые называют **компонентами сильной связности графа**.

Для разложения орграфа на компоненты сильной связности существует **алгоритм Мальгранжа**. Его теоретическая основа:

- Каждая вершина графа может принадлежать только одной компоненте сильной связности и эта компонента ищется следующим образом:  $C_{x_i} = \hat{\Gamma}_{x_i} \cap \hat{\Gamma}_{x_i}^{-1}$

Шаги алгоритма:

- Для произвольной вершины  $x_i$  находим соответствующий ей класс  $C_{x_i}$  по следующей формуле:  
$$C_{x_i} = \hat{\Gamma}_{x_i} \cap \hat{\Gamma}_{x_i}^{-1}.$$
- Вершины, которые вошли в этот класс удаляем из графа
- Повторяем шаги 1 и 2 пока не удалим весь граф.

---

### 38. Соответствие понятий маршрута и связности. Точка сочленения графа и теорема о ней. Понятие $i$ -связного графа.

Граф является связным тогда и только тогда, когда две различные его вершины можно соединить маршрутом.

**Опр.** Вершина графа называется точкой сочленения графа, если её удаление из графа увеличит число компонент связности графа (если она существует, то граф называется разделимым, иначе - неразделимым).

**Теорема.** Вершина  $x_k$  является точкой сочленения связного графа  $G(X, U)$ , если и только если, в графе существуют две такие различные вершины  $x_i$  и  $x_j$ , что любой путь или любая цепь между вершинами  $x_i$  и  $x_j$  проходит через  $x_k$ .

**Опр.** Граф называется  $i$ -связным, если для нарушения его связности необходимо удалить не менее  $i$  вершин.

---

### 39. Теорема (Эйлера) об эйлеровом цикле в связном неографе.

**Опр.** Эйлеровым циклом в неографе называется цикл, включающий в себя все рёбра графа, и проходящий по каждому ребру ровно один раз. Граф, содержащий Эйлеровый цикл, называется Эйлеровым.

**Теорема Эйлера.** Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда все его вершины имеют чётную степень (для неографов).

**Доказательство.**

**Необходимость ( $\Rightarrow$ ).**

Пусть связный неограф  $G$  эйлеров. Следовательно, цикл в  $G$  проходит через каждую вершину. Для каждой вершины верно: цикл входит в вершину по одному ребру, а выходит по другому. Таким образом, каждая вершина инцидентна чётному числу рёбер. Так как эйлеров цикл, согласно определению, содержит все рёбра графа, то степени всех вершин чётны.

**Достаточность ( $\Leftarrow$ ).**

Пусть степени всех вершин связного неографа  $G$  чётны. Начнём построение цепи  $C_1$  из вершины  $x_1$ . Попад в очередную вершину  $x_i$  по некоторому ребру, всегда возможно выйти из неё по другому ребру, так как степень каждой вершины чётная. Тогда окончание цепи  $C_1$  придётся на вершину  $x_1$ , то есть  $C_1$  будет циклом. Если при получении цикла  $C_1$  были пройдены все рёбра графа  $G$ , то  $G$  - эйлеров граф.

Если были пройдены не все рёбра графа, то будем считать, что пройденные рёбра помечены. Тогда для любой вершины, имеющей непомеченные рёбра среди инцидентных ей рёбер, верно: число непомеченных рёбер чётное. Найдём первую такую вершину  $x_i$  и начнём от неё построение цепи  $C_2$  по непомеченным рёбрам. В силу чётности степеней всех вершин и чётности числа непомеченных рёбер имеем:  $C_2$  заканчивается в вершине  $x_i$  и будет циклом. Так как граф связный, то циклы  $C_1, C_2$  имеют точку пересечения  $x_i$ . Если после построения цикла  $C_2$  в графе ещё остались непомеченные рёбра, аналогично описанному выше строится цикл  $C_3$  и т.д., пока непомеченных рёбер не останется. Так как каждый из построенных циклов  $C_1, C_2, \dots, C_n$  является эйлеровым подграфом графа  $G$ , то в силу связности графа  $G$  получаем: граф  $G$  - эйлеров  $\triangle$ .

---

## 40. Эйлеров обход в графе. Алгоритм Флёрри построения эйлерова цикла в связном неографе.

**Опр. Эйлеровым циклом (обходом)** в неографе называется цикл, включающий в себя все рёбра графа, и проходящий по каждому ребру ровно один раз. Граф, содержащий эйлеровый цикл, называется Эйлеровым.

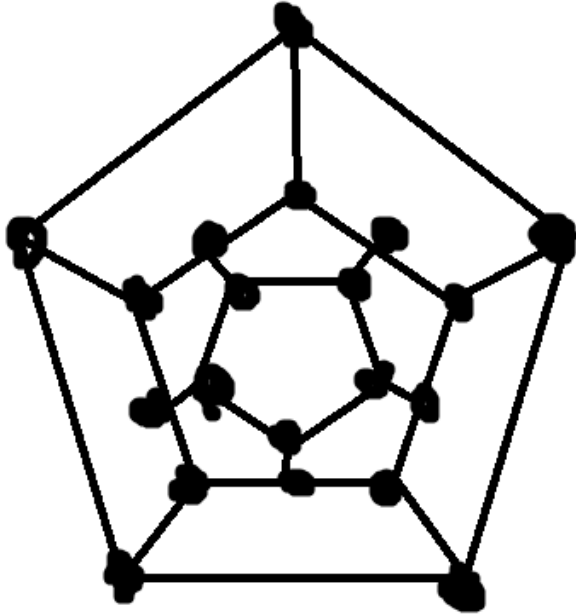
Для эйлеровых графов существует алгоритм Флёрри для построения одного из возможных эйлеровых циклов. Его шаги:

1. Выбираем вершину  $x_i$ , рассматриваем произвольное ребро и помечаем его как первое, переходим в вершину  $x_{i+1}$ .
  2. Циклически повторяем пункт 1 для  $x_{i+1}$ , в качестве номеров используем последовательные натуральные числа.
  3. Находясь в вершине  $x_l$  не следует:
    - Выбирать инцидентное ребро, второй концевой вершиной которого является предыдущая вершина, если есть другие варианты.
    - Выбирать ребро-перешеек, то есть такое ребро, удаление которого нарушит связность графа.
-

## 41. Гамильтоновы графы. Теорема Оре о гамильтоновом цикле в связном неографе.

**Опр.** Гамильтоновым циклом в неографе называется цикл, содержащий вершины графа и проходящий через каждую вершину ровно 1 раз.

Пример:



Критериев Гамильтоновости столь же простых как критерий эйлеровости не существует, но существует ряд теорем о достаточных условиях Гамильтоновости. О необходимости нет.

**Теорема Оре.** Дан неограф  $G(X, U)$  порядка  $n \geq 2$ . Если для любой пары несмежных вершин  $x_i, x_j$  выполняется неравенство  $p(x_i) + p(x_j) \geq n$ , то  $G$  - Гамильтонов граф.

---

## 42. Эйлеровость и гамильтоновость в орграфах.

### Эйлеровость

Дан орграф  $G(X, U)$

1. Если  $G$  - эйлеров, то  $\forall x \in X \ p^+(x) = p^-(x)$
2. Если  $G$  - эйлеров, то он является объединением контуров, не пересекающихся по рёбрам.

**Теорема.** Связный орграф  $G(X, U)$  содержит открытый эйлеров путь тогда и только тогда, когда в нём найдётся 2 различных вершины  $x, y$  ( $x \neq y$ ) такие, что  $p^-(x) = p^+(x) + 1$  и  $p^-(y) = p^+(y) - 1$ , а для всякой иной вершины  $x_i \in X \setminus x, y$  верно  $p^-(x_i) = p^+(x_i)$

### Гамильтоновость

Можно только проверить с помощью достаточного условия

**Теорема.** (одно из достаточных условий)

Дан сильно связный орграф  $G(X, U)$  без петель и кратных рёбер порядка  $n \geq 2$ . Если для любой пары

различных несмежных вершин  $x_i, x_j$  выполняется неравенство  $p(x_i) + p(x_j) \geq 2n - 1$ , то орграф  $G$  содержит Гамильтонов контур.

- Если теорема выполняется, то гарантированно существует гамильтонов обход, а если не выполняется, то он может как быть, так и не быть.

---

### 43. Паросочетания. Двудольные графы. Задача о назначениях.

**Опр. Паросочетанием** в неографе называется множество попарно **несмежных** ребер.

Например, для графа из последовательно соединённых 6 вершин:  $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6$  возможны паросочетания:

- $\{(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6)\}$
- $\{(x_2, x_3), (x_4, x_5)\}$

**Опр.** Максимальным паросочетанием называется паросочетание, в которое больше нельзя добавить ребро.

**Опр.** Паросочетание наибольшей мощности называется паросочетанием из наибольшего возможного количества рёбер.

**Опр.** Совершенным паросочетанием называется паросочетание, охватывающее все вершины.

**Опр.** Граф называется **двудольным**, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся множества  $X_1$  и  $X_2$ , таких, что для любого ребра верно, что одна из его вершин принадлежит  $X_1$ , а вторая  $X_2$ , или наоборот.

**Задача о назначениях.** Задача нахождения требуемого набора паросочетаний во взвешенном двудольном графе в зависимости от условий задачи.

**Пример.** Распределение задач между работниками может производиться как поиск паросочетаний в двудольном графе.

---

### 44. Планарные графы. Понятие грани. Теорема Эйлера о плоском графе и следствия из нее. Теорема «о пяти красках».

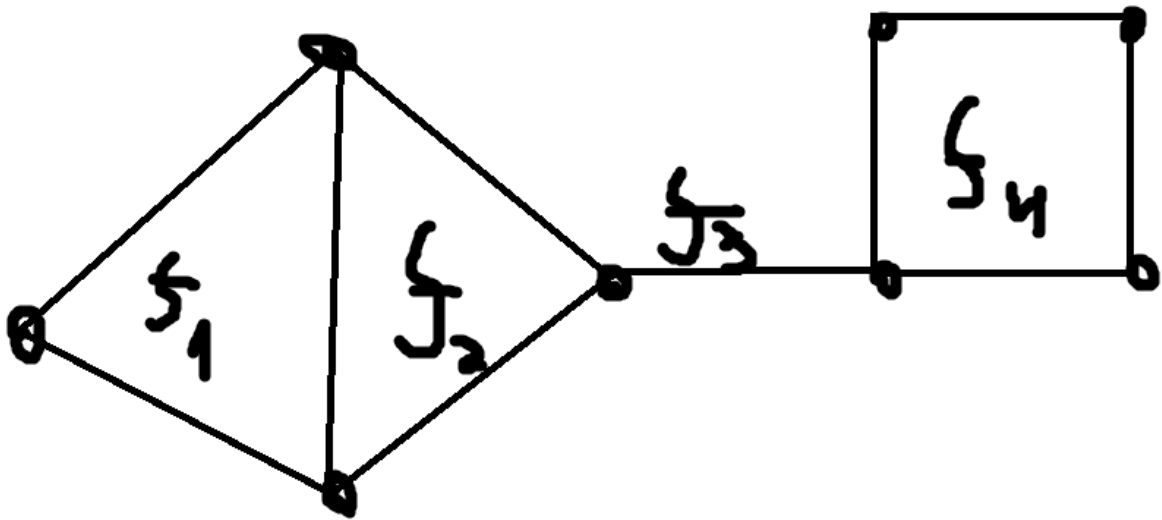
**Опр. Укладкой** графа на плоскость называют процесс получения такого изображения графа, что все его вершины становятся точками одной плоскости, а ребра – линиями на той же плоскости без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме вершин, инцидентных им обоим.

**Опр.** Граф называют **планарным**, если можно выполнить его укладку на плоскость

**Опр.** Граф называют **плоским**, если он уже уложен на плоскости.



**Пример планарного графа.** Здесь  $f_i$  - грани графа.



**Опр.** Область плоскости, ограниченная простым циклом плоского графа и не содержащая никакой другой цикл, называется **внутренней гранью** плоского графа. Вся внешняя по отношению к плоскому графу область плоскости называется его **внешней гранью**.

В приведенном примере  $f_1, f_2, f_4$  - внутренние грани, а  $f_3$  - внешняя грань.

**Теорема Эйлера о плоском графе.** Для связного плоского графа с  $n$  вершинами,  $m$  ребрами и  $r$  гранями справедливо равенство:  $n - m + r = 2$ .

**Следствие 1.** Если количество вершин графа  $n \geq 3$ , то  $m \leq 3(n - 2)$ . (Неравенство Эйлера)

**Следствие 2.** В каждом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5.

**Доказательство (от противного).** Пусть  $G(X, U)$  - планарный граф. Пусть для всякой вершины  $x_i \in X : p(x_i) \geq 6$ . Тогда  $\sum_{x_i \in X} p(x_i) \geq 6n$ . Согласно "лемме о рукопожатиях" (исторически первая теорема теории графов, доказанная Л. Эйлером)  $\sum_{x_i \in X} p(x_i) = 2m$ , где  $m = |U|$ . Следовательно,  $2m \geq 6n$  или  $m \geq 3n$ .

Согласно следствию 1,  $m \leq 3(n - 2)$ . Имеем, что  $3n \leq m \leq 3n - 6$ , что невозможно. Получили противоречие, значит наше предположение неверно, что доказывает следствие 2.  $\triangle$

**Пример применения теоремы: задача о домиках и колодцах.** Есть три дома и три колодца. Можно ли так проложить дорожки между домами и колодцами, чтобы от каждого дома к каждому колодцу вела дорожка, и никакие две дорожки не пересекались бы.

Из условия видно, что есть граф, где 6 вершин и 9 ребер. По теореме Эйлера, так как граф очевидно не имеет циклов длины 3, имеем, что количество ребер должно быть не больше 8. Получили противоречие. Значит такое соединение домов и колодцев невозможно.

(Граф  $K_{3,3}$ )

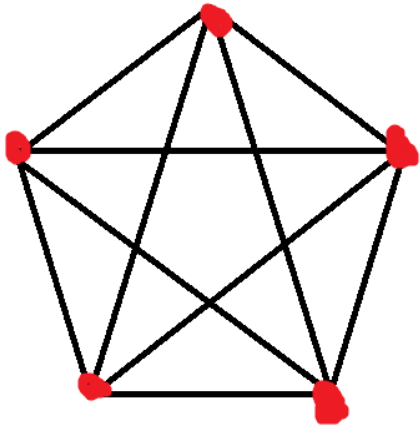
**Теорема о пяти красках.** Всякий планарный граф можно раскрасить 5-ю разными цветами.

---

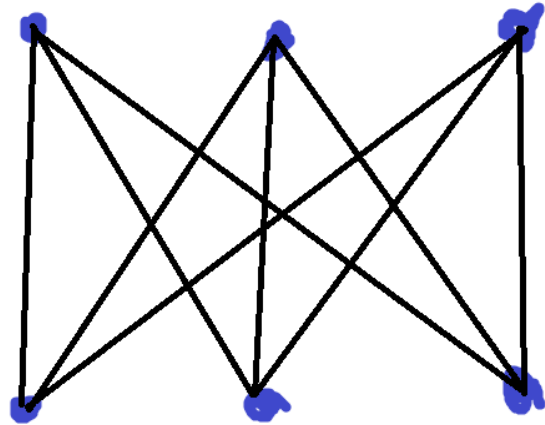
**45. Гомеоморфизм графов. Теорема Понтрягина–Куратовского о планарном графе. Искаженность и толщина графа.**

**Опр.** Два графа гомеоморфны, если они изоморфны (то есть отличаются только изображениями) или могут быть приведены к изоморфизму путем конечного числа стягиваний и разбиений их ребер.

**Теорема Понтрягина-Куратовского.** Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному графу из пяти вершин ( $K_5$ ) или графу "домики колодцы" ( $K_{3,3}$ ).



$K_5$



$K_{3,3}$

**Опр.** Искаженностью графа называется **наименьшее число ребер, удаление которых приводит к планарному графу**

**Опр.** Наименьшее число планарных подграфов графа  $G$ , объединение которых дает исходный граф  $G$ , называют **толщиной графа** и обозначают  $t(G)$ . Очевидно, толщина планарного графа равна единице:  $t(G) = 1$ ,  $G$  – планарный граф.

---

## 46. Деревья. Основные свойства деревьев. Ориентированные деревья. Бинарные деревья. Дерево решений.

**Опр. Неориентированное дерево** - связный неограф без циклов.

**Опр.** Произвольный неограф без циклов называется **лесом**.

**Свойства деревьев:**

Пусть  $G(X, U)$  - неориентированное дерево.  $|X| = n, |U| = m$  Тогда:

- $m = n - 1$
- Если  $x_i, x_j \in X$ , то их соединяет единственная простая цепь. Существование цепи следует из связности дерева, а единственность - из отсутствия циклов.
- Если  $x_i, x_j \in X$  несмежные, то введение в дерева ребра  $(x_i, x_j)$  даёт граф, содержащий ровно 1 цикл.
- Всякое неориентированное дерево содержит, по крайней мере, две концевые вершины.
- **Теорема Кайли.** Число различных деревьев, которые можно построить на  $n$  различных вершинах, равно  $n^{n-2}$ .

**Опр.** Орграф  $G(X, U)$  называется **ордеревом**, если выполняются следующие условия:

1. Существует ровно одна вершина, не имеющая предшествующих вершин ( $p^+(x_1) = 0$ ).
2. Полуустепень захода всех остальных вершин равна 1 ( $\forall x_i \neq x_1 : p^+(x_i) = 1$ ).

**Опр.** Висячие вершины дерева называются **листьями**.

**Опр.** Путь из корня в лист называется **ветвью**.

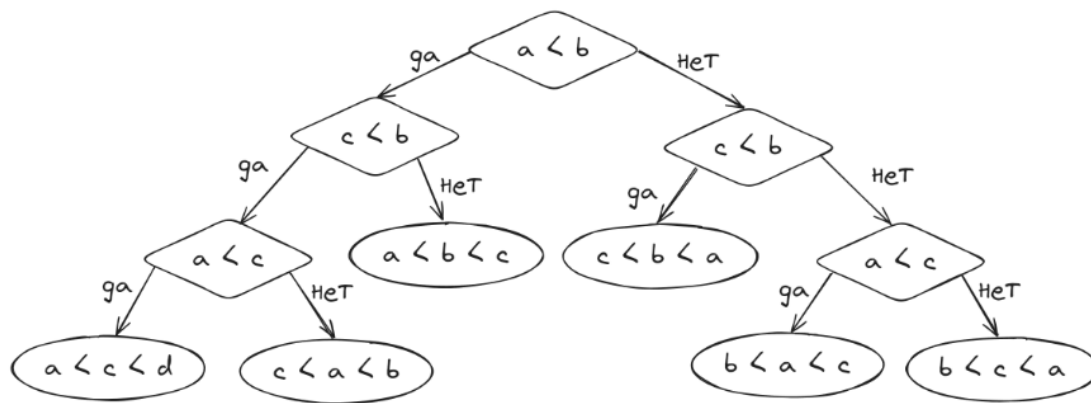
**Опр.** Длина наибольшей ветви называется **высотой**.

**Опр.** Расстояние (число ребер) от корня до некоторой вершины называется **уровнем этой вершины**, а все вершины одного уровня называются **ярусом**.

**Опр.** Если полуустепень исхода каждой вершины ордерова, отличной от листа, равна 2, и все листья дерева располагаются на одном ярусе, то такое ордеровето называется (полным) бинарным.

**Опр.** Все сравнения, которые проводятся при сортировке, приводят к формированию ордерова, которое называется **деревом решений**.

**Пример.** Для  $\{a, b, c\}$ .



Дерево решений имеет  $n!$  вершин, тогда сортировка даёт пути от корня к каждому листу. Число операций пропорционально высоте дерева -  $\log_2(n!)$

Приближение для  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Тогда получим минимально возможную сложность для алгоритма классической сортировки  $O(n \log n)$

## 47. Остовы. Циклический и коциклический ранги. Задача Штейнера.

**Опр.** Граф  $G^*(X^*, U^*)$  называется остовным подграфом  $G(X, U)$ , если  $X^* = X, U^* \subseteq U$ .

Если остовный подграф является деревом, то его называют остовным деревом или просто **остовом**.

**Теорема.** Число ребер произвольного графа  $G$ , которые надо удалить для получения остова, не зависит от порядка их удаления и равно  $\nu(G) = m - n + k$ , где  $m = |U|, n = |X|, k$  - число компонент связности.

**Опр.** Циклическим рангом (числом) графа  $\nu(G) = m - n + k$  называется число ребер, которые нужно удалить из графа для получения остова.

**Опр.** Коциклическим рангом (числом) графа  $\nu^*(G) = n - k$  называется число ребер самого остова.

**Прим.**  $\nu(G) + \nu^*(G) = m$ .

**Задача Штейнера.** На плоскости задано  $n$  точек, нужно соединить эти точки отрезками прямых так, что сумма длин этих отрезков была минимальной. Разрешается добавлять точки и длина определяется весом ребра.

**Формулировка задачи Штейнера в теории графов:**

Дан неграф  $G_0(X_0, \emptyset)$ . Требуется найти неграф  $G(X, U)$ , такой, что:

1. Каждому ребру присвоено некоторое неотрицательное число (вес ребра.)
2. Искомый граф  $G$  должен быть неодеревом.
3.  $X_0 \subseteq X$
4. Сумма весов ребер полученного дерева  $G$  должна быть наименьшей.

**Пояснение.**  $G$  - неориентированное дерево, потому что каждую пару вершин должна соединять только одна цепь, иначе сумма весов будет не минимальной, так как, если существуют 2 цепи, возникают альтернативные пути и неоднозначность решения.

Решения задачи Штейнера в общем случае не существует.

Решения при некоторых ограничениях: алгоритм Прима и алгоритм Краскала.

---

## 48. Задача об остове экстремального веса. Алгоритм Прима.

**Задача об остове экстремального веса.** Это задача Штейнера с дополнением, что множество вершин в ходе реализации алгоритма остаётся постоянной и совпадает со множеством вершин исходного графа.

**Алгоритм Прима.** Алгоритм решения задачи об остове экстремального веса. В результате даёт остов максимального/минимального веса.

Дан граф  $G(X, U, \Omega)$ , где  $\Omega$  - множество весов,  $|U| = |\Omega|$ ,  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ .

В основе алгоритма лежит расширение исходного поддерева до остова. Алгоритм итерационный, на каждой итерации число вершин и рёбер увеличивается не менее чем на 1.

Множество вершин разбивается на два подмножества:  $X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset$ .

Введём понятие пошагового расстояния между  $X_1$  и  $X_2$ :

$$d(X_1, X_2) = \min\{\omega(x_i, x_j) : x_i \in X_1, x_j \in X_2\}.$$

**Шаги алгоритма:**

1. Присвоение начального значения. Полагаем  $X_1 = \{x_1\}$  и  $X_2 = X \setminus X_1$ . Множество ребер исходного остова:  $U^0 = \emptyset$ .
2. Обновление данных. Находим ребро  $(x_i, x_j) : x_i \in X_1, x_j \in X_2, \omega(x_i, x_j) = d(X_1, X_2)$ . Полагаем, что  $X_1 = X_1 \cup \{x_j\}$ ;  $U^1 = U^0 \cup \{(x_i, x_j)\}$ ;  $X_2 = X \setminus X_1$ ;
3. Проверка на завершение. Если  $X_1 = X$ , то полученный остов имеет минимальный вес. Иначе: переход в шаг 2.

**Примечание.** Если требуется найти остов максимального веса, то в формуле  $d(X_1, X_2)$  меняем  $\min$  на  $\max$ .

---

## 49. Кратчайшие пути в графе: постановка задачи. Отыскание кратчайшего пути в невзвешенном графе.

**Задача нахождения кратчайшего пути** - задача поиска самого короткого пути между двумя вершинами графа ( $s$  и  $t$ ), в которой минимизируется сумма весов рёбер, составляющих путь.

При отыскании кратчайшего пути в невзвешенном графе используется алгоритм Бержа.

**Его шаги.**

1. Вершине  $S$  присваиваем метку "0".
2. Рассматриваем вершину  $x_i$ , имеющую метку, и для всех вершин  $\in \Gamma_{x_i}$  ставим метку " $i + 1$ " и повторяем для каждой вершины.

3. Останавливаемся, когда помечен весь граф.

В результате выполнения алгоритма, метка вершины равна длине кратчайшего пути из  $s$  в эту вершину. Кратчайшим путем из  $s$  в заданную вершину является путь, на котором каждая следующая вершина имеет метку на 1 больше, чем предыдущая.

---

## 50. Алгоритм Дейкстры отыскания кратчайшего пути во взвешенном графе.

Алгоритм Дейкстры используется для поиска кратчайшего пути во взвешенном графе без ребер с отрицательными весами.

**Его шаги.**

1. Присваиваем вершинам начальные метки. Начальной вершине  $s$  присваиваем метку  $M(s) = 0$ , остальным -  $\infty$ . Все вершины графа помечаются как не посещённые.
2. Выбираем вершину с минимальной меткой  $x_i$  и рассматриваем все вершины  $x_j \in \Gamma_{x_i}$ . Для каждой такой вершины проверяем условие: если  $M(x_i) + \omega(x_i, x_j) < M(x_j)$ , то  $M(x_j) = M(x_i) + \omega(x_i, x_j)$ . После рассмотрения всех вершин  $x_j$  отмечаем вершину  $x_i$  помеченной, и выбираем из ещё не посещенных такую, которая имеет минимальное значение метки.
3. Повторяем шаг 2, пока все вершины не будут помечены. Метка над каждой вершиной  $M(x_j)$  и есть длина кратчайшего пути из  $s$  в вершину  $x_j$ .
4. Для поиска кратчайшего пути начинаем из конечной вершины  $x_t$ . Проверяем все вершины  $x_j \in \Gamma_{x_t}^{-1}$  и находим те, удовлетворяющие условию:  $M(x_i) + \omega(x_i, x_t) = M(x_t)$ . Затем  $x_t = x_i$  и повторяем этот шаг, пока  $x_t$  не будет равно  $x_s$ . Получили кратчайший путь.

P.S. <https://habr.com/ru/articles/111361/>

---

## 51. Алгоритм Беллмана–Форда отыскания кратчайшего пути во взвешенном графе.

Алгоритм Беллмана–Форда используется для поиска кратчайшего пути во взвешенном графе с ребрами с отрицательными весами.

**Его шаги.**

Дана матрица смежности в орграфе.

1. Присваиваем вершинам начальные метки. Заполняем строку и столбец метками.  $M(s) = 0$ , и для  $x_j \in X \setminus \{s\} : M(x_j) = \infty$
  2. Просматриваем любую, ещё не просмотренную строку матрицы, для каждой проверяем условие: если  $M(x_i) + \omega(x_i, x_j) < M(x_j)$ , то  $M(x_j) = M(x_i) + \omega(x_i, x_j)$  (Тут  $M(x_i)$  соответствует строке меток, а  $M(x_j)$  - столбцу меток). Строку помечаем галочкой.
  3. Копируем строку меток в столбец меток. Снимаем галочку со строк, метки которых изменились.
  4. Если все строки просмотрены, то завершаем алгоритм.  $M(x_j)$  и есть длина кратчайшего пути из  $s$  в вершину  $x_j$ .
  5. Для нахождения кратчайшего пути начинаем с конечной вершины  $x_t$ . Просматриваем столбец  $x_t$  и находим вершину  $x_i$ , для которой выполняется условие:  $M(x_t) = M(x_i) + \omega(x_i, x_t)$ . Затем  $x_t = x_i$  и повторяем шаг 5 пока  $x_t$  не станет равным  $x_s$ . Получили кратчайший путь.
-

## 52. Поток в транспортной сети: постановка задачи. Полный и максимальный поток в сети.

**Задача о потоке в транспортной сети** заключается в нахождении максимального потока в сети из истока в сток.

**Опр.** Сетью называется ориентированный, взвешенный граф без петель, с одним источником и одним стоком.

**Опр. Полный поток** - если не существует путей из источника в сток, состоящего только из ненасыщенных путей, то текущее значение потока в сети называется полным потоком.

**Опр. Максимальный поток** - поток, величина которого является максимальной для данной сети.

**Теорема.** Величина потока в сети является максимальной тогда и только тогда, когда в сети не существует увеличивающего маршрута.

---

## 53. Поток в транспортной сети: увеличивающий маршрут и алгоритм его построения.

**Алгоритм Форда–Фалкерсона отыскания максимального потока в сети.**

(Тоже, что и в домашке)

**Опр. Увеличивающий маршрут** - маршрут от источника к стоку, включающий прямые и обратные ребра, причем все прямые ребра ненасыщенные, а поток на всех обратных ребрах отличен от нуля.

**Алгоритм построения увеличивающего маршрута (алгоритм разметки вершин).**

1. Источник помечаем знаком "+".
2. Для каждой вершины графа  $x_i$  помечаем знаком "+i" все непомяченные вершины, в которые из  $x_i$  ведут ненасыщенные ребра.
3. Для каждой вершины графа  $x_i$  помечаем знаком "-i" все непомяченные вершины, из которых в  $x_i$  ведут ребра с ненулевым потоком.

Когда непомяченных вершин не осталось, то проверяем сток:

Если он помечен, то увеличивающий маршрут существует.

Если он не помечен, то увеличивающего маршрута в сети нет.

Для поиска максимального потока используются следующие теоремы:

- **Теорема 1** – Если  $(s, x_n, \dots, x_k, t)$  – путь от источника к стоку, состоящий только из ненасыщенных рёбер, то значение потока на всех его рёбрах можно увеличить на  $\delta^* = \min\{\delta(x_i, x_j)\} = \min\{c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)\}$ . При этом величина потока в сети возрастет на  $\delta^*$ .
- **Теорема 2** – Если  $(s, x_n, \dots, x_k, t)$  – увеличивающий маршрут, то значение потока на его прямых рёбрах можно увеличить, а на обратных ребрах, уменьшить на величину  $\varepsilon^* = \min\{\delta^*, \varphi^*\}$ , где:  $\delta^* = \min\{\delta(x_i, x_j)\} = \min\{c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)\}$ , а  $\varphi^* = \min\{\varphi(x_i, x_j)\}$ . При этом величина потока в сети возрастает на  $\varepsilon^*$ .
- **Теорема 3** - Величина потока в сети является максимальной тогда и только тогда, когда в сети не существует увеличивающего маршрута.
- **Теорема 4 (Форда-Фалкерсона)** – Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока в сети, доставляемого от источника к стоку, равна пропускной способности минимального разреза.  $\varphi_{\max} = c_{\min}$ .

**Алгоритм Форда-Фалкерсона отыскания максимального потока в сети.**

1. Присвоение начального потока сети.  
Находим источник и сток. Начальный поток равен 0.
2. Достижение полного потока. (Теорема 1)
3. Нахождение максимального потока сети. (Теорема 2 + Теорема 3).
4. Нахождение минимального разреза. (Теорема 4).

После выполнения данного алгоритма полученный поток в сети является максимальным.

---

## **54. Понятие разреза транспортной сети. Минимальный разрез. Теорема Форда–Фалкерсона о максимальном потоке в сети.**

**Опр. Разрез транспортной сети** - множество ребер, удаление которых из графа делает его несвязным, причем нельзя добраться из источника в сток.

**Опр. Минимальный разрез сети** - ориентированный разрез сети, имеющий минимальную пропускную способность из всех возможных, причем он состоит только из насыщенных ребер.

**Теорема Форда-Фалкерсона.** Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока в сети, доставляемого от источника к стоку, равна пропускной способности минимального разреза.

---