Теория для РК2 по ЛАиФНП

ИУ6-25Б

2024

1. Дать определение окрестности и открытого множества в $\mathbb{R}^n$.

Опр. ε-окрестностью точки $a \in \mathbb{R}^n$ называется множество $U_\varepsilon(a)$ всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, расстояние от которых до точки a меньше ε.

То есть $U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x, a) < \varepsilon\}$

Для проколотой: $\mathring{U}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \rho(x, a) < \varepsilon\}$

Опр. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если все его точки внутренние.

2. Дать определение предельной точки, граничной точки множества и замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$.

Опр. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется граничной точкой множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если любая окрестность $U_\varepsilon(a)$ содержит и точки из A, и точки из $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Опр. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется предельной точкой множества $A \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall\, \mathring{U}_\varepsilon(a)$ содержит точки множества A.

Опр. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если оно содержит все свои граничные точки.

3. Дать определение ограниченного и связного множества в $\mathbb{R}^n$.

Опр. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если $\exists U_\varepsilon((0, 0, \ldots, 0))$ точки 0, целиком содержащая множество A.

Опр. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется линейно связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

4. Дать определение предела ФНП по множеству и непрерывной ФНП.

Опр. Пусть задана функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, множество $A \subset D(f) \subset \mathbb{R}^n$ и a - предельная точка множества A. Тогда $b \in \mathbb{R}^m$ называется пределом функции $f(x)$ в точке a по множеству A, если

- $\forall U_\varepsilon(b)\ \exists \mathring{U}_\delta(a)$ такая, что $\forall x \in \mathring{U}_\delta(a) \cap A\ f(x) \in U_\varepsilon(b)$ (определение по Коши)
- для любой последовательности $\{a_k\}$, $a_k \neq a$, сходящейся к точке a и $a_k \in A\ \forall k$ последовательность значений $\{b_k\} = \{f(a_k)\}$ сходится к точке b (определение по Гейне)

Опр. Функция нескольких переменных $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется непрерывной в точке $a \in A$, предельной для множества A, если:

$$1)\ \exists \lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x)$$

$$2)\ \lim_{\substack{x \to a \\ A}} f(x) = f(a)$$

Опр. Функция нескольких переменных $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ называется непрерывной на множестве A, если она непрерывна во всех точках множества A.

5. Дать определение частной производной ФНП в точке.

Опр. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена в некоторой δ-окрестности точки $U_\delta(a)$ точки $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

Пусть Δx_i - любое приращение i-ой переменной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ такое, что точка $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in U_\delta(a)$

Частным приращением функции f по переменной x_i в точке a называется разность $\Delta_i f(a) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$

Частной производной функции f по переменной x_i в точке a называется предел(если он существует)

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_i f(a)}{\Delta x_i}$$

Обоз. $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ или $f'_{x_i}(a)$

6. Дать определение ФНП, дифференцируемой в точке.

Опр. Функция f называется дифференцируемой в точке x, если её полное приращение в некоторой окрестности точки x можно представить в виде:

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot |\Delta x|,$$

где A - матрица $m \times n$, элементы которой не зависят от Δx, $\alpha(\Delta x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$

7. Записать формулы для вычисления частных производных сложной функции вида $z = f(u(x, y), v(x, y))$.

$$z'_x = z'_u \cdot u'_x + z'_v \cdot v'_x$$
$$z'_y = z'_u \cdot u'_y + z'_v \cdot v'_y$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

8. Записать формулу для вычисления производной сложной функции вида $u = f(x(t), y(t), z(t))$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t}$$

9. Записать формулы для вычисления частных производных неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}$$

10. Сформулировать теорему о связи непрерывности и дифференцируемости ФНП.

Теорема. Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$, то она непрерывна в точке x.

Следствие. Если функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в области $X \in \mathbb{R}^n$, то она непрерывна в области X.

11. Сформулировать теорему о необходимых условиях дифференцируемости ФНП.

Теорема. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда в точке x существуют частные производные функции f по всем переменным, то есть определена матрица Якоби $f'(x)$, причём матрица A из опр. дифференцируемой функции и матрица Якоби $f'(x)$ равны, то есть $a_{ij} = \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}$

12. Сформулировать теорему о достаточных условиях дифференцируемости ФНП.

Теорема. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеет матрицу Якоби в некоторой окрестности $U(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ и все элементы $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ матрицы Якоби непрерывны в точке $a \in \mathbb{R}^n$. Тогда функция f дифференцируема в точке a.

13. Сформулировать теорему о неявной функции.

Теорема. (формулировка очень большая, здесь очень сильно упрощённый вариант из семинаров)

Дано уравнение $F(x, y, z) = 0$. Пусть оно разрешимо относительно z, тогда существует неявно заданная функция $z = z(x, y)$, при подстановке которой в уравнение оно обращается в верное равенство, причём дифференцируемая. Её частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)}$$

14. Дать определение (полного) первого дифференциала ФНП.

Опр. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и дифференцируема в точке x. Полным (первым) дифференциалом функции f в точке x называется линейная относительно $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ часть приращения $\Delta f(x)$ функции f в точке x.

Обоз. $df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$

15. Сформулировать теорему о необходимых и достаточных условиях того, чтобы выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ было полным дифференциалом.

Теорема. Выражение $P(x, y)dx + Q(z, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ $\iff$

1. функции $P(x,y), Q(x,y), \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$

2. $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ $\forall (x,y) \in G$

16. Дать определение второго дифференциала ФНП и матрицы Гессе.

Опр. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и её первый дифференциал $df(x)$ дифференцируем в точке x. Вторым дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется дифференциал 1-ого порядка дифференциала функции $f(x)$

Обоз. $d^2f(x) = d(df(x))$

Опр. Матрицей Гессе функции f называется матрица из частных производных второго порядка этой функции:

$$\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(x) & \ldots & f''_{x_1x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(x) & \ldots & f''_{x_nx_n}(x) \end{pmatrix}$$

17. Сформулировать теорему о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования.

Теорема. Пусть скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в некоторой окрестности $U(a)$ точки $a \in \mathbb{R}^n$ смешанные частные производные $f''_{xy}(x)$ и $f''_{yx}(x)$, которые непрерывны в точке a. Тогда $f''_{xy}(a) = f''_{yx}(a)$

18. Дать определение градиента ФНП и производной ФНП по направлению.

Опр. Градиентом функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ называется вектор из частных производных $\mathrm{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$, если все частные производные существуют.

Опр. Производной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в точке $a \in \mathbb{R}^n$ по направлению вектора $\vec{n}$ называется число, равное пределу(если он существует):

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = \lim_{s \to +0} \frac{f(a + s\vec{n}) - f(a)}{s}$$

19. Перечислить основные свойства градиента ФНП.

Свойства градиента функции и производной по направлению:

1. Если скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}^n$, то $\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = \text{пр}_{\vec{n}} \mathrm{grad} f(x)$ - проекция градиента на направление вектора

2. Если скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}^n$ и $\vec{n} = \mathrm{grad} f$, то $\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = |\mathrm{grad} f(a)|$

3. Если скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке вектор $\mathrm{grad} f(a)$ указывает направление наибольшего роста функции

4. Если скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}^n$, то в этой точке вектор $-\mathrm{grad} f(a)$ указывает направление наибольшего убывания функции

5. Если скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}^n$, то наибольшая скорость возрастания(убывания) функции в точке a равна $|\mathrm{grad} f(a)|$ $(-|\mathrm{grad} f(a)|)$

20. Записать формулу для вычисления производной ФНП по направлению.

Производная функции f по направлению вектора $\vec{n}$ находится как скалярное произведение вектора $\vec{n}$ и градиента функции $\mathrm{grad} f(a)$ в точке a ($\vec{n_0}$ - нормированный вектор $\vec{n}$):

$$\frac{\partial f(a)}{\partial \vec{n}} = (\mathrm{grad} f(a), \vec{n_0})$$

21. Записать уравнения касательной и нормали к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в точке (x_0, y_0, z_0).

Касательная к графику функции $F(x,y,z) = 0$ в точке (x_0, y_0, z_0):

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0$$

Нормаль к графику функции $F(x,y,z) = 0$ в точке (x_0, y_0, z_0):

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}$$

22. Сформулировать теорему Тейлора для функции двух переменных.

Теорема. (остаточный член в форме Лагранжа)
Пусть скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

1. все частные производные до порядка $m + 1$
2. непрерывные в окрестности $U_\delta(x_0)$

Тогда $\forall x \in U_\delta(x_0)$ $\exists \theta \in (0,1)$:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + \frac{d^{m+1} f(x_0 + \theta(x - x_0))}{(m+1)!}$$

Теорема. (остаточный член в форме Пеано)
Пусть скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имеет в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

1. все частные производные до порядка $m + 1$
2. причём все частные производные до порядка m непрерывны в окрестности $U_\delta(x_0)$
3. а все частные производные порядка $m + 1$ непрерывны в точке x_0

Тогда $\forall x \in U_\delta(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(x_0)}{k!} + o(|x - x_0|^m)$$

23. Дать определение (обычного) экстремума (локального максимума и минимума) ФНП.

Опр. Пусть скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Точка a называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если $\exists \mathring{U}(a)$ такая, что $\forall x \in \mathring{U}(a)$ $f(x) \le f(a)$ $(f(x) \ge f(a))$. Точки локального максимума и локального минимума называются точками локального экстремума функции.

24. Сформулировать необходимые условия экстремума ФНП.

Теорема. Пусть для скалярной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. точка $a \in \mathbb{R}^n$ является точкой экстремума
2. и существует частная производная $f'_{x_i}(a)$ для некоторого $i = \overline{1, n}$

Тогда $f'_{x_i} = 0$
Следствие 1. Если $\exists \text{grad} f(a)$, то $\text{grad} f(a) = 0$
Следствие 2. Если функция дифференцируема в точке a, то $df(a) = 0$

25. Сформулировать достаточные условия экстремума ФНП.

Теорема. Пусть скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности
2. $\text{grad} f(a) = 0$
3. квадратичная форма $d^2 f(a)$
   (a) положительно определена, тогда в точке a функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум
   (b) отрицательно определена, тогда в точке a функция $f(x)$ имеет строгий локальный максимум
   (c) знакопеременна, тогда в точке a функция $f(x)$ не имеет экстремума

26. Дать определение условного экстремума ФНП.

Опр. Пусть скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и векторная функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m < n)$ определены в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$ $\varphi(x) = \vec{0}$ - некоторое условие

Точка a называется точкой условного локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует проколотая окрестность $\mathring{U}(a)$: $\forall x \in \mathring{U}(a)$, удовлетворяющих условию $\varphi(x) = 0$, $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$.

Точки условного максимума и условного минимума называются точками условного локального экстремума.

27. Сформулировать необходимые условия условного экстремума ФНП.

Теорема. Пусть

1. скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и векторная функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m < n)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$
2. точка a является точкой условного экстремума функции $f(x)$ при условиях связи $\varphi = 0$
3. ранг матрицы Якоби $\varphi'(a)$ функции $\varphi(x)$ в точке a равен m, то есть $\text{rg } \varphi'(a) = m$

Тогда существуют множители Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$\begin{cases} L'_{x_1}(a, \lambda) = 0 \\ \ldots \\ L'_{x_n}(a, \lambda) = 0 \\ L'_{\lambda_1}(a, \lambda) = 0 \\ \ldots \\ L'_{\lambda_m}(a, \lambda) = 0 \end{cases}$$

Решения системы являются стационарными точками функции Лагранжа.

28. Сформулировать достаточные условия условного экстремума ФНП.

Теорема. Пусть

1. скалярная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и векторная функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m < n)$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$
2. $\varphi(a) = \vec{0}, \operatorname{rg} \varphi'(a) = m$
3. координаты точки $(a_1, \dots, a_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{(m+n)}$ являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} L'_{x_1}(a, \lambda) = 0 \\ \dots \\ L'_{x_n}(a, \lambda) = 0 \\ L'_{\lambda_1}(a, \lambda) = 0 \\ \dots \\ L'_{\lambda_m}(a, \lambda) = 0 \end{cases}$$

4. для функции $L(x) = L(x, \lambda_a)$ и подпространства $H = \{dx_1, \dots, dx_n \mid d\varphi(a) = 0\}$ квадратичная форма $d^2L(a)|_H$
   (a) положительно определённая, тогда функция $f(x)$ в точке a имеет строгий локальный минимум при условии $\varphi(x) = 0$
   (b) отрицательно определённая, тогда функция $f(x)$ в точке a имеет строгий локальный максимум при условии $\varphi(x) = 0$
   (c) знакопеременная, тогда функция функция $f(x)$ в точке a не имеет условного экстремума при условии $\varphi(x) = 0$

29. Дать определение функции Лагранжа и множителей Лагранжа задачи на условный экстремум ФНП.

Опр. Функцией Лагранжа для задачи на условный экстремум
$f(x) \to \text{extr}$
$\varphi_1(x) = 0$
$\dots$
$\varphi_m(x) = 0$
называется функция $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + \dots + \lambda_m\varphi_m(x)$.
Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ называются множителями Лагранжа.