Булевы функции

ИУ6-25Б

2024

Основные понятия

$E = \{0, 1\}$ - булевы переменные, область значений и определения любой булевой функции
Алгебра, образованная множеством E и всеми операциями на нём, называется **алгеброй логики**.
Количество булевых функций $= 2^{2^n}$
Способы задания булевой функции:

- аналитический: $f = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2)$
- таблица истинности:

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Переменные могут быть **существенными** или **несущественными**.
Переменная x_i булевой функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ называется **существенной**, если:

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \neq f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Это означает, что существует набор $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ размера $n-1$ такой, что:

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

Тогда говорят, что x_i существенная переменная и $f(\ldots)$ **существенно зависит** от x_i.
Иначе x_i - несущественная переменная.
Например: $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3) \implies x_2$ - несущественная переменная.
Иногда удобно добавить несущественные переменные.

Элементарные булевы функции

I. Булевы функции одной переменной:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

- $f_1(x) = 0$ - const 0
- $f_2(x) = 1$ - const 1
- $f_3(x) = x$ - тождественная функция
- $f_4(x) = \overline{x}$ - отрицание или инверсия

II. 16 функций 2 переменных:

- $f_9(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ - сложение по модулю 2
- $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ - следование
- $f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \equiv x_2$ - эквивалентность

Пусть $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Функция f, полученная подстановкой функций F друг в друга и переименованием переменных, называется **суперпозицией** функций $f_1, f_2, \dots, f_k$.

Выражение, описывающее суперпозицию, называется **формулой** над F.

Множество F называется **базисом**.

Функция f получена путём суперпозиции функций базиса F.

$\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, где φ_i - формула над F или переменная, называется **главной или внешней формулой**, а все φ_i называются **подформулами**.

Вложенность подформул называется **глубиной**.

Для каждой булевой функции можно задать бесконечное число формул.

Базис для $f = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 : F = \{\wedge, \vee, \neg\}$

Опр. Формулы, базис которых составляют функции $\{\wedge, \vee, \neg\}$, называются **булевыми формулами**. Сами операции называются **булевыми операциями**.

Алгебра $< E, \wedge, \vee, \neg >$ называется булевой **алгеброй**.

Примеры выражения некоторых булевых функций формулами булевой алгебры:

- $f = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$
- $f = x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2}$
- $f = x_1 \oplus x_2 = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2$
- $f = x_1 \equiv x_2 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2$

Свойства операций булевой алгебры

1. Ассоциативность:
   - $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$
   - $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$
2. Коммутативность:
   - $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$
   - $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$
3. Дистрибутивность:
   - $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$
   - $x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$
4. Идемпотентность:
   - $x_1 \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_1 = x_1$
   - $x_1 \vee x_1 \vee \cdots \vee x_1 = x_1$
5. Закон де Моргана:
   - $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$
   - $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$
6. Двойное отрицание (кратное отрицание):
   - $\overline{\overline{x}} = x$
   - $\overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$
7. Свойства констант:
   - $x \vee 0 = 0$
   - $x \vee 1 = 1$
   - $x \wedge 0 = 0$
   - $x \wedge 1 = x$
8. Противоречие:
   - $x \wedge \overline{x} = 0$

9. Тавтология:
   - $x \vee \overline{x} = 1$

10. Поглощение конъюнкции:
    - $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$

Правило замены: если в некоторой формуле φ подформулу φ_i заменить на логически эквивалентную φ_k , то полученная формула φ' будет эквивалентна исходной.
$\varphi(\dots\varphi_i\dots), \varphi_k = \varphi_i$
$\varphi(\dots\varphi_k\dots) = \varphi(\dots\varphi_i\dots)$
$\varphi(\varphi_k|\varphi_i)$ - φ_k вместо **некоторых** вхождений φ_i
$\varphi(\varphi_k||\varphi_i)$ - φ_k вместо **всех** вхождений φ_i
Таким образом, используя логическую эквивалентность подформул(бесконечное кол-во) при помощи подстановки одних подформул вместо других, можно преобразовывать исходную формулу, не теряя логической эквивалентности полученной формулы исходной.
Пример:

- $x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 = x_1$ - склеивание
- обобщённое склеивание: $x_1x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2 = x_1x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2(x_3 \vee \overline{x}_3) = x_1x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 = x_1x_3 \vee x_2\overline{x}_3$
- $x_1 \vee \overline{x}_1x_2 = (x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1 \vee x_2$

$x_1 \vee f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee f(x_2, \dots, x_n)$ - ???????
Опр. Ранг элементарной конъюнкции - количество литер в её записи.
Опр. Длина ДНФ - сумма рангов элементарных конъюнкций.
Опр. ДНФ булевой функции f называется минимальной, если её длина наименьшая среди всех ДНФ этой функции.
Опр. Булева функция f_1 называется импликантой булевой функции f, если f_1 принимает значения 0 на тех же(но необязательно только тех) наборах, что и f.
Опр. Элементарная конъюнкция вида $K_i = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_i^{\alpha_i}$ называется простой импликантой функции f, если K_i - импликанта функции f и никакая часть K_i не является импликантой функции f.
Теорема. Всякая булева функция может быть представлена в ДНФ, каждая элементарная конъюнкция которой является простой импликантой.
Опр. Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется сокращённой ДНФ функции f.
Опр. Дизъюнкция простых импликант булевой функции такая, что удаление любой импликанты приводит к потери покрытия всех единиц функции, называется тупиковой ДНФ (ТДНФ)
Теорема. Любая минимальная ДНФ булевой функции является тупиковой.

Алгебра и полином Жегалкина

Опр. Алгеброй над базисом, состоящим из булевых функций $\wedge, \oplus, 0, 1$, называется **алгеброй Жегалкина**.
Обоз. $< \wedge, \oplus, 0, 1 >$ - алгебра, $F_{\text{Ж}} = \{\wedge, \oplus, 0, 1\}$ - базис

Свойства операций в базисе Жегалкина

1. $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ - коммутативность
2. $x_1 \wedge (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3)$
3. $x \oplus 0 = x; \qquad x \oplus 1 = \overline{x}$
4. выполняются все свойства конъюнкции и констант булевой алгебры
5. $x \oplus x = 0$

Переход от формулы в базисе Жегалкина к эквивалентной формуле в булевом базисе и обратно возможен всегда. Достаточно выразить дизъюнкцию и отрицание в базисе Жегалкина:

- $\overline{x} = x \oplus 1$

- $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus 1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2$

$F_{\text{Б}} \to F_{\text{Ж}}$

Опр. Формула, имеющая вид суммы по модулю 2 конъюнкций, называется **полиномом Жегалкина** для данной булевой функции.

Пусть f в СДНФ в булевом базисе - дизъюнкция элементарных конъюнкций.

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3$

Если f_1, f_2 - две любые элементарные конъюнкции, включающие все переменные, то $f_1 \wedge f_2 = 0$.

В базисе Жегалкина: $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2 \oplus f_1f_2$

При $f_1 \wedge f_2 = 0$: $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2 \oplus 0 = f_1 \oplus f_2$

То есть $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \oplus x_1x_2\overline{x}_3 \oplus x_1\overline{x}_2x_3$

Получение полинома Жегалкина

$f(x_1, x_2, x_3) = \vee_1(1, 4)$ - значение 1 на 1 и 4 наборах СДНФ.

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$

Получение полинома:

$f = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \oplus x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)x_3 \oplus x_1(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) =$

$= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 = x_1 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3$

Степень полинома Жегалкина определяется количеством литер в элементарной конъюнкции максимального ранга.

Теорема. Для всякой булевой функции существует полином Жегалкина, причём единственный.

Классы булевых функций

Булевы функции подразделяются на 5 классов.

1 класс

Опр. Булева функция f от n переменных называется сохраняющей константу нуля, если $f(0, \ldots, 0) = 0$.

Обоз. K_0

Теорема. Число всех булевых функций класса K_0 равно 2^{2^n-1}.

Док-во:

Только на одном наборе функция исключительно принимает значение 0.

Так как всего наборов 2^n, то произвольное значение функция принимает на $2^n - 1$ наборах.

Так как всего функций 2^{2^n}, а произвольное значение принимает 2^{2^n-1} функция, то число функций, принимающих значение 0, равно $2^{2^n} - 2^{2^n-1} = 2^{2^n-1}$

2 класс

Опр. Булева функция f_n называется сохраняющей константу единицы, если $f(1, \ldots, 1) = 1$.

Обоз. K_1

Теорема. Число всех булевых функций класса K_1 равно 2^{2^n-1}.

Док-во аналогично 1 классу.

3 класс

$f(x_1, \ldots, x_n)$ - функция n переменных

Функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ называется двойственной к функции f.

f^* обладает свойством инволюции: $(f^*)^* = f$

Очевидно, что бинарное отношение "быть двойственным"симметрично.

1. Чтобы получить двойственную функцию, нужно полностью инвертировать таблицу истинности:

x_1	x_2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\Longrightarrow$

x_1	x_2	f^*
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$f = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$

$f^* = \overline{x}_1\overline{x}_2$

2. Или взять аргументы и функцию с инверсией: $f^* = \overline{\overline{\overline{x}}_1 \vee \overline{\overline{x}}_2} = \overline{x}_1\overline{x}_2$

Опр. Булева функция называется **самодвойственной**, если она совпадает с двойственной ей функцией.

Функция самодвойственна тогда и только тогда, когда на взаимопротивоположных наборах принимает взаимопротивоположные значения.

- Чтобы опровергнуть самодвойственность функции f, достаточно найти 2 таких противоположных набора σ_1, σ_2, что $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$.
- Чтобы доказать самодвойственность, нужно перебрать все взаимопротивоположные наборы и убедиться в том, что на любое паре значения функции противоположны.

Теорема. Мощность класса (количество) самодвойственных функций равна $2^{2^{n-1}}$.
Обоз. K_S
Пример:

1. Тождественная функция самодвойственна
   - $f(x) = x$
   - $f^*(x) = \overline{\overline{x}} = x$
2. Отрицание самодвойственно:
   - $f(x) = \overline{x}$
   - $f(x) = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$

2 теоремы о двойственности:

1. **Теорема.** Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ реализована формулой $\varphi(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n))$, то формула $\varphi^*(\varphi_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n^*(x_1, \ldots, x_n))$ реализует булеву функцию $f^*(x_1, \ldots, x_n)$.

   Пример:
   - $\varphi = x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 = \varphi_1 \vee \varphi_2$
   - $\varphi_1 = x_1x_2 \qquad \varphi_1^* = \overline{\overline{x}_1\overline{x}_2}$
   - $\varphi_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \qquad \varphi_2^* = \overline{\overline{\overline{x}}_1\overline{\overline{x}}_2} = \overline{x_1x_2}$
   - $\varphi^* = \overline{\overline{\varphi_1^*} \vee \overline{\varphi_2^*}} = \overline{\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2} = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 = x_1 \oplus x_2$
   - $\varphi = x_1 \equiv x_2 \qquad \varphi^* = x_1 \oplus x_2$
2. **Теорема.** Пусть имеется базис $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ и этому базису поставлен в соответствие базис двойственных функций $F^* = \{f_1^*, \ldots, f_m^*\}$. Если формула φ над F реализует f, то φ^* над F^* реализует функцию f^* при том, что функции $f_i, i = \overline{1, m}$ заменяются на f_i^*.

   Пример:
   - $F = \{f_1, f_2\} \qquad f_1 = x_1 \wedge x_2 \qquad f_2 = x_1 \oplus x_2$
   - $F = \{\wedge, \oplus\}$
   - $F^* = \{\vee, \equiv\}$
   - $f = x_1x_2 \qquad f^* = x_1 \vee x_2$
   - $\varphi = (x_1\overline{x}_2 \oplus \overline{x}_1\overline{x}_2)x_1$
   - $\varphi^* = ((x_1 \vee \overline{x}_2) \equiv (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)) \vee x_1$

Из взаимной двойственности $\vee$ и $\wedge$ следует справедливость законов де Моргана: $\begin{array}{ccc} \overline{x_1 \wedge x_2} & \Longrightarrow & \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \\ \hline \overline{x_1 \vee x_2} & \Longrightarrow & \overline{x}_1\overline{x}_2 \end{array}$

4 класс

Опр. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется линейной, если она представима в виде $C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus \cdots \oplus C_nx_n$, где коэффициенты $C_i \in \{0, 1\}$.

Функция линейна тогда и только тогда, когда она представима полиномом Жегалкина первой степени.

Обоз. K_L

Теорема. Число всех линейных функций равно 2^{n+1}.

Пояснение: Коэффициентов C_i всего $n + 1$.

Пример:

1. $f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_2 \oplus x_3$

   $C_0 = 1 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 1$

2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2$

   $C_0 = 0 \quad C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 0$

5 класс

Пусть имеется 2 набора из n переменных:

$\partial_1 = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\partial_2 = (a'_1, \ldots, a'_n)$

Говорят, что набор ∂_1 не меньше набора $\partial_2 (\partial_1 \geq \partial_2)$, если для всех a_i выполняется $a_i \geq a'_i$

Пример:

$\partial_1 = 1011$

$\partial_2 = 1001$

Такие наборы называются **сравнимыми**, иначе **несравнимыми**.

Опр. Булева функция называется монотонной, если для любых её сравнимых наборов ∂_1 и ∂_2 верно $f(\partial_1) \geq f(\partial_2)$.

Обоз. K_M

Один из вариантов оценки мощности K_M: $2^{n^{n/2}} \leq |K_M| \leq 2^{an^{n/2}}$, где a - неизвестный коэффициент.

Функциональная полнота

Опр. Множество Σ булевых функций называется **замкнутой системой**, если любая суперпозиция функций из Σ даёт функцию, принадлежащую Σ.

Всякая замкнутая система булевых функций Σ порождает замкнутый класс, состоящий из всех формул, которые можно получить суперпозицией функций из Σ.

$[\Sigma]$ - замыкание Σ

Если рассматривать Σ как базис, то $[\Sigma]$ - множество всех формул над Σ.

Пример:

$F = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$

$\Sigma = \{\vee\}$

K_0, K_1, K_S, K_L, K_M - замкнутые классы, они также называются классами Поста (Е. Пост)

Множество всех булевых функций образует замкнутый класс.

Таблица принадлежности булевых функций замкнутым классам:

	K_0	K_1	K_S	K_L	K_M
0	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
1	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\neg$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\wedge$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\vee$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\oplus$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
$\rightarrow$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\equiv$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Классы не пустые, попарно различны и каждый класс не совпадает с множеством приведённых и всех булевых функций.

Опр. Система булевых функций называется полной, если её замыкание совпадает с множеством всех булевых функций.

Это означает, что любая булева функция может быть представлена над этой системой как над базисом.

Теорема Поста. Для того, чтобы система булевых функций была полной, необходимо и достаточно того, чтобы она содержала хотя бы одну функцию:

1. не сохраняющую константу 0
2. не сохраняющую константу 1
3. не самодвойственную
4. не линейную
5. не монотонную

Доказательство.
Необходимость (⇒): если система функций не удовлетворяет ни одному из условий, то в лучшем случае система будет собственным подмножеством множества булевых функций либо пустым множеством
Достаточность (⇐): см. в учебнике Кузнецова
Другими словами: Множество F булевых функций образует полную систему ⇔ когда это множество не содержится целиком ни в одном из классов Поста.
Примеры:

- $F = \{\neg, \wedge\}$ - базис И-НЕ
- $F = \{\neg, \vee\}$ - базис ИЛИ-НЕ
- $F = \{\neg, \wedge, \vee\}$
- $F_{Ж} = \{\wedge, \oplus, 1, 0\}$

Один из способов определения полноты системы булевых функций - сведение этой системы к другой системе, полнота которой доказана.
Пример:

- $F = \{\downarrow\}$

  $x \downarrow x = \overline{x}$

  $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$

  $x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$

  Перешли к базису $\{\neg, \vee\}$

- $F = \{\downarrow\}$

  $x|x = \overline{x}$

  $x_1|x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$

  $x_1 \wedge x_2 = \overline{x_1|x_2} = (x_1|x_2)|(x_1|x_2)$

  Перешли к базису $\{\neg, \wedge\}$

Как обосновать (не)принадлежность некоторой булевой функции к тому или иному классу Поста?

Покажем немонотонность отрицания. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - не монотонная функция
$\sigma_1 = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
$\sigma_2 = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
$\sigma_1 \leq \sigma_2$
Если $f(\sigma_1) \leq f(\sigma_2)$, то она монотонная
$f(\sigma_1) = 1, f(\sigma_2) = 0 \Rightarrow$ функция не монотонна
$\overline{x} = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
Пример: Пусть дана система булевых функций 3 переменных $\{f_1, f_2\}$, заданных таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

1. Принадлежность K_0:
   - $f_1(0,0,0) = 1 \Rightarrow f_1 \notin K_0$
   - $f_2(0,0,0) = 1 \Rightarrow f_2 \notin K_0$
2. Принадлежность K_1:
   - $f_1(1,1,1) = 1 \Rightarrow f_1 \in K_1$
   - $f_2(1,1,1) = 0 \Rightarrow f_2 \notin K_1$
3. Принадлежность K_S:
   - $f_1(1,1,1) = 1, f_1^*(1,1,1) = 0 \Rightarrow f_1 \notin K_S$
   - $f_2(0,0,1) = 1, f_2^*(0,0,1) = 0 \Rightarrow f_2 \notin K_S$
4. Принадлежность K_M:
   - $f_1(0,0,0) > f_1(1,1,1) \Rightarrow f_1 \notin K_M$
   - $f_2(0,0,0) > f_2(0,1,1) \Rightarrow f_2 \notin K_M$
5. Принадлежность K_L:
   - В общем случае любая функция f_n выражается полиномом Жегалкина $\leq n$ степени:
     $P_{Ж}(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$
   - Если удастся свести его к первой степени, то функция линейна:
     $a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0 \in K_L$
   - Для решения задачи воспользуемся методом неопределённых коэффициентов:
     (a) Рассмотрим набор $(0,0,0)$:
         $f_1(0,0,0) = a_0 = 1 \therefore a_0 = 1$
     (b) Рассмотрим наборы $(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$:
         $f_1(0,0,1) = a_3 \oplus a_0 = 1 \therefore a_3 = 0$
         $f_1(0,1,0) = a_2 \oplus a_0 = 1 \therefore a_2 = 0$
         $f_1(1,0,0) = a_1 \oplus a_0 = 1 \therefore a_1 = 0$
     (c) Рассмотрим наборы: $(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$:
         $f_1(1,1,0) = a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = 0 \therefore a_{12} = 1$
         $f_1(1,0,1) = a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \therefore a_{13} = 0$
         $f_1(0,1,1) = a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \therefore a_{23} = 0$
     (d) Рассмотрим набор $(1,1,1)$:
         $f_1(1,1,1) = a_{123} \oplus 1 \oplus 1 = 1 \therefore a_{123} = 1$
   - $f_(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus 1 \Rightarrow f_1 \notin K_L$

Примеры реализации некоторых элементарных функций с помощью не элементарных

Функции, сохраняющие константу 0 и 1, отрицание:

1. Пусть $f_0(x_0, \ldots, x_n) \in K_0$ и $f_1(x_1, \ldots, x_1) \in K_1$:

   $f_0(0, \ldots, 0) = 0$
   $f_0(1, \ldots, 1) = 0$
   $0 = f_0(x, \ldots, x)$
   $f_1(0, \ldots, 0) = 1$
   $f_1(1, \ldots, 1) = 1$
   $1 = f_1(x, \ldots, x)$

2. Пусть f_0 аналогично пункту 1. Рассмотрим f_1:

   $f_1(0, \ldots, 0) = 1$
   $f_1(1, \ldots, 1) = 0$

$\overline{x} = f_1(x, \ldots, x)$
$1 = \overline{f_0}(x, \ldots, x) = f_1(f_0(x, \ldots, x), \ldots, f_0(x, \ldots, x))$

3. $\sigma_1 \leq \sigma_2$ - сравнимые наборы:

   $\sigma_1 = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
   $\sigma_2 = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
   $f(\sigma_1) = 1$
   $f(\sigma_2) = 0$
   $f \notin K_M$
   $\overline{x} = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

4. $f(x_1, x_2) \notin K_L$:

   (a) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus 1 = \overline{x_1x_2} \therefore x_1x_2 = \overline{f}(x_1, x_2)$
   (b) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_2 \oplus 1 = (x_1 \oplus 1)x_2 \oplus 1 = \overline{\overline{x}_1x_2} \therefore x_1x_2 = \overline{f}(\overline{x}_1, x_2)$
   (c) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_1 = x_1(x_2 \oplus 1) = x_1\overline{x}_2 \therefore x_1x_2 = f(x_1, \overline{x}_2)$d) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus (x_2 \oplus 1) = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \therefore x_1x_2 = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$