4. Полнота системы булевых функций

Функциональная полнота

ИТМО про функциональную полноту
Опр. Множество Σ булевых функций называется **замкнутой системой**, если любая суперпозиция функций из Σ даёт функцию, принадлежащую Σ.
Всякая замкнутая система булевых функций Σ порождает замкнутый класс, состоящий из всех формул, которые можно получить суперпозицией функций из Σ.
$[\Sigma]$ - замыкание Σ
Если рассматривать Σ как базис, то $[\Sigma]$ - множество всех формул над Σ.
Пример: $F = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n$
$\Sigma = \{\vee\}$

K_0, K_1, K_S, K_L, K_M - замкнутые классы, они также называются классами Поста (Е. Пост)
Множество всех булевых функций образует замкнутый класс.
Таблица принадлежности булевых функций замкнутым классам:

	K_0	K_1	K_S	K_L	K_M
0	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
1	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\neg$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
$\wedge$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\vee$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\oplus$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
$\rightarrow$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\equiv$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

Классы не пустые, попарно различны и каждый класс не совпадает с множеством приведённых и всех булевых функций.
Опр. Система булевых функций называется **полной**, если её замыкание совпадает с множеством всех булевых функций.
Это означает, что любая булева функция может быть представлена над этой системой как над базисом.
Теорема Поста. Для того, чтобы система булевых функций была полной, необходимо и достаточно того, чтобы она содержала хотя бы одну функцию:

1. не сохраняющую константу 0
2. не сохраняющую константу 1
3. не самодвойственную
4. не линейную
5. не монотонную
   Доказательство.

- Необходимость ($\Rightarrow$): если система функций не удовлетворяет ни одному из условий, то в лучшем случае система будет собственным подмножеством множества булевых функций либо пустым множеством

- Достаточность ($\Leftarrow$): см. в учебнике Кузнецова

Другими словами: Множество F булевых функций образует полную систему $\Leftrightarrow$ когда это множество не содержится целиком ни в одном из классов Поста.
$F = \{\neg, \wedge\}$ - базис И-НЕ
$F = \{\neg, \vee\}$ - базис ИЛИ-НЕ
$F = \{\neg, \wedge, \vee\}$
$F_Ж = \{\wedge, \oplus, 1, 0\}$

Один из способов определения полноты системы булевых функций - сведение этой системы к другой системе, полнота которой доказана.
$F = \{\downarrow\}$
$x \downarrow x = \overline{x}$
$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$
$x_1 \vee x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$
Перешли к базису $\{\neg, \vee\}$
$F = \{\downarrow\}$
$x|x = \overline{x}$
$x_1|x_2 = \overline{x_1 \wedge x_2}$
$x_1 \wedge x_2 = \overline{x_1|x_2} = (x_1|x_2)|(x_1|x_2)$
Перешли к базису $\{\neg, \wedge\}$

Как обосновать (не)принадлежность некоторой булевой функции к тому или иному классу Поста?

Покажем немонотонность отрицания:
Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - не монотонная функция
$\sigma_1 = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
$\sigma_2 = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
$\sigma_1 \leq \sigma_2$
Если $f(\sigma_1) \leq f(\sigma_2)$, то она монотонная
$f(\sigma_1) = 1, f(\sigma_2) = 0 \Rightarrow$ функция не монотонна
$\overline{x} = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

Пример: Пусть дана система булевых функций 3 переменных $\{f_1, f_2\}$, заданных таблицей истинности:

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

1. Принадлежность K_0:
   - $f_1(0,0,0) = 1 \Rightarrow f_1 \notin K_0$
   - $f_2(0,0,0) = 1 \Rightarrow f_2 \notin K_0$
2. Принадлежность K_1:

- $f_1(1,1,1) = 1 \Rightarrow f_1 \in K_1$
- $f_2(1,1,1) = 0 \Rightarrow f_2 \notin K_1$

3. Принадлежность K_S:
   - $f_1(1,1,1) = 1, f_1^*(1,1,1) = 0 \Rightarrow f_1 \notin K_S$
   - $f_2(0,0,1) = 1, f_2^*(0,0,1) = 0 \Rightarrow f_2 \notin K_S$
4. Принадлежность K_M:
   - $f_1(0,0,0) > f_1(1,1,1) \Rightarrow f_1 \notin K_M$
   - $f_2(0,0,0) > f_2(0,1,1) \Rightarrow f_2 \notin K_M$
5. Принадлежность K_L:
   - В общем случае любая функция f_n выражается полиномом Жегалкина $\leq n$ степени:
   - $P_Ж(x_1, x_2, x_3) = a_{123}x_1x_2x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0$
   - Если удастся свести его к первой степени, то функция линейна:
   - $a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_0 \in K_L$
   - Для решения задачи воспользуемся методом неопределённых коэффициентов:
   а) Рассмотрим набор $(0,0,0)$:

- $f_1(0,0,0) = a_0 = 1 \therefore a_0 = 1$
  б) Рассмотрим наборы $(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$:
- $f_1(0,0,1) = a_3 \oplus a_0 = 1 \therefore a_3 = 0$
- $f_1(0,1,0) = a_2 \oplus a_0 = 1 \therefore a_2 = 0$
- $f_1(1,0,0) = a_1 \oplus a_0 = 1 \therefore a_1 = 0$
  в) Рассмотрим наборы: $(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)$:
- $f_1(1,1,0) = a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = 0 \therefore a_{12} = 1$
- $f_1(1,0,1) = a_{13} \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \therefore a_{13} = 0$
- $f_1(0,1,1) = a_{23} \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_0 = 1 \therefore a_{23} = 0$
  г) Рассмотрим набор $(1,1,1)$:
- $f_1(1,1,1) = a_{123} \oplus 1 \oplus 1 = 1 \therefore a_{123} = 1$
  $f_(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus 1 \Rightarrow f_1 \notin K_L$

Примеры реализации некоторых элементарных функций с помощью не элементарных

Функции, сохраняющие константу 0 и 1, отрицание:

1. Пусть $f_0(x_0, \ldots, x_n) \in K_0$ и $f_1(x_1, \ldots, x_1) \in K_1$:

   > $f_0(0, \ldots, 0) = 0$
   > $f_0(1, \ldots, 1) = 0$
   > $0 = f_0(x, \ldots, x)$
   > $f_1(0, \ldots, 0) = 1$
   > $f_1(1, \ldots, 1) = 1$
   > $1 = f_1(x, \ldots, x)$

2. Пусть f_0 аналогично пункту 1. Рассмотрим f_1:

   > $f_1(0, \ldots, 0) = 1$
   > $f_1(1, \ldots, 1) = 0$
   > $\overline{x} = f_1(x, \ldots, x)$
   > $1 = \overline{f_0}(x, \ldots, x) = f_1(f_0(x, \ldots, x), \ldots, f_0(x, \ldots, x))$

3. $\sigma_1 \leq \sigma_2$ - сравнимые наборы:

> $\sigma_1 = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
> $\sigma_2 = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
> $f(\sigma_1) = 1$
> $f(\sigma_2) = 0$
> $f \notin K_M$
> $\overline{x} = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

4. $f(x_1, x_2) \notin K_L$
   a) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus 1 = \overline{x_1x_2} \therefore x_1x_2 = \overline{f}(x_1, x_2)$
   b) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_2 \oplus 1 = (x_1 \oplus 1)x_2 \oplus 1 = \overline{\overline{x}_1x_2} \therefore x_1x_2 = \overline{f}(\overline{x}_1, x_2)$
   c) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_1 = x_1(x_2 \oplus 1) = x_1\overline{x}_2 \therefore x_1x_2 = f(x_1, \overline{x}_2)$
   d) $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = x_1(x_2 \oplus 1) \oplus (x_2 \oplus 1) = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) = x_1x_2 \therefore x_1x_2 = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$
   e)