2. Изоморфизм графов

Опр. Рассмотрим графы $G_1(X_1, U_1)$ и $G_2(X_2, U_2)$. Они называются изоморфными, если между множествами вершин X_1 и X_2 установлено взаимно однозначное соответствие такое, что между U_1 и U_2 устанавливается также взаимно однозначное соответствие. А именно каждое ребро из U_2 инцидентно 2 своим концевым вершинам из $X_2 \iff$ когда соответствующие им вершины из X_1 инцидентны ребру из множества U_1

Теорема. Изоморфизм графом является отношением эквивалентности:

1. Рефлексивность - граф изоморфен сам себе $G \leftrightarrow G$
2. Симметричность - $f : G_1 \leftrightarrow G_2 \implies f^{-1} : G_2 \leftrightarrow G_1$
3. Транзитивность:
   - $f_1 : G_1 \leftrightarrow G_2$
   - $f_2 : G_2 \leftrightarrow G_3$
   - $f_3 = f_1 \circ f_2$
   - $f_3 : G_1 \leftrightarrow G_3$

Из теоремы следует, что множество всех графов разбивается на классы эквивалентности такие, что в пределах каждого класса все графы изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны (*"с точностью до изоморфизма"*).

Части графа

Рассмотрим граф $G(X, U)$

Опр. Граф $G_1(X_1, U_1)$ называется частью графа G, если он находится в отношении включения к нему: $G_1 \subseteq G \ (X_1 \subseteq X, U_1 \subseteq U)$

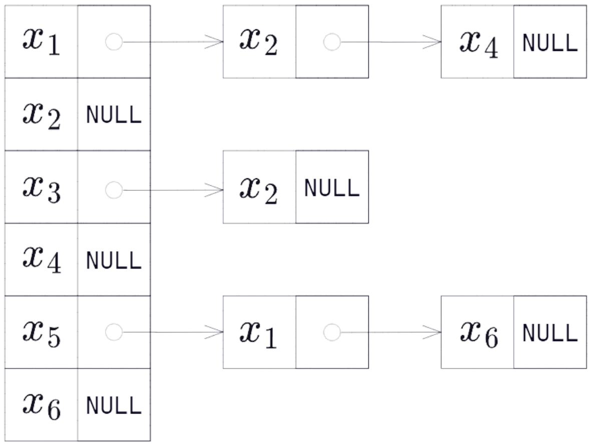
Опр. Часть графа называется подграфом, если включение строгое: $G_1 \subset G \ (X_1 \subset X, U_1 \subset U)$

Обозначение удаления ребра: $G - (x_i, x_j)$

Опр. Часть графа называется субграфом, если $X_1 = X$, а $U_1 \subset U$

Способы задания графа

1. Матричный
2. Аналитический - основан на понятии отображения
   - **Обоз.** $\mathit{\Gamma}_{x_i}$
   - *Пример:*
     - $\mathit{\Gamma}_{x_1} = \{x_2\}$ - исходящие рёбра
     - $\mathit{\Gamma}_{x_2} = \varnothing$
     - $\mathit{\Gamma}_{x_3} = \{x_2\}$
     - $\mathit{\Gamma}_{x_4} = \varnothing$
     - $\mathit{\Gamma}_{x_5} = \{x_1\}$
     - $\mathit{\Gamma}_{x_6} = \varnothing$
     - $\mathit{\Gamma}_{x_1}^{-1} = \{x_5\}$ - входящие рёбра
3. Списковые структуры данных
   - Вектор Айлифа:



4. Массив рёбер или пар смежных вершин

x_1	x_2
x_5	x_1
x_1	x_4
x_3	x_2
x_5	x_6

Матричный способ

1. Матрица смежности

Матрица смежности - квадратная булева матрица M порядка $n = |X|$.

- $M_{ij} = 1$, если x_i и x_j смежны
- $M_{ij} = 0$, если x_i и x_j не смежны

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1		1	1	
x_2	1		1			
x_3		1				
x_4	1					
x_5	1					1
x_6					1	

- Сумма элементов равна числу рёбер графа
- Самый быстрый, но затратный по памяти способ
- Матрицу смежности можно построить для рёбер

2. Матрица инциденций

Матрица порядка $m \times n$, где $m = |X|, n = |U|$
Для неографов:

- $H_{ij} = 1$, если x_i инцидентна u_j
- $H_{ij} = 0$, иначе
- Сумма столбца = 2
  Для орграфов:

- $H_{ij} = 1$, если x_i инцидента u_j и является конечной для него
- $H_{ij} = 01$, если x_i не инцидента u_j
- $H_{ij} = -1$, если x_i инцидента u_j и является начальной для него
- Сумма столбца = 0

По строкам матрицы можно вычислить степени и полустепени вершин.