РК 2

Вопросы, оцениваемые в 1 балл

1) Сформулировать определение общего решения ОДУ n-ого порядка.

- **Опр.** Общим решением ДУ $y' = f(x, y)$ называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:
    1. зависит от одной независимой переменной x и одной произвольной константы C
    2. при любом значение константы C является решением
    3. для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ $\exists C_0 : y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять начальному условию
- **Опр. (Иванков - бан от Марины Ивановны)** Общим решением ДУ n-ого порядка $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ называется функция $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$, обладающая следующими свойствами:
    1. зависит от одной независимой переменной x и n произвольных констант $C_1, \dots, C_n$
    2. при любых значениях констант $C_1, \dots, C_n$ является решением ДУ
    3. для любого начального условия $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ существуют константы $C_0, \dots, C_n$ такие, что $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$ и все её производные до $n-1$ включительно будут удовлетворять начальному условию

2) Сформулировать определение задачи Коши для ОДУ n-ого порядка.

- **Опр.** Задачей Коши называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ ДУ $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$ $(y|_{x=x_0} = y_0)$
- **Опр. (Иванков - бан от Марины Ивановны)** Задачей Коши называют задачу нахождения решения $y(x)$ ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

3) Сформулировать определение линейного ОДУ n-го порядка.

- **Опр.** Линейным ДУ n-ого порядка называется ДУ, линейное относительно неизвестной функции и всех её производных, т.е. ДУ вида:

  $$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = g(x),$$

  где $a_0(x), a_1(x), \dots, a_n(x), g(x)$ - заданные на некотором интервале I функции.

4) Сформулировать определение линейной зависимости и линейной независимости системы функций на промежутке.

- **Опр.** Функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно-зависимыми на $[a, b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ такие, что на $[a, b]$ выполняется равенство $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, где хотя бы одна $\alpha_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$. Если же это тождество выполняется только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называются линейно-независимыми на $[a, b]$.

5) Сформулировать определение определителя Вронского системы функций.

- **Опр.** Определителем Вронского функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называется определитель вида:

$$W = W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

6) Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ

- **Опр.** Совокупность любых n линейно независимых частных решений однородного уравнения n-ого порядка называются его фундаментальной системой решений (ФСР).

7) Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами.

- **Опр. (Иванков - бан от Марины Ивановны)** Рассмотрим линейное однородное ДУ с постоянными коэффициентами: $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ - вещественные числа. Уравнение $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ называется характеристическим уравнение этого ДУ.

Вопросы, оцениваемые в 3 балла

1) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций.

Теорема. Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, то
$\forall x \in [a, b]\ W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$
Доказательство.
По усл. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, $\implies$, $\exists \alpha_i \neq 0$ такие, что $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$. Дифференцируя $n-1$ раз получим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \dots + \alpha_n y_n' = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Получили СЛАУ с n неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
Так как хотя бы одна $\alpha_i \neq 0$, то эта система имеет ненулевое решение. Определителем такой системы является определитель Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$. Полученная система имеет ненулевое решение лишь в том случаем, когда её определитель равен 0. То есть:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in [a, b] \blacktriangle$$

2) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ.

Теорема. Если линейно независимые на $[a, b]$ функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются решениями ЛОДУ с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, то определитель Вронского этих функций отличен от нуля $\forall x \in [a, b]$

Доказательство. (методом от противного)

Допустим, что для какой-то точки $x_0 \in [a, b]$ $W(x_0) = 0$

Составим СЛАУ относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

В силу допущения определитель этой системы $W(x_0) = 0, x_0 \in [a, b], \implies$, эта система имеет ненулевое решение, то есть хотя бы одно из $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ отлично от нуля

Рассмотрим $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x)$, то есть линейную комбинацию частных решений.

Следовательно, эта функция сама является решением того же ЛОДУ, удовлетворяющим начальному условию $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = 0$

Но этим же начальным условиям удовлетворяет и тривиальное решение $y = 0$

По теореме о единственности решения: $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0$ на $[a, b]$ и $\exists \alpha_i \neq 0$

По определению линейной зависимости функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - линейно зависимые функции.

Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение неверно и $\nexists x_0 \in [a, b]$ такой, что $W(x_0) \neq 0$.

То есть $W(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$ ▲

3) Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ n-го порядка.

Теорема. У каждого ЛОДУ n-ого порядка $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x) y = 0$ с непрерывными коэффициентами $p_i(x), i = \overline{1, n}$, существует ФСР

Доказательство.

Для построения ФСР зададим n^2 чисел (начальные условия):

$$\begin{array}{cccc} y_1(x_0) = y_{1_0} & y_1'(x_0) = y_{1_0}' & \ldots & y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{1_0}^{(n-1)} \\ y_2(x_0) = y_{2_0} & y_2'(x_0) = y_{2_0}' & \ldots & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{2_0}^{(n-1)} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ y_n(x_0) = y_{n_0} & y_n'(x_0) = y_{n_0}' & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n_0}^{(n-1)} \end{array}$$

Эти числа должны удовлетворять следующему условию:

$$\begin{vmatrix} y_{1_0} & y_{2_0} & \ldots & y_{n_0} \\ y_{1_0}' & y_{2_0}' & \ldots & y_{n_0}' \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ y_{1_0}^{(n-1)} & y_{2_0}^{(n-1)} & \ldots & y_{n_0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Точка x_0 - произвольная точка $\in [a, b]$

Тогда получается, что решение $y_i(x), i = \overline{1, n}$, удовлетворяет этим начальным условиям с определителем Вронского $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно независимы на $[a, b]$ и образуют одну из ФСР ЛОДУ n-ого порядка. ▲

4) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного ОДУ n-го порядка.

Теорема. Общее решение на $[a,b]$ ЛОДУ n-ого порядка $L[y]=0$ с непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами $p_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ равно линейной комбинации ФСР с произвольными постоянными коэффициентами, т.е.: $y_{o.o.}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\dots+C_ny_n(x)$, где $y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)$ - ФСР ЛОДУ $L[y]=0$, а $C_1,C_2,\dots,C_n-const$

Доказательство.

1) Докажем, что $C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ - решение ЛОДУ $L[y]=0$

Подставим его в ДУ:

$L[y]=L[C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n]=C_1L[y_1]+C_2L[y_2]+\dots+C_nL[y_n]=0$

Следовательно, $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ является решением ЛОДУ $L[y]=0$

2) Докажем, что $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ - общее решение ЛОДУ $L[y]=0$

По условию все коэффициенты есть непрерывные функции на $[a,b]$, $\implies$, выполнены все условия теоремы Коши $\exists$ и ! решения ЛОДУ $L[y]=0$.

Решение $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ будет общим решением, если найдутся единственным образом постоянные C_i при произвольно заданных начальных условиях $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$, где $x_0\in[a,b]$

Пусть решение и его производные удовлетворяют этим условиям:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+\dots+C_ny_n(x_0)=y_0 \\ C_1y'_1(x_0)+C_2y'_2(x_0)+\dots+C_ny'_n(x_0)=y'_0 \\ \dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2y_2^{(n-1)}(x_0)+\dots+C_ny_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Это неоднородная СЛАУ относительно $C_1,C_2,\dots,C_n$. Определитель этой системы является определителем Вронского $W(x_0)$ для линейно независимой системы функций $y_1,y_2,\dots,y_n$ (решение ЛОДУ $L[y]=0$) и тогда $W(x)\neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение $C_1,C_2,\dots,C_n$ для произвольной точки $(x_0,y_0,y'_0,\dots,y_0^{(n-1)})\implies$

$\implies y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ - общее решение ЛОДУ $L[y]=0$▲

5) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ n-го порядка.

Теорема. Общее решение ЛНДУ n-ого порядка с непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами $p_i(x),i=\overline{1,n}$ и функцией $f(x)$ (правая часть) равно сумме общего решения однородного ДУ и какого-либо частного решения неоднородного ДУ: $y_{о.н.}=y_{о.н.}+y_{ч.н.}$

Доказательство.

1) Докажем, что $y_{о.н.}$ есть решение ДУ. По условию $L[y_{ч.н.}]=f(x)$, $L[y_{o.o.}]=0$

$L[y_{о.н}]=L[y_{o.o.}+y_{ч.н.}]=L[y_{o.o.}]+L[y_{ч.н.}]=0+f(x)=f(x)$

Следовательно, $y_{о.н.}$ - решение ДУ

2) Докажем, что $y_{о.н.}=y_{o.o.}+y_{ч.н.}$ - общее решение

$y_{о.н.}=y_{o.o.}+y_{ч.н.}=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i+y_{ч.н.}=$ (по теореме о структуре общего решения)

$=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n+y_{ч.н.}$, где $y_1,y_2,\dots,y_n$ - линейно независимые частные решения соответствующего ЛОДУ, причём:

$$W(X)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\neq 0 \quad \forall x\in[a,b]$$

Так как коэффициенты $p_i(x), i=\overline{1,n}$, - непрерывны на $[a,b]$, то по теореме Коши о существовании и единственности решения задачи Коши существует единственное решение ДУ, удовлетворяющее заданным условиям. Следовательно, надо доказать, что если решение $y_{о.н.} = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n + y_{ч.н.}$ и его производные удовлетворяют заданным начальным условиям, то из этих условий можно единственным образом определить $C_1, C_2, \dots, C_n, x_0 \in [a,b]$

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \dots + C_ny_n(x_0) = y_0 - y_{ч.н.}(x_0) \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \dots + C_ny_n'(x_0) = y_0' - y_{ч.н.}'(x_0) \\ \dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{ч.н.}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

СЛАУ с определителем $W(x) \neq 0$, $x_0 \in [a,b]$, $\implies$, существует единственный набор
$C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n^0$
$y(x) = C_1^0y_1(x) + C_2^0y_2(x) + \dots + C_n^0y_n(x) + y_{ч.н.}$ - частное решение
Итак, $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н}$▲

6) Сформулировать и доказать теорему о наложении (суперпозиции) частных решений линейного неоднородного ОДУ.

Теорема. Если $y_1(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x)$, а $y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_2(x)$, то функция $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$
Доказательство.
По условию $L[y_1] = f_1(x)$, $L[y_2] = f_2(x)$
Найдём $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = f_1(x) + f_2(x)$
Следовательно, функция $y_1(x) + y_2(x)$ есть решение уравнения $L[y] = f_1(x) + f_2(x)$▲

7) Сформулировать и доказать свойства частных решений линейного однородного ОДУ

Теорема 1. Если функция $y_0(x)$ является решение ЛОДУ $L[y] = 0$, то функция $Cy_0(x)$, где $C = const$, тоже является решением ЛОДУ $L[y] = 0$
Доказательство.
$y_0(x)$ - решение ЛОДУ $L[y] = 0$ по усл., $\implies$, $L[y_0] = 0$
Найдём (по свойству однородности): $L[Cy_0] = CL[y_0] = C \cdot 0 = 0$
$L[Cy_0] = 0 \implies Cy_0(x)$ является решение ЛОДУ $L[y] = 0$▲
Теорема 2. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями ЛОДУ $L[y] = 0$, то функция $y_1(x) + y_2(x)$ тоже является решение ЛОДУ $L[y] = 0$
Доказательство.
$y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения ЛОДУ $L[y] = 0$ по усл., $\implies$, $L[y_1] = 0, L[y_2] = 0$
Найдём (по свойству аддитивности): $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L_1[y_2] = 0 + 0 = 0$
$L[y_1 + y_2] = 0 \implies (y_1(x) + y_2(x))$ является решение ЛОДУ $L[y] = 0$▲
Следствие. Линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_my_m(x)$ решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ ЛОДУ $L[y] = 0$ тоже является решением этого ЛОДУ.
Доказательство.
$L[y_1] = 0, L[y_2] = 0, \dots, L[y_m] = 0$ по условию
Найдём
$L[C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_my_m] = L[C_1y_1] + L[C_2y_2] + \dots + L[C_my_m] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2] + \dots + C_mL[y_m] = 0$
$L[C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_my_m] = 0 \implies C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_my_m(x)$ является решением ЛОДУ $L[y] = 0$▲
Утверждение. ЛОДУ $L[y] = 0$ всегда имеет тривиальное решение $y \equiv 0$
Теорема. Совокупность решений ЛОДУ $L[y] = 0$ образует линейное пространство.

8) Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного ОДУ 2-го порядка

Рассмотрим ЛОДУ 2-ого порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, $p_i(x)$ - непрерывная на $[a, b]$ функция для $i = \overline{1, n}$.
Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - решения этого ЛОДУ, тогда по определению:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 & | \cdot (-y_2) \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 & | \cdot y_1 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -y_1''y_2 - p_1(x)y_1'y_2 - p_2(x)y_1y_2 = 0 \\ y_2''y_1 + p_1(x)y_2'y_1 + p_2(x)y_2y_1 = 0 \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим:

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p_1(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0 \qquad (*)$$

Заметим, что:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

Тогда уравнение $(*)$ примет вид:

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p_1(x)W(x) = 0 \qquad (**)$$

Найдём:

$$\frac{dW(x)}{dx} = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

Подставляя в $(**)$, получим:

$$\frac{dW(x)}{dx} + p_1(x)W(x) = 0$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -p_1(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dW(x)}{W(x)} = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx$$

$$\ln|W(x)| - \ln|W(x_0)| = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx$$

Тогда получим формулу Остроградского-Лиувилля:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}$$

9) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых действительных корней характеристического уравнения.

Дано ЛОДУ 2-ого порядка: $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, $a_1, a_2 - const$
Будем искать решение в виде $y = e^{\lambda x}$
Найдём $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$
Подставим в исходное ДУ, после упрощения получим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$
$D = a_1^2 - 4a_2$
$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$
Пусть $D > 0$: λ_1, λ_2 - действительные различные числа

Тогда:

$$\left.\begin{aligned} y_1 = e^{\lambda_1 x} \\ y_2 = e^{\lambda_2 x} \end{aligned}\right\} - \text{ частные решения ДУ}$$

Докажем, что они линейно независимы:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x} \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$$

То есть $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ линейно независимые частные решения ДУ и образуют ФСР, по теореме о структуре общего решения ЛОДУ:
$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

10) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

Дано ЛОДУ 2-ого порядка: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $a_1, a_2 - const$
Будем искать решение в виде $y = e^{\lambda x}$
Найдём $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$
Подставим в исходное ДУ, после упрощения получим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$
$D = a_1^2 - 4a_2$
$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$
Пусть $D < 0$: λ_1, λ_2 - комплексно сопряжённые
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, (\beta \neq 0)$
Рассмотрим $e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + \beta i) x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$ - формула Эйлера
Выделим действительную и мнимую части решения:
$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - e^{\alpha x} \beta \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + e^{\alpha x} \beta \cos \beta x \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + e^{2\alpha x} \beta \cos^2 \beta x - \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + e^{2\alpha x} \beta \sin^2 \beta x =$$

$$= e^{2\alpha x} \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$$

То есть $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ линейно независимые частные решения ДУ и образуют ФСР, по теореме о структуре общего решения ЛОДУ:
$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

11) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

Дано ЛОДУ 2-ого порядка: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $a_1, a_2 - const$
Будем искать решение в виде $y = e^{\lambda x}$
Найдём $y' = \lambda e^{\lambda x}$ и $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$
Подставим в исходное ДУ, после упрощения получим характеристическое уравнение: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$
$D = a_1^2 - 4a_2$
$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$
Пусть $D = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2$ - действительные корни
$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$
$a_1 = -2\lambda$

Первое частное решение: $y = e^{\lambda x}$
Найдём второе частное решение:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx = e^{\lambda x} \int \frac{e^{-a_1 x}}{e^{2\lambda x}}\,dx = e^{\lambda x} \int \frac{e^{2\lambda x}}{e^{2\lambda x}}\,dx = xe^{\lambda x}$$

ФСР: $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$
$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$

12) Описать метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка и вывести систему соотношений для варьируемых переменных.

Дано ЛНДУ $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ с непрерывными коэффициентами $p_i(x), i = \overline{1,n}$
Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - ФСР соответствующего ЛОДУ
Будем искать решение ЛНДУ в виде: $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1y_1 + C_2y_2$
где $C_1(x)$, $C_2(x)$ - новые неизвестные функции
Найдём $y' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'$
Наложим ограничение: $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$
Тогда $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$
Найдём $y'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''$
Подставим найденные y, y', y'' в исходное ЛНДУ и упростим:
$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_2) + C_2(y_2'' + p_1y_2' + p_2y_2) = f(x)$
$y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1 = 0$ и $y_2'' + p_1y_2' + p_2y_2 = 0$ по условию
Получим $C_1'y_1' + C_2'y_2 = f(x)$
Это верно только при наложенном ограничении, то есть:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$, так как y_1, y_2 составляют ФСР исходного ДУ. Следовательно, коэффициенты C_1, C_2 определены единственным образом.
Пусть $C_1' = \varphi_1(x), C_2' = \varphi_2(x)$
Тогда $C_1 = \int \varphi_1(x)\,dx, C_2 = \int \varphi_2(x)\,dx$
Общее решение ЛНДУ: $C_1y_1 + C_2y_2 + y_1\int \varphi_1(x)\,dx + y_2\int \varphi_2(x)\,dx$