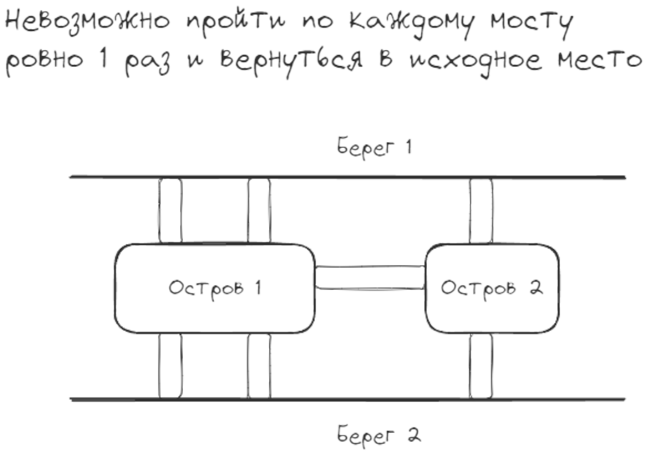
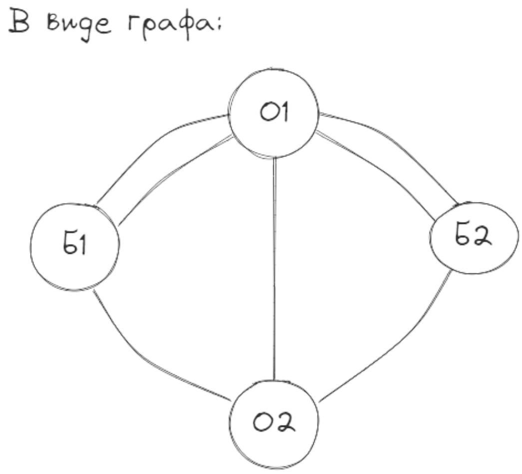
1. Графы

Задача о кёнингсбергских мостах





Опр. Графом $G(X, U)$ называется математический объект, заданный парой множеств $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ - множество вершин - и $U = i_1, u_2, \dots, u_m$ - множество рёбер.
Так как любые 2 вершины могут быть связаны или не связаны ребром, то на множестве вершин задаётся бинарное отношение.
Опр. Ребро, заданное неупорядоченной парой $u_l = \{x_i, x_j\}$ называется неориентированным.
Опр. Граф, состоящий только из неориентированных рёбер, называет неориентированным, неографом.
Опр. Ребро, заданное упорядоченной парой вершин $u_l = (x_i, x_j)$, называется ориентированным.
Опр. Граф, состоящий только из ориентированных рёбер, называет ориентированным, орграфом.
Опр. Граф, состоящий из ориентированных и неориентированных рёбер, называется смешанным.
Опр. Если в графе хотя бы одну пару вершин связывает несколько рёбер, то такой граф называется мультиграфом.
Опр. Вершины, определяющие ребро, называются концевыми вершинами.
Опр. Если концевые вершины ребра совпадают, то такое ребро называется петлей.

Понятие смежности и инцидентности

Между вершинами и рёбрами графа имеет место отношение инцидентности: вершина инцидентна ребру, если является одной из его концевых вершин.
Между вершинами или между рёбрами имеет место отношение смежности:

- Два ребра называются смежными, если имеют общую концевую вершину.
- Две вершины называются смежными, если являются концевыми вершинами одного ребра.

Отношение инцидентности имеет место быть между однородными компонентами графа, отношение смежности - между однородными компонентами.

> Отношение смежности является отношением толерантности, если принять, что вершина(ребро) смежна сама себе.

Опр. Граф называется простым, если в нём нет петель и кратных рёбер.
Опр. Граф называется полным, если 2 любые его вершины смежны.

- Полный граф обязан быть простым.

Опр. Граф называется графом Кёнига (двудольным графом), если множество вершин можно разбить на 2 непересекающихся множества X_1 и X_2 ($X_1 \cap X_2 = \varnothing$) таких, что для каждого ребра верно, что одна из его вершин принадлежит X_1, а другая - X_2

- $\forall u_l \in U, u_l = (x_i, x_j) : x_i \in X_1, x_j \in X_2, i \overline{=} j$
- X_1 и X_2 называются долями двудольного графа

Понятие смежности

Опр. $|X| = n$ - мощность множества вершин называется порядком графа
Опр. Число рёбер, инцидентных вершине $x_i \in X$, называется степенью вершины x_i
Обоз. $p(x_i) = n$
Опр. Если $p(x_i) = 1$, то вершина x_i называется висячей
Опр. Если $p(x_i) = 0$, то вершина x_i называется изолированной

В случае орграфа:

- $p^+(x_i)$ - полустепень захода - количество ориентированных рёбер, входящих в вершину x_i
- $p^-(x_i)$ - полустепень исхода - количество ориентированных рёбер, исходящих из вершины x_i
- $p(x_i) = p^+(x_i) + p^-(x_i)$

Для произвольного графа G верно, что сумма степеней его вершин
равна удвоенному числу его рёбер: $\Sigma p(x_i) = 2|U|\ x_i \in X$ - лемма о рукопожатиях
Каждое ребро инцидентно двум вершинам, отсюда 2 в правой части. Каждое ребро принимает участие в формировании степени обеих своих концевых вершин.
Опр. Если $p^-(x_i) = 0$, то вершина x_i называется стоком. ($x_i = t$)
Опр. Если $p^+(x_i) = 0$, то вершина x_i называется источником. ($x_i = s$)
Опр. Граф с одним источником и одним стоком называется сетью