Модуль 1

1. Понятие булевой функции. Способы задания булевых функций. Существенные и несущественные переменные. Элементарные булевы функции одной и двух переменных.

$E = \{0, 1\}$ - булевы переменные, область значений и определения любой булевой функции
Алгебра, образованная множеством E и всеми операциями на нём, называется **алгеброй логики**.
Функция от n переменных, задающая соответствие $f : E^n \to E$, называется функцией алгебры логики или булевой функцией.
Количество булевых функций $= 2^{2^n}$
Способы задания булевой функции:

- аналитический: $f = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2)$
- таблица истинности:

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Переменные могут быть **существенными** или **несущественными**.
Переменная x_i булевой функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ называется **существенной**, если $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \neq f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.
Это означает, что существует набор $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ размера $n - 1$ такой, что $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.
Тогда говорят, что x_i существенная переменная и $f(\ldots)$ **существенно зависит** от x_i.
Иначе x_i - несущественная переменная.

I. Булевы функции одной переменной:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

$f_1(x) = 0$ - const 0
$f_2(x) = 1$ - const 1
$f_3(x) = x$ - тождественная функция
$f_4(x) = \overline{x}$ - отрицание или инверсия

II. 16 функций 2 переменных:

Булевы функции двух переменных

ф-ция / перем. x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
обозначение		0	1	x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$x_1 \wedge x_2$ $x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$ $x_1 + x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \equiv x_2$ $x_1 \sim x_2$	нет	нет	нет
наименование		константа нуля	константа единицы	функция, тождественная x_1	функция, тождественная x_2	отрицание x_1 *(инверсия x_1)*	отрицание x_2 *(инверсия x_2)*	конъюнкция *(логическое умножение)*	дизъюнкция *(логическое сложение)*	сложение по модулю 2	импликация	стрелка Пирса	штрих Шеффера	эквивалентность *(равнозначность)*	нет *(запрет по x_1)*	нет *(запрет по x_2)*	нет

2. Логические формулы. Соотношение понятий функции и формулы. Булев базис и булева алгебра. Свойства булевых операций.

Пусть $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Функция f, полученная подстановкой функций F друг в друга и переименованием переменных, называется **суперпозицией** функций $f_1, f_2, \dots, f_k$.
Выражение, описывающее суперпозицию, называется **формулой** над F.
Множество F называется **базисом**.
Функция f получена путём суперпозиции функций базиса F.

$\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, где φ_i - формула над F или переменная, называется **главной или внешней формулой**, а все φ_i называются **подформулами**.
Вложенность подформул называется **глубиной**.
Для каждой булевой функции можно задать бесконечное число формул.
Базис для $f = \overline{x}_1 x_2 \lor x_1 x_2 : \ F = \{\land, \lor, \neg\}$

Опр. Формулы, базис которых составляют функции $\{\land, \lor, \neg\}$ (конъюнкция, дизъюнкция и отрицание), называются **булевыми формулами**. Сами операции называются **булевыми операциями**.

Алгебра $< E, \land, \lor, \neg >$ называется булевой **алгеброй**.

Примеры выражения некоторых булевых функций формулами булевой алгебры:

- $f = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \lor x_2}$
- $f = x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2}$
- $(x_1 \land x_2) \land x_3 = x_1 \land (x_2 \land x_3)$
- $(x_1 \lor x_2) \lor x_3 = x_1 \lor (x_2 \lor x_3)$

Свойства операций булевой алгебры:

1. Ассоциативность:
   - $(x_1 \land x_2) \land x_3 = x_1 \land (x_2 \land x_3)$
   - $(x_1 \lor x_2) \lor x_3 = x_1 \lor (x_2 \lor x_3)$
2. Коммутативность:
   - $x_1 \land x_2 = x_2 \land x_1$
   - $x_1 \lor x_2 = x_2 \lor x_1$
3. Дистрибутивность:
   - $x_1 \land (x_2 \lor x_3) = (x_1 \lor x_2) \land (x_1 \lor x_3)$
   - $x_1 \lor (x_2 \land x_3) = (x_1 \land x_2) \lor (x_1 \land x_3)$
4. Идемпотентность:

- $x_1 \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_1 = x_1$
- $x_1 \vee x_1 \vee \cdots \vee x_1 = x_1$

5. Закон де Моргана:
   - $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$
   - $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$
6. Двойное отрицание (кратное отрицание):
   - $\overline{\overline{x}} = x$
   - $\overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$
7. Свойства констант:
   - $x \vee 0 = x$
   - $x \vee 1 = 1$
   - $x \wedge 0 = 0$
   - $x \wedge 1 = x$
8. Противоречие:
   - $x \wedge \overline{x} = 0$
9. Тавтология:
   - $x \vee \overline{x} = 1$
10. Поглощение конъюнкции:
    - $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$
11. Поглощение дизъюнкции:
    - $(x_1 \vee x_2) \wedge x_1 = x_1$

3. Алгебра и полином Жегалкина. Свойства операций базиса Жегалкина. Приведение булевой функции к полиномиальному представлению. Теорема о полиноме Жегалкина.

Опр. Алгеброй над базисом, состоящим из булевых функций $\wedge, \oplus, 0, 1$, называется **алгеброй Жегалкина**.
Обозначение: $< \wedge, \oplus, 0, 1 >$ - алгебра, $F_{ж} = \{\wedge, \oplus, 0, 1\}$ - базис

Свойства операций в базисе Жегалкина

1. $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ - коммутативность
2. $x_1 \wedge (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \wedge x_2) \oplus (x_1 \wedge x_3)$
3. $x \oplus 0 = x; \qquad x \oplus 1 = \overline{x}$
4. выполняются все свойства конъюнкции и констант булевой алгебры
5. $x \oplus x = 0$

Переход от формулы в базисе Жегалкина к эквивалентной формуле в булевом базисе и обратно возможен всегда. Достаточно выразить дизъюнкцию и отрицание в базисе Жегалкина:

- $\overline{x} = x \oplus 1$
- $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1 \overline{x}_2} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus 1 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus 1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$

Опр. Формула, имеющая вид суммы по модулю 2 конъюнкций, называется **полиномом Жегалкина** для данной булевой функции.

Пусть f в СДНФ в булевом базисе - дизъюнкция элементарных конъюнкций.
$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3$
Если f_1, f_2 - две любые элементарные конъюнкции, включающие все переменные, то $f_1 \wedge f_2 = 0$.
В базисе Жегалкина: $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2 \oplus f_1 f_2$
При $f_1 \wedge f_2 = 0$: $f_1 \vee f_2 = f_1 \oplus f_2 \oplus 0 = f_1 \oplus f_2$
То есть $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \oplus x_1 x_2 \overline{x}_3 \oplus x_1 \overline{x}_2 x_3$
Следовательно, если булева функция задана в СДНФ то можем дизъюнкцию автоматически заменить на сумму по модулю 2.

Получение полинома Жегалкина:
$f(x_1, x_2, x_3) = \vee_1(1, 4)$ - значение 1 на 1 и 4 наборах СДНФ.
$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
Получение полинома:
$f = \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \oplus x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) x_3 \oplus x_1 (x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) =$

$= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 = x_1 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3$

Степень полинома Жегалкина определяется количеством литер в элементарной конъюнкции максимального ранга.

Теорема. Для всякой булевой функции существует полином Жегалкина, причём единственный.

4. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы булевых функций. Методика приведения булевой функции, заданной произвольной формулой, к ДНФ и КНФ.

Опр. Литера - любая переменная или её отрицание.
Опр. Ранг элементарной конъюнкции - количество литер в её записи.
Опр. ДНФ – нормальная форма, в которой булева формула имеет вид дизъюнкции элементарных конъюнкций литералов.
Пример: $(a \vee b)(c \vee d)$
Опр. КНФ – нормальная форма, в которой булева формула имеет вид конъюнкции элементарных дизъюнкций литералов.
Пример: $ab \vee cd$
Опр. Длина ДНФ - сумма рангов элементарных конъюнкций.
Опр. ДНФ булевой функции f называется минимальной, если её длина наименьшая среди всех ДНФ этой функции.
Опр. Булева функция f_1 называется импликантой булевой функции f, если f_1 принимает значения 0 на тех же(но необязательно только тех) наборах, что и f.
Опр. Элементарная конъюнкция вида $K_i = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_i^{\alpha_i}$ называется простой импликантой функции f, если K_i - импликанта функции f и никакая часть K_i не является импликантой функции f.
Теорема. Всякая булева функция может быть представлена в ДНФ, каждая элементарная конъюнкция которой является простой импликантой.

Для приведения булевой функции к ДНФ или КНФ, нужно воспользоваться свойствами булевых операций.
Простейший пример для ДНФ:
$(a \vee b)c = ac \vee bc$
Простейший пример для КНФ:
$ab \vee bc \vee bd = b(a \vee c \vee d)$

5. Совершенные ДНФ и КНФ. Методика приведения булевой функции к СДНФ и СКНФ.

Опр. СКНФ - совершенная КНФ, в каждом конъюнкте которой присутствуют все литеры данной булевой функции, при этом не повторяются ни литеры внутри отдельного конъюнкта, ни сами конъюнкты.
Опр. СДНФ - совершенная ДНФ, в каждом дизъюнкте которой присутствуют все литеры данной булевой функции, при этом не повторяются ни литеры внутри отдельного дизъюнкта, ни сами дизъюнкты.

Для построения СДНФ создают дизъюнкцию конъюнкций тех наборов, на которых функция принимает значение 1. Литеры, имеющие значение 0, записываются с отрицанием.
Для построения СКНФ создают конъюнкцию дизъюнкций тех наборов, на которых функция принимает значения 0. Литеры, имеющие значение 1, записываются с отрицанием.

Пример из семинара:

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

СДНФ: $\overline{a}bc \vee a\overline{b}\overline{c} \vee a\overline{b}c$
СКНФ: $(a \vee b \vee c)(a \vee b \vee \overline{c})(a \vee \overline{b} \vee c)(\overline{a} \vee \overline{b} \vee c)(\overline{a} \vee \overline{b} \vee \overline{c})$

6. Минимизация булевых функций: постановка задачи. Импликанты. Простые импликанты. Сокращенная, тупиковая и минимальная формы булевой функции (в классе ДНФ).

Опр. ДНФ булевой функции f называется минимальной, если её длина наименьшая среди всех ДНФ этой функции.
Опр. Булева функция f_1 называется импликантой булевой функции f, если f_1 принимает значения 0 на тех же(но необязательно только тех) наборах, что и f.
Опр. Элементарная конъюнкция вида $K_i = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_i^{\alpha_i}$ называется простой импликантой функции f, если K_i - импликанта функции f и никакая часть K_i не является импликантой функции f.
Теорема. Всякая булева функция может быть представлена в ДНФ, каждая элементарная конъюнкция которой является простой импликантой.
Опр. Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется сокращённой ДНФ функции f.
Опр. Дизъюнкция простых импликант булевой функции такая, что удаление любой импликанты приводит к потери покрытия всех единиц функции, называется тупиковой ДНФ (ТДНФ)
Теорема. Любая минимальная ДНФ булевой функции является тупиковой.

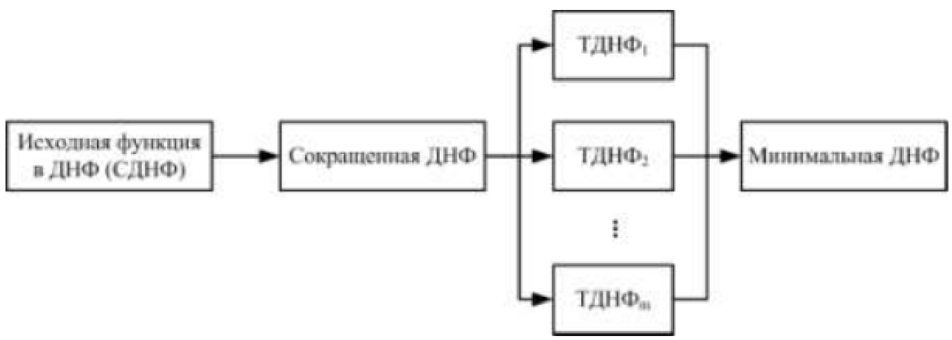
Пример постановки задачи: вам дана таблица булевой функции. Необходимо найти её минимальную ДНФ.
Пример:
$f = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2 = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2 \vee x_1 x_2 = x_2(\overline{x}_1 \vee x_1) \vee x_1(\overline{x}_2 \vee x_2) = x_2 \vee x_1$

7. Этапы получения минимальной ДНФ булевой функции. Единичный гиперкуб. Геометрическая интерпретация задачи минимизации булевой функции.

Этапы получения минимальной ДНФ булевой функции:

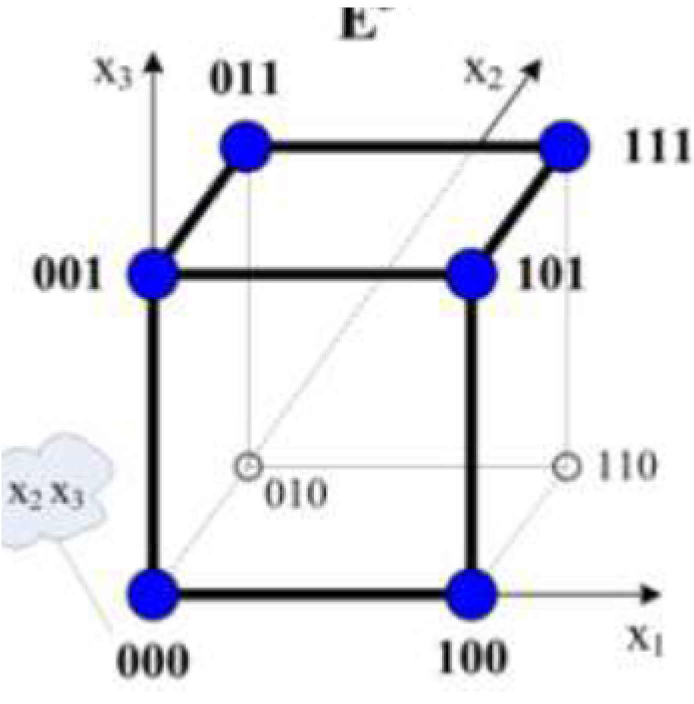
1. Используя свойства булевых функций привести исходную функцию к сокращенной ДНФ.
2. Путём использования свойств склеивания и поглощения получить различные тупиковые ДНФ.
3. Выбрать тупиковую ДНФ с минимальной длинной.

Таким образом, процесс минимизации булевой функции в классе ДНФ можно представить в виде следующей диаграммы:



Критерием выбора минимальной ДНФ из множества тупиковых ДНФ, как правило, является минимальное количество литер в ее записи. Этот критерий не единственный. Может быть наложено требование, например, минимизировать количество переменных, входящих с отрицанием или минимизировать число вхождений определенных переменных и т.п.

Любую булеву функцию можно интерпретировать геометрически, изобразив её на прямоугольной системе координат, где каждая ось обозначает одну из переменных функции. На этих осях строится единичный гиперкуб. Частным случаем можно выделить функцию от 3-ёх переменных. Её геометрической интерпретацией является трехмерный куб.



Геометрический смысл задачи минимизации булевой функции в классе ДНФ формулируется следующим образом.

Дано подмножество N вершин единичного гиперкуба En, то есть N единичных наборов функции f(x1, x2, … xn). Найти такой набор граней гиперкуба, чтобы они в совокупности давали покрытие всех N единичных наборов функции f и сумма рангов импликант покрытия была минимальной.

8. Метод карт Карно (диаграмм Вейча) минимизации булевой функции в классе ДНФ. Обоснование сокращения ранга покрывающих импликант.

1. Карта Карно - таблица, которая является ещё одним способом задания булевых функций. Каждому набору значений в карте Карно соответствует одна ячейка.
2. Обоснование сокращения ранга покрывающих импликант.
   Ранг покрывающих импликант сокращается в картах Карно за счет объединения соседних клеток, что позволяет исключить несущественные переменные при задании булевой функции логической формулой.

9. Метод Квайна–Мак-Класки минимизации булевой функции в классе ДНФ.

Шаги метода минимизации Квайна-Мак-Класки заключаются в следующем: (Пример был на семинаре)

1. Записываем таблицу истинности функции.
2. Группируем по количеству единиц те наборы, на которых функция принимает значение 1.
3. Пытаемся склеить соседние наборы. Если получилось, то на место склеенных чисел пишем знак $\star$, склеенные номера вычеркнем. Результат склеивания занесем в новую таблицу, которую создадим точно также, как и во втором пункте.
4. Снова склеиваем соседние наборы. Склеивать можно только те наборы, у которых $\star$ стоят на одинаковых позициях. Склеванные номера вычеркиваем. Результат заносим в новую таблицу.
5. Повторяем пункт 4, пока не будет новых наборов, которые можно склеить.
6. Создаем таблицу, в строке которой записываем все возможные наборы из полученных склеенных импликант. В столбце таблицы записываем сами склеенные импликанты. Помечаем напротив каждой импликанты ячейку, если эта импликанта может реализовать данный набор. Ищем комбинацию тех импликант, которые покрывают все наборы, причем длина этих импликант (длина без $\star$) должна быть минимальной.
7. Записываем дизъюнкцию этих наборов, если в наборе литере x_i соответствует 1, то пишем x_i без изменений, если 0, то пишем $\overline{x}_i$, если $\star$, то не пишем литеру вовсе.
8. Полученная ДНФ функции является минимальной.

10. Классы Поста булевых функций: сохраняющих константу нуля и константу единицы, линейных и монотонных.

Опр. Класс булевых функций, **сохраняющий константу нуля**, содержит функции, которые на нулевом наборе принимают значение 0: $f(0,0,...,0)=0$. Обозначение: K_0. Число таких функций равно 2^{2^n-1}.
Доказательство:
Функция этого класса принимает значение 0 только на нулевом наборе, на остальных наборах значение произвольное.
Так как всего наборов 2^n, то произвольное значение функция принимает на 2^n-1 наборах. Тогда функций, принимающих произвольное значение 2^{2^n-1}. Так как всех функций 2^{2^n}, а произвольное значение принимает 2^{2^n-1} функций, то число функций, принимающих значение нуля в нулевом наборе равно:
$2^{2^n}-2^{2^n-1}=2^{2^n-1}\triangle$

Опр. Класс булевых функций, **сохраняющих константу единицы**, содержит функции, которые на единичном наборе принимают значение 1: $f(1,1,...,1)=1$. Обозначение: K_1. Число таких функций равно 2^{2^n-1}. (Доказательство аналогично)

Опр. Функция называется **линейной**, если она представима в следующем виде:
$f=c_0\oplus c_1x_1\oplus c_2x_2\oplus...\oplus c_nx_n$, где c_i - коэффициент из множества {0;1}.
Тогда очевидно, что функция линейна, если она представима в виде полинома Жегалкина первой степени.
Линейные функции образуют класс K_L. Их число равно 2^{n+1}, т.к. всего коэффициентов c_i n+1.

Опр. Функция называется **монотонной**, если для любых её сравнимых наборов $\sigma_1\geq\sigma_2$ выполняется $f(\sigma_1)\geq f(\sigma_2)$.

Монотонные функции образуют класс монотонных функций K_m. Его мощность:
$2^{n^{[n/2]}}\leq|K_m|\leq 2^{a*n^{[n/2]}}$, где a - неизвестный коэффициент.

11. Двойственность булевых функций. Способ отыскания функции, двойственной к заданной. Теоремы о двойственности. Класс Поста самодвойственных функций.

Опр. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - булева функция от n переменных. Тогда $f^\star(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ называется **двойственной** к ней.

Для того, чтобы получить двойственную функцию нужно полностью проинвертировать её таблицу истинности. (Нарисовать пример). Или взять аргументы функции и саму функцию с инверсией.
Пример: $f = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$. $f^\star = \overline{(x_1 \vee x_2)} = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$

Опр. Булева функция называется **самодвойственной**, если она совпадает с двойственной ей функцией.

Чтобы доказать самодвойственность, нужно перебрать все взаимно противоположные наборы и убедиться в том, что на этих наборах функция принимает противоположные значения.

Опр. Самодвойственные функции образуют класс K_S. Мощность этого класса $2^{2^{n-1}}$, так как самодвойственная функция определена ровно на половине наборов.

Теоремы о двойственности:

- Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ реализуется формулой $\varphi(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n))$, то формула $\varphi^\star(\varphi_1^\star(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n^\star(x_1, \ldots, x_n))$ реализует булеву функцию $f^\star(x_1, \ldots, x_n)$.
  Пример: $\varphi = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \Rightarrow \varphi_1 = x_1 x_2$, $\varphi_2 = \overline{x}_1 \overline{x}_2$. Тогда $\varphi_1^\star = x_1 \vee x_2$, $\varphi_2^\star = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$.
  Имеем:
  $\varphi^\star = \overline{\varphi_1^\star \vee \varphi_2^\star} = x_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2 = x_1 \oplus x_2$.
- **Принцип двойственности**. Пусть есть базис $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$. Пусть этому базису поставлен в соответствие базис $F^\star = \{f_1^\star, \ldots, f_m^\star\}$. Если φ над F реализует функцию f, то $\varphi^\star$ над $F^\star$ реализует $f^\star$, притом, что f_i заменяется на $f_i^\star$., $i = \overline{1, n}$.
  Пример: $F = \{\wedge, \oplus\}$, $F^\star = \{\vee, \oplus\}$.
  $f = x_1 x_2 \qquad f^* = x_1 \vee x_2$
  $\varphi = (x_1 \overline{x}_2 \oplus \overline{x}_1 \overline{x}_2) x_1$
  $\varphi^* = ((x_1 \vee \overline{x}_2) \equiv (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)) \vee x_1$

12. Замкнутый класс. Полные системы булевых функций. Теорема Поста. Примеры полных систем булевых функций.

Опр. Множество Σ булевых функций называется **замкнутым**, если любая суперпозиция функций из Σ даёт функцию $\in \Sigma$.

Опр. Всякая замкнутая система Σ булевых функций порождает замкнутый класс, состоящий из всех формул, которые можно получить суперпозицией функций из Σ. Этот класс называется **замыканием**. Обозначение: $[\Sigma]$. То есть, если Σ - базис, то замыкание - множество всех формул над Σ.

Примером замкнутого класса является все классы Поста.

Опр. Система булевых функций называется **полной**, если её замыкание совпадает с множеством всех булевых функций. Это означает, что любая булева функция может быть представлена формулой этой системы как над базисом.

Теорема Поста: Для того, чтобы система булевых функций была полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы одну функцию:

- не сохраняющую константу 0
- не сохраняющую константу 1
- не самодвойственную
- не линейную
- не монотонную
  Иначе говоря, множество F булевых функций образует полную систему, тогда и только тогда, когда это множество не содержится полностью ни в одном из классов Поста.

Примеры полных систем:

- Стрелка Пирса: $\{\downarrow\}$
- Штрих Шеффера: $\{\uparrow\}$
- Булев базис: $\{, \vee, \wedge, \neg\}$
- Базис Жегалкина: $\{\wedge, \oplus, 0, 1\}$

13. Порядок доказательства полноты произвольной системы булевых функций.

Порядок доказательства (или просто привести пример и на нём показать):

1. Составить таблицу истинности системы функций.
2. Чтобы система функций была полной, нужно доказать, что она целиком не принадлежит ни одному из классов Поста. Для этого рисуем таблицу, где по её столбцам будут расположены названия классов Поста, а по её строкам сами функции.
3. Затем рассматриваем принадлежность каждой функции системы к каждому классу Поста. Легче всего доказать K_0, K_1, K_S, K_M, а класс линейных функций оставить на потом.
4. Если после выполнения третьего шага есть хотя бы один класс, которому принадлежат все функции, то можно говорить, что данная система функций неполная. Если же такого не произошло, то придется рассматривать класс линейных функций.
5. Для рассмотрения класса линейных функций используется метод неопределенных коэффициентов. Берем любую функцию системы, и записываем для неё полином Жегалкина в общем виде (линейную комбинацию всех наборов переменных). Затем пошагово рассматриваем наборы с (0,0,...,0) до (1,1,...,1), уменьшая количество неизвестных коэффициентов. Если в конце получился полином первой степени, то делаем точно также для других функций. Если не получился, то данная функция не является линейной, и уже можно говорить, что данная система булевых функций полная.
6. После выполнения пятого шага из таблицы уже наверняка видно, является ли данная система функций полной или же нет.