Модуль 3

31. Понятие графа. Ориентированные и неориентированные графы. Мультиграф. Простой, полный, дополнительный графы.

Опр. Графом $G(X, U)$ называется математический объект, заданный парой множеств $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ - множество вершин графа, и $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ - множество рёбер графа.

Опр. Если пара вершин графа x_i, x_j - неупорядоченные вершины и они соединены ребром $u_l = \{x_i, x_j\}$, то такое ребро называется **неориентированным**.

Опр. Если пара вершин графа x_i, x_j - упорядоченные вершины и они соединены ребром $u_l = (x_i, x_j)$, то такое ребро называется **ориентированным**.

Опр. Граф, состоящий только из неориентированных ребер, называется **неориентированным**. Если же граф состоит только из ориентированных ребер, то он называется **ориентированным**.

Опр. Если в графе хотя бы одну пару вершин связывает более чем одно ребро, то такой граф называется **мультиграфом**.

Опр. Если концевые вершины ребра совпадают, то такое ребро называется **петлей.**

Опр. Если два ребра инциденты одним и тем же двум вершинам, то такие ребра называются **кратными**.

Опр. Граф называется **простым**, если в нем нет петель и кратных ребер.

Опр. Граф называется **полным**, если две любые его вершины смежны.

Опр. Граф $\overline{G}(X, \overline{U})$ называется **дополнительным** к графу $G(X, U)$, если множество его вершин совпадает с множеством вершин графа G, а множество рёбер $\overline{U} = U_n \setminus U$, где U_n - множество рёбер соответствующего полного графа. Т.е. в дополнительном графе две вершины инциденты одному и тому же ребру тогда и только тогда, когда это ребро отсутствует в исходном графе.

---

32. Отношения смежности и инцидентности в графах. Порядок графа, степень и полустепени вершин.

Опр. Вершина x_i инцидента ребру u_l, если является одной из её концевых вершин.

Опр. Два ребра называются **смежными**, если они имеют общую концевую вершину. (Две вершины называются смежными, если они являются концевыми вершинами одного и того же ребра.)

Отношение инцидентности справедливо для разнородных компонентов (ребро - вершина), а отношение смежности - для однородных (ребро - ребро, вершина - вершина).

Опр. Мощность вершин графа $|X| = n$ называется **порядком** графа.

Опр. Число ребер, инцидентных вершине $x_i \in X$, называется её **степенью**.

В случае орграфа определены:

- $p^+(x_i)$ - **полустепень захода** (количество входящих в x_i ориентированных ребер).

- $p^-(x_i)$ - **полустепень исхода** (количество исходящих из x_i ориентированных ребер).

Опр. Если $p(x_i) = 1$, то вершина x_i называется висячей
Опр. Если $p(x_i) = 0$, то вершина x_i называется изолированной
Для любой вершины выполняется: $p(x_i) = p^+(x_i) + p^-(x_i)$.

---

33. Способы задания графов.

1. Матричный способ:

- Матрица смежности - квадратная матрица M порядка n - количество вершин.
  $M_{ij} = 1$, если x_i смежно x_j
  $M_{ij} = 0$, если x_i не смежно x_j

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1		1		1	1	
x_2	1		1			
x_3		1				
x_4	1					
x_5	1					1
x_6					1	

Она симметрична относительно главной диагонали для неориентированного графа.

- Матрица инцидентностей - прямоугольная матрица $n \times m$, где n - порядок графа, m - число ребер.
  Для неориентированных графов:
- H_{ij} = 1, если x_i инцидентна u_j
- H_{ij} = 0, иначе
- Сумма столбца = 2

Для ориентированных графов:

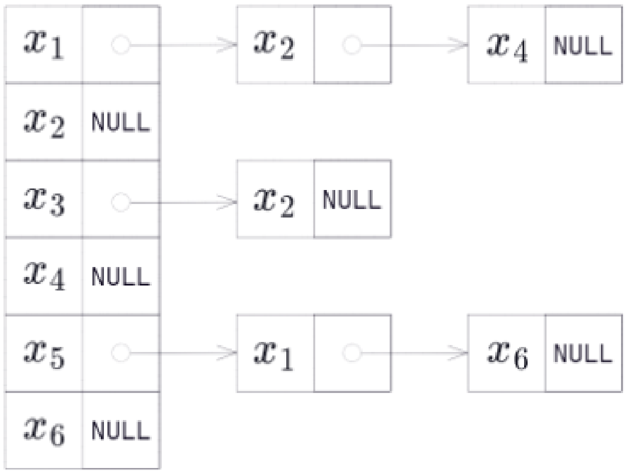
- H_{ij} = 1, если x_i инцидента u_j и является конечной для него
- H_{ij} = 0, если x_i не инцидента u_j
- H_{ij} = −1, если x_i инцидента u_j и является начальной для него
- Сумма столбца = 0

По строкам матрицы можно вычислить степени и полустепени вершин.

2. Аналитический (основан на понятии отображения.):

- **Обозначение.** Γ_{x_i} - прямое отображение вершины x_i.
  $\Gamma_{x_1} = \{x_2\}$ - исходящие ребра.ыячч
  $\Gamma_{x_2}^{-1} = \{x_1\}$ - входящие ребра.

3. Списком (Вектором Айлифа):



4. Массив вершин/ребер:

Откуда	Куда
x_1	x_2
x_5	x_1
x_1	x_4
x_3	x_2
x_5	x_6

---

34. Части графа: подграфы и суграфы. Изоморфизм графов.

Опр. $G_1(X_1, U_1)$ - называется **частью** графа $G(X, U)$, если он находится в отношении включения к нему: $X_1 \subseteq X, U_1 \subseteq U$. ($G_1 \subseteq G$)

Опр. Часть графа называется **подграфом** графа $G(X, U)$, если он находится в отношении строгого включения к нему: $X_1 \subset X, U_1 \subset U$. ($G_1 \subset G$)

Опр. Часть графа называется **суграфом**, если $X_1 = X$, а $U_1 \subseteq U$

Опр. Есть два графа $G_1(X_1, U_1)$ и $G_2(X_2, U_2)$. Они называются **изоморфными**, если между множествами вершин X_1 и X_2 установлено взаимно однозначное соответствие, такое, что между множествами U_1 и U_2 устанавливается также взаимно однозначное соответствие, а именно: каждое ребро из множества U_2 инцидентно двум своим концевым вершинам тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины из множества X_1 инцидентны ребру из множества U_1.

Из определения следует, что в случае изоморфного графа существует две биекции:

- $f_1 : X_1 \leftrightarrow X_2$
- $f_2 : U_1 \leftrightarrow U_2$

Теорема. Изоморфизм графом является отношением эквивалентности.

---

35. Теоретико-множественные операции на графах.

Все операции описаны для неографов. Даны графы $G_1(S_1, U_1)$ и $G_2(S_2, U_2)$

1. **Объединением** графов G_1 и G_2 называется граф $G(S, U) = G_1 \cup G_2$ такой, что $S = S_1 \cup S_2, U = U_1 \cup U_2$
2. **Пересечением** графов G_1 и G_2 называется граф $G(S, U) = G_1 \cap G_2$ такой, что $S = S_1 \cap S_2, U = U_1 \cap U_2$
3. **Дополнительным графом** к графу $G(S, U)$ называется граф $\overline{G}(S, U)$, состоящий из того же множества вершин, что и граф G, и множества рёбер $\overline{U} = U_n \setminus U$, где U_n - множество рёбер соответствующего полного графа.
4. **Композицией** графов G_1 и G_2 называется граф $G(S, U) = G_1 \circ G_2$, в котором каждое ребро (x_i, x_j) присутствует тогда и только тогда, когда в графе G_1 имеется ребро $(x_i, x_p) \in U_1$, а в графе G_2 - ребро $(x_p, x_j) \in U_2$. При этом имеется в виду, что либо $S = S_1 = S_2$, либо $S = S_1 \cup S_2$.
5. **Удалением вершины** v из графа $G(S, U)$ называется операция, дающая граф $G - v$, в котором множество вершин есть $S \setminus \{v\}$, а множество рёбер $U' = \{u | u \in U \setminus E\}$, где $E \subset U$ и каждое ребро $u_i \in E$ инцидентно вершине v.
6. **Удалением ребра** u из графа $G(S, U)$ называется операция, дающая граф $G - u$, в котором множество вершин совпадает с множеством вершин исходного графа, множество рёбер есть $U \setminus \{u\}$
7. **Добавлением ребра** u в граф $G(S, U)$ называется операция, дающая граф $G + u$, в котором множество вершин совпадает с множеством вершин исходного графа, а множество рёбер есть множество $U \cup \{u\}$
8. **Стягиванием ребра** $u = (x_i, x_j)$ графа $G(S, U)$, где $u \in U, \{x_i, x_j\} \subset S$, называется называется операция, дающая граф с множеством рёбер $U \setminus \{u\}$ при отождествлении вершин x_i и x_j одной вершине v, когда рёбра, инцидентные вершинам x_i и x_j в исходном графе, становятся инцидентными вершине v полученного графа. Обозначение: G/u

---

36. Маршрут, цепь, цикл, путь, контур в графе. Прямое и обратное транзитивные замыкания.

Опр. Маршрутом, соединяющим вершины x_i и x_j в графе, называется чередующаяся последовательность $x_i u_k x_l u_p \ldots u_l x_j$. (Достаточно указывать последовательность вершин $x_i, x_l, \ldots, x_j$)

Опр. Маршрут без повторяющихся ребер называется **цепью**.
Опр. Цепь, все вершины которой различны, называется **простой цепью.**
Опр. Простая цепь, начальные и конечные вершины которой совпадают, называется **циклом**.
Опр. Цепь в ориентированном графе называется **путем**.
Опр. Цикл в орграфе называется **контуром**.

Опр. Прямым транзитивным замыканием $\widehat{\Gamma}_{x_i}$ вершины x_i называется объединение кратных отображений (отображения высших порядков):
$\widehat{\Gamma}_{x_i} = \{x_i\} \cup \Gamma_{x_i} \cup \Gamma^2_{x_i} \cup \ldots \cup \Gamma^n_{x_i} \cup \ldots$

Опр. Обратным транзитивным замыканием $\widehat{\Gamma}^{-1}_{x_i}$ вершины x_i называется объединение всех обратных кратных отображений:
$\widehat{\Gamma}^{-1}_{x_i} = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}_{x_i} \cup \Gamma^{-2}_{x_i} \cup \ldots \cup \Gamma^{-n}_{x_i} \cup \ldots$

---

37. Понятие связности в графе. Простая и сильная связность. Компоненты связности. Алгоритм Мальгранжа разложения орграфа на компоненты сильной связности.

Опр. Неориентированный граф является **связным** тогда и только тогда, когда любые две его различные вершины можно соединить маршрутом. (Для любой вершины $x_i \in X$ выполняется условие: $\widehat{\Gamma}_{x_i} = X$)

Опр. Сильная связность в орграфе подразумевает, что между двумя любыми вершинами существует именно путь (учитывается направление).
Опр. Слабая связность игнорирует направление.

Отношение связности на множестве вершин является отношением эквивалентности.

Отношение связности разбивает множество вершин графа на классы эквивалентности, которые называют **компонентами сильной связности графа**.

Для разложения орграфа на компоненты сильной связности существует **алгоритм Мальгранжа**.
Его теоретическая основа:

- Каждая вершина графа может принадлежать только одной компоненте сильной связности и эта компонента ищется следующим образом: $C_{x_i} = \widehat{\Gamma}_{x_i} \cap \widehat{\Gamma}^{-1}_{x_i}$

Шаги алгоритма:

1. Для произвольной вершины x_i находим соответствующий ей класс C_{x_i} по следующей формуле: $C_{x_i} = \widehat{\Gamma}_{x_i} \cap \widehat{\Gamma}^{-1}_{x_i}$.
2. Вершины, которые вошли в этот класс удаляем из графа
3. Повторяем шаги 1 и 2 пока не удалим весь граф.

---

38. Соответствие понятий маршрута и связности. Точка сочленения графа и теорема о ней. Понятие i-связного графа.

Граф является связным тогда и только тогда, когда две различные его вершины можно соединить маршрутом.

Опр. Вершина графа называется точкой сочленения графа, если её удаление из графа увеличит число компонент связности графа (если она существует, то граф называется разделимым, иначе - неразделимым).

Теорема. Вершина x_k является точкой сочленения связного графа $G(X, U)$, если и только если, в графе существуют две такие различные вершины x_i и x_j, что любой путь или любая цепь между вершинами x_i и x_k проходит через x_k.

Опр. Граф называется i-связным, если для нарушения его связности необходимо удалить не менее i вершин.

---

39. Теорема (Эйлера) об эйлеровом цикле в связном неографе.

Опр. Эйлеровым циклом в неографе называется цикл, включающий в себя все рёбра графа, и проходящий по каждому ребру ровно один раз. Граф, содержащий Эйлеровый цикл, называется Эйлеровым.

Теорема Эйлера. Граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда все его вершины имеют чётную степень (для неографов).
Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$).
Пусть связный неограф G эйлеров. Следовательно, цикл в G проходит через каждую вершину. Для каждой вершины верно: цикл входит в вершину по одному ребру, а выходит по другому. Таким образом, каждая вершина инцидентна чётному числу рёбер. Так как эйлеров цикл, согласно определению, содержит все рёбра графа, то степени всех вершин чётны.
Достаточность ($\Leftarrow$).
Пусть степени всех вершин связного неографа G чётны. Начнём построение цепи C_1 из вершины x_1. Попав в очередную вершину x_i по некоторому ребру, всегда возможно выйти из неё по другому ребру, так как степень каждому вершины чётная. Тогда окончание цепи C_1придётся на вершину x_1, то есть C_1 будет циклом. Если при получении цикла C_1 были пройдены все ребра графа G, то G - эйлеров граф.

Если были пройдены не все рёбра графа, то будем считать, что пройденные рёбра помечены. Тогда для любой вершины, имеющей непомеченные рёбра среди инцидентных ей рёбер, верно: число непомеченных рёбер чётное. Найдём первую такую вершину x_i и начнём от неё построение цепи C_2 по непомеченным рёбрам. В силу чётности степеней всех вершин и чётности числа непомеченных рёбер имеем: C_2 заканчивается в вершине x_i и будет циклом. Так как граф связный, то циклы C_1, C_2 имеют точку пересечения x_i. Если после построения цикла C_2 в графе ещё остались непомеченные рёбра, аналогично описанному
выше строится цикл C_3 и т.д., пока непомеченных рёбер не останется. Так как каждый из построенных циклов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ является эйлеровым подграфом графа G, то в силу связности графа G получаем: граф G - эйлеров $\triangle$.

---

40. Эйлеров обход в графе. Алгоритм Флёри построения эйлерова цикла в связном неографе.

Опр. Эйлеровым циклом (обходом) в неографе называется цикл, включающий в себя все рёбра графа, и проходящий по каждому ребру ровно один раз. Граф, содержащий эйлеровый цикл, называется Эйлеровым.

Для эйлеровых графов существует алгоритм Флёри для построения одного из возможных эйлеровых циклов. Его шаги:

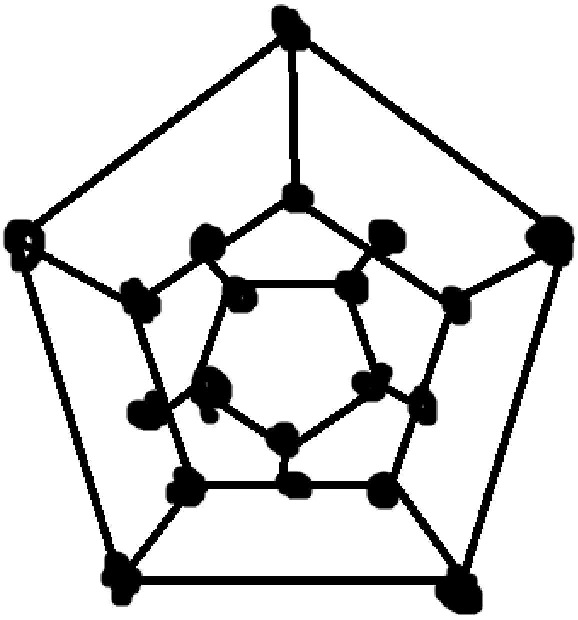
1. Выбираем вершину x_i, рассматриваем произвольное ребро и помечаем его как первое, переходим в вершину x_{i+1}.
2. Циклически повторяем пункт 1 для x_{i+1}, в качестве номеров используем последовательные натуральные числа.
3. Находясь в вершине x_l не следует:
   - Выбирать инцидентное ребро, второй концевой вершиной которого является предыдущая вершина, если есть другие варианты.
   - Выбирать ребро-перешеек, то есть такое ребро, удаление которого нарушит связность графа.

---

41. Гамильтоновы графы. Теорема Оре о гамильтоновом цикле в связном неографе.

Опр. Гамильтоновым циклом в неографе называется цикл, содержащий вершины графа и проходящий через каждую вершину ровно 1 раз.

Пример:



Критериев Гамильтоновости столь же простых как критерий эйлеровости не существует, но существует ряд теорем о достаточных условиях Гамильтоновости. О необходимости нет.

Теорема Оре. Дан неограф $G(X, U)$ порядка $n \geq 2$. Если для любой пары несмежных вершин x_i, x_j выполняется неравенство $p(x_i) + p(x_j) \geq n$, то G - Гамильтонов граф.

---

42. Эйлеровость и гамильтоновость в орграфах.

Эйлеровость

Дан орграф $G(X, U)$

1. Если G - эйлеров, то $\forall x \in X \; p^+(x_i) = p^-(x_i)$
2. Если G - эйлеров, то он является объединением контуров, не пересекающихся по рёбрам.

Теорема. Связный орграф $G(X, U)$ содержит открытый эйлеров путь тогда и только тогда, когда в нём найдётся 2 различных вершины x, y $(x \neq y)$ такие, что $p^-(x) = p^+(x) + 1$ и $p^-(y) = p^+(y) - 1$, а для всякой иной вершины $x_i \in X \setminus x, y$ верно $p^-(x_i) = p^+(x_i)$

Гамильтоновость

Можно только проверить с помощью достаточного условия

Теорема. (одно из *достаточных* условий)
Дан сильно связный орграф $G(X, U)$ без петель и кратных рёбер порядка $n \geq 2$. Если для любой пары

различных несмежных вершин x_i, x_j выполняется неравенство $p(x_i) + p(x_j) \geq 2n - 1$, то орграф G содержит Гамильтонов контур.

- Если теорема выполняется, то гарантированно существует гамильтонов обход, а если не выполняется, то он может как быть, так и не быть.

---

43. Паросочетания. Двудольные графы. Задача о назначениях.

Опр. Паросочетанием в неографе называется множество попарно **несмежных** ребер.
Например, для графа из последовательно соединённых 6 вершин: $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6$ возможны паросочетания:

- $\{(x_1, x_2), (x_3, x_4), (x_5, x_6)\}$
- $\{(x_2, x_3), (x_4, x_5)\}$

Опр. Максимальным паросочетание называется паросочетание, в которое больше нельзя добавить ребро.
Опр. Паросочетание наибольшей мощности называется паросочетание из наибольшего возможного количества рёбер.
Опр. Совершенным паросочетанием называется паросочетание, охватывающее все вершины.

Опр. Граф называется **двудольным**, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся множества X_1 и X_2, таких, что для любого ребра верно, что одна из его вершин принадлежит X_1, а вторая X_2, или наоборот.

Задача о назначениях. Задача нахождения требуемого набора паросочетаний во взвешенном двудольном графе в зависимости от условий задачи.
Пример. Распределение задач между работниками может производиться как поиск паросочетаний в двудольном графе.

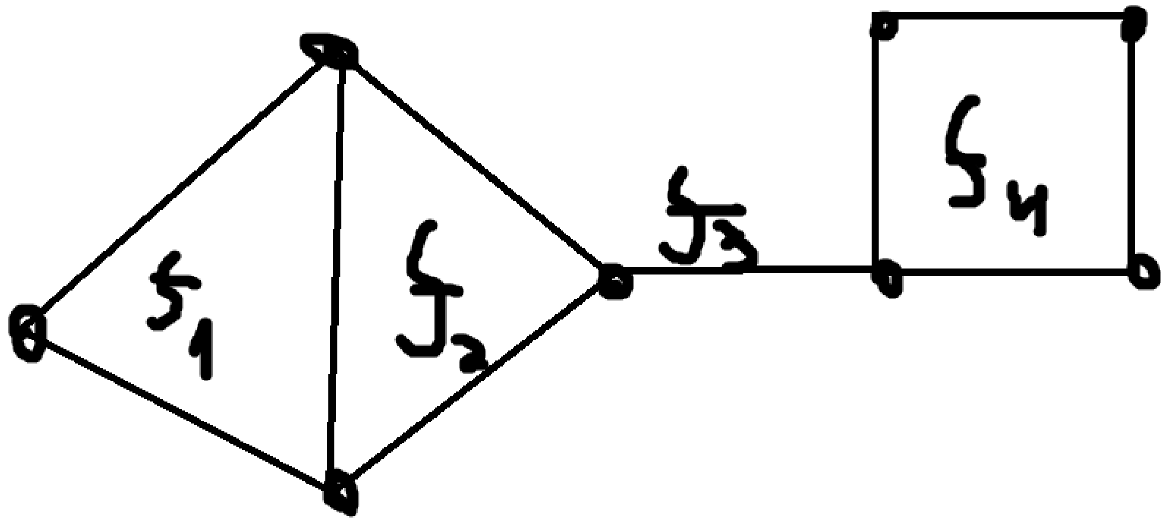
---

44. Планарные графы. Понятие грани. Теорема Эйлера о плоском графе и следствия из нее. Теорема «о пяти красках».

Опр. Укладкой графа на плоскость называют процесс получения такого изображения графа, что все его вершины становятся точками одной плоскости, а ребра – линиями на той же плоскости без самопересечений, причем никакие два ребра не имеют общих точек, кроме вершин, инцидентных им обоим.

Опр. Граф называют **планарным**, если можно выполнить его укладку на плоскость
Опр. Граф называют **плоским**, если он уже уложен на плоскости.

Пример планарного графа. Здесь f_i - грани графа.



Опр. Область плоскости, ограниченная простым циклом плоского графа и не содержащая никакой другой цикл, называется **внутренней гранью** плоского графа. Вся внешняя по отношению к плоскому графу область плоскости называется его **внешней гранью**.
В приведенном примере f_1, f_2, f_4 - внутренние грани, а f_3 - внешняя грань.

Теорема Эйлера о плоском графе. Для связного плоского графа с n вершинами, m ребрами и r гранями справедливо равенство: $n - m + r = 2$.

Следствие 1. Если количество вершин графа $n \geq 3$, то $m \leq 3(n-2)$. (Неравенство Эйлера)
Следствие 2. В каждом планарном графе существует вершина, степень которой не больше 5.
Доказательство (от противного). Путь $G(X, U)$ - планарный граф. Пусть для всякой вершины $x_i \in X : p(x_i) \geq 6$. Тогда $\Sigma_{x_i \in X}\, p(x_i) \geq 6n$. Согласно "лемме о рукопожатиях" (исторически первая теорема теории графов, доказанная Л. Эйлером) $\Sigma_{x_i \in X}\, p(x_i) = 2m$, где $m = |U|$. Следовательно, $2m \geq 6n$ или $m \geq 3n$.
Согласно следствию 1, $m \leq 3(n-2)$. Имеем, что $3n \leq m \leq 3n - 6$, что невозможно. Получили противоречие, значит наше предположение неверно, что доказывает следствие 2. $\triangle$

Пример применения теоремы: задача о домиках и колодцах. Есть три дома и три колодца. Можно ли так проложить дорожки между домами и колодцами, чтобы от каждого дома к каждому колодцу вела дорожка, и никакие две дорожки не пересекались бы.
Из условия видно, что есть граф, где 6 вершин и 9 ребер. По теореме Эйлера, так как граф очевидно не имеет циклов длины 3, имеем, что количество ребер должно быть не больше 8. Получили противоречие. Значит такое соединение домов и колодцев невозможно.
(Граф $K_{3,3}$)

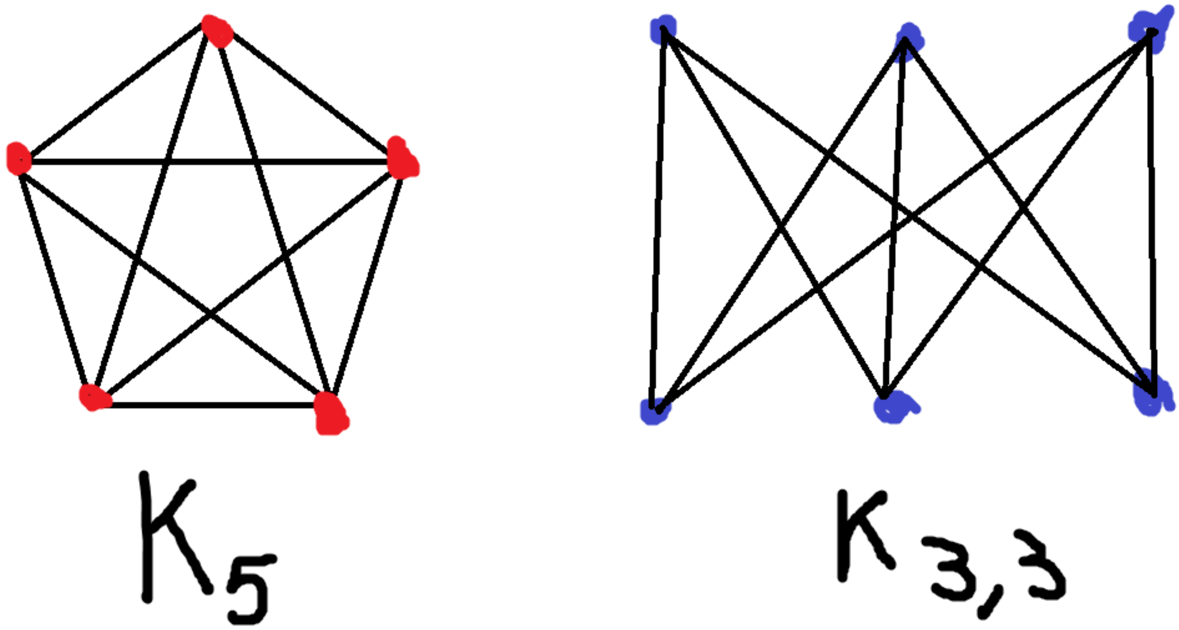
Теорема о пяти красках. Всякий планарный граф можно раскрасить 5-ю разными цветами.

---

45. Гомеоморфизм графов. Теорема Понтрягина–Куратовского о планарном графе. Искаженность и толщина графа.

Опр. Два графа гомеоморфны, если они изоморфны (то есть отличаются только изображениями) или могут быть приведены к изоморфизму путем конечного числа стягиваний и разбиений их ребер.

Теорема Понтрягина-Куратовского. Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному графу из пяти вершин (K_5) или графу "домики колодцы" ($K_{3,3}$).



Опр. Искаженностью графа называется **наименьшее число ребер, удаление которых из приводит к планарному графу**
Опр. Наименьшее число планарных подграфов графа G, объединение которых дает исходный граф G, называют **толщиной графа** и обозначают $t(G)$. Очевидно, толщина планарного графа равна единице: $t(G) = 1$, G – планарный граф.

---

46. Деревья. Основные свойства деревьев. Ориентированные деревья. Бинарные деревья. Дерево решений.

Опр. Неориентированное дерево - связный неограф без циклов.
Опр. Произвольный неограф без циклов называется **лесом.**

Свойства деревьев:
Пусть $G(X, U)$ - неориентированное дерево. $|X| = n, |U| = m$ Тогда:

- $m = n - 1$
- Если $x_i, x_j \in X$, то их соединяет единственная простая цепь. Существование цепи следует из связности дерева, а единственность - из отсутствия циклов.
- Если $x_i, x_j \in X$ несмежные, то введение в дерева ребра (x_i, x_j) даёт граф, содержащий ровно 1 цикл.
- Всякое неориентированное дерево содержит, по крайней мере, две концевые вершины.
- **Теорема Кайли.** Число различных деревьев, которые можно построить на n различных вершинах, равно n^{n-2}.

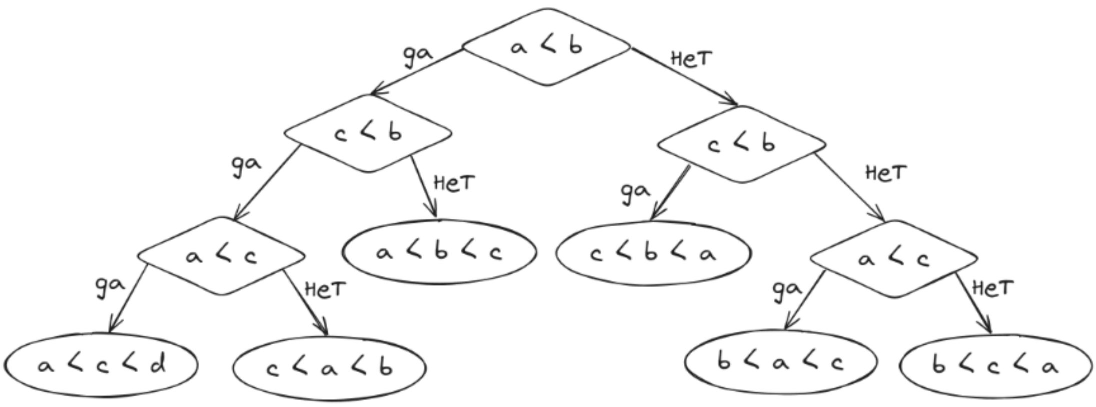
Опр. Орграф $G(X, U)$ называется ордеревом, если выполняются следующие условия:

1. Существует ровно одна вершина, не имеющая предшествующих вершин ($p^+(x_1) = 0$).
2. Полустепень захода всех остальных вершин равна 1 ($\forall x_i \neq x_1 : p^+(x_i) = 1$).

Опр. Висячие вершины дерева называются **листьями**.
Опр. Путь из корня в лист называется **ветвью**.
Опр. Длина наибольшей ветви называется **высотой**.
Опр. Расстояние (число ребер) от корня до некоторой вершины называется **уровнем этой вершины**, а все вершины одного уровня называются **ярусом**.

Опр. Если полустепень исхода каждой вершины ордерева, отличной от листа, равна 2, и все листья дерева располагаются на одном ярусе, то такое ордерево называется (полным) бинарным.

Опр. Все сравнения, которые проводятся при сортировке, приводят к формированию ордерева, которое называется **деревом решений**.
Пример. Для $\{a, b, c\}$.



Дерево решений имеет $n!$ вершин, тогда сортировка даёт пути от корня к каждому листу. Число операций пропорционально высоте дерева - $\log_2(n!)$
Приближение для $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$
Тогда получим минимально возможную сложность для алгоритма классической сортировки $O(n \log n)$

---

47. Остовы. Циклический и коциклический ранги. Задача Штейнера.

Опр. Граф $G'(X', U')$ называется остовным подграфом $G(X, U)$, если $X' = X, U' \subseteq U$.
Если остовный подграф является деревом, то его называют остовным деревом или просто **остовом**.

Теорема. Число ребер произвольного графа G, которые надо удалить для получения остова, не зависит от порядка их удаления и равно $\nu(G) = m - n + k$, где $m = |U|, n = |X|, k$ - число компонент связности.

Опр. Циклическим рангом (числом) графа $\nu(G) = m - n + k$ называется число ребер, которые нужно удалить из графа для получения остова.
Опр. Коциклическим рангом (числом) графа $\nu^*(G) = n - k$ называется число ребер самого остова.
Прим. $\nu(G) + \nu^*(G) = m$.

Задача Штейнера. На плоскости задано n точек, нужно соединить эти точки отрезками прямых так, что сумма длин этих отрезков была минимальной. Разрешается добавлять точки и длина определяется весом ребра.

Формулировка задачи Штейнера в теории графов:
Дан неограф $G_0(X_0, \varnothing)$. Требуется найти неограф $G(X, U)$, такой, что:

1. Каждому ребру присвоено некоторое неотрицательное число (вес ребра.)
2. Искомый граф G должен быть неодеревом.
3. $X_0 \subseteq X$
4. Сумма весов ребер полученного дерева G должна быть наименьшей.

Пояснение. G - неориентированное дерево, потому что каждую пару вершин должна соединять только одна цепь, иначе сумма весов будет не минимальной, так как, если существуют 2 цепи, возникают альтернативные пути и неоднозначность решения.
Решения задачи Штейнера в общем случае не существует.
Решения при некоторых ограничениях: алгоритм Прима и алгоритм Краскала.

---

48. Задача об остове экстремального веса. Алгоритм Прима.

Задача об остове экстремального веса. Это задача Штейнера с дополнением, что множество вершин в ходе реализации алгоритма остаётся постоянной и совпадает со множеством вершин исходного графа.

Алгоритм Прима. Алгоритм решения задачи об остове экстремального веса. В результате даёт остов максимального/минимального веса.
Дан граф $G(X, U, \Omega)$, где Ω - множество весов, $|U| = |\Omega|$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.
В основе алгоритма лежит расширение исходного поддерева до остова. Алгоритм итерационный, на каждой итерации число вершин и рёбер увеличивается не менее чем на 1.
Множество вершин разбивается на два подмножества: $X = X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2 = \varnothing$.
Введём понятие пошагового расстояния между X_1 и X_2:
$d(X_1, X_2) = min\{\omega(x_i, x_j) : x_i \in X_1, x_j \in X_2\}$.

Шаги алгоритма:

1. Присвоение начального значения. Полагаем $X_1 = \{x_1\}$ и $X_2 = X \setminus X_1$. Множество ребер исходного остова: $U` = \varnothing$.
2. Обновление данных. Находим ребро $(x_i, x_j) : x_i \in X_1, x_j \in X_2,\ \omega(x_i, x_j) = d(X_1, X_2)$. Полагаем, что $X_1 = X_1 \cup \{x_j\}$; $U` = U` \cup \{(x_i, x_j)\}$; $X_2 = X \setminus X_1$;
3. Проверка на завершение. Если $X_1 = X$, то полученный остов имеет минимальный вес. Иначе: переход в шаг 2.
   Примечание. Если требуется найти остов максимального веса, то в формуле $d(X_1, X_2)$ меняем min на max.

---

49. Кратчайшие пути в графе: постановка задачи. Отыскание кратчайшего пути в невзвешенном графе.

Задача нахождения кратчайшего пути - задача поиска самого короткого пути между двумя вершинами графа (s и t), в которой минимизируется сумма весов рёбер, составляющих путь.

При отыскании кратчайшего пути в невзвешенном графе используется алгоритм Бержа.
Его шаги.

1. Вершине S присваиваем метку "0".
2. Рассматриваем вершину x_i,имеющую метку, и для всех вершин $\in \Gamma_{x_i}$ ставим метку "$i + 1$" и повторяем для каждой вершины.

3. Останавливаемся, когда помечен весь граф.
   В результате выполнения алгоритма, метка вершины равна длине кратчайшего пути из s в эту вершину. Кратчайшим путем из s в заданную вершину является путь, на котором каждая следующая вершина имеет метку на 1 больше, чем предыдущая.

---

50. Алгоритм Дейкстры отыскания кратчайшего пути во взвешенном графе.

Алгоритм Дейкстры используется для поиска кратчайшего пути во взвешенном графе без ребер с отрицательными весами.
Его шаги.

1. Присваиваем вершинам начальные метки. Начальной вершине s присваиваем метку $M(s) = 0$, остальным - ∞. Все вершины графа помечаются как не посещённые.
2. Выбираем вершину с минимальной меткой x_i и рассматриваем все вершины $x_j \in \Gamma_{x_i}$. Для каждой такой вершины проверяем условие: если $M(x_i) + \omega(x_i, x_j) < M(x_j)$, то $M(x_j) = M(x_i) + \omega(x_i, x_j)$. После рассмотрения всех вершин x_j отмечаем вершину x_i помеченной, и выбираем из ещё не посещенных такую, которое имеет минимальное значение метки.
3. Повторяем шаг 2, пока все вершины не будут помечены. Метка над каждой вершиной $M(x_j)$ и есть длина кратчайшего пути из s в вершину x_j.
4. Для поиска кратчайшего пути начинаем из конечной вершины x_t. Проверяем все вершины $x_j \in \Gamma^{-1}_{x_t}$ и находим те, удовлетворяющие условию: $M(x_i) + \omega(x_i, x_t) = M(x_t)$. Затем $x_t = x_i$ и повторяем этот шаг, пока x_t не будет равно x_s. Получили кратчайший путь.
   P.S. https://habr.com/ru/articles/111361/

---

51. Алгоритм Беллмана–Форда отыскания кратчайшего пути во взвешенном графе.

Алгоритм Беллмана-Форда используется для поиска кратчайшего пути во взвешенном графе с ребрами с отрицательными весами.
Его шаги.
Дана матрица смежности в орграфе.

1. Присваиваем вершинам начальные метки. Заполняем строку и столбец метками. $M(s) = 0$,и для $x_j \in X \setminus \{s\} : M(x_j) = \infty$
2. Просматриваем любую, ещё не просмотренную строку матрицы, для каждой проверяем условие: если $M(x_i) + \omega(x_i, x_j) < M(x_j)$, то $M(x_j) = M(x_i) + \omega(x_i, x_j)$ (Тут $M(x_i)$ соответствует строке меток, а $M(x_j)$ - столбцу меток). Строку помечаем галочкой.
3. Копируем строку меток в столбец меток. Снимаем галочку со строк, метки которых изменились.
4. Если все строки просмотрены, то завершаем алгоритм. $M(x_j)$ и есть длина кратчайшего пути из s в вершину x_j.
5. Для нахождения кратчайшего пути начинаем с конечной вершины x_t. Просматриваем столбец x_t и находим вершину x_i, для которой выполняется условие: $M(x_t) = M(x_i) + \omega(x_i, x_t)$. Затем $x_t = x_i$ и повторяем шаг 5 пока x_t не станет равным x_s. Получили кратчайший путь.

---

52. Поток в транспортной сети: постановка задачи. Полный и максимальный поток в сети.

Задача о потоке в транспортной сети заключается в нахождении максимального потока в сети из истока в сток.

Опр. Сетью называется ориентированный, взвешенный граф без петель, с одним источником и одним стоком.

Опр. Полный поток - если не существует путей из источника в сток, состоящего только из ненасыщенных путей, то текущее значение потока в сети называется полным потоком.

Опр. Максимальный поток - поток, величина которого является максимальной для данной сети.

Теорема. Величина потока в сети является максимальной тогда и только тогда, когда в сети не существует увеличивающего маршрута.

---

53. Поток в транспортной сети: увеличивающий маршрут и алгоритм его построения.

Алгоритм Форда–Фалкерсона отыскания максимального потока в сети.
(Тоже, что и в домашке)
Опр. Увеличивающий маршрут - маршрут от источника к стоку, включающий прямые и обратные ребра, причем все прямые ребра ненасыщенные, а поток на всех обратных ребрах отличен от нуля.

Алгоритм построения увеличивающего маршрута (алгоритм разметки вершин).

1. Источник помечаем знаком “+”.
2. Для каждой вершины графа x_i помечаем знаком “+i” все непомеченные вершины, в которые из x_i ведут ненасыщенные ребра.
3. Для каждой вершины графа x_i помечаем знаком “-i” все непомеченные вершины, из которых в x_i ведут ребра с ненулевым потоком.
   Когда непомеченных вершин не осталось, то проверяем сток:
   Если он помечен, то увеличивающий маршрут существует.
   Если он не помечен, то увеличивающего маршрута в сети нет.

Для поиска максимального потока используются следующие теоремы:

- **Теорема 1** – Если $(s, x_n, \ldots, x_k, t)$ – путь от источника к стоку, состоящий только из ненасыщенных рёбер, то значение потока на всех его рёбрах можно увеличить на $\delta^* = min_{\text{по всем дугам пути}}\{\delta(x_i, x_j)\} = min_{\text{по всем дугам пути}}\{c(x_i, x_j)–\varphi(x_i, x_j)\}$. При этом величина потока в сети возрастет на δ^*.
- **Теорема 2** – Если $(s, x_n, \ldots, x_k, t)$ – увеличивающий маршрут, то значение потока на его прямых рёбрах можно увеличить, а на обратных ребрах, уменьшить на величину $\epsilon^* = min\{\delta^*, \varphi^*\}$, где: $\delta^* = min_{\text{по прямым ребрам}}\{\delta(x_i, x_j)\} = min_{\text{по прямым ребрам}}\{c(x_i, x_j)–\varphi(x_i, x_j)\}$, а $\varphi^* = min_{\text{по обратным ребрам}}\{\varphi(x_i, x_j)\}$. При этом величина потока в сети возрастает на ε*.
- **Теорема 3** - Величина потока в сети является максимальной тогда и только тогда, когда в сети не существует увеличивающего маршрута.
- **Теорема 4 (Форда-Фалкерсона)** – Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока в сети, доставляемого от источника к стоку, равна пропускной способности минимального разреза. $\varphi_{max} = c_{min}$.

Алгоритм Форда-Фалкерсона отыскания максимального потока в сети.

1. Присвоение начального потока сети.
   Находим источник и сток. Начальный поток равен 0.
2. Достижение полного потока. (Теорема 1)
3. Нахождение максимального потока сети. (Теорема 2 + Теорема 3).
4. Нахождение минимального разреза. (Теорема 4).

После выполнения данного алгоритма полученный поток в сети является максимальным.

---

54. Понятие разреза транспортной сети. Минимальный разрез. Теорема Форда–Фалкерсона о максимальном потоке в сети.

Опр. Разрез транспортной сети - множество ребер, удаление которых из графа делает его несвязным, причем нельзя добраться из источника в сток.

Опр. Минимальный разрез сети - ориентированный разрез сети, имеющий минимальную пропускную способность из всех возможных, причем он состоит только из насыщенных ребер.

Теорема Форда-Фалкерсона. Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока в сети, доставляемого от источника к стоку, равна пропускной способности минимального разреза.
