РК 2

Вопросы, оцениваемые в 1 балл

1) Сформулировать определение общего решения ОДУ n-го порядка.

- **Опр.** Общим решением ДУ $y' = f(x, y)$ называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:
    1. зависит от одной независимой переменной x и одной произвольной константы C
    2. при любом значение константы C является решением
    3. для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ $\exists C_0 : y = \varphi(x, C_0)$ будет удовлетворять начальному условию

2) Сформулировать определение задачи Коши для ОДУ n-го порядка.

- **Опр.** Задачей Коши называют задачу нахождения решения $y = y(x)$ ДУ $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$ $(y|_{x=x_0} = y_0)$

3) Сформулировать определение линейного ОДУ n-го порядка.

- **Опр.** Линейным ДУ n-ого порядка называется ДУ, линейное относительно неизвестной функции и всех её производных, т.е. ДУ вида:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_n(x)y = g(x),$$

  где $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), g(x)$ - заданные на некотором интервале I функции.

4) Сформулировать определение линейной зависимости и линейной независимости системы функций на промежутке.

- **Опр.** Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются линейно-зависимыми на $[a, b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что на $[a, b]$ выполняется равенство $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, где хотя бы одна $\alpha_i \neq 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$. Если же это тождество выполняется только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются линейно-независимыми на $[a, b]$.

5) Сформулировать определение определителя Вронского системы функций.

- **Опр.** Определителем Вронского функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется определитель вида:

$$W = W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

6) Сформулировать определение фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ

- **Опр.** Совокупность любых n линейно независимых частных решений однородного уравнения n-ого порядка называются его фундаментальной системой решений (ФСР).

7) Сформулировать определение характеристического уравнения линейного ОДУ с постоянными коэффициентами.

Вопросы, оцениваемые в 3 балла

1) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно зависимых функций.

Теорема. Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, то
$\forall x \in [a, b]\ W[y_1, y_2, \dots, y_n] = 0$
Доказательство.
По усл. $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, $\implies$, $\exists \alpha_i \neq 0$ такие, что $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$. Дифференцируя $n-1$ раз получим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \dots + \alpha_n y_n' = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Получили СЛАУ с n неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
Так как хотя бы одна $\alpha_i \neq 0$, то эта система имеет ненулевое решение. Определителем такой системы является определитель Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$. Полученная система имеет ненулевое решение лишь в том случаем, когда её определитель равен 0. То есть:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad \forall x \in [a, b] \blacktriangle$$

2) Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного ОДУ.

Теорема. Если линейно независимые на $[a, b]$ функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ являются решениями ЛОДУ с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, то определитель Вронского этих функций отличен от нуля $\forall x \in [a, b]$
Доказательство. (методом от противного)
Допустим, что для какой-то точки $x_0 \in [a, b]$ $W(x_0) = 0$
Составим СЛАУ относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \dots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \dots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

В силу допущения определитель этой системы $W(x_0) = 0, x_0 \in [a, b]$, $\implies$, эта система имеет ненулевое решение, то есть хотя бы одно из $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ отлично от нуля
Рассмотрим $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x)$, то есть линейную комбинацию частных решений. Следовательно, эта функция сама является решением того же ЛОДУ, удовлетворяющим начальному условию $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = 0$
Но этим же начальным условиям удовлетворяет и тривиальное решение $y = 0$
По теореме о единственности решения: $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ на $[a, b]$ и $\exists \alpha_i \neq 0$
По определению линейной зависимости функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - линейно зависимые функции.
Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение неверно и $\nexists x_0 \in [a, b]$ такой, что

$W(x_0) \neq 0$.
То есть $W(x) \neq 0 \; \forall x \in [a, b]$▲

3) Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного ОДУ n-го порядка.

4) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного ОДУ n-го порядка.

Теорема. Общее решение на $[a, b]$ ЛОДУ n-ого порядка $L[y] = 0$ с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ равно линейной комбинации ФСР с произвольными постоянными коэффициентами, т.е. ;$y_{o.o.} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$, где $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ - ФСР ЛОДУ $L[y] = 0$, а $C_1, C_2, \ldots, C_n - const$
Доказательство.
1) Докажем, что $C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ - решение ЛОДУ $L[y] = 0$
Подставим его в ДУ:
$L[y] = L[C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2] + \cdots + C_nL[y_n] = 0$
Следовательно, $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ является решением ЛОДУ $L[y] = 0$
2) Докажем, что $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ - общее решение ЛОДУ $L[y] = 0$
По условию все коэффициенты есть непрерывные функции на $[a, b]$, $\implies$, выполнены все условия теоремы Коши $\exists$ и ! решения ЛОДУ $L[y] = 0$.
Решение $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ будет общим решением, если найдутся единственным образом постоянные C_i при произвольно заданных начальных условиях $y(x_0) = y_0$,
$y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $x_0 \in [a, b]$
Пусть решение и его производные удовлетворяют этим условиям:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \cdots + C_ny_n(x_0) = y_0 \\ C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) + \cdots + C_ny'_n(x_0) = y'_0 \\ \cdots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Это неоднородная СЛАУ относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Определитель этой системы является определителем Вронского $W(x_0)$ для линейно независимой системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (решение ЛОДУ $L[y] = 0$) и тогда $W(x) \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение $C_1, C_2, \ldots, C_n$ для произвольной точки $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}) \implies$
$\implies y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ - общее решение ЛОДУ $L[y] = 0$▲

5) Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного ОДУ n-го порядка.

6) Сформулировать и доказать теорему о наложении (суперпозиции) частных решений линейного неоднородного ОДУ.

7) Сформулировать и доказать свойства частных решений линейного однородного ОДУ

Теорема 1. Если функция $y_0(x)$ является решение ЛОДУ $L[y] = 0$, то функция $Cy_0(x)$, где $C = const$, тоже является решением ЛОДУ $L[y] = 0$
Доказательство.
$y_0(x)$ - решение ЛОДУ $L[y] = 0$ по усл., $\implies$, $L[y_0] = 0$
Найдём (по свойству однородности): $L[Cy_0] = CL[y_0] = C \cdot 0 = 0$
$L[Cy_0] = 0 \implies Cy_0(x)$ является решение ЛОДУ $L[y] = 0$▲
Теорема 2. Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями ЛОДУ $L[y] = 0$, то функция $y_1(x) + y_2(x)$

тоже является решение ЛОДУ $L[y]=0$

Доказательство.

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения ЛОДУ $L[y]=0$ по усл., $\implies$, $L[y_1]=0, L[y_2]=0$

Найдём (по свойству аддитивности): $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L_1[y_2]=0+0=0$

$L[y_1+y_2]=0 \implies (y_1(x)+y_2(x))$ является решение ЛОДУ $L[y]=0$▲

Следствие. Линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_my_m(x)$ решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ ЛОДУ $L[y]=0$ тоже является решением этого ЛОДУ.

Доказательство.

$L[y_1]=0, L[y_2]=0, \ldots, L[y_m]=0$ по условию

Найдём

$L[C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_my_m]=L[C_1y_1]+L[C_2y_2]+\cdots+L[C_my_m]=C_1L[y_1]+C_2L[y_2]+\cdots+C_mL[y_m]=0$

$L[C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_my_m]=0 \implies C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_my_m(x)$ является решением ЛОДУ $L[y]=0$▲

Утверждение. ЛОДУ $L[y]=0$ всегда имеет тривиальное решение $y\equiv 0$

Теорема. Совокупность решений ЛОДУ $L[y]=0$ образует линейное пространство.

8) Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного ОДУ 2-го порядка

9) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае простых действительных корней характеристического уравнения.

10) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

11) Вывести формулу для общего решения линейного однородного ОДУ 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

12) Описать метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для линейного неоднородного ОДУ 2-го порядка и вывести систему соотношений для варьируемых переменных.