1. Основные понятия

$E = \{0, 1\}$ - булевы переменные, область значений и определения любой булевой функции
Алгебра, образованная множеством E и всеми операциями на нём, называется **алгеброй логики**.
Количество булевых функций $= 2^n$
Способы задания булевой функции:

- аналитический: $f = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2)$
- таблица истинности:

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Переменные могут быть **существенными** или **несущественными**.
Переменная x_i булевой функции $f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ называется **существенной**, если $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$.
Это означает, что существует набор $(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$ размера $n - 1$ такой, что $f(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$.
Тогда говорят, что x_i существенная переменная и $f(\dots)$ **существенно зависит** от x_i.
Иначе x_i - несущественная переменная.
Иногда удобно добавить несущественные переменные.
Например:
$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3)$
x_2 - несущественная переменная.

Элементарные булевы функции

I. Булевы функции одной переменной:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

$f_1(x) = 0$ - const 0
$f_2(x) = 1$ - const 1
$f_3(x) = x$ - тождественная функция
$f_4(x) = \overline{x}$ - отрицание или инверсия

II. 16 функций 2 переменных:

- $f_9(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ - сложение по модулю 2
- $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ - следование
- $f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \equiv x_2$ - эквивалентность

Пусть $F = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Функция f, полученная подстановкой функций F друг в друга и переименованием переменных, называется **суперпозицией** функций $f_1, f_2, \dots, f_k$.
Выражение, описывающее суперпозицию, называется **формулой** над F.
Множество F называется **базисом**.
Функция f получена путём суперпозиции функций базиса F.

$\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, где φ_i - формула над F или переменная, называется **главной или внешней формулой**, а все φ_i называются **подформулами**.
Вложенность подформул называется **глубиной**.
Для каждой булевой функции можно задать бесконечное число формул.
Базис для $f = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2 : \ F = \{\wedge, \vee, \neg\}$

Опр. Формулы, базис которых составляют функции $\{\wedge, \vee, \neg\}$, называются **булевыми формулами**.
Сами операции называются **булевыми операциями**.

Алгебра $< E, \wedge, \vee, \neg >$ называется булевой **алгеброй**.

Примеры выражения некоторых булевых функций формулами булевой алгебры:

- $f = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2}$
- $f = x_1 | x_2 = \overline{x_1 x_2}$
- $f = x_1 \oplus x_2 = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2$
- $f = x_1 \equiv x_2 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2$

Свойства операций булевой алгебры

1. Ассоциативность:
    - $(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$
    - $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$
2. Коммутативность:
    - $x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$
    - $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$
3. Дистрибутивность:
    - $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$
    - $x_1 \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$
4. Идемпотентность:
    - $x_1 \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_1 = x_1$
    - $x_1 \vee x_1 \vee \dots \vee x_1 = x_1$
5. Закон де Моргана:
    - $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2$
    - $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$
6. Двойное отрицание (кратное отрицание):
    - $\overline{\overline{x}} = x$
    - $\overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$
7. Свойства констант:
    - $x \vee 0 = 0$
    - $x \vee 1 = 1$
    - $x \wedge 0 = 0$
    - $x \wedge 1 = x$
8. Противоречие:

- $x \wedge \overline{x} = 0$

9. Тавтология:
    - $x \vee \overline{x} = 1$
10. Поглощение конъюнкции:
    - $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) = x_1$

Правило замены: если в некоторой формуле φ подформулу φ_i заменить на логически эквивалентную φ_k , то полученная формула φ' будет эквивалентна исходной.
$\varphi(\ldots\varphi_i\ldots),\ \varphi_k = \varphi_i$
$\varphi(\ldots\varphi_k\ldots) = \varphi(\ldots\varphi_i\ldots)$
$\varphi(\varphi_k|\varphi_i)$ - φ_k вместо **некоторых** вхождений φ_i
$\varphi(\varphi_k||\varphi_i)$ - φ_k вместо **всех** вхождений φ_i

Таким образом, используя логическую эквивалентность подформул(бесконечное кол-во) при помощи подстановки одних подформул вместо других, можно преобразовывать исходную формулу, не теряя логической эквивалентности полученной формулы исходной.
Пример:

- $x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 = x_1$ - склеивание
- обобщённое склеивание:
  $x_1x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2 = x_1x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2(x_3 \vee \overline{x}_3) = x_1x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 = x_1x_3 \vee x_2\overline{x}_3$
- $x_1 \vee \overline{x}_1x_2 = (x_1 \vee \overline{x}_1) \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1 \vee x_2$

$x_1 \vee f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee f(x_2, \ldots, x_n)$ - ???????