Экзамен

1. Сформулировать определение первообразной. Сформулировать свойства первообразной и неопределённого интеграла.

Опр. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ диф-ма на (a,b) и $F'(x)=f(x)\ \forall x\in(a,b)$, где (a,b) может быть любым.
Свойства первообразной:

1. Если $F(x)$ - первообразная $f(x)$ на (a,b), то $F(x)+C$ тоже первообразная $f(x)$ на (a,b).
2. Если функция $\Phi(x)$ диф-ма на (a,b) и $\Phi'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$, то $\mathit{\Phi}(x)=const$ на (a,b).
3. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - первообразные $f(x)$ на (a,b), то $F_1(x)-F_2(x)=C,\ C=const$.
4. Если функция $f(x)$ непрерывна на (a,b), то она имеет первообразную на этом интервале.

Свойства неопределённого интеграла:

1. $(\int f(x)dx)'=f(x)$
2. $d(\int f(x)dx)=f(x)dx$
3. $\int dF(x)=F(x)+C$
4. $\int(f_1(x)+\ldots+f_n(x))dx=\int f_1(x)dx+\ldots+\int f_n(x)dx+C$
5. $\int Af(x)dx=A\int f(x)dx+C$

2. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие. Интегрирование простейших дробей.

Опр. Рациональной дробью называется дробь вида $R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ - многочлены от x степени m и n соответственно
Опр. Дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя: $m<n$, и неправильной, если $m>n$
Опр. Простейшими дробями называются дроби:

1. $\frac{A}{x-a}$ - I тип
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k\in\mathbb{Z}, k>1$ - II тип
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ - III тип
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $k\in\mathbb{Z}, k>1$ - IV тип

Теорема. (о разложении правильной рациональной дроби в сумму простейших)
Правильная рациональная дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, $m<n$, где
$P_n(x)=a_0(x-x_0)^{k_1}\ldots(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}$, единственным образом может быть представлена в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{1}{a_0}\Bigg(\frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{k_1-1}}+\cdots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^1}+$$

$$+\frac{B_1}{(x-x_s)^{k_s}}+\frac{B_2}{(x-x_s)^{k_s-1}}+\cdots+\frac{B_{k_s}}{(x-x_s)^1}+\cdots+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+xp_1+q_1)^{l_1}}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+xp_2+q_2)^{l_1-1}}+\cdots+\frac{C_{l_1}x+D_{l_1}}{(x^2+xp_{l_1}+q_{l_1})^1}+\cdots+$$

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+xp_m+q_m)^{l_m}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+xp_m+q_m)^{l_m-1}}+\dots+\frac{M_{l_m}x+N_{l_m}}{(x^2+xp_m+q_m)^1}\Bigg)$$

Интегрирование простейших дробей:

- I тип:

$$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$$

- II тип:

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=A\int(x-a)^{-k}\,d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$$

- III тип:

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\dots$$

- IV тип:

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx=\dots$$

3. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о сохранении определенным интегралом знака подынтегральной функции.

Свойства определённого интеграла:

Теорема 1. Определённый интеграл алгебраической суммы интегрируемых на $[a,b]$ функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b f_1(x)\pm f_2(x)\pm\dots\pm f_n(x)\,dx=\int_a^b f_1(x)\,dx\pm\int_a^b f_2(x)\,dx\pm\dots\pm\int_a^b f_n(x)\,dx$$

Теорема 2. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то

$$\int_a^b cf(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx,\ c=const$$

Теорема 3.

$$\int_a^b c\,dx=c\int_a^b\,dx=c(b-a)$$

Теорема 4.

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$$

Теорема 5. Если функция $y=f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $f(x)\geq0$ $(f(x)\leq0)$ $\forall x\in[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx\geq0\ \left(\int_a^b f(x)\,dx\leq0\right)$$

Теорема 6. Для любых чисел $a,b,c,$ расположенных в интервале интегрируемости функции $f(x)$ справедливо равенство (при условии, что все эти 3 интервала существуют):

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

Теорема 7. (об интегрировании неравенства)
Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$ $(f(x) \neq g(x))$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

Теорема 8. (об оценке модуля определённого интеграла)
Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Теорема 9. (об оценке определённого интеграла)
Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Теорема 10. (об инвариантности неравенства)
Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$ и функция $\varphi(x) \geq 0$ и интегрируема на $[a,b]$, то

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leq M\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Теорема 11. (о среднем)
Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на $[a,b]$, то $\exists$ точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Теорема о сохранении интегралом знака подынтегральной функции(теорема 5).

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$ $(f(x) \leq 0)$ $\forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \ \left(\int_a^b f(x)\,dx \leq 0\right)$$

Доказательство.
Пусть $a < b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_k \Delta x \to 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \text{ , где } \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

Пусть $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, тогда $f(\xi_k) \geq 0, \Delta x_{k>0} \Rightarrow f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0$ $\forall k$, тогда:

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_k \Delta x \to 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \blacktriangle$$

4. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке определенного интеграла.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.
Теорема об оценке определённого интеграла (теорема 9).
Если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения интегрируемой на $[a,b]$ функции $f(x)$,

то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Доказательство.
По условию $m \le f(x) \le M$, где $m = min_{[a,b]}f(x), M = max_{[a,b]}f(x)$, и $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, тогда

$$m\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)\blacktriangle$$

5. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.
Теорема об оценке модуля определённого интеграла (теорема 8).
Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Доказательство.
$f(x)$ непрерывна на $[a,b] \Rightarrow -|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$
По теореме 7:

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Тогда по определению модуля:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx\blacktriangle$$

6. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.
Теорема о среднем (теорема 11).
Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функция $\varphi(x)$ интегрируема и знакопостоянна на $[a,b]$, то $\exists$ точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Доказательство.
$f(x)$ непрерывна на $[a,b] \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса она достигает на $[a,b]$ наименьшее и наибольшее значения $m = min_{[a,b]}f(x)$ и $M = max_{[a,b]}f(x)$ и $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$
Пусть $\varphi > 0$:
$m\varphi(x) \le f(x)\varphi(x) \le M\varphi(x)$

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \le M\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

Так как $\varphi(x) > 0$, то $\int_a^b \varphi(x)\,dx \ge 0$, тогда $m \le \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \le M$

По теореме Больцано-Коши $\exists\, c \in (a,b)$ такая, что:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(c)\varphi(x)\,dx}{\int_a^b \varphi(x)\,dx} \Rightarrow \int_a^b f(c)\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx,\ \text{где } c \in (a,b) \blacktriangle$$

7. Сформулировать определение интеграла с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по верхнему пределу.

Опр. Функция $Y(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, определённая на $[a,b]$, называется определённым интегралом с переменным верхним пределом, где $[a,x] \subset [a,b]$

Теорема. (о производной от интеграла с переменным верхним пределом)

Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и непрерывна на нём, то

$$Y'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Доказательство.

$Y(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$Y(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt, (x+\Delta x) \in [a,b]$

$f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, следовательно, по теореме о среднем:

$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x$, где $c \in (x, x+\Delta x)$

По определению производной ($\Delta x \to 0, x < c < x+\Delta x \Rightarrow c \to x$):

$$Y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{c \to x} f(c) = f(x) \blacktriangle$$

8. Сформулировать свойства определенного интеграла. Вывести формулу Ньютона-Лейбница.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.

Теорема. (формула Ньютона-Лейбница)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство.

Пусть $F(x)$ - $\forall$ первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$

$Y(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ - тоже первообразная функции $f(x)$ на $[a,b]$

Тогда по основной теореме о первообразных: $\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C, c = const \qquad (1)$

Положим $x = a$: $\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$

Подставим в (1) и получим: $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$

Положим $x = b$:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \blacktriangle$$

9. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании подстановкой для определенного интеграла.

Теорема. (о замене переменной в определённом интеграле)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а функции $x = \varphi(t), \varphi'(t), f(\varphi(t))$ непрерывны на $[a,b]$ и $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Доказательство.
Формулы замены переменной в неопределённом интеграле:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Если $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, то $F(\varphi(t))$ - первообразная функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$
По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Так как по условию: $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))|_a^b = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Получим:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,\blacktriangle$$

10. Сформулировать и доказать теорему об интегрировании по частям для определенного интеграла.

Теорема. Если $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывные функции, дифференцируемые в (a, b), то

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Доказательство.
$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow udv = d(uv) - vdu$
$u(x)$ и $v(x)$ - непрерывны на $[a, b] \Rightarrow \exists$ определённый интеграл от функций:

$$\int_a^b u\,dv = \int_a^b d(uv) - \int_a^b v\,du \Rightarrow \int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du\,\blacktriangle$$

11. Сформулировать свойства определённого интеграла. Интегрирование периодических функций, интегрирование чётных и нечётных функций на отрезке, симметричном относительно начала координат.

Свойства определённого интеграла см. в пункте 3.
Периодические функции:
Функция $f(x)$ - периодическая с периодом T и непрерывная на $[a, a+T]$

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

Чётные функции:
Функция $f(x)$ - чётная на $[-a, a]$, то есть $\forall x \in [-a, a]\ f(-x) = f(x)$:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Нечётные функции:
Функция $f(x)$ - нечётная на $[-a, a]$, то есть $\forall x \in [-a, a]\ f(-x) = -f(x)$:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$

12. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-го рода. Сформулировать и доказать признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-го рода.

Опр. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x \in [a, +\infty)$. Тогда несобственным интегралом первого рода $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется предел определённого интеграла с переменным верхним пределом $\int_a^b f(x)\,dx$ при $b \to +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.

Теорема. (признак сходимости по неравенству для несобственных интегралов 1-ого рода)
Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, +\infty)$ и выполняется неравенство
$0 < f(x) \le \varphi(x)\ \forall x \in [a, +\infty)$, тогда:

1. если сходится $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже сходится
2. если расходится $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, то $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ тоже расходится

Доказательство.
1) По условию $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, $\implies$, $\exists$ конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b \varphi(x)\,dx = M \implies \int_a^b \varphi(x)\,dx \le M$$

По условию $\forall x \in [a, +\infty)\ 0 < f(x) \le \varphi(x)$, тогда по теореме об интегрировании неравенства
$0 < \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx \le M$
Пусть $b_1 \in (b, +\infty)$. Рассмотрим:

$$\int_a^{b_1} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b_1} f(x)\,dx > \int_a^b f(x)\,dx \implies \int_a^b f(x)\,dx \text{ есть функция, возрастающая с возрастанием } b$$

Тогда по теореме Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx \le M \implies \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ - сходящийся}$$

2) (от противного)
Предположим, что $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходится, тогда по доказательству **1)** $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже сходится, что противоречит условию, $\implies$, $\int_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится ▲

13. Сформулировать определение несобственного интеграла 1-ого рода. Сформулировать и доказать предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-ого рода.

Опр. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x \in [a, +\infty)$. Тогда несобственным интегралом первого рода $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется предел определённого интеграла с переменным верхним пределом $\int_a^b f(x)\,dx$ при $b \to +\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.

Теорема. (предельный признак сравнения для несобственных интегралов 1-ого рода)
Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$, $f(x) \ge 0, g(x) > 0\ \forall x \ge a$ и

существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda(\neq 0)$. Тогда несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно.
Доказательство.
По условию и определению предела:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda \iff \forall\varepsilon>0\ \exists M(\varepsilon)>0:\forall x>M\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda\right|<\varepsilon$$

Рассмотрим неравенство:

$$-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}-\lambda<\varepsilon$$

$$-\varepsilon+\lambda<\frac{f(x)}{g(x)}<\varepsilon+\lambda$$

$$(\lambda-\varepsilon)g(x)<f(x)<(\lambda+\varepsilon)g(x)\ \forall x>M \qquad (*)$$

Проинтегрируем правую часть:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx<(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

1. Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, тогда $(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ тоже сходится, так как $(\lambda+\varepsilon)$ - число, не влияющее на сходимость. По теореме о признаке сходимости по неравенству несобственных интегралов 1-ого рода $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже сходится.
2. Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, тогда по теореме о признаке сходимости по неравенству несобственных интегралов 1-ого рода $(\lambda+\varepsilon)\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ тоже расходится.
   Аналогично, интегрируя левую часть неравенства $(*)$ получим:
3. Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ тоже сходится.
4. Если $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже расходится.

В итоге получим, что интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно. ▲

14.Сформулировать определение несобственного интеграла 1-ого рода. Сформулировать и доказать признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-ого рода.

Опр. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна для $\forall x\in[a,+\infty)$. Тогда несобственным интегралом первого рода $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ называется предел определённого интеграла с переменным верхним пределом $\int_a^b f(x)\,dx$ при $b\to+\infty$:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

Аналогично для бесконечного нижнего предела интегрирования.

Теорема. (признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов 1-ого рода)
Если функция $f(x)$ непрерывна и знакопеременна на $[a,+\infty)$ и $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.
Доказательство.
$f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$ (по условию), $\implies$, $\forall x\in[a,+\infty)$ справедливо неравенство:

$$-|f(x)|\le f(x)\le|f(x)|\implies 0\le f(x)+|f(x)|\le 2|f(x)|$$

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx\ \text{сх-ся(по усл.)}\implies 2\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx\ \text{сх-ся(св-во линейности)} \qquad (1)$$

$$f(x)+|f(x)|\le 2|f(x)|\ \forall x\in[a,+\infty) \qquad (2)$$

Из (1) и (2):

$$\int_a^{+\infty} (f(x)+|f(x)|)\,dx \text{ сх-ся (по 1 признаку сравнения по нер-ву)}$$

Тогда:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} (f(x)+|f(x)|)\,dx - \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

Оба слагаемых сходятся, $\implies$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится▲

15. Сформулировать определение несобственного интеграла 2-ого рода и признаки сходимости таких интегралов.

Опр. Несобственный интеграл второго рода от функции $f(x)$, непрерывной на $[a,b)$ и неограниченной в окрестности точки b, называется сходящимся, если **существует конечный предел** при $\epsilon \to +0$ определённого интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Аналогично для функции, неограниченной в окрестности точки a.

Теорема. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a,b)$ и выполняется неравенство $0 < f(x) \le \varphi(x)\ \forall x \in [a,b)$, тогда:

1. если сходится $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ тоже сходится
2. если расходится $\int_a^b f(x)\,dx$, то $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ тоже расходится

Теорема. Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ интегрируемы на $[a,b)$, $f(x)\ge 0, g(x) > 0\ \forall x \ge a$ и существует конечный предел $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = \lambda(\ne 0)$. Тогда несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна и знакопеременна на $[a,b)$ и $\int_a^b |f(x)|\,dx$ сходится, то $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

16. Фигура, ограниченная кривой $y=f(x)\ge 0$ и прямыми $x=a, x=b$ и $y=0$ $(a<b)$. Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла площади этой фигуры.

Сделать рисунок

Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную кривой $y=f(x)\ge 0$, прямыми $x=a, x=b$ и $y=0$.
Отрезок $[a,b]$ оси Oy - основание криволинейной трапеции.
Разобьём его на n частичных отрезков точками $a=x_0, x_1, \dots, x_n = b$, где $x_1 < x_2 < \dots < x_n$
Через точки деления проведём прямые $||\,Oy$, то есть исходную трапецию разобьём на n трапеций.
Пусть $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], k=\overline{1,n}$
Составим сумму ($\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$):

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \text{ - интегральная сумма Римана}$$

где $S_k = f(\xi_k) * \Delta x_k$ - площадь k-ого прямоугольника

$$S_n = \sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \text{ - площадь ступенчатой фигуры}$$

Будем считать S_n приближённым значением площади криволинейной трапеции. Тогда чем больше n и чем меньше Δx_k, тем более точным будет это приближение. То есть:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

17. Фигура ограничена лучами $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$. Здесь r и φ - полярные координаты точки, $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$. Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла площади этой фигуры.

Сделать рисунок

Пусть дана непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция $\rho = \rho(x)$ и $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le 2\pi$

Разобьём криволинейный сектор лучами на n криволинейных секторов:

$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \dots < \varphi_n = \beta$

$\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$

В каждом частичном секторе возьмём произвольно $\tilde{\varphi}_k, k = \overline{1, n}$, то есть $\tilde{\varphi}_k \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]$

$\rho(\tilde{\varphi}_k)$ - радиус вектор, соответствующий углу $\tilde{\varphi}_k$

Площадь криволинейного сектора $\approx$ площадь кругового сектора

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho^2(\tilde{\varphi}_k)\Delta\varphi_k \text{ - интегральная сумма функции } \rho^2(\varphi)$$

$\rho = \rho(x)$ непрерывна на $[\alpha, \beta] \implies \rho^2(\varphi)$ тоже непрерывна на $[\alpha, \beta] \implies \exists$ конечный предел:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_k \Delta\varphi_k \to 0}} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \rho^2(\varphi)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi$$

Итак:

$$S_n = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi$$

18. Тело образованно вращением вокруг лоси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \ge 0$, прямыми $x = a, x = b$ и $y = 0, a < b$. Вывести формулу для вычисления с помощью определённого интеграла объёма тела вращения.

Сделать рисунок

Дано тело вращения

Пусть $S(x)$ - площадь поперечного сечения плоскостью $\perp Ox$, $a \le x \le b$, и $S(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$

Проведём плоскости $x = x_0 = a, x = x_1, \dots, x = x_n = b$, они разбивают тело на слои

Выберем в каждом интервале точку $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k), k = \overline{1, n}$

Для каждого значения ξ_k построим цилиндрическое тело, образующие которого $\perp Ox$, а направляющая есть контур сечения тела плоскостью $x = \xi_k$

Объём такого цилиндра $V_k = S(\xi_k)\Delta x_k$

Сложим все такие цилиндры:

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$$

Получили приближённое значение объёма тела вращения, при увеличении n и уменьшении Δx_k

приближение становится более точным. То есть:

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ max_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)\,dx, \text{ где } S(x) \text{ - площадь поперечного сечения}$$

Если кривая задана $y = f(x)$, то сечения - окружности, площадь которых $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$
Подставим в формулу объёма:

$$V = \int_a^b \pi y^2\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

19. Кривая задана в декартовых координатах уравнение $y = f(x)$, где x и y - декартовы координаты точки, $a \le x \le b$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

Сделать рисунок
Пусть кривая $y = f(x)$, где $f(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ и имеющая непрерывную первую производную на этом отрезке. Тогда

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Покажем это:
Разобьём дугу AB на n частей точками $M_0, M_1, \dots, M_n$, абсциссы которых
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$
Проведём хорды, соединив соседние точки, и получим ломанную, вписанную в дугу AB, эта ломаная состоит из отрезков $M_0M_1, M_1M_2, \dots, M_{n-1}M_n$, где $M_0 = A, M_n = B$
Обозначим их за $l_1, l_2, \dots, l_n$: $l_i = M_{i-1}M_i$
Периметр этой ломаной $l_n = \sum_{k=1}^{n} l_k$
С уменьшением длин хорд ломаная по своей форме приближается к дуге AB

> **Опр.** Длиной l дуги AB кривой $y = f(x)$ называется предел длины вписанной в неё ломаной, когда число её звеньев неограниченно растёт, а наибольшая из длин звеньев стремится к нулю:
>
> $$l = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max l_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} l_k \qquad (1)$$
>
> При этом предположим, что этот предел существует и не зависит от выбора точек.
> **Опр.** Кривые, для которых предел (1) существует, называются спрямляемыми.

По формуле расстояния между двумя точками на плоскости имеем:

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}, \text{ где}$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,
$\Delta y_k = y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1})$,
$y_k = f(x_k)$,
$y_{k-1} = f(x_{k-1})$,
$k = \overline{1, n}$

$$l_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}$$

По теореме Лагранжа:

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \text{ где } x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

Тогда $l_k = \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$ и длина вписанной ломаной:

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k \text{ - интегральная сумма} \qquad (*)$$

$f'(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $\implies$, $\sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$ тоже непрерывна на $[a,b]$, поэтому существует предел интегральной суммы $(*)$, который равен определённому интегралу:

$$l = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max_k \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_k))^2}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Получили формулы для вычисления длины дуги кривой в декартовых координатах:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

20. Кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi) \geq 0$, где r и φ - полярные координаты точки, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. Вывести формулу для вычисления длины дуги этой кривой.

Сделать рисунок
Имеем:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Найдём:
$x'_\varphi = r'\cos\varphi - r\sin\varphi$
$y'_\varphi = r'\sin\varphi + r\cos\varphi$
Используем формулу длины дуги графика функции, заданной параметрически:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2}\,d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2}\,d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r')^2\cos^2\varphi - 2rr'\sin\cos + r^2\sin^2\varphi + (r')^2\sin^2\varphi + 2rr'\sin\cos + r^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$$

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r')^2 + r^2}\,d\varphi$$

21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли (метод "$u \cdot v$") и метод Лагранжа (вариация произвольной постоянной).

22. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-ого порядка. Интегрирование дифференциальных уравнений n-ого порядка, допускающих понижение порядка.

23. Сформулировать теорему Коши о существовании и единственности решения линейного дифференциального уравнения n-ого порядка. Доказать свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка.

24. Сформулировать определение линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане линейно зависимых функций.

Опр. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются линейно-зависимыми на $[a, b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что на $[a, b]$ выполняется равенство $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, где хотя бы одна $\alpha_i \neq 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$. Если же это тождество выполняется только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются линейно-независимыми на $[a, b]$.

Теорема. Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, то
$\forall x \in [a, b]\ W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = 0$
Доказательство.
По усл. $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, $\implies$, $\exists \alpha_i \neq 0$ такие, что
$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = 0$. Дифференцируя $n - 1$ раз получим систему:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n = 0 \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' + \cdots + \alpha_n y_n' = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)} + \alpha_2 y_2^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Получили СЛАУ с n неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$
Так как хотя бы одна $\alpha_i \neq 0$, то эта система имеет ненулевое решение. Определителем такой системы является определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$. Полученная система имеет ненулевое решение лишь в том случаем, когда её определитель равен 0. То есть:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall x \in [a, b] \blacktriangle$$

25. Сформулировать определение линейно зависимой и линейно независимой систем функций. Сформулировать и доказать теорему о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка.

Опр. Функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются линейно-зависимыми на $[a, b]$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ такие, что на $[a, b]$ выполняется равенство $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0$, где хотя бы одна $\alpha_i \neq 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$. Если же это тождество выполняется только при условии, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называются линейно-независимыми на $[a, b]$.
Теорема. Если линейно независимые на $[a, b]$ функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются решениями ЛОДУ с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)\ (i = \overline{1, n})$, то определитель Вронского этих функций отличен от нуля $\forall x \in [a, b]$
Доказательство. (методом от противного)
Допустим, что для какой-то точки $x_0 \in [a, b]\ W(x_0) = 0$
Составим СЛАУ относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

В силу допущения определитель этой системы $W(x_0) = 0, x_0 \in [a, b]$, $\implies$, эта система имеет ненулевое решение, то есть хотя бы одно из $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ отлично от нуля
Рассмотрим $y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x)$, то есть линейную комбинацию частных решений.
Следовательно, эта функция сама является решением того же ЛОДУ, удовлетворяющим начальному условию $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} = 0$
Но этим же начальным условиям удовлетворяет и тривиальное решение $y = 0$

По теореме о единственности решения: $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0$ на $[a, b]$ и $\exists \alpha_i \neq 0$
По определению линейной зависимости функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - линейно зависимые функции.
Но это противоречит условию теоремы. Следовательно, предположение неверно и $\nexists x_0 \in [a, b]$ такой, что $W(x_0) \neq 0$.
То есть $W(x) \neq 0 \; \forall x \in [a, b]$ ▲

26. Сформулировать и доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка.

Теорема. У каждого ЛОДУ n-ого порядка $y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y = 0$ с непрерывными коэффициентами $p_i(x), i = \overline{1, n}$, существует ФСР
Доказательство.
Для построения ФСР зададим n^2 чисел (начальные условия):

$$\begin{array}{cccc} y_1(x_0) = y_{1_0} & y_1'(x_0) = y_{1_0}' & \dots & y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{1_0}^{(n-1)} \\ y_2(x_0) = y_{2_0} & y_2'(x_0) = y_{2_0}' & \dots & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{2_0}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & & \dots \\ y_n(x_0) = y_{n_0} & y_n'(x_0) = y_{n_0}' & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n_0}^{(n-1)} \end{array}$$

Эти числа должны удовлетворять следующему условию:

$$\begin{vmatrix} y_{1_0} & y_{2_0} & \dots & y_{n_0} \\ y_{1_0}' & y_{2_0}' & \dots & y_{n_0}' \\ \dots & \dots & & \dots \\ y_{1_0}^{(n-1)} & y_{2_0}^{(n-1)} & \dots & y_{n_0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Точка x_0 - произвольная точка $\in [a, b]$
Тогда получается, что решение $y_i(x), i = \overline{1, n}$, удовлетворяет этим начальным условиям с определителем Вронского $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы на $[a, b]$ и образуют одну из ФСР ЛОДУ n-ого порядка. ▲

27. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-ого порядка.

Теорема. Общее решение на $[a, b]$ ЛОДУ n-ого порядка $L[y] = 0$ с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$ равно линейной комбинации ФСР с произвольными постоянными коэффициентами, т.е.: $y_{o.o.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$, где $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - ФСР ЛОДУ $L[y] = 0$, а $C_1, C_2, \dots, C_n - const$
Доказательство.
1) Докажем, что $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ - решение ЛОДУ $L[y] = 0$
Подставим его в ДУ:
$L[y] = L[C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n] = C_1 L[y_1] + C_2 L[y_2] + \dots + C_n L[y_n] = 0$
Следовательно, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ является решением ЛОДУ $L[y] = 0$
2) Докажем, что $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ - общее решение ЛОДУ $L[y] = 0$
По условию все коэффициенты есть непрерывные функции на $[a, b]$, $\implies$, выполнены все условия теоремы Коши $\exists$ и ! решения ЛОДУ $L[y] = 0$.
Решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ будет общим решением, если найдутся единственным образом постоянные C_i при произвольно заданных начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где $x_0 \in [a, b]$
Пусть решение и его производные удовлетворяют этим условиям:

$$\begin{cases} C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \dots + C_ny_n(x_0) = y_0 \\ C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) + \dots + C_ny_n'(x_0) = y_0' \\ \dots \\ C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Это неоднородная СЛАУ относительно $C_1, C_2, \dots, C_n$. Определитель этой системы является определителем Вронского $W(x_0)$ для линейно независимой системы функций $y_1, y_2, \dots, y_n$ (решение ЛОДУ $L[y] = 0$) и тогда $W(x) \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение $C_1, C_2, \dots, C_n$ для произвольной точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \implies$
$\implies y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ - общее решение ЛОДУ $L[y] = 0$▲

28. Вывести формулу Остроградского-Лиувилля для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим ЛОДУ 2-ого порядка $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$, $p_i(x)$ - непрерывная на $[a, b]$ функция для $i = \overline{1, n}$.
Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - решения этого ЛОДУ, тогда по определению:

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \quad | \cdot (-y_2) \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 \quad | \cdot y_1 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} -y_1''y_2 - p_1(x)y_1'y_2 - p_2(x)y_1y_2 = 0 \\ y_2''y_1 + p_1(x)y_2'y_1 + p_2(x)y_2y_1 = 0 \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим:

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p_1(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0 \qquad (*)$$

Заметим, что:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

Тогда уравнение $(*)$ примет вид:

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p_1(x)W(x) = 0 \qquad (**)$$

Найдём:

$$\frac{dW(x)}{dx} = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2$$

Подставляя в $(**)$, получим:

$$\frac{dW(x)}{dx} + p_1(x)W(x) = 0$$

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -p_1(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dW(x)}{W(x)} = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx$$

$$\ln|W(x)| - \ln|W(x_0)| = -\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx$$

Тогда получим формулу Остроградского-Лиувилля:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(x)\,dx}$$

29. Вывести формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.

30. Сформулировать и доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-ого порядка.

Теорема. Общее решение ЛНДУ n-ого порядка с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами $p_i(x), i = \overline{1, n}$ и функцией $f(x)$ (правая часть) равно сумме общего решения однородного ДУ и какого-либо частного решения неоднородного ДУ: $y_{о.н.} = y_{о.н.} + y_{ч.н.}$

Доказательство.

1) Докажем, что $y_{о.н.}$ есть решение ДУ. По условию $L[y_{ч.н.}] = f(x)$, $L[y_{о.о.}] = 0$

$L[y_{о.н}] = L[y_{о.о.} + y_{ч.н.}] = L[y_{о.о.}] + L[y_{ч.н.}] = 0 + f(x) = f(x)$

Следовательно, $y_{о.н.}$ - решение ДУ

2) Докажем, что $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$ - общее решение

$y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н.} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i + y_{ч.н.} =$ (по теореме о структуре общего решения)

$= C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_{ч.н.}$, где $y_1, y_2, \dots, y_n$ - линейно независимые частные решения соответствующего ЛОДУ, причём:

$$W(X) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

Так как коэффициенты $p_i(x), i = \overline{1, n}$, - непрерывны на $[a, b]$, то по теореме Коши о существовании и единственности решения задачи Коши существует единственное решение ДУ, удовлетворяющее заданным условиям. Следовательно, надо доказать, что если решение $y_{о.н.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_{ч.н.}$ и его производные удовлетворяют заданным начальным условиям, то из этих условий можно единственным образом определить $C_1, C_2, \dots, C_n, x_0 \in [a, b]$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = y_0 - y_{ч.н.}(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = y_0' - y_{ч.н.}'(x_0) \\ \dots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - y_{ч.н.}^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

СЛАУ с определителем $W(x) \neq 0$, $x_0 \in [a, b]$, $\implies$, существует единственный набор

$C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, \dots, C_n^0$

$y(x) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \dots + C_n^0 y_n(x) + y_{ч.н.}$ - частное решение

Итак, $y_{о.н.} = y_{о.о.} + y_{ч.н}$ ▲

31. Вывести формулу для общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического уравнения.

Дано ЛОДУ 2-ого порядка: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $a_1, a_2 - const$

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$

$D = a_1^2 - 4a_2$

$\lambda_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$

Пусть $D = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2$ - действительные корни

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$

$a_1 = -2\lambda$

Первое частное решение: $y = e^{\lambda x}$

Найдём второе частное решение:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1\,dx}}{y_1^2}\,dx = e^{\lambda x}\int \frac{e^{-a_1 x}}{e^{2\lambda x}}\,dx = e^{\lambda x}\int \frac{e^{2\lambda x}}{e^{2\lambda x}}\,dx = xe^{\lambda x}$$

ФСР: $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}$
$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$

32. Вывести формулу для общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

Дано ЛОДУ 2-ого порядка: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, $a_1, a_2 - const$
Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$
$D = a_1^2 - 4a_2$
$\lambda_1 = \frac{-a_1+\sqrt{D}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a_1-\sqrt{D}}{2}$
Пусть $D < 0$: λ_1, λ_2 - комплексно сопряжённые
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, (\beta \neq 0)$
Рассмотрим $e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ - формула Эйлера
Выделим действительную и мнимую части решения:
$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - e^{\alpha x}\beta\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + e^{\alpha x}\beta\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha e^{2\alpha x}\sin\beta x\cos\beta x + e^{2\alpha x}\beta\cos^2\beta x - \alpha e^{2\alpha x}\sin\beta x\cos\beta x + e^{2\alpha x}\beta\sin^2\beta x =$$

$$= e^{2\alpha x} \neq 0\ \forall x \in [a,b]$$

То есть $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ линейно независимые частные решения ДУ и образуют ФСР, по теореме о структуре общего решения ЛОДУ:
$y_{o.o.} = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$

33. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида (являющейся квазимногочленом). Сформулировать и доказать теорему о наложении частных решений.

34. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-ого порядка и вывод системы соотношений для варьируемых переменных.

Дано ЛНДУ $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$ с непрерывными коэффициентами $p_i(x), i = \overline{1,n}$
Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - ФСР соответствующего ЛОДУ
Будем искать решение ЛНДУ в виде: $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = C_1y_1 + C_2y_2$
где $C_1(x)$, $C_2(x)$ - новые неизвестные функции
Найдём $y' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'$
Наложим ограничение: $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$
Тогда $y' = C_1y_1' + C_2y_2'$
Найдём $y'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''$
Подставим найденные y, y', y'' в исходное ЛНДУ и упростим:
$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_2) + C_2(y_2'' + p_1y_2' + p_2y_2) = f(x)$
$y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1 = 0$ и $y_2'' + p_1y_2' + p_2y_2 = 0$ по условию
Получим $C_1'y_1' + C_2'y_2 = f(x)$

Это верно только при наложенном ограничении, то есть:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Определителем этой системы является определитель Вронского $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$, так как y_1, y_2 составляют ФСР исходного ДУ. Следовательно, коэффициенты C_1, C_2 определены единственным образом.
Пусть $C_1' = \varphi_1(x), C_2' = \varphi_2(x)$
Тогда $C_1 = \int \varphi_1(x)\,dx, C_2 = \int \varphi_2(x)\,dx$
Общее решение ЛНДУ: $C_1y_1 + C_2y_2 + y_1\int \varphi_1(x)\,dx + y_2\int \varphi_2(x)\,dx$

35. Сформулировать определение дифференциального уравнения n-ого порядка, разрешенного относительно старшей производной, и сформулировать задачу Коши для такого уравнения. Описать метод сведения этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений.

36. Сформулировать задачу Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи. Описать метод сведения нормальной системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка.

37. Сформулировать определение первого интеграла нормальной системы дифференциальных уравнений. Описать методы нахождения первых интегралов и их применение для решения системы дифференциальных уравнений.