4. Обходы (продолжение)

Гамильтоновость в неографе

Опр. Гамильтоновым обходом(циклом) называется в неографе называется обход(цикл), содержащий все вершины и проходящий через каждую из них только один раз.

- Определить гамильтоновость графа сложнее, чем эйлеровость.
- Тут пример с пятиугольниками?
  Задача коммивояжёра. Есть несколько пунктов, соединённых дорогами разной длины, и требуется обойти все, затратив меньшее количество сил.
  Вычислительная сложность задачи нахождения Гамильтонова обхода в графе в общем случае: $O(n!)$
  Задача коммивояжёра является **NP-полной**, то есть относится к классу задач, алгоритм решения которых можно применить для похожих задач.
  Нет универсального алгоритма построения Гамильтонова цикла. Есть алгоритмы, упрощающие эту задачу при определённых требованиях к начальному графу:

1. Алгоритм поиска Гамильтонова обхода в условиях теорем Дирака и Оре
2. Алгоритм, улучшающий полный перебор за счёт использования динамического программирования
3. - - - за счёт применения метода ветвей и границ
4. Из ML: алгоритм поиска ближайшего соседа

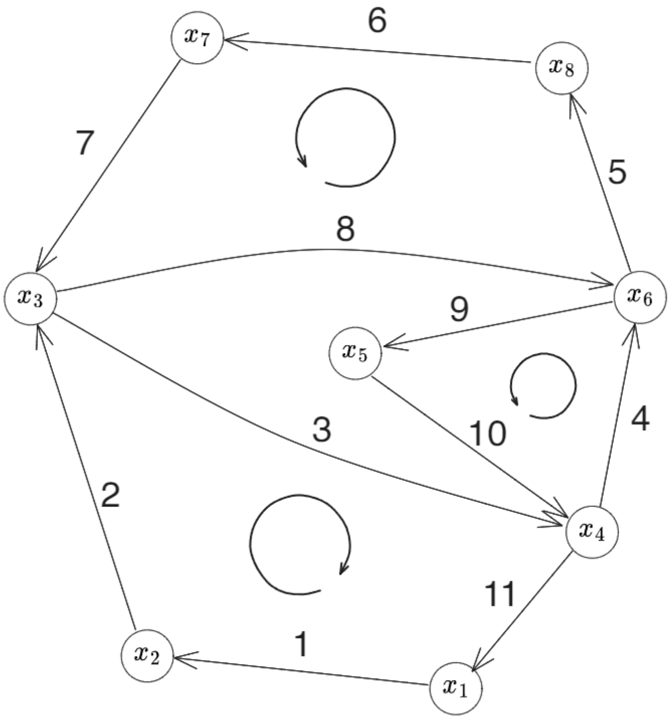
Критериев Гамильтоновости столь же простых как критерий эйлеровости не существует, но существует ряд теорем о достаточных условиях Гамильтоновости.
Теорема Оре. Дан неограф $G(X, U)$ порядка $n \geq 2$. Если для любой пары вершин x_i, x_j выполняется неравенство $p(x_i) + p(x_j) \geq n$, то G - Гамильтонов граф.

Эйлеровость в орграфе

Дан орграф $G(X, U)$

1. Если G - эйлеров, то $\forall x \in X\ p^+(x_i) = p^-(x_i)$
2. Если G - эйлеров, то он является объединением контуров, не пересекающихся по рёбрам.

Пример:



Теорема. Связный орграф $G(X, U)$ содержит открытый эйлеров путь тогда и только тогда, когда в нём найдётся 2 различных вершины x, y $(x \neq y)$ такие, что $p^-(x) = p^+(x) + 1$ и $p^-(y) = p^+(y) - 1$, а для всякой иной вершины $x_i \in X \setminus x, y$ верно $p^-(x_i) = p^+(x_i)$

Гамильтоновость в орграфе

Можно доказать гамильтоновость только в частном случае
Теорема. (одно из *достаточных* условий)
Дан сильно связный орграф $G(X, U)$ без петель и кратных рёбер порядка $n \geq 2$. Если для любой пары различных несмежных вершин x_i, x_j выполняется неравенство $p(x_i) + p(x_j) \geq 2n - 1$, то орграф G содержит Гамильтонов контур.

- Если теорема выполняется, то гарантированно существует гамильтонов обход, а если не выполняется, то он может как быть, так и не быть.

Деревья и остовы

Опр. Неориентированное дерево - связный неограф без циклов.
Опр. Произвольный неограф неограф без циклов называется лесом.

Свойства деревьев:

$G(X, U)$ - неориентированные дерево
$|X| = n, |U| = m$

1. $m = n - 1$
2. Если $x_i, x_j \in X$, то их соединяет единственная простая цепь
   - существование цепи следует из связности
   - единственность из отсутствия циклов
3. Если $x_i, x_j \in X$ не смежны, то введение в дерево ребра $(x_i x_j)$ даёт граф, содержащий ровно один цикл

4. Всякое неориентированное дерево содержит по крайней мере 2 концевые вершины