8. Свойства счётных множеств

> Каждое свойство - отдельная теорема.

1. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество

2. В любом бесконечном множестве можно выделить 2 не пересекающихся счётных подмножества

3. Любое подмножество счётного множества конечно или счётно

4. Объединение любого конечного или счётного семейства счётных множеств является счётным

5. Объединение конечного и счётного множества счётно

> $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{C}$ - континуум
> $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ - алеф-нуль

6. Следующие множества равномощны:

> 1. $[0, 1] \in \mathbb{R}$
> 2. $(0, 1) \in \mathbb{R}$
> 3. $[a, b] \in \mathbb{R}$
> 4. $(a, b) \in \mathbb{R}$
> 5. $\mathbb{R}$
> 6. $2^{\mathbb{N}}$

7. Теорема о квадрате. Для произвольного множества A верно, что $|A| \sim |A^2|$

Сравнение мощностей бесконечных множеств.

Опр. Даны множества A и B, считается, что $|A| \leq |B|$, если A равномощно некоторому подмножеству B

- $|A| \leq |B| \wedge |A| \geq |B| \implies A \sim B$

Опр. $|A| < |B|$, если $|A| \neq |B|$ и $\exists C \subset B : A \sim C$

- Сравнение мощностей транзитивно: $|A| < |B| \wedge |B| < |C| \implies |A| < |C|$

8. Теорема Кантора-Бернштейна. Для любых множеств A и B верно одно из трёх:

1. $|A| < |B|$
2. $|A| > |B|$
3. $|A| = |B|$

9. Для любого множества A верно неравенство: $|2^{\mathbb{N}}| > |A|$

Для каждого множества существует множество большей мощности - булеан.

10. Следствие из теоремы о квадрате. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно

Любое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{a}{b}$ или пары взаимно простых чисел (a, b)
Тогда $\mathbb{Q} \sim$ некоторому подмножеству $\mathbb{Z}^2$
Согласно теореме о квадрате $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}^2$
Так как $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$ счётны, а любое подмножество счётного множества конечно или счётно, то $\mathbb{Q}$ - счётно.