4. Бинарные отношения

Опр. $R \subseteq A \times A$ или $R \subseteq A^2$ - бинарное отношение на множестве A
Пример:

- $x, y \in \mathbb{N}$
- $x \leq y$ - инфиксная запись отображения
- $(x, y) \in$ "$\leq$" - имя бинарного отношения
- В общем виде: xRy или $(x, y) \in R$

Опр. Если R - бинарное отношение, то обратное ему соответствие есть бинарное отношение R^{-1} на том же множестве A
Опр. Бинарное отношение R, в каждой паре которого компоненты совпадают, равномощное множеству A называется диагональю множества A
Обоз. id_A

- Диагональ является отображением

Способы задания бинарных отношений:

1. Перечисление пар:
   - $A = \{a_1, a_2, a_3\}$
   - $R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), (_1, a_3)\}$
2. Таблица: (число столбцов равно $Def(R)$)

$R(Def(R))$	a_1	a_2
$R(Res(R))$	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_3\}$

3. Матрица бинарного отношения: (квадратная порядка $n = |A|$, $r_{ij} = 1$ $(a_i, a_j) \in R$):

	a_1	a_2	a_3
a_1	1	1	1
a_2			1
a_3			

4. Задание двудольным графом

Способы задания соответствия:

$\rho \subseteq A \times B$

1. Перечисление пар:
   - $A = \{a_1, a_2, a_3\}$
   - $B = \{b_1, b_2\}$
   - $\rho = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$
2. Таблица:

$Def(\rho)$	a_1	a_2	a_3
$\rho(Res(\rho))$	$\{b_1, b_2\}$	$\{b_2\}$	$\{b_2\}$

3. Матрица (сетка) $m \times n$, где $n = |A|, m = |B|, \rho_{ij} = 1 \ (a_i, a_j) \in \rho$:

	b_1	b_2
a_1	1	1
a_2		1
a_3		1

4. Двудольный граф

Свойства бинарных отношений

Пусть дано множество $A, \ |A| = n, \ R \subseteq A^2$

1. Рефлексивность

- **Опр.** Отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall x \in A : xRx$, то есть $(x, x) \in R$ или $id_A \in R$
  - Все элементы на главной диагонали матрицы такого отношения равны 1.
- **Опр.** Если id_A полностью отсутствует в R, то такое отношение называется **иррефлексивным** (**антирефлексивным**)
- **Опр.** Если часть элементов элементов id_A присутствует в R, а часть нет, то такое отношение называется **нерефлексивным**
- *Пример:*
  - "=" - рефлексивное отношение
  - "$\overline{=}$"- иррефлексивное отношение

2. Симметричность

- **Опр.** Отношение R называется **симметричным**, если $(x, y) \in R : (y, x) \in R$ $(xRy \Rightarrow yRx, \ R = R^{-1})$
- Матрица такого отношения симметрична относительно главной диагонали.
- **Опр.** Если хотя бы для одной пары условие симметричности ен выполняется, то такое отношение называется **несимметричным**

3. Антисимметричность

- Более жёсткое требование, чем несимметричность
- **Опр.** Отношение R называется **антисимметричным**, если $(xRy \text{ и } yRx) \Rightarrow x = y$
- Не конфликтует с рефлексивностью

4. Транзитивность

- **Опр.** Отношение R называется транзитивным, если $\forall x, y, z \in A \ (xRy \text{ и } yRz) \Rightarrow xRz$
- **Опр.** Если хотя бы для одного набора $x, y, z \in A \ (xRy \text{ и } yRz) \overline{\Rightarrow} xRz$, такое отношение называется нетранзитивным

5. Плотность

- **Опр.** Отношение R называется плотным, если $\forall x, y \in A : xRy, x \overline{=} \exists z \in A : xRz \text{ и } zRy$
- Для любых различных элементов множества R можно указать третий элемент из R, который "встраивается" между первыми двумя

Классы бинарных отношений

Отношение\Свойства	Иррефлексивность	Рефлексивность	Симметричность	Антиссимметричн
Эквивалентность		+	+	
Толерантность		+	+	
Порядок (частичный порядок)		+		+
Пред(варительный) порядок (квазипорядок)		+		
Строгий порядок	+			+
Строгий предпорядок	+			