3. Классы булевых функций

Булевы функции подразделяются на 5 классов.

1 класс

Опр. Булева функция f от n переменных называется сохраняющей константу нуля, если $f(0,\dots,0)=0$.
Обоз. K_0
Теорема. Число всех булевых функций класса K_0 равно 2^{2^n-1}.
Док-во:
Только на одном наборе функция исключительно принимает значение 0.
Так как всего наборов 2^n, то произвольное значение функция принимает на 2^n-1 наборах.
Так как всего функций 2^{2^n}, а произвольное значение принимает 2^{2^n-1} функция, то число функций, принимающих значение 0, равно $2^{2^n}-2^{2^n-1}=2^{2^n-1}$

2 класс

Опр. Булева функция f от n переменных называется сохраняющей константу единицы, если $f(1,\dots,1)=1$.
Обоз. K_1
Теорема. Число всех булевых функций класса K_1 равно 2^{2^n-1}.
Док-во аналогично 1 классу.

3 класс

$f(x_1,\dots,x_n)$ - функция n переменных
Функция $f^*(x_1,\dots,x_n)=\overline{f}(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)$ называется двойственной к функции f.
f^* обладает свойством инволюции: $(f^*)^*=f$
Очевидно, что бинарное отношение "быть двойственным" симметрично.

1. Чтобы получить двойственную функцию, нужно полностью инвертировать таблицу истинности:

x_1	x_2	f		x_1	x_2	f^*
0	0	1		1	1	0
0	1	1		1	0	0
1	0	1		0	1	0
1	1	0		0	0	1

$f=\overline{x}_1\vee\overline{x}_2$
$f^*=\overline{x}_1\overline{x}_2$
2. Взять аргументы и функцию с инверсией:
$f^*=\overline{\overline{\overline{x}}_1\vee\overline{\overline{x}}_2}=\overline{x}_1\overline{x}_2$

Опр. Булева функция называется **самодвойственной**, если она совпадает с двойственной ей функцией.
Функция самодвойственна тогда и только тогда, когда на взаимопротивоположных наборах принимает взаимопротивоположные значения.

- Чтобы опровергнуть самодвойственность функции f, достаточно найти 2 таких противоположных набора σ_1, σ_2, что $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$.
- Чтобы доказать самодвойственность, нужно перебрать все взаимопротивоположные наборы и убедиться в том, что на любое паре значения функции противоположны.
  Теорема. Мощность класса (количество) самодвойственных функций равна $2^{2^{n-1}}$.
  Обоз. K_S

Пример:

1. Тождественная функция самодвойственна
   - $f(x) = x$
   - $f^*(x) = \overline{\overline{x}} = x$
2. Отрицание самодвойственно:
   - $f(x) = \overline{x}$
   - $f(x) = \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x}$

2 теоремы о двойственности:

1. **Теорема.** Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ реализована формулой $\varphi(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n))$, то формула $\varphi^*(\varphi_1^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n^*(x_1, \ldots, x_n))$ реализует булеву функцию $f^*(x_1, \ldots, x_n)$.
   - *Пример:*
     - $\varphi = x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 = \varphi_1 \vee \varphi_2$
     - $\varphi_1 = x_1x_2 \qquad \varphi_1^* = \overline{\overline{x}_1\overline{x}_2}$
     - $\varphi_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \qquad \varphi_2^* = \overline{\overline{\overline{x}}_1\overline{\overline{x}}_2} = \overline{x_1x_2}$
     - $\varphi^* = \overline{\overline{\varphi_1^*} \vee \overline{\varphi_2^*}} = \overline{\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2} = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 = x_1 \oplus x_2$
     - $\varphi = x_1 \equiv x_2 \qquad \varphi^* = x_1 \oplus x_2$
2. **Теорема.** Пусть имеется базис $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ и этому базису поставлен в соответствие базис двойственных функций $F^* = \{f_1^*, \ldots, f_m^*\}$. Если формула φ над F реализует f, то φ^* над F^* реализует функцию f^* при том, что функции $f_i, i = \overline{1, m}$ заменяются на f_i^*.
   - *Пример:*
     - $F = \{f_1, f_2\} \qquad f_1 = x_1 \wedge x_2 \qquad f_2 = x_1 \oplus x_2$
     - $F = \{\wedge, \oplus\}$
     - $F^* = \{\vee, \equiv\}$
     - $f = x_1x_2 \qquad f^* = x_1 \vee x_2$
     - $\varphi = (x_1\overline{x}_2 \oplus \overline{x}_1\overline{x}_2)x_1$
     - $\varphi^* = ((x_1 \vee \overline{x}_2) \equiv (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)) \vee x_1$
   - Из взаимной двойственности $\vee$ и $\wedge$ следует справедливость законов де Моргана:

$\overline{x_1 \wedge x_2}$	$\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$
$\overline{x_1 \vee x_2}$	$\overline{x}_1\overline{x}_2$

4 класс

Опр. Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется линейной, если она представима в виде
$C_0 \oplus C_1x_1 \oplus C_2x_2 \oplus \cdots \oplus C_nx_n$, где коэффициенты $C_i \in \{0, 1\}$.
Функция линейна тогда и только тогда, когда она представима полиномом Жегалкина первой степени.
Обоз. K_L
Теорема. Число всех линейных функций равно 2^{n+1}.
Пояснение: Коэффициентов C_i всего $n + 1$.
Пример:

1. $f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_2 \oplus x_3$
    - $C_0 = 1 \quad C_1 = 0 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 1$
2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2$
    - $C_0 = 0 \quad C_1 = 1 \quad C_2 = 1 \quad C_3 = 0$

5 класс

Пусть имеется 2 набора из n переменных:
$\partial_1 = (a_1, \dots, a_n)$ и $\partial_2 = (a'_1, \dots, a'_n)$
Говорят, что набор ∂_1 не меньше набора $\partial_2 (\partial_1 \geq \partial_2)$, если для всех a_i выполняется $a_i \geq a'_i$
Пример:
$\partial_1 = 1011$
$\partial_2 = 1001$
Такие наборы называются **сравнимыми**, иначе **несравнимыми**.

Опр. Булева функция называется монотонной, если для любых её сравнимых наборов ∂_1 и ∂_2 верно $f(\partial_1) \geq f(\partial_2)$.
Обоз. K_M

Один из вариантов оценки мощности K_M: $2^{n^{n/2}} \leq |K_M| \leq 2^{an^{n/2}}$, где a - неизвестный коэффициент.