5. Отношения эквивалентности

Пусть A - некоторое множество
Опр. Семейство попарно не пересекающихся множеств $C : i = \overline{1, n}$ называется разбиением множества A, если их объединение даёт A

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = A$$

Пример:

1. $A = \{1, 2, 7, 8, 12, 15\}$
    - $C_1 = \{1, 2, 12, 15\}$
    - $C_2 = \{7, 8\}$
    - $A = C_1 \cup C_2$
    - $C_1 \cap C_2 = \varnothing$
2. $A = [1, 5]$
3. $C_1 = [1, 5), C_2 = [2, 3.5), C_3 = [3.5, 5]$

Пусть R - отношение эквивалентности на множестве A и $x \in A$
Опр. Классом эквивалентности $[x]_R$ по отношению R называется множество всех вторых компонентов пар отношения R, у которых первым компонентом является x
$[x]_R = \{y \in A : xRy\}$ - сечение эквивалентности по x
Так как R - эквивалентность и она рефлексивна, то класс эквивалентности всегда не пустой: $[x]_R \overline{=} \varnothing$
$\forall x \in A \; xRx$, то есть $id_A \in R$
Пример: множество всех прямых на плоскости, параллельных данной

Теорема. Для любого отношения эквивалентности на множестве A множество классов эквивалентности образует разбиение множества A
Следствие: Любое разбиение множества задаёт на нём отношение эквивалентности, для которого классы разбиения образуют....
То есть любая эквивалентность определяет единственное разбиение множества и наоборот

Опр. Множество всех классов эквивалентности по данному отношению R называется фактор-множеством множества A по отношению R
Обоз. A/R
Пример:

- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $[a]_R = \{a, b\} = c_1$
- $[b]_R = \{a, b\}$
- $[c]_R = \{c\} = c_2$
- $[d]_R = \{d, e\} = c_3$
- $[e]_R = \{d, e\}$
- $A = c_1 \cup c_2 \cup c_3$
- $A/R = \{c_1, c_2, c_3\}$
  Существует связь между понятиями эквивалентности, разбиения и отображения. $\forall R \subseteq A^2$ можно задать отображение множества A в его фактор-множество A/R
  Если считать $x \in A, f(x) = [x]_R$, то получим, что каждому элементу $x \in A$ отображение f сопоставляет единственный класс эквивалентности, содержащий этот элемент. Заметим, что

отображение f - **сюръективное**.

Любое отображение однозначно определяет некоторое отношение эквивалентности.

Теорема. Пусть f - произвольное отображение, отношение R на множестве A, для которого $(x, y) \in R$ возможно тогда и только тогда, когда $f(x) = f(y)$, является отношение эквивалентности. Причём существует биекция фактор-множества A/R на множество $f(A)$ $(A/R \leftrightarrow f(A))$

Из теоремы **не следует**, что между f и R существует взаимно однозначное соответствие, два разных отображения могут задавать одно и то же разбиение множества A

- $f_1 : A \to B_1$
- $f_2 : A \to B_2$