3. Отображения бинарных отношений

Понятие отображения бинарного отношения

Обычно буквы $f, g, h \ldots$ как для функций.

Опр. Отображение $f : A \to B$ из множества A в множество B задано, если каждому элементу $x \in A$ соответствует элемент $y \in B$.
Обоз. $f : A \to B$

Опр. y называется образом элемента x при отображении f ($y = f(x)$).
Каждое отображение задаёт множество упорядоченных пар таких, что

$$\{(x, y) : x \in A, y = f(x)\} \subseteq A \times B$$

Когда для отображения f могут существовать несколько различных элементов из A, имеющих один и тот же образ y_0 , такие элементы x называют **прообразами** элемента y_0 при отображении f.
$\{x_1, x_2, x_2\} \subset A$
$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y_0$
Пример:

> $y = \cos x \qquad 0 \leq y_0 \leq 1$
> $\{x : x = \arccos y \pm 2\pi n, n \in \mathbb{N}\}$

Опр. Областью значения отображения f называется множество всех конечных элементов $y \in B$, для которых найдётся $x \in A : y = f(x)$.

1. Отображение $f : A \to B$ называется инъективным (инъекция), если для каждого y из области значения отображения f существует единственный прообраз.
   - $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$
   - $(y_1 = y_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)$
2. Отображение $f : A \to B$ называется сюръективным (сюръекция), если область значений отображения f полностью совпадает с множеством B.
3. Отображение $f : A \to B$ называется биективным (биекция), если оно одновременно инъективно и сюръективно.
   - *Пример:* $y = \operatorname{arctg} x$ - биекция на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
   Примечание:

   > Смещение каждой точки окружности при повороте на угол вокруг центра есть биекция точек окружности на саму себя - **автоморфизм**.

Обобщение понятия отображения:

1. Если образ $y \in B$ определён не для каждого $x \in A$, имеет место частичное отображение.
2. Если отображение неоднозначное (некоторым элементам $x \in A$ соответствует не по одному элементу $y \in B$, то есть несколько образов), то имеет место соответствие множества A множеству B.

$\rho \subseteq A \times B$ - задание соответствия из A в B
$\rho = \varnothing$ - частный случай
$\rho = A \times B$ - универсальное соответствие

$a, b : a \in A, b \in B$
$(a, b) \in \rho$ - упорядоченная пара входит в соответствие ρ

$Def(\rho)$ - область определения соответствия ρ, множество всех первых компонентов упорядоченных пар, составляющих соответствие ρ
$Def(\rho) = \{x : (\exists y \in B), (x, y) \in \rho\}$
$Res(\rho)$ - область значений соответствия ρ, множество всех вторых компонентов упорядоченных пар, составляющих соответствие ρ
$Res(\rho) = \{y : (\exists x \in A), (x, y) \in \rho\}$

Опр. Сечением соответствия ρ по элементу $x_0 \in A$ называется множество $\rho(x_0)$ из вторых компонентов пар соответствия ρ таких, что первым компонентом является x_0
Обоз. $\rho(x_0) = \{y : (x_0, y) \in \rho\}$

Опр. Сечением соответствия ρ по множеству $E \subseteq A$ называется множество всех вторых компонентов пар соответствия ρ таких, что первый компонент входит в множество E
Обоз. $\rho(E) = \{y : (x, y) \in \rho, x \in E\}$

Опр. Обратным соответствием $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ называется соответствие, определяемое как множество пар (y, x) таких, что $(x, y) \in \rho$
Обоз. $\rho^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \rho\}$
$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$

> Если задано отображение $f : A \to B$, то оно является соответствием
> Обратное ему отображение $f^{-1} : B \to A$ в общем случае соответствием не является