Вариант 0

Вопрос 1. Сформулировать второе неравенство Чебышёва.

Вопрос 2. Дать определение состоятельной оценки.

Задача 1. Найти методом моментов по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ оценку параметра θ для плотности $f(x) = \begin{cases} 4\theta\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}x^2e^{-\theta x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$

Задача 2. Найти ММП-оценку по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$ параметра θ для плотности $f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\theta+1}, & x > 3, \\ 0, & x \leqslant 3. \end{cases}$

Задача 3. Оцените вероятность того, что число единиц при подбрасывании симметричной игральной кости 900 раз будет лежать в интервале (128, 172). Решить задачу двумя способами: используя неравенство Чебышёва и интегральную теорему Муавра—Лапласа.

Задача 4. Случайная точка (ξ, η) наугад бросается в область, ограниченной линиями $x = -2$, $y = 0$ и $y = \sqrt[3]{x}$, $x < 0$. Найти коэффициент корреляции между ξ и η.

РЕШЕНИЕ

Задача 1.

Параметр θ одномерный, поэтому найдем оценку из уравнения $\mu_1 = \widehat{\mu}_1(\vec{X}_n)$, где $\mu_1 = \mathsf{M}X$, а $\widehat{\mu}_1(\vec{X}_n) = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Делая замену переменной $t = x\sqrt{\theta}$, получим

$$\mathsf{M}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int\limits_{0}^{\infty} x4\theta\sqrt{\frac{\theta}{\pi}}x^2e^{-\theta x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = x\sqrt{\theta} \\ dt = dx\sqrt{\theta} \end{array} \right| = \frac{4}{\sqrt{\pi\theta}}\int\limits_{0}^{\infty} t^3e^{-t^2}\,dt.$$

Применяя формулу интегрирования по частям $\int udv = uv - \int vdu$ для $u = t^2$ и $dv = te^{-t^2}dt$ и учитывая, что $du = 2tdt$, $v = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$, будем иметь

$$\mathsf{M}X = \frac{4}{\sqrt{\pi\theta}}\left(t^2\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\Bigg|_0^{\infty} - \int\limits_{0}^{\infty} 2t\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)dt\right) = \frac{4}{\sqrt{\pi\theta}}\left((0-0) + \int\limits_{0}^{\infty} te^{-t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi\theta}}\int\limits_{0}^{\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{4}{\sqrt{\pi\theta}}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right)\Bigg|_0^{\infty}dt = -\frac{2}{\sqrt{\pi\theta}}(0-1) = \frac{2}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

Следовательно, уравнение $\mu_1 = \widehat{\mu}_1(\vec{X}_n)$ имеет вид

$$\frac{2}{\sqrt{\pi\theta}} = \overline{X},$$

решая которое, найдем, что $\theta = \frac{4}{\pi\overline{X}^2}$.

Таким образом, оценка $\widehat{\theta}$ параметра θ методом моментов есть $\widehat{\theta} = \frac{4}{\pi\overline{X}^2}$.

Ответ: $\widehat{\theta} = \frac{4}{\pi\overline{X}^2}$.

Задача 2. Заметим, что так как $f(x) = 0$ для всех $x \leqslant 3$, то $X_i > 3$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $f(X_i) = \frac{\theta}{3}\left(\frac{3}{X_i}\right)^{\theta+1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и функция правдоподобия $L(\vec{X}_n, \theta)$ имеет вид

$$L(\vec{X}_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{3}\left(\frac{3}{X_i}\right)^{\theta+1},$$

а логарифм $l(\vec{X}_n, \theta) = \ln(L(\vec{X}_n, \theta))$ функции правдоподобия $L(\vec{X}_n, \theta)$ есть

$$l(\vec{X}_n, \theta) = \ln L(\vec{X}_n, \theta) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\theta - \ln 3 + (\theta+1)\ln\left(\frac{3}{X_i}\right)\right) = n\ln\theta - n\ln 3 + \sum_{i=1}^{n}\left((\theta+1)\ln\left(\frac{3}{X_i}\right)\right)$$

Следовательно,
$$\frac{dl(\vec{X}_n,\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{3}{X_i}\right),$$
и уравнение правдоподобия $l(\vec{X}_n,\theta)=0$ имеет вид
$$\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{3}{X_i}\right)=0.$$
Решая это уравнение, получим, что
$$\theta=-\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{3}{X_i}\right)}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{X_i}{3}\right)}.$$
Далее, дифференцируя $l(\vec{X}_n,\theta)$ дважды и учитывая, что $n>0$, найдем, что
$$\frac{d^2l(\vec{X}_n,\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta^2}<0$$
для всех θ, в частности для $\theta=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{X_i}{3}\right)}$. Поэтому $\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{X_i}{3}\right)}$ является точкой максимума функции $l(\vec{X}_n,\theta)=0$, а не точкой минимума или точкой перегиба.

Таким образом, точечной оценкой неизвестного параметра θ является $\widetilde{\theta}(\vec{X}_n)=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{X_i}{3}\right)}$.

Ответ: $\widetilde{\theta}(\vec{X}_n)=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{X_i}{3}\right)}$.

Задача 3. Обозначим через Y_n количество единиц, выпавших при $n=900$ подбрасываниях кости. Заметим, что Y_n — биномиальная случайная величина с параметрами $p=1/6$ и $n=900$. Из лекций известно, что математическое ожидание $\mathsf{M}Y_n$ и дисперсия $\mathsf{D}Y_n$ случайной величины Y_n равны $\mathsf{M}Y_n=np=150$, $\mathsf{D}Y_n=npq=125$, где $q=1-p=5/6$.

Заметим, что
$$\mathsf{P}\{128<Y_n<172\}=\mathsf{P}\{128-150<Y_n-\mathsf{M}Y_n<172-150\}=\mathsf{P}\{|Y_n-\mathsf{M}Y_n|<22\}.$$
Поэтому, применяя к Y_n второе неравенство Чебышёва, получим
$$\mathsf{P}\{128<Y_n<172\}=\mathsf{P}\{|Y_n-\mathsf{M}Y_n|<22\}>1-\frac{\mathsf{D}Y_n}{22^2}=1-\frac{125}{22^2}=359/484=0.74174.$$

Теперь оценим $\mathsf{P}\{128<Y_n<172\}$ при помощи теоремы Муавра — Лапласа. Воспользовавшись формулой
$$\mathsf{P}\{a<Y_n<b\}\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right),$$
получим
$$\mathsf{P}\{128<Y_n<172\}\approx\Phi\left(\frac{172-150}{\sqrt{125}}\right)-\Phi\left(\frac{128-150}{\sqrt{125}}\right)=$$
$$=\Phi\left(\frac{22}{\sqrt{125}}\right)-\Phi\left(\frac{-22}{\sqrt{125}}\right)=2\Phi\left(\frac{22}{\sqrt{125}}\right)-1\approx2\Phi(1.967739820)-1=0.97545.$$

Ответ:
1) неравенство Чебышёва дает оценку $\mathsf{P}\{128<Y_n<172\}>0.74174$;
2) теорема Муавра — Лапласа дает оценку $\mathsf{P}\{128<Y_n<172\}\approx0.97545$.

Задача 4.

Область D, ограниченная линиями $x=-2$, $y=0$ и $y=\sqrt[3]{x}$, $x<0$, имеет вид
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-2\leqslant x\leqslant0,\sqrt[3]{x}\leqslant y\leqslant0\}.$$
Фраза «случайная точка (ξ,η) наугад бросается в область D» означает, что случайный вектор (ξ,η) равномерно распределен в области D. Поэтому плотность случайного вектора (ξ,η) имеет вид
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\text{площадь}\,(D)}, & \text{если } (x,y)\in D;\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Так как

$$\text{площадь}\,(D)=\int_{-2}^{0}(0-(\sqrt[3]{x})\,dx=\frac{3}{\sqrt[3]{4}},$$

то

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{4}}{3}, & \text{если } (x,y)\in D;\\ 0, & \text{если } (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Найдем f_ξ и f_η.

Зафиксируем $x_0\in(-2,0)$ и найдем $f_\xi(x_0)$. При фиксированном $x_0\in(-2,0)$ выражение $f(x_0,y)$ как функция от y имеет вид

$$f(x_0,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{4}}{3}, & \text{если } y\in(\sqrt[3]{x_0},0);\\ 0, & \text{если } y\notin(\sqrt[3]{x_0},0).\end{cases}$$

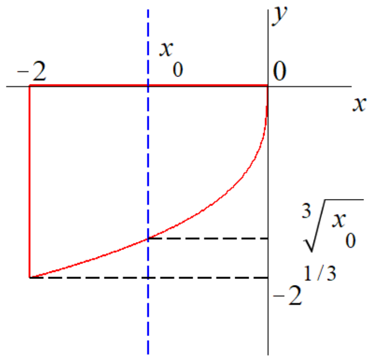

Рис. 1

Поэтому при $x_0\in(-2,0)$ (см. рис. 1)

$$f_\xi(x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_0,y)\,dy=\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{x_0}}0\,dy+\int_{\sqrt[3]{x_0}}^{0}\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\,dy+\int_{0}^{\infty}0\,dy=0-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\sqrt[3]{x_0}+0=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\sqrt[3]{x_0}.$$

Если же $x_0\notin(-2,0)$, то $f(x_0,y)=0$ при всех $y\in(-\infty,\infty)$. Поэтому при $x_0\notin(-2,0)$

$$f_\xi(x_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x_0,y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}0\,dy=0.$$

Таким образом

$$f_\xi(x)=\begin{cases}-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\sqrt[3]{x}, & \text{если } x\in(-2,0);\\ 0, & \text{если } x\notin(-2,0).\end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)\,dx=\int_{-2}^{0}x\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\sqrt[3]{x}\right)dx=-\frac{8}{7},$$

$$\mathsf{M}\,(\xi^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_\xi(x)\,dx=\int_{-2}^{0}x^2\left(-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\sqrt[3]{x}\right)dx=\frac{8}{5},$$

$$\mathsf{D}\xi=\mathsf{M}(\xi^2)-(\mathsf{M}\xi)^2=\frac{8}{5}-\left(-\frac{8}{7}\right)^2=\frac{72}{245}.$$

Аналогично, зафиксируем $y_0\in(-\sqrt[3]{2},0)$ и найдем $f_\eta(y_0)$. При фиксированном $y_0\in(-\sqrt[3]{2},0)$ выражение $f(x,y_0)$ как функция от x имеет вид

$$f(x,y_0)=\begin{cases}\frac{\sqrt[3]{4}}{3}, & \text{если } x\in(-2,y_0^3);\\ 0, & \text{если } x\notin(-2,y_0^3).\end{cases}$$

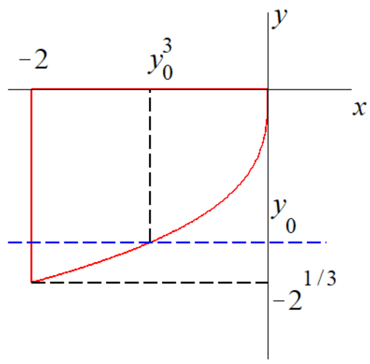

Рис. 2

Поэтому при $y_0\in(-\sqrt[3]{2},0)$ (см. рис. 2)

$$f_\eta(y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y_0)\,dx=\int_{-\infty}^{-2}0\,dx+\int_{-2}^{y_0^3}\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\,dx+\int_{y_0^3}^{\infty}0\,dx=0+\frac{\sqrt[3]{4}}{3}(y_0^3+2)+0=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\left(y_0^3+2\right).$$

Если же $y_0\notin(-\sqrt[3]{2},0)$, то $f(x,y_0)=0$ при всех $x\in(-\infty,\infty)$. Поэтому при $y_0\notin(-\sqrt[3]{2},0)$

$$f_\eta(y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y_0)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}0\,dy=0.$$

Таким образом

$$f_\eta(y) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{4}}{3}(y^3+2), & \text{если } y \in (-\sqrt[3]{2}, 0); \\ 0, & \text{если } y \notin (-\sqrt[3]{2}, 0). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathsf{M}\eta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)\,dy = \int\limits_{-\sqrt[3]{2}}^{0} y\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\left(y_0^3+2\right)\right)dy = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{5},$$

$$\mathsf{M}\left(\eta^2\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2 f_\eta(y)\,dy = \int\limits_{-\sqrt[3]{2}}^{0} y\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\left(y_0^3+2\right)\right)dy = \frac{2\sqrt[3]{4}}{9},$$

$$\mathsf{D}\eta = \mathsf{M}\left(\eta^2\right) - (\mathsf{M}\eta)^2 = \frac{2\sqrt[3]{4}}{9} - \left(-\frac{2\sqrt[3]{2}}{5}\right)^2 = \frac{14\sqrt[3]{4}}{225}.$$

Далее

$$\mathsf{M}(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} xyf(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{\mathbb{R}^2\setminus D} xyf(x,y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} xy\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\,dxdy + \iint\limits_{\mathbb{R}^2\setminus D} xy\cdot 0\,dxdy = \int_{-2}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} xy\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\,dy + 0 = -\int_{-2}^{0}\frac{\sqrt[3]{4}}{6}x\sqrt[3]{x^2}\,dx = \frac{\sqrt[3]{2}}{2},$$

$$\mathsf{cov}(\xi,\eta) = \mathsf{M}(\xi\eta) - \mathsf{M}\xi\mathsf{M}\eta = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - \left(-\frac{8}{7}\right)\left(-\frac{2\sqrt[3]{2}}{5}\right) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{70},$$

$$\rho(\xi,\eta) = \frac{\mathsf{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathsf{D}\xi}\sqrt{\mathsf{D}\eta}} = \frac{\frac{3\sqrt[3]{2}}{70}}{\sqrt{\frac{72}{245}}\sqrt{\frac{14\sqrt[3]{4}}{225}}} = \frac{3\sqrt{35}}{56}.$$

Ответ: $\rho(\xi,\eta) = \frac{3\sqrt{35}}{56}$.