6. Упорядоченные множества. Отношения порядка.

Опр. Множество с заданным на нём отношением порядка называется упорядоченным
Обоз. (A, R)
Пример: $(A, \leq)$
Каждому отношению порядка на множестве A можно сопоставить следующие отношения:

1. Отношение строго порядка: $<$
    - удалить id_A из классического $\leq$
    - $\forall x, y \in A \; x < y \Leftrightarrow x \leq y, x \overline{=} y$
2. Отношение, двойственное классическому порядку: $\geq$
    - $\forall x, y \in A \; x \leq y \Leftrightarrow y \leq x$
3. Отношение, двойственное к строгому порядку: $<$
    - $\forall x, y \in A \; x > y \Leftrightarrow y \leq x, x \overline{=} y$
4. Доминирование: $x <\!\!\!\!\mid \;\; y$ (y доминирует над x)
    - $x <\!\!\!\!\mid \;\; y$ если $x < y$ и $\overline{\exists} z \in A : x < z < y$
    - Не существует элемента, который можно встроить между x и y по отношению строго меньше
    - Доминирование иррефлексивно, антисимметрично и нетранзитивно

Опр. 2 элемента x, y называются сравнимыми по отношению порядка "не больше", если $x \leq y$ или $y \leq x$, иначе - несравнимыми элементами по отношению порядка "не больше"
Опр. Упорядоченное множество $(A, \leq)$, все элементы которого попарно сравнимы, называется линейно упорядоченным, а соответствующее отношение называется линейным порядком

- Линейный порядок на множестве A может быть перенесён на любое непустое подмножество A
- Если порядок на A - линейный, то порядок на $B \subset A$ - тоже линейный

Опр. Любое подмножество попарно несравнимых элементов множества A называется антицепью
Опр. Элемент $a \in (A, \leq)$ называется наибольшим элементом множества A, если $\forall x \in A \; x \leq a$
Опр. Элемент $b \in (A, \leq)$ называется максимальным элементом множества A, если $\forall x \in A \; x \leq b$ или x и a несравнимы
Теорема. Наибольший (наименьший) элемент упорядоченного множества, если он существует, является единственным
Доказательство. Пусть $(A, \leq)$. Предположим, что в нём 2 максимальных элемента a_1, a_2. Тогда $\forall x \in A \; x \leq a_1, x \leq a_2$
Так как $a_1, a_2 \in A$, то $a_1 \leq a_2$ и $a_2 \leq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow$ наибольший элемент единственный ■
Опр. Пусть $(A, \leq), B \subset A$. Элемент $a \in A$ называется верхней (нижней) гранью множества B, если $\forall x \in B \; x \leq a \; (x \geq a)$
Опр. Наименьший элемент множества всех верхних граней множества B называется точной верхней гранью множества B
Обоз. $\sup B$ - supremum
Опр. Наибольший элемент множества всех нижних граней множества B называется точной нижней гранью множества B
Обоз. $\inf B$ - infinum

Теорема. Всякое ограниченное сверху непустое множество имеет верхнюю грань, а всякое ограниченное снизу непустое множество имеет нижнюю грань
Опр. $(A, \leq)$ называется вполне упорядоченным, если любое его непустое подмножество имеет

наименьший элемент
Если есть $(A, \leq)$ и есть свойство, доказанное для этого порядка, то это свойство будет справедливо для двойственного порядка, если:

1. заменить $\leq$ на $\geq$ и наоборот
2. максимальный элемент заменить минимальным
3. $\inf$ заменить на $\sup$ и наоборот

Конечное упорядоченное множество малой мощности удобно показать с помощью диаграммы Хассе

$\{x_i\}, i \in \mathbb{N}$ - последовательность элементов
Опр. Последовательность элементов $(A, \leq)$ $\{x_i\}, i \in \mathbb{N}$ называется неубывающей, если $\forall i \in \mathbb{N}\ x_i \leq x_{i+1}$
Опр. Элемент $x \in (A, \leq)$ называется точной верхней гранью последовательности $\{x_i\}$, если он является точной верхней гранью множества всех членов последовательности.
Опр. Упорядоченное множество $(A, \leq)$ называется индуктивным, если:

1. оно содержит наименьший элемент
2. всякая неубывающая последовательность $\{x_i\}$ элементов этого множества имеет точную верхнюю грань

Опр. Пусть имеется 2 индуктивных упорядоченных множества $(A_1, \leq)$ и $(A_2, \preceq)$. Отображение $f: A_1 \to A_2$ называется непрерывным, если для любой неубывающей последовательности элементов множества A_1: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ образ её точной верхней грани равен точной верхней грани последовбtельности $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots$

$$f(\sup\{a_n\}) = \sup\{f(a_n)\}$$

Опр. Отображение $f: A_1 \to A_2$ называется монотонным, если $\forall a, b \in A_1 \quad a \leq b: f(a) \preceq f(b)$
Теорема. Всякое непрерывное отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое является монотонным
Опр. Элемент $a \in (A, \leq)$ называется неподвижной точкой отображения $f: A \to A$, если $f(a) = a$

> **Теорема о неподвижной точке**.
> Любое непрерывное отображение $f: A \to A$ индуктивного упорядоченного множества A в себя имеет наименьшую неподвижную точку

Уравнение $f(x) = x$ имеет решение $x_0 \in A \quad x_0 = f(x_0)$
Множество всех решений уравнения образует множество всех неподвижных точек и оно имеет наименьший элемент.

> *Пример:*
> Множество $(A, \leq)$: $A = [0, 1]$ - индуктивно
> Отображение: $f: A \to A$
> $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$
> $x_0 = f(x_0)$, $x_0 = 0$
> $f^0(0) \overline{=} 0$
> $f^1(0) = \frac{1}{4}$
> $f^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$
> $f^3\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{16}$
> $f^4\left(\frac{7}{16}\right) = \frac{15}{32}$
> $0 \leq \frac{1}{4} \leq \frac{3}{8} \leq \frac{7}{16} \leq \frac{15}{32}$
> Путём бесконечного числа итераций получается неубывающая последовательность
>
> $$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} = x_{\textit{наим}}$$

> $x_{наим} = f(x_{наим})$
> $\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ - верно
> Наименьшая неподвижная точка - $\frac{1}{2}$