Теория множеств

ИУ6-25Б

2024

Наивная(канторовская) теория множеств

"Множество - многое, мыслимое нами как единое целое."
— Георг Кантор

1. Множества - $A, B, \dots, F_1, G_{10}$
2. $a \in A$ - элемент a принадлежит множеству A
3. $A = B$ - $(\forall x \in A : x \in B)$
4. Порядок элементов в множестве несущественен
5. Элементы не могут повторяться

Способы задания множества:

1. Множество задаётся набором элементов:

   $A = \{1, 2, a, c\}, B = \{a, b, c, d\}, C = \{a_1, \dots, a_n\}$
2. Множество формируется из элементов другого множества:

   $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ and } \sqrt{x^2+1} < 3\}$, где $P(x)$ - предикат (условие)

   $B = \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{N}\right\}$
3. Множество формируется их элементов этого же множества:

   $F = \{f(i) : f(0) = 1, f(1) = 1, f(i) = f(i-1) + f(i-2), i = 2, 3 \dots\}$

Опр. Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется конечным, из бесконечно числа элементов - бесконечным.

Опр. Множество, не содержащее элементов, называется пустым множеством ($\varnothing$).

Опр. Множество, состоящее из элементов, образующих все возможные множества данной задачи или класса задач, называется универсальным: U

Опр. Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент B является элементом A.

Обоз. $B \subseteq A$ - нестрогое включение ("A включает B"или "B содержится в A")

По опр.:

- $\varnothing \subseteq A$
- $A \subseteq U$
- $(A = B) \iff (A \subseteq B$ и $B \subseteq A)$
- $B \subseteq A, A \neq B \Rightarrow B \subset A$ - строгое включение, B - собственное подмножество A

Опр. Булеан - множество всех подмножеств A

Обоз. $2^A, 2^{2^A} \dots$

Свойства включения множеств:

1. $A \subseteq A$
2. $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

$|A|$ - мощность множества A по Кантору
$|A| = |B| = n = const$
$|A| = |B| \not\Rightarrow A = B$
$|A| < \infty$ - конечное множество
$|A| = \infty$ - бесконечное множество
Если A - бесконечное множество, то оно равномощно некоторому подмножеству.
Множество, у которого отсутствует равномощное ему собственное подмножество, называется конечным.
Теорема. Множество, имеющее бесконечное подмножество, само бесконечно.
Следствие. Все подмножества конечного множества конечны.
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cup B \cup C|$
$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + \dots + |A_n| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$

Прямое(декартово) произведение множеств

$a \in A, b \in B$
$\{a, b\} = \{b, a\}$ - неупорядоченная пара
$(a, b) \neq (a, b)$ - упорядоченная пара
$A_1, A_2, \dots, A_n$
$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ - кортеж
Опр. Множество всех кортежей длины n на множествах $A_1, .., A_n$ называется прямым (декартовым) произведением этих множеств.
Обоз. $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, .., x_n) : x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\}$
Если $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, то $A \times A \times \dots \times A = A^n$ - n-степень множества A

- $n = 2 : A^2$ - декартов квадрат
- $n = 1 : A^1 = A$

$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$
$A \times B \neq B \times A$
Пример:

- $A = \{a_1, a_2\}$
- $B = \{b_1, b_2, b_3\}$
- $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$
- $B \times A = \{(b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_2, a_1), (b_2, a_2), (b_3, a_1), (b_3, a_2)\}$

$|A \times B| = |A||B|$
$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1||A_2| \dots |A_n|$

Геометрический смысл

$A = [a_1, a_2], B = [b_1, b_2]$ - отрезки
Геометрический смысл прямого (декартова) произведения заключается в том, что $A \times B$ - множество координат всех точек заштрихованного прямоугольника таких, что абсциссы $\in A$ и ординаты $\in B$
$|A^n| = |A|^n$
Свойства декартова произведения:

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$

Доказываются методом включений

Отображения бинарноых отношений

Обычно используются буквы $f, g, h \dots$ как для функций.

Опр. Отображение $f : A \to B$ из множества A в множество B задано, если каждому элементу $x \in A$ соответствует элемент $y \in B$.

Обоз. $f : A \to B$

Опр. y называется образом элемента x при отображении f $(y = f(x))$.

Каждое отображение задаёт множество упорядоченных пар таких, что

$$\{(x, y) : x \in A, y = f(x)\} \subseteq A \times B$$

Когда для отображения f могут существовать несколько различных элементов из A, имеющих один и тот же образ y_0 , такие элементы x называют **прообразами** элемента y_0 при отображении f.

$\{x_1, x_2, x_2\} \subset A$

$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = y_0$

Пример:

- $y = \cos x \qquad 0 \le y_0 \le 1$
- $\{x : x = \arccos y \pm 2\pi n, n \in \mathbb{N}\}$

Опр. Областью значения отображения f называется множество всех конечных элементов $y \in B$, для которых найдётся $x \in A : y = f(x)$.

1. Отображение $f : A \to B$ называется инъективным (инъекция), если для каждого y из области значения отображения f существует единственный прообраз.

   $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$

   $(y_1 = y_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)$

2. Отображение $f : A \to B$ называется сюръективным (сюръекция), если область значений отображения f полностью совпадает с множеством B.

3. Отображение $f : A \to B$ называется биективным (биекция), если оно одновременно инъективно и сюръективно.

   Пример: $y = \operatorname{arctg} x$ - биекция на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

Примечание: Смещение каждой точки окружности при повороте на угол вокруг центра есть биекция точек окружности на саму себя - автоморфизм.

Обобщение понятия отображения:

1. Если образ $y \in B$ определён не для каждого $x \in A$, имеет место частичное отображение.

2. Если отображение неоднозначное (некоторым элементам $x \in A$ соответствует не по одному элементу $y \in B$, то есть несколько образов), то имеет место соответствие множества A множеству B.

$\rho \subseteq A \times B$ - задание соответствия из A в B

$\rho = \varnothing$ - частный случай

$\rho = A \times B$ - универсальное соответствие

$a, b : a \in A, b \in B$

$(a, b) \in \rho$ - упорядоченная пара входит в соответствие ρ

$Def(\rho)$ - область определения соответствия ρ, множество всех первых компонентов упорядоченных пар, составляющих соответствие ρ

$Def(\rho) = \{x : (\exists y \in B), (x, y) \in \rho\}$

$Res(\rho)$ - область значений соответствия ρ, множество всех вторых компонентов упорядоченных пар, составляющих соответствие ρ

$Res(\rho) = \{y : (\exists x \in A), (x, y) \in \rho\}$

Опр. Сечением соответствия ρ по элементу $x_0 \in A$ называется множество $\rho(x_0)$ из вторых компонентов пар соответствия ρ таких, что первым компонентом является x_0

Обоз. $\rho(x_0) = \{y : (x_0, y) \in \rho\}$

Опр. Сечением соответствия ρ по множеству $E \subseteq A$ называется множество всех вторых компонентов пар соответствия ρ таких, что первый компонент входит в множество E

Обоз. $\rho(E) = \{y : (x, y) \in \rho, x \in E\}$

Опр. Обратным соответствием $\rho^{-1} \subseteq B \times A$ называется соответствие, определяемое как множество пар (y, x) таких, что $(x, y) \in \rho$

Обоз. $\rho^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \rho\}$

$(\rho^{-1})^{-1} = \rho$

- Если задано отображение $f : A \to B$, то оно является соответствием
- Обратное ему отображение $f^{-1} : B \to A$ в общем случае соответствием не является

Бинарные отношения

Опр. $R \subseteq A \times A$ или $R \subseteq A^2$ - бинарное отношение на множестве A

Пример:

- $x, y \in \mathbb{N}$
- $x \leq y$ - инфиксная запись отображения
- $(x, y) \in$ "$\leq$ имя бинарного отношения
- В общем виде: xRy или $(x, y) \in R$

Опр. Если R - бинарное отношение, то обратное ему соответствие есть бинарное отношение R^{-1} на том же множестве A

Опр. Бинарное отношение R, в каждой паре которого компоненты совпадают, равномощное множеству A называется диагональю множества A

Обоз. id_A

Диагональ является отображением

Способы задания бинарных отношений:

1. Перечисление пар:
   - $A = \{a_1, a_2, a_3\}$
   - $R = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), (_1, a_3)\}$
2. Таблица: (число столбцов равно $Def(R)$)

$R(Def(R))$	a_1	a_2
$R(Res(R))$	$\{a_1, a_2, a_3\}$	$\{a_3\}$

3. Матрица бинарного отношения: (квадратная порядка $n = |A|$, $r_{ij} = 1$ $(a_i, a_j) \in R$):

	a_1	a_2	a_3
a_1	1	1	1
a_2			1
a_3			

4. Задание двудольным графом

Способы задания соответствия:

$\rho \subseteq A \times B$

1. Перечисление пар:
   - $A = \{a_1, a_2, a_3\}$
   - $B = \{b_1, b_2\}$
   - $\rho = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_3, b_2)\}$
2. Таблица:

$Def(\rho)$	a_1	a_2	a_3
$\rho(Res(\rho))$	$\{b_1, b_2\}$	$\{b_2\}$	$\{b_2\}$

3. Матрица (сетка) $m \times n$, где $n = |A|, m = |B|, \rho_{ij} = 1$ $(a_i, a_j) \in \rho$:

	b_1	b_2
a_1	1	1
a_2		1
a_3		1

4. Двудольный граф

Свойства бинарных отношений

Пусть дано множество $A,\ |A| = n,\ R \subseteq A^2$

1. Рефлексивность:
   - **Опр.** Отношение R называется **рефлексивным**, если $\forall x \in A : xRx$, то есть $(x, x) \in R$ или $id_A \in R$

     Все элементы на главной диагонали матрицы такого отношения равны 1.
   - **Опр.** Если id_A полностью отсутствует в R, то такое отношение называется **иррефлексивным** (**антирефлексивным**)
   - **Опр.** Если часть элементов элементов id_A присутствует в R, а часть нет, то такое отношение называется **нерефлексивным**
   - *Пример:*

     - рефлексивное отношение

     "$\neq$ иррефлексивное отношение
2. Симметричность:
   - **Опр.** Отношение R называется **симметричным**, если $(x, y) \in R : (y, x) \in R$ $(xRy \Rightarrow yRx,$ $R = R^{-1})$
   - Матрица такого отношения симметрична относительно главной диагонали.
   - **Опр.** Если хотя бы для одной пары условие симметричности ен выполняется, то такое отношение называется **несимметричным**
3. Антисимметричность:
   - Более жёсткое требование, чем несимметричность
   - **Опр.** Отношение R называется **антисимметричным**, если $(xRy$ и $yRx) \Rightarrow x = y$
   - Не конфликтует с рефлексивностью
4. Транзитивность:
   - **Опр.** Отношение R называется **транзитивным**, если $\forall x, y, z \in A$ $(xRy$ и $yRz) \Rightarrow xRz$
   - **Опр.** Если хотя бы для одного набора $x, y, z \in A$ $(xRy$ и $yRz) \not\Rightarrow xRz$, такое отношение называется **нетранзитивным**
5. Плотность:
   - **Опр.** Отношение R называется плотным, если $\forall x, y \in A : xRy\ \exists z \in A : xRz$ и zRy
   - Для любых различных элементов множества R можно указать третий элемент из R, который "встраивается"между первыми двумя

Классы бинарных отношений

Отношение\Свойства	Иррефл-ть	Рефл-ть	Сим-ть	Антиссим-ть	Транз-ть
Эквивалентность		+	+		+
Толерантность		+	+		
Порядок (частичный порядок)		+		+	+
Пред(варительный) порядок(квазипорядок)		+			+
Строгий порядок	+			+	+
Строгий предпорядок	+				+

Отношение эквивалентности

Пусть A - некоторое множество

Опр. Семейство попарно не пересекающихся множеств $C : i = \overline{1, n}$ называется разбиением множества A, если их объединение даёт A

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = A$$

Пример:

1. $A = \{1, 2, 7, 8, 12, 15\}$, $C_1 = \{1, 2, 12, 15\}$, $C_2 = \{7, 8\}$

   $A = C_1 \cup C_2$

   $C_1 \cap C_2 = \varnothing$

2. $A = [1, 5]$

3. $C_1 = [1, 5), C_2 = [2, 3.5), C_3 = [3.5, 5]$

Пусть R - отношение эквивалентности на множестве A и $x \in A$

Опр. Классом эквивалентности $[x]_R$ по отношению R называется множество всех вторых компонентов пар отношения R, у которых первым компонентом является x $[x]_R = \{y \in A : xRy\}$ - сечение эквивалентности по x

Так как R - эквивалентность и она рефлексивна, то класс эквивалентности всегда не пустой: $[x]_R \neq \varnothing$ $\forall x \in A\ xRx$, то есть $id_A \in R$

Пример: множество всех прямых на плоскости, параллельных данной

Теорема. Для любого отношения эквивалентности на множестве A множество классов эквивалентности образует разбиение множества A

Следствие: Любое разбиение множества задаёт на нём отношение эквивалентности, для которого классы разбиения образуют....

То есть любая эквивалентность определяет единственное разбиение множества и наоборот

Опр. Множество всех классов эквивалентности по данному отношению R называется фактор-множеством множества A по отношению R

Обоз. A/R

Пример:

- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $[a]_R = \{a, b\} = c_1$
- $[b]_R = \{a, b\}$
- $[c]_R = \{c\} = c_2$
- $[d]_R = \{d, e\} = c_3$
- $[e]_R = \{d, e\}$
- $A = c_1 \cup c_2 \cup c_3$
- $A/R = \{c_1, c_2, c_3\}$

Существует связь между понятиями эквивалентности, разбиения и отображения. $\forall R \subseteq A^2$ можно задать отображение множества A в его фактор-множество A/R

Если считать $x \in A, f(x) = [x]_R$, то получим, что каждому элементу $x \in A$ отображение f сопоставляет единственный класс эквивалентности, содержащий этот элемент. Заметим, что отображение f - сюръективное.

Любое отображение однозначно определяет некоторое отношение эквивалентности.

Теорема. Пусть f - произвольное отображение, отношение R на множестве A, для которого $(x, y) \in R$ возможно тогда и только тогда, когда $f(x) = f(y)$, является отношение эквивалентности. Причём существует биекция фактор-множества A/R на множество $f(A)$ $(A/R \leftrightarrow f(A))$

Из теоремы **не следует**, что между f и R существует взаимно однозначное соответствие, два разных отображения могут задавать одно и то же разбиение множества A

- $f_1 : A \to B_1$
- $f_2 : A \to B_2$

Упорядоченные множества. Отношения порядка.

Опр. Множество с заданным на нём отношением порядка называется упорядоченным
Обоз. (A, R)
Пример: $(A, \leq)$
Каждому отношению порядка на множестве A можно сопоставить следующие отношения:

1. Отношение строго порядка: $<$
    - удалить id_A из классического $\leq$
    - $\forall x, y \in A\ x < y \Leftrightarrow x \leq y, x \neq y$
2. Отношение, двойственное классическому порядку: $\geq$

    $\forall x, y \in A\ x \leq y \Leftrightarrow y \leq x$
3. Отношение, двойственное к строгому порядку: $<$

    $\forall x, y \in A\ x > y \Leftrightarrow y \leq x, x \neq y$
4. Доминирование: $x \lessdot\ y$ (y доминирует над x)
    - $x \lessdot\ y$ если $x < y$ и $\nexists z \in A : x < z < y$
    - Не существует элемента, который можно встроить между x и y по отношению строго меньше
    - Доминирование иррефлексивно, антисимметрично и нетранзитивно

Опр. 2 элемента x, y называются сравнимыми по отношению порядка "не больше если $x \leq y$ или $y \leq x$, иначе - несравнимыми элементами по отношению порядка "не больше"
Опр. Упорядоченное множество $(A, \leq)$, все элементы которого попарно сравнимы, называется линейно упорядоченным, а соответствующее отношение называется линейным порядком

- Линейный порядок на множестве A может быть перенесён на любое непустое подмножество A
- Если порядок на A - линейный, то порядок на $B \subset A$ - тоже линейный

Опр. Любое подмножество попарно несравнимых элементов множества A называется антицепью
Опр. Элемент $a \in (A, \leq)$ называется наибольшим элементом множества A, если $\forall x \in A\ x \leq a$
Опр. Элемент $b \in (A, \leq)$ называется максимальным элементом множества A, если $\forall x \in A\ x \leq b$ или x и a несравнимы
Теорема. Наибольший (наименьший) элемент упорядоченного множества, если он существует, является единственным
Доказательство.
Пусть $(A, \leq)$. Предположим, что в нём 2 максимальных элемента a_1, a_2. Тогда $\forall x \in A\ x \leq a_1, x \leq a_2$
Так как $a_1, a_2 \in A$, то $a_1 \leq a_2$ и $a_2 \leq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow$ наибольший элемент единственный ■
Опр. Пусть $(A, \leq), B \subset A$. Элемент $a \in A$ называется верхней (нижней) гранью множества B, если $\forall x \in B\ x \leq a$ $(x \geq a)$
Опр. Наименьший элемент множества всех верхних граней множества B называется точной верхней гранью множества B
Обоз. $\sup B$ - supremum
Опр. Наибольший элемент множества всех нижних граней множества B называется точной нижней гранью множества B
Обоз. $\inf B$ - infinum
Теорема. Всякое ограниченное сверху непустое множество имеет верхнюю грань, а всякое ограниченное снизу непустое множество имеет нижнюю грань
Опр. $(A, \leq)$ называется вполне упорядоченным, если любое его непустое подмножество имеет наименьший элемент
Если есть $(A, \leq)$ и есть свойство, доказанное для этого порядка, то это свойство будет справедливо для двойственного порядка, если:

1. заменить $\leq$ на $\geq$ и наоборот
2. максимальный элемент заменить минимальным
3. inf заменить на sup и наоборот

Конечное упорядоченное множество малой мощности удобно показать с помощью диаграммы Хассе

$\{x_i\}, i \in \mathbb{N}$ - последовательность элементов

Опр. Последовательность элементов $(A, \leq)$ $\{x_i\}, i \in \mathbb{N}$ называется неубывающей, если $\forall i \in \mathbb{N}$ $x_i \leq x_{i+1}$

Опр. Элемент $x \in (A, \leq)$ называется точной верхней гранью последовательности $\{x_i\}$, если он является точной верхней гранью множества всех членов последовательности.

Опр. Упорядоченное множество $(A, \leq)$ называется индуктивным, если:

1. оно содержит наименьший элемент
2. всякая неубывающая последовательность $\{x_i\}$ элементов этого множества имеет точную верхнюю грань

Опр. Пусть имеется 2 индуктивных упорядоченных множества $(A_1, \leq)$ и $(A_2, \preceq)$. Отображение $f : A_1 \to A_2$ называется непрерывным, если для любой неубывающей последовательности элементов множества A_1: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ образ её точной верхней грани равен точной верхней грани последовтельности $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n), \ldots$

$$f(\sup\{a_n\}) = \sup\{f(a_n)\}$$

Опр. Отображение $f : A_1 \to A_2$ называется монотонным, если $\forall a, b \in A_1 \quad a \leq b : f(a) \preceq f(b)$

Теорема. Всякое непрерывное отображение одного индуктивного упорядоченного множества в другое является монотонным

Опр. Элемент $a \in (A, \leq)$ называется неподвижной точкой отображения $f : A \to A$, если $f(a) = a$

Теорема о неподвижной точке.

Любое непрерывное отображение $f : A \to A$ индуктивного упорядоченного множества A в себя имеет наименьшую неподвижную точку

Уравнение $f(x) = x$ имеет решение $x_0 \in A \quad x_0 = f(x_0)$

Множество всех решений уравнения образует множество всех неподвижных точек и оно имеет наименьший элемент.

Пример:

Множество $(A, \leq)$: $A = [0, 1]$ - индуктивно

Отображение: $f : A \to A$

$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

$x_0 = f(x_0)$, $x_0 = 0$

$f^0(0) \neq 0$

$f^1(0) = \frac{1}{4}$

$f^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$

$f^3\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{16}$

$f^4\left(\frac{7}{16}\right) = \frac{15}{32}$

$0 \leq \frac{1}{4} \leq \frac{3}{8} \leq \frac{7}{16} \leq \frac{15}{32}$

Путём бесконечного числа итераций получается неубывающая последовательность

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} = x$$

$x = f(x)$

$\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ - верно

Наименьшая неподвижная точка - $\frac{1}{2}$

Мощность множеств

Опр. Множество A называется равномощным множеству B, если существует биекция $f : A \leftrightarrow B$
Обоз. $A \sim B$

- Из равномощности A и B следует, что $\exists f^{-1} : B \leftrightarrow A$
- Из определения равномощности и свойств биекции следует, что $A \sim A$
- Равномощность рефлексивна, симметрична и транзитивна, то есть относится к классу эквивалентности
- Равномощность - это не то же самое, что равенство множеств
- Если обозначить класс эквивалентности $|A|$ по отношению равномощности, то получим мощность множества A

Опр. Мощность множества A - класс эквивалентности по отношению равномощности

- Если $|A| = |B|$, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, и $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, то $m = n$
- Если множество конечно, оно не будет равномощно ни одному своему собственному подмножеству

Теорема. Если A - некоторое множество и имеет место инъекция из A в A, то она является сюръекцией и биекцией.

На примере счётных множеств:
Опр. Любое множество, равномощное множеству $\mathbb{N}$ называется счётным
Опр. Биекцию множества M с множеством $\mathbb{N}$ называют нумерацией: $\varphi : M \leftrightarrow \mathbb{N}$
$|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{C}$ - континуум
$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ - алеф-нуль

Сравнение мощностей бесконечных множеств.

Опр. Даны множества A и B, считается, что $|A| \leq |B|$, если A равномощно некоторому подмножеству B
$|A| \leq |B| \wedge |A| \geq |B| \implies A \sim B$
Опр. $|A| < |B|$, если $|A| \neq |B|$ и $\exists C \subset B : A \sim C$
Сравнение мощностей транзитивно: $|A| < |B| \wedge |B| < |C| \implies |A| < |C|$

Свойства счётных множеств (теоремы)

1. Любое бесконечное множество содержит счётное подмножество
2. В любом бесконечном множестве можно выделить 2 не пересекающихся счётных подмножества
3. Любое подмножество счётного множества конечно или счётно
4. Объединение любого конечного или счётного семейства счётных множеств является счётным
5. Объединение конечного и счётного множества счётно
6. Следующие множества равномощны:
   (a) $[0, 1] \in \mathbb{R}$
   (b) $(0, 1) \in \mathbb{R}$
   (c) $[a, b] \in \mathbb{R}$
   (d) $(a, b) \in \mathbb{R}$
   (e) $\mathbb{R}$
   (f) $2^{\mathbb{N}}$
7. Теорема о квадрате. Для произвольного множества A верно, что $|A| \sim |A^2|$
8. Теорема Кантора-Бернштейна. Для любых множеств A и B верно одно из трёх:
   1) $|A| < |B|$

2) $|A| > |B|$
3) $|A| = |B|$

9. Для любого множества A верно неравенство: $|2^{\mathbb{N}}| > |A|$

   Для каждого множества существует множество большей мощности - булеан.

10. Следствие из теоремы о квадрате. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.

    - Любое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{a}{b}$ или пары взаимно простых чисел (a, b)
    - Тогда $\mathbb{Q} \sim$ некоторому подмножеству $\mathbb{Z}^2$
    - Согласно теореме о квадрате $\mathbb{Z} \sim \mathbb{Z}^2$
    - Так как $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}^2$ счётны, а любое подмножество счётного множества конечно или счётно, то $\mathbb{Q}$ - счётно.