

Commande Par Mode Glissant

Introduction

- Début des années 60 \Rightarrow besoin de robustesse en aéronautique
- Découverte même avant l'utilisation du **terme robustesse** : Les ingénieurs automaticiens cherchaient des lois de commande insensibles aux variations dans le système à commander
- La commande par mode glissant est relativement simple à implémenter (par rapport à d'autres approches de commande)

- Elle fait partie des commandes dites à structure variable (VSS)
- Elle s'applique à la fois aux systèmes linéaires et aux systèmes non linéaires
- Robuste par rapport aux perturbations externes
- Robuste aussi par rapport aux incertitudes/variations des paramètres, etc...
- Différentes applications : Régulation, poursuite de trajectoires, poursuite de modèle, observateurs, etc...

- La commande par mode glissant est une suite logique de la commande discontinue (dans sa forme la plus facile : commande la commande « bang-bang »)

Exemple Introductif

On considère le système mécanique suivant (masse-ressort-amortisseur) :

m : La masse

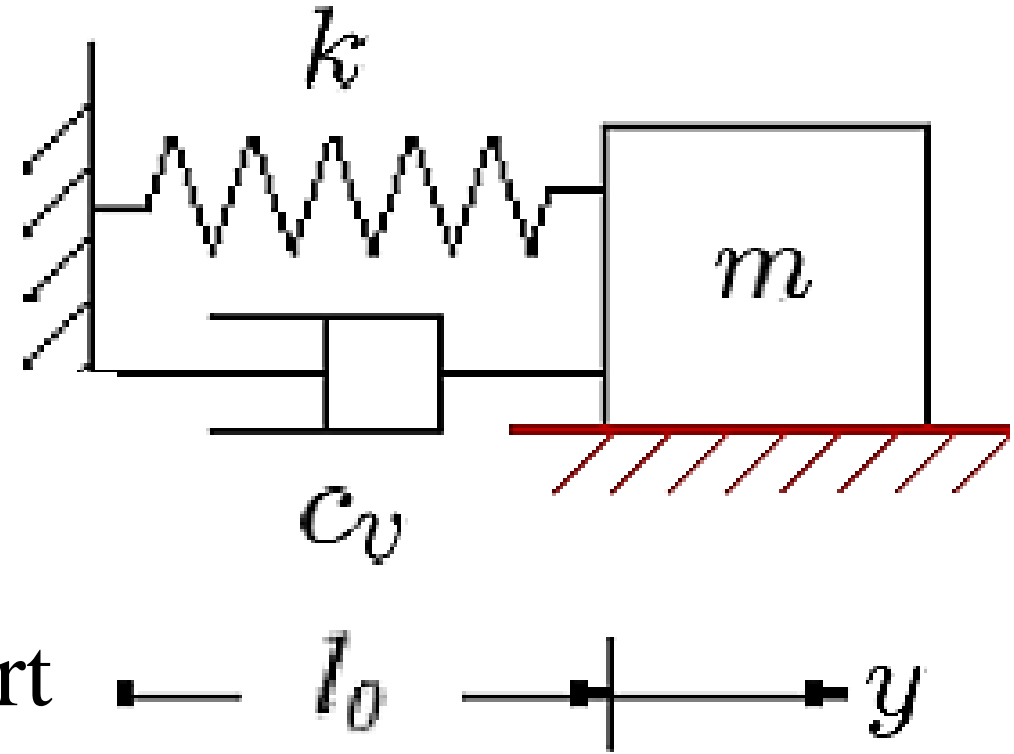
y : La position de la masse

k : Le coefficient de raideur du ressort

C_v : Le coefficient d'amortissement

F : la force appliquée sur la masse

l_0 : la longueur du ressort



→ La dynamique de ce système s'écrit :

$$m\ddot{y} + C_v\dot{y} + ky = F$$

On souhaite faire converger y vers y_d avec la force F . Pour cela on considère la loi de commande extérieure suivante :

$$m\ddot{y}_d + C_v\dot{y}_d + ky_d = F$$

On remplace cette loi de commande extérieure F dans la dynamique du système, on obtient :

$$m(\ddot{y} - \ddot{y}_d) + C_v(\dot{y} - \dot{y}_d) + k(y - y_d) = 0$$

Si l'on introduit les erreurs de position, de vitesse et d'accélération comme :

$$\mathbf{e} = (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d), \quad \dot{\mathbf{e}} = (\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_d), \quad \ddot{\mathbf{e}} = (\ddot{\mathbf{y}} - \ddot{\mathbf{y}}_d)$$

La dynamique de l'erreur en boucle fermée peut s'écrire :

$$m \ddot{\mathbf{e}} + c_v \dot{\mathbf{e}} + k \mathbf{e} = 0$$

$$\ddot{\mathbf{e}} + \frac{c_v}{m} \dot{\mathbf{e}} + \frac{k}{m} \mathbf{e} = 0$$

Cette équation peut s'écrire dans l'espace d'état en prenant $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}$ comme sortie de position et $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{x}}$ erreur de vitesse,

on aura les équations
d'état comme suite :

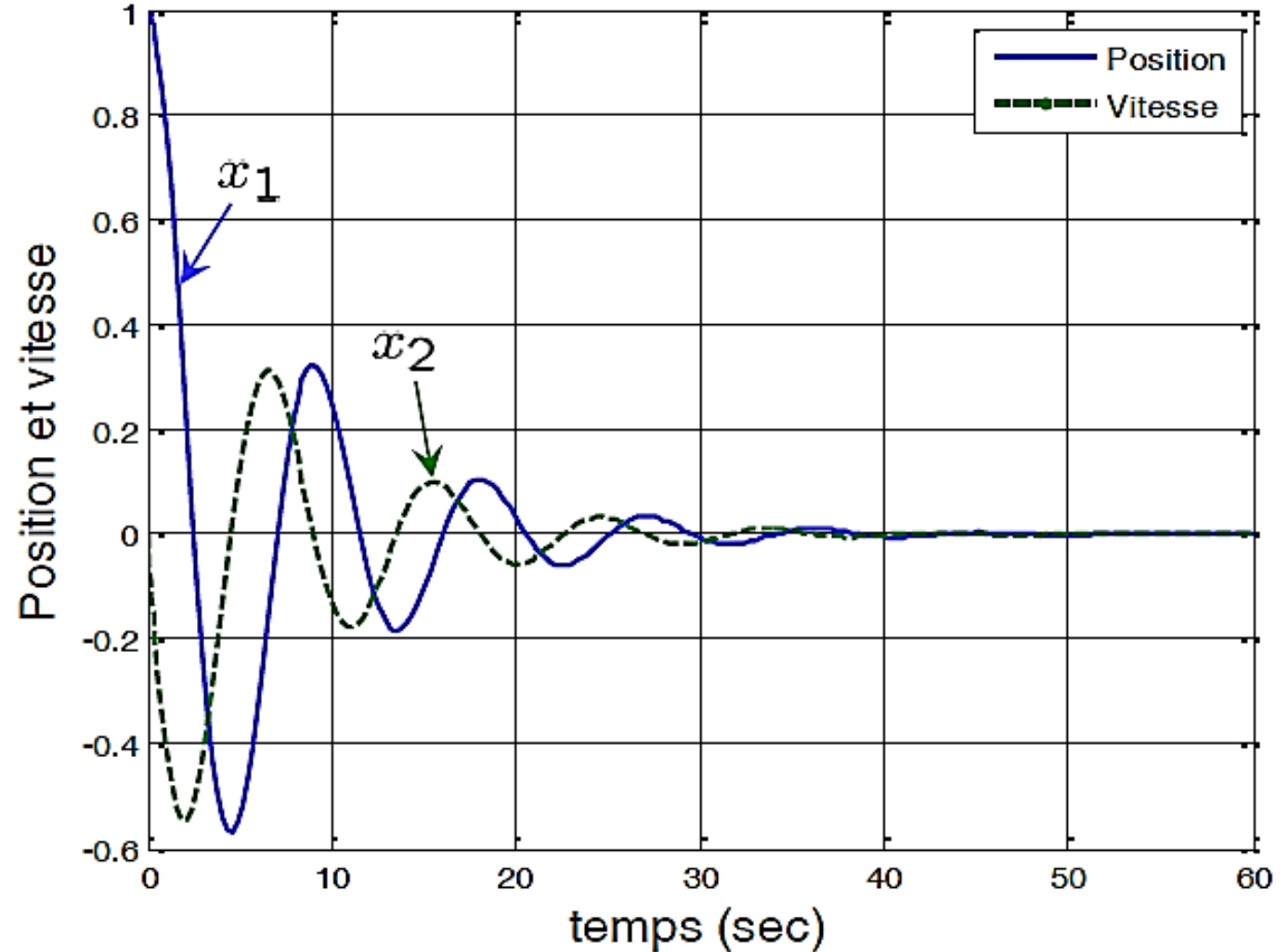
$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{e} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c_v}{m}x_2 \end{cases}$$

C'est un système linéaire autonome dont le comportement dépend des états $x_1(0)$, $x_2(0)$ et des paramètres m, c_v, k .

➤ Simulation par Matlab-Simulink du système en boucle fermée pour $m = 2, k = 1, c_v = 0.5$

➤ Pour ce choix de paramètres le système devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{e} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{e} = -0.5x_1 - 0.25x_2 \end{cases}$$



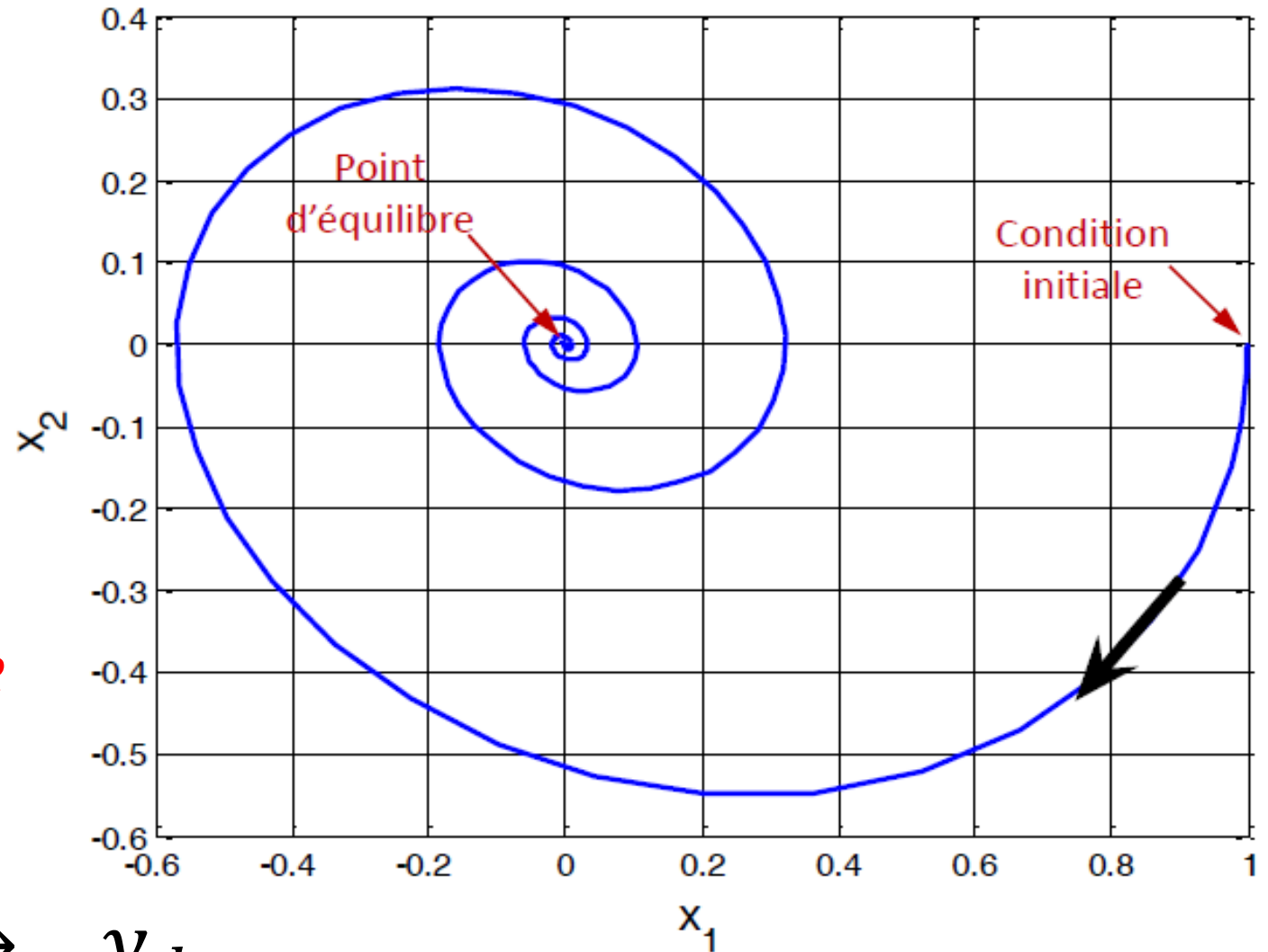
Le plan de phase :

Si on trace le plan de phase du système en boucle-fermée on obtient :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow 0 \end{cases} \text{ *point d'équilibre* }$$



$$\begin{cases} y - y_d \rightarrow 0 \\ \dot{y} - \dot{y}_d \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \rightarrow y_d \\ \dot{y} \rightarrow \dot{y}_d \end{cases}$$



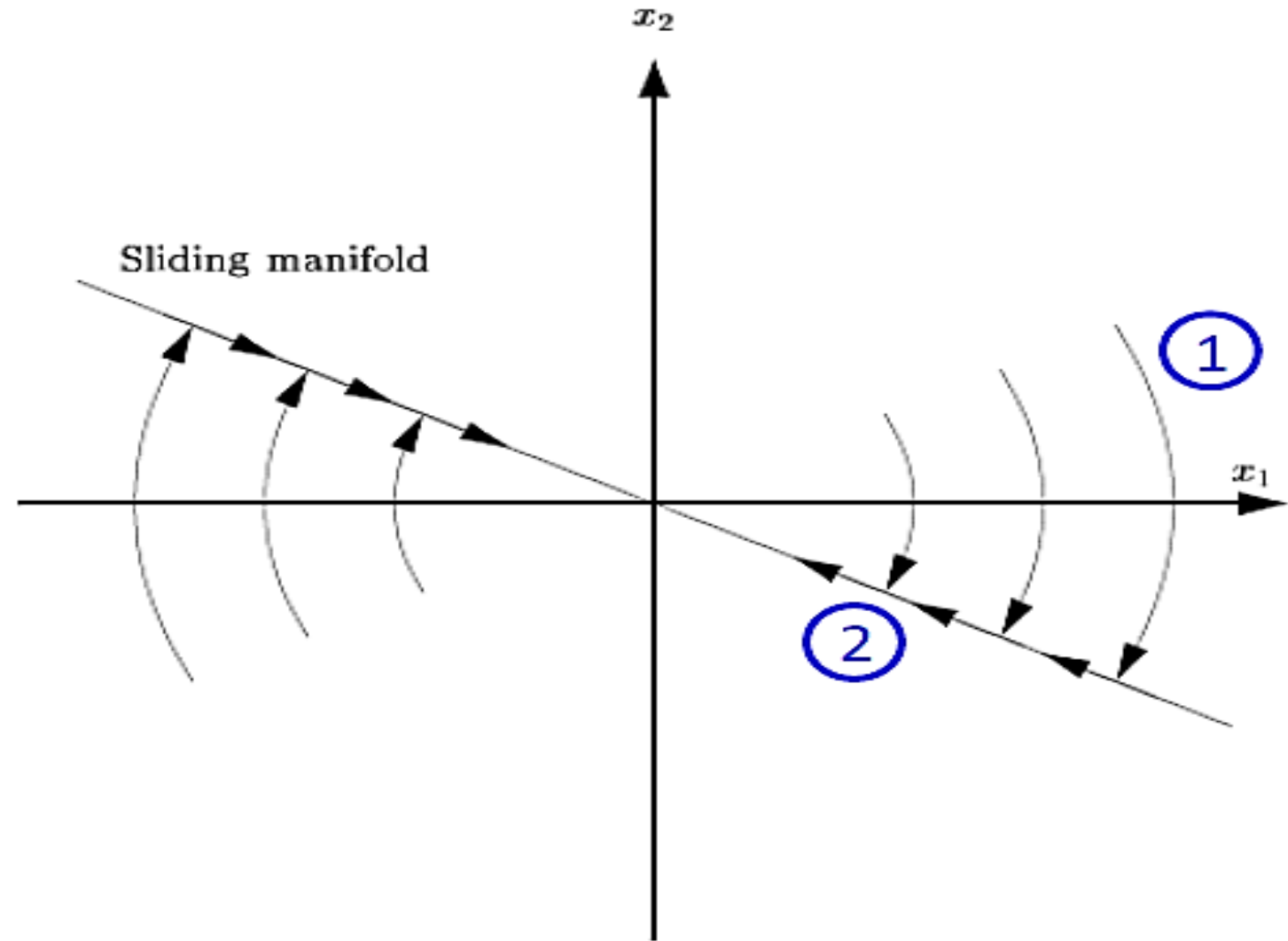
Résultats : La commande proposée amène le système au point souhaité mais la convergence est très lente !

Idée de base de la commande par mode de glissant :

- L'idée de base sur le plan de phase de la figure ci-dessous de la commande consiste en deux étapes :
 - 1- Convergence vers la surface de glissement ($S = 0$)
 - 2- Converger sur la surface de glissement ($S = 0$) vers le point d'équilibre désiré en (2)

①-Amener le système sur un **hyperplan de commutation** stable convergent (surface de glissement) en (1),

②- Converger sur la **surface de glissement** ($S = 0$) vers le point d'équilibre désiré en (2)



Cas Général de la Dynamique du Système à Commander

On considère le cas général d'un système non linéaire dont la dynamique est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u \end{cases}$$

Avec $f(x)$, $g(x)$ deux fonctions non linéaires, avec $g(x) \geq g_0 > 0$

L'objectif de la commande est la stabilisation du système autour du point d'équilibre :

$$x_d = (x_{1d}, x_{2d}) = (0, 0)$$

Dans la suite l'approche de commande sera détaillée en se basant sur ce modèle non linéaire,

Néanmoins, elle reste valide pour les systèmes linéaires dont la dynamique s'écrit :

$$\dot{x} = A x + B u$$

1. La dynamique de glissement :

- On sait que la dynamique de x_1 est stable pour :

$$x_2 = -\alpha x_1, \quad \alpha > 0$$

Soit la variété :

$$S = x_2 + \alpha x_1 ; \quad \alpha > 0 .$$

Donc si $\dot{x}_1 = x_2 = -\alpha x_1 + s$, alors :

-La dynamique x_1 est stable si $S = 0$, la variété S est une surface appelée « *surface de commutation* » ou « *surface de glissement* ».

sur la surface de glissement définie par $S = 0$,
 x_1 est stable, donc x_1 converge vers 0, le déplacement est gouverné par l'équation $\dot{x}_1 = -\alpha x_1$

La vitesse de convergence dépend de la valeur α , donc sur cette surface $x_2 = -\alpha x_1$ implique x_2 converge vers 0. L'évolution sur cette surface de glissement est indépendante de $f(x)$, $g(x)$, si au départ, le point initial n'est pas sur la surface de glissement, il faudra amener le système sur cette surface.

1. Dynamique de convergence vers la surface de glissement

On a la dynamique de convergence régit par l'équation dans la variété : $S = x_2 + \alpha x_1 ; \quad \alpha > 0$

ce qui donne $\dot{S} = \dot{x}_2 + \alpha \dot{x}_1 = f(x) + g(x)u + \alpha x_2$

pour évaluer la stabilité de cette équation, on utilise la stabilité de Lyapunov qui consiste à choisir une fonction de Lyapunov candidate : $V(s) = \frac{1}{2} S^2$.

- Stabilité asymptotique si : $\begin{cases} V \text{ est définie positive} \\ \dot{V} \text{ est définie négative} \end{cases}$

- Étant donné que : $V(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, et $V(\mathbf{S}) > \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{S} \neq \mathbf{0}$, donc $V(\mathbf{s})$ est définie positive.

Calculons maintenant sa première dérivée

$$\dot{V}(S) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} \frac{ds}{dt} = S\dot{S} = S[f(x) + g(x)u + \alpha x_2]$$

La loi de commande :

De la dérivée de la fonction de Lyapunov :

$$\dot{V}(S) = S [f(x) + g(x)u + \alpha x_2]$$

$\dot{V}(S)$ est définie négative si :

$$[f(x) + g(x)u + \alpha x_2] \text{ est : } \begin{cases} < 0 & \text{pour } S > 0 \\ = 0 & \text{pour } S = 0 \\ > 0 & \text{pour } S < 0 \end{cases}$$

- ***La commande équivalente*** :

$$\text{Soit : } f(x) + g(x)u + \alpha x_2 = 0 \Rightarrow u = -\frac{f(x) + \alpha x_2}{g(x)} = \beta(x)$$

- La loi équivalente est définie par : $u_e = \beta(x)$

$\dot{V}(S) = S[f(x) + g(x)u + \alpha x_2]$ est **définie négative** si

$$: \begin{cases} u < \beta(x) & \text{pour } S > 0 \\ u = \beta(x) & \text{pour } S = 0 \\ u > \beta(x) & \text{pour } S < 0 \end{cases}$$

Question : Pour quel choix de u ceci est vérifié ? Cela est vérifié pour le choix de la commande suivante de u :

$$u = \beta(x) - K \operatorname{sign}(S), \quad K > 0$$

Avec la fonction

$$\operatorname{sign}(S) = \begin{cases} 1, & S > 0 \\ 0, & S = 0 \\ -1, & S < 0 \end{cases}$$

Pour ce choix on a :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= S[f(x) + g(x)u + \alpha x_2] \\ &= S[f(x) + \alpha x_2] + S[g(x)\beta(x) - K \operatorname{sign}(S)] \\ &= S[f(x) + \alpha x_2] + S[\beta(x) - K g(x) \operatorname{sign}(S)] \\ &= S[f(x) + \alpha x_2] + S[-f(x) - \alpha x_2 - K g(x) \operatorname{sign}(S)]\end{aligned}$$

$$\dot{V}(x) = -K g(x) S \operatorname{sign}(S)$$

$$\dot{V}(x) = -K g(x) |S| \Rightarrow \dot{V} \text{ est définie négative,}$$

puisque $g(x) \geq g_0 > 0$

La commande discontinue :

La commande discontinue est le 2^{ème} terme de l'expression de u , c.à.d. $-K \text{sign}(S)$.

La commande globale :

La commande proposée comporte deux termes ,
Le premier correspond à une commande continue et le deuxième correspond à une commande discontinue

$$u = \beta(x) - K \text{sign}(x)$$

←
**Commande équivalente
continue**

→
Commande discontinue

Exemple : Prenons le même exemple précédent

$$m\ddot{y} + C_v\dot{y} + ky = F = u$$

On désire faire converger y vers y_d avec la commande externe F , Qu'on peut mettre sous la forme générale :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x) + g(x)u \end{cases}$$

Choix des variables d'état :

$$x_1 = y \quad \text{est la la sortie} \quad \text{et} \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c_v}{m}x_2 + \frac{1}{m}F \end{cases}$$

D'où $f(x) = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c_v}{m}x_2$ et $g(x) = \frac{1}{m}$, $u = F$

En prenant $m = 2, k = 1, c_v = 0.5, \alpha = 2$

- La loi de commande par MG s'écrira donc :

$$u = \beta(x) - K \operatorname{sign}(x), \quad K > 0$$

Avec

$$\beta(x) = -\frac{f(x) + \alpha x_2}{g(x)} = -3.5 x_2 + x_1$$

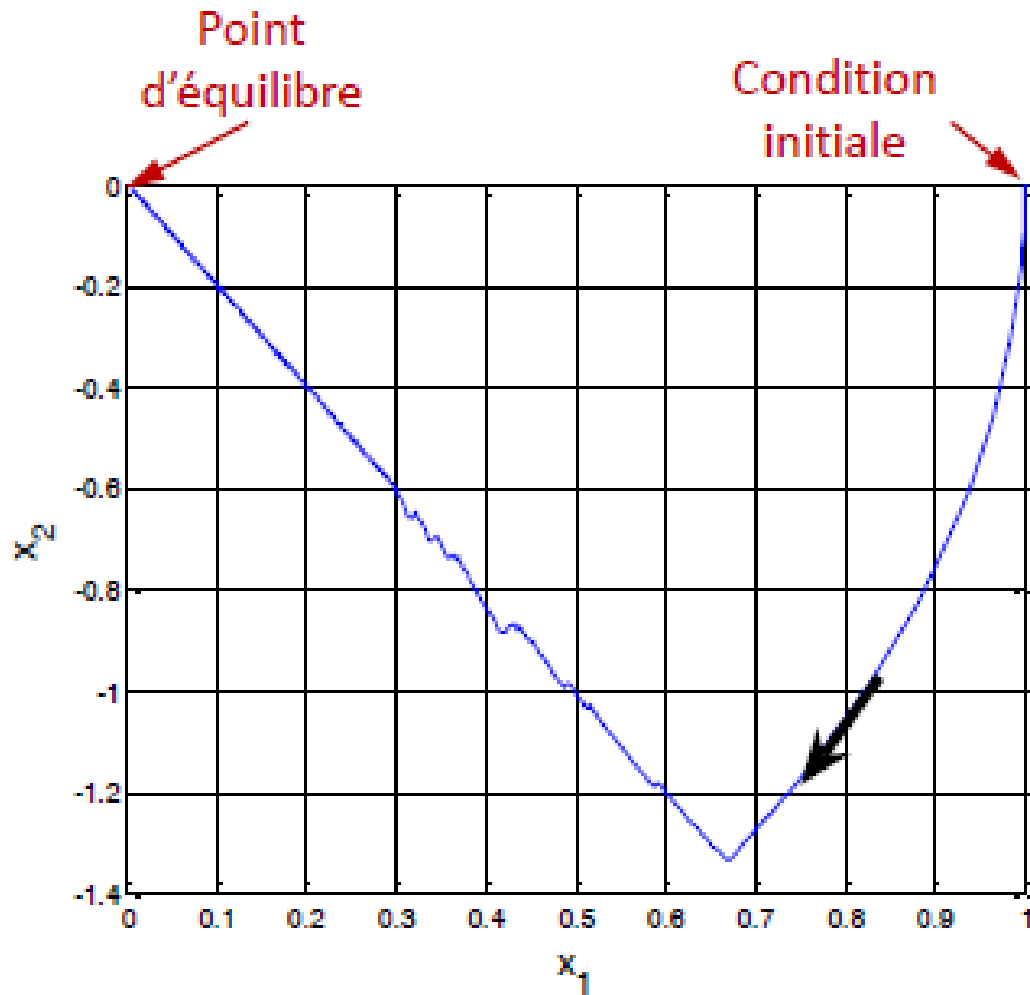
- Si on considère le choix suivant des paramètres de la commande, $\alpha = 2$, on obtient :

$$u = -3.5 x_2 + x_1 - 5\textit{sign}(S)$$

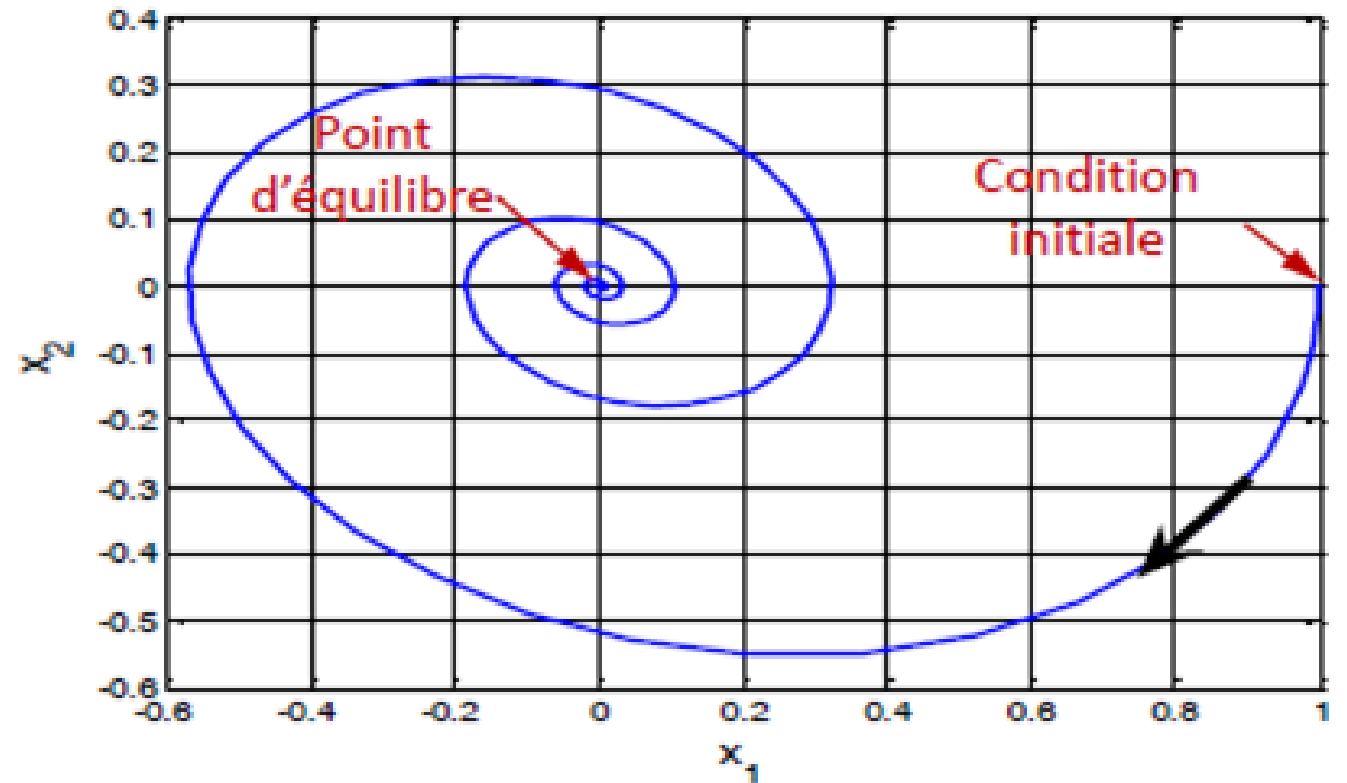
- Si on considère, dans un premier lieu, uniquement la commande discontinue

$$u = -5\textit{sign}(S)$$

Évolution dans le plan de phase du système en B.F

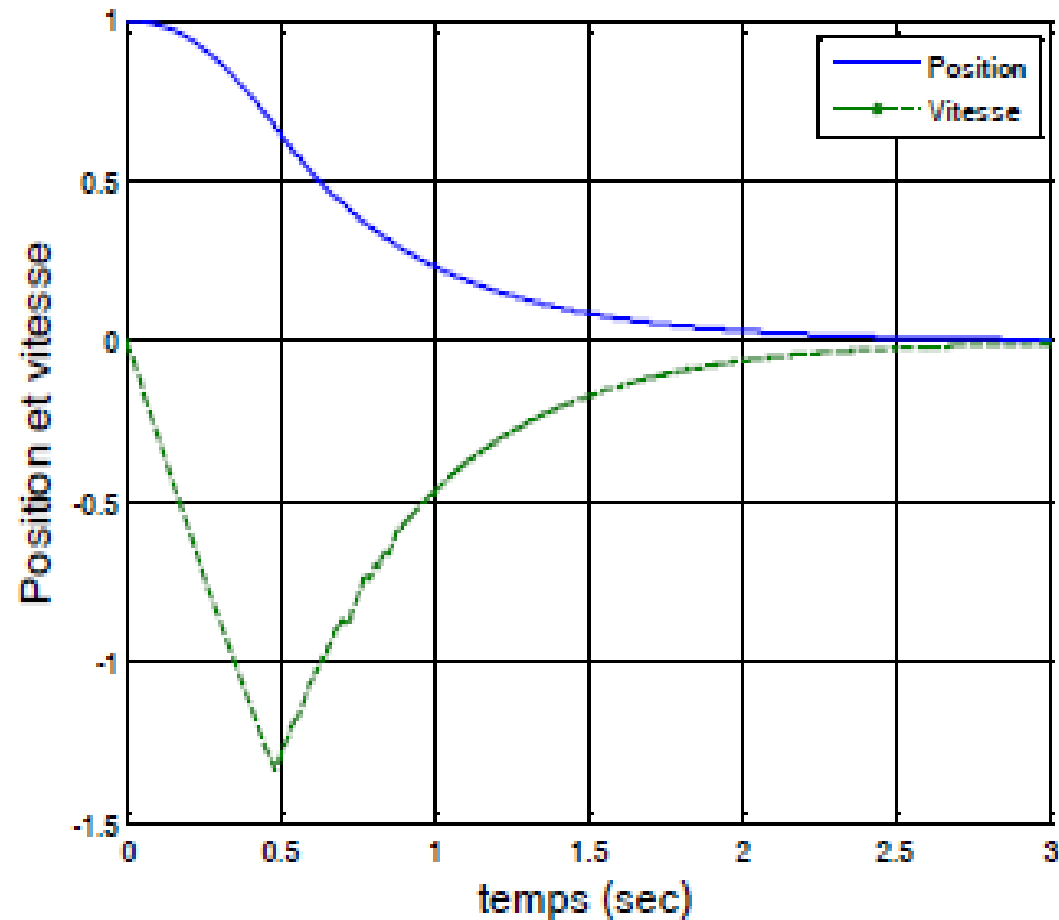


Commande par mode glissant (discontinue)

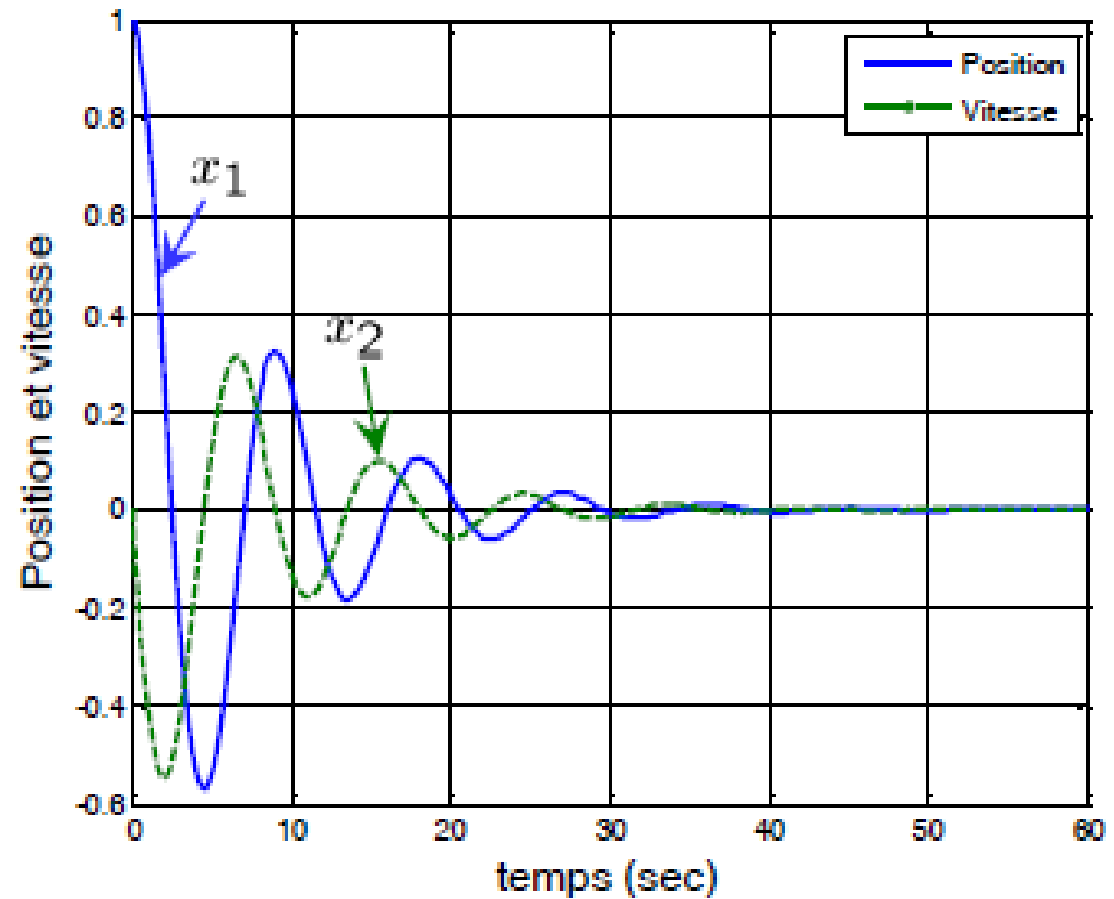


Commande anticipative précédente ('Feedforward')

Évolution temporelle des états du système en B.F

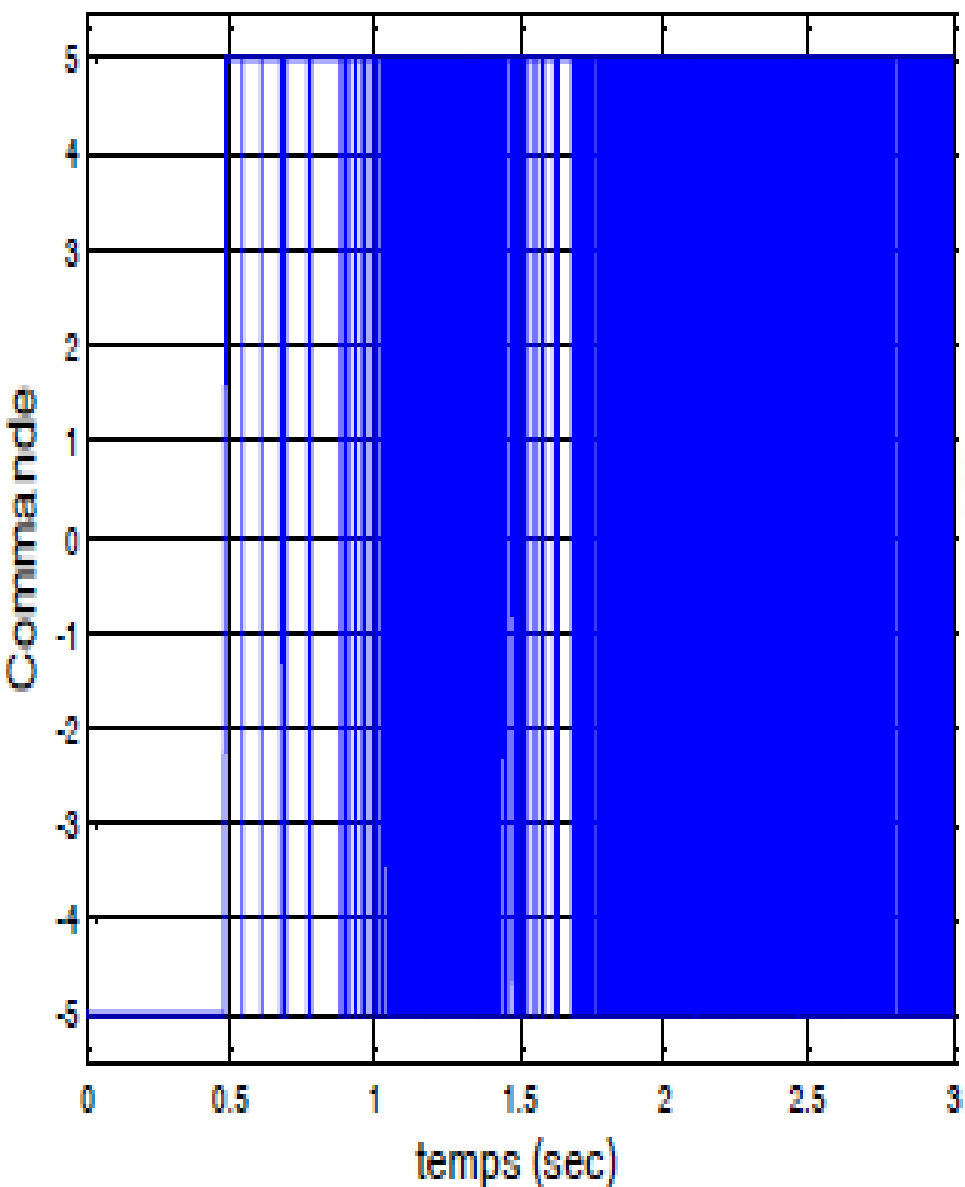


Commande par mode glissant (discontinue)

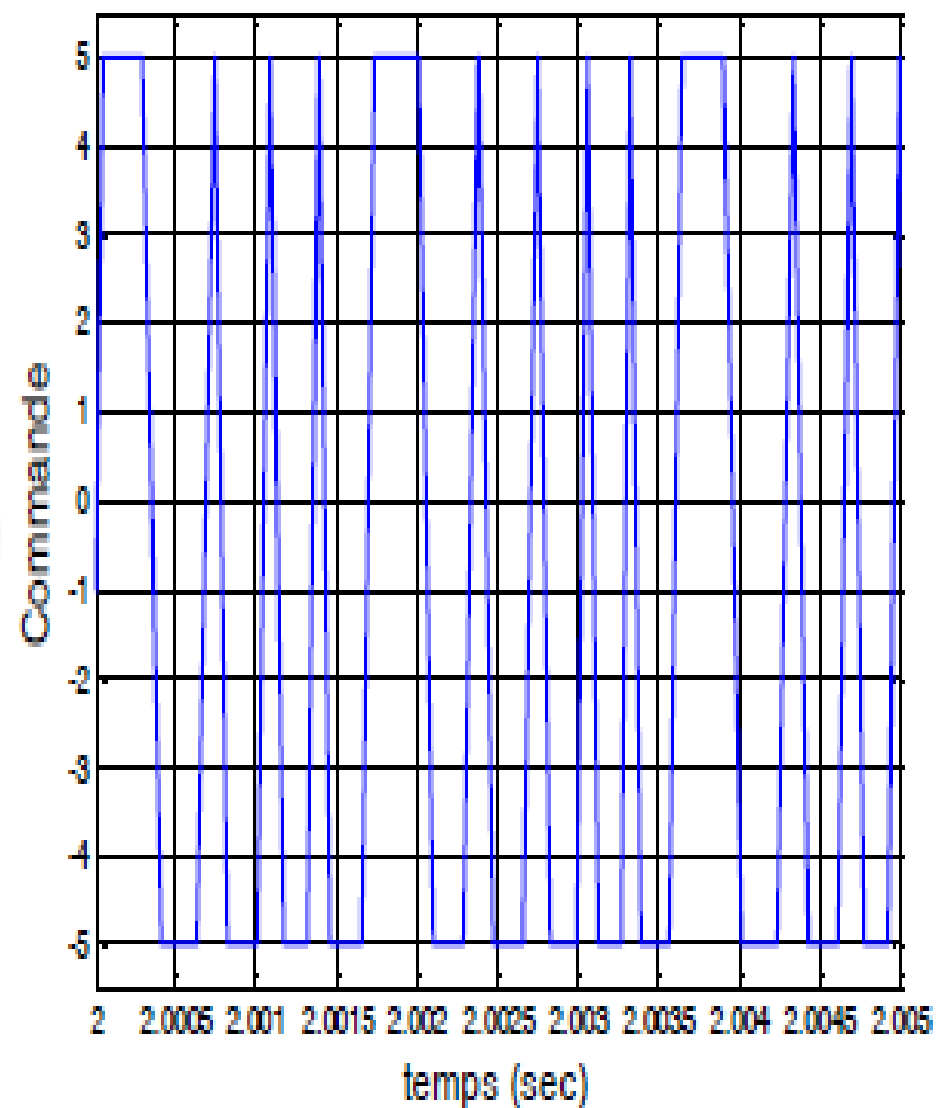
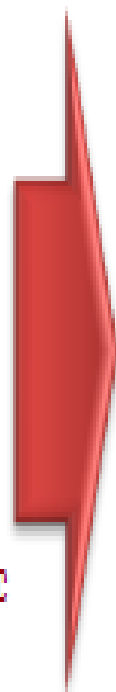


Commande anticipative précédente ('Feedforward')

Évolution de l'entrée de commande



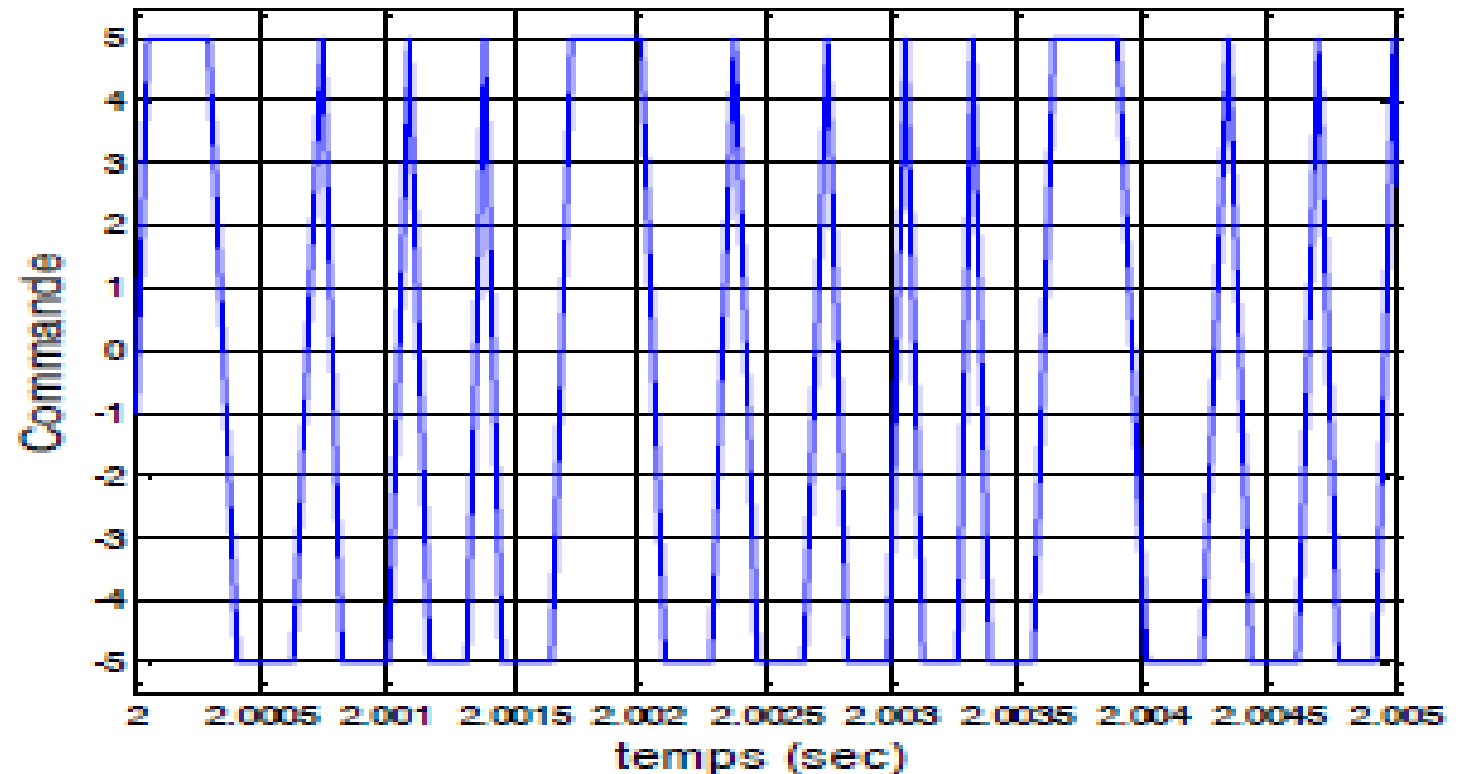
Autour de 2 sec



Si on fait un zoom sur la commande autour de $t = 2s$, on obtient :

- Un mode glissant idéal n'existe pas étant donné qu'il nécessite une commande qui commute avec une fréquence infinie.
- Dans un cas réel la commutation se fait pendant un temps de commutation + la constante de temps des actionneurs \Rightarrow

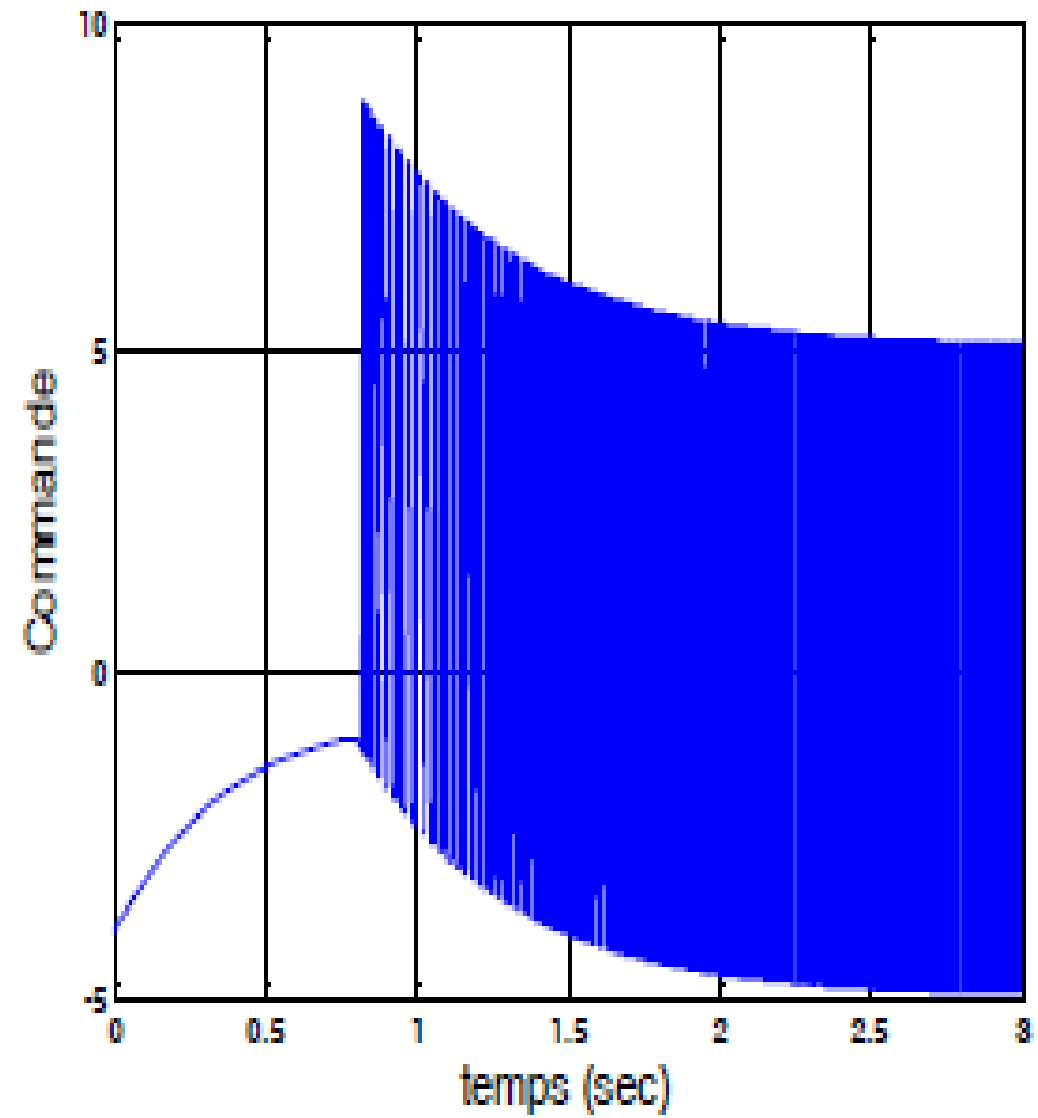
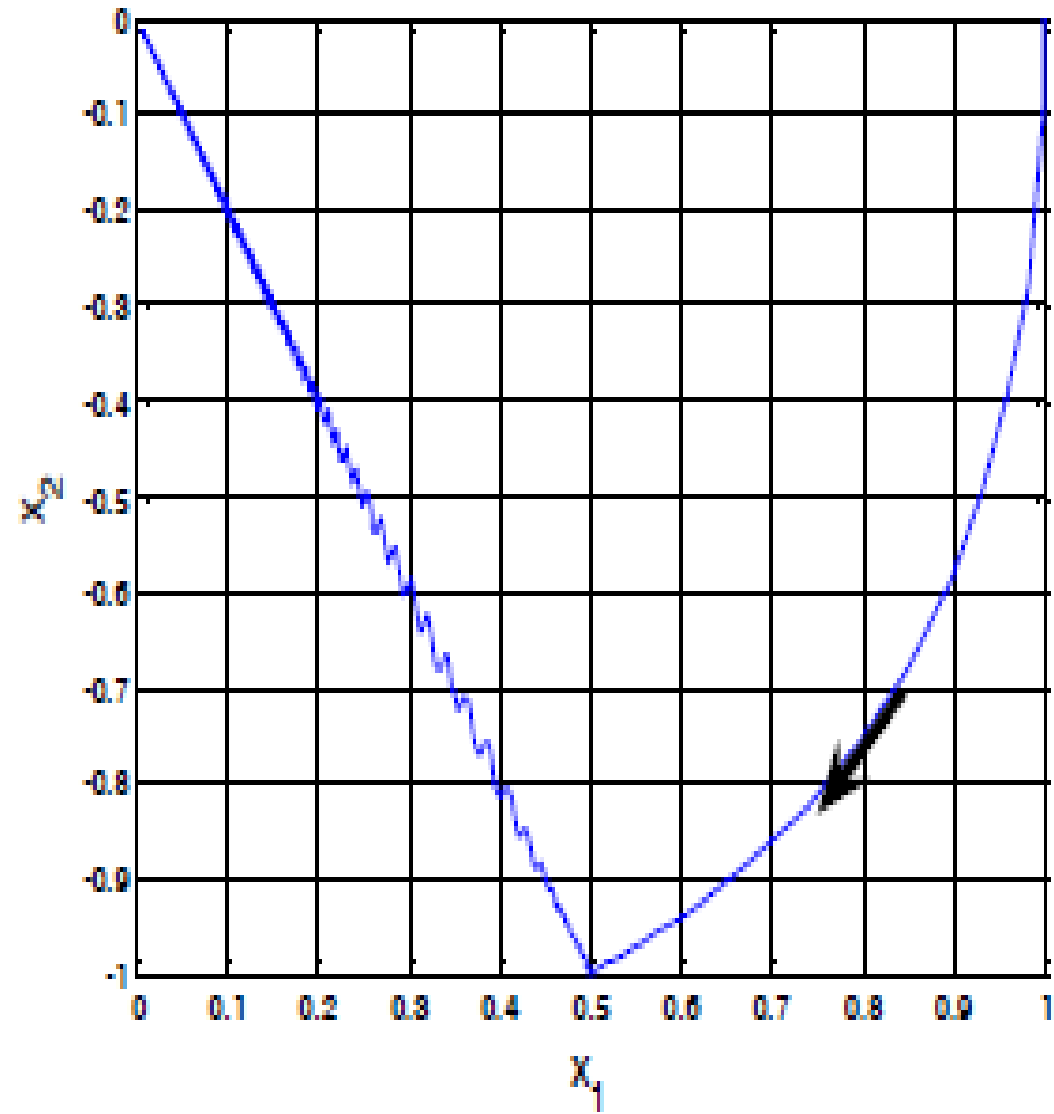
- La discontinuité dans le commande produit un comportement dynamique particulier (cf. figure ci-dessus) autours de la surface de glissement, appelé **phénomène de réticence** (*'Chattering' en anglais*)



Exemple : On retourne à notre exemple précédent pour appliquer **la commande globale** par MG :

$$u = -3.5 x_2 + x_1 - 5\textit{sign}(S)$$

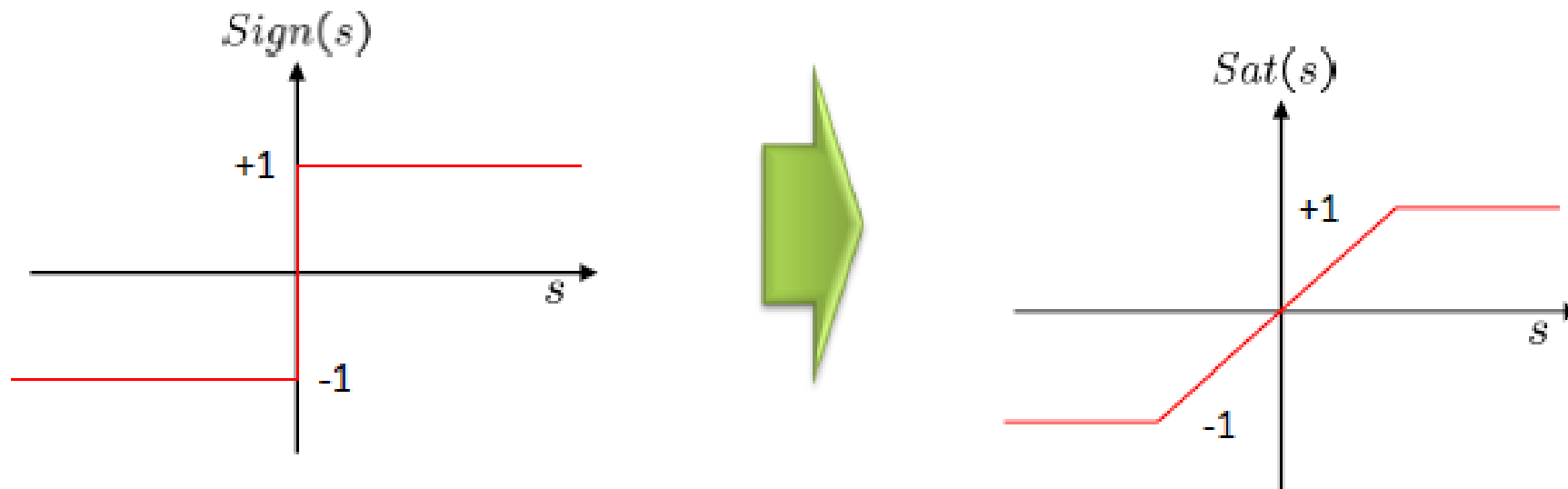
Il y a toujours le phénomène de réticence. C'est un problème de la commande par mode glissant. Ce problème peut endommager les actionneurs. Quelle solution peut-on envisager ?



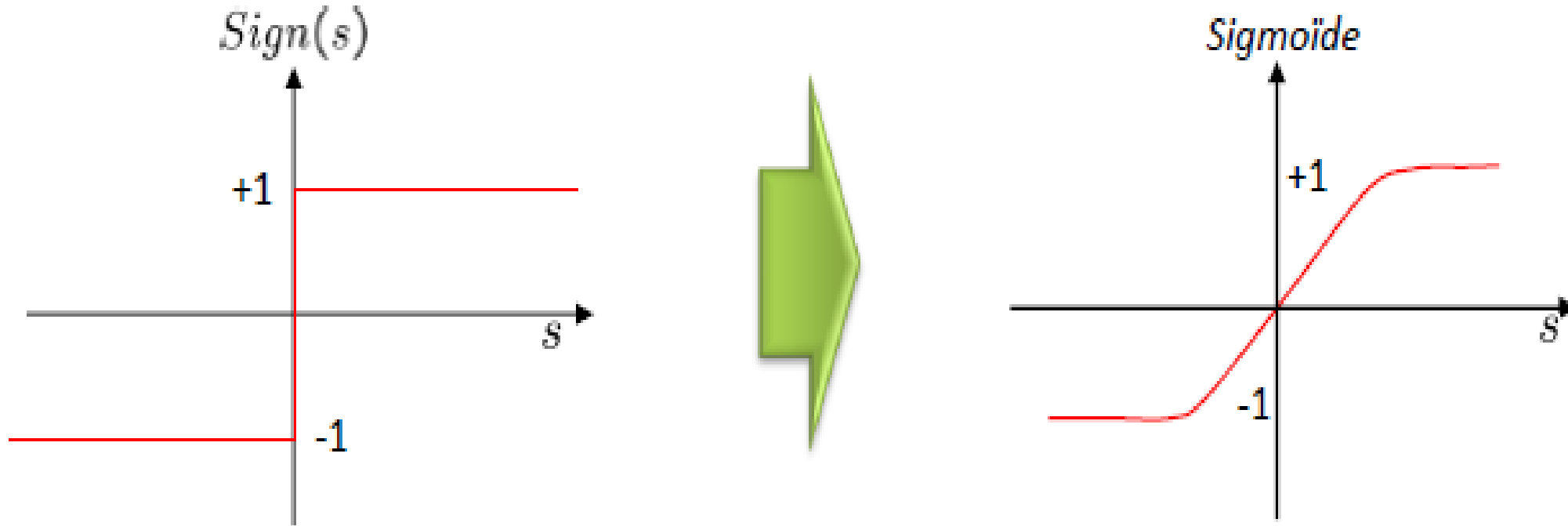
Solution du problème de réticence

Afin d'éviter le problème de réticence différentes solutions peuvent être envisagées

Solution 1 : remplacer la fonction *Sign* par un signal de *saturation* :



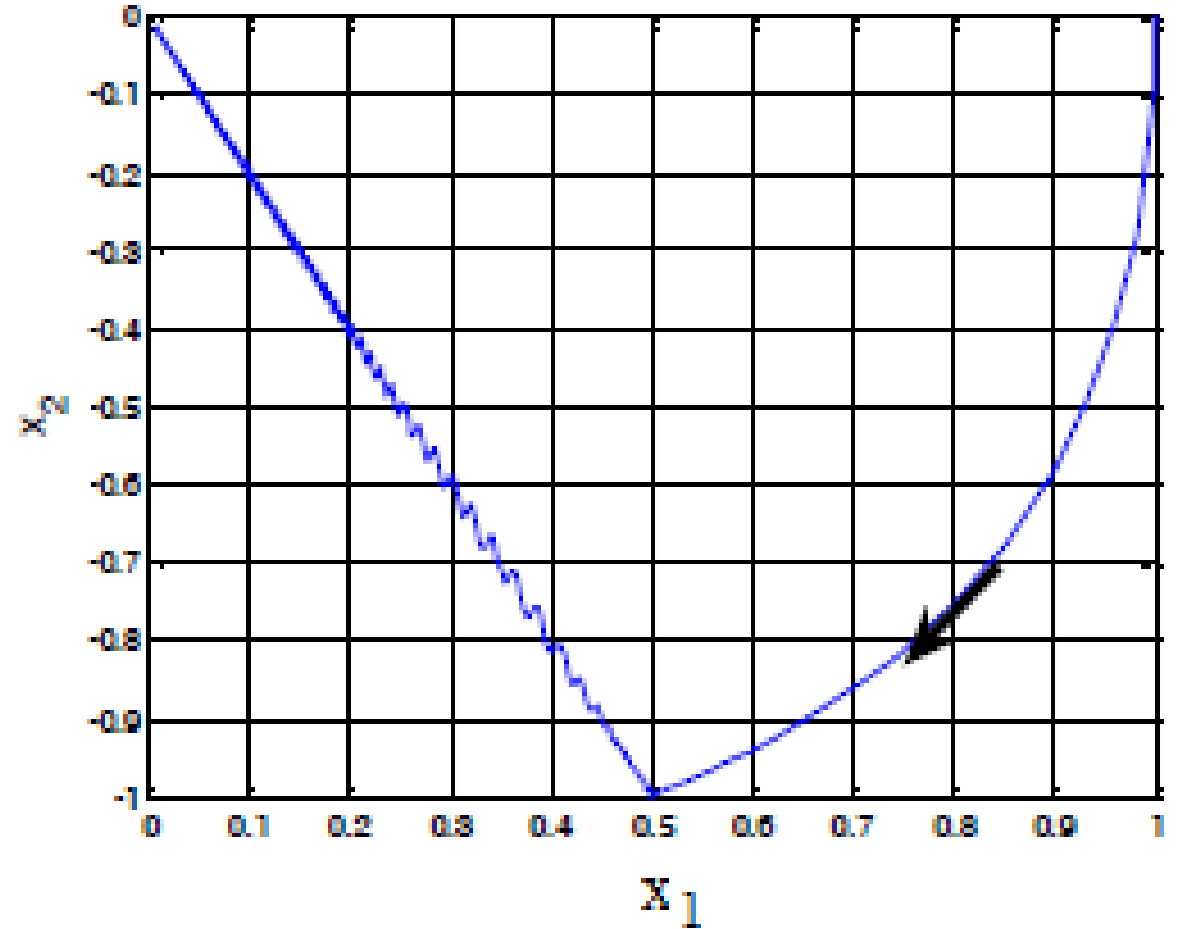
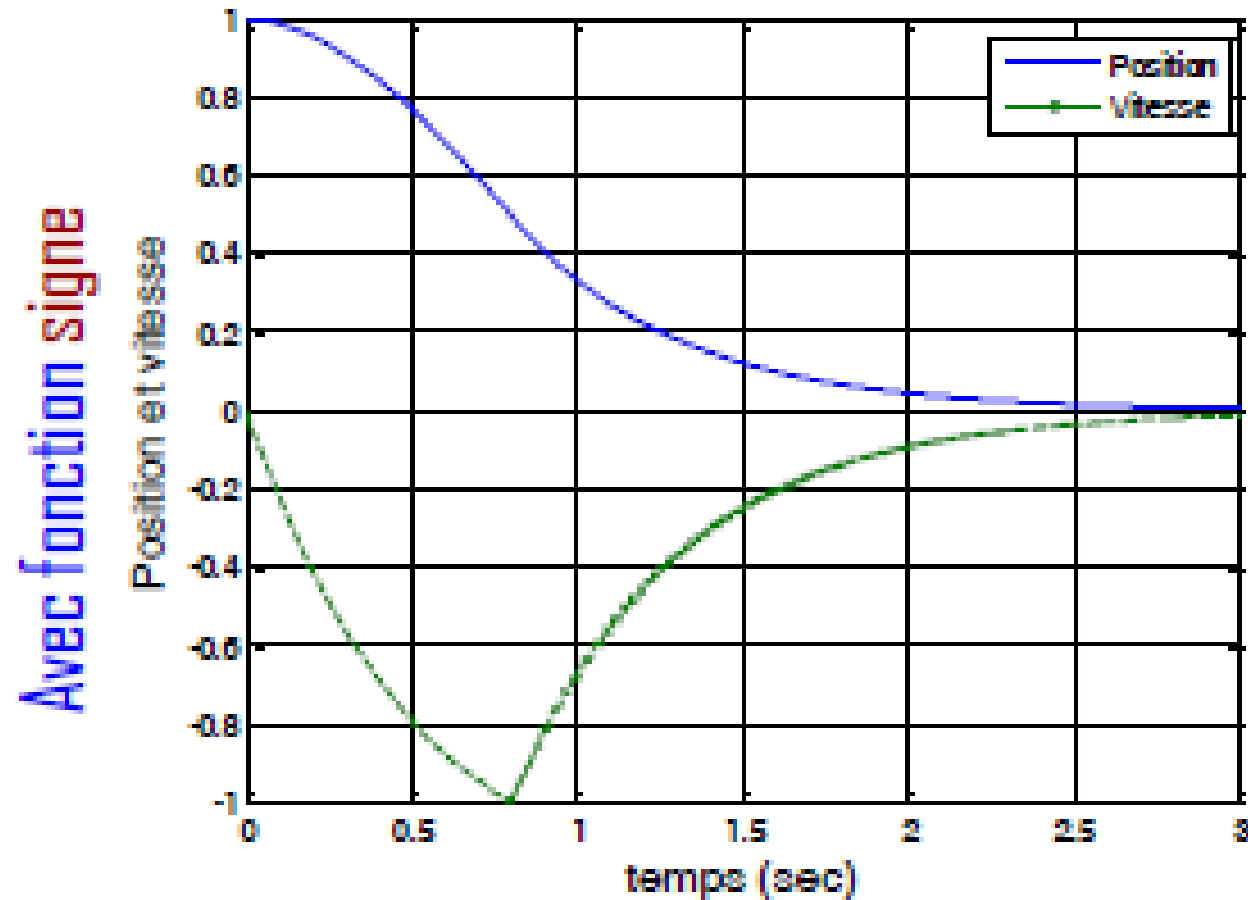
Solution 2 : remplacer la fonction *Sign* par un signal de fonction sigmoïde :

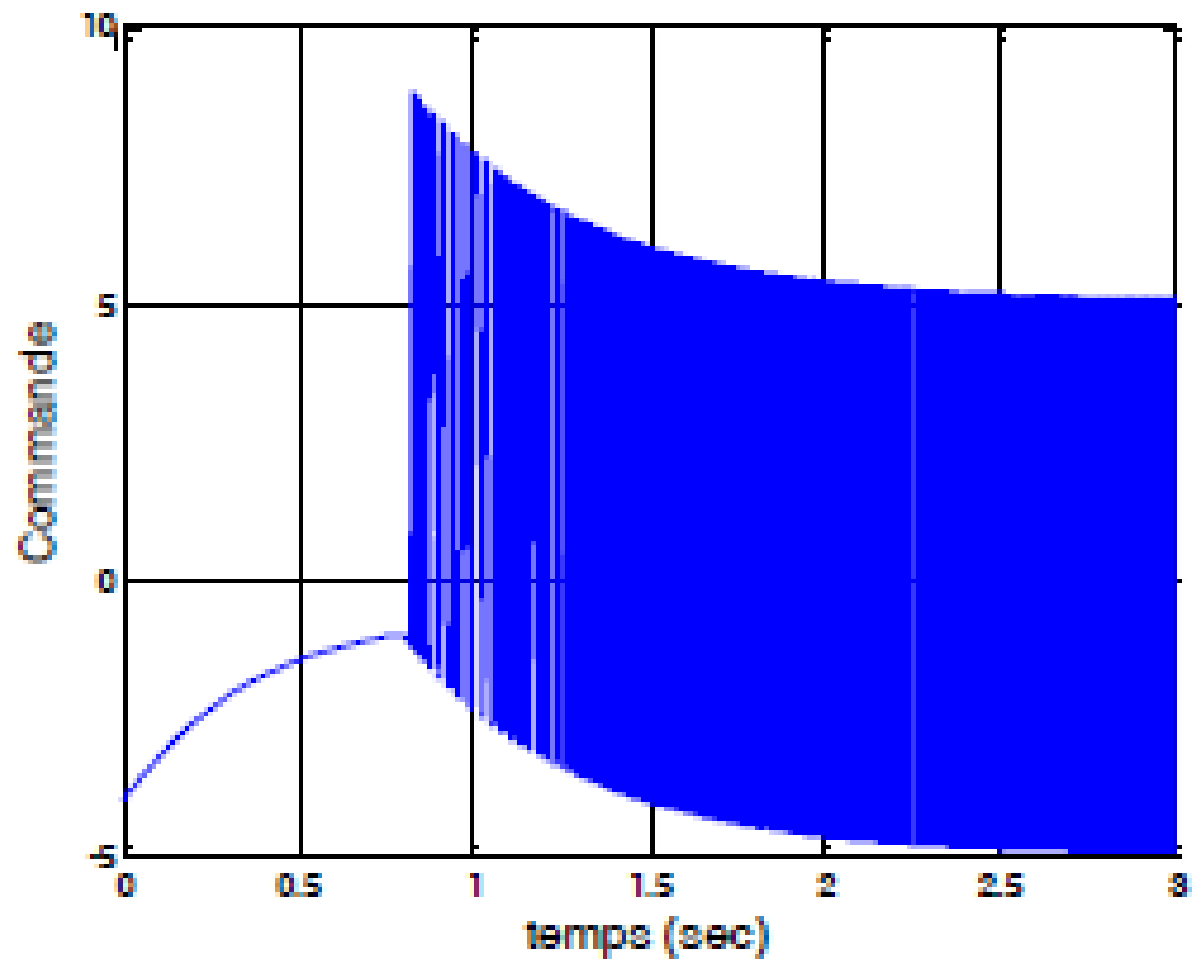


Solution 3 : Envisager la commande par mode glissant d'ordre supérieur à 1.

Application de la solution :

- utilisation de la fonction de sign :





- utilisation de la fonction saturation :

Avec fonction saturation

