Matlab图像处理编程实践初步

基于Haar小波变换的图像处理

肖俊

浙江大学计算机学院

2025

内容提要

- Haar小波变换
  - 一维Haar小波变换
  - 二维Haar小波变换
- 基于Haar小波变换的信号去噪
- 基于Haar小波变换的图像压缩

2、Haar小波变换

- 设一维信号{x_1，x_2}

  平均 $a=(x_1+x_2)/2$

  细节 $d=(x_1-x_2)/2$

- 则一维信号可以表示成{a，d}，且原信号可以恢复如下：

$$x_1=a+d$$

$$x_2=a-d$$

- 当x_1与x_2非常接近时，一维信号{x_1，x_2}可近似的用{a}表示，可实现信号压缩。

  a可以看成信号的整体信息

  d可看成原信号用a表示时丢失的细节信息

2、Haar小波变换

- 对多元素信号{x_1，x_2，x_3，x_4}

$$a_{1,0}=(x_1+x_2)/2 \qquad d_{1,0}=(x_1-x_2)/2$$

$$a_{1,1}=(x_3+x_4)/2 \qquad d_{1,1}=(x_3-x_4)/2$$

信号可以表示为：{$a_{1,0}$, $a_{1,1}$, $d_{1,0}$, $d_{1,1}$}

丢失细节信号压缩为：{$a_{1,0}$, $a_{1,1}$}

$$a_{0,0}=(a_{1,0}+a_{1,1})/2 \qquad d_{0,0}=(a_{1,0}-a_{1,1})/2$$

信号可进一步表示为：{$a_{0,0}$，$d_{0,0}$}

丢失细节信号压缩为：{$a_{0,0}$}

$$a_{0,0}=(x_1+x_2+x_3+x_4)/4$$

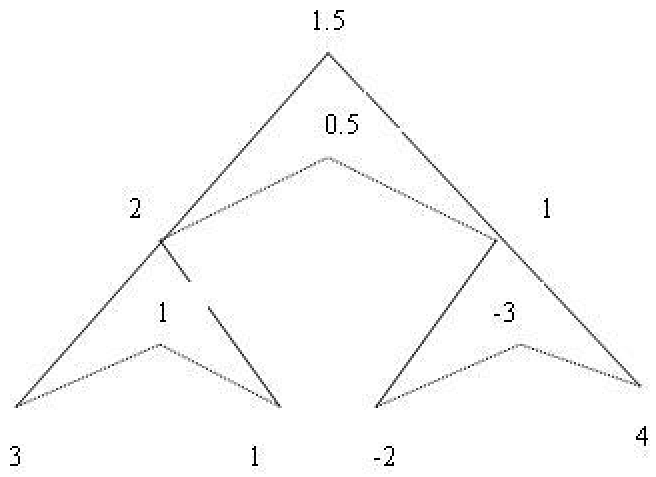
2、Haar小波变换

- $\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$ 一最高分辨率信息
- $\{a_{1,0},a_{1,1}\}$ 一次高分辨率低频信息
- $\{d_{1,0},d_{1,1}\}$ 一次高分辨率细节信息
- $\{a_{0,0}\}$ 一最低分辨率低频信息
- $\{d_{0,0}\}$ 一最低分辨率细节信息

$\{x1,\ x2,\ x3,\ x4\}$的小波变换$\{a_{0,0}, d_{0,0}, d_{1,0}, d_{1,1}\}$由整体平均和两个不同分辨率的细节信息构成

2、Haar小波变换

- 金字塔算法



{1. 5}：最低分辨率低频信息

{0. 5}：最低分辨率细节信息

{2, 1}：次高分辨率低频信息

{1, −3}：次高分辨率细节信息

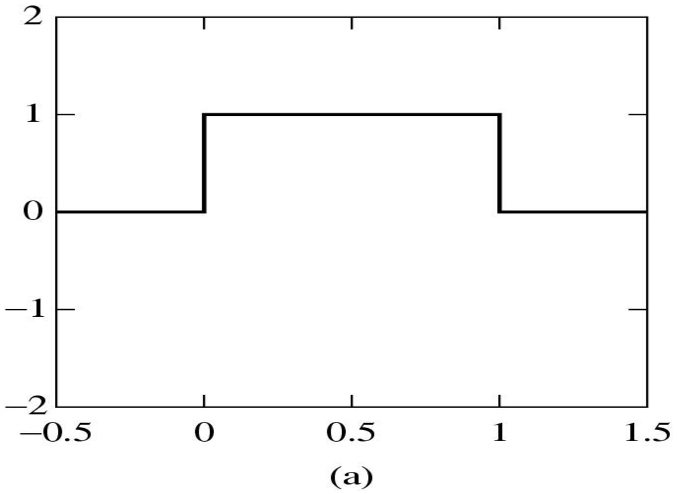
{3, 1, −2, 4}：最高分辨率信息

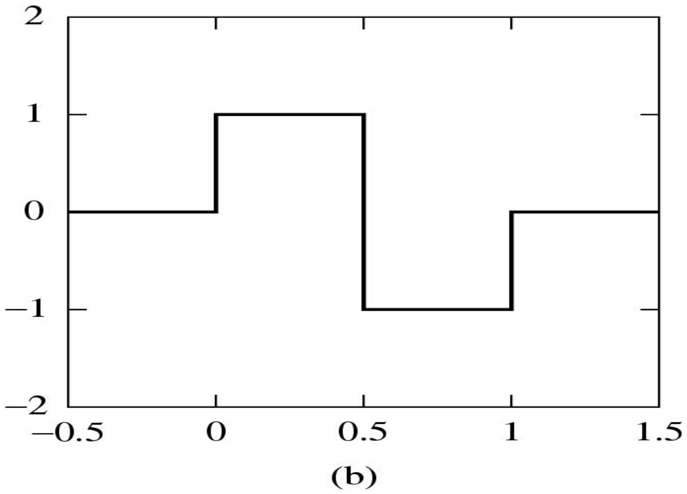
一维信号{3, 1, -2, 4}的小波变换为{1. 5, 0. 5, 1, -3}

2、Haar小波变换

- 对于原始离散信号序列{$X_{n,i}$}, 其Haar小波变换定义为：

$$x_{n-1,i} = \frac{x_{n,2i} + x_{n,2i+1}}{2} \qquad d_{n-1,i} = \frac{x_{n,2i} - x_{n,2i+1}}{2}$$





（a）Haar“近似”基函数　　（b）Haar“细节”基函数

2、Haar小波变换

- 重建函数定义：

$$x_{n,\,2i} = x_{n-1,\,i} + d_{n-1,\,i}$$
$$x_{n,\,2i+1} = x_{n-1,\,i} - d_{n-1,\,i}$$

- 实例：
  - $\{x_{n,i}\} = \{10,\ 13,\ 25,\ 26,\ 29,\ 21,\ 7,\ 15\}$
  - $\{x_{n-1,i},\ d_{n-1,i}\} = \{11.5,\ 25.5,\ 25,\ 11,\ -1.5,\ -0.5,\ 4,\ -4\}$
  - $\{x_{n-2,i},\ d_{n-2,i}\} = \{18.5,\ 18,\ -7,\ 7\}$
  - $\{x_{n-2,i},\ d_{n-2,i}\} = \{18.25,\ 0.25\}$

2、Haar小波变换

- 正变换计算方法1：
  - 对（64， 2， 3， 61， 60， 6， 7， 57）做Haar小波变换

$$[33(\frac{64+2}{2}),32(\frac{3+61}{2}),33(\frac{60+6}{2}),32(\frac{7+57}{2}),31(\frac{64-2}{2}),-29(\frac{3-61}{2}),27(\frac{60-6}{2}),-25(\frac{7-57}{2})]$$

$$[32.5(\frac{64+2+3+61}{4}),32.5(\frac{60+6+7+57}{4}),0.5(\frac{64+2-3-61}{4}),0.5(\frac{60+6-7-57}{4}),31,-29,27,-25]$$

$$[32.5(\frac{64+2+3+61+60+6+7+57}{8}),0(\frac{64+2+3+61-60-6-7-57}{8}),0.5,0.5,31,-29,27,-25]$$

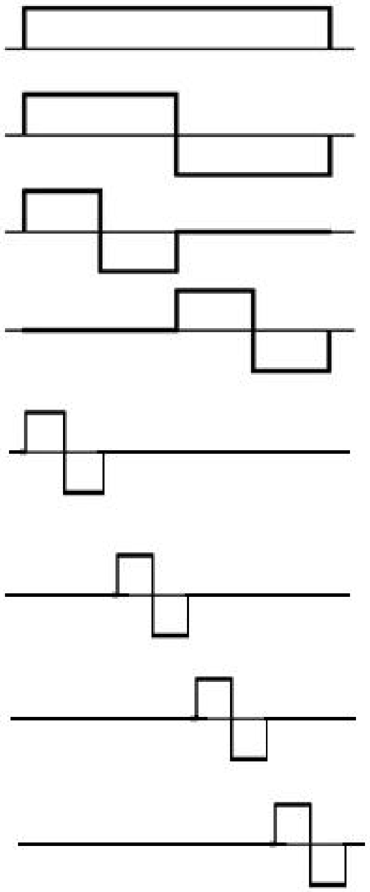
[32.5,0, 0.5,0.5,31,-29,27,-25]

2、Haar小波变换

- 正变换计算方法2：

$$\begin{bmatrix} 1/8, & 1/8, & 1/8, & 1/8, & 1/8, & 1/8, & 1/8, & 1/8 \\ 1/8, & 1/8, & 1/8, & 1/8, & -1/8, & -1/8, & -1/8, & -1/8 \\ 1/4, & 1/4, & -1/4, & -1/4, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1/4, & 1/4, & -1/4, & -1/4 \\ 1/2, & -1/2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1/2, & -1/2, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1/2, & -1/2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1/2, & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 64 \\ 2 \\ 3 \\ 61 \\ 60 \\ 6 \\ 7 \\ 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 31 \\ -29 \\ 27 \\ -25 \end{bmatrix}$$

2、Haar小波变换



连续Haar小波

（1/8, 1/8 , 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8, 1/8 ）

（1/8, 1/8 , 1/8, 1/8, -1/8, -1/8, -1/8, -1/8）

（1/4, 1/4 ,-1/4, -1/4, 0, 0, 0, 0）

（ 0, 0 , 0, 0, 1/4, 1/4 ,-1/4, -1/4）

（1/2, -1/2 , 0, 0, 0, 0, 0, 0）

（ 0, 0 , 1/2, -1/2 , 0, 0, 0, 0）

（ 0, 0 , 0, 0, 1/2, -1/2 , 0 , 0）

（ 0, 0 , 0, 0, 0, 0, 1/2, -1/2）

对应的离散Haar小波

2、Haar小波变换

- 反变换计算方法1：

[32.5,0, 0.5,0.5,31,-29,27,-25]

[32.5(32.5+0),32.5(32.5-0), 0.5,0.5,31,-29,27,-25]

[33(35.2+0.5),32(32.5-0.5), 33(32.5+0.5),32(32.5-0.5),31,-29,27,-25]

[64(33+31), 2(33-31), 3(32-29), 61(32+29), 60(33+27), 6(33-27), 7(32-25), 57(32+25)]

2、Haar小波变换

- 反变换计算方法2：

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 31 \\ -29 \\ 27 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 2 \\ 3 \\ 61 \\ 60 \\ 6 \\ 7 \\ 57 \end{bmatrix}$$

2、Haar小波变换

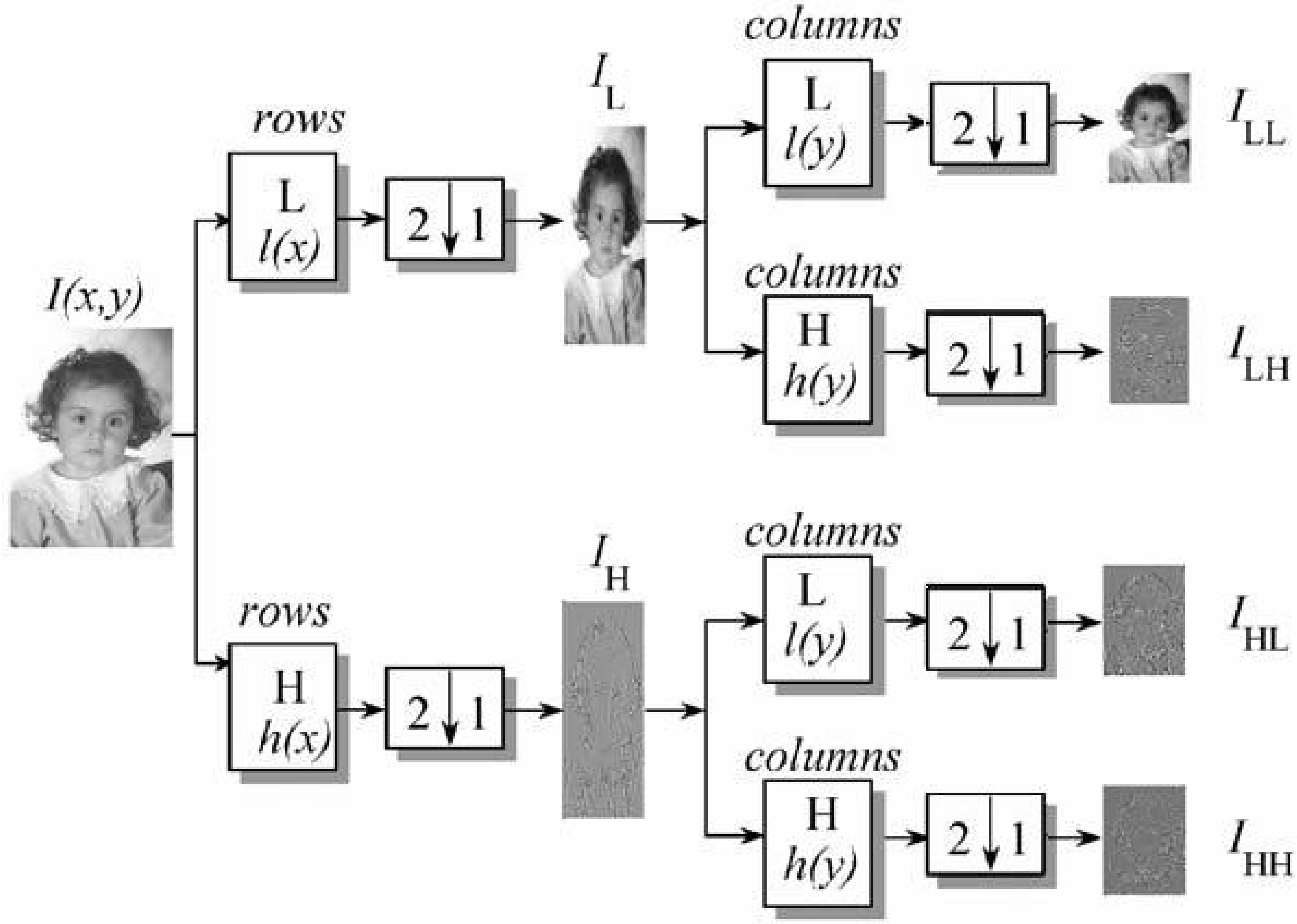
- 反变换计算方法2：

$$s(n)=a_J(n)+\sum_{j=1}^{J}d_i(n)=w_{aJ}A_J(n)+\sum_{j=1}^{J}w_{dj}D_j(n)$$

[1	1	1	1	1	1	1	1]	×32.5
+[1	1	1	1	−1	−1	−1	−1]	×0
+[1	1	−1	−1	0	0	0	0]	×0.5
+[0	0	0	0	1	1	−1	−1]	×0.5
+[1	−1	0	0	0	0	0	0]	×31
+[0	0	1	−1	0	0	0	0]	×−29
+[0	0	0	0	1	−1	0	0]	×−27
+[0	0	0	0	0	0	1	−1]	×−25
=[64	2	3	61	60	6	7	57]	

2、Haar小波变换

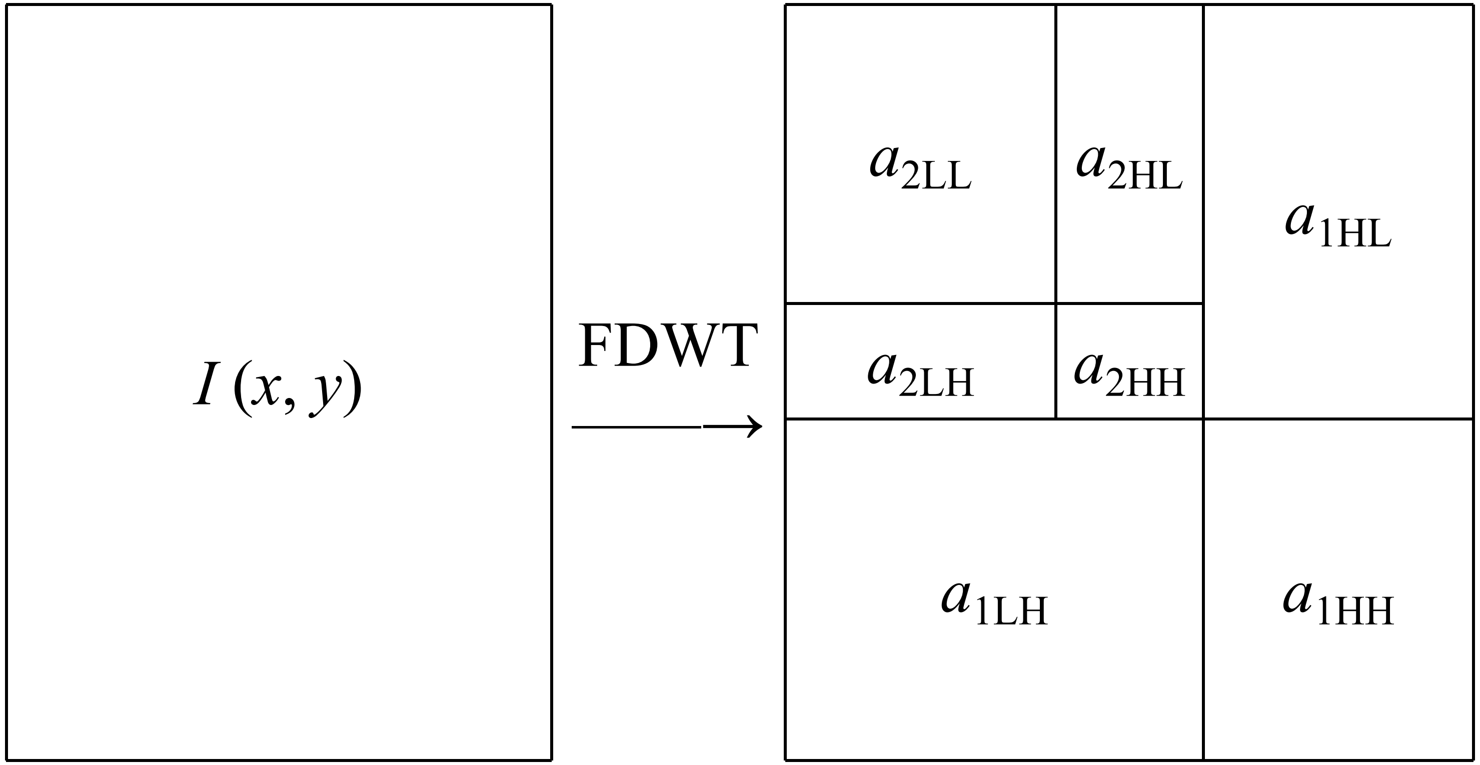
- 二维Haar小波变换



2、Haar小波变换

- 如图所示，首先对原图像$I(x,y)$沿行向(水平方向)进行滤波和2->1下采样，得到系数矩阵$I_L(x,y)$和$I_H(x,y)$，然后再对$I_L(x,y)$和$I_H(x,y)$分别沿列向(垂直方向)滤波和2->1下采样，最后得到一层小波分解的4个子图：
  - ❑ $I_{LL}(x,y)$—$I(x,y)$的（粗）逼近子图
  - ❑ $I_{HL}(x,y)$ — $I(x,y)$的水平方向细节子图
  - ❑ $I_{LH}(x,y)$ — $I(x,y)$的垂直方向细节子图
  - ❑ $I_{HH}(x,y)$ — $I(x,y)$的对角线方向细节子图

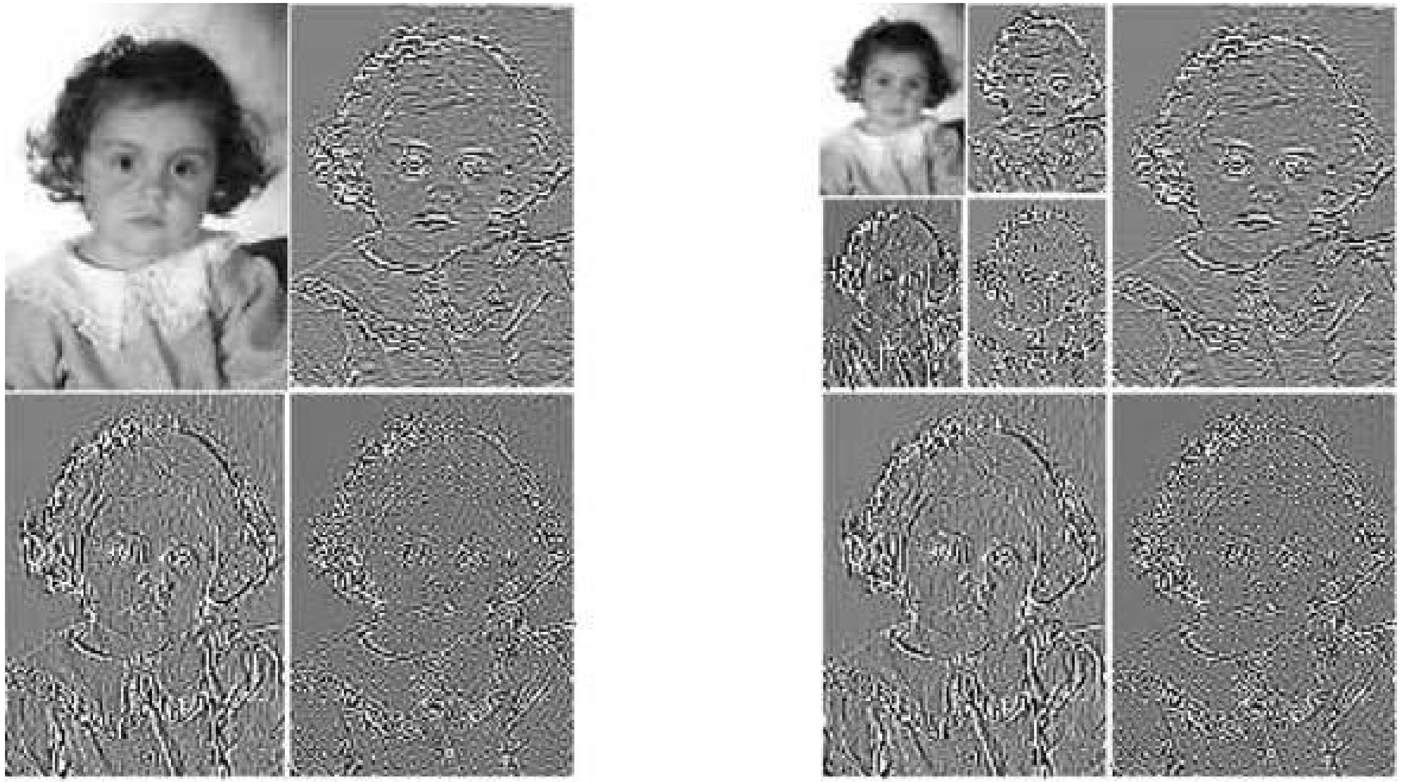
2、Haar小波变换



二维FDWT过程的示意图（$N_L = 2$）

2、Haar小波变换

- 二级小波分解示意图



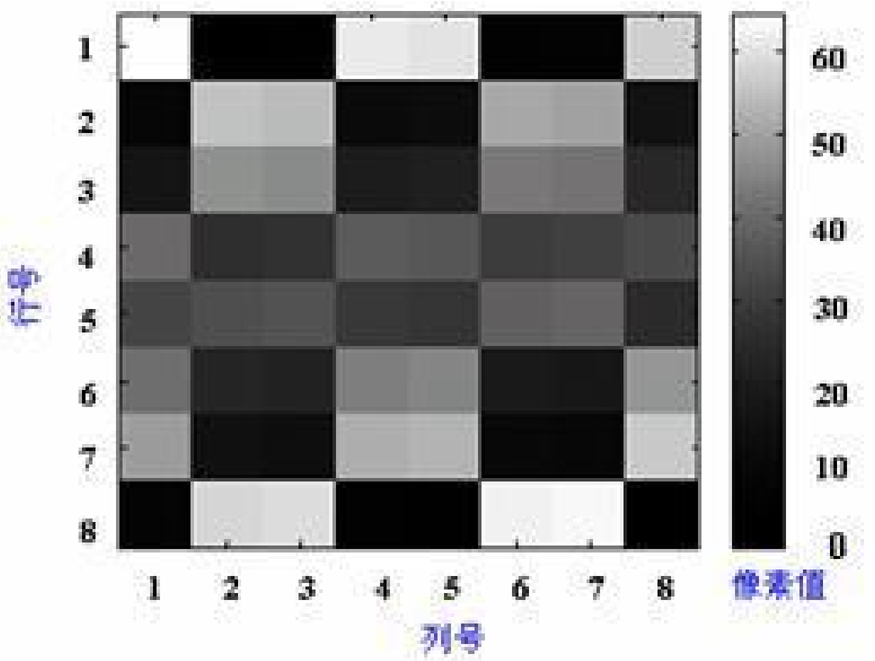
(a) (b)

图像多尺度分解，(a)一层分解，(b)二层分解

2、Haar小波变换

- 实例：

$$A = \begin{pmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 & 7 & 57 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 & 50 & 16 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 & 42 & 24 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 & 31 & 33 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 & 39 & 25 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 & 18 & 48 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 & 10 & 56 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 & 63 & 1 \end{pmatrix}$$



2、Haar小波变换

- 对每一行中的信号序列进行变换

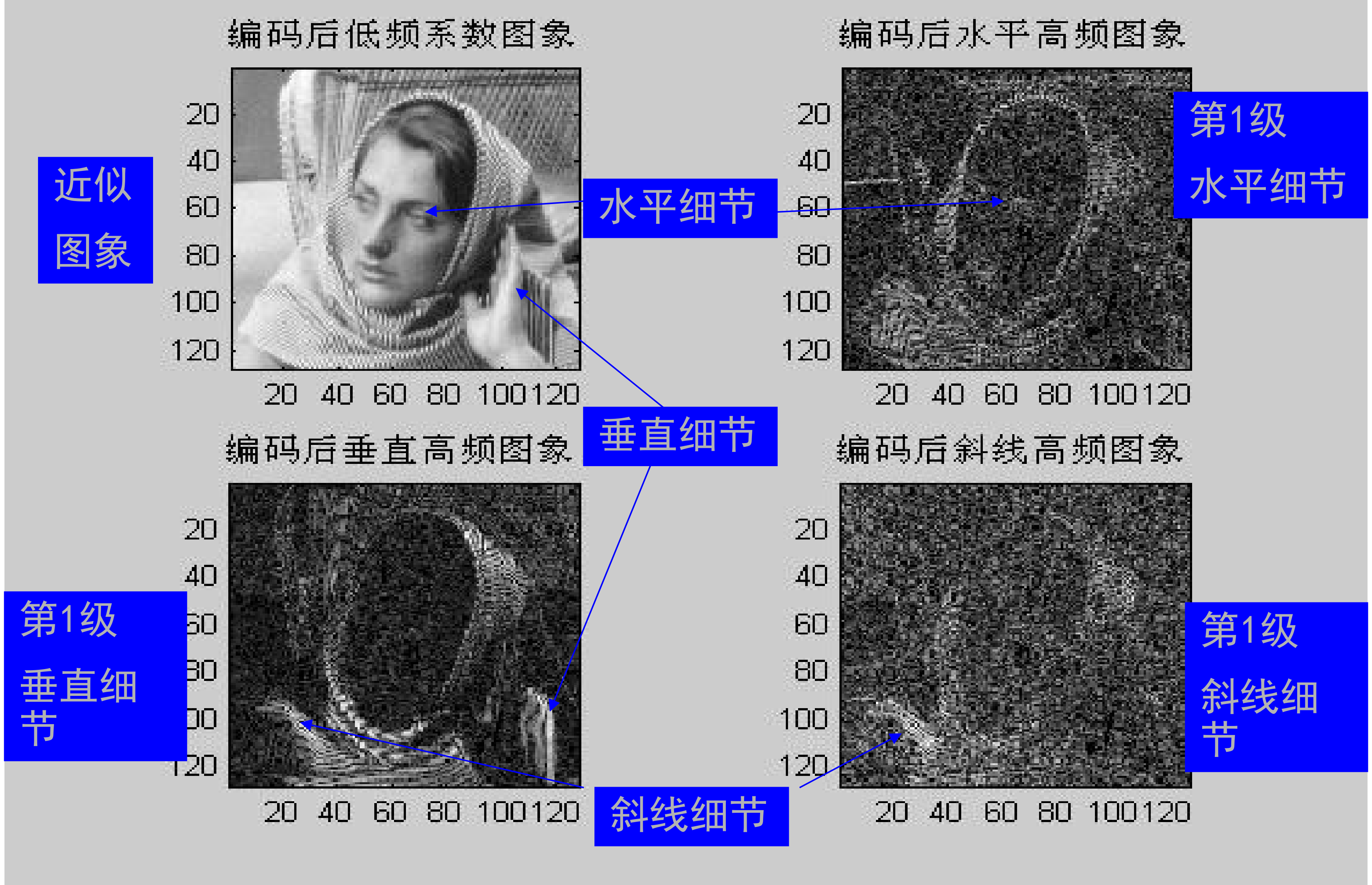
$$A_R = \begin{pmatrix} 32.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 31 & -29 & 27 & -25 \\ 32.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & -23 & 21 & -19 & 17 \\ 32.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & -15 & 13 & -11 & 9 \\ 32.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 7 & -5 & 3 & -1 \\ 32.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & -1 & 3 & -5 & 7 \\ 32.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & 9 & -11 & 13 & -15 \\ 32.5 & 0 & -0.5 & -0.5 & 17 & -19 & 21 & -23 \\ 32.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & -25 & 27 & -29 & 31 \end{pmatrix} -$$

2、Haar小波变换

- 对每一列中的信号序列进行变换

$$A_{RC}=\begin{pmatrix} 32.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 27 & -25 & 23 & -21 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -11 & 9 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -5 & 7 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 21 & -23 & 25 & -27 \end{pmatrix}$$

2、Haar小波变换



编码后低频系数图象
编码后水平高频图象
编码后垂直高频图象
编码后斜线高频图象
20 40 60 80 100 120
近似图象
水平细节
垂直细节
斜线细节
第1级水平细节
第1级垂直细节
第1级斜线细节

3、基于Haar小波变换的信号去噪

一般噪声特点：

（1）高频成分（细节），（2）幅度小：用阈值；

去噪声过程：

去除原始信号高频成分（细节）中幅度小于阈值部分。

对2级小波，设定2个阈值，称“阈值2” 和 “阈值1” 。

去除1级噪声：去除1级小波细节分解中小于“阈值1”部分。
去除2级噪声：去除2级小波细节分解中小于“阈值2”部分。

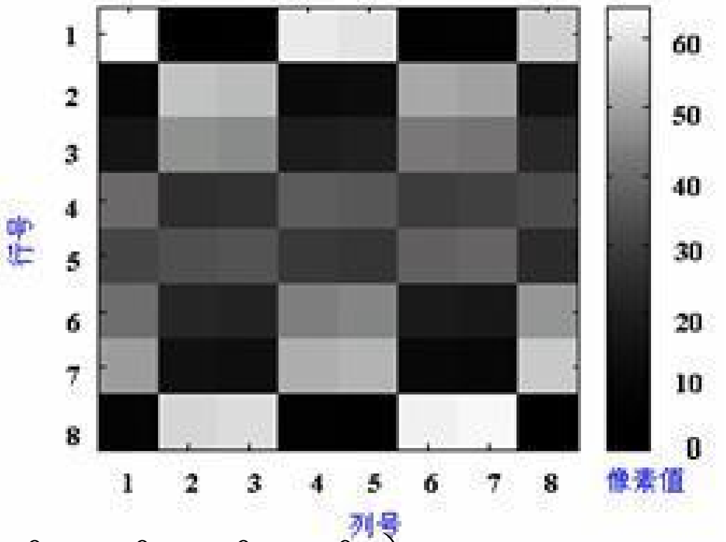
恢复：

将小波近似分解，加上去噪声后小波细节分解，即获得去除噪声的信号

4、基于Haar小波变换的图像压缩

- 图像子块的二维Haar小波变换

$$A=\begin{pmatrix}64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 & 7 & 57\\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 & 50 & 16\\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 & 42 & 24\\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 & 31 & 33\\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 & 39 & 25\\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 & 18 & 48\\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 & 10 & 56\\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 & 63 & 1\end{pmatrix}$$



$$A_{RC}=\begin{pmatrix}32.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & -4\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 27 & -25 & 23 & -21\\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -11 & 9 & -7 & 5\\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & -5 & 7 & -9 & 11\\ 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 21 & -23 & 25 & -27\end{pmatrix}$$

4、基于Haar小波变换的图像压缩

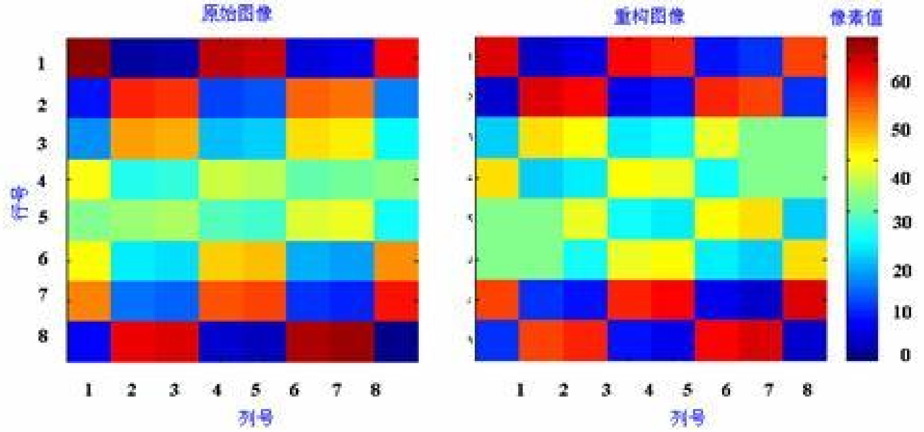
- 如何实现压缩?
  - 从矩阵中去掉表示图像的某些细节系数，事实证明重构的图像质量仍然可以接受。具体做法是设置一个阈值，例如的细节系数δ≤5就把它当作“0”看待，这样经过变换之后的上面的矩阵就变成：

$$\begin{bmatrix} 32.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 27 & -25 & 23 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & -23 & 25 & -27 \end{bmatrix}$$

4、基于Haar小波变换的图像压缩

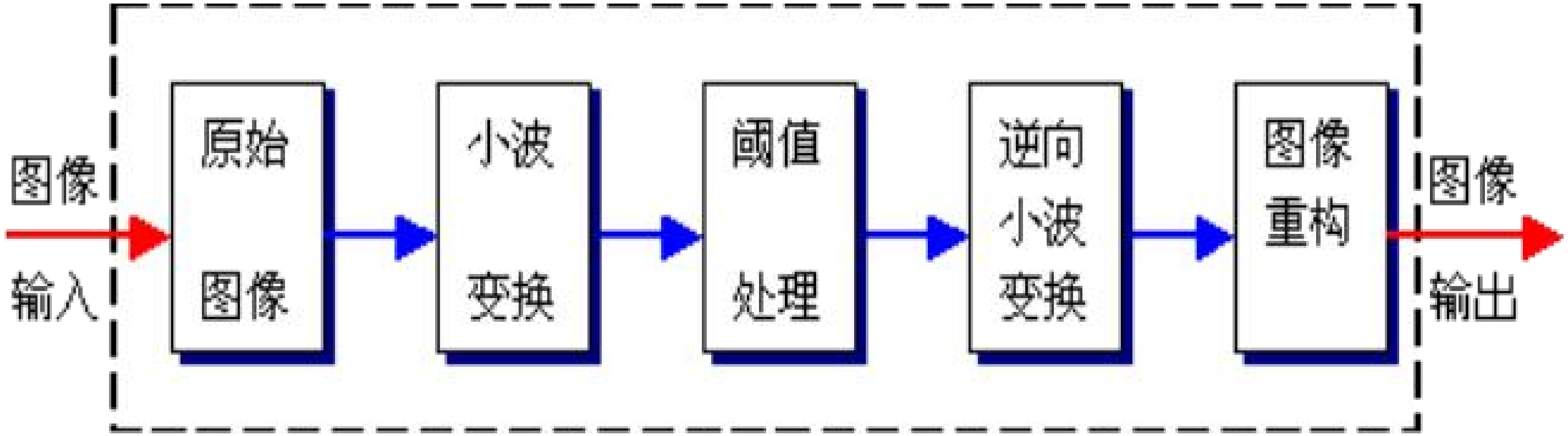
- 重构之后的矩阵：

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 59.5 & 5.5 & 7.5 & 57.5 & 55.5 & 9.5 & 11.5 & 53.5 \\ 5.5 & 59.5 & 57.5 & 7.5 & 9.5 & 55.5 & 53.5 & 11.5 \\ 21.5 & 43.5 & 41.5 & 23.5 & 25.5 & 39.5 & 32.5 & 32.5 \\ 43.5 & 21.5 & 23.5 & 41.5 & 39.5 & 25.5 & 32.5 & 32.5 \\ 32.5 & 32.5 & 39.5 & 25.5 & 23.5 & 41.5 & 43.5 & 21.5 \\ 32.5 & 32.5 & 25.5 & 39.5 & 41.5 & 23.5 & 21.5 & 43.5 \\ 53.5 & 11.5 & 9.5 & 55.5 & 57.5 & 7.5 & 5.5 & 59.5 \\ 11.5 & 53.5 & 55.5 & 9.5 & 7.5 & 57.5 & 59.5 & 5.5 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 64 & 2 & 3 & 61 & 60 & 6 & 7 & 57 \\ 9 & 55 & 54 & 12 & 13 & 51 & 50 & 16 \\ 17 & 47 & 46 & 20 & 21 & 43 & 42 & 24 \\ 40 & 26 & 27 & 37 & 36 & 30 & 31 & 33 \\ 32 & 34 & 35 & 29 & 28 & 38 & 39 & 25 \\ 41 & 23 & 22 & 44 & 45 & 19 & 18 & 48 \\ 49 & 15 & 14 & 52 & 53 & 11 & 10 & 56 \\ 8 & 58 & 59 & 5 & 4 & 62 & 63 & 1 \end{pmatrix}$$



4、基于Haar小波变换的图像压缩

- 基于小波变换的图像压缩基本流程



4、基于Haar小波变换的图像压缩

- 实例：

(a) 原始图像

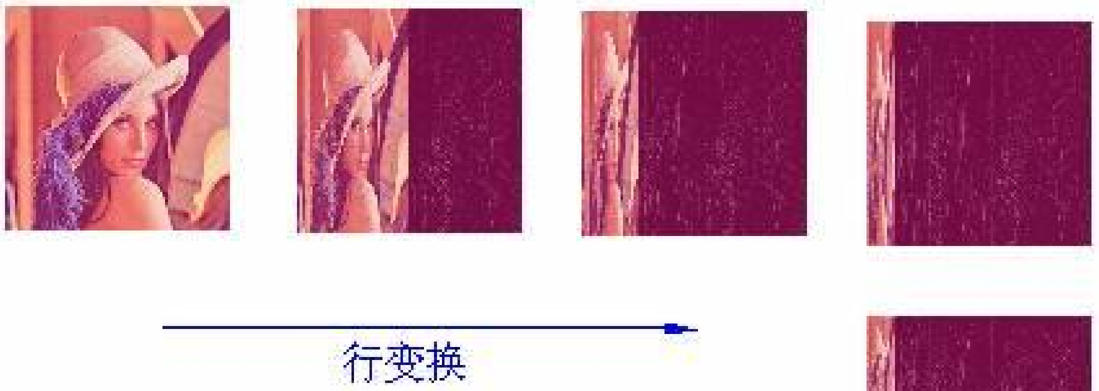
(b) $\delta \leqslant 5$

(c) $\delta \leqslant 10$

(d) $\delta \leqslant >20$

4、基于Haar小波变换的图像压缩

- 图像的标准分解方法

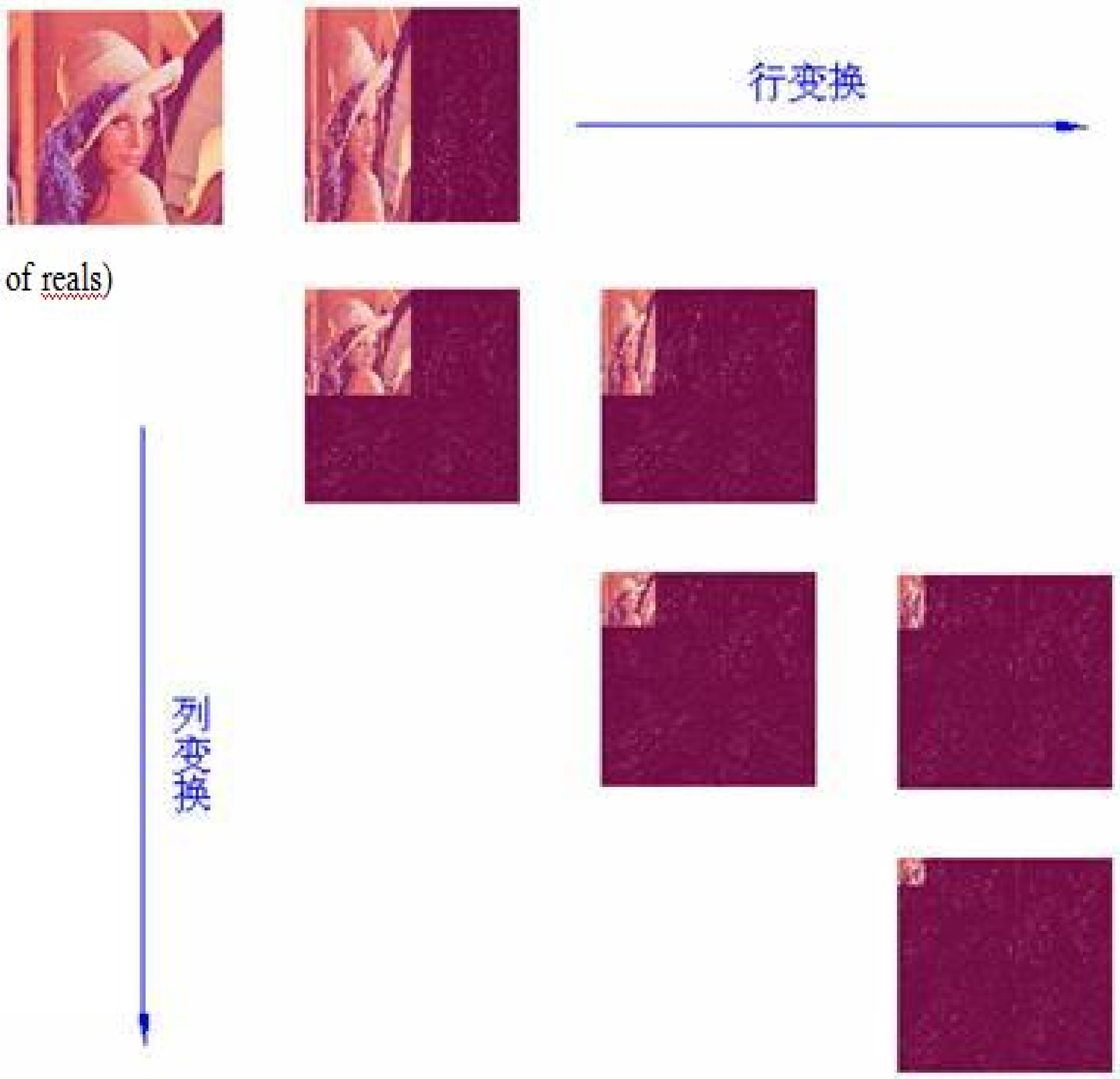



```
procedure StandardDecomposition(C: array [1. . . h, 1. . . w] of reals)
for row 1 to h do
      Decomposition(C [row, 1 . . . w])
end for
for col 1 to w do
      Decomposition(C [1 . . . h, col])
end for
end procedure
```

4、基于Haar小波变换的图像压缩

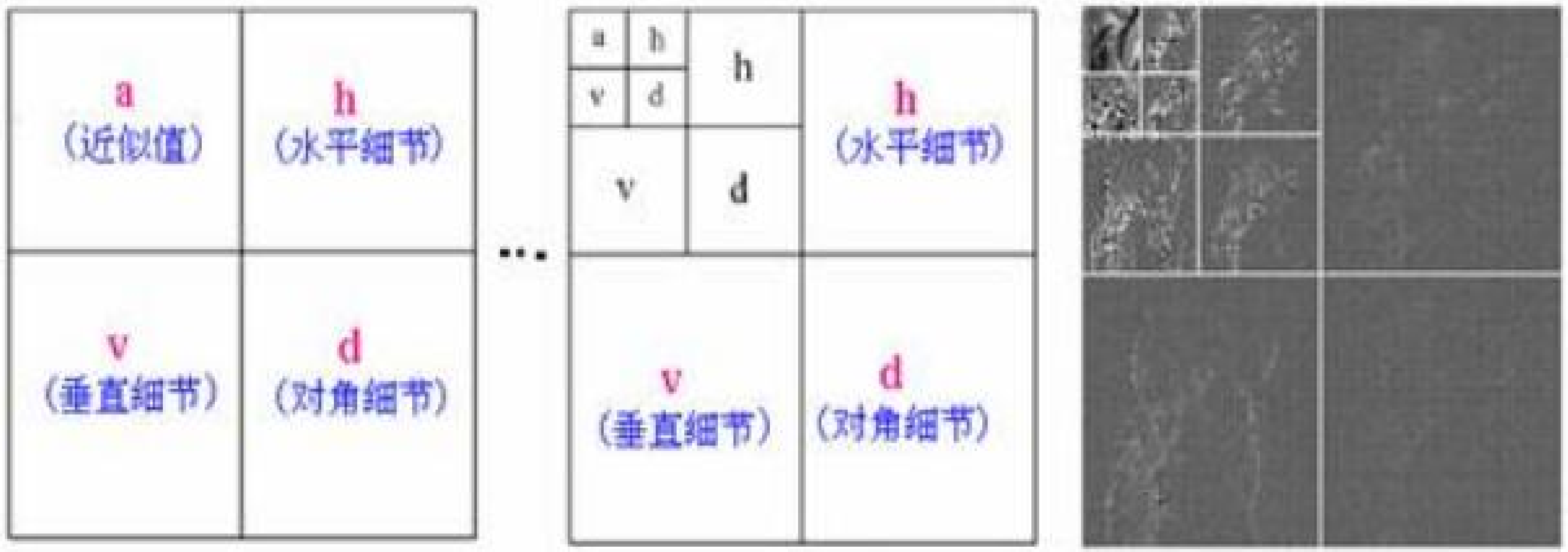
- 非标准分解方法

```
procedure NonstandardDecomposition(C: array of reals)
C ← C / h   (normalize input coefficients)
while h > 1 do
    for row 1 to h do
        DecompositionStep(C [row, 1 . . . h])
    end for
    for col 1 to h do
        DecompositionStep(C [1 . . . h, col])
        end for
h ← h / 2
end while
end procedure
```



4、基于Haar小波变换的图像压缩

- 图像的八带分解



(a) 一级分解 (b) 三级分解 (c) Lena三级分解图

课程大作业二

- 输入一张灰度/真彩色图像，编程完成如下功能：
  - （1）利用Haar小波进行编码，得到中间数据文件，存储；
  - （2）针对编码后的中间存储文件，利用matlab内嵌的huffman编码函数进行二进制编码，并存为压缩文件；
  - （3）读取压缩文件，解码得到原始图像进行显示并对比压缩效率。