

ARTIGO DE PESQUISA

# O Computador Sempre Erra: Uma Exploração Gráfica dos Efeitos da Aritmética de Ponto Flutuante

## The Computer Always Errs: A Graphical Exploration of Floating-Point Arithmetic Effects

Enzo Rocha L. Diniz Ribas   [Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais | enzorochaleitedinizribas@gmail.com ]  
Daniel Paz  [Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais | danielspazini3@gmail.com ]

 Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Av. Amazonas, 7675 - Nova Gameleira, Belo Horizonte - MG, 30510-000.

**Resumo.** PREVISAO: 500 a 750 palavras Este artigo tem como objetivo analisar quais são as principais vantagens e desvantagens de diversas bibliotecas e linguagens de programação utilizadas para visão computacional. A análise é feita com base em critérios como facilidade de uso, curva de aprendizado, comunidade de suporte, compatibilidade com diferentes plataformas, etc.. O estudo inclui uma revisão geral das principais bibliotecas e linguagens mais populares, como OpenCV, TensorFlow, YOLO, JavaCV, VisionWorks, BoofCV, OpenIMAJ, Halcon, SimpleCV entre outras, destacando suas características específicas e casos de uso ideais. Além disso, são apresentados exemplos práticos de aplicação dessas ferramentas em projetos reais, ilustrando como cada uma pode ser utilizada para resolver problemas comuns em visão computacional. A conclusão do artigo oferece recomendações para desenvolvedores e pesquisadores sobre a escolha da biblioteca ou linguagem mais adequada para suas necessidades específicas.

**Abstract.** This text, formatted as a scientific article, aims to present the new SBC paper template, describing its main features and explaining how it should be used. This version, more specifically, should be used exclusively for articles written in Portuguese that will be published in any event proceeding series at SBC OpenLib. The abstract in Portuguese, as you can see in this example, must be before the abstract in English and must have between 500 and 750 words.

**Palavras-chave:** Mathematical Modeling, Scientific Computing, Numerical Analysis, Floating-Point Arithmetic, Last Place Units, Computational Math

**Keywords:** Mathematical Modeling, Scientific Computing, Numerical Analysis, Floating-Point Arithmetic, Last Place Units, Computational Math

**Recebido/Received:** DD Month YYYY • **Aceito/Accepted:** DD Month YYYY • **Publicado/Published:** DD Month YYYY

## 1 Introdução

Os computadores representam números reais usando a aritmética de ponto flutuante, que é uma aproximação finita e sistemática do conjunto contínuo dos números reais (IEEE Computer Society [2019]). Embora essa representação seja eficiente e amplamente adotada, ela introduz erros numéricos inevitáveis devido à natureza discreta do armazenamento digital. Esses erros podem se manifestar de várias formas, como erros de arredondamento, cancelamento catastrófico, overflow e underflow, afetando a precisão e a confiabilidade dos cálculos computacionais.

Esse trabalho tem como objetivo fazer uma revisão da norma da IEEE (IEEE 754) sobre a aritmética de ponto flutuante e explorar graficamente os efeitos da aritmética de ponto flutuante em cálculos numéricos. Através de visualizações e experimentos controlados, buscamos ilustrar como esses erros se manifestam em diferentes situações.

Objetivos:

- Revisar os conceitos fundamentais da aritmética de ponto flutuante conforme definido pela norma IEEE 754.
- Apresentar casos peculiares onde os erros de ponto flutuante se tornam evidentes.
- Explorar graficamente os efeitos dos erros numéricos introduzidos pela aritmética de ponto flutuante em cálculos

comuns.

- Analisar como esses erros podem impactar a precisão e a confiabilidade dos resultados computacionais.

Contribuições principais:

- Uma coleção de exemplos e gráficos que ilustram comportamentos típicos da aritmética de ponto flutuante.
- Análises interpretativas que relacionam os efeitos observados com os princípios teóricos da norma IEEE 754.
- Observações pedagógicas sobre como projetar experimentos numéricos robustos e interpretar resultados à luz dos erros de representação.

Organização do texto: na Seção ?? revisamos conceitos fundamentais da representação em ponto flutuante; na Seção ?? apresentamos experimentos e visualizações; na Seção ?? discutimos implicações práticas e estratégias para mitigar erros; por fim, na Seção ?? sintetizamos os achados e sugerimos direções para trabalhos futuros.

A classe *sbc2025* é projetada para trabalhar com os *engines* pdftex e luatex. Dessa forma, deve-se compilar o documento

A classe *sbc2025* inclui internamente os seguintes pacotes:

- xcolor

- graphicx
- amsmath amssymb
- hyperref
- babel

consequentemente, não há necessidade de incluí-los no preâmbulo.

**Quem tentar compilar usando a opção `pdflatex` no Overleaf vai receber uma mensagem de erro solicitando o usuário a ajustar a opção de compilação.**

Para a pergunta *Por que não funciona com o `pdflatex`?* A resposta é: **fontes!** PdfLaTeX usa um esquema de codificação de fontes complexo. O fonte `academicons`<sup>1</sup> não tem as definições necessárias para uso com o `pdflatex`. Enquanto isso não for realizado, `pdflatex` não pode ser usado.

## 2 Revisão Bibliográfica

### 2.1 Aritmética de Ponto Flutuante

A norma IEEE 754 é um padrão amplamente adotado para a representação e manipulação de números em ponto flutuante em sistemas de hardware ou software. Ela define formatos de representação, regras de arredondamento, operações aritméticas e tratamento de exceções para garantir consistência e precisão nos cálculos numéricos. A norma especifica diferentes formatos de ponto flutuante, como simples precisão (32 bits) e dupla precisão (64 bits), cada um com sua própria estrutura de bits para representar o sinal, o expoente e a mantissa do número. Além disso, a norma estabelece regras para operações aritméticas, como adição, subtração, multiplicação e divisão, incluindo o tratamento de casos especiais, como overflow, underflow, NaN (Not a Number) e infinitos (IEEE Computer Society [2019]). A norma IEEE 754 é fundamental para garantir a interoperabilidade entre diferentes sistemas computacionais e linguagens de programação, permitindo que cálculos numéricos sejam realizados de forma consistente e previsível.

A representação de um número real em aritmética de ponto flutuante conforme definido pela norma IEEE 754 consiste em 3 diferentes formatos, no primeiro formato a representação é composta por três componentes principais: o sinal, o expoente e a mantissa (ou significando). O expoente da base utilizada. O bit de sinal indica se o número é positivo ou negativo. A mantissa representa a parte fracionária do número e é normalizada para garantir que o primeiro dígito seja sempre diferente de zero. A combinação desses três componentes permite representar uma ampla gama de números reais, incluindo números muito grandes e muito pequenos, com uma precisão limitada devido ao número finito de bits disponíveis para cada componente. O segundo formato é a representação de infinitos, e por último o terceiro formato é a representação de NaN's, que é usada para indicar resultados indefinidos ou inválidos em operações aritméticas.

- Valor =  $(-1)^{\text{sinal}} \times \text{mantissa} \times \text{base}^{\text{expoente}}$
- $\infty$  e  $-\infty$
- qNaN (quiet NaN) e sNaN (signaling NaN)

qNaN e sNaN são dois tipos de Not-a-Number (NaN)

definidos pela norma IEEE 754, usados para representar resultados indefinidos em aritmética de ponto flutuante.

Um conjunto de finitos pontos flutuantes representáveis a partir de um formato de ponto flutuante é denominado **conjunto de números em ponto flutuante**, e é definido pelos seguintes parâmetros:

- $b = \text{Base}$ : A base do sistema numérico utilizado, 2 ou 10 (geralmente 2 em computadores).
- $p = \text{Precisão}$ : O número de dígitos na mantissa (ou significando) que determina a precisão dos números representados.
- $emax = \text{Expoente máximo}$ : O maior valor do expoente que pode ser representado.
- $emin = (-emax + 1) = \text{Expoente mínimo}$ : O menor valor do expoente que pode ser representado.

A norma IEEE 754 também define regras para arredondamento, que determinam como os números são aproximados quando não podem ser representados exatamente no formato de ponto flutuante. As principais estratégias de arredondamento são:

- roundToIntegralTiesToEven (Arredondar para o inteiro mais próximo, com empates arredondados para o número par mais próximo)
- roundToIntegralTowardsZero (Arredondar para o inteiro mais próximo em direção a zero)
- roundToIntegralTowardPositive (Arredondar para o inteiro mais próximo em direção ao infinito positivo)
- roundToIntegralTowardNegative (Arredondar para o inteiro mais próximo em direção ao infinito negativo)
- roundToIntegralTiesToAway (Arredondar para o inteiro mais próximo, com empates arredondados para longe de zero)
- roundToIntegralExact (Arredondar exatamente)

#### 2.1.1 Units Of Last Place (ULP) e Quantum

Unit Of Last Place (ULP) ou Unidade do Último Lugar é uma medida usada em aritmética de ponto flutuante para quantificar a precisão relativa de um número representado. A ULP representa a menor diferença entre dois números consecutivos que podem ser representados no formato de ponto flutuante. Em outras palavras, a ULP indica o "tamanho do passo" entre números representáveis próximos a um determinado valor como definido por John Harrison em Harrison [1999].

Na prática podemos entender a ULP, segundo Muller [2016] como: Se  $x$  é exatamente representável em um formato de ponto flutuante e não é uma potência inteira da base  $\beta$ , o termo  $ulp(x)$  (unidade do último lugar) denota a magnitude do último dígito do significando de  $x$ . Ou seja, se

$$x = \pm d_0.d_1d_2 \dots d_{p-1} \times \beta^{e_x},$$

então a unidade do último lugar de  $x$  é dada por

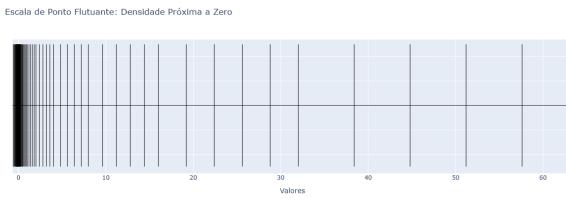
$$ulp(x) = \beta^{e_x - p + 1}.$$

onde  $p$  é a precisão (número de dígitos no significando) e  $e_x$  é o expoente de  $x$ .

A figura 1 ilustra a densidade dos números representáveis em ponto flutuante ao longo da reta numérica. Note que a

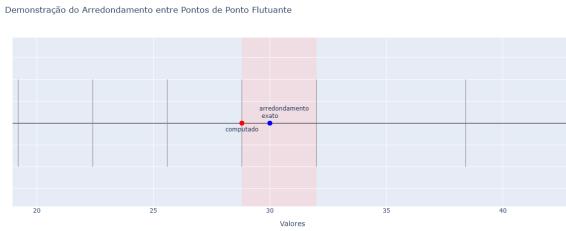
<sup>1</sup>Do fonte em questão usa-se apenas o glifo associado ao Orchid.

densidade é maior próximo de zero e diminui à medida que nos afastamos de zero, refletindo a natureza relativa da precisão em aritmética de ponto flutuante.



**Figura 1.** Densidade dos números em ponto flutuante ao longo da reta numérica.

Quando um número real  $x$  não tem representação exata em um formato de ponto flutuante, a ULP pode ser usada para medir o erro de arredondamento ao aproximar  $x$  pelo número representável mais próximo. O erro de arredondamento é frequentemente expresso em termos de ULPs, indicando quantas unidades do último lugar o valor aproximado difere do valor real.



**Figura 2.** Erro de arredondamento de Pontos Flutuantes.

O conceito de Quantum em aritmética de ponto flutuante é semelhante ao de ULP, mas com uma definição ligeiramente diferente. O Quantum é definido pela (IEEE Computer Society [2008]) como: O Quantum de uma representação finita em ponto flutuante é o valor de uma unidade na última posição do seu significando. Isso é igual à base (radix) elevada ao expoente  $q$ , que é usado quando o significando é considerado como um inteiro.

Tanto o *Quantum* quanto o *ULP* medem a diferença entre dois números consecutivos de ponto flutuante, mas usam critérios ligeiramente diferentes nas fronteiras dos blocos de expoente.

Seja a aritmética binária (base  $b = 2$ ) com precisão  $p$  (número de bits do significando, incluindo o bit implícito). Para números com expoente  $e$  (isto é,  $x \in [2^e, 2^{e+1})$ ) o Quantum é constante e dado por

$$\text{Quantum}(e) = 2^{e-p+1},$$

ou seja, o espaçamento entre representáveis dentro desse mesmo intervalo de expoente.

A definição de ULP usada por John Harrison (e por várias definições formais de precisão) é a distância entre os dois representáveis adjacentes que envolvem um valor real  $x$ . Em particular:

- se  $x$  não é exatamente uma potência de dois, então a ULP de  $x$  coincide com o Quantum do seu intervalo de expoente;

- se  $x = 2^e$  (fronteira entre blocos de expoente), o Quantum observa o bloco acima ( $[2^e, 2^{e+1})$ ) enquanto a ULP de Harrison usa o espaçamento imediatamente abaixo (do bloco  $[2^{e-1}, 2^e)$ ). Assim

$$\text{ULP}_{\text{Harrison}}(2^e) = 2^{e-p} = \frac{1}{2} \text{Quantum}(e).$$

Para análise de erro de arredondamento, é habitual usar ULP: o erro de arredondamento em uma operação corretamente arredondada é no máximo 0.5 ULP.

### 2.1.2 Exemplo numérico

Para  $e = 2$ ,  $p = 4$  e  $b = 2$  temos:

$$\text{Quantum}(e) = 2^{e-p+1} = 2^{2-4+1} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5,$$

$$\text{ULP}_{\text{Harrison}}(2^e) = 2^{e-p} = 2^{2-4} = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0.25 = \frac{1}{2} \text{Quantum}(e).$$

Para  $x_{\text{real}} = 4.3$  e  $x_{\text{float}} = 4.5$ , temos:

$$\text{erro absoluto} = |4.3 - 4.5| = 0.2,$$

$$\frac{\text{erro}}{\text{Quantum}} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4 \text{ Quantum},$$

$$\frac{\text{erro}}{\text{ULP}_H} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8 \text{ ULP}_H.$$

Erro de Arredondamento: Quantum vs ULP de Harrison



**Figura 3.** Comparação entre Quantum e ULP na representação de números em ponto flutuante.

## 3 Exemplo de Título Nível 1 (Seção)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

### 3.1 Exemplo de Título Nível 2 (Subseção)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.

Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

*This is a longer quotation. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et magna aliqua.*

### 3.1.1 Exemplo de Título Nível 3 (Subsubseção)

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisci-

**Exemplo de Título Nível 4 (Parágrafo).** Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Let

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

be an  $n$ -dimensional vector. The sparse PCA problem can be written as

$$\max_x \{x^T Ax - \rho \|x\|_0 : x^T x = 1\}, \quad (1)$$

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur equation (1).

$$\max_x \{x^T Ax : x^T x = 1\}.$$

If  $A$  Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.

Equation (1) is a special case of the following sparse generalized eigenvector problem (GEV):

$$\max_x \{x^T Ax - \rho \|x\|_0 : x^T Bx \leq 1\}, \quad (2)$$

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum **Table 1**.

## 4 Exemplo de Título Nível 1

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisci-

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisci-

- Esse é um exemplo de lista de tópicos. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt.

- Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam.
- Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisci-

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna

**Tabela 1.** Exemplo de legenda de tabela. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit.

Número	Vel (km/h)	$\alpha$ (m/s <sup>2</sup> )	$\epsilon^{(1)}$	$\epsilon^{(2)}$	$\delta^{(1)}$	$\delta^{(2)}$	$\delta^{(3)}$	$\gamma^{(1)}$	$\gamma^{(2)}$	$\alpha^{(1)}$	$\alpha^{(2)}$
1	3.5	2.0	0.20	-0.05	0.00	-0.20	-0.05	0.20	0.05	20	10
2	2.5	1.5	0.10	-0.15	0.05	-0.15	0.00	0.10	-0.05	20	40
3	3.0	1.8	0.20	-0.05	0.25	0.05	0.20	0.15	0.00	20	70 <sup>a</sup>

aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisciing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

1. Esse é um exemplo de lista numerada. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt.
  2. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam.
  3. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur

sint occaecat cupiditat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

## 4.1 Exemplo de Título Nível 2

*Lore* ipsum dolor sit amet, consectetur adipisci*ng* elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitatio*n* ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupiditat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. *Lore* ipsum dolor sit amet, consectetur adipisci*ng* elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitatio*n* ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupiditat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum **Figure 4.**

g  
Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

**LOREM IPSUM**  
Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation

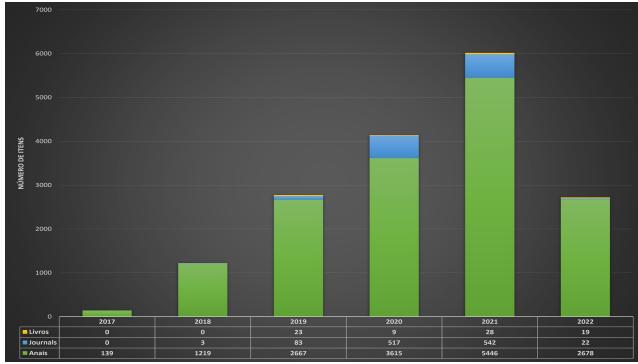


Figura 4. Exemplo de legenda de figura.

ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. **Figure 5.**

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.

Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

**Exemplo de Título Nível 4.** Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum.

## 5 Conclusão

Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit,

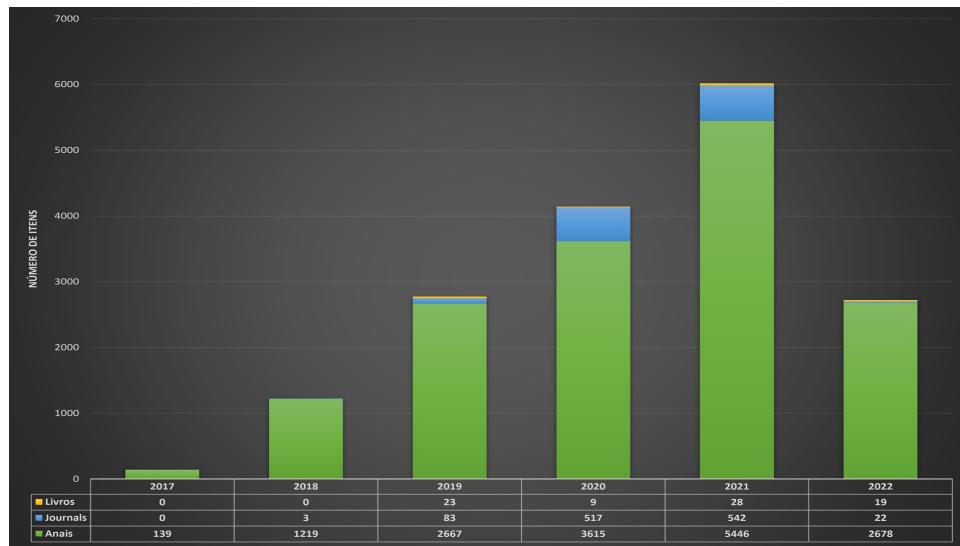


Figura 5. Exemplo de legenda de figura.

sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisciing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum [?].

## 6 Conclusão

Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisciing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur.

  Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisciing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisciing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat. Duis aute irure dolor in reprehenderit in voluptate velit esse cillum dolore eu fugiat nulla pariatur. Excepteur sint occaecat cupidatat non proident, sunt in culpa qui officia deserunt mollit anim id est laborum [?].

## Declarações complementares

### Agradecimentos

ESTA DECLARAÇÃO É OPCIONAL. Este é um texto de agradecimentos com várias linhas. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisciing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magna aliqua. Ut enim ad minim veniam, quis nostrud exercitation ullamco laboris nisi ut aliquip ex ea commodo consequat.

### Financiamento

ESTA DECLARAÇÃO É OPCIONAL. Esta pesquisa foi financiada por lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisciing elit.

### Contribuições dos autores

ESTA DECLARAÇÃO É OBRIGATÓRIA. Sugerimos que os autores descrevam sua contribuição usando a Taxonomia CRediT (<https://credit.niso.org/>) como neste exemplo: JV contribuiu para a concepção deste estudo. CB, RP e CM realizaram os experimentos. JV é o principal contribuidor e escritor deste manuscrito. Todos os autores leram e aprovaram o manuscrito final.

### Conflitos de interesse

ESTA DECLARAÇÃO É OBRIGATÓRIA. Se não houver conflitos de interesse, os autores devem declarar: “Os autores declaram que não têm nenhum conflito de interesses”. Caso contrário, a declaração deve ser: “Os autores declaram que têm os seguintes conflito de interesses: lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipisciing elit.”

### Disponibilidade de dados e materiais

ESTA DECLARAÇÃO É OBRIGATÓRIA. Se os autores estiverem disponibilizando seus dados e/ou códigos abertamente, a declaração deve ser: “Os conjuntos de dados (e/ou softwares) gerados e/ou analisados durante o estudo atual estão disponíveis em ...”. Caso contrário, a declaração deve ser: “Os conjuntos de dados (e/ou softwares) gerados e/ou analisados durante o estudo atual serão feitos mediante solicitação”.

### Outras informações relevantes

ESTA DECLARAÇÃO É DESEJÁVEL. Informações adicionais relevantes, como, por exemplo, a aprovação em comitê de ética ou o uso de ferramentas de IA generativa no desenvolvimento do artigo. Essa declaração é opcional, se não houver nada a ser acrescentado,

pode ser deixada em branco

## Referências

- Harrison, J. (1999). A machine-checked theory of floating-point arithmetic. Technical Report EY2-03, Intel Corporation, 5200 NE Elam Young Parkway, Hillsboro, OR 97124, USA. Intel Corporation.
- IEEE Computer Society (2008). IEEE standard for floating-point arithmetic. Technical Report IEEE Std 754-2008, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).
- IEEE Computer Society (2019). IEEE standard for floating-point arithmetic. Technical Report IEEE Std 754-2019, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE). Available as IEEE Std 754-2019.
- Muller, J.-M. (2016). *Elementary Functions: Algorithms and Implementation*. Springer Science+Business Media (Birkhäuser), New York, 2 edition. 1st ed. 1997, 2nd ed. 2006; © Birkhäuser 1997/2006; © Springer Science+Business Media New York 2016.