* †

Equações Diferenciais Parciais: Soluções Clássicas, Soluções Fracas e Aplicações

Lucas Martins Rocha †, Gabriel dos anjos Pimentel †
Eder Marinho Martins ‡, Wenderson Marques Ferreira ‡

† Aluno do curso de Bacharelado em Matemática - UFOP, ‡ Departamento de Matemática, ICEB/UFOP

lucasmartinsrocha@gmail.com, eder@iceb.ufop.br, gabrielanjospimentel@gmail.com, wmf@iceb.ufop.br

1. Introdução

Neste trabalho, pretendemos abordar uma série de resultados referentes à Teoria das Equações Diferenciais Parciais. Daremos ênfase a alguns aspectos tais como: resultados da Teoria Clássica (como as Séries de Fourier e sua convergência); generalização de soluções (com o estudo das soluções fracas para Equações Diferenciais Parciais e dos Espaços de Sobolev) para equações de Laplace e da Onda, além de resultados de existência de solução para um problema elíptico não linear em um domínio limitado com fronteira suave $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
As Equações Diferenciais Parciais da Onda, do Calor e de Laplace modelam vários fenômenos físicos referentes a vibrações, processos de difusão, processos de transporte, energia potencial de partículas sob ação de forças gravitacionais, dentre outros. Tais equações são geralmente abordadas através de seu método clássico de resolução: o Método de Fourier ou da Separação de Variáveis.

2. O método de Fourier

O método consiste em supor que a solução de um problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) seja da forma $u(x,y) = A(x)B(y)$. A partir daí, obtemos possíveis candidatos a solução do nosso problema, muitas vezes com raciocínios informais, e posteriormente verificamos que tais candidatos são de fato as soluções buscadas. Vamos aplicar tal método para resolução das equações de Laplace e da onda.

3. O problema de Dirichlet no Retângulo

Seja Ω o retângulo $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < a, 0 < y < b\}$.
Podemos decompor a fronteira dessa região em quatro segmentos e suponhamos que as condições de fronteira sejam

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f_0(x), \quad u(x,b) = f_1(x), \\ u(0,y) &= g_0(x), \quad u(a,y) = g_1(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Tais condições não podem ser arbitrárias, pois estamos procurando uma função contínua composta por esses quatro segmentos. Para tanto, devemos ter as seguintes compatibilidades: $f_0(0) = g_0(0)$, $f_0(a) = g_1(0)$, $g_1(b) = f_1(a)$ e $f_1(0) = g_0(b)$.
A ideia para resolver tal problema é decompô-lo em quatro problemas de Dirichlet, e resolvê-los isoladamente. Assim, a solução do problema com as condições de fronteiras (1) será a soma das soluções dos problemas parciais. Vamos então, utilizando a hipótese de que $f(0) = f(a) = 0$, resolver o problema de Dirichlet para o retângulo com a condição de fronteira

$$u(x,0) = f(x), \quad u(x,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0. \tag{2}$$

Então, pelo Método de Separação de Variáveis, temos que a solução do problema de Dirichlet no retângulo é dada por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \mathrm{senh}\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right), \tag{3}$$

desde que a primeira igualdade em (2) seja satisfeita.
Logo os coeficientes γ_n devem ser escolhidos de forma que

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-\frac{n\pi b}{a}} \mathrm{senh}\left(\frac{-n\pi b}{a}\right) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right),$$

o que será viável se $f'(x)$ for seccionalmente contínua, por exemplo.
Tomando $c_n = \gamma_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}$, podemos reescrever $f(x)$ como

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{senh}\left(-\frac{n\pi b}{a}\right) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

Logo, os coeficientes $c_n \mathrm{senh}\left(-\frac{n\pi b}{a}\right)$ devem ser os coeficientes de Fourier dados por

$$\frac{2}{\mathrm{senh}\left(-\frac{n\pi b}{a}\right) a} \int_0^a f(x) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx,$$

e assim vemos que (3) se torna

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \frac{\mathrm{senh}\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)}{\mathrm{senh}\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)}.$$

que é a solução buscada para o problema.

4. A equação da onda

A equação da onda no caso unidimensional é dada por

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \text{ em } \mathbb{R},; \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \text{ para } t \geq 0; \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), \text{ para } 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{4}$$

em que c é constante e $R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < L, t > 0\}$.
Se f e g forem funções dadas em $[0,L]$ tais que $f \in C^2$, $g \in C^1$ e $f''', g'' \in SC[0,L]$ e $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L)$, temos que através do Método de Separação de Variáveis, é possível obter uma solução para (4) dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[& a_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \\ & + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \Big], \end{aligned} \tag{5}$$

em que

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \tag{6}$$

e

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{7}$$

Entendemos como solução clássica do problema, uma função u de classe C^2 em R que seja contínua em $\overline{R}$ e verifique (4).
Dada u de classe C^2 em R que seja contínua em $\overline{R}$, definimos o *funcional energia* por

$$E(t) = K(t) + V(t),$$

em que $K(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u_t^2 dx$ e $V(t) = \frac{1}{2}\int_0^L c^2 u_x^2 dx$.
Sendo assim, se u for solução de (4), então é possível mostrar que a energia é constante e vale a unicidade para tal solução.

4.1 A corda infinita

Considere o problema de vibração de uma corda de comprimento infinito, ou seja, não temos condições de fronteira. Então devemos buscar uma função $u(x,t)$ definida no semiplano fechado $\{x \in \mathbb{R},\ t \leq 0\}$ tal que

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R} \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{8}$$

em que $f(x)$, e $g(x)$ são condições iniciais. Esse problema é conhecido como um Problema de Valor Inicial (PVI) ou um Problema de Cauchy.
Uma característica peculiar da equação das ondas é a existência, sob certas condições, de uma *solução geral*, isto é, uma solução que engloba todas as outras, algo que não é comum em outros tipos de equações diferenciais parciais (essa existência de solução geral surge mais em problemas de equações diferenciais ordinárias).
Se u é solução clássica do problema (8), então é possível mostrar que existem funções F e G tais que

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

e substituindo as condições iniciais, temos que ela é dada pela *Fórmula de D'Alembert*:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Observação 1 *Para a obtenção de solução clássica, foram impostas hipóteses muito fortes no que se refere à diferenciabilidade das condições iniciais. Sendo assim, não podemos estudar vários tipos de fenômenos que são de interesse na literatura. Tais condições nos forçam a ampliar o conceito de solução para o problema, pois há problemas de interesse físico em que f e g não sejam de classe C^1. Essa motivação será abordada posteriormente com a introdução do conceito de soluções generalizadas.*

5. Derivadas Fracas

Definição 2 *Seja $u \in L^2$. Dizemos que u é fracamente diferenciável se existir $v \in L^2$ tal que*

$$\int_0^1 u\phi' = -\int_0^1 v\phi$$

para todo $\phi \in C_0^\infty(0,1)$.

Dizemos que v é a derivada fraca de u e escrevemos $v = u'$, mantendo a mesma notação para a derivada tradicional.

Exemplo 3 Seja $U = (0,2)$ e

$$u(x) = \begin{cases} x, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ 1, \text{ se } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Defina

$$v(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ 0, \text{ se } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Vamos mostrar que a derivada fraca de u é v. Para tanto, escolha uma função teste ϕ e mostremos que

$$\int_0^2 \phi' u dx = -\int_0^2 v\phi dx.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_0^2 u\phi' dx &= \int_0^1 x\phi' dx + \int_1^2 \phi' dx \\ &= \phi(1) - \phi(0) - \int_0^1 \phi dx + \phi(2) - \phi(1) \\ &= -\int_0^1 \phi dx = -\int_0^2 v\phi dx. \end{aligned}$$

Observação 4 *Em nosso trabalho abordamos o **Espaço de Sobolev** $W^{1,2}([0,1])$, constituído das funções $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ que possuem derivada fraca de primeira ordem pertencente ao espaço $L^2([0,1])$.*

6. Objetivos Futuros

Ambos os projetos encontram-se em andamento, sendo que um deles visa estudar soluções clássicas e generalizadas à Sobolev para a equação da onda em uma corda infinita e o outro tratará do Método de Galerkin, utilizando-o juntamente com o Teorema do Ponto Fixo de Brower para garantir a solução fraca de certos problemas elípticos em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira suave tal como

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

desde que f satisfaça hipótese adequadas.

Referências

[1] BUENO, H., ERCOLE, G., ZUMPANO, A. *(Mais uma) Introdução aos Espaços de Sobolev.* Material utilizado no minicurso "(Mais uma) Introdução aos Espaços de Sobolev", 6° EMED - Encontro Mineiro de Equações Diferenciais, UFOP, 2012.

[2] de FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.*(4ª edição). Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA, 2012.

[3] IÓRIO, V. *EDP, um Curso de Graduação.* Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, IMPA, 1991.

[4] EVANS, L. C., *Partial differential equations.* Providence, R. I.: American Mathematical Society, 1998. (Graduate studies in mathematics, v. 19)

[5] CHIPOT, M. *Eliptic Equations: An Introductory Course.* Institute of Mathematics University of Zürich, 2009.

*Projeto financiado pela FAPEMIG e pelo projeto PROBIC/UFOP - 2013.
†Este pôster contém resultados parciais de dois projetos de iniciação científica iniciados em março de 2013.