da comensurabilidade fosse correta, existiria um número racional tal que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

Porém, ao buscarmos os valores p e q nos deparamos com um problema, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 3.7: Irracionalidade da raiz de 2

O número $\sqrt{2}$ não é racional.

Demonstração

Novamente faremos o uso da técnica de redução ao absurdo para provar este resultado.

Suponhamos então, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja um número racional, isto é, $\sqrt{2}$ pode ser escrito na forma de uma fração irredutível entre dois números inteiros p e q, isto é,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

onde p e q são primos entre si (não podem ser simplificados por um divisor comum). Pois bem, elevando ambos os membros dessa igualdade ao quadrado, temos

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

que pode ser simplificado em

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

que podemos reescrever como

$$p^2 = 2q^2$$

o que garante que p^2 é par, logo concluímos que p é par. Então, denotemos $p = 2k$ com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo na equação anterior, vem

$$4k^2 = 2q^2$$