2025년 2학기 학술제 연구자료

From Lagrangian to Feynman Diagrams: Constructing U(1) and SU(2) Gauge Symmetries in the Standard Model

201912577 이창준

목차

연구 개요

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

- 표준모형은 1960년대 1970년대 만들어졌다.
- 표준모형은 게이지 대칭성을 기반으로 중력을 제외한 전자기력, 약력, 강력을 하나의 이론으로 기술한 모형이다.
- Lagrangian density 식을 통해 U(1), SU(2)의 게이지 대칭성과 invariant를 확인하고 파인만 다이어그램을 그려본다.

Dirac Lagrangian

Dirac Lagrangian: $L = i\hbar\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - mc^{2}\psi\overline{\psi}$

- Dirac Lagrangian은 양자역학과 특수상대성 이론을 결합한 식이다.

$i\hbar\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi$

- 운동항으로 시공간에 에너지를 가지고 퍼지는 것을 의미한다. 감마 행렬이 있다.

$- mc^{2}\psi\overline{\psi}$

- 질량항으로 질량이 가지는 정지 했을 때 에너지를 의미한다.
- L= T-V를 표현한다.

U(1) Symmetry Lagrangian

$\psi \mapsto e^{i\theta(x)}\,\psi$ (local phase transform)

$A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \lambda$ (field transform)

$\lambda(x) = -\frac{hc}{q}\,\theta(x)$

$D_\mu = \partial_\mu + i\,\frac{q}{\hbar c} A_\mu$ (covariant derivative)

- 단순히 Dirac 방정식을 U(1)에 대해 쓰면 대칭성이 깨져버리므로 식을 변환해야 한다.
- Local phase transform를 미분하면 θ(x) 에 의해 대칭성이 깨진다. 그러므로 전자기장 field transform으로 같이 변해줄 필요가 있다.
- Lamda는 빛이 변해야 하는 양을 나타낸다.
- Covariant derivative는 θ(x) 를 소거해주는 역할을 한다.

QED Lagrangian (By U(1))

$$L = \overline{\psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

- QED Lagrangian은 Dirac Lagrangian이 U(1) 변환에 대해 불변(Invariant)이 되도록 공변 미분을 도입하여 확장한 식이다.

$$\mathrm{U} = e^{i\theta(x)} \rightarrow (U\psi)^{\dagger}\gamma^{0}(U\psi) = \mathrm{I}(\psi^{\dagger}\psi)$$

- U(1) 게이지 변환의 Unitarity 에 의해, 파동함수의 위상은 변하지만 확률 밀도와 내적 값은 Invariant함을 확인했다.

- Euler-Lagrange equation을 통해 맥스웰 방정식을 구할 수 있다.

SU(2) Symmetry Lagrangian

$$\psi \mapsto e^{i\tau a}\,\psi \quad \text{(global SU(2) transform)}$$

$$\psi \mapsto S\,\psi \;\; where\, S \;\equiv e^{-i\tau a\frac{\lambda(x)}{\hbar c}}$$
(local SU(2) transform)

$$D_\mu = \partial_\mu - i\,g\,\frac{\tau^\alpha}{2} W_\mu^\alpha \quad \text{(covariant derivative)}$$

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu W_\gamma^\alpha - \partial_\nu W_\mu^\alpha + \; g\epsilon^{\alpha\beta\delta} W_\mu^b W_\nu^\delta$$
(field Tensor)

- U(1)과 마찬가지로 단순하게 Dirac lagrangian을 SU(2)에 대해 쓰면 대칭성이 깨진다.
- local SU(2) transform(phase transform)하고 미분을 하면 U(1)과 마찬가지로 깨진다.
- 공변 미분을 통해 대칭성을 유지할 수 있다. W는 U(1)과 다르게 총 3개이다
- Field Tensor를 통해 W 보손들의 에너지와 움직임을 나타낸다. U(1)과 다르게 서로 상쇄되지 않아 뒷 항이 추가된다.

Yang-Mills Lagrangian (By SU(2))

$$L = \overline{\psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\alpha}_{\mu\nu}F^{\alpha\mu\nu}$$

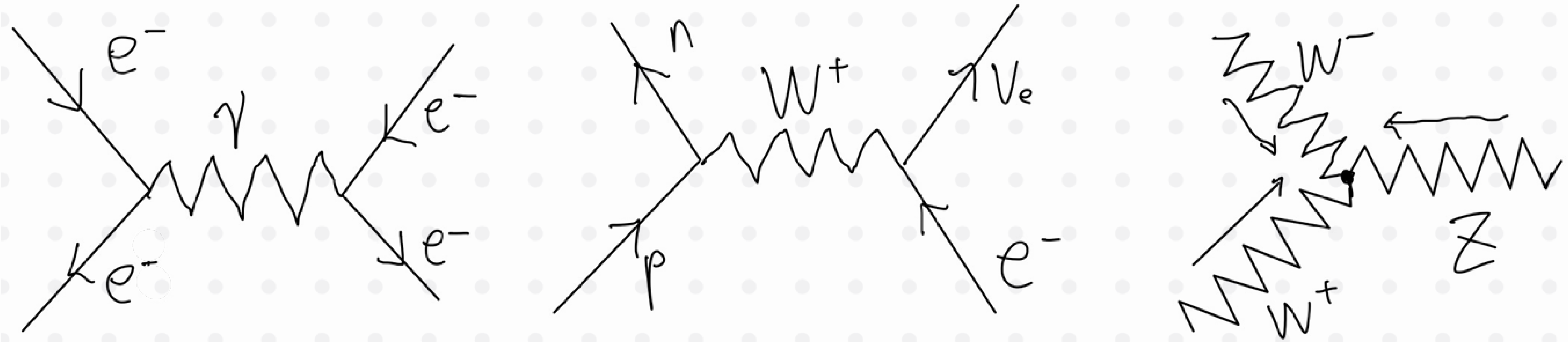
- Yang-Mills Lagrangian은 Dirac Lagrangian이 SU(2) 변환에 대해 불변(Invariant)이 되도록 공변 미분을 도입하여 확장한 식이다.
- 페르미온이 질량을 가지고 움직이면서, 3가지 종류의 힘(약력)을 주고받는 상호작용을 모두 포함하고있다.
- Field Term에서 3개의 보손을 나타낸다.

$$Tr(F'^2) = Tr(UF^2U^{\dagger}) = Tr(F^2)$$

$$\mathrm{U} = e^{i\tau\alpha}$$

- 파울리 행렬(τ)를 통해 Unitary함을 알 수 있고 에너지 밀도에 대한 Trace 값이 일치한다. 그러므로 Invariant함을 확인 할 수 있다.

Feynman Diagram



→ Each vertex corresponds to an interaction term generated by imposing U(1) and SU(2) gauge symmetries

- 파인만 다이어그램에서 입자선이 만나는 점(Vertex)은 게이지 대칭성에 의해 결정된 상호작용의 형태를 나타낸다.

결론

- U(1)은 전자기력에 대칭성을 가지고 SU(2)는 약력에 대칭성을 가진다.
- SU(2)의 Yang-Mills Lagrangian은 QED Lagrangian과 다르게 Field Strength Tensor에서 자기 상호작용 항이 존재한다. 이는 QED에서 빛은 서로 통과하지만 Yang-Mills 장에서는 입자들끼리 서로 힘을 주고 받기 때문이다.
- Dirac Lagrangian에서 QED Lagrangian, Yang-Mills Lagrangian을 얻어서 Gauge symmetry를 만족시키기 위해서는공변 미분을 도입하고 field Transform을 해줄 필요가 있다.
- 파인만 다이어그램에서 선이 만나는 지점(Vertex)에서 표준모형에 의한 상호작용을 확인 할 수 있다.