# 第二讲

# 整数规划建模与算法

主讲教师： 朱建明

Email: jmzhu@ucas.ac.cn

Homepage: http://people.ucas.ac.cn/~jianming

# 目录

- ✓整数规划建模
- ✓分枝定界算法
- ✓割平面算法
- ✓典型应用

# 实例分析

✓ 某厂拟在A，B，C，D，E五个城市中建立若干个产品销售联营点，各处设点都需要资金、人力、设备等，而这样的需求量及能提供的利润各处不同，有些点可能亏本，但却能获得贷款和人力等。设数据已知（见下表），为使总利益最大，问厂方应作出何种最优点策略

# 相关数据

| 资源 城市 | 应投资金（百万元） | 应投人力（人） | 应投设备（套） | 获利（10 万元） |
|---|---|---|---|---|
| A | 4 | 5 | 1 | 4.5 |
| B | 6 | 4 | 1 | 3.8 |
| C | 12 | 12 | 1 | 9.5 |
| D | -8 | 3 | 0 | -2 |
| E | 1 | -8 | 0 | -1.5 |
| 资源限制 | 20 | 15 | 2 | |

# 选址模型

- ✓ 决策变量:

$$x_j = \begin{cases} 1 & 第j个城市被选 \\ 0 & 第j个城市不选 \end{cases}$$

- ✓ 数学模型:

$$\max\ z = 4.5x_1 + 3.8x_2 + 9.5x_3 - 2x_4 - 1.5x_5$$

$$s.t. \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 12x_3 - 8x_4 + x_5 \le 20 \\ 5x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 3x_4 - 8x_5 \le 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \\ x_j = \{0,1\} \qquad (j = 1,2,\ldots,5) \end{cases}$$

# Excel求解

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | A | B | C | D | E | | | |
| 4 | 目标 | 4.5 | 3.8 | 9.5 | -2 | -1.5 | 12.5 | | |
| 5 | 应投资金约束 | 4 | 6 | 12 | -8 | 1 | 17 | <= | 20 |
| 6 | 应投人力约束 | 5 | 4 | 12 | 3 | -8 | 9 | <= | 15 |
| 7 | 应投设备约束 | 1 | 1 | 1 | | | 2 | <= | 2 |
| 8 | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | |
| 12 | | A | B | C | D | E | | | |
| 13 | 可行解 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | | | |
| 14 | | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | |

# 整数规划案例

在一个三年的规划周期内，有五个项目可供选择，下面的表格给出了每一个项目可以带来的期望收益以及相应每年的支出。

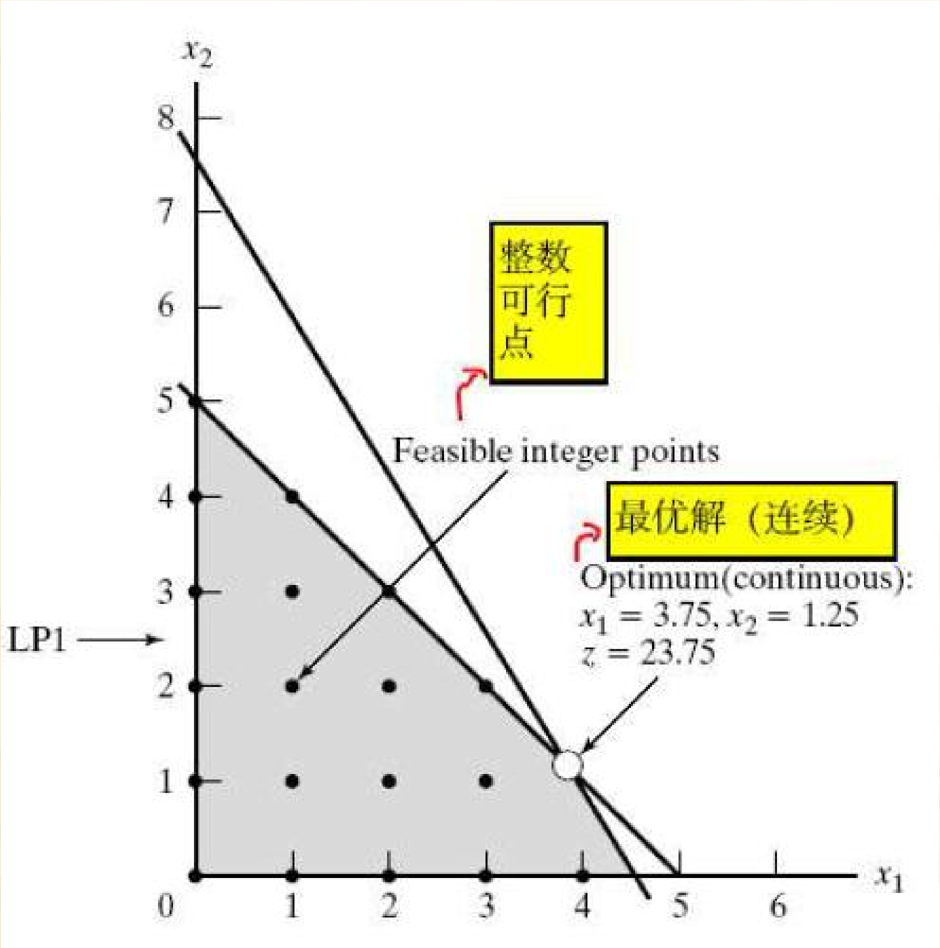
| | 每年支出 (百万美元) | | | |
|---|---|---|---|---|
| 项目 | 1 | 2 | 3 | 收益 (百万美元) |
| 1 | 5 | 1 | 8 | 20 |
| 2 | 4 | 7 | 10 | 40 |
| 3 | 3 | 9 | 2 | 20 |
| 4 | 7 | 4 | 1 | 15 |
| 5 | 8 | 6 | 10 | 30 |
| 可用资金 (百万美元) | 25 | 25 | 25 | |

那么在这个三年规划周期应该选择哪些项目呢？

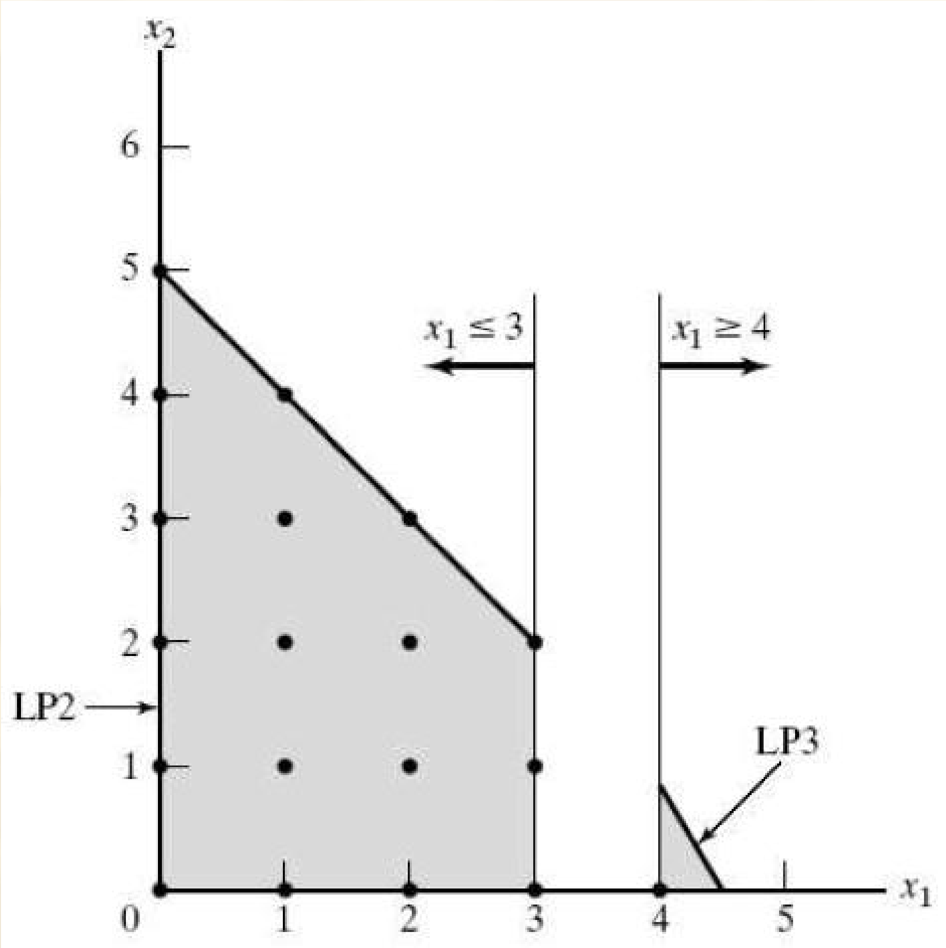
# 分枝定界算法

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 5 \\
& 10x_1 + 6x_2 \le 45 \\
& x_1, x_2 \text{均是非负整数}
\end{aligned}
$$

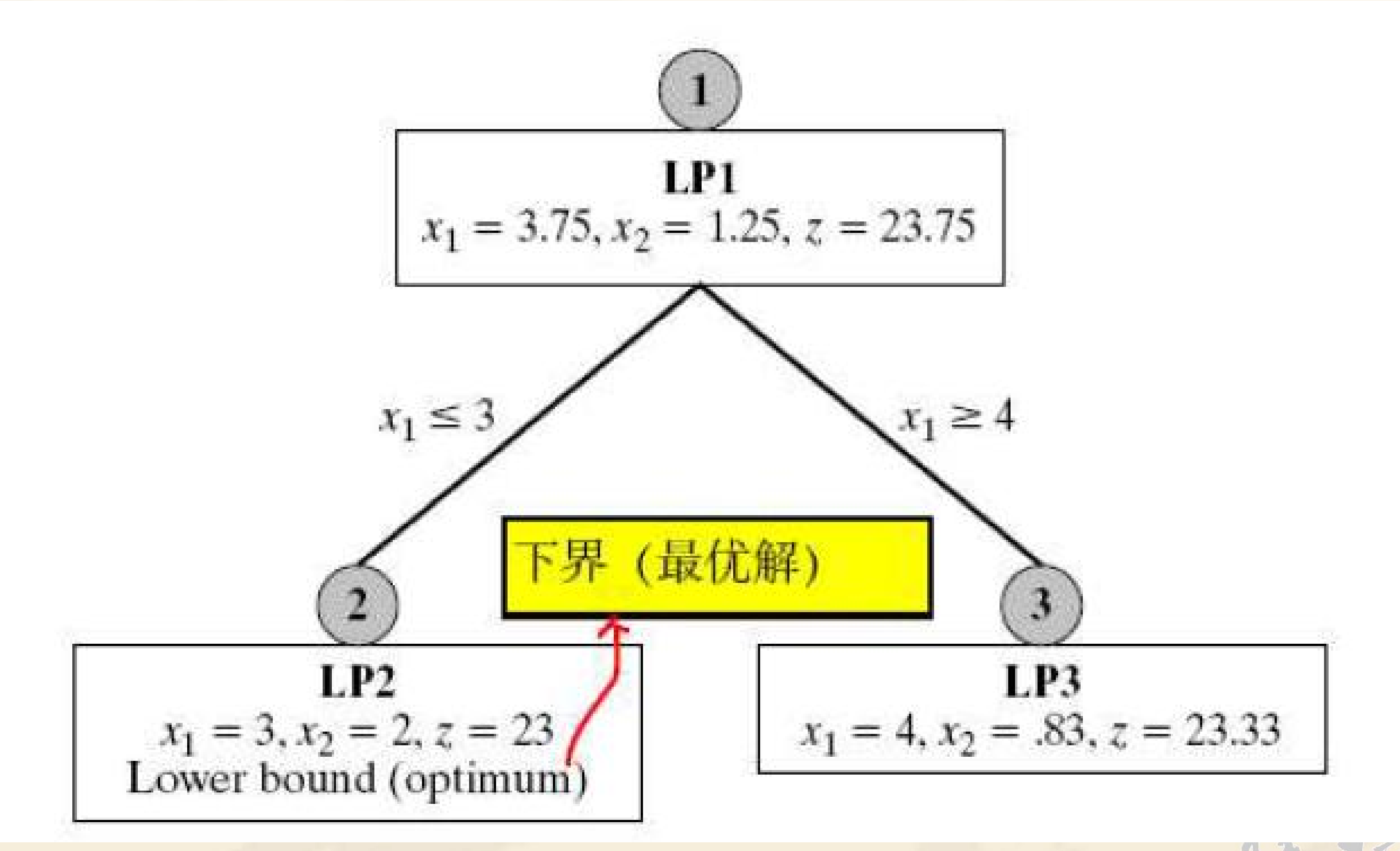
# 可行区域



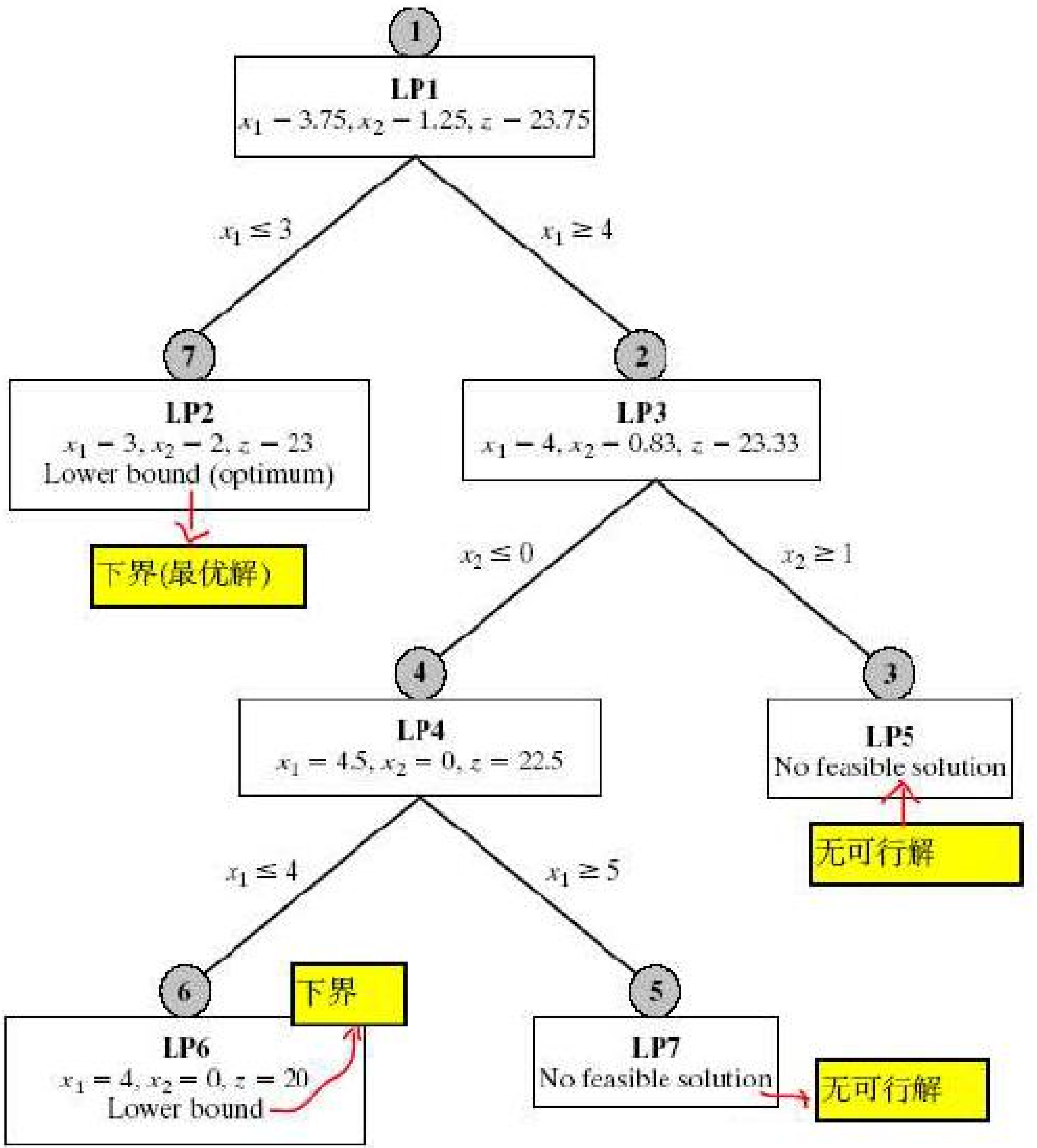
$x_2$
$x_1$
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
整数可行点
Feasible integer points
最优解（连续）
Optimum(continuous):
$x_1 = 3.75, x_2 = 1.25$
$z = 23.75$
LP1



$x_2$
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
$x_1$
$x_1 \le 3$
$x_1 \ge 4$
LP2
LP3



1
LP1
$x_1 = 3.75, x_2 = 1.25, z = 23.75$
$x_1 \leq 3$
$x_1 \geq 4$
下界（最优解）
2
LP2
$x_1 = 3, x_2 = 2, z = 23$
Lower bound (optimum)
3
LP3
$x_1 = 4, x_2 = .83, z = 23.33$

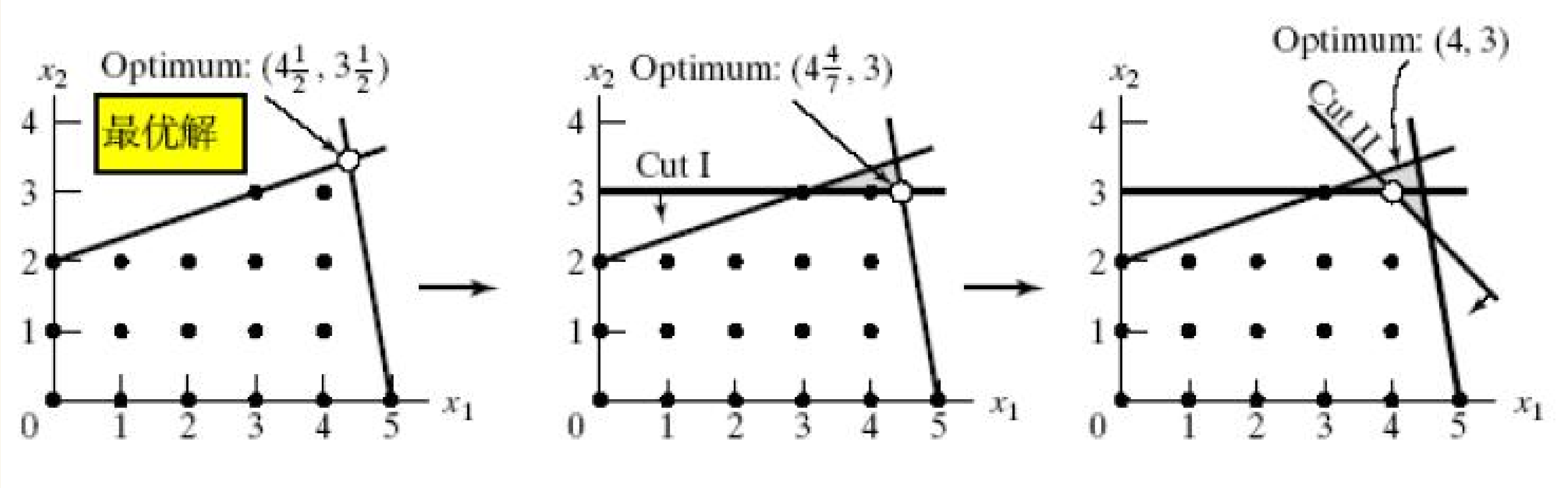


1
LP1
$x_1 = 3.75, x_2 = 1.25, z = 23.75$
$x_1 \le 3$
$x_1 \ge 4$
7
LP2
$x_1 = 3, x_2 = 2, z = 23$
Lower bound (optimum)
下界(最优解)
2
LP3
$x_1 = 4, x_2 = 0.83, z = 23.33$
$x_2 \le 0$
$x_2 \ge 1$
4
LP4
$x_1 = 4.5, x_2 = 0, z = 22.5$
3
LP5
No feasible solution
无可行解
$x_1 \le 4$
$x_1 \ge 5$
6
LP6
$x_1 = 4, x_2 = 0, z = 20$
Lower bound
下界
5
LP7
No feasible solution
无可行解

# 割平面法

与 B&B 算法类似，割平面算法也是从连续的线性规划最优解开始。在连续模型的可行解区域内增加一些特殊的约束（称为 **割** ），并按照一定的方法使得能够找到一个整数的最优极值点。

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 7x_1 + 10x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 3x_2 \le 6 \\
& 7x_1 + x_2 \le 35 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{且均是整数}
\end{aligned}
$$


Optimum: $(4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$
最优解
Optimum: $(4\frac{4}{7}, 3)$
Cut I
Optimum: (4, 3)
Cut II
$x_1$
$x_2$

分别为约束 1 和 2 增加松弛变量 $x_3$ 和 $x_4$ 。最优的线性规划单纯形表是，

| 基 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 解 |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | 0 | $\frac{63}{22}$ | $\frac{31}{22}$ | $66\frac{1}{2}$ |
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{7}{22}$ | $\frac{1}{22}$ | $3\frac{1}{2}$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{22}$ | $\frac{3}{22}$ | $4\frac{1}{2}$ |

# 割的例子

讲解割是如何在单纯形表中工作之前，我们先看看根据其它约束等式是如何构造割的，首先对于 $x_1-$ 行：

$$x_1 - \frac{1}{22}x_3 + \frac{3}{22}x_4 = 4\frac{1}{2}$$

按照上面的方法分解这个等式得到，

$$x_1 + (-1 + \frac{21}{22})x_3 + (0 + \frac{3}{22})x_4 = (4 + \frac{1}{2})$$

相应的割是，

$$-\frac{21}{22}x_3 - \frac{3}{22}x_4 + \frac{1}{2} \leq 0$$

# 添加约束后的单纯形表

| Basic | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | Solution |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | 0 | ~~$\frac{63}{22}$~~ | ~~$\frac{31}{22}$~~ | ~~0~~ | $66\frac{1}{2}$ |
| $x_2$ | 0 | 1 | $\frac{7}{22}$ | $\frac{1}{22}$ | 0 | $3\frac{1}{2}$ |
| $x_1$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{22}$ | $\frac{3}{22}$ | 0 | $4\frac{1}{2}$ |
| $s_1$ | 0 | 0 | $-\frac{7}{22}$ | $-\frac{1}{22}$ | 1 | $-\frac{1}{2}$ |

# 最优单纯形表

| Basic | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | Solution |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | 0 | 0 | $\cancel{1}$ | $\cancel{9}$ | 62 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{7}$ | $-\frac{1}{7}$ | $4\frac{4}{7}$ |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{7}$ | $-\frac{22}{7}$ | $1\frac{4}{7}$ |

最优解中 $x_1$ 和 $x_2$ 仍然不是整数, 任意选择 $x_1$ 作为原始行, 那么有:

$$x_1 + (0 + \frac{1}{7})x_4 + (-1 + \frac{6}{7})s_1 = 4 + \frac{4}{7}$$

相应的割为:

$$-\frac{1}{7}x_4 - \frac{6}{7}s_1 + s_2 = -\frac{4}{7},\ s_2 \geqslant 0 \quad (\text{割 II})$$

# 增加第二个割

| Basic | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | Solution |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | 0 | 0 | ~~1~~ | ~~9~~ | ~~0~~ | 62 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{7}$ | $-\frac{1}{7}$ | 0 | $4\frac{4}{7}$ |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | $\frac{1}{7}$ | $-\frac{22}{7}$ | 0 | $1\frac{4}{7}$ |
| $s_2$ | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{7}$ | $-\frac{6}{7}$ | 1 | $-\frac{4}{7}$ |

# 最优单纯形表

| Basic | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $s_1$ | $s_2$ | Solution |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 7 | 58 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | 0 | –1 | 1 | 4 |
| $x_3$ | 0 | 0 | 1 | 0 | –4 | 1 | 1 |
| $x_4$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | –7 | 4 |

# 指派问题

- ✓现有n项工作需要分配给n个工人去做，每人做其中一项。由于不同工人的劳动效率不同，他们完成同一工作所需的时间也就不同，设工人i完成任务j所需时间为$c_{ij}$，问如何分配工作使完成所有工作所用的总时间最小?这个问题称为指派问题。

# 应用

一个商业经理需要在 Dallas 总部和 Atlanta 分公司之间做 4 次往返旅行，如表 5.42 所示.

**表 5.42: 问题 5 的数据**

| 从 Dallas 出发日期 | 返回 Dallas 的日期 |
|---|---|
| 6 月 3 日，星期一 | 6 月 7 日，星期五 |
| 6 月 10 日，星期一 | 6 月 12 日，星期三 |
| 6 月 17 日，星期一 | 6 月 21 日，星期五 |
| 6 月 25 日，星期二 | 6 月 28 日，星期五 |

从 Dallas 出发的往返旅行机票的价格为 \$400, 如果一张机票的到达和出发日期跨越周末（星期六和星期天）的话，可以打 25% 的折扣. 若在 Atlanta 停留 21 天，折扣率增加到 30%. 一张 Dallas 与 Atlanta 之间（两个方向都可以）的单程票为 \$250. 这位经理该怎样买票呢？

# 指派模型

| | (A,7) | (A,12) | (A,21) | (A,28) |
|---|---|---|---|---|
| (D,3) | 400 | 300 | 300 | **280** |
| (D,10) | **300** | 400 | 300 | 300 |
| (D,17) | 300 | **300** | 400 | 300 |
| (D,25) | 300 | 300 | **300** | 400 |

# 到底有多少骆驼?

一个行为古怪的阿拉伯酋长留下了一份遗嘱，遗嘱中将他的骆驼群分给他的三个儿子： Tarek 至少得到半数的牧群， Sharif 至少得到牧群三分之一，Maisa 至少得到牧群九分之一，剩余的捐献给慈善机构。遗嘱中并没有指出到底牧群的数目是多少，只是告诉了这个骆驼群的数目是个奇数，并且这个指定的慈善机构恰好得到了一匹骆驼。利用整数线性规划模型确定这个酋长到底留下了多少匹骆驼，并且指出每个儿子各得到多少匹。