



第三讲 组合优化问题

主讲教师：朱建明

Email: jmzhu@ucas.ac.cn

Homepage: <http://people.ucas.ac.cn/~jianming>



- ✓ 优化技术是一种以数学为基础, 用于求解各种工程问题优化的应用技术, 是一个重要的科学分支, 在诸多工程领域得到迅速推广和应用。
- ✓ 任何控制与决策问题本质上都是优化问题!
- ✓ 项目管理与统筹法。
- ✓ 鉴于实际工程问题的复杂性、约束性、非线性、多极小、建模困难等特点, 寻求一种适合于大规模问题的具有智能特征的算法, 已成为有关学科的一个主要研究目标和引人注目的研究方向。

最优化问题的描述

✓ 最优化问题的数学模型的一般描述:

$$\min_{x \in F} f(x)$$

博学笃志
格物明德

洛甫样

优化问题分类

- ✓ 函数优化，组合优化，混合型
- ✓ 约束优化，无约束优化
- ✓ 单目标，多目标
- ✓ 确定性，随机性，模糊
- ✓ 在线，离线

博学笃志
格物明德

洛甫样

函数优化问题

令 S 为 R^n 上的有界子集（即变量 的定义域），
 $f : S \rightarrow R$ 为 n 维实值函数，所谓函数 f 在 S 域上
全局最小化就是寻求点 $X_{\min} \in S$ 使得 $f(X_{\min})$ 在
 S 域上全局最小，即 $\forall X \in S : f(X_{\min}) \leq f(X)$ 。

函数优化问题

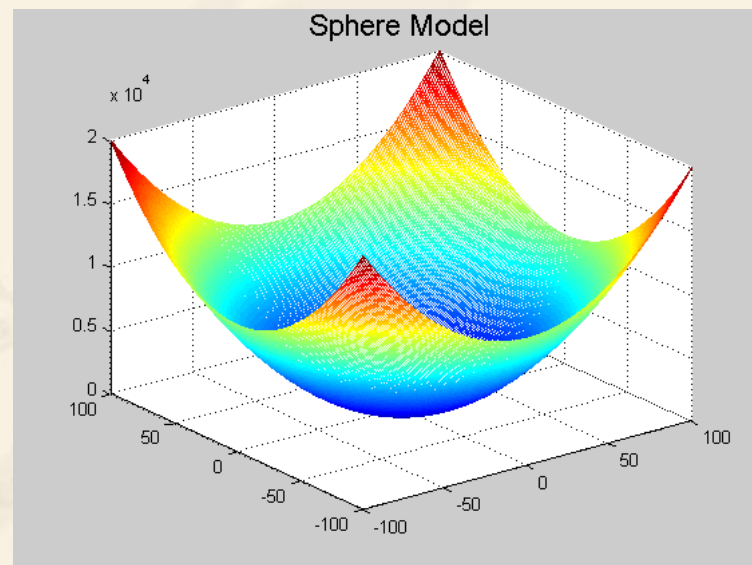
◆ 测试函数（Benchmark问题）

（1）Sphere Model

$$f(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad |x_i| \leq 100$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0,0,\dots,0) = 0$$



函数优化问题

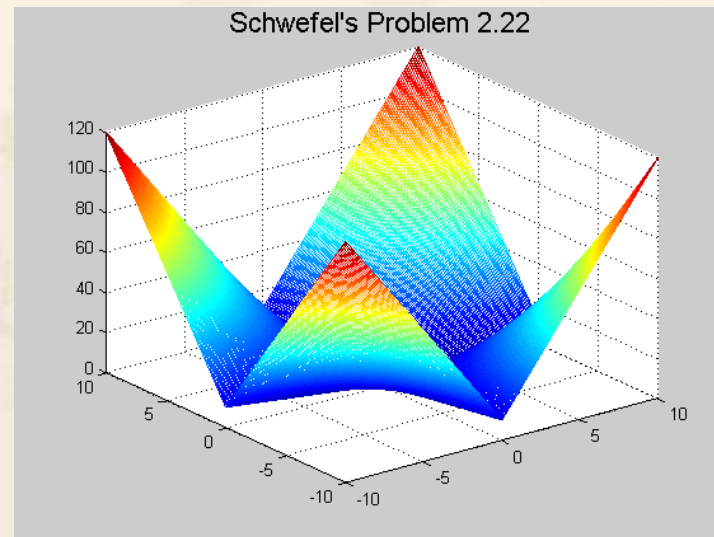
◆ 测试函数

(2) Schwefel's Problem 2.22

$$f(X) = \sum_{i=1}^n |x_i| + \prod_{i=1}^n |x_i|, \quad |x_i| \leq 10$$

其最优状态和最优值为

$$\min(f(X^*)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$$





连续优化问题求解

- ✓ 最优化计算方法

博学笃志
格物明德

洛甫样



Combinatorial optimization (组合优化)

- ✓ **Combinatorial optimization** is a branch of optimization. Its domain is optimization problems where the set of feasible solutions is discrete or can be reduced to a discrete one, and the goal is to find the best possible solution.

格物明德
博学笃志

洛甫样

Combinatorial optimization (组合优化)

令 $\Omega = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ 为所有状态构成的解空间,
 $C(s_i)$ 为状态 s_i 对应的目标函数值, 要求寻找最
优解 s^* , 使得 $\forall s_i \in \Omega, C(s^*) = \min C(s_i)$ 。

博学笃志
格物明德

洛甫样

Combinatorial optimization (组合优化)

✓ 组合优化问题的一般形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \geq 0, \\ & x \in D \end{aligned}$$

✓ 三参数表示 (D, F, f)

博学笃志
格物明德

洛甫样

- ✓ 中值问题(P-median)
- ✓ 覆盖问题(cover)
- ✓ 中心问题(P-center)

博学笃志
格物明德

洛甫样

中值问题(P-median)

- ✓ P—中值选址问题是选定P个设施的位置，使全部或平均性能最优的问题。通常是使成本最小，如使总(平均)运输距离最小，使总(平均)需求权距离最小，使总运输时间最少，或者使总运输费用最小等，故又称为最小和问题。
- ✓ 这里的距离指需求点与最近设施之间的距离，需求权距离指需求点的需求量和该需求点与最近设施的距离的乘积。

覆盖问题(cover)

- ✓ 尽管 p -中值问题的应用非常广泛，但有一些选址问题，如一些提供紧急服务的设施(消防站、急救中心等)的选址用最小和目标就不太恰当，这时我们可以用覆盖模型来分析。
- ✓ 设施A覆盖需求点B是指A能在规定的时间或距离内服务B。覆盖问题主要有两种基本的模型：**集合覆盖模型**和**最大覆盖模型**。

集合覆盖(Location Set Covering Problem)

- ✓ 集合覆盖模型是1971年Toregas等首先提出的，即用最少的设施安置费去覆盖所有需求点，当每个设施的安置费相同时，问题简化为用最少的设施覆盖所有的需求点

博学笃志
格物明德

洛甫样

最大覆盖问题

- ✓ 由于集合覆盖模型要覆盖所有的需求点，所需设施数往往过大而超过实际承受能力，而且没有区分各需求点，人们自然会想到先**固定设施数目**，再确定它们的位置使得覆盖尽可能多的需求点或需求量，这就是Churh和Revelle（1974）提出的最大覆盖模型。

中心问题(P-center)

- ✓ P—中心问题是指选定P个设施的位置，使最坏的情况最优，如使最大反应时间最小、使需求点与最近设施的最大距离最小或使最大损失最小等，所以也叫极小化极大问题，最优目标值也叫P—半径。
- ✓ 这是一种保守的方法，通常在军队、医院、紧急情况和有服务标准承诺的服务行业(如比萨店承诺半小时内把订餐送到)中使用，有时也称作“经济平衡性”。



Combinatorial optimization problem

- ✓ Bin packing problem
- ✓ Graph coloring problem
- ✓ Scheduling problem
- ✓ Set cover problem

博学笃志
格物明德

洛甫样

Bin packing problem

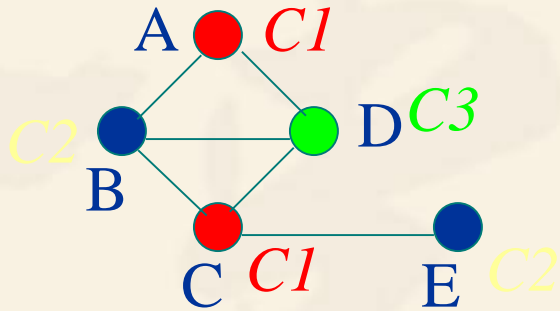
- ✓ 有 n 个尺寸不超过1的物品，有数个尺寸为1的箱子，如何将这此物品装入箱子，使得所需箱子的个数最少。

博学笃志
格物明德

洛甫样

Graph coloring problem

- ✓ 对于 n 个顶点的无向图 G ，要求对其各个顶点进行着色，使得任意两个相邻的顶点都有不同的颜色，且所用颜色种类最少。



C1: 第一种颜色

C2: 第二种颜色

C3: 第三种颜色

Scheduling problem

- ✓ Job-shop: n 个工件在 m 台机器上加工,
- ✓ O_{ij} : 第 i 个工件在第 j 台机器上的操作,
- ✓ T_{ij} : 相应的操作时间, 已知。
- ✓ 事先给定各工件在各机器上的加工次序（技术约束条件），要求确定与技术约束条件相容的各机器上所有工件的加工顺序，使得加工性能指标达到最优。



Set cover problem

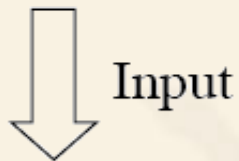
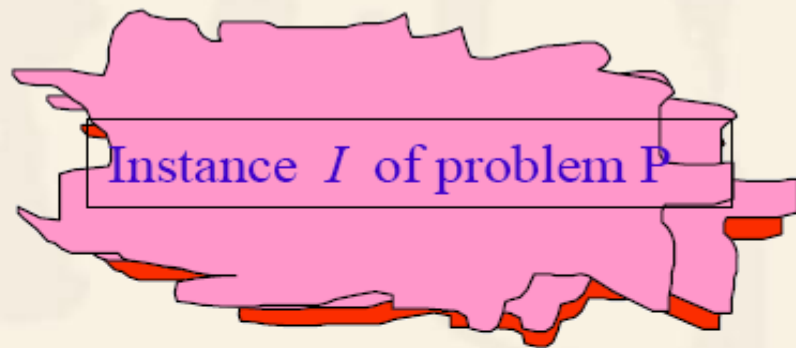
- ✓ Given a universe U of n elements, a collection of subsets of U , $C = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, and a cost function $c: C \rightarrow Q^+$, find a minimum cost sub-collection of C that covers all elements of U .

博学笃志
格物明德

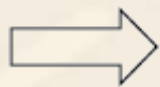
洛甫样

小结：一个通俗的定义

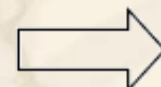
所谓组合优化，是指在离散的、有限的数学结构上，寻找一个（或一组）满足给定约束条件并使其目标函数值达到最大或最小的解。一般来说，组合优化问题通常带有大量的局部极值点，往往是不可微的、不连续的、多维的、有约束条件的、高度非线性的NP完全（难）问题，因此，精确地求解组合优化问题的全局最优解的“有效”算法一般是不存在的。



a_1, \dots, a_n



Algorithm



Output

博学笃志
格物明德

洛甫样