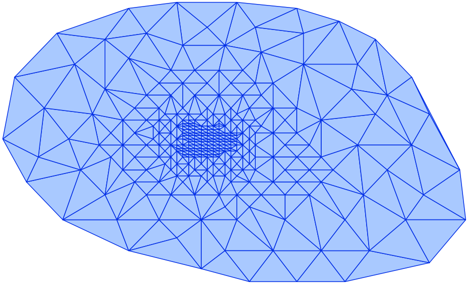


Métodos Numéricos para Geração de Malhas – SME0250

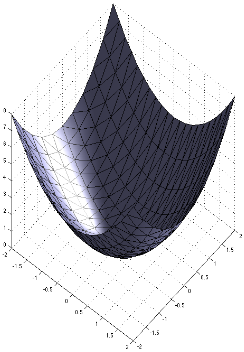
Complexos Simpliciais e Estruturas de Dados

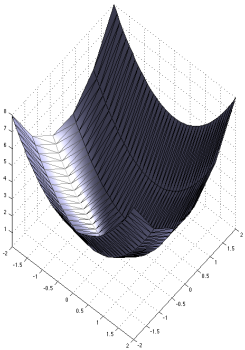
Afonso Paiva
ICMC-USP

19 de agosto de 2016

Qualidade da malha importa

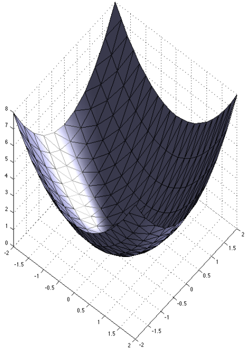
Dois parabolóides: $z = x^2 + y^2$ com $(x, y) \in [-1, 1]^2$ com 400 triângulos.

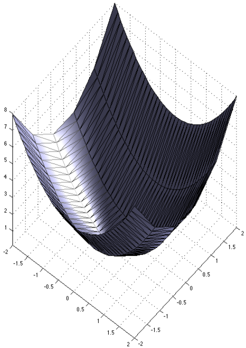


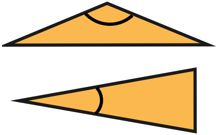


Qualidade da malha importa

Dois parabolóides: $z = x^2 + y^2$ com $(x, y) \in [-1, 1]^2$ com 400 triângulos.







Triângulos finos causam erro de discretização e de interpolação de derivadas.

Células e Simplexos

Definição (célula)

Dado um conjunto de pontos $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, a célula gerada por estes pontos é o conjunto (combinação convexa):

$$[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k] = \left\{ \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i \,;\, \lambda_i \geq 0 \,;\, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

Células e Simplexos

Definição (célula)

Dado um conjunto de pontos $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$, a célula gerada por estes pontos é o conjunto (combinação convexa):

$$[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k] = \left\{ \mathbf{v} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \mathbf{v}_i \,;\, \lambda_i \geq 0 \,;\, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

Exemplo

A célula gerada por $[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ pode ser um ponto, um segmento de reta ou um triângulo, de acordo com a relação de dependência linear dos vetores $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0$.

Células e Simplexos

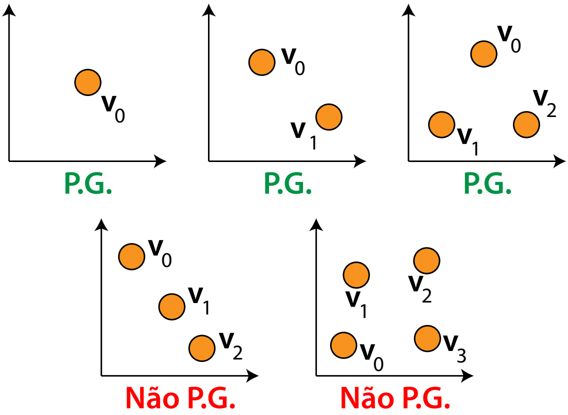
Definição (posição geral)

Dado um conjunto de pontos $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que eles estão em posição geral, se para qualquer subconjunto $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, com $k \leq n$, os vetores $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0$ são LI.

Células e Simplexos

Definição (posição geral)

Dado um conjunto de pontos $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que eles estão em posição geral, se para qualquer subconjunto $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, com $k \leq n$, os vetores $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_0$ são LI.



Células e Simplexos

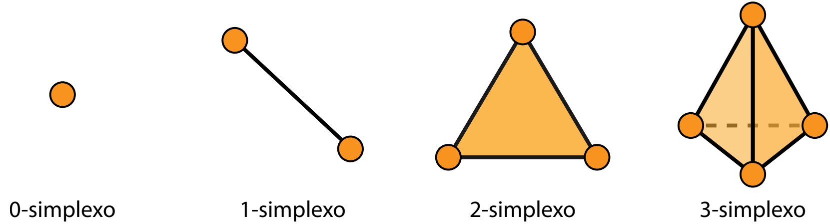
Definição (k-simplexo)

Quando $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ estão em posição geral, a célula por eles gerada é chamada de simplexo de dimensão k ou k-simplexo. Denotaremos tal simplexo por $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Células e Simplexos

Definição (k-simplexo)

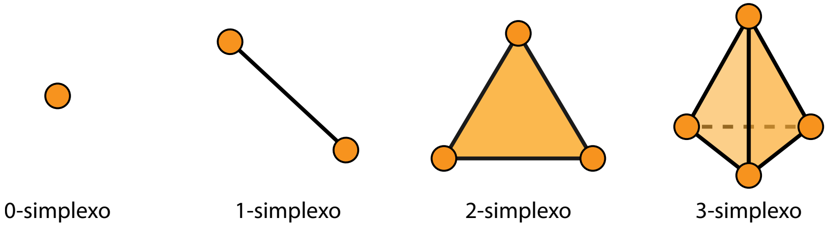
Quando $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ estão em posição geral, a célula por eles gerada é chamada de simplexo de dimensão k ou k-simplexo. Denotaremos tal simplexo por $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.



Células e Simplexos

Definição (k-simplexo)

Quando $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ estão em posição geral, a célula por eles gerada é chamada de simplexo de dimensão k ou k-simplexo. Denotaremos tal simplexo por $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.



Dado $\sigma = \langle \mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, cada ponto $\mathbf{v}_i$ é chamado de vértice (ou 0-faces). Os 1-simplexos gerados pelo par $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$, com $i \neq j$, são chamados de arestas (1-faces). Os 2-simplexos gerados por $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k \rangle$, com $i \neq j \neq k$, são chamados de faces (2-faces) de σ.

Decomposição Celular

Definição (decomposição celular)

Uma decomposição celular de um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto finito de células $\mathcal{C} = \{c_i\}$ que satisfazem às seguintes propriedades:

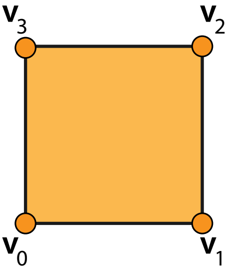
1. $D = \cup_i c_i$ e
2. Se $c_i, c_j \in \mathcal{C}$ então $c_i \cap c_j \in \mathcal{C}$.

Decomposição Celular

Definição (decomposição celular)

Uma decomposição celular de um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto finito de células $\mathcal{C} = \{c_i\}$ que satisfazem às seguintes propriedades:

1. $D = \cup_i c_i$ e
2. Se $c_i, c_j \in \mathcal{C}$ então $c_i \cap c_j \in \mathcal{C}$.



Decomposição celular do quadrado unitário que possui células de 0, 1 e 2 dimensões:

- dimensão 0: $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$
- dimensão 1: $[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1], [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2], [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3], [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0]$
- dimensão 2: $[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]$

Complexo Simplicial

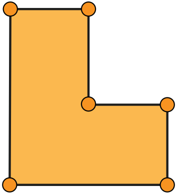
Definição (complexo simplicial)

Quando todos os elementos de uma decomposição celular de uma região D são simplexos dizemos que ela é um complexo simplicial (ou triangulação) de D e denotaremos por $\mathcal{T}(D)$.

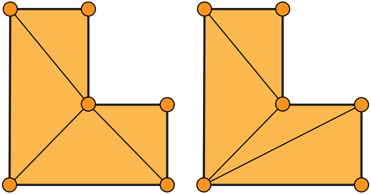
Complexo Simplicial

Definição (complexo simplicial)

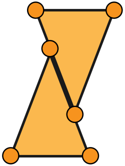
Quando todos os elementos de uma decomposição celular de uma região D são simplexos dizemos que ela é um complexo simplicial ~~(ou triangulação)~~ de D e denotaremos por $\mathcal{T}(D)$.



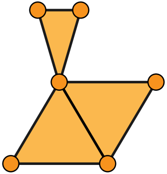
região *D*



duas triangulações de *D*

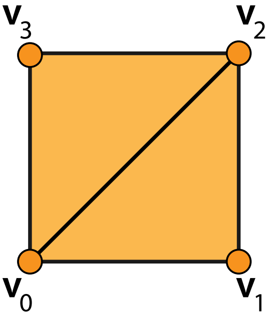


trinagulação inválida

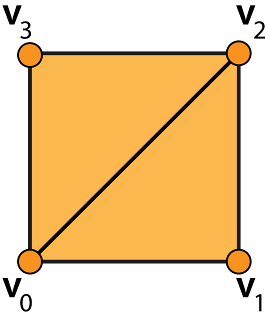


triangulação válida

Triangulação de Coxeter-Freudenthal-Kuhn (CFK)



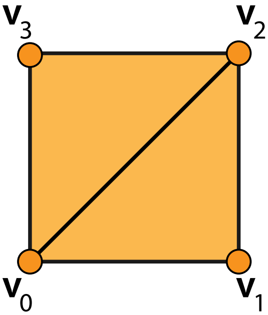
Triangulação de Coxeter-Freudenthal-Kuhn (CFK)



A triangulação de um quadrado é formada pelos simplexos:

- 0-simplexos: $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

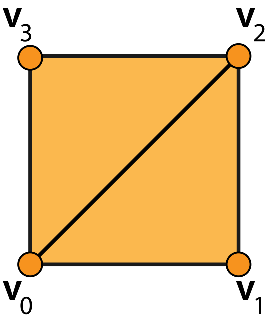
Triangulação de Coxeter-Freudenthal-Kuhn (CFK)



A triangulação de um quadrado é formada pelos simplexos:

- 0-simplexos: $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$
- 1-simplexos: $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle, \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 \rangle, \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 \rangle$

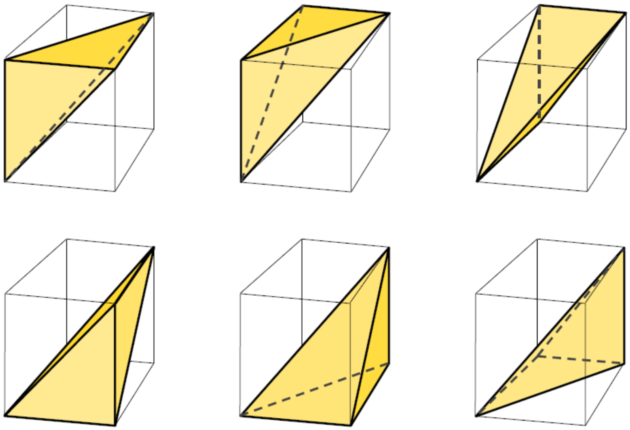
Triangulação de Coxeter-Freudenthal-Kuhn (CFK)



A triangulação de um quadrado é formada pelos simplexos:

- 0-simplexos: $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$
- 1-simplexos: $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle, \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle, \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_0 \rangle, \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 \rangle$
- 2-simplexos: $\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$

Triangulação de Coxeter-Freudenthal-Kuhn (CFK)



Usando a diagonal do cubo, podemos decompô-lo em 6 tetraedros (3-simplexos).

Fecho

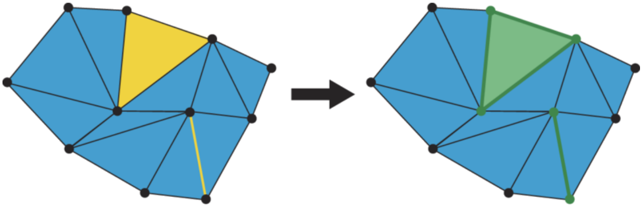
Definição (fecho)

Seja Σ uma coleção de simplexos em $\mathcal{T}(D)$. O fecho de Σ, denotado por $\mathrm{close}(\Sigma)$, é o menor subconjunto de $\mathcal{T}(D)$ que contém todas faces de Σ.

Fecho

Definição (fecho)

Seja Σ uma coleção de simplexos em $\mathcal{T}(D)$. O fecho de Σ, denotado por $\mathrm{close}(\Sigma)$, é o menor subconjunto de $\mathcal{T}(D)$ que contém todas faces de Σ.



O fecho $\mathrm{close}(\sigma)$ pode ser obtido adicionando a σ todas as suas faces.

Estrela

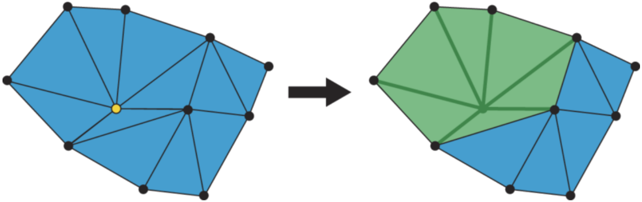
Definição (estrela)

Seja Σ uma coleção de simplexos em $\mathcal{T}(D)$. Uma estrela de Σ, denotada por $\mathrm{star}(\Sigma)$, é o conjunto de todos os simplexos em $\mathcal{T}(D)$ que tenham uma face em Σ.

Estrela

Definição (estrela)

Seja Σ uma coleção de simplexos em $\mathcal{T}(D)$. Uma estrela de Σ, denotada por $\mathrm{star}(\Sigma)$, é o conjunto de todos os simplexos em $\mathcal{T}(D)$ que tenham uma face em Σ.



Geralmente $\mathrm{star}(\Sigma)$ não é um complexo simplicial!

Link & 1-anel

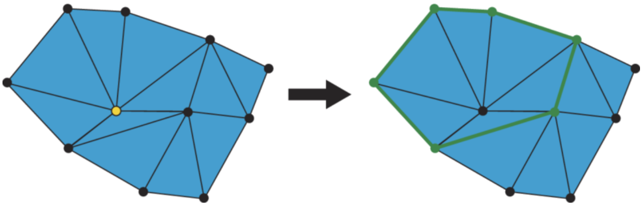
Definição (link)

Seja Σ uma coleção de simplexos em $\mathcal{T}(D)$. O link de Σ, denotado por $\mathrm{link}(\Sigma)$, é definido por $\mathrm{close}(\mathrm{star}(\Sigma)) \setminus \mathrm{star}(\mathrm{close}(\Sigma))$.

Link & 1-anel

Definição (link)

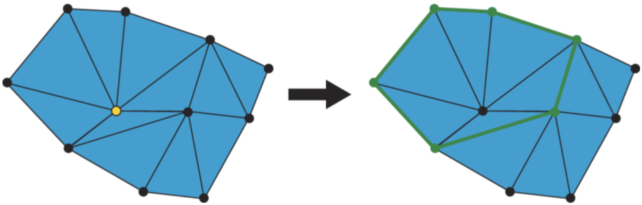
Seja Σ uma coleção de simplexos em $\mathcal{T}(D)$. O link de Σ, denotado por $\mathrm{link}(\Sigma)$, é definido por $\mathrm{close}(\mathrm{star}(\Sigma)) \setminus \mathrm{star}(\mathrm{close}(\Sigma))$.



Link & 1-anel

Definição (link)

Seja Σ uma coleção de simplexos em $\mathcal{T}(D)$. O link de Σ, denotado por $\mathrm{link}(\Sigma)$, é definido por $\mathrm{close}(\mathrm{star}(\Sigma)) \setminus \mathrm{star}(\mathrm{close}(\Sigma))$.

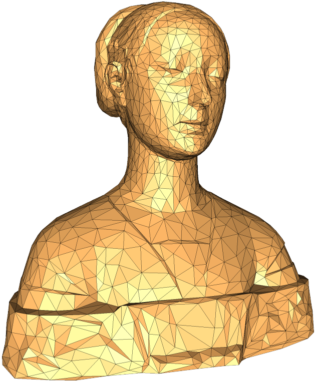


Definição (1-anel)

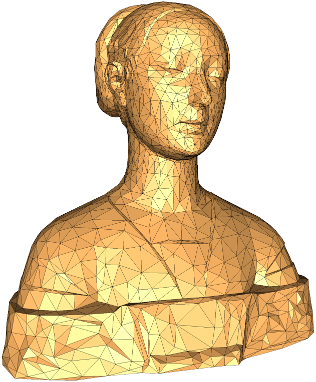
O 1-anel de um vértice **v** é o conjunto de vértices de $\mathrm{link}(\mathbf{v})$.

Estruturas de Dados (ED)

O que armazenar na ED?



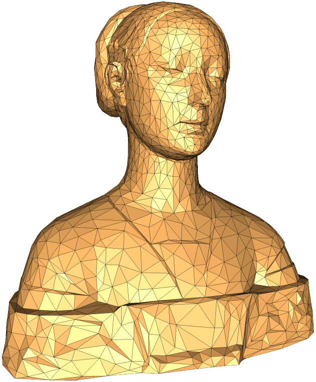
O que armazenar na ED?



- Geometria:

Estruturas de Dados (ED)

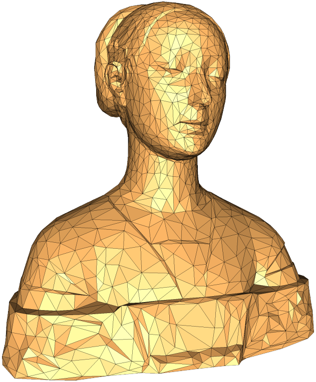
O que armazenar na ED?



- Geometria:
  - coordenadas 2D ou 3D;

Estruturas de Dados (ED)

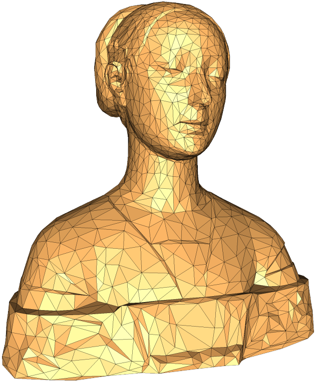
O que armazenar na ED?



- Geometria:
  - coordenadas 2D ou 3D;
- Atributos de vértice ou face:

Estruturas de Dados (ED)

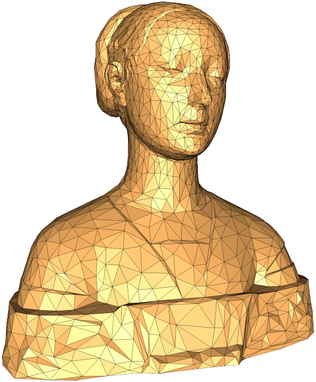
O que armazenar na ED?



- Geometria:
  - coordenadas 2D ou 3D;
- Atributos de vértice ou face:
  - normal, cor, coordenada de textura;

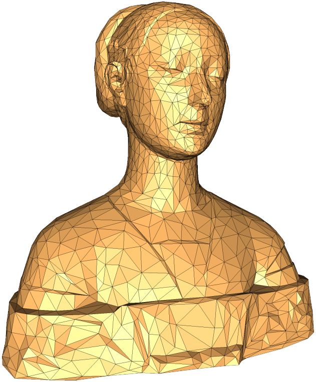
Estruturas de Dados (ED)

O que armazenar na ED?



- Geometria:
  - coordenadas 2D ou 3D;
- Atributos de vértice ou face:
  - normal, cor, coordenada de textura;
- Topologia:

O que armazenar na ED?



- Geometria:
  - coordenadas 2D ou 3D;
- Atributos de vértice ou face:
  - normal, cor, coordenada de textura;
- Topologia:
  - relações de adjacência (conectividade).

Estruturas de Dados (ED)

O que a ED deve suportar?

Estruturas de Dados (ED)

O que a ED deve suportar?

- Rendering;

Estruturas de Dados (ED)

O que a ED deve suportar?

- Rendering;
- Consultas geométricas:

Estruturas de Dados (ED)

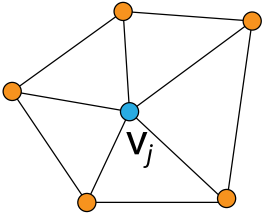
O que a ED deve suportar?

- Rendering;
- Consultas geométricas:
  - Quais são os vértices da face i?

Estruturas de Dados (ED)

O que a ED deve suportar?

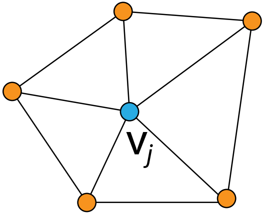
- Rendering;
- Consultas geométricas:
  - Quais são os vértices da face i?
  - Qual são os vértices do 1-anel do vértice j?



Estruturas de Dados (ED)

O que a ED deve suportar?

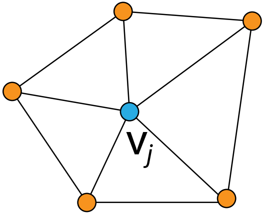
- Rendering;
- Consultas geométricas:
  - Quais são os vértices da face i?
  - Qual são os vértices do 1-anel do vértice j?
  - Quais são as faces adjacentes a face k?



Estruturas de Dados (ED)

O que a ED deve suportar?

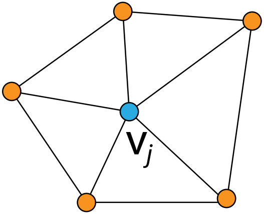
- Rendering;
- Consultas geométricas:
  - Quais são os vértices da face i?
  - Qual são os vértices do 1-anel do vértice j?
  - Quais são as faces adjacentes a face k?
- Modificações:



Estruturas de Dados (ED)

O que a ED deve suportar?

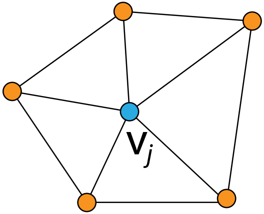
- Rendering;
- Consultas geométricas:
  - Quais são os vértices da face i?
  - Qual são os vértices do 1-anel do vértice j?
  - Quais são as faces adjacentes a face k?
- Modificações:
  - Remover ou adicionar um vértice/face;

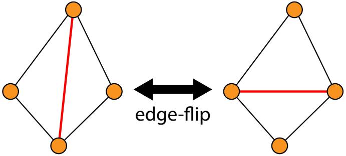


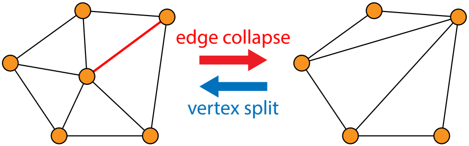
Estruturas de Dados (ED)

O que a ED deve suportar?

- Rendering;
- Consultas geométricas:
  - Quais são os vértices da face i?
  - Qual são os vértices do 1-anel do vértice j?
  - Quais são as faces adjacentes a face k?
- Modificações:
  - Remover ou adicionar um vértice/face;
  - *edge-flip*, *edge collapse*, *vertex split*

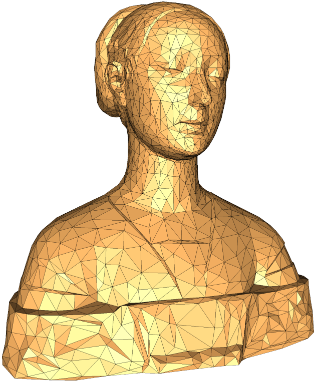






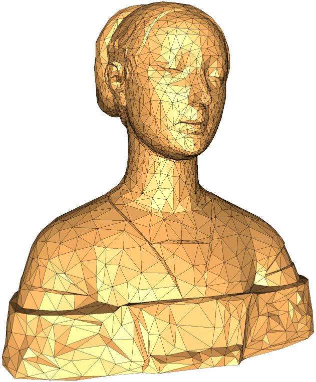
Estruturas de Dados (ED)

O quão eficiente é a ED?



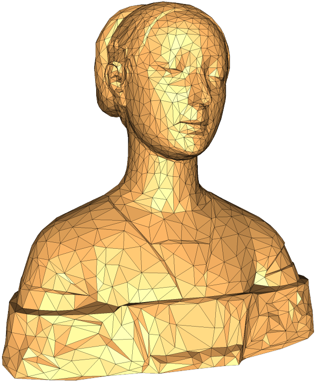
Estruturas de Dados (ED)

O quão eficiente é a ED?



- Tempo de construção (pré-processamento);

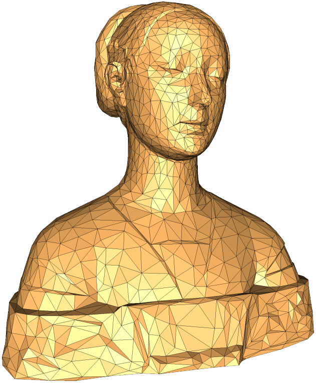
O quão eficiente é a ED?



- Tempo de construção (pré-processamento);
- Tempo de resposta de uma consulta;

Estruturas de Dados (ED)

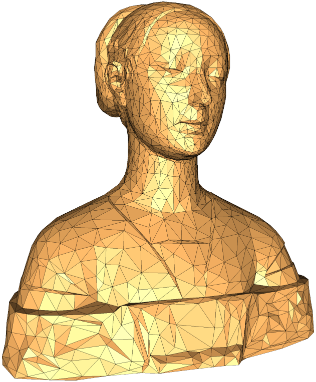
O quão eficiente é a ED?



- Tempo de construção (pré-processamento);
- Tempo de resposta de uma consulta;
- Tempo para realizar uma operação;

Estruturas de Dados (ED)

O quão eficiente é a ED?



- Tempo de construção (pré-processamento);
- Tempo de resposta de uma consulta;
- Tempo para realizar uma operação;
- Consumo de memória RAM.

Face Set

- Face: 3 posições;
- Não possui conectividade;
- Arquivos do formato STL;
- Simples e redundante.

Triângulos		
(x_1^1, y_1^1, z_1^1)	(x_2^1, y_2^1, z_2^1)	(x_3^1, y_3^1, z_3^1)
(x_1^2, y_1^2, z_1^2)	(x_2^2, y_2^2, z_2^2)	(x_3^2, y_3^2, z_3^2)
(x_1^3, y_1^3, z_1^3)	(x_2^3, y_2^3, z_2^3)	(x_3^3, y_3^3, z_3^3)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
(x_1^f, y_1^f, z_1^f)	(x_2^f, y_2^f, z_2^f)	(x_3^f, y_3^f, z_3^f)

Shared Vertex

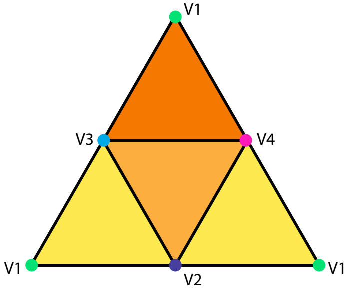
- Vértice: posição;
- Face: índices dos vértices;
- Não possui informação de vizinhança;
- Arquivos dos formatos OBJ, OFF e PLY;

Vértices		
x^1	y^1	z^1
x^2	y^2	z^2
x^3	y^3	z^3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^v	y^v	z^v

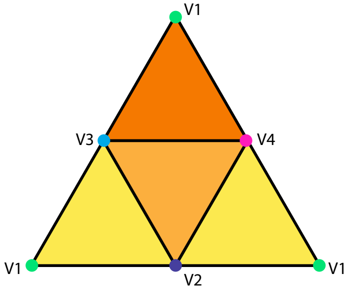
Triângulos		
$\mathbf{v}_1^1$	$\mathbf{v}_2^1$	$\mathbf{v}_3^1$
$\mathbf{v}_1^2$	$\mathbf{v}_2^2$	$\mathbf{v}_3^2$
$\mathbf{v}_1^3$	$\mathbf{v}_2^3$	$\mathbf{v}_3^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{v}_1^f$	$\mathbf{v}_2^f$	$\mathbf{v}_3^f$

Shared Vertex no MATLAB

Como representar e desenhar um tetraedro no MATLAB?



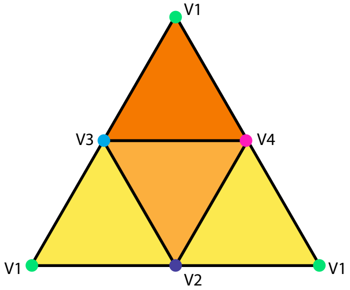
Como representar e desenhar um tetraedro no MATLAB?



Vértices		
1.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0
0.0	0.0	1.0
0.0	0.0	0.0

Shared Vertex no MATLAB

Como representar e desenhar um tetraedro no MATLAB?



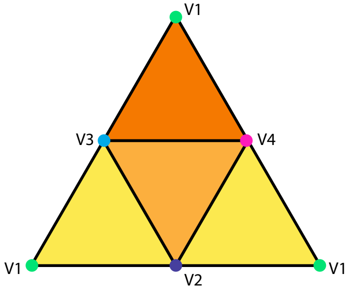
Vértices		
1.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0
0.0	0.0	1.0
0.0	0.0	0.0

Triângulos		
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$

Atenção: impor orientação nas faces (regra da mão direita).

Shared Vertex no MATLAB

Como representar e desenhar um tetraedro no MATLAB?



Vértices		
1.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0
0.0	0.0	1.0
0.0	0.0	0.0

Triângulos		
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$

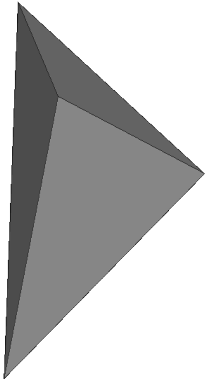
Atenção: impor orientação nas faces (regra da mão direita).

```
trimesh(trigs,X,Y,Z)
% trigs:  lista de triângulos (índices)
% X,Y,Z: coordenadas dos vértices
```

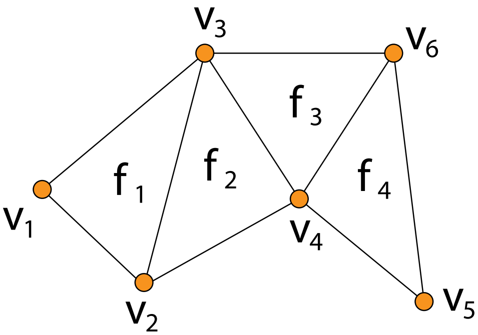
Exemplo: arquivos .OBJ

Tetraedro

```
# OBJ file format with ext .obj
v 1.0 0.0 0.0
v 0.0 1.0 0.0
v 0.0 0.0 1.0
v 0.0 0.0 0.0
f 2 4 3
f 4 2 1
f 3 1 2
f 1 3 4
```

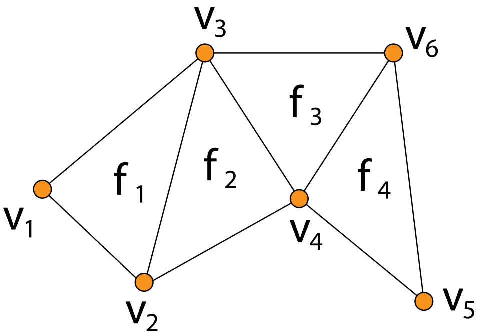


Shared Vertex



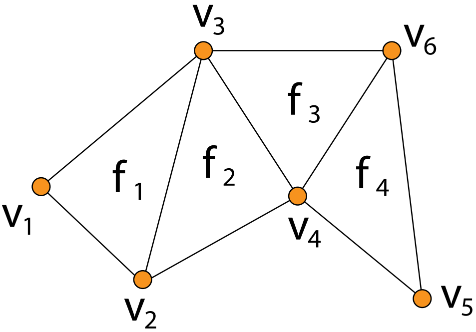
- Quem são os vértices da face f_1?;

Shared Vertex



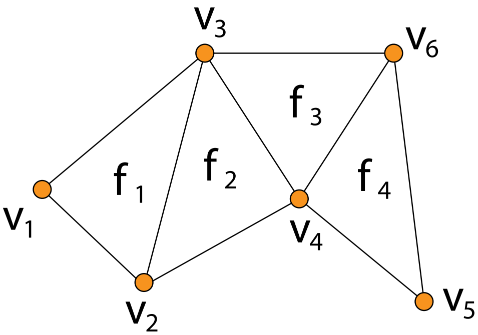
- Quem são os vértices da face $\mathbf{f}_1$?;
  - $O(1)$ – basta consultar a lista de faces;

Shared Vertex



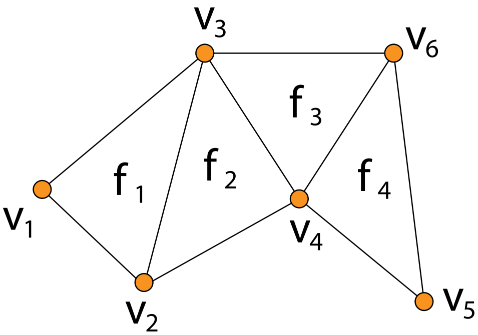
- Quem são os vértices da face $\mathbf{f}_1$?;
  - $O(1)$ – basta consultar a lista de faces;
- Quem são os vértices do 1-anel do vértice $\mathbf{v}_3$?;

Shared Vertex



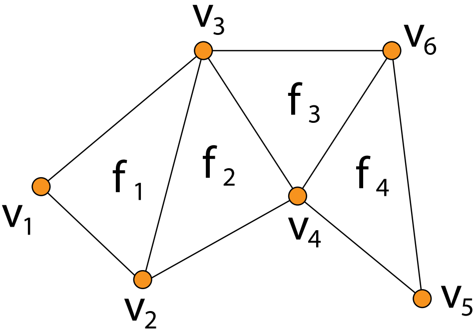
- Quem são os vértices da face $\mathbf{f}_1$?;
  - $O(1)$ – basta consultar a lista de faces;
- Quem são os vértices do 1-anel do vértice $\mathbf{v}_3$?;
  - busca completa em todos os vértices;

Shared Vertex



- Quem são os vértices da face $\mathbf{f}_1$?;
  - $O(1)$ – basta consultar a lista de faces;
- Quem são os vértices do 1-anel do vértice $\mathbf{v}_3$?;
  - busca completa em todos os vértices;
- Os vértices $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_6$ são adjacentes?;

Shared Vertex



- Quem são os vértices da face $\mathbf{f}_1$?;
  - $O(1)$ – basta consultar a lista de faces;
- Quem são os vértices do 1-anel do vértice $\mathbf{v}_3$?;
  - busca completa em todos os vértices;
- Os vértices $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_6$ são adjacentes?;
  - busca completa em todas as faces.

Aquecimento MATLAB

Exercício

Plote no MATLAB um parabolóide usando os comandos `meshgrid` e `surf`.

Aquecimento MATLAB

Exercício

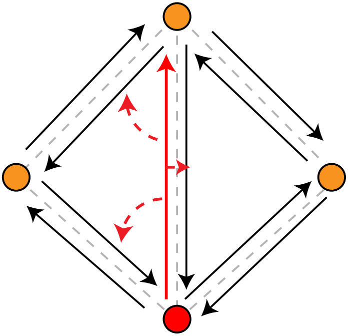
Plote no MATLAB um parabolóide usando os comandos `meshgrid` e `surf`.

Exercício

Faça uma função que gere uma malha triangular do parabolóide do exercício anterior. Para plotar use o comando `trimesh` do MATLAB.

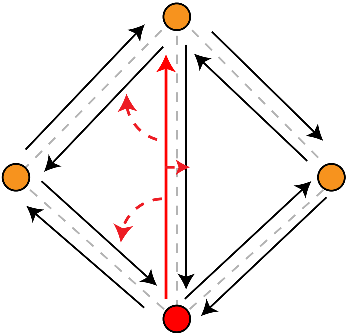
Half-Edge (HE)

- Vértice:
  - posição
  - 1 HE que sai do vértice



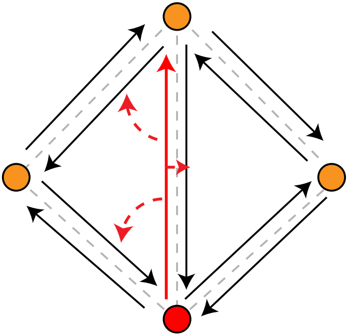
Half-Edge (HE)

- Vértice:
  - posição
  - 1 HE que sai do vértice
- Half-Edge:
  - orientação consistente
  - 1 índice do vértice de origem
  - 1 índice da face incidente
  - 1, 2, ou 3 índices de HEs (próxima, anterior e oposta)



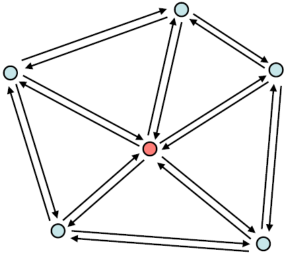
Half-Edge (HE)

- Vértice:
  - posição
  - 1 HE que sai do vértice
- Half-Edge:
  - orientação consistente
  - 1 índice do vértice de origem
  - 1 índice da face incidente
  - 1, 2, ou 3 índices de HEs (próxima, anterior e oposta)
- Face:
  - 1 índice da HE adjacente



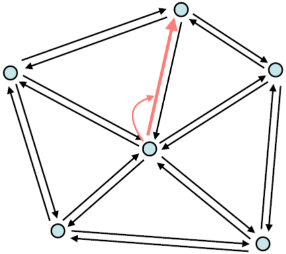
1-Anel com Half-Edge

1. Comece em um vértice



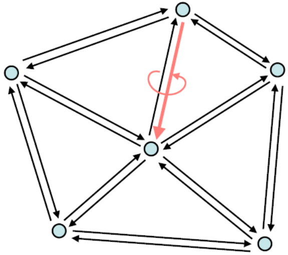
1-Anel com Half-Edge

1. Comece em um vértice
2. HE que sai do vértice



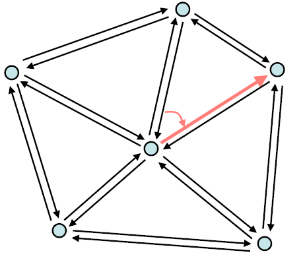
1-Anel com Half-Edge

1. Comece em um vértice
2. HE que sai do vértice
3. HE oposta



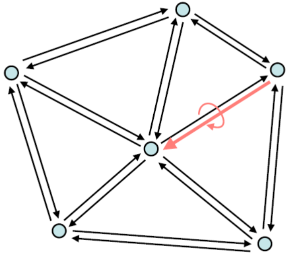
1-Anel com Half-Edge

1. Comece em um vértice
2. HE que sai do vértice
3. HE oposta
4. Próxima HE



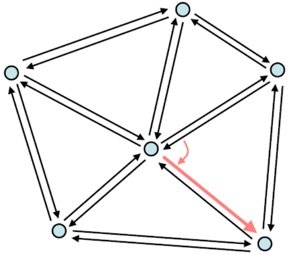
1-Anel com Half-Edge

1. Comece em um vértice
2. HE que sai do vértice
3. HE oposta
4. Próxima HE
5. HE oposta

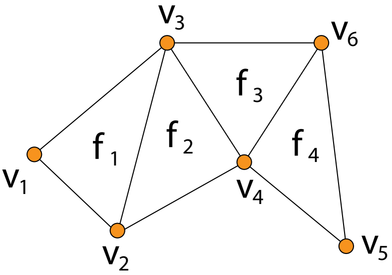


1-Anel com Half-Edge

1. Comece em um vértice
2. HE que sai do vértice
3. HE oposta
4. Próxima HE
5. HE oposta
6. Próxima HE
7. ...



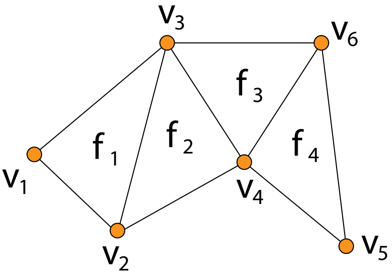
Matriz de Adjacência



	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_1$	0	1	1	0	0	0
$\mathbf{v}_2$	1	0	1	1	0	0
$\mathbf{v}_3$	1	1	0	1	0	1
$\mathbf{v}_4$	0	1	1	0	1	1
$\mathbf{v}_5$	0	0	0	1	0	1
$\mathbf{v}_6$	0	0	1	1	1	0

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se os vértices } \mathbf{v}_i \text{ e } \mathbf{v}_j \text{ formam uma aresta} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Matriz de Adjacência

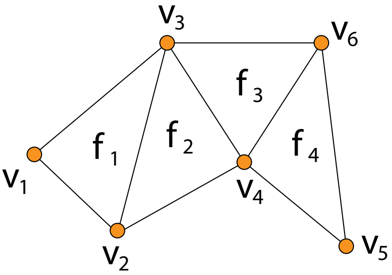


	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_1$	0	1	1	0	0	0
$\mathbf{v}_2$	1	0	1	1	0	0
$\mathbf{v}_3$	1	1	0	1	0	1
$\mathbf{v}_4$	0	1	1	0	1	1
$\mathbf{v}_5$	0	0	0	1	0	1
$\mathbf{v}_6$	0	0	1	1	1	0

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se os vértices } \mathbf{v}_i \text{ e } \mathbf{v}_j \text{ formam uma aresta} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Nenhuma informação de conectividade entre um vértice e suas faces adjacentes;

Matriz de Adjacência

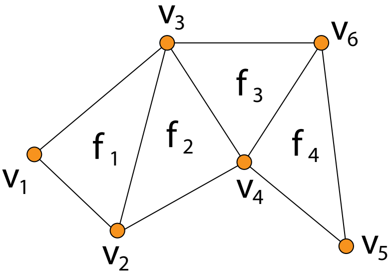


	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	1	0	0	0
v_2	1	0	1	1	0	0
v_3	1	1	0	1	0	1
v_4	0	1	1	0	1	1
v_5	0	0	0	1	0	1
v_6	0	0	1	1	1	0

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se os vértices } \mathbf{v}_i \text{ e } \mathbf{v}_j \text{ formam uma aresta} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Nenhuma informação de conectividade entre um vértice e suas faces adjacentes;
- Esparsa e simétrica (grafos simples não orientados);

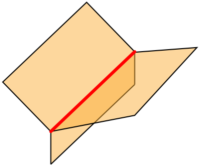
Matriz de Adjacência



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	1	1	0	0	0
v_2	1	0	1	1	0	0
v_3	1	1	0	1	0	1
v_4	0	1	1	0	1	1
v_5	0	0	0	1	0	1
v_6	0	0	1	1	1	0

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se os vértices } \mathbf{v}_i \text{ e } \mathbf{v}_j \text{ formam uma aresta} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

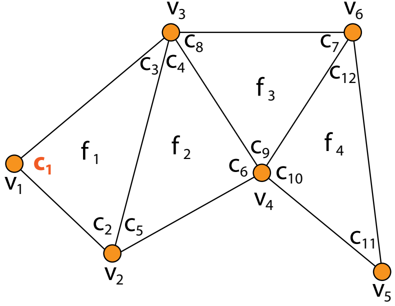
- Nenhuma informação de conectividade entre um vértice e suas faces adjacentes;
- Esparsa e simétrica (grafos simples não orientados);
- Pode representar malhas non-manifold.



Corner Table

Corner é um vértice com um dos seus triângulos incidentes

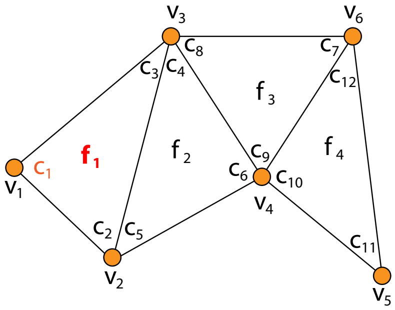
- Corner – c



Corner Table

Corner é um vértice com um dos seus triângulos incidentes

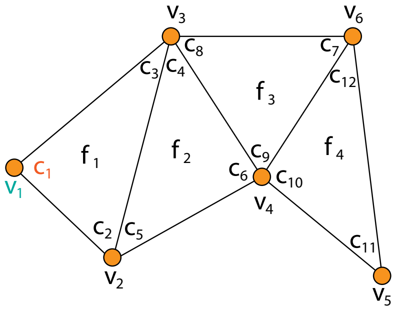
- Corner – c
- Triângulo – c.t



Corner Table

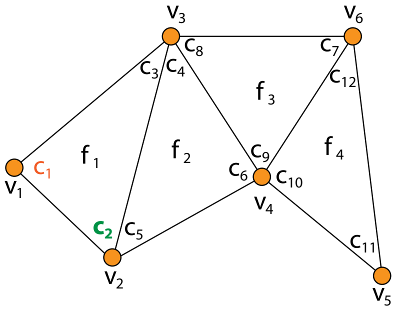
Corner é um vértice com um dos seus triângulos incidentes

- Corner – c
- Triângulo – c.t
- Vértice – c.v



Corner é um vértice com um dos seus triângulos incidentes

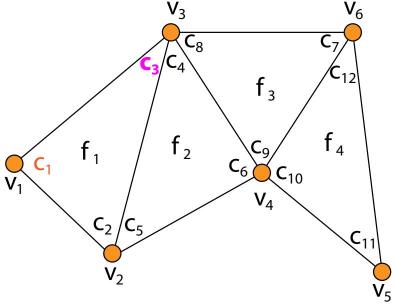
- Corner – c
- Triângulo – c.t
- Vértice – c.v
- Corner próximo em c.t – c.n (sentido anti-horário)



Corner Table

Corner é um vértice com um dos seus triângulos incidentes

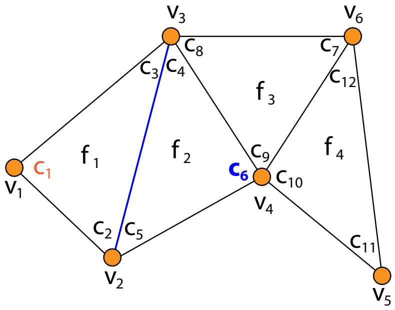
- Corner – c
- Triângulo – c.t
- Vértice – c.v
- Corner próximo em c.t – c.n (sentido anti-horário)
- Corner anterior em c.t – c.p (≡ c.n.n)



Corner Table

Corner é um vértice com um dos seus triângulos incidentes

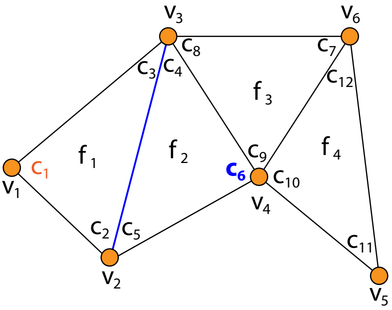
- Corner – c
- Triângulo – c.t
- Vértice – c.v
- Corner próximo em c.t – c.n (sentido anti-horário)
- Corner anterior em c.t – c.p ($\equiv$ c.n.n)
- Corner oposto – c.o



Corner Table

Corner é um vértice com um dos seus triângulos incidentes

- Corner – c
- Triângulo – c.t
- Vértice – c.v
- Corner próximo em c.t – c.n (sentido anti-horário)
- Corner anterior em c.t – c.p (≡ c.n.n)
- Corner oposto – c.o
- Corner direito – c.r (≡ c.n.o)
- Corner esquerdo – c.l (≡ c.p.o)



Corner Table

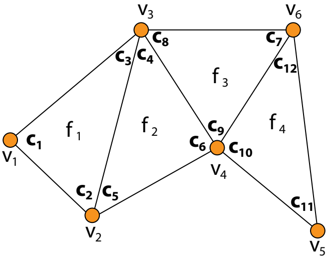
Armazenamento

- para cada vértice uma lista de todos os seus corners

Corner Table

Armazenamento

- para cada vértice uma lista de todos os seus corners

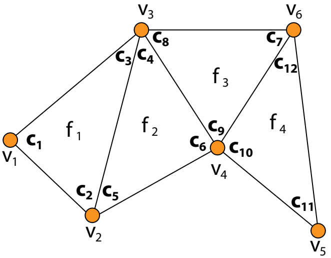


corner	c.v	c.t	c.n	c.p	c.o	c.l	c.r
c_1	v_1	f_1	c_2	c_3	c_6	$\emptyset$	$\emptyset$
c_2	v_2	f_1	c_3	c_1	$\emptyset$	$\emptyset$	c_6
c_3	v_3	f_1	c_1	c_2	$\emptyset$	c_6	$\emptyset$
c_4	v_3	f_2	c_5	c_6	$\emptyset$	c_7	c_1
c_5	v_2	f_2	c_6	c_4	c_7	c_1	$\emptyset$
c_6	v_4	f_2	c_4	c_5	c_1	$\emptyset$	c_7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Corner Table

Armazenamento

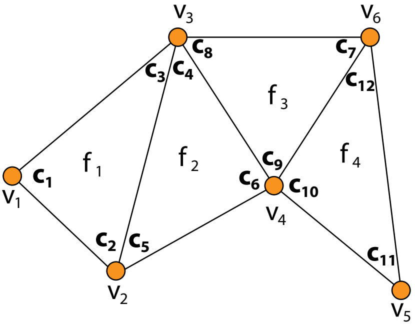
- para cada vértice uma lista de todos os seus corners



corner	c.v	c.t	c.n	c.p	c.o	c.l	c.r
c_1	v_1	f_1	c_2	c_3	c_6	$\emptyset$	$\emptyset$
c_2	v_2	f_1	c_3	c_1	$\emptyset$	$\emptyset$	c_6
c_3	v_3	f_1	c_1	c_2	$\emptyset$	c_6	$\emptyset$
c_4	v_3	f_2	c_5	c_6	$\emptyset$	c_7	c_1
c_5	v_2	f_2	c_6	c_4	c_7	c_1	$\emptyset$
c_6	v_4	f_2	c_4	c_5	c_1	$\emptyset$	c_7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

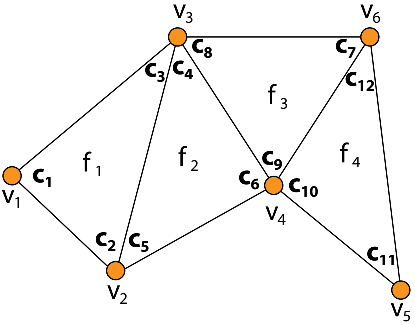
Dada uma face j os corners são enumerados da forma: $3j$, $3j - 1$ e $3j - 2$

Corner Table



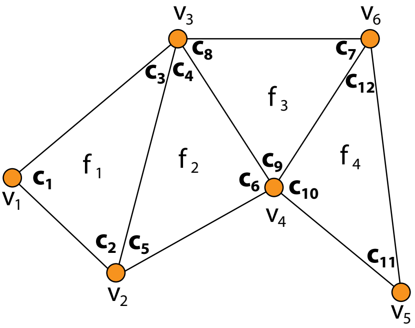
- Quais são os vértices da face $\mathbf{f}_3$?

Corner Table



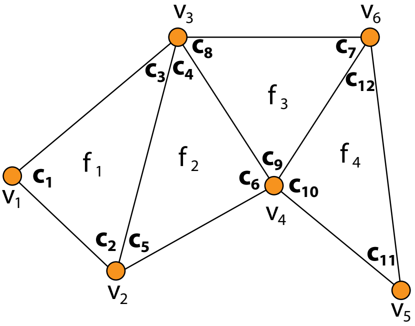
- Quais são os vértices da face $\mathbf{f}_3$?
  - os c.v de corners 9, 8 e 7

Corner Table



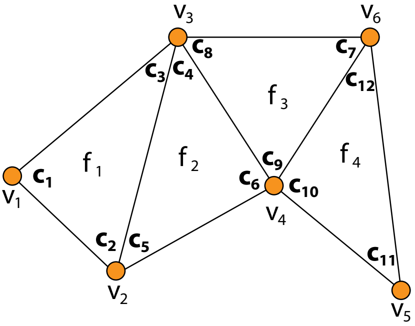
- Quais são os vértices da face $\mathbf{f}_3$?
  - os c.v de corners 9, 8 e 7
- Os vértices $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_6$ são adjacentes?

Corner Table



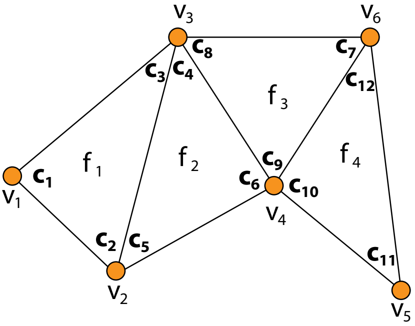
- Quais são os vértices da face $\mathbf{f}_3$?
  - os c.v de corners 9, 8 e 7
- Os vértices $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_6$ são adjacentes?
  - passe pelos corners de $\mathbf{v}_2$, testando se c.p.v ou c.n.n são $\mathbf{v}_6$

Corner Table



- Quais são os vértices da face $\mathbf{f}_3$?
  - os c.v de corners 9, 8 e 7
- Os vértices $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_6$ são adjacentes?
  - passe pelos corners de $\mathbf{v}_2$, testando se c.p.v ou c.n.n são $\mathbf{v}_6$
- Quais são as faces adjacentes a $\mathbf{v}_3$?

Corner Table



- Quais são os vértices da face $\mathbf{f}_3$?
  - os c.v de corners 9, 8 e 7
- Os vértices $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_6$ são adjacentes?
  - passe pelos corners de $\mathbf{v}_2$, testando se c.p.v ou c.n.n são $\mathbf{v}_6$
- Quais são as faces adjacentes a $\mathbf{v}_3$?
  - verefique c.t de todos os corners de vértice $\mathbf{v}_3$

Cálculo da Normal

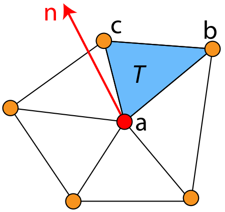
Normal por Face (regra da mão direita)

$$\mathbf{n}_T = [(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})] / \|(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \times (\mathbf{c}-\mathbf{a})\|$$

Cálculo da Normal

Normal por Face (regra da mão direita)

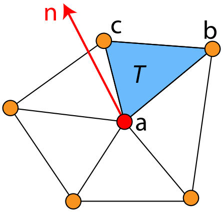
$$\mathbf{n}_T = [(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})] / \|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|$$



Cálculo da Normal

Normal por Face (regra da mão direita)

$$\mathbf{n}_T = [(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})] / \|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|$$



Normal por Vértice (Gouraud shading)

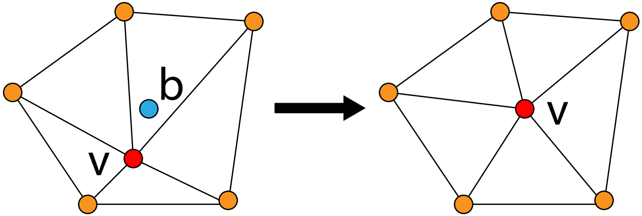
$$\mathbf{n}_{\mathbf{a}} = \mathbf{v} / \|\mathbf{v}\| \quad \text{com} \quad \mathbf{v} = \sum_{T \in \mathrm{star}(\mathbf{a})} \mathbf{n}_T \, \mathrm{area}(T)$$

Suavização de Vértice (*Botsch & Kobbelt, 2004*)

- Melhora a qualidade dos triângulos
- Move um vértice $\mathbf{v}$ para o baricentro $\mathbf{b_v}$ de seu 1-anel

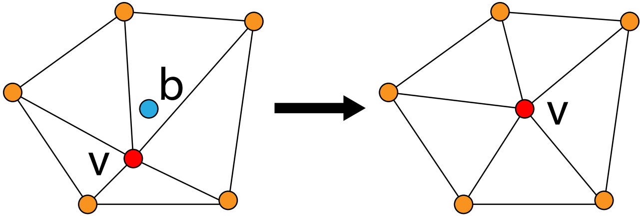
Suavização de Vértice (*Botsch & Kobbelt, 2004*)

- Melhora a qualidade dos triângulos
- Move um vértice **v** para o baricentro $\mathbf{b_v}$ de seu 1-anel



Suavização de Vértice (*Botsch & Kobbelt, 2004*)

- Melhora a qualidade dos triângulos
- Move um vértice $\mathbf{v}$ para o baricentro $\mathbf{b_v}$ de seu 1-anel



$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \alpha\,[\mathbf{d_v} - (\mathbf{d_v}\cdot\mathbf{n_v})\mathbf{n_v}] \qquad \text{e} \qquad \mathbf{d_v} = \mathbf{b_v} - \mathbf{v}\,,$$

onde $\mathbf{n_v}$ é a normal do vértice $\mathbf{v}$ e $\alpha \in [0,1]$ é um fator de relaxação.

Qualidade da Malha

Razão de Aspecto dos Triângulos (Desigualdade de Weizenbock)

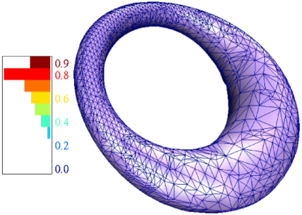
$$\boxed{R = \frac{4\sqrt{3}\,\mathrm{area}(T)}{a^2 + b^2 + c^2}}$$

onde a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo T e a área do triângulo pode ser calculada pela fórmula de Heron:

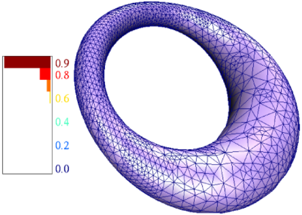
$$\boxed{\mathrm{area}(T) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{com} \quad s = \frac{a+b+c}{2}}$$

Valores perto de 1 indicam que os $\triangle$s se aproximam de um $\triangle$ equilátero.

Qualidade da Malha



sem suavização



com suavização