

Geração de Malhas – SME5827

Coordenadas Baricéntricas

Afonso Paiva
ICMC-USP

4 de outubro de 2013

Coordenadas Baricéntricas

Definição

O ponto \mathbf{v} é o **baricentro** dos pontos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ com **pesos** w_1, \dots, w_n se somente se

$$\mathbf{v} = \frac{w_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + w_n \mathbf{v}_n}{w_1 + \cdots + w_n}$$

Os valores w_i são as **coordendas baricéntricas** de \mathbf{v} .

Coordenadas Baricéntricas

Definição

O ponto \mathbf{v} é o **baricentro** dos pontos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ com **pesos** w_1, \dots, w_n se somente se

$$\mathbf{v} = \frac{w_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + w_n \mathbf{v}_n}{w_1 + \cdots + w_n}$$

Os valores w_i são as **coordendas baricéntricas** de \mathbf{v} .

Coordenadas Baricéntricas Normalizadas

$$\lambda_i(\mathbf{v}) = \frac{w_i(\mathbf{v})}{w_1(\mathbf{v}) + \cdots + w_n(\mathbf{v})}$$

Coordenadas Baricéntricas

Definição

O ponto \mathbf{v} é o **baricentro** dos pontos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ com **pesos** w_1, \dots, w_n se somente se

$$\mathbf{v} = \frac{w_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + w_n \mathbf{v}_n}{w_1 + \cdots + w_n}$$

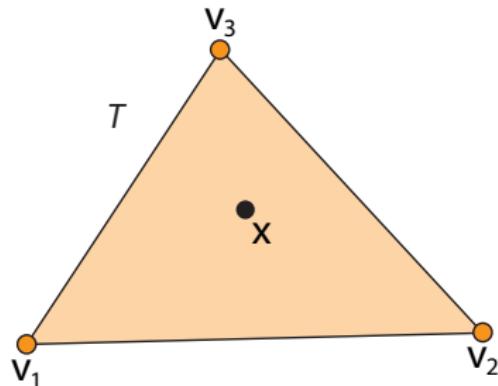
Os valores w_i são as **coordendas baricéntricas** de \mathbf{v} .

Coordenadas Baricéntricas Normalizadas

$$\lambda_i(\mathbf{v}) = \frac{w_i(\mathbf{v})}{w_1(\mathbf{v}) + \cdots + w_n(\mathbf{v})}$$

Logo, $\mathbf{v} = \sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i$ com $\sum_i \lambda_i = 1$, isto é, uma combinação convexa dos pontos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Coordenadas Baricéntricas no Triângulo



Objetivo: dado $x \in T$, queremos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ tal que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1,$$

e

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$$

Coordenadas Baricéntricas no Triângulo

Precisamos resolver o sistema linear de ordem 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

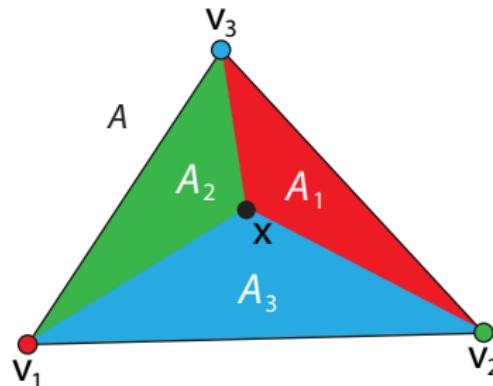
Coordenadas Baricéntricas no Triângulo

Precisamos resolver o sistema linear de ordem 3:

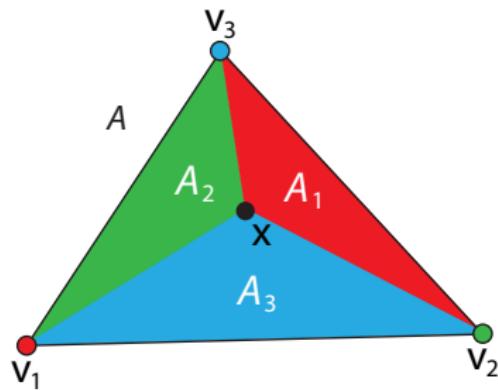
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Pela **Regra de Cramer** a solução (única) é

$$\lambda_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \lambda_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \lambda_3 = \frac{A_3}{A}.$$

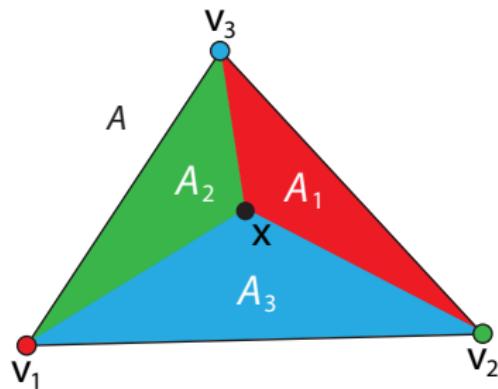


Coordenadas Baricéntricas no Triângulo



Propriedades

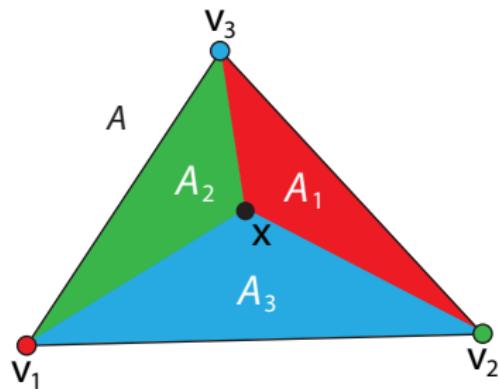
Coordenadas Baricéntricas no Triângulo



Propriedades

- linearidade: $\lambda_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$;

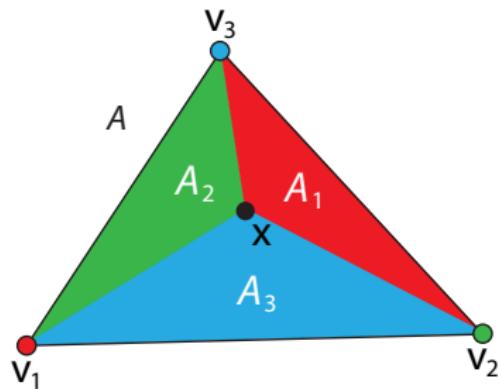
Coordenadas Baricéntricas no Triângulo



Propriedades

- linearidade: $\lambda_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$;
- propriedade de Lagrange: $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$;

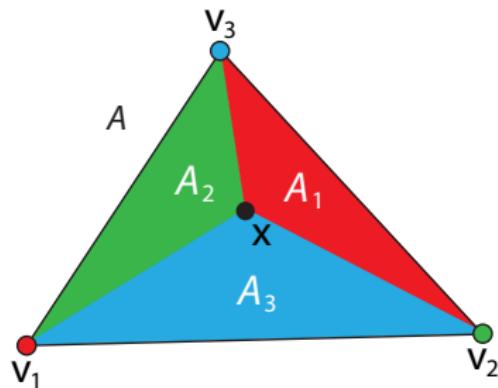
Coordenadas Baricéntricas no Triângulo



Propriedades

- ▶ linearidade: $\lambda_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$;
- ▶ propriedade de Lagrange: $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$;
- ▶ interpolação linear: $g(x) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) f(v_i)$;

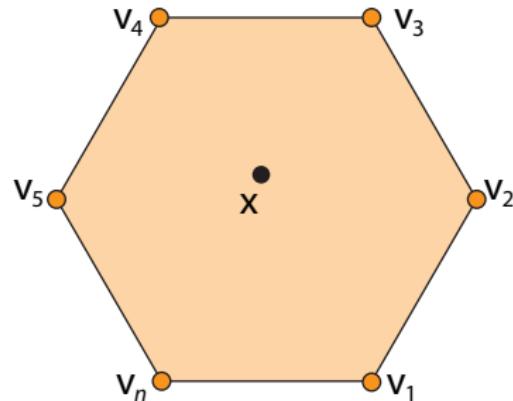
Coordenadas Baricéntricas no Triângulo



Propriedades

- ▶ linearidade: $\lambda_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$;
- ▶ propriedade de Lagrange: $\lambda_i(v_j) = \delta_{ij}$;
- ▶ interpolação linear: $g(x) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) f(v_i)$;
- ▶ precisão linear: se f é linear $\Rightarrow g = f$.

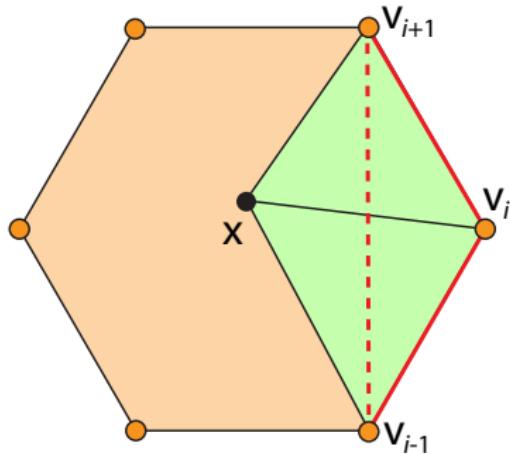
Coordenadas Baricéntricas em Polígonos



Seja Ω um polígono convexo. As funções $\lambda_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, são **coordenadas baricéntricas** se para todo $x \in \Omega$, temos $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ e

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) v_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = 1$$

Wachspress Coordinates: Wachspress, 1973



Dado um polígono convexo com n vértices. Seja

$$\lambda_i(x) = \frac{w_i(x)}{\sum_{j=1}^n w_j(x)} \quad \text{com} \quad w_i(x) = \frac{\mathcal{A}(v_{i-1}, v_i, v_{i+1})}{\mathcal{A}(x, v_{i-1}, v_i) \mathcal{A}(x, v_i, v_{i+1})}$$

Então $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são coordenadas baricéntricas.

Wachspress Coordinates: Wachspress, 1973

Prova: Sejam $A_i = \mathcal{A}(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})$ e $B_i = \mathcal{A}(\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1})$

Assim, podemos escrever \mathbf{x} como:

$$\mathbf{x} = \frac{A_i}{B_i} \mathbf{v}_{i-1} + \frac{(B_i - A_{i-1} - A_i)}{B_i} \mathbf{v}_i + \frac{A_{i-1}}{B_i} \mathbf{v}_{i+1}$$

e reagrupando:

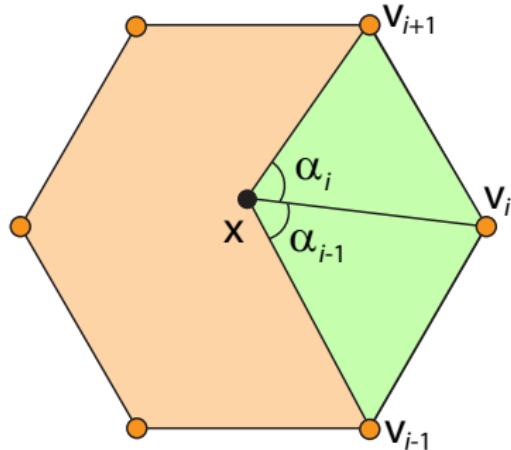
$$\frac{B_i}{A_{i-1}A_i} (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) = \frac{1}{A_{i-1}} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1}) - \frac{1}{A_i} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_i)$$

Somando os dois lados em i :

$$\sum_i \frac{B_i}{A_{i-1}A_i} (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) = \bar{0} \Rightarrow \sum_i w_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) = \bar{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \sum_i \frac{w_i}{\sum_j w_j} \mathbf{v}_i$$



Mean Value Coordinates (MVC): Floater, 2003



Dado um polígono convexo com n vértices. Seja
 $\lambda_i(x) = w_i(x) / \sum_{j=1}^n w_j(x)$, onde

$$w_i(x) = \frac{1}{\|v_i - x\|} \left[\tan\left(\frac{\alpha_{i-1}(x)}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_i(x)}{2}\right) \right]$$

Então $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são coordenadas baricéntricas.

Mean Value Coordinates (MVC): Floater, 2003

Prova: Fazendo $\mathbf{e}_i = (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) / \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|$, basta provar que

$$\sum_{i=1}^n \left[\tan\left(\frac{\alpha_{i-1}}{2}\right) + \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right] \mathbf{e}_i = \bar{0} \iff \sum_{i=1}^n \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}) = \bar{0}$$

Para mostrar isto, faça $\mathbf{e}_i = (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$ e $\alpha_i = \theta_{i+1} - \theta_i$. Logo,

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i+1}) &= \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) (\cos(\theta_i) + \cos(\theta_{i+1}), \sin(\theta_i) + \sin(\theta_{i+1})) \\ &= (\sin(\theta_{i+1}) - \sin(\theta_i), \cos(\theta_i) - \cos(\theta_{i+1})) \end{aligned}$$

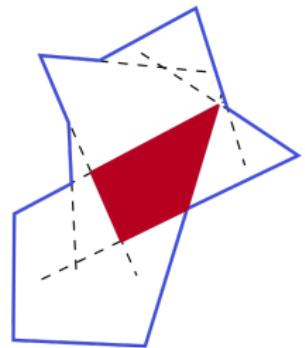
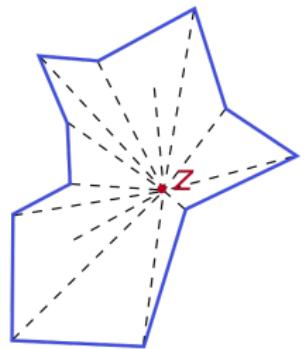
Somando a última expressão em i , temos $\sum_i w_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) = \bar{0}$.



Mean Value Coordinates (MVC): Floater, 2003

Não é limitado a polígonos convexos, pode ser estendido para pontos no **núcleo** de um **polígono estrelado**.

Propriedades

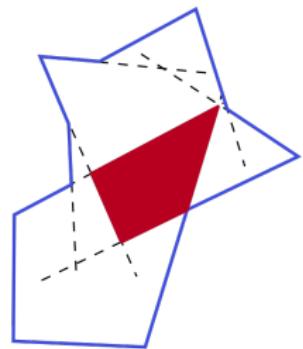
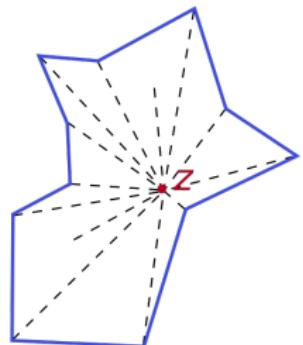


Mean Value Coordinates (MVC): Floater, 2003

Não é limitado a polígonos convexos, pode ser estendido para pontos no **núcleo** de um **polígono estrelado**.

Propriedades

- ▶ linearidade na fronteira: $\lambda_i|_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$;

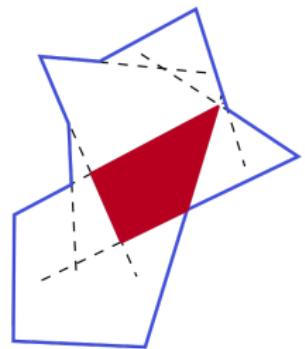
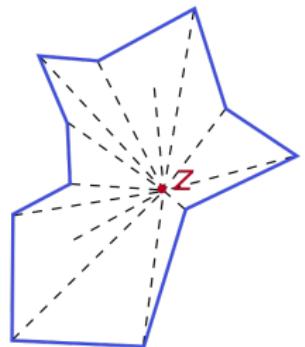


Mean Value Coordinates (MVC): Floater, 2003

Não é limitado a polígonos convexos, pode ser estendido para pontos no **núcleo** de um **polígono estrelado**.

Propriedades

- ▶ linearidade na fronteira: $\lambda_i|_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$;
- ▶ propriedade de Lagrange: $\lambda_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$;

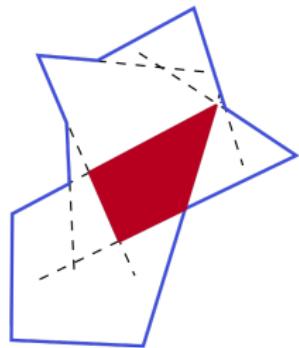
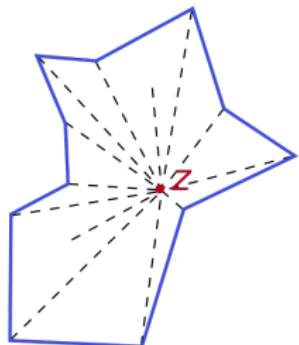


Mean Value Coordinates (MVC): Floater, 2003

Não é limitado a polígonos convexos, pode ser estendido para pontos no **núcleo** de um **polígono estrelado**.

Propriedades

- ▶ linearidade na fronteira: $\lambda_i|_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$;
- ▶ propriedade de Lagrange: $\lambda_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$;
- ▶ interpolação linear: $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{v}_i)$;

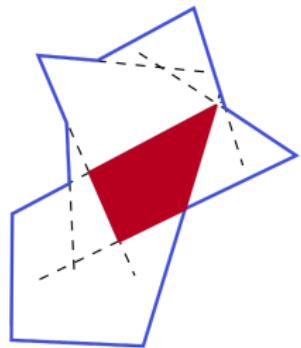
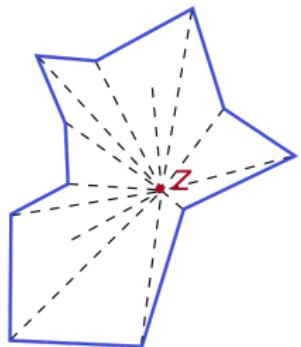


Mean Value Coordinates (MVC): Floater, 2003

Não é limitado a polígonos convexos, pode ser estendido para pontos no **núcleo** de um **polígono estrelado**.

Propriedades

- ▶ linearidade na fronteira: $\lambda_i|_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$;
- ▶ propriedade de Lagrange: $\lambda_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$;
- ▶ interpolação linear: $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{v}_i)$;
- ▶ precisão linear: se f é linear $\Rightarrow g = f$.

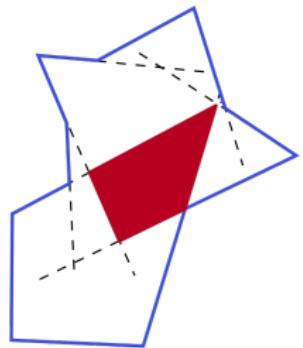
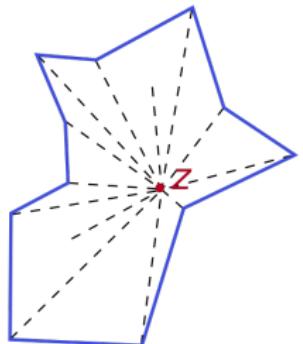


Mean Value Coordinates (MVC): Floater, 2003

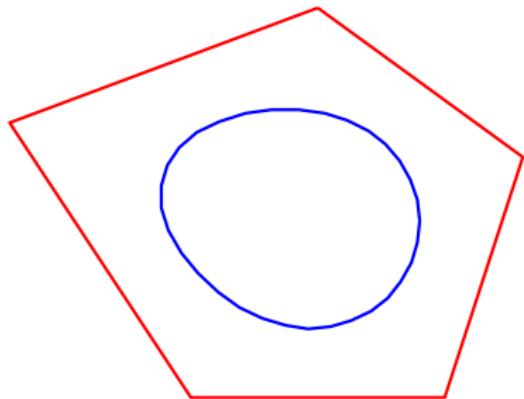
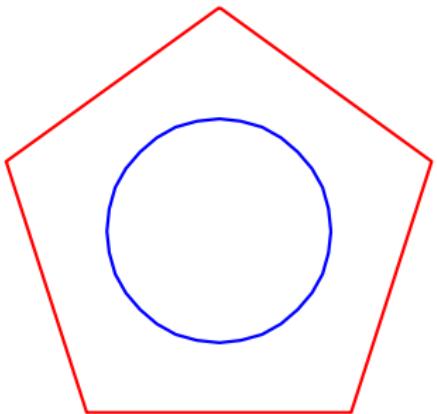
Não é limitado a polígonos convexos, pode ser estendido para pontos no **núcleo** de um **polígono estrelado**.

Propriedades

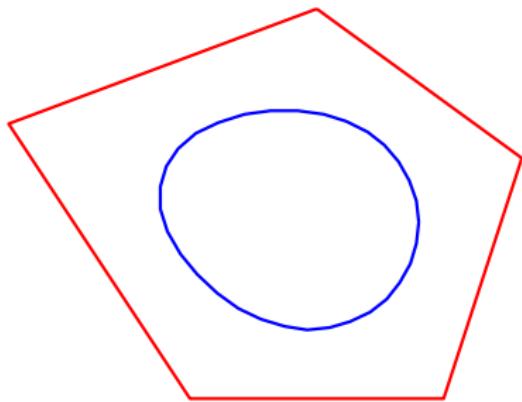
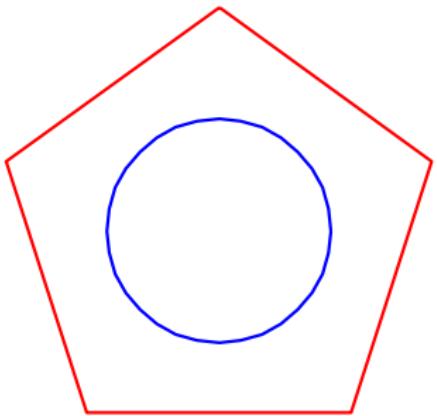
- ▶ linearidade na fronteira: $\lambda_i|_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}]} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$;
- ▶ propriedade de Lagrange: $\lambda_i(\mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$;
- ▶ interpolação linear: $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbf{x}) f(\mathbf{v}_i)$;
- ▶ precisão linear: se f é linear $\Rightarrow g = f$.
- ▶ suavidade: C^0 em \mathbf{v}_i , caso contrário C^∞



Aplicação: deformação

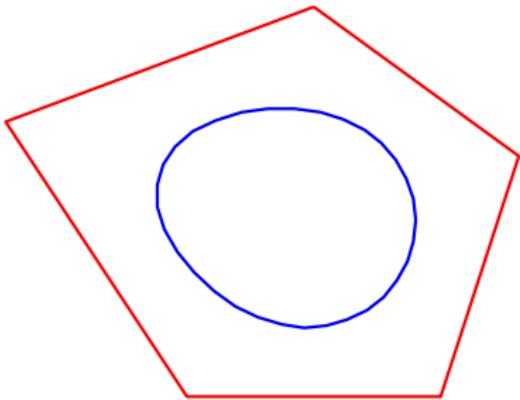
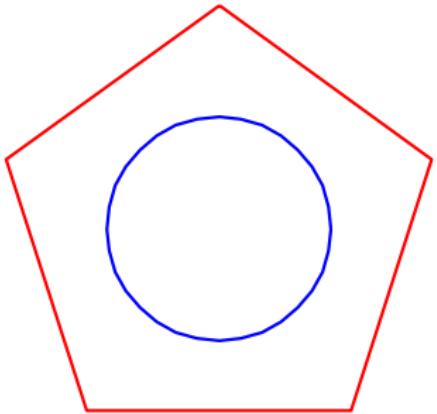


Aplicação: deformação



Algoritmo: Dado $\mathbf{x} \in \Omega$.

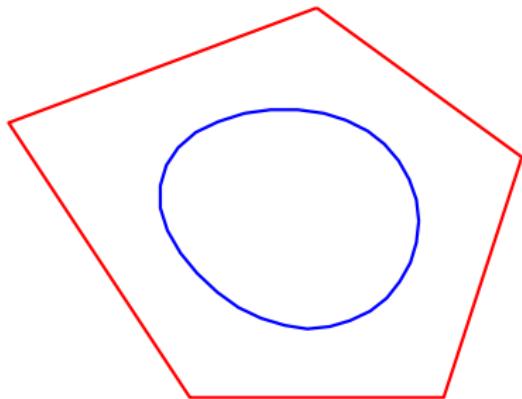
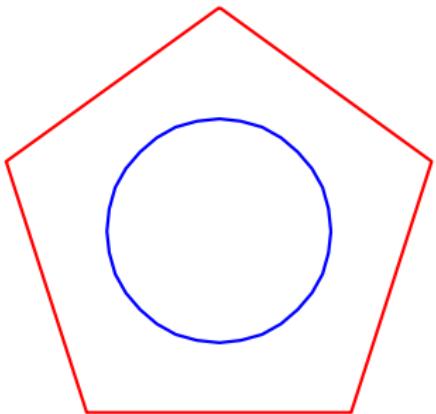
Aplicação: deformação



Algoritmo: Dado $\mathbf{x} \in \Omega$,

1. Escreva \mathbf{x} na forma $\mathbf{x} = \sum_i \lambda_i(\mathbf{x})\mathbf{v}_i$ usando MVC;

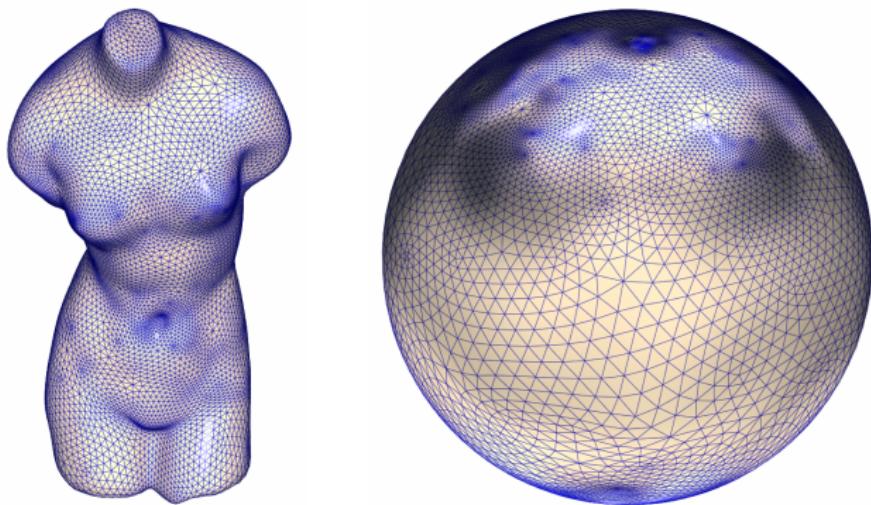
Aplicação: deformação



Algoritmo: Dado $\mathbf{x} \in \Omega$,

1. Escreva \mathbf{x} na forma $\mathbf{x} = \sum_i \lambda_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i$ usando MVC;
2. Faça $\bar{\mathbf{x}} = \sum_i \lambda_i(\mathbf{x}) \bar{\mathbf{v}}_i$.

Aplicação: parametrização de malhas



Próxima aula...