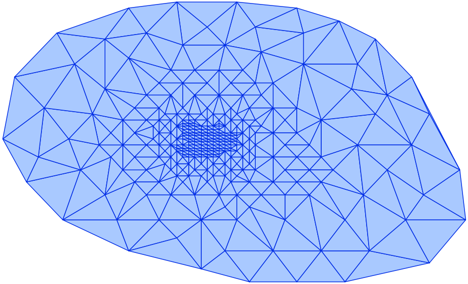


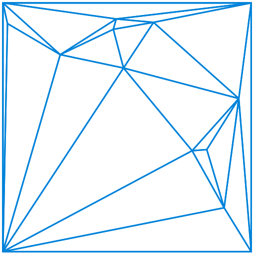
Métodos Numéricos para Geração de Malhas – SME0250

Transformação de Coordenadas

Afonso Paiva
ICMC-USP

12 de maio de 2014

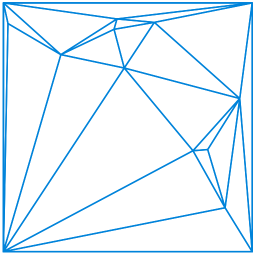
Geração de Malha: revisão



malha não-estruturada

Vantagens

Geração de Malha: revisão

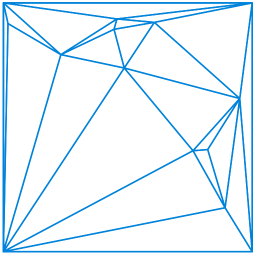


malha não-estruturada

Vantagens

- geometria complexas

Geração de Malha: revisão

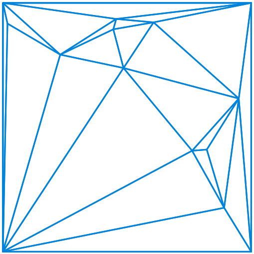


malha não-estruturada

Vantagens

- geometria complexas
- refinamento da malha

Geração de Malha: revisão



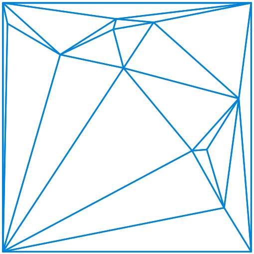
malha não-estruturada

Vantagens

- geometria complexas
- refinamento da malha

Desvantagens

Geração de Malha: revisão



malha não-estruturada

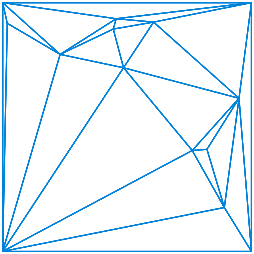
Vantagens

- geometria complexas
- refinamento da malha

Desvantagens

- discretização de derivadas

Geração de Malha: revisão



malha não-estruturada

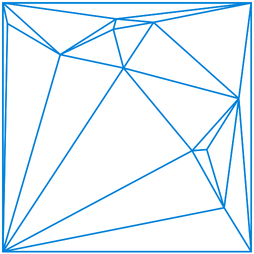
Vantagens

- geometria complexas
- refinamento da malha

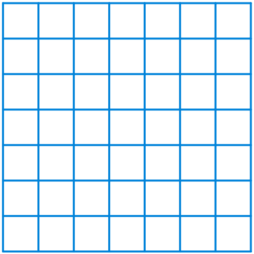
Desvantagens

- discretização de derivadas
- difícil de paralelizar

Geração de Malha: revisão



malha não-estruturada



malha estruturada

Vantagens

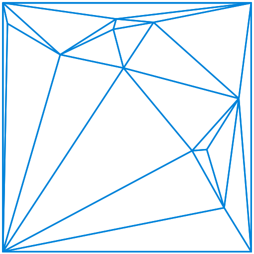
- geometria complexas
- refinamento da malha

Desvantagens

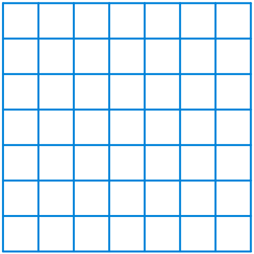
- discretização de derivadas
- difícil de paralelizar

Vantagens

Geração de Malha: revisão



malha não-estruturada



malha estruturada

Vantagens

- geometria complexas
- refinamento da malha

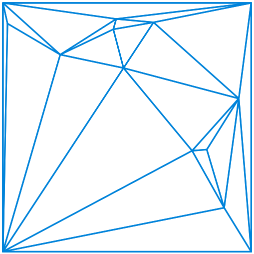
Desvantagens

- discretização de derivadas
- difícil de paralelizar

Vantagens

- discretização de derivadas

Geração de Malha: revisão



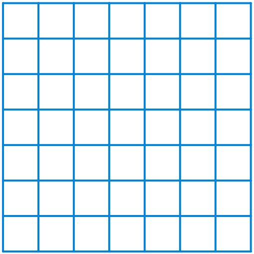
malha não-estruturada

Vantagens

- geometria complexas
- refinamento da malha

Desvantagens

- discretização de derivadas
- difícil de paralelizar

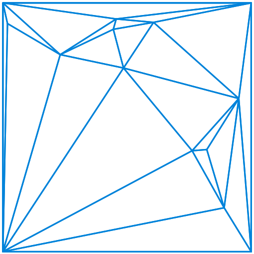


malha estruturada

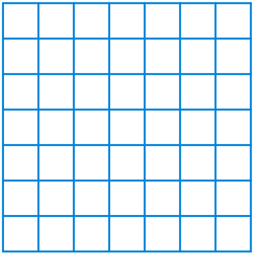
Vantagens

- discretização de derivadas
- fácil de implementar

Geração de Malha: revisão



malha não-estruturada



malha estruturada

Vantagens

- geometria complexas
- refinamento da malha

Desvantagens

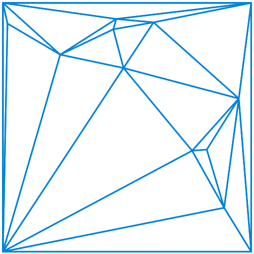
- discretização de derivadas
- difícil de paralelizar

Vantagens

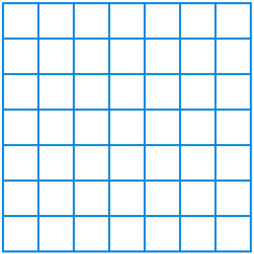
- discretização de derivadas
- fácil de implementar

Desvantagens

Geração de Malha: revisão



malha não-estruturada



malha estruturada

Vantagens

- geometria complexas
- refinamento da malha

Desvantagens

- discretização de derivadas
- difícil de paralelizar

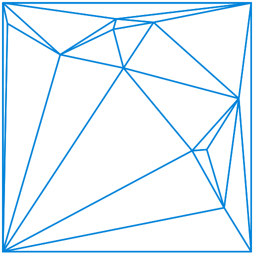
Vantagens

- discretização de derivadas
- fácil de implementar

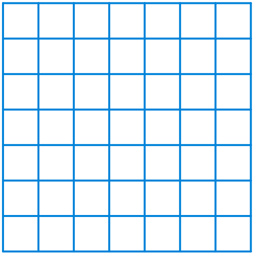
Desvantagens

- estrutura sob refinamentos

Geração de Malha: revisão



malha não-estruturada



malha estruturada

Vantagens

- geometria complexas
- refinamento da malha

Desvantagens

- discretização de derivadas
- difícil de paralelizar

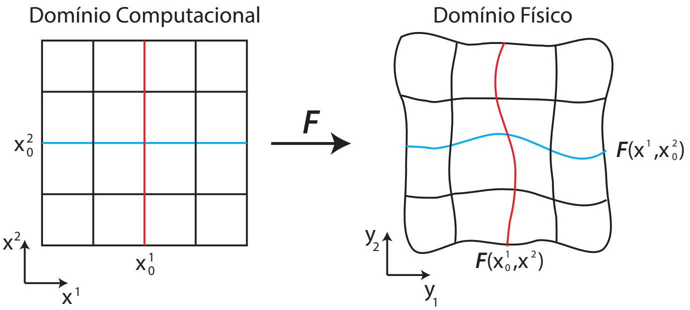
Vantagens

- discretização de derivadas
- fácil de implementar

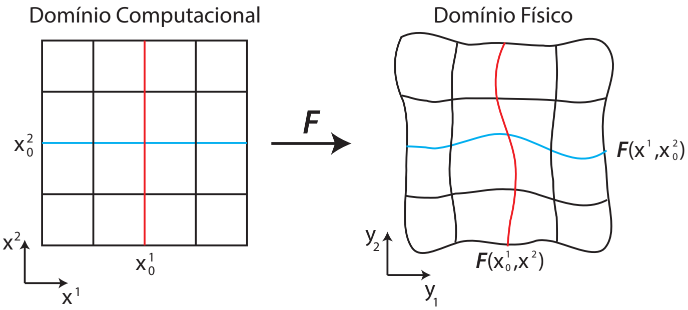
Desvantagens

- estrutura sob refinamentos
- geometria complexas

Transformação de Coordenadas



Transformação de Coordenadas



Definição

Dados dois sistemas de coordenadas (x^i) e (y_i) no $\mathbb{R}^n$. Uma função $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 com

$$F : y_i = y_i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

é chamada de transformação de coordenada quando for bijetora.

Coordenadas Curvílineas

Definição

Se (y_i) são coordenadas cartesianas, as coordenadas (x^i) são chamadas de coordenadas curvílineas se $G = F^{-1} : x^i = x^i(y_1, \ldots, y_n)$ é uma aplicação não linear. Quando G é uma transformação linear, (x^i) são chamadas de coordenadas afim.

Coordenadas Curvílineas

Definição

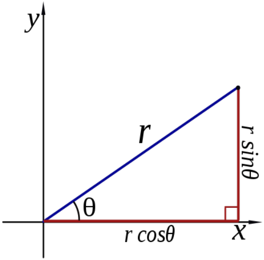
Se (y_i) são coordenadas cartesianas, as coordenadas (x^i) são chamadas de coordenadas curvílineas se $G = F^{-1} : x^i = x^i(y_1, \ldots, y_n)$ é uma aplicação não linear. Quando G é uma transformação linear, (x^i) são chamadas de coordenadas afim.

Exemplo: coordenadas polares

$$(x^1, x^2) = (r, \theta) \quad \text{e} \quad (y_1, y_2) = (x, y)$$

$$F : \begin{cases} y_1 = x^1 \cos(x^2) \\ y_2 = x^1 \sin(x^2) \end{cases}$$

$$G : \begin{cases} x^1 = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2} \\ x^2 = \arctan(y_2/y_1) \end{cases}$$



Coordenadas Curvílineas

Definição

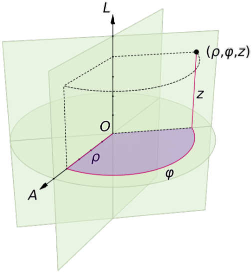
Se (y_i) são coordenadas cartesianas, as coordenadas (x^i) são chamadas de coordenadas curvílineas se $G = F^{-1} : x^i = x^i(y_1, \ldots, y_n)$ é uma aplicação não linear. Quando G é uma transformação linear, (x^i) são chamadas de coordenadas afim.

Exemplo: coordenadas cilíndricas

$$(x^1, x^2, x^3) = (\rho, \varphi, z) \quad \text{e} \quad (y_1, y_2, y_3) = (x, y, z)$$

$$F : \begin{cases} y_1 = x^1 \cos(x^2) \\ y_2 = x^1 \sin(x^2) \\ y_3 = x^3 \end{cases}$$

$$G : \begin{cases} x^1 = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2} \\ x^2 = \arctan(y_2/y_1) \\ x^3 = y_3 \end{cases}$$



Coordenadas Curvílineas

Definição

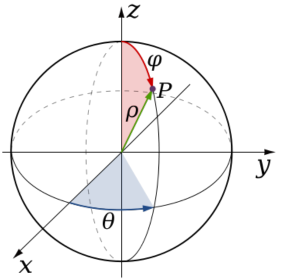
Se (y_i) são coordenadas cartesianas, as coordenadas (x^i) são chamadas de coordenadas curvílineas se $G = F^{-1} : x^i = x^i(y_1, \ldots, y_n)$ é uma aplicação não linear. Quando G é uma transformação linear, (x^i) são chamadas de coordenadas afim.

Exemplo: coordenadas esféricas

$$(x^1, x^2, x^3) = (\rho, \theta, \varphi) \quad \text{e} \quad (y_1, y_2, y_3) = (x, y, z)$$

$$F : \begin{cases} y_1 = x^1 \sin(x^2) \cos(x^3) \\ y_2 = x^1 \sin(x^2) \sin(x^3) \\ y_3 = x^1 \cos(x^2) \end{cases}$$

$$G : \begin{cases} x^1 = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2} \\ x^2 = \arccos(y_3/\sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2}) \\ x^3 = \arctan(y_2/y_1) \end{cases}$$



O Jacobiano

- Quando a aplicação F admite inversa $G = F^{-1}$?

O Jacobiano

- Quando a aplicação F admite inversa $G = F^{-1}$?

Matriz Jacobiana

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x^1} & \frac{\partial y_1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x^1} & \frac{\partial y_2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x^1} & \frac{\partial y_n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x^j}\right]_{nn}$$

O Jacobiano

- Quando a aplicação F admite inversa $G = F^{-1}$?

Matriz Jacobiana

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x^1} & \frac{\partial y_1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x^1} & \frac{\partial y_2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x^1} & \frac{\partial y_n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x^j}\right]_{nn}$$

o seu determinante $\mathcal{J}_F \equiv \det(J_F)$ é o Jacobiano da aplicação F.

O Jacobiano

- Quando a aplicação F admite inversa $G = F^{-1}$?

Matriz Jacobiana

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x^1} & \frac{\partial y_1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x^1} & \frac{\partial y_2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x^1} & \frac{\partial y_n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x^j} \right]_{nn}$$

o seu determinante $\mathcal{J}_F \equiv \det(J_F)$ é o Jacobiano da aplicação F.

Teorema da Função Inversa

Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e $a \in \mathcal{U}$. Se $F'(a)$ é bijetora (isto é, $\mathcal{J}_F \neq 0$) e $b = F(a)$, então

1. existem abertos $\mathcal{U} \ni a$ e $\mathcal{V} \ni b$ do $\mathbb{R}^n$ tal que $F : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ é bijetora.
2. $G : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ é de classe C^1, $G = F^{-1}$.

Em suma, F é um difeomorfismo local de classe C^1. (Demonstração: livro *Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$, Elon Lages Lima, SBM.*)

O Jacobiano

Notação

Vamos adotar índices em subscrito para coordenadas cartesianas (y_i) e índices em sobrescrito para coordenadas curvílineas (x^i).

O Jacobiano

Notação

Vamos adotar índices em subscrito para coordenadas cartesianas (y_i) e índices em sobrescrito para coordenadas curvílineas (x^i).

Exemplo (no quadro)

Seja (y^i) coordenadas curvílineas em $\mathbb{R}^2$ definidas em termos das coordenadas cartesianas (x_i):

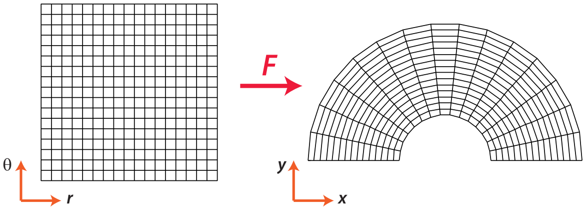
$$G : \begin{cases} y^1 = x_1 x_2 \\ y^2 = (x_2)^2 \end{cases}$$

Determine as regiões do plano onde G admite mudança de coordenadas, isto é, onde G é bijetora.

Exemplo Numérico

Exemplo Numérico

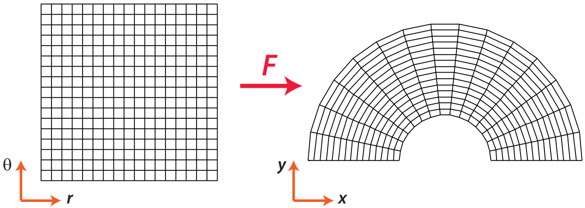
Mapeamento:



$$F : \begin{cases} x = (1+2r)\cos \pi\theta \\ y = (1+2r)\sin \pi\theta \end{cases}$$

Exemplo Numérico

Mapeamento:



$$F : \begin{cases} x = (1+2r)\cos \pi\theta \\ y = (1+2r)\sin \pi\theta \end{cases}$$

Domínio computacional $D_c = [0,1] \times [0,1]$.

Exemplo Numérico

Como calcular ∇f?

Exemplo Numérico

Como calcular ∇f?

Transformando as derivadas parciais em relação x e y em derivadas parciais em relação r e θ usando a Regra da Cadeia:

Exemplo Numérico

Como calcular ∇f?

Transformando as derivadas parciais em relação x e y em derivadas parciais em relação r e θ usando a Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Exemplo Numérico

Como calcular ∇f?

Transformando as derivadas parciais em relação x e y em derivadas parciais em relação r e θ usando a Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{array}\right]$$

Exemplo Numérico

Como calcular ∇f?

Transformando as derivadas parciais em relação x e y em derivadas parciais em relação r e θ usando a Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Exemplo Numérico

Como calcular ∇f?

Transformando as derivadas parciais em relação x e y em derivadas parciais em relação r e θ usando a Regra da Cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Na forma matricial:

$$\left[\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array}\right] = \frac{1}{\mathcal{J}}\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial \theta} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{array}\right]$$

Exemplo Numérico

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mathcal{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\mathcal{J}}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial r}\right)$$

Exemplo Numérico

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mathcal{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\mathcal{J}}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial r}\right)$$

Voltando ao problema, $x = (1+2r)\cos\pi\theta$ e $y = (1+2r)\sin\pi\theta$. Logo,

Exemplo Numérico

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mathcal{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\mathcal{J}}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial r}\right)$$

Voltando ao problema, $x = (1+2r)\cos\pi\theta$ e $y = (1+2r)\sin\pi\theta$. Logo,

$$J_F^\top = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\pi\theta & 2\sin\pi\theta \\ -(1+2r)\sin\pi\theta & (1+2r)\cos\pi\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{J} = 2+4r$$

Exemplo Numérico

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\mathcal{J}}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\mathcal{J}}\left(-\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial r}\right)$$

Voltando ao problema, $x = (1+2r)\cos\pi\theta$ e $y = (1+2r)\sin\pi\theta$. Logo,

$$J_F^\top = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\pi\theta & 2\sin\pi\theta \\ -(1+2r)\sin\pi\theta & (1+2r)\cos\pi\theta \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{J} = 2{+}4r$$

Portanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos\pi\theta}{2}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\pi\theta}{1+2r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin\pi\theta}{2}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{1+2r}\frac{\partial f}{\partial \theta}$$

Exemplo Numérico

Gerando pontos no grid

Os pontos no grid com resolução $n \times m$ são definidos como:

Exemplo Numérico

Gerando pontos no grid

Os pontos no grid com resolução $n \times m$ são definidos como:

$$x_{i,j} = x(r_i, \theta_j)\,, \quad y_{i,j} = y(r_i, \theta_j)\,, \qquad i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n$$

com

$$r_i = \frac{i-1}{m-1} \quad \text{e} \quad \theta_j = \frac{j-1}{n-1}$$

Exemplo Numérico

Discretização com diferenças finitas

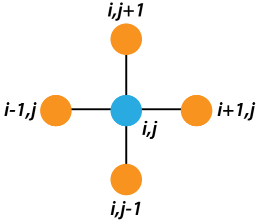
Precisamos calcular $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Exemplo Numérico

Discretização com diferenças finitas

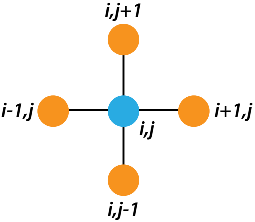
Precisamos calcular $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Vamos denotar $f_{i,j} = f(x_{i,j}, y_{i,j})$.



Exemplo Numérico

Discretização com diferenças finitas



Precisamos calcular $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Vamos denotar $f_{i,j} = f(x_{i,j}, y_{i,j})$.

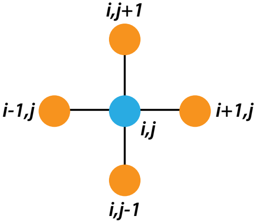
Diferenças finitas centradas

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\delta r} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta \theta},$$

com $i = 2, \ldots, m-1$ e $j = 2, \ldots, n-1$.

Exemplo Numérico

Discretização com diferenças finitas



Precisamos calcular $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$.

Vamos denotar $f_{i,j} = f(x_{i,j}, y_{i,j})$.

Diferenças finitas centradas

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\delta r} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)_{i,j} \approx \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\delta\theta},$$

com $i = 2, \ldots, m-1$ e $j = 2, \ldots, n-1$.

Diferenças finitas regressivas/progressivas (na fronteira)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{1,j} \approx \frac{f_{2,j} - f_{1,j}}{\delta r} \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{m,j} \approx \frac{f_{m,j} - f_{m-1,j}}{\delta r}$$