30º Colóquio Brasileiro de Matemática

IMPA, Rio de Janeiro, 26 a 31 de julho de 2015

Aula 5

Geração de malhas

Aula 5 - 30 de julho de 2015 - 12h30min às 13h30min

Na aula passada

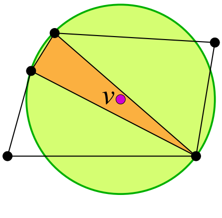
Refinamento de Delaunay

Dado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{S}) \implies$ calcule $\mathcal{TD}(\mathcal{V})$ e insira novos vértices

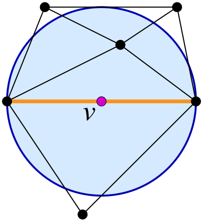
Na aula passada

Refinamento de Delaunay

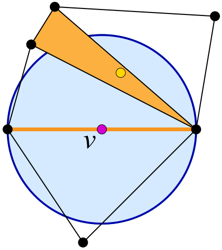
Dado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{S}) \implies$ calcule $\mathcal{TD}(\mathcal{V})$ e insira novos vértices



circuncentro



ponto médio

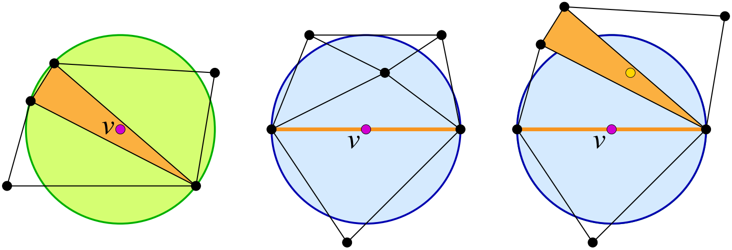


ponto médio

Na aula passada

Refinamento de Delaunay

Dado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{S}) \implies$ calcule $\mathcal{TD}(\mathcal{V})$ e insira novos vértices



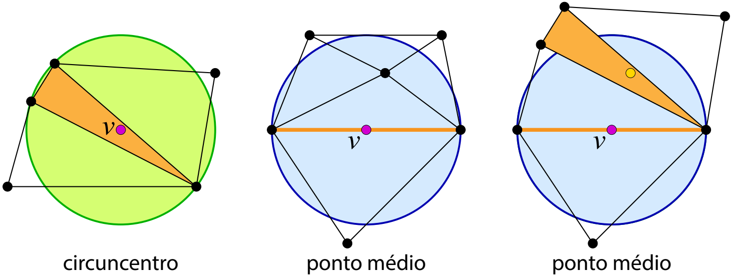
circuncentro — ponto médio — ponto médio

Restrições impostas ao GPSR de entrada

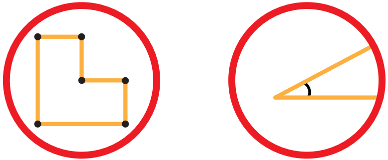
Na aula passada

Refinamento de Delaunay

Dado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{S}) \implies$ calcule $\mathcal{TD}(\mathcal{V})$ e insira novos vértices



Restrições impostas ao GPSR de entrada

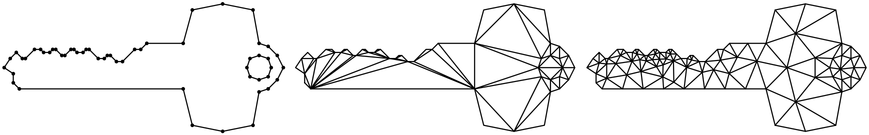


Refinamento de Delaunay

Problema: como relaxar a condição em que $\partial(FC(\mathcal{V}))$ é a união de um subconjunto de $\mathcal{S}$?

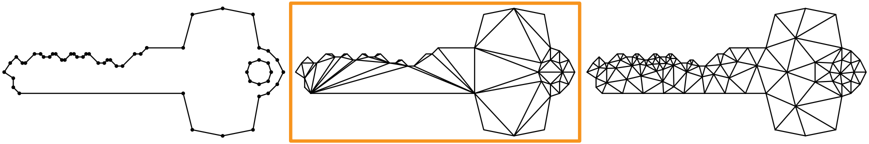
Refinamento de Delaunay

Problema: como relaxar a condição em que $\partial(FC(\mathcal{V}))$ é a união de um subconjunto de $\mathcal{S}$?



Refinamento de Delaunay

Problema: como relaxar a condição em que $\partial(FC(\mathcal{V}))$ é a união de um subconjunto de $\mathcal{S}$?



Triangulação de Delaunay Restrita

Definição (aresta de Delaunay restrita)

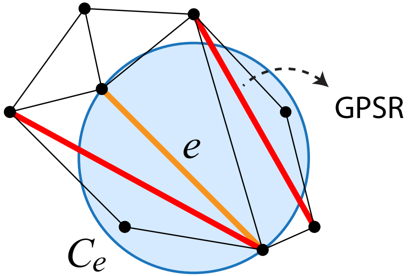
Uma aresta é uma *aresta de Delaunay restrita* se

- não intersecta nenhum segmento de $\mathcal{S}$;
- é uma corda de um círculo que não contem nenhum vértice "visível" a partir de algum ponto de seu interior.

Definição (aresta de Delaunay restrita)

Uma aresta é uma *aresta de Delaunay restrita* se

- não intersecta nenhum segmento de $\mathcal{S}$;
- é uma corda de um círculo que não contem nenhum vértice "visível" a partir de algum ponto de seu interior.



Triangulação de Delaunay Restrita

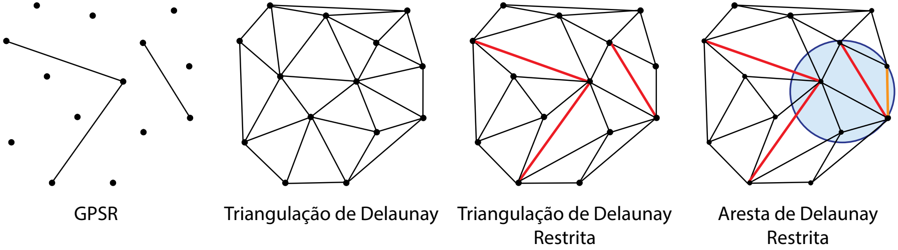
Definição (triangulação de Delaunay restrita)

Dado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$, uma triangulação $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$ é uma *triangulação de Delaunay restrita* se toda aresta de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$ que não é um segmento de $\mathcal{S}$ é uma aresta Delaunay restrita.

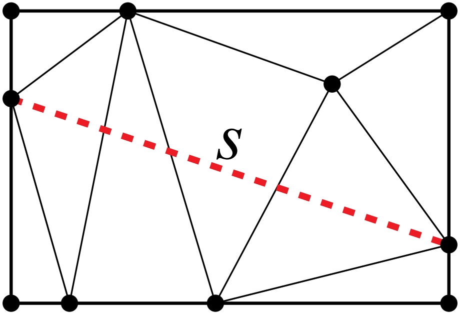
Triangulação de Delaunay Restrita

Definição (triangulação de Delaunay restrita)

Dado $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{S})$, uma triangulação $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$ é uma *triangulação de Delaunay restrita* se toda aresta de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$ que não é um segmento de $\mathcal{S}$ é uma aresta Delaunay restrita.

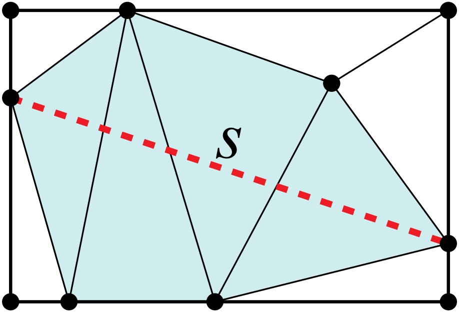


Cálculo de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$



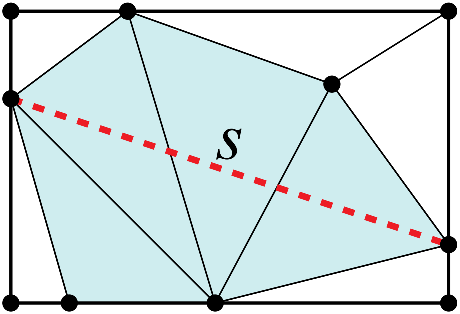
calcule $\mathcal{TD}(\mathcal{V})$

Cálculo de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$



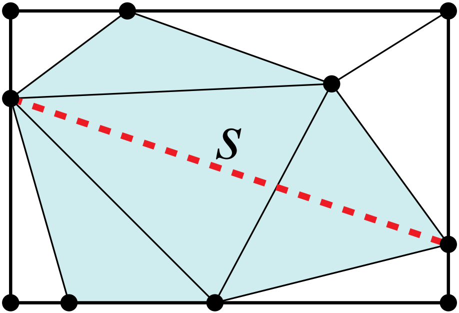
marque os triângulos que o segmento s intersecta
(*região de influência*)

Cálculo de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$



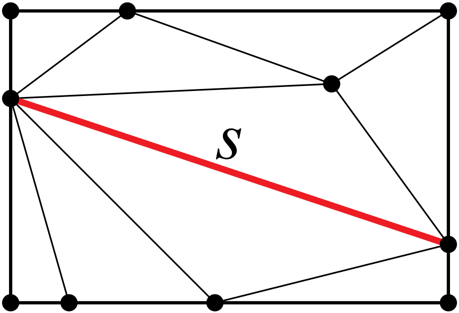
faça troca de aresta daquelas que intersectam s

Cálculo de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$



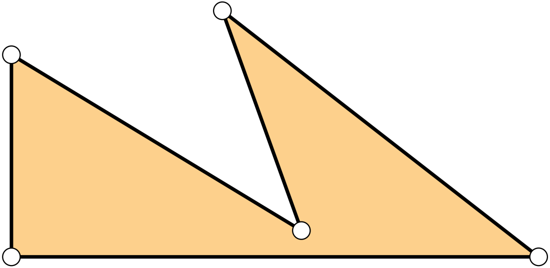
...até sobrar apenas uma aresta

Cálculo de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$



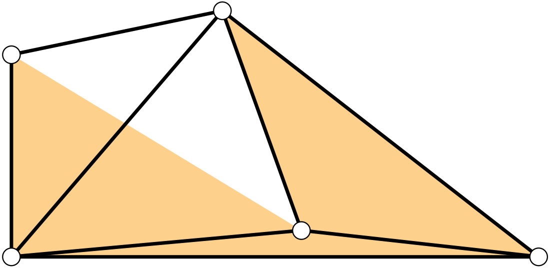
$\mathcal{TD}(\mathcal{G})$

Refinamento de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$



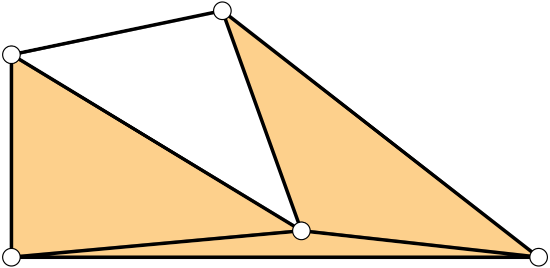
região poligonal $\mathcal{R}$

Refinamento de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$



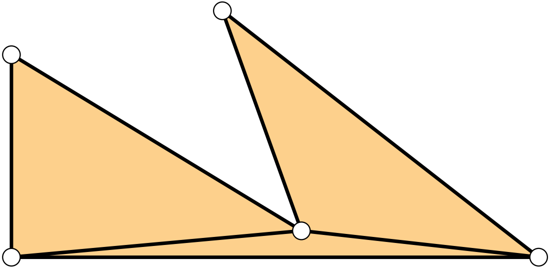
calcule $\mathcal{TD}(\mathcal{V})$

Refinamento de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$



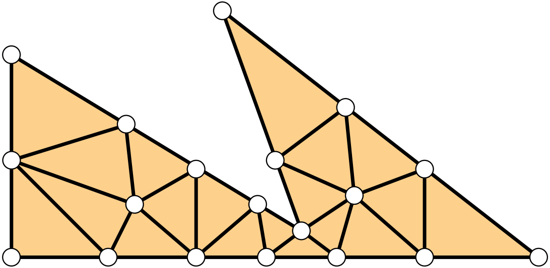
transforme $\mathcal{TD}(\mathcal{V}) \to \mathcal{TD}(\mathcal{G})$

Refinamento de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$



remover os simplexos que estão fora de $\mathcal{R}$

Refinamento de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$



calcule o refinamento

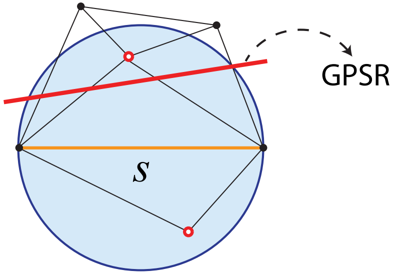
Refinamento de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$

Considerações:

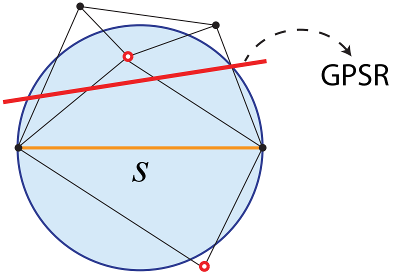
- nunca faça uma troca de arestas de um subsegmento de $\mathcal{G}$

Considerações:

- nunca faça uma troca de arestas de um subsegmento de $\mathcal{G}$
- modificar o conceito de segmento invadido



s é invadido

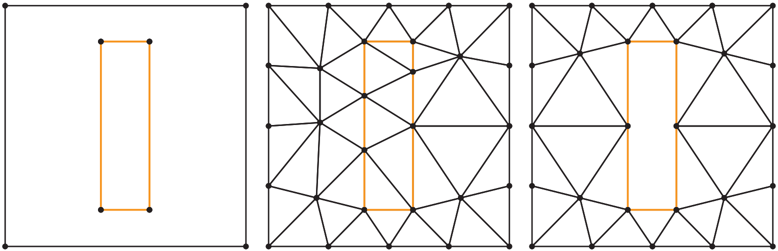


s não é invadido

Refinamento de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$

Considerações:

- nunca faça uma troca de arestas de um subsegmento de $\mathcal{G}$
- modificar o conceito de segmento invadido
- cuidado com ambiguidades!



precisamos rotular os segmentos (fronteira $\times$ internos)

Algoritmo de Ruppert Revisitado

Algoritmo $\textsc{GeraMalha}(\mathcal{G}, \bar{\rho})$

$Q \leftarrow \mathcal{V}$
calcule $\mathcal{TD}(Q)$
$E \leftarrow$ todos os subsegmentos invadidos de $\mathcal{G}$
$R \leftarrow$ todos os triângulos τ de $\mathcal{TD}(Q)$ tais que $\rho(\tau) > \bar{\rho}$
enquanto $E \neq \emptyset$ **or** $R \neq \emptyset$ **faça**
  enquanto $E \neq \emptyset$ **faça**
    retire um subsegmento s de E
    $p \leftarrow \textsc{DivideSubsegmento}(s, Q, E)$
    insira p em $\mathcal{TD}(Q)$
    $Q \leftarrow Q \cup \{p\}$
  fim enquanto
  se $R \neq \emptyset$ **então**
    retire um triângulo τ de R
    $p \leftarrow \textsc{DivideTriângulo}(\tau, Q, E)$
    insira p em $\mathcal{TD}(Q)$
    $Q \leftarrow Q \cup \{p\}$
  fim se
  remova de R triângulos que não mais existem em $\mathcal{TD}(Q)$
  insira em E novos subsegmentos invadidos por um vértice de Q
  insira em R novos triângulos τ de $\mathcal{TD}(Q)$ tais que $\rho(\tau) > \bar{\rho}$
fim enquanto
devolva $\mathcal{TD}(Q)$

Algoritmo de Ruppert Revisitado

Algoritmo $\textsc{GeraMalha}(\mathcal{G}, \bar{\rho})$

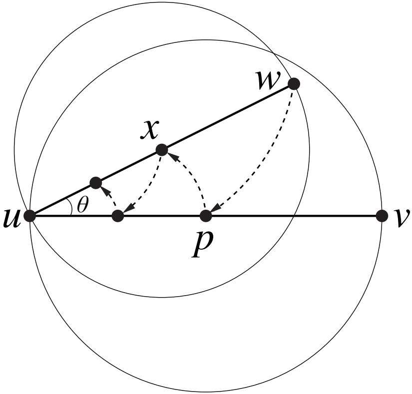
$Q \leftarrow \mathcal{V}$
calcule $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$
$E \leftarrow$ todos os subsegmentos invadidos de $\mathcal{G}$
$R \leftarrow$ todos os triângulos τ de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$ tais que $\rho(\tau) > \bar{\rho}$
enquanto $E \neq \emptyset$ **or** $R \neq \emptyset$ **faça**
  enquanto $E \neq \emptyset$ **faça**
    retire um subsegmento s de E
    $p \leftarrow \textsc{DivideSubsegmento}(s, Q, E)$
    insira p em $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$
    $Q \leftarrow Q \cup \{p\}$
  fim enquanto
  se $R \neq \emptyset$ **então**
    retire um triângulo τ de R
    $p \leftarrow \textsc{DivideTriângulo}(\tau, Q, E)$
    insira p em $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$
    $Q \leftarrow Q \cup \{p\}$
  fim se
  remova de R triângulos que não mais existem em $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$
  insira em E novos subsegmentos invadidos por um vértice de Q
  insira em R novos triângulos τ de $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$ tais que $\rho(\tau) > \bar{\rho}$
fim enquanto
devolva $\mathcal{TD}(\mathcal{G})$

Ângulos Pequenos

- Como remover a restrição de ângulos agudos no GPSR de entrada?

Ângulos Pequenos

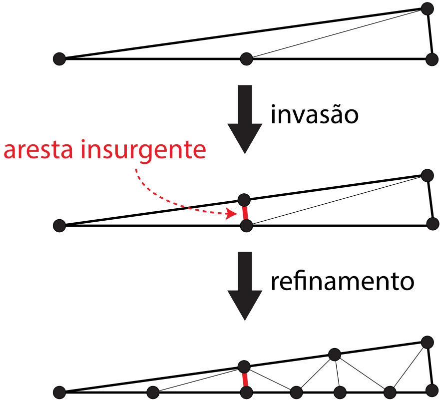
- Como remover a restrição de ângulos agudos no GPSR de entrada?



efeito "ping-pong"

Ângulos Pequenos

Aresta Insurgente



aresta que une dois segmentos que formam um ângulo $< 60^\circ$

Ângulos Pequenos

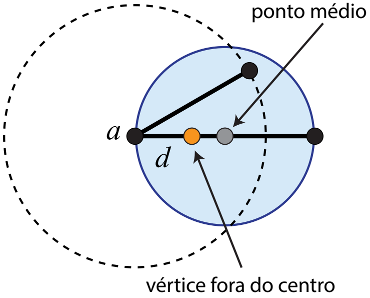
- Como resolver o problema de ângulos agudos?

Ângulos Pequenos

- Como resolver o problema de ângulos agudos?
    - rejeitar triângulos magros que possuam arestas insurgentes

Ângulos Pequenos

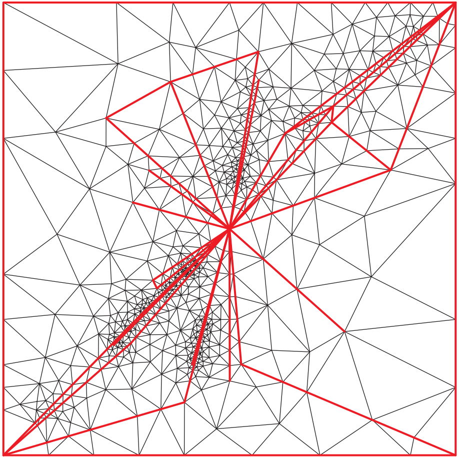
- Como resolver o problema de ângulos agudos?
  - rejeitar triângulos magros que possuam arestas insurgentes
  - adicionar vértices fora do centro



$$d = \frac{lfs(a)}{3}$$

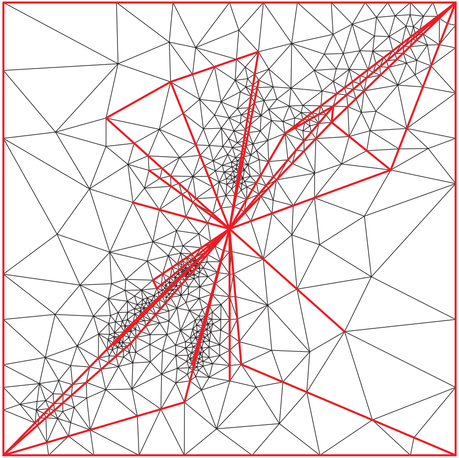
Ângulos Pequenos

Resultado



Ângulos Pequenos

Resultado



o algoritmo possui garantia de término