

Métodos Numéricos para Geração de Malhas – SME0250

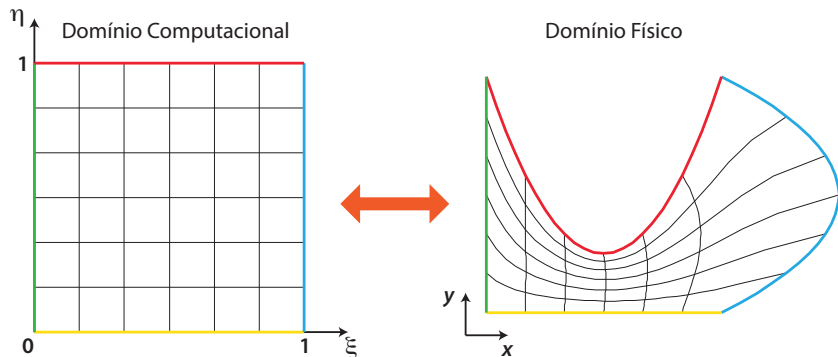
Geração de Grid

Afonso Paiva
ICMC-USP

13 de maio de 2014

Motivação

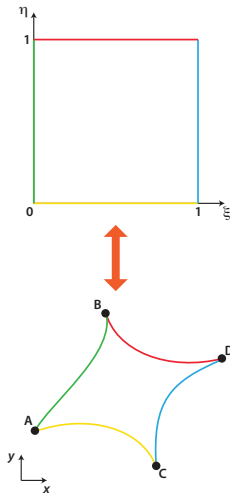
Dadas as fronteiras do domínio físico D_f como construir uma transformação de coordenadas (mapeamento) com o domínio computacional D_c ?



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta) = \begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$$

Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

Precisamos mapear o quadrado unitário na região **ABCD** de D_f usando transformações conhecidas como **projetores**.

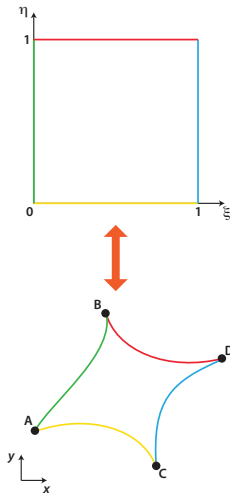


Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

Precisamos mapear o quadrado unitário na região **ABCD** de D_f usando transformações conhecidas como **projetores**.

- ▶ Mapear os lados $\xi = 0$ e $\xi = 1$ nos lados **AB** $\equiv \mathbf{r}(0, \eta)$ e **CD** $\equiv \mathbf{r}(1, \eta)$, respectivamente, usando o projetor **P** $_{\xi}$ definido como:

$$\mathbf{P}_\xi(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_\xi(\xi, \eta) = (1 - \xi) \mathbf{r}(0, \eta) + \xi \mathbf{r}(1, \eta)$$



Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

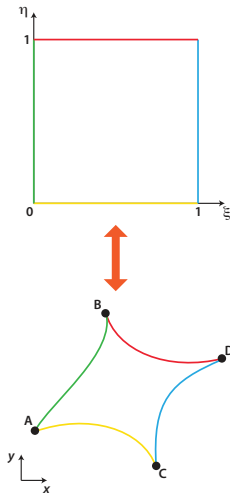
Precisamos mapear o quadrado unitário na região **ABCD** de D_f usando transformações conhecidas como **projetores**.

- ▶ Mapear os lados $\xi = 0$ e $\xi = 1$ nos lados **AB** $\equiv \mathbf{r}(0, \eta)$ e **CD** $\equiv \mathbf{r}(1, \eta)$, respectivamente, usando o projetor \mathbf{P}_ξ definido como:

$$\mathbf{P}_\xi(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_\xi(\xi, \eta) = (1 - \xi) \mathbf{r}(0, \eta) + \xi \mathbf{r}(1, \eta)$$

- ▶ Mapear os lados $\eta = 0$ e $\eta = 1$ nos lados **AC** $\equiv \mathbf{r}(\xi, 0)$ e **BD** $\equiv \mathbf{r}(\xi, 1)$, respectivamente, usando o projetor \mathbf{P}_η definido como:

$$\mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_\eta(\xi, \eta) = (1 - \eta) \mathbf{r}(\xi, 0) + \eta \mathbf{r}(\xi, 1)$$



Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

A **interpolação bilinear** é feita usando a transformação composta $\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_\xi$:

Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

A **interpolação bilinear** é feita usando a transformação composta $\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_\xi$:

$$\mathbf{P}_\eta(\mathbf{P}_\xi(\mathbf{r})) = \mathbf{P}_\eta((1 - \xi) \mathbf{r}(0, \eta) + \xi \mathbf{r}(1, \eta))$$

Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

A **interpolação bilinear** é feita usando a transformação composta $\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_\xi$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\eta(\mathbf{P}_\xi(\mathbf{r})) &= \mathbf{P}_\eta((1 - \xi) \mathbf{r}(0, \eta) + \xi \mathbf{r}(1, \eta)) \\ &= (1 - \xi) \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(0, \eta)) + \xi \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(1, \eta))\end{aligned}$$

Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

A **interpolação bilinear** é feita usando a transformação composta $\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_\xi$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\eta(\mathbf{P}_\xi(\mathbf{r})) &= \mathbf{P}_\eta((1 - \xi) \mathbf{r}(0, \eta) + \xi \mathbf{r}(1, \eta)) \\ &= (1 - \xi) \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(0, \eta)) + \xi \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(1, \eta)) \\ &= (1 - \xi) [(1 - \eta) \mathbf{r}(0, 0) + \eta \mathbf{r}(0, 1)] \\ &\quad + \xi [(1 - \eta) \mathbf{r}(1, 0) + \eta \mathbf{r}(1, 1)]\end{aligned}$$

Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

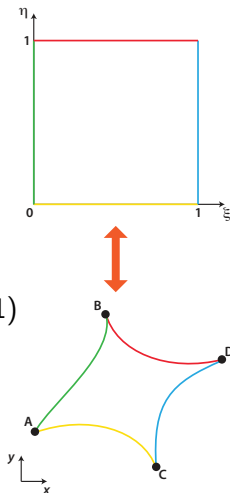
A **interpolação bilinear** é feita usando a transformação composta $\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_\xi$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\eta(\mathbf{P}_\xi(\mathbf{r})) &= \mathbf{P}_\eta((1 - \xi) \mathbf{r}(0, \eta) + \xi \mathbf{r}(1, \eta)) \\ &= (1 - \xi) \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(0, \eta)) + \xi \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(1, \eta)) \\ &= (1 - \xi) [(1 - \eta) \mathbf{r}(0, 0) + \eta \mathbf{r}(0, 1)] \\ &\quad + \xi [(1 - \eta) \mathbf{r}(1, 0) + \eta \mathbf{r}(1, 1)] \\ &= (1 - \xi) (1 - \eta) \mathbf{r}(0, 0) + (1 - \xi) \eta \mathbf{r}(0, 1) \\ &\quad + \xi (1 - \eta) \mathbf{r}(1, 0) + \xi \eta \mathbf{r}(1, 1)\end{aligned}$$

Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

A **interpolação bilinear** é feita usando a transformação composta $\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_\xi$:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\eta(\mathbf{P}_\xi(\mathbf{r})) &= \mathbf{P}_\eta((1 - \xi) \mathbf{r}(0, \eta) + \xi \mathbf{r}(1, \eta)) \\&= (1 - \xi) \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(0, \eta)) + \xi \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(1, \eta)) \\&= (1 - \xi) [(1 - \eta) \mathbf{r}(0, 0) + \eta \mathbf{r}(0, 1)] \\&\quad + \xi [(1 - \eta) \mathbf{r}(1, 0) + \eta \mathbf{r}(1, 1)] \\&= (1 - \xi) (1 - \eta) \mathbf{r}(0, 0) + (1 - \xi) \eta \mathbf{r}(0, 1) \\&\quad + \xi (1 - \eta) \mathbf{r}(1, 0) + \xi \eta \mathbf{r}(1, 1) \\&= (1 - \xi) (1 - \eta) \mathbf{A} + (1 - \xi) \eta \mathbf{B} \\&\quad + \xi (1 - \eta) \mathbf{C} + \xi \eta \mathbf{D}\end{aligned}$$

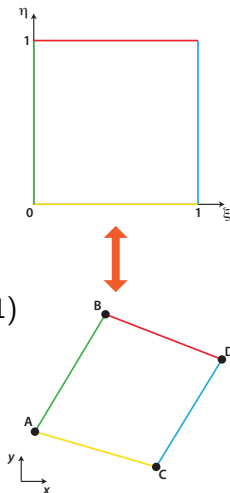


Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

A **interpolação bilinear** é feita usando a transformação composta $\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_\xi$:

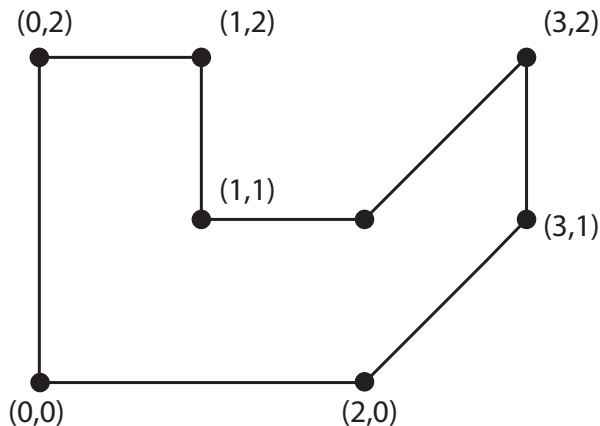
$$\begin{aligned}\mathbf{P}_\eta(\mathbf{P}_\xi(\mathbf{r})) &= \mathbf{P}_\eta((1 - \xi) \mathbf{r}(0, \eta) + \xi \mathbf{r}(1, \eta)) \\ &= (1 - \xi) \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(0, \eta)) + \xi \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}(1, \eta)) \\ &= (1 - \xi) [(1 - \eta) \mathbf{r}(0, 0) + \eta \mathbf{r}(0, 1)] \\ &\quad + \xi [(1 - \eta) \mathbf{r}(1, 0) + \eta \mathbf{r}(1, 1)] \\ &= (1 - \xi) (1 - \eta) \mathbf{r}(0, 0) + (1 - \xi) \eta \mathbf{r}(0, 1) \\ &\quad + \xi (1 - \eta) \mathbf{r}(1, 0) + \xi \eta \mathbf{r}(1, 1) \\ &= (1 - \xi) (1 - \eta) \mathbf{A} + (1 - \xi) \eta \mathbf{B} \\ &\quad + \xi (1 - \eta) \mathbf{C} + \xi \eta \mathbf{D}\end{aligned}$$

Problema: apenas os vértices **A**, **B**, **C** e **D** são preservados e as fronteiras de D_f são substituídas por segmentos de reta.



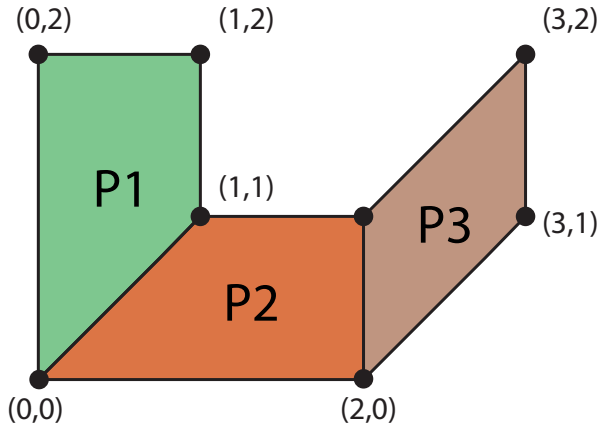
Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

Como gerar um grid no domínio físico abaixo?



Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

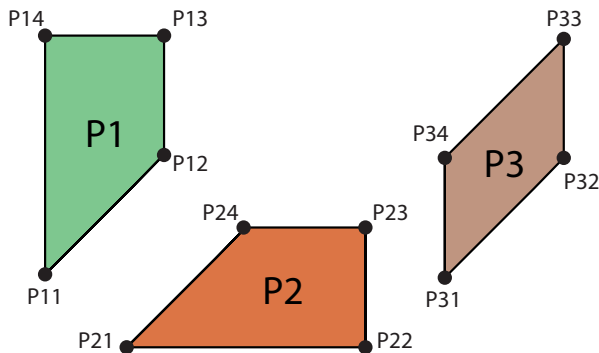
Como gerar um grid no domínio físico abaixo?



Quebre o domínio em blocos

Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

Como gerar um grid no domínio físico abaixo?

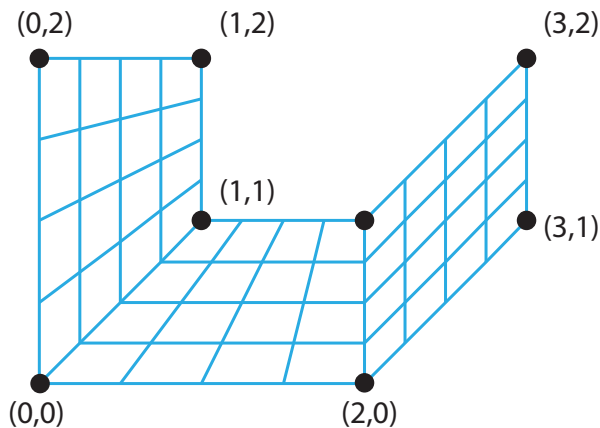


Agora use interpolação bilinear em cada bloco

Não esqueça da condição de consistência nos vértices:
 $P11 = P21$, $P12 = P24$, $P22 = P31$, $P23 = P34$

Métodos Algébricos: Interpolação Bilinear

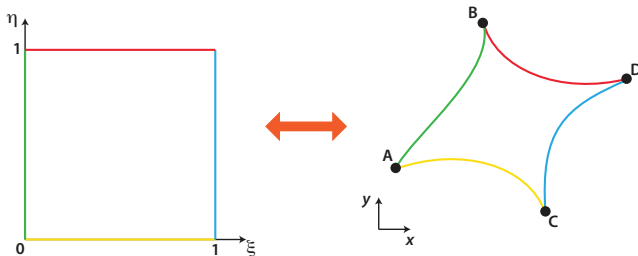
Como gerar um grid no domínio físico abaixo?



Finalmente o grid!

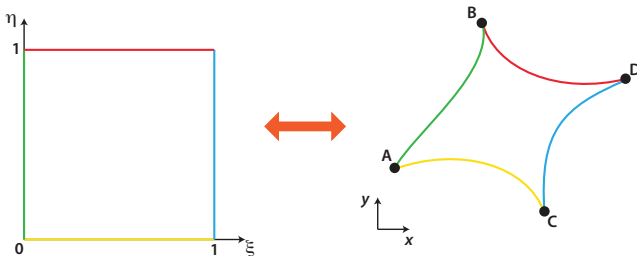
Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Vamos mapear o quadrado unitário na região **curvilinear** **ABCD** de D_f .



Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

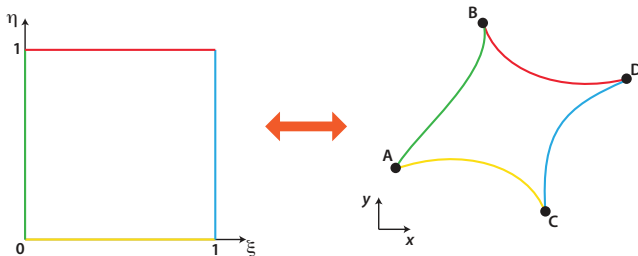
Vamos mapear o quadrado unitário na região **curvílinea** **ABCD** de D_f .



Para isso vamos usar **TFI** que é dada através da **soma Booleana** de P_ξ e P_η :

Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Vamos mapear o quadrado unitário na região **curvilinear** ABCD de D_f .



Para isso vamos usar **TFI** que é dada através da **soma Booleana** de P_ξ e P_η :

$$P_\xi \oplus P_\eta = P_\xi + P_\eta - P_\xi P_\eta$$

Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Dessa forma, temos:

$$(\mathbf{P}_\xi \oplus \mathbf{P}_\eta)(\mathbf{r}) = \mathbf{P}_\xi(\mathbf{r}) + \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}) - \mathbf{P}_\xi \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r})$$

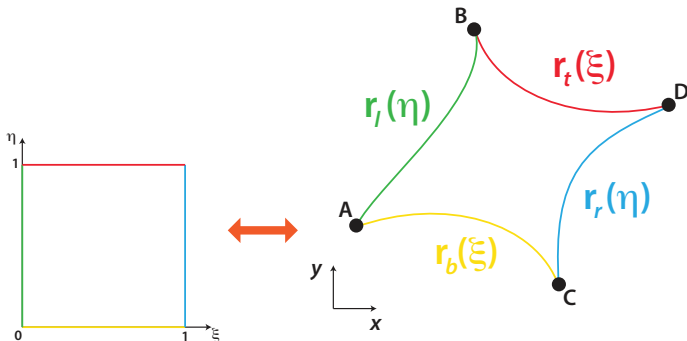
Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_\xi \oplus \mathbf{P}_\eta)(\mathbf{r}) &= \mathbf{P}_\xi(\mathbf{r}) + \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}) - \mathbf{P}_\xi \mathbf{P}_\eta(\mathbf{r}) \\&= (1 - \xi) \mathbf{r}(0, \eta) + \xi \mathbf{r}(1, \eta) + (1 - \eta) \mathbf{r}(\xi, 0) + \eta \mathbf{r}(\xi, 1) \\&\quad - (1 - \xi)(1 - \eta) \mathbf{r}(0, 0) - (1 - \xi) \eta \mathbf{r}(0, 1) \\&\quad - \xi(1 - \eta) \mathbf{r}(1, 0) - \xi \eta \mathbf{r}(1, 1)\end{aligned}$$

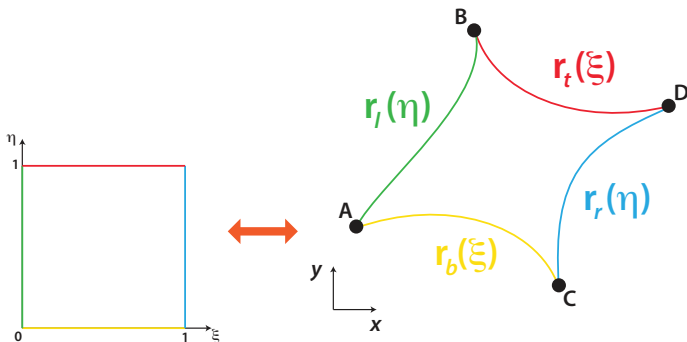
Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Implementação



Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Implementação



Condição de consistência nos vértices do domínio físico:

$$\mathbf{r}_b(0) = \mathbf{r}_l(0), \quad \mathbf{r}_b(1) = \mathbf{r}_r(0), \quad \mathbf{r}_t(0) = \mathbf{r}_l(1), \quad \mathbf{r}_t(1) = \mathbf{r}_r(1)$$

Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Implementação

Tomando valores discretos de ξ e η como:

Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Implementação

Tomando valores discretos de ξ e η como:

$$\xi_i = \frac{i-1}{m-1} \quad \eta_j = \frac{j-1}{n-1}$$

com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Implementação

Tomando valores discretos de ξ e η como:

$$\xi_i = \frac{i-1}{m-1} \quad \eta_j = \frac{j-1}{n-1}$$

com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Podemos reescrever a TFI da seguinte forma:

Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Implementação

Tomando valores discretos de ξ e η como:

$$\xi_i = \frac{i-1}{m-1} \quad \eta_j = \frac{j-1}{n-1}$$

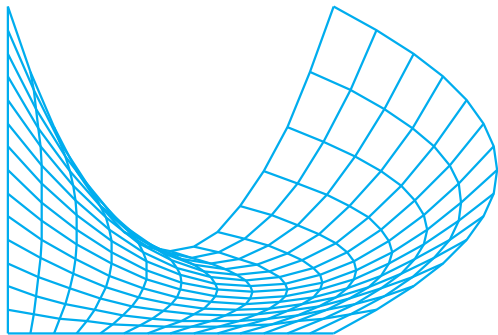
com $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$.

Podemos reescrever a TFI da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_\xi \oplus \mathbf{P}_\eta)(\xi_i, \eta_j) &= (1 - \xi_i) \mathbf{r}_l(\eta_j) + \xi_i \mathbf{r}_r(\eta_j) + (1 - \eta_j) \mathbf{r}_b(\xi_i) + \eta_j \mathbf{r}_t(\xi_i) \\ &- (1 - \xi_i) (1 - \eta_j) \mathbf{r}_b(0) - (1 - \xi_i) \eta_j \mathbf{r}_t(0) \\ &- \xi_i (1 - \eta_j) \mathbf{r}_b(1) - \xi_i \eta_j \mathbf{r}_t(1) \end{aligned}$$

Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Resultados: Swan



$$\mathbf{r}_b(s) = (s, 0)$$

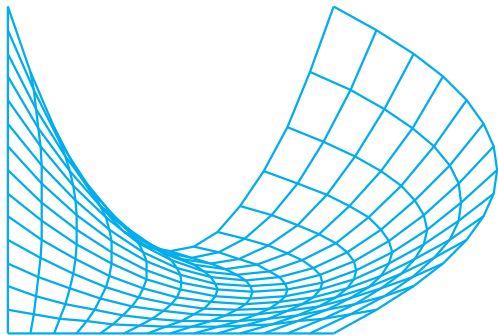
$$\mathbf{r}_t(s) = (s, 1 - 3s + 3s^2)$$

$$\mathbf{r}_l(s) = (0, s)$$

$$\mathbf{r}_r(s) = (1 + 2s - 2s^2, s)$$

Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Resultados: Swan



$$\mathbf{r}_b(s) = (s, 0)$$

$$\mathbf{r}_t(s) = (s, 1 - 3s + 3s^2)$$

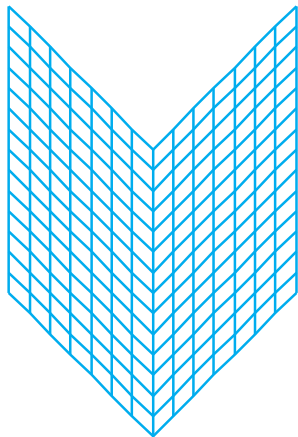
$$\mathbf{r}_l(s) = (0, s)$$

$$\mathbf{r}_r(s) = (1 + 2s - 2s^2, s)$$

Problema: as linhas do grid se dobram.

Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Resultados: Chevron



$$\mathbf{r}_b(s) = (s, c_1(s))$$

$$\mathbf{r}_t(s) = (s, c_2(s))$$

$$\mathbf{r}_l(s) = (0, s)$$

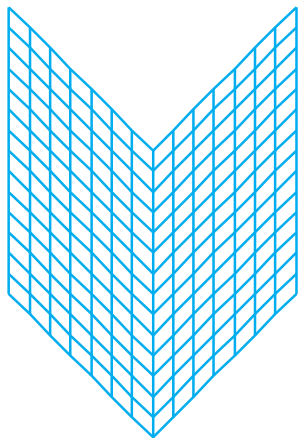
$$\mathbf{r}_r(s) = (1, s)$$

$$c_1(s) = \begin{cases} -s & , s \leq 1/2 \\ s - 1 & , s > 1/2 \end{cases}$$

$$c_2(s) = \begin{cases} 1 - s & , s \leq 1/2 \\ s & , s > 1/2 \end{cases}$$

Métodos Algébricos: Interpolação Transfinita (TFI)

Resultados: Chevron



$$\mathbf{r}_b(s) = (s, c_1(s))$$

$$\mathbf{r}_t(s) = (s, c_2(s))$$

$$\mathbf{r}_l(s) = (0, s)$$

$$\mathbf{r}_r(s) = (1, s)$$

$$c_1(s) = \begin{cases} -s & , s \leq 1/2 \\ s - 1 & , s > 1/2 \end{cases}$$

$$c_2(s) = \begin{cases} 1 - s & , s \leq 1/2 \\ s & , s > 1/2 \end{cases}$$

Problema: a não suavidade (singularidades) da fronteira é propagada para o interior do grid.

Tensores Métricos em \mathbb{R}^3

Definição (tensores métricos)

Os **tensores métricos** são as seguintes matrizes de Gram:

Tensores Métricos em \mathbb{R}^3

Definição (tensores métricos)

Os **tensores métricos** são as seguintes matrizes de Gram:

Tensor métrico covariante:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial y_k}{\partial x^i} \frac{\partial y_k}{\partial x^j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Tensores Métricos em \mathbb{R}^3

Definição (tensores métricos)

Os **tensores métricos** são as seguintes matrizes de Gram:

Tensor métrico covariante:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial y_k}{\partial x^i} \frac{\partial y_k}{\partial x^j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Tensor métrico contravariante:

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = \frac{\partial x^i}{\partial y_k} \frac{\partial x^j}{\partial y_k}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Tensores Métricos em \mathbb{R}^3

Definição (tensores métricos)

Os **tensores métricos** são as seguintes matrizes de Gram:

Tensor métrico covariante:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial y_k}{\partial x^i} \frac{\partial y_k}{\partial x^j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Tensor métrico contravariante:

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = \frac{\partial x^i}{\partial y_k} \frac{\partial x^j}{\partial y_k}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Proposição

Tensores Métricos em \mathbb{R}^3

Definição (tensores métricos)

Os **tensores métricos** são as seguintes matrizes de Gram:

Tensor métrico covariante:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial y_k}{\partial x^i} \frac{\partial y_k}{\partial x^j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Tensor métrico contravariante:

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = \frac{\partial x^i}{\partial y_k} \frac{\partial x^j}{\partial y_k}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Proposição

1. $[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1};$

Tensores Métricos em \mathbb{R}^3

Definição (tensores métricos)

Os **tensores métricos** são as seguintes matrizes de Gram:

Tensor métrico covariante:

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \frac{\partial y_k}{\partial x^i} \frac{\partial y_k}{\partial x^j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Tensor métrico contravariante:

$$g^{ij} = \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = \frac{\partial x^i}{\partial y_k} \frac{\partial x^j}{\partial y_k}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Proposição

$$1. [g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1};$$

Exemplo (no quadro)

Calcule $[g_{ij}]$ e $[g^{ij}]$ das coordenadas polares.

Métodos Diferenciais: Geração de Grid Elíptico

- ▶ Nesse método a geração de grid é dada através da solução de EDPs elípticas.

Métodos Diferenciais: Geração de Grid Elíptico

- ▶ Nesse método a geração de grid é dada através da solução de EDPs elípticas.
- ▶ A transformação inversa $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ é definida como a solução do par de Equações de Laplace:

$$\Delta\xi = 0 \quad \text{e} \quad \Delta\eta = 0 \quad (1)$$

Métodos Diferenciais: Geração de Grid Elíptico

- ▶ Nesse método a geração de grid é dada através da solução de EDPs elípticas.
- ▶ A transformação inversa $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ é definida como a solução do par de Equações de Laplace:

$$\Delta\xi = 0 \quad \text{e} \quad \Delta\eta = 0 \quad (1)$$

- ▶ Pelo **Princípio do Máximo** \Rightarrow o máximo e mínimo de ξ e η não ocorrem no interior de D_f .

Métodos Diferenciais: Geração de Grid Elíptico

- ▶ Nesse método a geração de grid é dada através da solução de EDPs elípticas.
- ▶ A transformação inversa $\xi(x, y)$ e $\eta(x, y)$ é definida como a solução do par de Equações de Laplace:

$$\Delta\xi = 0 \quad \text{e} \quad \Delta\eta = 0 \quad (1)$$

- ▶ Pelo **Princípio do Máximo** \Rightarrow o máximo e mínimo de ξ e η não ocorrem no interior de D_f .
- ▶ Se as fronteiras de D_f variam de forma suave e monótona \Rightarrow as linhas do grid variam de forma suave e monótona também (sem dobras!).

Equações de Winslow

$$g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0$$

$$g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0$$

Equações de Winslow

$$g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0$$

$$g_{22} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + g_{11} \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0$$

Observação: enquanto as Eqs. (1) são lineares, as Equações de Winslow são em geral não-lineares por conta do tensor g_{ij} .

Solução Numérica das Equações de Winslow

1. Discretizar ξ e η em D_c : obtenha os valores ξ_i e η_j em um grid retangular $[0, 1] \times [0, 1]$;

Solução Numérica das Equações de Winslow

1. Discretizar ξ e η em D_c : obtenha os valores ξ_i e η_j em um grid retangular $[0, 1] \times [0, 1]$;
2. Gerar um chute inicial para os valores $x_{i,j}$ e $y_{i,j}$ em D_f usando TFI;

Solução Numérica das Equações de Winslow

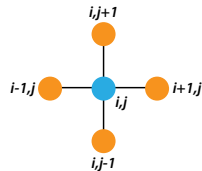
1. Discretizar ξ e η em D_c : obtenha os valores ξ_i e η_j em um grid retangular $[0, 1] \times [0, 1]$;
2. Gerar um chute inicial para os valores $x_{i,j}$ e $y_{i,j}$ em D_f usando TFI;
3. Discretize as Equações de Winslow usando diferenças finitas;

Solução Numérica das Equações de Winslow

1. Discretizar ξ e η em D_c : obtenha os valores ξ_i e η_j em um grid retangular $[0, 1] \times [0, 1]$;
2. Gerar um chute inicial para os valores $x_{i,j}$ e $y_{i,j}$ em D_f usando TFI;
3. Discretize as Equações de Winslow usando diferenças finitas;
4. Resolva o sistema de equações usando um método iterativo (Jacobi, SOR, Thomas, Gradiente Conjugado) sujeito a condições de contorno.

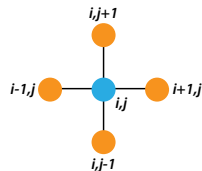
Solução Numérica das Equações de Winslow

Discretização com diferenças finitas



Solução Numérica das Equações de Winslow

Discretização com diferenças finitas

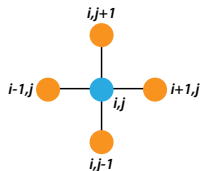


Diferenças finitas centradas de primeira ordem no cálculo da métrica g_{ij}

$$(g_{11})_{i,j} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]_{i,j} = \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\delta\xi} \right)^2 + \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\delta\xi} \right)^2$$

Solução Numérica das Equações de Winslow

Discretização com diferenças finitas



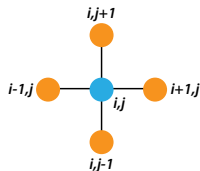
Diferenças finitas centradas de primeira ordem no cálculo da métrica g_{ij}

$$(g_{11})_{i,j} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right]_{i,j} = \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\delta\xi} \right)^2 + \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\delta\xi} \right)^2$$

$$(g_{22})_{i,j} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right]_{i,j} = \left(\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\delta\eta} \right)^2 + \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\delta\eta} \right)^2$$

Solução Numérica das Equações de Winslow

Discretização com diferenças finitas

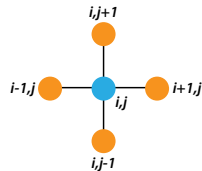


Diferenças finitas centradas de primeira ordem no cálculo da métrica g_{ij}

$$\begin{aligned}(g_{12})_{i,j} &= \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]_{i,j} \\ &= \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\delta\xi} \right) \left(\frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\delta\eta} \right) \\ &\quad + \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\delta\xi} \right) \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\delta\eta} \right)\end{aligned}$$

Solução Numérica das Equações de Winslow

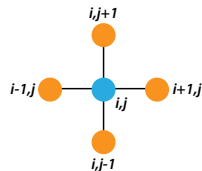
Discretização com diferenças finitas



Diferenças finitas centradas de segunda ordem

Solução Numérica das Equações de Winslow

Discretização com diferenças finitas

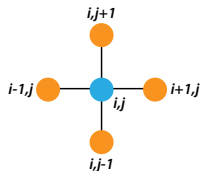


Diferenças finitas centradas de segunda ordem

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right)_{i,j} = \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{\delta \xi^2}$$

Solução Numérica das Equações de Winslow

Discretização com diferenças finitas



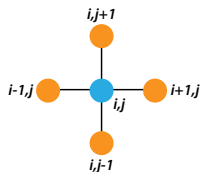
Diferenças finitas centradas de segunda ordem

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right)_{i,j} = \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{\delta \xi^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right)_{i,j} = \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{\delta \eta^2}$$

Solução Numérica das Equações de Winslow

Discretização com diferenças finitas



Diferenças finitas centradas de segunda ordem

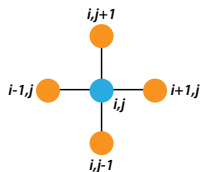
$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right)_{i,j} = \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{\delta \xi^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right)_{i,j} = \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{\delta \eta^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right)_{i,j} = \frac{x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1}}{4 \delta \xi \delta \eta}$$

Solução Numérica das Equações de Winslow

Discretização com diferenças finitas



Diferenças finitas centradas de segunda ordem

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right)_{i,j} = \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{\delta \xi^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right)_{i,j} = \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{\delta \eta^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right)_{i,j} = \frac{x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1}}{4 \delta \xi \delta \eta}$$

Segue de forma análoga para $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta}$.

Solução Numérica das Equações de Winslow

Escrevendo $g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ com diferenças finitas:

Solução Numérica das Equações de Winslow

Escrevendo $g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ com diferenças finitas:

$$\begin{aligned} 0 = & (g_{22})_{i,j} \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{\delta \xi^2} + (g_{11})_{i,j} \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{\delta \eta^2} \\ & - 2(g_{12})_{i,j} \frac{x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1}}{4 \delta \xi \delta \eta} \end{aligned}$$

Solução Numérica das Equações de Winslow

Escrevendo $g_{22} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + g_{11} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ com diferenças finitas:

$$\begin{aligned} 0 = & (g_{22})_{i,j} \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{\delta \xi^2} + (g_{11})_{i,j} \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{\delta \eta^2} \\ & - 2(g_{12})_{i,j} \frac{x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1}}{4 \delta \xi \delta \eta} \end{aligned}$$

Reorganizando os termos,

$$\begin{aligned} 0 = & a_{i,j} (x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) + c_{i,j} (x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}) \\ & - 0.5 b_{i,j} (x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1}) \end{aligned}$$

onde

$$a_{i,j} = 4 \delta \eta^2 (g_{22})_{i,j}, \quad b_{i,j} = 4 \delta \xi \delta \eta (g_{12})_{i,j}, \quad c_{i,j} = 4 \delta \xi^2 (g_{11})_{i,j}$$

$$\begin{aligned} 0 &= a_{i,j} (x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) + c_{i,j} (x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}) \\ &- 0.5 b_{i,j} (x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1}) \end{aligned}$$

Solução Numérica das Equações de Winslow

$$\begin{aligned} 0 &= a_{i,j} (x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) + c_{i,j} (x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}) \\ &- 0.5 b_{i,j} (x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1}) \end{aligned}$$

Iteração do Método de Jacobi para equação acima:

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{(k+1)} &= \frac{1}{2(a_{i,j} + c_{i,j})} \left[a_{i,j} (x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k)}) + c_{i,j} (x_{i,j+1}^{(k)} + x_{i,j-1}^{(k)}) \right. \\ &- \left. 0.5 b_{i,j} (x_{i+1,j+1}^{(k)} + x_{i-1,j-1}^{(k)} - x_{i-1,j+1}^{(k)} - x_{i+1,j-1}^{(k)}) \right] \end{aligned}$$

Solução Numérica das Equações de Winslow

$$\begin{aligned} 0 &= a_{i,j} (x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}) + c_{i,j} (x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}) \\ &- 0.5 b_{i,j} (x_{i+1,j+1} + x_{i-1,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1}) \end{aligned}$$

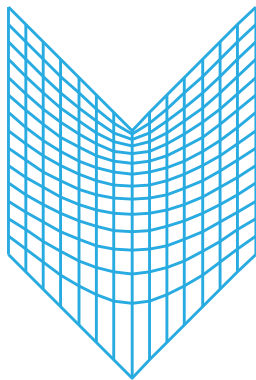
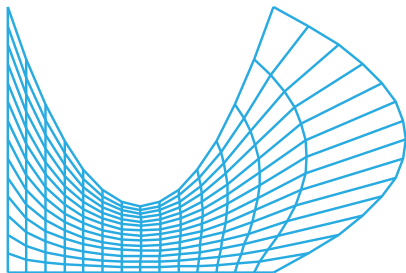
Iteração do Método de Jacobi para equação acima:

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{(k+1)} &= \frac{1}{2(a_{i,j} + c_{i,j})} \left[a_{i,j} (x_{i+1,j}^{(k)} + x_{i-1,j}^{(k)}) + c_{i,j} (x_{i,j+1}^{(k)} + x_{i,j-1}^{(k)}) \right. \\ &- \left. 0.5 b_{i,j} (x_{i+1,j+1}^{(k)} + x_{i-1,j-1}^{(k)} - x_{i-1,j+1}^{(k)} - x_{i+1,j-1}^{(k)}) \right] \end{aligned}$$

Segue de forma análoga para o cálculo dos valores de $y_{i,j}$.

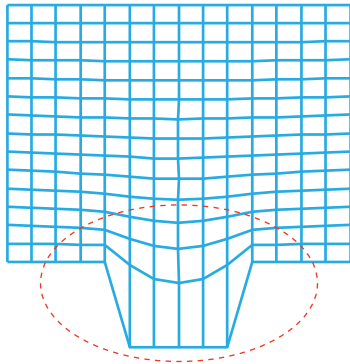
Solução Numérica das Equações de Winslow

Resultados: sem dobras e suave!



Solução Numérica das Equações de Winslow

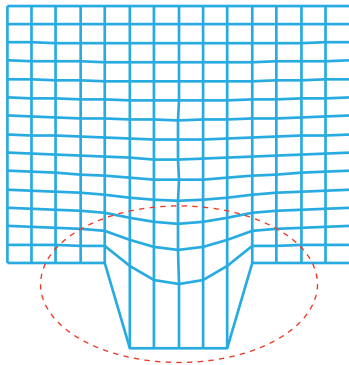
Problema: como resolver?



melhorar o refinamento

Solução Numérica das Equações de Winslow

Problema: como resolver? Próxima aula. ;-)



melhorar o refinamento