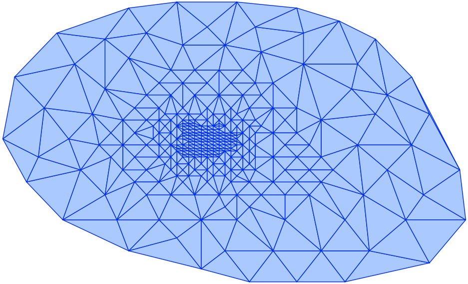


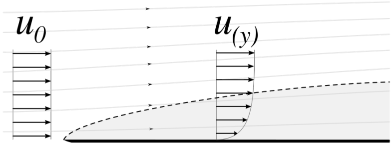
Métodos Numéricos para Geração de Malhas – SME0250

Funções de Controle de Grid

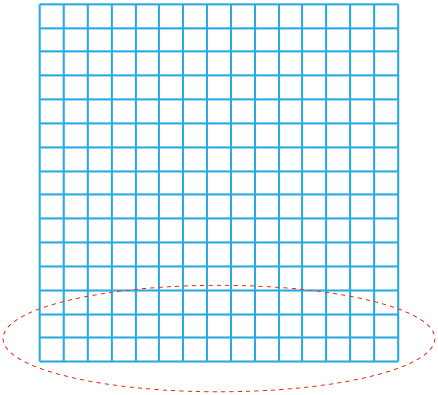
Afonso Paiva
ICMC-USP

20 de maio de 2014

Motivação



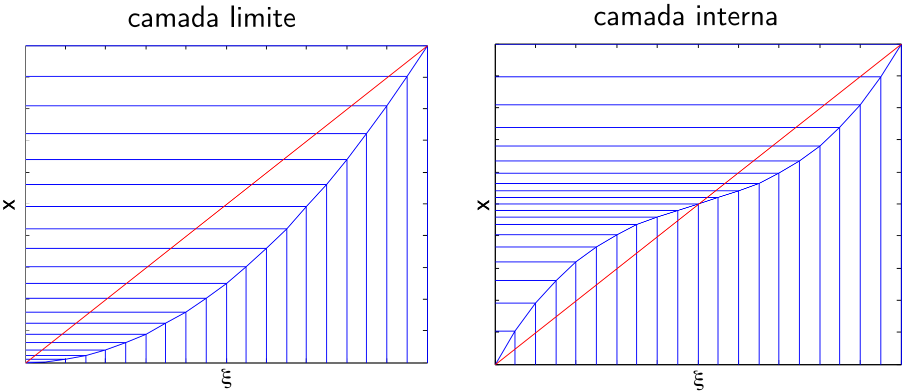
escoamentos com camada limite



stretching

Stretching 1D

Stretching simples



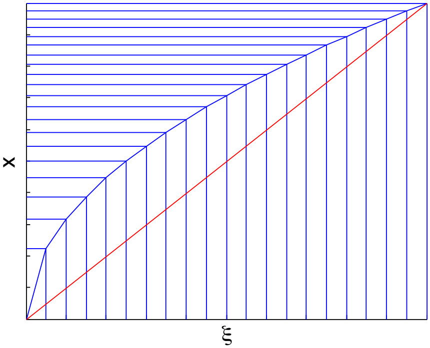
$$x = x(\xi)$$

Stretching simples: camada limite

Camada limite de "um lado": $x = \color{red}{L}\,\xi^n$

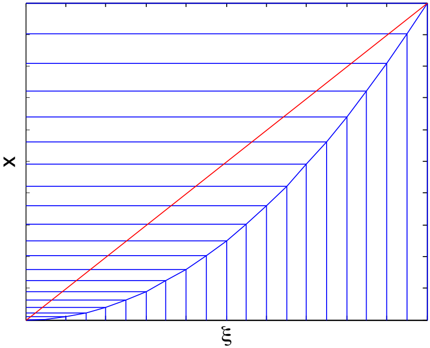
- L: reta

$n < 1$



$x = 2\sqrt{\xi}$

$n > 1$



$x = 2\xi^2$

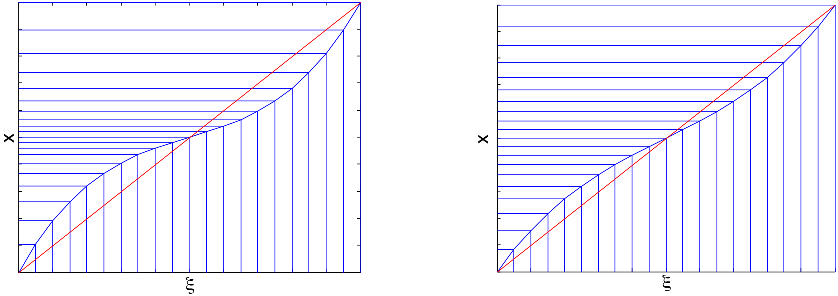
Stretching simples: camada interna

Função de Controle

$$x = L\xi + A(x_c - L\xi)(1-\xi)\xi \quad \text{com} \quad \xi \in [0,1] \tag{1}$$

- L: reta
- $x_c - L\xi$: mudança de sinal em x_c
- A: *força* de concentração de pontos
  - atração quando $A > 0$ e repulsão quando $A < 0$

$A = 2.5$ $\qquad\qquad$ $A = 1.5$



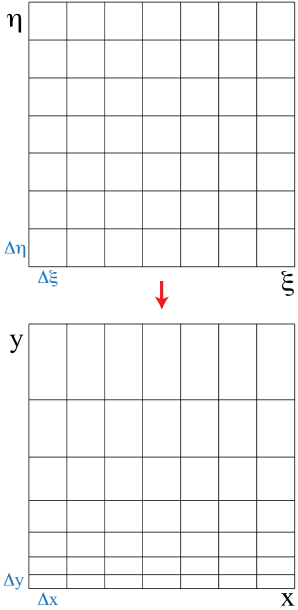
Stretching 2D

Considere a transformação:

$x = \xi$
$y = (e^{\eta} - 1)/k$ com $k = e - 1$

e a sua inversa:

$\xi = x$
$\eta = \log(ky + 1)$



Stretching 2D

Considere a transformação:

$x = \xi$
$y = (e^{\eta} - 1)/k$ com $k = e - 1$

e a sua inversa:

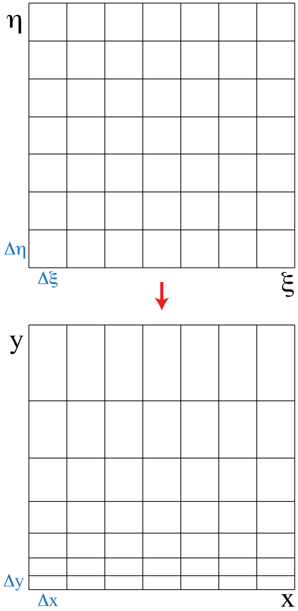
$\xi = x$
$\eta = \log(ky + 1)$

Relação dos incrementos Δy e $\Delta\eta$:

$$\frac{dy}{d\eta} = \frac{e^{\eta}}{k}$$

Logo,

$$dy = k^{-1} e^{\eta}\, d\eta \;\Rightarrow\; \Delta y = k^{-1} e^{\eta}\, \Delta\eta$$



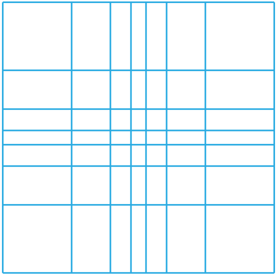
Stretching 2D

Exercício 1

Considere um campo velocidade $\mathbf{v} = (u, v)$. Usando a transformação anterior, escreva a Equação da Continuidade $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ no domínio computacional.

Exercício 2

Implemente em MATLAB o stretching em um grid 2D usando a função de controle (1).



Geração de Grid Elíptico com Função de Controle

Equação de Poisson com as funções de controle

$$\Delta\xi = P(\xi, \eta) \quad \text{e} \quad \Delta\eta = Q(\xi, \eta)$$

Geração de Grid Elíptico com Função de Controle

Equação de Poisson com as funções de controle

$$\Delta\xi = P(\xi,\eta) \quad \text{e} \quad \Delta\eta = Q(\xi,\eta)$$

Método TTM (Thompson, Thames e Mastin – 1974)

$$g_{22}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} - 2g_{12}\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\partial\eta} + g_{11}\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2} = g\left(P\frac{\partial x}{\partial\xi} + Q\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)$$

$$g_{22}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} - 2g_{12}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta} + g_{11}\frac{\partial^2 y}{\partial\eta^2} = g\left(P\frac{\partial y}{\partial\xi} + Q\frac{\partial y}{\partial\eta}\right) ,$$

onde $g = \det(g_{ij})$.

Funções de Controle no TTM

$$P(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\xi-\xi_i}{|\xi-\xi_i|} e^{-c_i|\xi-\xi_i|} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\xi-\xi_j}{|\xi-\xi_j|} e^{-d_j\sqrt{(\xi-\xi_j)^2+(\eta-\eta_j)^2}}$$

$$Q(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\eta-\eta_i}{|\eta-\eta_i|} e^{-c_i|\eta-\eta_i|} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\eta-\eta_j}{|\eta-\eta_j|} e^{-d_j\sqrt{(\xi-\xi_j)^2+(\eta-\eta_j)^2}}$$

Funções de Controle no TTM

$$P(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\xi - \xi_i}{|\xi - \xi_i|} e^{-c_i|\xi-\xi_i|} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\xi - \xi_j}{|\xi - \xi_j|} e^{-d_j\sqrt{(\xi-\xi_j)^2+(\eta-\eta_j)^2}}$$

$$Q(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\eta - \eta_i}{|\eta - \eta_i|} e^{-c_i|\eta-\eta_i|} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\eta - \eta_j}{|\eta - \eta_j|} e^{-d_j\sqrt{(\xi-\xi_j)^2+(\eta-\eta_j)^2}}$$

- a_i, b_j, c_i e d_j são parâmetros

Funções de Controle no TTM

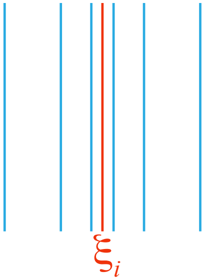
$$P(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\xi-\xi_i}{|\xi-\xi_i|} e^{-c_i|\xi-\xi_i|} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\xi-\xi_j}{|\xi-\xi_j|} e^{-d_j\sqrt{(\xi-\xi_j)^2+(\eta-\eta_j)^2}}$$

$$Q(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\eta-\eta_i}{|\eta-\eta_i|} e^{-c_i|\eta-\eta_i|} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\eta-\eta_j}{|\eta-\eta_j|} e^{-d_j\sqrt{(\xi-\xi_j)^2+(\eta-\eta_j)^2}}$$

- a_i, b_j, c_i e d_j são parâmetros
- $\mathrm{sgn}(\xi-\xi_i) = (\xi-\xi_i)(|\xi-\xi_i|)^{-1} = \pm 1$ e $\mathrm{sgn}(\eta-\eta_i)$
  - garante que a concentração atue em ambos lados das linhas ξ_i e η_i

Funções de Controle no TTM

$$P(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\xi-\xi_i}{|\xi-\xi_i|} e^{-c_i|\xi-\xi_i|} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\xi-\xi_j}{|\xi-\xi_j|} e^{-d_j\sqrt{(\xi-\xi_j)^2+(\eta-\eta_j)^2}}$$



- atração das linhas do grid para a linha $\xi = \xi_i$
- a_i determina a *força* de concentração
  - atração quando $a_i > 0$ ou repulsão quando $a_i < 0$
- c_i determina o *alcance* de atração

Funções de Controle no TTM

$$P(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{M} a_i \frac{\xi - \xi_i}{|\xi - \xi_i|} e^{-c_i|\xi - \xi_i|} + \sum_{j=1}^{N} b_j \frac{\xi - \xi_j}{|\xi - \xi_j|} e^{-d_j\sqrt{(\xi-\xi_j)^2 + (\eta-\eta_j)^2}}$$

- atração das linhas ξ_j para o ponto (ξ_j, η_j)
- b_j determina a *força* de concentração
  - atração quando $b_j > 0$ ou repulsão quando $b_j < 0$
- d_j determina o *alcance* de atração