Chapitre XII : Algorithmique

I - Recherche dans un tableau

Dans cette partie, j'utiliserai deux langages de programmation : python et javascript. Cela ne devrait pas créer de difficulté supplémentaire car il s'agit de montrer que les algorithmes ne dépendent pas du langage.

a) Recherche séquentielle

On dispose d'un tableau (une liste en python) et on souhaite savoir si la valeur x appartient ou non à ce tableau et donner son index dans le cas où elle serait présente.

La première méthode consiste à parcourir le tableau par balayage : c'est la méthode séquentielle.

On crée une fonction recherche. En python, le tableau sera du type liste, alors qu'en javascript il sera du type Array.

En python

```python
def recherche(liste, x):
    i=0
    while i<len(liste) and x!=liste[i]:
      i=i+1
    if i<len(liste):
      return i
```

En Javascript

```javascript
function recherche(tab, x){
    let i=0
    while (i<tab.length && x!=tab[i]){
      i=i+1
    }
    if (i<tab.length){
      return i
    }  else {
      return -1
    }
```

Remarque : si la valeur n'est pas présente dans la liste, **la fonction ne renvoie rien en python**. Le résultat affiché sera alors la valeur `None`. On pourrait en faire de même en javascript, mais on a choisi dans ce cas de renvoyer la valeur -1 (ce que renvoie `tab.indexOf(x)` en javascript).
On ne peut pas renvoyer -1 en python car cela signifierait `len(liste)-1`.

On peut s'intéresser au coût de cet algorithme, c'est-à-dire au nombre de comparaisons effectuées (toujours prendre en compte le pire des cas).
Si l'élément cherché `x` n'est pas dans le tableau, alors il faut parcourir les n éléments du tableau. Le coût de cet algorithme est donc linéaire c'est-à-dire de l'ordre de n.

En python et en javascript, il est possible d'utiliser une boucle pour (mais cela ne change pas le coût de l'algorithme). Compléter les programme ci-dessous :

En python

```python
def recherche(liste, x):
```

En Javascript

```javascript
function recherche(tab, x){
```

La parcours séquentiel d'un tableau sert aussi bien pour rechercher un élément que pour rechercher une valeur maximale (ou minimale), calculer la somme des termes, ...

b) Recherche dichotomique dans un tableau trié

Le précédent algorithme fonctionne avec des tableaux quelconques. Lorsque les **données sont triées**, nous allons trouver un algorithme plus efficace.
Le principe est le même que celui consistant à deviner un nombre pris au hasard dans un intervalle par un partenaire lorsque celui-ci répond par « plus petit » ou « plus grand » en cas d'échec.
Pour être certain de trouver ce nombre dans un temps relativement court, il est judicieux de proposer la moyenne des bornes de l'intervalle.

Nous allons adapter cette méthode à la recherche d'une valeur `x` dans un tableau (nommé `liste` en python et `tab` en javascript). Nous le ferons avec des tableaux d'entiers, mais cela peut se faire avec n'importe quelles données qui admettent une relation d'ordre.

Le principe de l'algorithme :

La recherche se fera en plusieurs étapes successives, sans que nous sachions au départ combien d'étapes seraient nécessaires. Nous allons donc utiliser une boucle `Tant que`.

- Avant chaque étape, on saura que si `x` est dans le tableau, alors il sera entre deux index nommés `g` et `d` (pour gauche et droite).
- À chaque étape, on prendra l'index central (moyenne de g et d dont on prendra la partie entière car un index ne peut être un flottant) et on vérifiera si `x` est au-dessus ou en-dessous de cette valeur d'index central.
- À la fin de l'étape, si on ne trouve pas `x`, on actualise les valeurs de `g` et `d`. Le nombre d'index possibles pouvant contenir la valeur x est alors divisé par 2 par rapport à ce qu'il était au début.

Voici la traduction de cet algorithme en python et en javascript :

En python

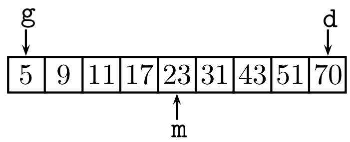
```python
def rechercheDicho(liste, x):
    g=0
    d=len(liste)-1
    while g<=d:
      m=(g+d)//2
      if x==liste[m]:
        return m
      elif x<liste[m]:
        d=m-1
      else :
        g=m+1
```

En Javascript

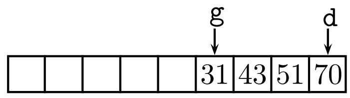
```javascript
function rechercheDicho(tab, x){
    let g=0
    let d=tab.length-1
    while (g<=d){
      let m=Math.floor((g+d)/2)
      if (x==tab[m]){
        return m
      } else if (x<tab[m]){
        d=m-1
      } else {
        g=m+1
      }
    }
    return -1
}
```

Appliquons cet algorithme à un exemple.
On cherche l'index de la valeur 31 dans le tableau [5, 9, 11, 17, 23, 31, 43, 51, 70].

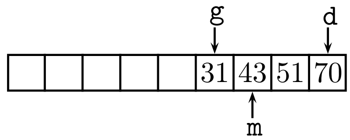
- Étape 1 : `g=0`, `d=8`, ainsi `g<=d` vaut `True` et on rentre dans la boucle.
  `m=4` comme ci-contre :



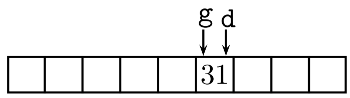
  Comme `x>liste[m]`, `g` devient `m+1` et la recherche se limite à :



- Étape 2 : `g=5`, `d=8`, ainsi `g<=d` vaut `True`
  `m=6` comme ci-contre :



  Comme `x<liste[m]`, `d` devient `m-1` :



- Étape 3 : `g=5`, `d=5`, ainsi `g<=d` vaut `True`

  `m=5` et `x==liste[m]` vaut True. Donc la fonction renvoie la valeur 5.

3 étapes ont été nécessaires pour trouver la valeur `x` alors qu'il en aurait fallu 6 avec l'algorithme de recherche par balayage.

Remarque : Cet algorithme n'a d'intérêt que si `x` peut se trouver dans ce tableau ordonnée, à savoir si `x` se situe entre `liste[0]` et `liste[-1]`. Cela peut être vérifié au début de la fonction par une instruction si ou une instruction `assert` en python. En javascript, il est aussi possible de lever des exceptions pour gérer les paramètres de fonctions.

Exemple : Appliquer l'algorithme à la liste [2, 3, 8, 10, 15, 19, 21, 23, 25, 29, 32, 35] et à la valeur x=22.
Donner les étapes successives et les valeurs prises par les différentes variables (comme dans l'exemple). Faire les schémas comme ceux de droite permet de ne pas oublier certains tests.
Que renvoie la fonction rechercheDicho dans ce cas ?

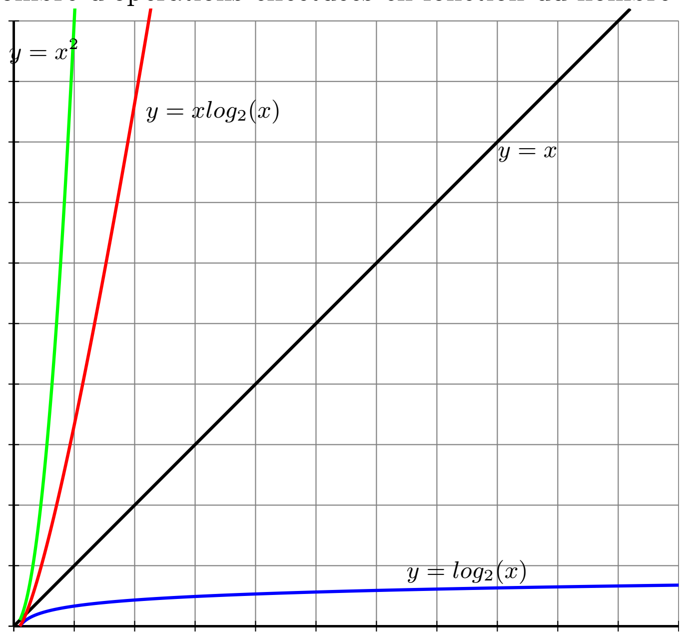
c) Coût de l'algorithme de recherche dichotomique

On s'intéresse de nouveau au nombre d'opérations (nombre de passages dans la boucle) dans le pire des cas. Cela se produit quand la valeur n'est pas présente dans le tableau.

Si nous partons d'un tableau de 100 valeurs, à l'issue du premier passage dans la boucle, la recherche ne s'effectue plus que sur 49 ou 50 valeurs, prenons 50 dans la pire des cas. À l'issue du deuxième passage, cela ne s'effectue plus que dans un tableau de 25 valeurs, puis de 12 valeurs, de 6, de 3, et enfin d'une seule valeur.
Ainsi, on fera au maximum 7 passages dans la boucle. Ce nombre 7 est le plus petit entier k vérifiant $2^k > 100$.
Combien de passages au maximum devra-t-on faire pour une liste de 3 millions de valeurs ?
On cherche le plus petit entier k tel que $2^k > 3\ 000\ 000$.
En cherchant pas à pas la valeur de k, on trouve $k = 22$. Donc même avec une liste de 3 millions d'éléments, 22 tests suffiront à trouver l'index de la valeur cherchée si elle est présente et affirmer qu'elle n'appartient pas au tableau dans le cas contraire.

Dans le cas général d'un tableau de taille n, le nombre maximal d'opérations nécessaires pour l'exécution de la fonction `rechercheDicho` est le plus petit entier k tel que $2^k > n$.
En mathématiques, l'équation $2^k = n$ d'inconnue k a pour solution le nombre noté $\log_2(n)$. Donc pour un nombre n de valeurs, le coût de l'algorithme de dichotomie est de l'ordre de $\log_2(n)$.

Pour comparer l'efficacité des différents algorithmes vus depuis le début de l'année, voici différentes courbes représentant en ordonnée y le nombre d'opérations effectuées en fonction du nombre de valeurs en abscisse x.



En conclusion, dans le cas d'une liste triée de n éléments, la recherche dichotomique (d'un coût de l'ordre de $\log_2(n)$) est beaucoup plus efficace qu'une recherche séquentielle (linéaire, c'est-à-dire de l'ordre de n).
Mais devoir trier les données n'est pas judicieux car le coût d'un tel algorithme est de l'ordre de $n \log_2(n)$ avec un algorithme efficace (comme celui de la fonction `sort` de python) voire de l'ordre de n^2 avec un tri par sélection ou insertion (dans le pire des cas pour ce dernier).

d) Validité de l'algorithme de recherche dichotomique

Nous devons vérifier les deux conditions :

- **la terminaison** : nous allons utiliser un **variant** de boucle, c'est-à-dire une expression (le plus souvent une variable) dont la valeur prend à un moment une valeur satisfaisant la condition d'arrêt de la boucle.

  Ici, prenons la valeur $d - g$ comme variant de boucle. On notera $d_k - g_k$ la valeur de cet écart au bout de k étapes (au départ, on a ainsi $d_0 = 0$ et g_0= `len(liste)-1`).

  La boucle s'arrête dès que $d_k - g_k < 0$. Il suffit donc de montrer que $d_k - g_k$ est une valeur entière strictement décroissante.

  À l'instant k, on calcule m_k qui est la partie entière de $\dfrac{d_k + g_k}{2}$.

  - si x est égal à la valeur d'index m_k, alors on sort de la boucle et l'algorithme se termine ;
  - si x est inférieur à la valeur d'index m_k, alors d_{k+1} vaut $m_k - 1$ et $g_{k+1} = g_k$. Comme $m_k - 1 < d_k$, on obtient $d_{k+1} - g_{k+1} < d_k - g_k$.

  - si x est supérieur à la valeur d'index m_k, alors g_{k+1} vaut $m_k + 1$ et $d_{k+1} = d_k$. Comme $m_k \geqslant g_k$, on obtient $g_{k+1} > g_k$ et $d_{k+1} - g_{k+1} < d_k - g_k$.

  Donc l'algorithme se terminera dans tous les cas de figure.

- **La correction** : il faut déterminer un invariant de boucle.

  À chaque étape $0 \leqslant g$; d <=`len(liste)-1` et x ne peut se trouver qu'entre les index g et d.

  - Au départ, on s'assure (`assert` placé au début du programme) que x est bien entre les valeurs extrêmes du tableau : `liste[0]`$\leqslant x \leqslant$`liste[len(liste)-1]`. Mais sans cette condition, la phrase x ne peut être qu'entre les index 0 et `len(liste)-1` reste correcte car la recherche se fait sur tout le tableau.
  - Si on suppose que `liste[g]`$\leqslant x \leqslant$`liste[d]` à un certain instant k, alors on peut montrer que ce sera vrai à l'instant suivant $(k + 1)$. D'après les notations précédentes :
    - si x est la valeur d'indice m_k, alors on sort de la boucle et x est bien entre les index $g_{k+1} = g_k$ et $d_{k+1} = d_k$.
    - si x est inférieur à la valeur d'index m_k, alors deux cas de figure sont possibles :
      - si $g_k = d_k = m_k$, alors d_{k+1} vaudra $g_k - 1$ et g_{k+1} restera g_k. Dans ce cas, on sort de la boucle et on renvoie la valeur None : c'est le cas où x n'est pas présent (ce qui est bien le cas car il ne restait plus qu'une valeur possible).
      - Sinon, la plus grande valeur que pourrait prendre x est la valeur d'index $m_k - 1$, donc x ne pourra se trouver qu'entre les index $g_{k+1} = g_k$ et $d_{k+1} = m_k - 1$.
    - si x est supérieur à la valeur d'index m_k, alors on obtient le même type de raisonnement que précédemment (soit $g_k = d_k = m_k$ et on sort de la boucle, soit $g_{k+1} = m_k + 1$ et x se trouvera entre g_{k+1} et d_{k+1}).

  Nous avons donc bien un invariant de boucle.

Exercice : Un algorithme de recherche dichotomique met un temps t pour effectuer cette recherche dans un tableau de taille n et effectue k comparaisons.

1. Combien de comparaisons effectuera-t-il pour rechercher dans un tableau de $2n$ valeurs ?
2. Combien de valeurs contiendra un tableau pour lequel l'algorithme mettrait un temps égal à $2t$ pour effectuer une recherche ?
3. Si on met 15 ms pour rechercher dans un tableau de 1000 valeurs, combien en faudra-t-il pour un tableau d'un million de valeurs.

II - Algorithme des k plus proches voisins

a) Trouver un jeu de données

Sur le site http://www.allrugby.com, on a relevé la taille et le poids des différents joueurs du Top14 ainsi que leur poste sur le terrain au cours de la saison 2019-2020.

1. **Travail à faire**

   Concevoir un programme en python qui :

   - chargera le fichier JoueursTop14.csv (ce fichier est encodé en UTF-8 avec pour séparateur le point-virgule) - le faire en utilisant les dictionnaires (Chapitre VII, partie II - c)) ;
   - extraira les données des joueurs de l'équipe de Toulouse (vous pouvez faire un autre choix...) - cela peut se faire rapidement en compréhension à l'aide du descripteur `'Equipe'` ;
   - construira un repère où chaque point représentera un joueur et sera positionné selon les critères de taille (en abscisse) et de poids (en ordonnée). Pour placer des points, on peut s'inspirer de ce qui a été fait dans l'activité du chapitre II (le corrigé est dans moodle - au format html). Pour différencier les différents postes, on peut utiliser un dictionnaire pour la couleur et le type de marker :

```
dictCouleurs = {"Avant":"tab:blue", "2ème ligne":"tab:red", "3ème ligne":"tab:green",
"Demi":"tab:purple", "Trois-Quarts":"tab:brown", "Arrière":"tab:orange"}
dictMarkers = {"Avant":"x", "2ème ligne":"+", "3ème ligne":"1", "Demi":".",
"Trois-Quarts":"*", "Arrière":"^"}
```

2. **Synthèse du travail**

   (a) Quelques compléments

   On propose de repartir d'un fichier correction contenant trois fonctions :

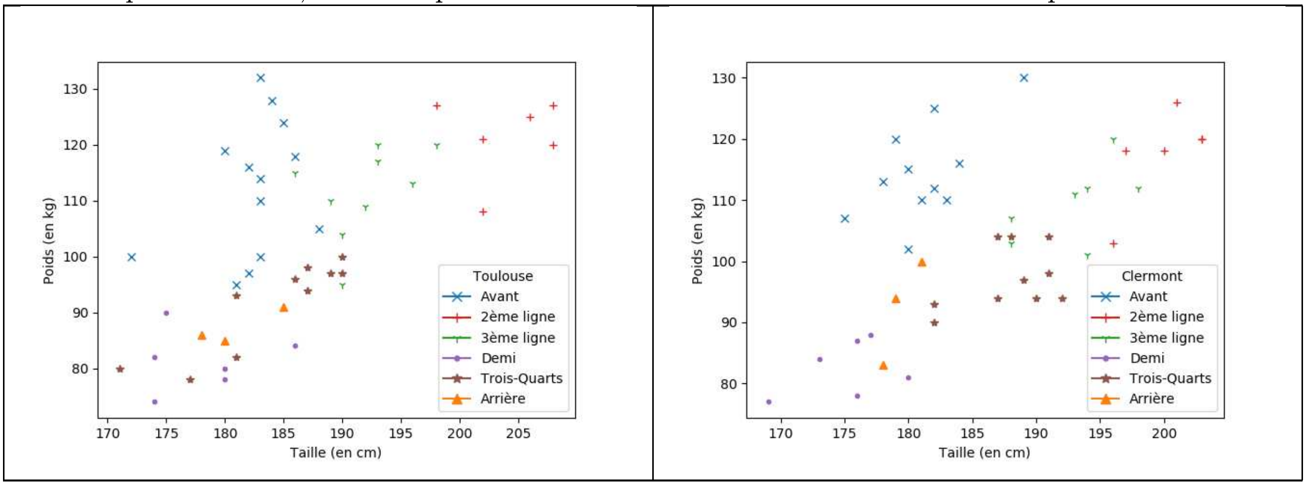
   - `extractionDonnees` charge le fichier csv et récupère les descripteurs (sous forme d'une liste) et l'ensemble des données de chaque joueur du top14 (sous forme d'une liste de listes) ;
   - `extraireEquipe` qui ne sert qu'à extraire les données d'une équipe ;
   - `representation` qui construit le repère. Chaque point représente un joueur selon ses caractéristiques de taille (en abscisse) et de poids (en ordonnées).

   Les points sont d'une forme et d'une couleur différentes suivant le poste du joueur. On a choisi 6 catégories : les avants, les deuxièmes ligne, les troisièmes ligne, les demis (mêlée et ouverture), les trois-quarts et les arrières.

   (b) Objectif

   Quelle que soit l'équipe choisie (y compris si on prend tous les joueurs), on se rend compte que la morphologie du joueur peut conditionner son poste sur le terrain.

   Par exemple ci-dessous, voici ce que cela donne avec les deux finalistes du championnat 2018-2019 :



   (c) Quelques tests

   Pour chacune de ces deux équipes, quel type de poste peut occuper un joueur :

   - mesurant 1,95 m et pesant 112 kg ?
   - mesurant 1,75 m et pesant 91 kg ?
   - mesurant 1,80 m et pesant 90 kg ?

b) Algorithme des k plus proches voisins (algorithme knn)

Définition :
L'algorithme des k plus proches voisins (ou k-nearest neighbor) est une méthode d'apprentissage supervisé dédié à la classification de données.
On dispose d'une base de données d'apprentissage. À l'aide des similarités avec les exemples de cette base, l'algorithme doit classer les exemples non étiquetés.

Dans notre contexte, on souhaite déterminer quel type de poste peut prendre un joueur connaissant sa taille et son poids.

1. **Le principe de l'algorithme en langage courant**

   On dispose d'un **ensemble de données**, d'une **fonction distance** et d'un **entier k**.
   Chaque donnée contient deux types d'informations :

   - deux données numériques destinées à la comparaison de deux éléments de l'ensemble ;
   - un troisième critère destiné à la classification d'un élément.

   (a) Dans notre exemple des joueurs de rugby, que sont ces types d'informations ?

(b) Fonction distance

Plusieurs fonctions distances existent dans un repère orthonormé du plan mais nous allons utiliser la distance euclidienne (vue en cours de mathématiques en 2nde).

> Formule de la distance
> Dans un repère orthonormé du plan, on définit les points $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$, alors la longueur vaut $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Construire cette fonction dans le langage python.

(c) Le principe de l'algorithme

Un ensemble de n données est fourni, chacune de ces données contient deux données numériques $(x_i\,;\,y_i)$ et une donnée supplémentaire correspondant à une classe c_i.
Un nouvel élément N étant donné avec ses valeurs numériques $(x_N\,;\,y_N)$, on s'intéresse à la classe c_N inconnue à laquelle il pourrait appartenir. Voici les différentes étapes permettant d'apporter une réponse :

- Parcourir l'ensemble des n données et calculer les distances entre $x_i\,;\,y_i)$ et $(x_N\,;\,y_N)$ pour chaque i ;
- Extraire de la liste des données les k plus proches éléments (correspondant aux plus petites distances précédentes). On dispose alors seulement de k éléments de la liste des données.
- Dans ces k éléments, compter le nombre d'occurrences de chaque classe présente.
- Attribuer au nouvel élément N la classe la plus fréquente.

Construire dans un langage courant chacune des étapes suivantes.

(d) Ouvrir le fichier csv avec LibreOffice Calc et l'enregistrer au format ods.

- Ajouter une colonne pour calculer la distance avec la taille et le poids d'un nouveau joueur, les colonnes supplémentaires auront cet aspect :

H	I	J
distance	taille joueur	poids joueur
24,083198	185	98

  La formule de la distance saisie au tableur en H2 aura cet aspect :
  =RACINE((F2-I2)^2+(G2-J2)^2)
  Cependant il reste un problème quand on la recopie vers le bas. Corriger cette erreur.
- Filtrer les données pour ne plus voir apparaître que celle dont l'équipe nous intéresse.
- Trier enfin les données suivant la distance.

2. **Traduction en python**

(a) Construire une fonction distance prenant 4 arguments.

(b) Construire une fonction classification prenant comme arguments k, data (qui correspondra aux données extraites du fichier csv), taille et poids (ces deux derniers arguments étant les valeurs d'un nouveau joueur).

- Dans cette fonction, il faudra extraire les k joueurs dont la taille et le poids sont les plus proches de celles du nouveau joueur. Décrire dans un premier temps le processus permettant d'extraire ces données.
- Déterminer enfin le type de poste le plus courant dans cette liste de k joueurs. Le nouveau joueur sera alors considéré comme de ce type de poste.

c) Optimisation de l'algorithme

La démarche consistant à utiliser le tableur pour extraire les k données les plus proches incite à utiliser le tri de données en prenant la distance comme critère de tri. Cependant ce n'est pas optimal (le coût est dans ce cas de l'ordre de $n\log_2(n)$).

Il est cependant possible de concevoir un algorithme d'un coût de l'ordre de $k \times n$.
Pour cela, il convient d'effectuer la sélection des k plus proches voisins pendant le parcours de la liste des données. Dans la fonction `classificationEfficace`, on parcourt la liste data contenant n éléments. L'extraction des données se fait alors au fur et à mesure. Dans le cas où on positionne un nouvel élément dans l'extraction, on parcourt au maximum toute la liste extraction qui contient k éléments pour le positionner au bon endroit (du plus proche au plus éloigné).

La fonction `rechercheTypePoste` revient juste à parcourir la liste des k valeurs et à identifier le type de poste le plus courant.