Dernier exercice dans le même état d'esprit que ceux qui étaient à rendre

Une entreprise produit et vend des courgettes.
Elle a la capacité de produire entre 0 et 16 tonnes.
On note $C(x)$ le coût de production, exprimé en euros, de x tonnes de courgettes. La fonction C est donc définie sur $[0 ; 16]$ et elle est donnée par : $C(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - 650$.

Chaque tonne de courgettes est vendue 150 euros.
On rappelle que le bénéfice correspond à la différence entre la recette et le coût de production.

1. Vérifier que le bénéfice $B(x)$ s'exprime par :

   $B(x) = -x^3 + 15x^2 + 72x + 650$.

2. On admet que la fonction B est dérivable sur $[0 ; 16]$ et on note B' sa dérivée.

   Déterminer $B'(x)$.

3. Montrer que $B'(x) = -3(x + 2)(x - 12)$ pour x appartenant à $[0 ; 16]$.

4. À l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 16]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction B sur $[0 ; 16]$.

5. Quelle quantité de courgettes l'entreprise doit-elle produire et vendre pour avoir un bénéfice maximal ? Quel est alors ce bénéfice ?

Correction des exercices

1. Chaque tonne étant vendue 150 €, la recette réalisée pour la vente de x tonnes vaut $150x$.

   $$\begin{aligned} B(x) &= \text{Recettes} - \text{Coûts de production} \\ &= 150x - \left(x^3 - 15x^2 + 78x - 650\right) = 150x - x^3 + 15x^2 - 78x + 650 \\ &= -x^3 + 15x^2 + 72x + 650. \end{aligned}$$

2. En utilisant les formules de dérivation, on obtient :

   $B'(x) = -3x^2 + 15 \times 2x + 72 \times 1 + 0 = -3x^2 + 30x + 72.$

3. Pour cette question, il suffit de développer l'expression proposée. Cela se fait en 2 étapes en terminant par la distribution du facteur -3.

   $$\begin{aligned} -3(x+2)(x-12) &= -3(x^2 - 12x + 2x - 24) \\ &= -3x^2 + 36x - 6x + 72 = -3x^2 + 30x + 72 \end{aligned}$$

   Donc $B'(x) = -3(x+2)(x-12)$.

4. On résout tout d'abord $x + 2 = 0$ qui donne $x = -2$ puis $x - 12 = 0$ qui donne $x = 12$.

   On construit dans un premier temps le tableau de signes du produit sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		12		$+\infty$
signe de -3		$-$		$-$		$-$	
signe de $x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On en déduit alors le tableau de variation de B sur l'intervalle $[0\,;\,16]$:

x	0				12
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B	650	↗	1946	↘	1546

   On n'oublie pas de calculer les images : $B(0) = 650$; $B(12) = 1946$ et $B(16) = 1546$.

5. D'après les variations de B, le maximum est atteint pour $x = 12$.

   Donc on obtient un bénéfice maximal lorsqu'on produit et vend 12 tonnes de courgettes. Ce bénéfice maximal est alors de 1946 €.