Dernier exercice dans le même état d'esprit que ceux qui étaient à rendre

Une entreprise produit et vend des courgettes.

Elle a la capacité de produire entre 0 et 16 tonnes.

On note C(x) le coût de production, exprimé en euros, de x tonnes de courgettes. La fonction C est donc définie sur [0; 16] et elle est donnée par : $C(x) = x^3 - 15x^2 + 78x - 650$.

Chaque tonne de courgettes est vendue 150 euros.

On rappelle que le bénéfice correspond à la différence entre la recette et le coût de production.

1. Vérifier que le bénéfice B(x) s'exprime par :

$$B(x) = -x^3 + 15x^2 + 72x + 650.$$

2. On admet que la fonction B est dérivable sur [0; 16] et on note B' sa dérivée.

Déterminer B'(x).

- 3. Montrer que B'(x) = -3(x+2)(x-12) pour x appartenant à [0; 16].
- 4. À l'aide d'un tableau de signes, étudier le signe de B'(x) sur l'intervalle [0; 16] et en déduire le tableau de variation de la fonction B sur [0; 16].
- 5. Quelle quantité de courgettes l'entreprise doit-elle produire et vendre pour avoir un bénéfice maximal? Quel est alors ce bénéfice?

Correction des exercices

1. Chaque tonne étant vendue $150 \in$, la recette réalisée pour la vente de x tonnes vaut 150x.

$$B(x)$$
 = Recettes – Coûts de production
= $150x - (x^3 - 15x^2 + 78x - 650) = 150x - x^3 + 15x^2 - 78x + 650$
= $-x^3 + 15x^2 + 72x + 650$.

2. En utilisant les formules de dérivation, on obtient :

$$B'(x) = -3x^2 + 15 \times 2x + 72 \times 1 + 0 = -3x^2 + 30x + 72.$$

3. Pour cette question, il suffit de développer l'expression proposée. Cela se fait en 2 étapes en terminant par la distribution du facteur -3.

$$-3(x+2)(x-12) = -3(x^2 - 12x + 2x - 24)$$
$$= -3x^2 + 36x - 6x + 72 = -3x^2 + 30x + 72$$

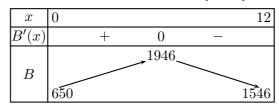
Donc
$$B'(x) = -3(x+2)(x-12)$$
.

4. On résout tout d'abord x + 2 = 0 qui donne x = -2 puis x - 12 = 0 qui donne x = 12.

On construit dans un premier temps le tableau de signes du produit sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	-2		12	$+\infty$
signe de -3			_		_
signe de $x+2$	_	0	+		+
signe de $x - 12$	_		_	•	+
signe du produit	_	0	+	•	_

On en déduit alors le tableau de variation de B sur l'intervalle [0; 16]:



On n'oublie pas de calculer les images : B(0) = 650; B(12) = 1946 et B(16) = 1546.

5. D'après les variations de B, le maximum est atteint pour x = 12.

Donc on obtient un bénéfice maximal lorsqu'on produit et vend 12 tonnes de courgettes. Ce bénéfice maximal est alors de $1946 \in$.